Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

João José de Barros Neto

Desvendando o número e

Teresina - 2020

PROFMAT

João José de Barros Neto

Dissertação de Mestrado:

Desvendando o Número e

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

Teresina - 2020

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Serviço de Processamento Técnico
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

B277d Barros Neto, João José de.
Desvendando o Número *e* / João José de Barros Neto – Teresina: 2020.
53 f. il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Número *e*. 2. Números Irracionais. 3. Números Reais. I. Titulo.

CDD 512

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

João José de Barros Neto

Desvendando o Número e

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 30/11/2020.

BANCA EXAMINADORA

Roger Peres de Moura (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

Gleison do Nascimento Santos

Universidade Federal do Piauí

Mykael de Araújo Cardoso

Universidade Federal do Piauí

Teresina - 2020

Dedico esta dissertação à minha família.

Agradecimentos

A forma como o Universo se organiza para se concretizar aquilo que tem muita força, não deixa dúvidas quanto à existência de um ser supremo. Simplesmente, existe uma mão que guia, orienta, levanta, organiza tudo e todos. É impossível de se entender como o caminho foi traçado, problemas inimagináveis com soluções que apareceram de forma muito gentil, nortearam esse mestrado. Olho para isso e tenho sentimento de gratidão muito grande a Deus, sinto que recebi um presente divino. Não é "só" pelo título de mestre, mas a forma como essa trajetória foi percorrida me fez refletir sobre muitas coisas e certamente evolui como pessoa. A Universidade Federal do Piauí é motivo de orgulho dos que sabem da importância da educação no convívio social, agradeço a este lugar, onde me sinto tão bem. Agradeço aos colegas de curso, sempre muito solícitos e companheiros. Os professores e coordenadores tiveram uma importância especial, várias vezes durante o curso tive amparo humano enorme, sentimento de gratidão por todos. Agradeço ao meu orientador Roger, a quem escolhi pelo sentimento de respeito que tenho por ele, mas na verdade era uma dessas organizações do Universo, que fez todo sentido quando passei por um desses momentos difíceis. Roger é uma pessoa daquelas que passam pela sua vida, faz uma grande coisa por você, e fica um sentimento eterno de gratidão. A minha família, essa entidade que tanto me emociona. Obrigado a cada um, vocês são a verdadeira razão.

"*Um homem é uma fração cujo numerador corresponde ao que ele é, enquanto o denominador é o que ele acredita ser*".

L. Tolstoi.

Resumo

Nosso trabalho tem como principal objetivo o estudo das caracterizações do número e e suas propriedades fundamentais. Exibimos três definições de e e mostramos as conexões entre elas. Com isso pudemos mostrar que e é irracional e também desenvolver um método de cálculo de suas casas decimais, sendo este último nosso principal resultado. A demonstração de que e é irracional tem como pré-requisito o estudo de potências de números irracionais, de aritmética básica e da função exponencial e^x. Já o método de cálculo das casas decimais de e exige conhecimento das propriedades fundamentais do conjunto dos números reais (desigualdades, valor absoluto, completude e noções de limite), o estudo de sequências monótonas, progressões e séries geométricas e da teoria de representação decimal de um número real qualquer.

Palavras-chave: Número e; Aproximações decimais de e; Potências de Números Reais; Exponenciais; Números Irracionais.

Abstract

Our main objective is to study the characterizations of the number e and its fundamental properties. We display three definitions of e and show the connections between them. With this we were able to show that it is irrational and also develop a method of calculating their decimal places, the latter being our main result. The proof of that e is irrational requires the study of powers of irrational numbers, basic arithmetic and exponential function as well. The method of calculating decimal places of e requires knowledge of the fundamental properties of the set of real numbers (inequalities, absolute value, completeness and limit notions), the study of monotones sequences, progressions and geometric series and the theory of decimal representation of any real number.

Key words : Number e; Decimal approximations of e; Real Number Powers; Exponentials; Irrational numbers.

Sumário

Introdução

Conhecer as propriedades básicas dos números, na nossa opinião, é peça fundamental na formação de um bom professor de matemática. Nesse sentido, nosso trabalho tem como alvo o estudo de um importante e pouco conhecido número: o número e.

Esse número surge a partir de estudo do logaritmo natural, o ln, inventado pelo matemático escocês John Napier (1.550 - 1671). Ao criar o logaritmo (ao publicar o livro "Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos", de 1.914) Napier deparou-se com rudimentos da constante que posteriormente ficou conhecida principalmente como número de Euler e designada pela letra e, em homenagem ao grande matemático Leonard Euler (1.707 - 1783). O número e é a base do logaritmo natural.

Na verdade foi Jacob Bernoulli quem primeiro descreveu essa constante ao calcular o limite $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Em nosso trabalho estudamos algumas propriedades do número e. Nosso principal objetivo é fazer todas as suas caracterizações possíveis, visto que nos textos que consultamos, ficamos com a impressão de estarem incompletos em relação a isso, como veremos no capítulo 4.

Além de tentar tornar o mais claro possível as propriedades de e, propomos um método de cálculo das casas decimais da aproximação decimal de e usando um método clássico muito eficiente em se tratando de números do tipo $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc (números algébricos), mas aparentemente pouco efetivo no caso de números como o e e o π, por exemplo.

É importante ressaltar a grande escassez de material bibliográfico dedicado a essa tarefa: a única referência encontrada por nós que faz menção a um método de obtenção da aproximação decimal de e por racionais foi a de A. Caminha [2], onde ele indica através de uma sequência de exercícios como encontrar a aproximação com cinco casas decimais, mas não responde por que aquelas são de fato as cinco primeiras casas decimais de e.

Nossa dissertação está dividida em quatro capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

O Capítulo 2 é dedicado ao embasamento teórico. Nele tratamos primeiramente (de modo resumido) do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, começando com os racionais; falamos do corpo $(\mathbb{R}, +, *)$ e suas propriedades fundamentais, exibimos a definição de ordem em

$\mathbb{R}$ e suas propriedades, intervalos, definimos supremo e ínfimo e enunciamos o axioma do completamento para concluir que $\mathbb{R}$ é completo. Depois, (Seção 2.2) definimos sequências, limites de sequências, P.A.'s, P.G.'s, sequências monótonas. Na seção seguinte, a 2.3, falamos sobre números algébricos e números transcendentes. Na Seção 2.4 discorremos sobre as séries geométricas. Na seção 2.5 mostramos que todo número real possui uma representação decimal infinita única. Finalizamos o capítulo com o estudo das potências de números reais com expoentes reais, onde ressaltamos o fato de que o domínio desse assunto requer conhecimento de sequências monótonas. O objetivo é definir a função a^x, com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, para no capítulo seguinte definir $e^x, x \in \mathbb{R}$.

No Capítulo 3 exibimos três definições de e e suas propriedades. Primeiro fizemos uma definição geométrica de e (a partir do logaritmo natural), o que nos possibilita então definir a função $e^x, x \in \mathbb{R}$. Em seguida, definimos a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e provamos o seguinte importante resultado:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1). \tag{1}$$

Em seguida provamos que

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{2}$$

para então concluir que

$$e = \exp(1) \tag{3}$$

ou seja,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{4}$$

O capítulo é finalizado com a prova de que

$$\exp(x) = e^x, \textit{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

No último capítulo usamos a caracterização (4) de e para provarmos que o mesmo é irracional e em seguida fizemos nosso principal resultado: não somente exibimos um método de encontrar as casas decimais de e, como também mostramos que essas são de fato suas casas decimais, sem usar de antemão o conhecimento das mesmas.

Esse trabalho teve como base um manuscrito do meu orientador (Professor Roger Peres de Moura); comunicação pessoal. Para elaboração do capítulo 2 foram consultadas as referências [5], [7], [6] e [1]. Para o capítulo 3 consultamos as referências [6], [5], [2] e [8]. Já para o capítulo 4, consultamos [1], [2],[3], [4], [5], [8] e [6].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Conjunto dos Números Reais

O conjunto dos números Racionais surge do fato do conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

não ser fechado em relação à divisão, ou seja, nem sempre a divisão entre dois números inteiros resulta num número inteiro.Os únicos números inteiros que têm inverso multiplicativo são o -1 e o 1.

A divisão de números inteiros quando o dividendo não é múltiplo do divisor, pode gerar frações do tipo $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, ...$, ou seja, $\frac{a}{b}$ com $b \neq 1$ e mdc(a, b) =1.

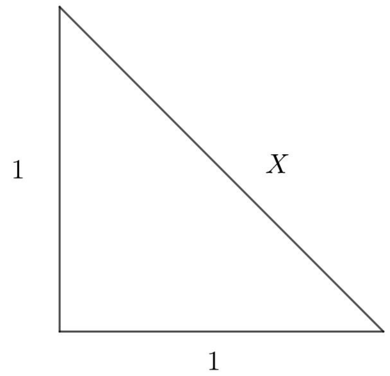
Falando de modo não rigoroso, o conjunto dos números racionais é obtido adicionando-se ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros todas as frações não inteiras.

Definição 1.1.1 *Dizemos que um número é racional quando ele pode ser representado na forma $\dfrac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$. Denotamos o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$. Assim*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ b \neq 0\}.$$

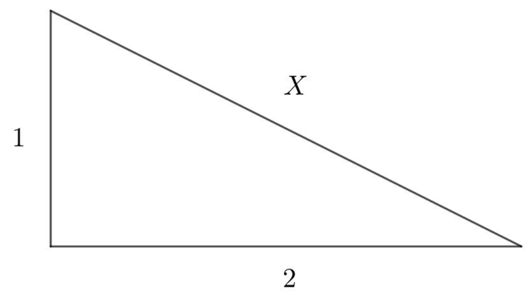
Estudando Geometria elementar descobre-se rapidamente que, por exemplo, existem triângulos retângulos com catetos naturais cujas hipotenusas não são racionais. Vejamos dois exemplo.

Exemplo 1 *Considere o triângulo retângulo cujos dois catetos têm medida 1.*



Pelo Teorema de Pitágoras temos que $x^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $x^2 = 2$. Mas esse $x \notin \mathbb{Q}$, pois, supondo x=$\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e mdc(a, b) =1, teríamos, $\frac{a^2}{b^2}$=2. Daí a^2=$2 \cdot b^2$, e consequentemente, a seria par, digamos a=$2 \cdot m$. Disto resultaria $2 \cdot b^2$=$4 \cdot m^2$, e portanto, b^2=$2 \cdot m^2$. Portanto, b também seria par, digamos b=$2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, mdc(a, b) ≥ 2, o que é um absurdo. Portanto esse número x não é racional.

Exemplo 2 *Considere o triângulo retângulo cujos dois catetos são, respectivamente 1 e 2.*



De fato, se x pudesse ser escrito como

$$x = \frac{a}{b}, \quad \text{com} \ \ \mathrm{mdc(a, b)} = 1$$

, então a^2=$5 \cdot b^2$. Consequentemente, a=$5 \cdot k$, para algum $K \in \mathbb{N}$. Daí, b^2=$5 \cdot k^2$, e daí, b também seria múltiplo de 5, o que é uma contradição.

Os exemplos acima mostram que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado para a radiciação.

Apesar de ser um conjunto infinito e entre quaisquer dois racionais existirem infinitos racionais, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é fechado para a operação de radiciação, e portanto, é um conjunto numérico incompleto.

Os números x entre dois racionais que não são racionais são chamados de números irracionais.

Não é nosso proposito nesse trabalho preencher as lacunas de $\mathbb{Q}$. Essa ampliação de $\mathbb{Q}$ que é completa é o que chamamos de conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.2 *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o conjunto numérico que satisfaz os seguintes axiomas.*

Axioma 1. *$\mathbb{R}$ é munido de uma operação binária de adição, denotada por +, ou seja, se $x, y \in \mathbb{R}$ então $x + y \in \mathbb{R}$. Além disso, a adição é*

1.1 Associativa

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

1.2 Comutativa

$$x + y = y + x, \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

1.3 Existe um elemento neutro

$$x + 0 = x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

1.4 Todo número real tem (um único) inverso aditivo, ou seja

$$\textit{Para todo } x \in \mathbb{R} \textit{ existe } y \in \mathbb{R} \textit{ tal que } x + y = 0.$$

Esse número y é denotado por -x.

Axioma 2. *$\mathbb{R}$ é munido de uma operação binária chamada de multiplicação, denotada por $(\cdot)$, ou seja, se $x, y \in \mathbb{R}$ então $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Tal operação é*

2.1 Associativa

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}.$$

2.2 Comutativa

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

2.3 Possui um elemento neutro (elemento identidade)

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

2.4 Todo número real não-nulo possui um inverso multiplicativo, ou seja

$$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists\, y \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } x \cdot y = 1.$$

Esse elemento y é denotado por x^{-1}.

2.5 Distributividade da multiplicação em relação à adição

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

É muito fácil provar que

$$x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

ou seja,

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Daí segue que,

$$x \cdot 0 = 0.$$

Vamos agora mostrar, de modo resumido, como o conjunto $\mathbb{R}$ é munido de uma ordem.

Axioma 3: *Existe um subconjunto P de $\mathbb{R}$ chamado conjunto dos números reais positivos, que satisfaz*

(P1) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

(P2) Dado $x \in \mathbb{R}$, ou $x \in P$ ou $x = 0$ ou $-x \in P$.

Daí segue que $\mathbb{R}$=$(-P) \bigcup \{0\} \bigcup P$, onde

$$-P = \{x \in \mathbb{R} / -x \in P\}.$$

Também tem-se

$$\text{se } x \in P \text{ e } y \in -P, \text{ então } x \cdot y \in -P.$$

Definição 1.1.3 *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que $x \leq y$ se, e somente se, $y - x \in P$ ou $x = y$.*

Proposição 1.1.4 *A relação $\leq$ é uma ordem sobre $\mathbb{R}$. Além disso, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ valem* *i.* $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$

ii. $x \leq y \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z.$

Definição 1.1.5 *Definição: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

(i) x é negativo quando -x é positivo.

(ii) $x < y$ significa $y - x \in P$. (y-x é positivo).

(iii)$x \geq y$ significa que $y \leq x$.

(iv) $x > y$ significa que $x - y \in P$.

Definição 1.1.6 *Seja $x \in \mathbb{R}$. O valor absoluto de x, indicado por $|x|$, é definido por*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Alternativamente tem-se

$$|x| = max\{x, -x\}.$$

Valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1 *Seja $\varepsilon > 0$. Então*

$$|x| \leq \varepsilon \text{ se, e somente se, } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$$

Além disso,

$$|x| < \varepsilon \text{ se, e somente se,} -\varepsilon < x < \varepsilon.$$

Propriedade 2 $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}.$

Propriedade 3 $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Propriedade 4 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

A demonstração das propriedades acima é encontrada em qualquer livro de análise.

Definição 1.1.7 *Dizemos que um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo quando para quaisquer $a, b, x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$a, b \in I \ e \ a < x < b \Rightarrow x \in I.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Segue da definição acima que qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ é de uma das seguintes formas.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$.

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$;

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$.

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < +\infty\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < +\infty\}$.

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/ -\infty < x \leq b\}$;

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}/ -\infty < x < b\}$.

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ e

$[a, a] = \{a\}$. (intervalo degenerado)

Agora falta apenas um axioma para fechar o completamento de $\mathbb{Q}$. Antes vamos enunciar algumas definições.

Definição 1.1.8 *Seja $X \neq \varnothing$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que*

(i) X é limitado superiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a, \forall x \in X$.

(ii) X é limitado inferiormente quando existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x, \forall x \in X$.

(iii) X é limitado quando existe um $R \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq R, \forall x \in X$.

Qualquer número $a \in \mathbb{R}$ que satisfaz (i) é chamado de limite (ou cota) superior de X.

Qualquer número $b \in \mathbb{R}$ que satisfaz (ii) é chamado de limite (ou cota) inferior de X.

Definição 1.1.9 *Seja $X \neq \varnothing$ um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

(i) Um número real s é dito ser o supremo de X quando s é a menor das cotas superiores de X, ou seja, quando satisfaz

(S1) $x \leq s, \forall x \in X$ (s é cota superior).

(S2) $x \leq a, \forall x \in X \Rightarrow s \leq a$ (s é a menor das cotas superiores).

Notação : $s = \ supX$.

(ii) Um número real m é dito ser o ínfimo de X, denotado por $infX$, quando m é a maior das cotas inferiores de X, ou seja

(M1) $m \leq x, \forall\, x \in X$ (m é cota inferior).

(M2) $b \leq x, \forall\, x \in X \Rightarrow b \leq m$ (m é a maior das cotas inferiores).

Notação : $m = \inf X$

Alternativamente a (S2) temos

(S2') $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in X$ tal que $s - \varepsilon < x$.

Alternativamente a (M2) temos

(M2') $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in X$ tal que $x < b + \varepsilon$.

Observação 1 *Note que o ínfimo de um conjunto X, quando existe, é único.*

Exemplo 3 $sup(0,1) = sup[0,1] = 1$ *e* $inf(0,1) = inf[0,1] = 0$.

Exemplo 4

$$\sup\left\{\frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N}\right\} = 1 \quad \text{e} \quad \inf\left\{\frac{1}{n} \quad | \quad n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

Eis o último axioma:

Axioma do Completamento: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.

Com esse axioma pode-se provar que

Proposição 1.1.10 *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo.*

Demonstração: Veja o Teorema 5.4 em [6].

Para uma leitura detalhada desse assunto, sugerimos as referências [6],[2] e [5].

1.2 Sequências Monótonas

Vamos primeiro definir sequências.

Definição 1.2.1 *Seja X um conjunto. Uma sequência de elementos de X é qualquer função de $\mathbb{N}$ em X, ou seja, com $\mathbb{N}$ como domínio e X como contradomínio.*

No nosso trabalho as sequências serão de números reais, isto é, $X = \mathbb{R}$.

Notação: A imagem de um número $n \in \mathbb{N}$ por uma sequência

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é denotada por x_n em vez de $x(n)$. A sequência completa é denotada por $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou ainda por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). As vezes a sequência é denotada apenas por seu n-ésimo termo. Por exemplo, a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}\right)$ será denotada por $\frac{1}{n}$.

Exemplo 5 *São exemplos de sequências:*

(a) $(1, 0, 0, 0, ...)$

(b) $((-1)^n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$=$(0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$

As vezes, sequências são definidas recursivamente.

Exemplo 6 *A sequência (x_n) de termos $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + r$, onde r é fixo, é conhecida como progressão aritmética (P.A.). Uma P.A. é uma sequência em que os termos sucessivos diferem por uma constante fixa, a razão.*

Exemplo 7 *A sequência (x_n) cujos termos satisfazem a regra*

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = r \cdot x_n,\ \forall n \geq 1,$$

onde r é uma constante fixa, é denominada de progressão geométrica (P.G.) de razão r.

As PA's e as PG's são exemplos muito importantes de sequências e amplamente aplicadas.

Considere a sequência $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Seus cinco primeiros termos são

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4} \text{ e } \frac{6}{5}.$$

Já para n=100, n=101 e n=102 seus termos são, respectivamente;

$$\frac{101}{100}, \frac{102}{101}, \frac{103}{102}$$

.

Observação 2 *Veja que os termos da sequência acima vão ficando cada vez mais próximos de 1 a medida que n cresce.*

.

Por exemplo

$$\frac{103}{102} = \frac{102}{102} + \frac{1}{102} = 1 + \frac{1}{102}.$$

Daí,

$$\frac{103}{102} - 1 = \frac{1}{102}.$$

Definição 1.2.2 *Seja (x_n) sequência de números reais. Dizemos que (x_n) tem limite (converge para) $L \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.*

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Exemplo 8 *A sequência $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite 1.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Como $\varepsilon > 0$ e $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ e daí,

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Para não fugirmos muito do nosso tema, vamos omitir aqui muitas propriedades dos limites de sequências. Isso não causa prejuízo, porque podem ser consultadas em qualquer livro de análise 1 ou até mesmo de cálculo.

Passemos as sequências monótonas.

Definição 1.2.3 *Seja (x_n) uma sequência real. Dizemos que (x_n) é*

(i) Crescente quando $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Decrescente quando $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em ambos os casos acima dizemos que (x_n) é uma sequência monótona.

(iii) Se $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que (x_n) é estritamente crescente.

(iv) Se $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que (x_n) é estritamente decrescente.

Observação 3 *Toda sequência crescente é limitada inferiormente. E toda sequência decrescente é limitada superiormente.*

Proposição 1.2.4 *Uma sequência monótona (x_n) é convergente se, e somente se, é limitada.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ É imediato, porque toda sequência convergente é limitada.

$(\Leftarrow)$ Seja (x_n) uma sequência limitada e seja $X = \{x_n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos seus pontos, isto é, sua imagem. Como X é por hipotese limitado, existe $b = \sup X$ e $a = \inf X$. Suponhamos, sem perda de generalidades, (x_n) decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$. Daí,

$$a - \varepsilon < a < x_n < a + \varepsilon, \forall n \geq n_0;$$

ou seja,

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \inf X$.

Quando (x_n) é crescente, prova-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b = \ supX.$$

Proposição 1.2.5 *Seja $r \in \mathbb{R}$. Se $|r| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.*

Demonstração: Vamos dividir em dois casos.

1. Suponha $0 < r < 1$. Então $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona limita. Daí, pela proposição anterior $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} r^n$. como $(r^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência dela, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = L$. Daí,

$$L = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \lim_{n\to\infty} r \cdot r^n = r \lim_{n\to\infty} r^n = r \cdot L.$$

Tendo que $L = rL$ segue que $L(r-1) = 0$.

Como $|r| < 1$ segue que $r- \neq 0$ e portanto da igualdade $L(r-1) = 0$ segue que $L = 0$.

2. Suponha $-1 < r < 0$. Então $0 < -r < 1$ e portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (-r)^n = 0$. Daí,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot (-r)^n = 0,$$

pois $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

Com isso, temos em mãos o que precisávamos sobre sequências para o nosso estudo do número e.

1.3 Números Algébricos e Transcendentes

Veremos aqui que os números reais, além de racionais e irracionais, também podem ser divididos em algébricos e transcendentes. No capítulo dedicado ao estudo do número e, provaremos que ele é irracional.

Definição 1.3.1 *Dizemos que um número real r é algébrico quando ele é solução (raiz) de uma equação polinomial da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0; \tag{1.1}$$

onde $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$.

Qualquer número não algébrico é dito transcendente.

Exemplo 9 *Todo número racional é algébrico. De fato, se $r = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $(b \neq 0)$, então r é raiz da equação*

$$b \cdot x - a = 0. \tag{1.2}$$

Veremos posteriormente que determinar a representação decimal (ou uma boa aproximação decimal) de um número algébrico pode ser trabalhoso, mas não difícil, porque segue um método padronizado. Já para números transcendentes, a tarefa é bem mais complicada.

A prova da existência de números transcendentes foi primeiramente feita por G. Cantor. Para vê-la, sugerimos as referências [4] (*Captulo* 4) e [8] (*Captulo* 7).

A demonstração é feita do seguinte modo:

1. Prova-se que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

2. Prova-se que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Desse fato, segue que existem números transcendentes, pois caso contrário, $\mathbb{R}$ seria enumerável. Assim, o conjunto dos números transcendentes é bem mais amplo que o dos algébricos.

O matemático J. Lionville publicou em 1851 um critério que permite exibir alguns tipos de números transcendentes. (Veja o capítulo 7 de [4] e o capítulo 5 de [8]).

1.4 Séries Geométricas

Vamos precisar do conceito de séries para estudar a irracionalidade de e, e, principalmente a representação decimal de e, porque a representação decimal infinita de qualquer número real é na verdade a soma de uma série geométrica, como veremos.

Definição 1.4.1 *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Uma soma parcial de ordem n dessa sequência, denotada por S_n é*

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k.$$

Chamamos de série determinada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de suas somas parciais.

Por um abuso de notação, a sequência (S_n) e seu limite são indicados pelo mesmo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Cada (a_n) é chamado n-ésimo termo da série. Cada $S_n = a_1 + ... + a_n$, além de n-ésima soma parcial, também é chamada de n-ésima soma reduzida da série.

Definição 1.4.2 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente quando a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de suas reduzidas converge para algum número $s \in \mathbb{R}$, ou seja;*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = s.$$

Caso contrário, a série é divergente.

Exemplo 10 *Um dos mais importantes exemplos de série é aquela com termo geral $\frac{1}{2^n}$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Sua importância decorre do fato de o quociente do n-ésimo termo pelo antecessor ser constante igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, $a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, \forall n \geq 2$. Além disso, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, ou seja, seu limite é igual a 1.*

Esse exemplo ilustra um tipo muito especial de série: aquele cujos termos diferem uns dos outros por potências de uma constante positiva fixa.

Definição 1.4.3 *Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para a qual existe um $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $a_{n+1} = r \cdot a_n$, para todo $n \geq 1$ é chamada de série geométrica de razão r. Nesse caso veja que o termo geral é dado por*

$$a_n = ar^n.$$

Desta forma temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^n. \tag{1.3}$$

Teorema 1.4.4 *Dada a série geométrica (1.3), é válido o seguinte critério de convergência.*

(i) Se $|r| < 1$, então ela converge e seu limite é $\frac{a}{1-r}$.

(ii) se $|r| \geq 1$, então ela é divergente.

Demonstração: Inicialmente veja que

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \\ &\quad - ar - ar^2 - \cdots - ar^n - ar^{n+1} \\ &= a - ar^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \cdot \lim_{n \longrightarrow \infty} r^{n+1}.$$

Portanto, se $|r| < 1, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1 - r}$.

Caso $|r| > 1$ temos que a sequência r^n diverge, e portanto a série será divergente.

Lema 1.4.5 *Seja $b > 1$ um número natural e seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais onde $0 \leqslant a_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$. Então a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

é convergente.

Demonstração: Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{b^n} \leqslant \frac{b - 1}{b^n}.$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b - 1}{b^n} = (b - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b^n} \right) = 1,$$

Pela proposição 1.2.5.

1.5 A Representação Decimal de um Número Real Qualquer

Vamos nesta seção mostrar que todo número real possui uma representação decimal e que, quando infinita, tal representação é única. De fato, veremos que todo número real possui uma única representação decimal infinita.

Exemplo 11 *O número 1 já está na forma decimal e essa é logicamente uma representação decimal finita do mesmo. Agora, observe que, pelo Lema 1.4.5, série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ *é convergente. Como* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$*, tem-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1.$$

Portanto

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ...1 = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = 0,999...$$

é também uma representação decimal do número 1.E esta é única, como veremos abaixo.

Segue do Lema 1.4.5 que, dado qualquer $a \in \mathbb{N}$, a série

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, 0 \leqslant a_n \leqslant 9,$$

converge para um $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Usando a notação

$$\frac{a_1}{10} = 0, a_1, \quad \frac{a_2}{10^2} = 0, 0a_2, ..., \quad \frac{a_n}{10^n} = 0, \underbrace{00...0}_{n-1} a_n,$$

onde cada n-ésima posição à direita da vírgula é chamada de n-ésima casa decimal Podemos escrever

$$\alpha = a, a_1 a_2 ... a_n ... \tag{1.4}$$

Definição 1.5.1 *O número $a, a_1a_2...a_n...$ chama-se representação decimal de $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que, $a_n = 0, \forall n > k$, dizemos que a representação decimal de α é finita. Caso contrário, a representação decimal é infinita.*

Usando o exemplo 11, podemos mostrar que todo número natural, e consequentemente todo número inteiro, possui uma representação decimal infinita. Por exemplo

$$2 = 1 + 1 = 1 + 0,999... = 1,999....$$

Agora dado $a \geq 2$ natural, de fato temos que

$$a = a - 1 + 1 = a - 1 + 0,999... = (a-1)\,,999...$$

e disso segue o resultado.

Do Lema 1.4.5 também segue que toda série da forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, com $a_n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a_n \leqslant 9$, converge para um real $\alpha \in [0,1]$ e chamamos seu limite de,

$$0, a_1a_2...a_n...$$

Esse limite é único (lembre-se da unicidade do limite). Agora vamos a reciproca desse resultado.

Teorema 1.5.2 *Seja $\alpha \in (0,1)$ um número real. Então existe uma, e somente uma, sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant a_n \leqslant 9, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

ou seja, $\alpha = 0, a_1a_2...a_n...$ e tal representação de α é única.

Demonstração: A demonstração usa fortemente os principais conceitos de análise 1, mas precisa ser cuidadosamente estudada por todos que pretendem ensinar matemática, porque ensina um método bastante eficaz na determinação das casas decimais de um número real algébrico. Para números transcendentes, ela dá uma pista, mas não é eficaz, porque cada caso é diferente.

Sejam $\alpha_1 = \frac{a_1}{10}$ e $\beta_1 = \frac{a_1+1}{10}$, onde

$$a_1 = \max\left\{k / \tfrac{k}{10} \leqslant \alpha, 0 \leqslant k \leqslant 9\right\}.$$

Então

$$\alpha_1 \leqslant \alpha < \beta_1. \tag{1.5}$$

Se $\alpha = \alpha_1$, então $\alpha = 0, a_1$ e o processo finaliza. Caso contrário, tome

$$\alpha_2 = \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2} \text{ e } \beta_2 = \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2+1}{10^2},$$

onde

$$a_2 = \max\left\{k/\tfrac{a_1}{10} + \tfrac{k}{10^2} \leqslant \alpha, 0 \leqslant k \leqslant 9\right\}.$$

Então

$$\alpha_2 \leqslant \alpha < \beta_2. \tag{1.6}$$

Se $\alpha = \alpha_2$, então $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2$ e a prova finaliza. Caso contrário, repete-se o procedimento.

Se existir um $n \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\alpha = \alpha_n = 0, a_1a_2...a_n,$$

então a prova finaliza nesse passo. Caso contrário, considere as sequências $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas recursivamente a partir de 1.5 e 1.6. Por construção,

$$\alpha_n < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\beta_n - \alpha_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{10^j} + \frac{a_n + 1}{10^n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} = \frac{a_n + 1}{10^n} - \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Como $\alpha_n \leqslant \alpha < \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\alpha - \alpha_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Portanto,

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Disso concluímos que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = \alpha, \text{ ou seja:}$$

$$\alpha = 0, a_1a_2...a_n...$$

Agora vejamos a unicidade.

Seja $\alpha \in (0,1)$. Se α admite uma representação decimal finita, digamos $\alpha = 0, a_1a_2...a_k$, escreva

$$\alpha = 0, a_1a_2...(a_k - 1) + 0, \underbrace{0...01}_{k \;\; dgitos}. \tag{1.7}$$

Vimos no Exemplo 11 que: $1 = 0,999....$ Daí, dividindo 1 por 10^k obtemos

$$0,\underbrace{0...01}_{k\ dgitos} = 0,\underbrace{0...000}_{k\ dgitos}9999...$$

Assim, por (1.7) podemos concluir que

$$\alpha = 0, a_1 a_2 ... (a_k - 1)\, 9999...,$$

que é uma representação decimal finita de α.

Portanto, todo $\alpha \in (0,1)$ possui uma representação decimal infinita, digamos,

$$\alpha = 0, a_1 a_2 ... a_n ... \tag{1.8}$$

Por exemplo, para $\alpha = 0,27$, tem-se $\alpha = 0,26999....$

Suponhamos que o α de (1.8) possua uma outra representação decimal infinita que não aquela de (1.8). Sendo assim, existe pelo menos um algarismo dessa tal representação que difere daquela em (1.8), digamos

$$\alpha = 0, a_1 a_2 ... a_{n-1} b_n b_{n+1}, \tag{1.9}$$

com $b_n \neq a_n$. Suponhamos, sem perda de generalidades, que $b_n < a_n$. Então

$$(1.8) - (1.9) = \tfrac{a_n - b_n}{10^n} + \tfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{10^{n+1}} + ... > 0,$$

o que é um absurdo. Isso conclui a prova.

Corolário 1.5.3 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Então existe um único $a \in \mathbb{N}$ e uma única sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que*

1. $x = a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a, a_1 a_2 ... a_n ...,$ *se* $x \geq 0$.
2. $x = -\left(a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\right) = -a, a_1 a_2 ... a_n ...,$ *se* $x < 0$.

Demonstração: Dado $x \geq 0$, tome $a = [x]$, onde $[x]$=max$\{m \in \mathbb{N}/m \leq x\}$, é o maior natural menor ou igual a x.Então

$$x = a + \alpha, \text{ onde } \alpha \in (0,1).$$

Daí, pelo Teorema 1.5.2, existe uma única sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq 9$, tal que,

$$\alpha = 0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$

Logo,

$$x = a + \alpha = a, a_1a_2...a_n...$$

2. Se $x < 0$, então pelo item 1, existem um único $a \in \mathbb{N}$ e uma única sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq 9$, tal que

$$-x = a, a_1a_2...a_n...$$

Daí,

$$x = -a, a_1a_2...a_n...$$

Cada a_j da representação acima chama-se j-ésima casa decimal de x, e o número a é a parte inteira de.

Exemplo 12 *Determinemos a representação decimal de $\sqrt{3}$ até a terceira casa decimal.*

Se $a \in \mathbb{N}$ e $a^2 \leq 3$, então $a = 1$, pois $2^2 = 4$. Logo, $[\sqrt{3}] = 1$ e $1 < \sqrt{3} < 2$.

Particionando o intervalo $[1, 2]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição

$$P = \left\{1, 1 + \frac{1}{10}, 1 + \frac{2}{10}, ..., 1 + \frac{9}{10}\right\}.$$

Observemos que $(1,7)^2 = 2,89$ e $(1,8)^2 = 3,24$. Logo,

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \text{ e assim, } a_1 = 7.$$

Particionando o intervalo $[1,7; 1,8]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição

$$P = \left\{1 + \frac{7}{10}, 1 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2}, 1 + \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2}, ..., 1 + \frac{7}{10} + \frac{9}{10^2}\right\}.$$

Observemos que $(1,73)^2 = 2,9929$ e $(1,74)^2 = 3,0276$. Logo,

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \text{ e consequêntemente, } a_2 = 3.$$

Particionando o intervalo $[1,73; 1,74]$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição

$$P = \left\{1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2}, 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3}, ..., 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3}\right\}.$$

Observemos que $(1,732)^2 = 2,999824$ *e* $(1,733)^2 = 3,003289$. *Logo,*

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \text{ e consequentemente, } a_3 = 2.$$

Portanto, uma aproximação em três casas decimais para $\sqrt{3}$ *é 1,732. Logo,*

$$\sqrt{3} = 1,732...$$

1.6 Potências com Expoentes Reais

Precisaremos do logaritmo natural para definir o número e.

Definição 1.6.1 *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Definimos*

(i) $a^1 = a$.

(ii) $a^{n+1} = a \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Se $a \neq 0$, *definimos*

(iii) $a^0 = 1$ *e* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Dessa definição seguem as leis das potências inteiras. Dados $a, b \in \mathbb{R}^*$, tem-se,

(1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, n \in \mathbb{Z}$.

(3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

(4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

(5) Se $0 < a < b$, então $a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(6) Se $n < m$ e $a > 1$, então $a^n < a^m, \forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.6.2 *Se* $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$, *então existe um único número real* $b \geq 0$ *tal que* $b^n = a$.

Demonstração: Veja o Teorema 7.5 em [4].

Dado um $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$, o único número real $b \geq 0$ tal que $b^n = a$ é chamado de raiz n-ésima de a e é denotado por $a^{\frac{1}{n}}$, ou ainda $\sqrt[n]{a}$, ou seja, $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Corolário 1.6.3 *Se* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *é ímpar, então existe um único* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $b^n = a$.

Demonstração: Aplicando o Lema 1.6.2 em $|a|$, segue que existe (um único) $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n = |a|$. Daí, se $a \geq 0$ então $c^n = a$ e segue o resultado. Se $a < 0$, tome $b = -c$. Então, $b^n = -c^n = a$, e novamente temos o resultado.

Agora estamos prontos para enunciar a definição de a^r, onde $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

Definição 1.6.4 *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{1}{n}}$ como sendo o $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é impar, definimos $a^{\frac{1}{n}}$ como sendo o número $b \in \mathbb{N}$ tal que $b^n = a$.*

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}},$$

desde que $a^{\frac{1}{n}} \neq 0$ e esteja bem definido.

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $\operatorname{mdc}(p, q) = 1$, definimos

$$a^r = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

quando está bem definido.

As mesmas leis das potências inteiras (1) - (6) valem para potências racionais.

Vamos finalizar a seção com a caracterização de expoentes de números reais.

Vamos fazer uso do critério de convergência de sequências monótonas (Proposição 1.2.4). O objetivo é definir a^x, onde $a > 0$ e x são reais (podendo ser irracional).

Vamos ilustrar com um exemplo: vimos que uma aproximação racional para $\sqrt{3}$ com três casas decimais é 1,732. Daí, pelas propriedades de sequências monótonas, é de se esperar que a sequência

$$(2^1, 2^{1,7}, 2^{1,732}, \ldots).$$

converge para $2^{\sqrt{3}}$, pois trata-se de uma sequência monótona limitada.

Definição 1.6.5 *Dados $a > 0$ e x reais, definimos a^x como sendo $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a^{r_n}$, onde $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números racionais tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n = x$.*

O Teorema 1.5.2 e seu corolário 1.5.3 garantem a existência de uma tal sequência. No caso geral, basta construir uma sequência da seguinte forma: como entre dois números reais sempre existe um racional, tome

$$x - 1 < r_1 < x,$$
$$\max\left\{r_1, x - \tfrac{1}{2}\right\} < r_2 < x,$$

e, procedendo indutivamente, após r_n, tome um racional r_{n+1}, tal que

$$\max\{r_n, x - \tfrac{1}{n+1}\} < r_{n+1} < x.$$

Então $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e, como

$$x - \tfrac{1}{n} < r_n < x,$$

passando ao limite quando n tende a $+\infty$, obtemos $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r_n = x$.

Portanto, sempre existe uma sequência crescente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x. Isso valida a definição

$$a^x = \lim_{n\longrightarrow\infty} a^{r_n}, se, a \geq 1, x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

onde (r_n) é uma sequência crescente com $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r_n = x$. Agora, se $0 < a < 1$ e $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}. \tag{1.11}$$

O valor de a^x independe da escolha da sequência crescente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Veja o Lema 17.3 em [6]).

No caso de $x \in \mathbb{Q}$, basta considerar a sequência constante $(x, x, x, ...)$. Portanto a definição acima é consistente com a de expoentes racionais.

Para finalizar, as leis de potências (expoentes) reais são similares às potências racionais. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, valem

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = (a \cdot b^{-1})^x = a^x \cdot (b^{-1})^x = a^x \cdot b^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(vi) Se $a > 1$ e $x < y$, então $a^x < a^y$.

(vii) Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^y < a^x$.

(viii) Se $x > 0$ e $a < b$, então $a^x < b^x$.

(ix) Se $x < 0$ e $a < b$, então $b^x < a^x$.

Todas essas propriedades são automaticamente válidas para as potências do número e. E isso será crucial para alcançar nossos objetivos nesse trabalho.

Capítulo 2

Definições e Propriedades de e

2.1 Definição de e

A definição mais simples de e é a seguinte.

Definição 2.1.1 *Chamamos de e ao valor do número real maior que 1 para o qual a área da região hachurada abaixo, entre o eixo x com $x \geq 1$ e o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é igual a 1:*

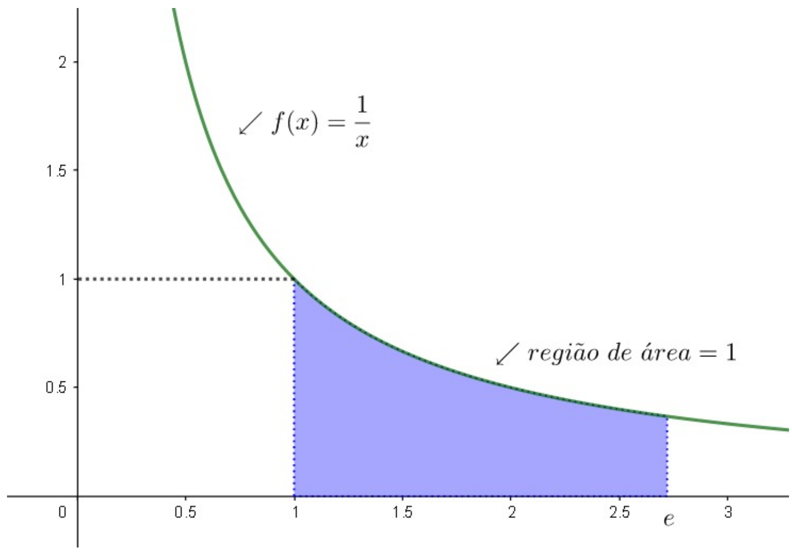


Figura 1

Esse número existe, porque está univocamente relacionado à região acima.

A área de uma região entre 1 e um $x > 1$ é delimitada pelo eixo das abscissas e o gráfico da função $f(t) = \frac{1}{t}$ é chamada logaritmo natural de x e é denotada por $\ln x$.

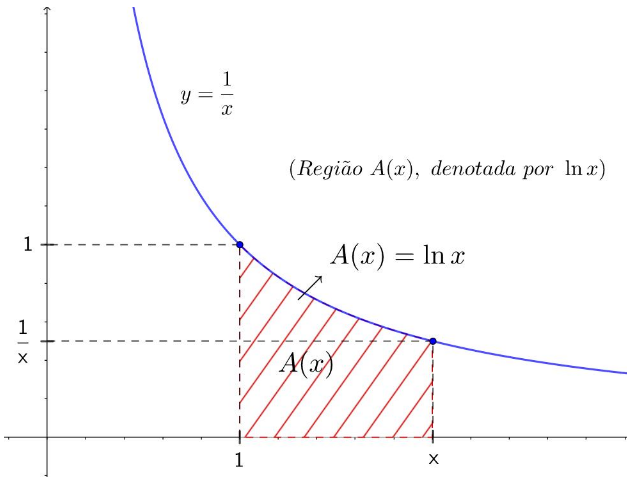


Figura2

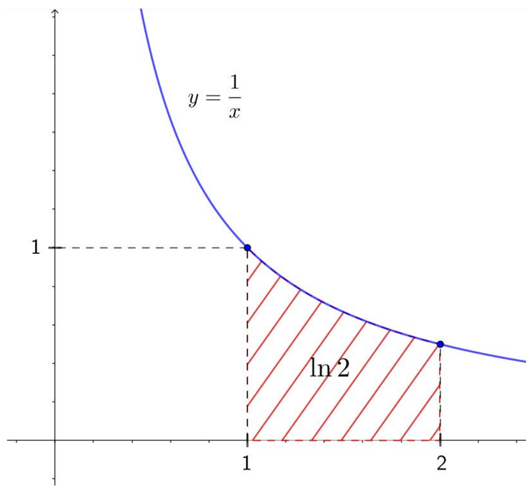
Neste caso, $\ln e = 1$.

No cálculo 1 aprende-se que o cálculo dessa área é feito por meio de integração.

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, x > 1$$

Tal integral pode ser calculada para todo $x > 0$. Mas não vamos explorar o logarítimo natural, não pretendemos nos aprofundar sobre esse tema nesse trabalho. Apenas listaremos suas propriedades quando formos usá-las.

Podemos estimar a área da região $A(x)$ sem realizar o cálculo da integral $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.



Por exemplo, da figura 2 vemos facilmente que

$$\ln 2 < 1 \tag{2.1}$$

Definido o número e, podemos usar as propriedades de potências com expoentes reais para definir a função $e^x, x \in \mathbb{R}$ (Veja a seção 2.6). A função $e^x, x \in \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (i) a (ix) da seção 2.6. Em particular $e^x, x \in \mathbb{R}$, é uma função estritamente crescente.

A função logarítimo natural possui as seguintes propriedades fundamentais, as quais são estabelecidas nos cursos de cálculo e/ou análise 1.

(P1) A função $\ln x$ é estritamente crescente, contínua e diferenciável, definida em $(0, +\infty)$ e com valores em $\mathbb{R}$.

(P2) $\ln 1 = 0$ e $\ln e = 1$.

(P3) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \forall x, y \in (0, +\infty)$.

(P4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \forall x, y \in (0, +\infty)$.

(P5) Dado $r \in \mathbb{R}, \ln(x^r) = r \cdot \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$.

(P6) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = +\infty$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Para ver as demonstrações dessas propriedades sugerimos as referências [3] e [4].

2.2 A Função Exponencial

A definição do número e feita na seção 2.1 nos permite apenas saber de sua existência, não nos ajuda muito a explorar suas propriedades. Nesta seção vamos exibir uma caracterização de e muito mais vantajosa para explorar suas propriedades.

Definição 2.2.1 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos*

$$\exp(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Usando o teste da razão de convergência absoluta de séries (Veja o Teorema 2.6.6 em [6] ou o Teorema 2, página 581 de [2]) vemos que $\exp(x)$ converge absolutamente, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vejamos as principais propriedades de $\exp(x)$.

(P1) Para cada $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(P2) Segue diretamente de 2.2 que

$$\exp(0) = 1. \tag{2.4}$$

(P3) De (P1) (P2) tem-se que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Consequentemente,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Antes de apresentar um dos principais resultados posto em nossa dissertação, precisamos do seguinte lema, feito em [4].

Lema 2.2.2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a < b$. Então*

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1) \cdot b^n. \tag{2.6}$$

Demonstração: De fato, como $0 \leq a < b$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} &= b^n + a \cdot b^{n-1} + a^2 \cdot b^{n-2} + ... + a^{n-1} \cdot b + a^n \\ &< b^n + b \cdot b^{n-1} + b^2 \cdot b^{n-2} + ... + b^{n-1} \cdot b + b^n = (n+1) \cdot b^n \end{aligned} \tag{2.7}$$

A desigualdade 2.6 do Lema 2.2.2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$b^n \left[b - (n+1) \cdot (b - a)\right] < a^{n+1}. \tag{2.8}$$

Agora estamos prontos para enunciar o resultado. Sua demonstraçao foi extraída de [6].

Teorema 2.2.3 *A sequência $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada, e portanto, converge para um número $\alpha \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Escolhendo $a = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ e $b = 1 + \frac{1}{n}$ na desigualdade 2.8, obtemos:

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso prova que $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente.

Usando a mesma desigualdade 2.8, escolhendo agora $a = 1$ e $b = 1 + \frac{1}{2n}$, obtemos

$$\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^{n}<2.$$

daí,

$$\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^{2n}<4.$$

Como $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente, tem-se

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^{2n}<4, \forall n\geq 1.$$

Logo, essa sequência é crescente e limitada. Portanto, pela Proposição 1.2.4 $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Teorema 2.2.4 $\alpha=\exp(1)$, *ou seja,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\exp(1).$$

Demonstração: Sejam $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ e $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, n\geq 1$. Já sabemos que (a_n) é uma sequência convergente. Chamemos

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Sabemos também que

$$\exp(1)=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Devemos provar que

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n. \tag{2.9}$$

Pela fórmula do binômio de Newton,

$$\begin{aligned}
a_n &= \binom{n}{0}\cdot 1^{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{0}+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1}\\
&+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2}+\binom{n}{3}\cdot 1^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{3}\\
&+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 1^{0}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n}\\
&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\
&+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Então temos

$$0<a_n<S_n.$$

Como (a_n) e (S_n) são convergentes segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{2.10}$$

Por outro lado, dados n e $0 < k < n$ tem-se

$$a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \tag{2.11}$$

Fixando $k \in \mathbb{N}$ e fazendo $n \longrightarrow +\infty$ na desigualdade (2.11) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = S_k. \tag{2.12}$$

Como a desigualdade (2.12) vale para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{k\to\infty} S_k = \exp(1). \tag{2.13}$$

Das desigualdades (2.10) e (2.13) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \exp(1).$$

Agora apresentamos um resultado crucial na caracterização do número e. Não esqueçamos que.

$$\ln(e) = 1. \tag{2.14}$$

Teorema 2.2.5 $e = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \alpha.$

Demonstração: Pondo $x = 1 + \dfrac{1}{n}$ na figura 2, vimos que a área $A\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ é menor que a área da região retangular R_1 de base entre $x_1 = 1$ e $x = 1 + \dfrac{1}{n}$ e altura igual a 1 (veja Figura 3).

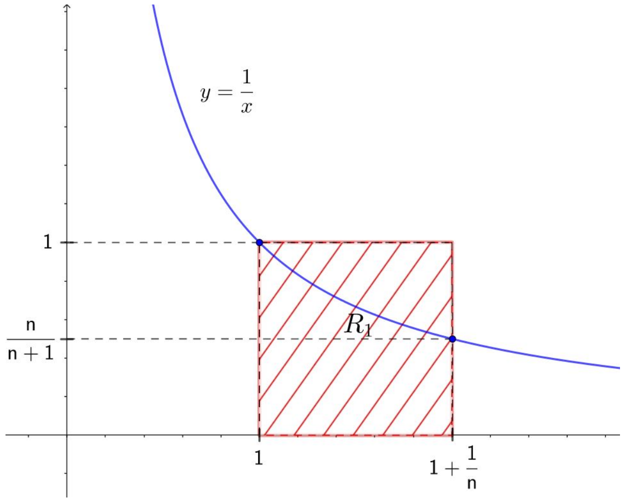


Figura 3

Ou seja,

$$A\left(1+\frac{1}{n}\right) < A\left(R_1\right),$$

o que equivale à desigualdade

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{2.15}$$

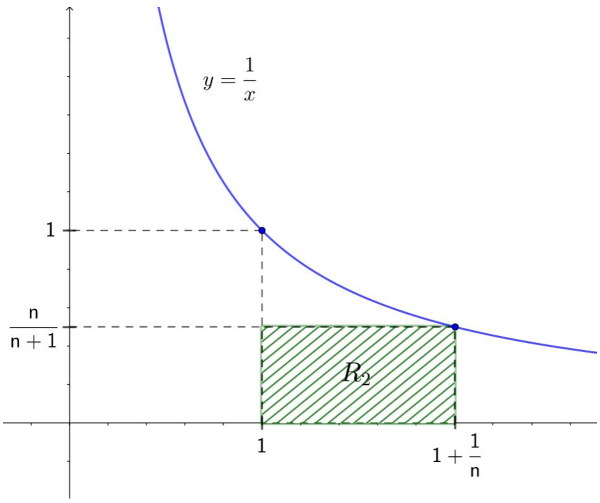


Figura 4

Do mesmo modo, observando as figuras 4, podemos inferir que $A\left(R_2\right) < A\left(1+\frac{1}{n}\right)$, onde $A\left(R_2\right) = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Em outras palavras,

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{2.16}$$

Juntando as desigualdades (2.15) e (2.16), vemos que

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{2.17}$$

Multiplicando por n as desigualdades em (2.17) e usando a propriedade (P5) do logaritmo natural, obtemos

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1. \tag{2.18}$$

Passando ao limite quando $n \longrightarrow +\infty$ em (2.18) obtemos

$$1 \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1. \tag{2.19}$$

Logo,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1. \tag{2.20}$$

Lembrando que $\ln(e) = 1$ (veja 2.14) e que a função $\ln(x)$ é contínua (veja a propriedade (P1)) segue que.

$$\ln\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln(e).$$

Daí, como a função $\ln(x)$ também é bijetora, segue que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

como queríamos provar.

Corolário 2.2.6 $e = \exp(1)$, *ou seja,*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{2.21}$$

Demonstração: De fato, essa identidade é consequência do Teorema 2.2.4 e do Teorema 2.2.5.

O Corolário 2.2.6 exibe uma caracterização bem mais operacional que aquela do início do capítulo. Agora temos em mãos três definições de e: aquela da Definição 2.1.1, a do Corolário 2.2.6 e

$$e = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Vamos finalizar essa seção mostrando que as funções $\exp(x)$ e e^x coincidem, e daí, possuem as mesmas propriedades.

Teorema 2.2.7 *Vale a igualdade* $\exp(x) = e^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Pela propriedade (P1) da função $\exp(x)$ e o corolário 2.2.6, temos, $\forall n \geq 2$.

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot ... \cdot e}_{n \quad \text{vezes}} = \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdot ... \cdot \exp(1)}_{n \quad \text{vezes}} = \exp(n). \tag{2.22}$$

Pela Propriedade (P3), identidade 2.5, temos:

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\exp n} = \exp(-n), \forall n \geq 1. \tag{2.23}$$

Agora, dado $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,(n > 0)$, segue de (2.5), (2.22) e (2.23) que:

$$(\exp r)^n = \underbrace{\exp(r) \cdot ... \cdot \exp(r)}_{n \quad \text{vezes}} = \exp(n \cdot r) = e^{n \cdot r},$$

e daí,

$$\exp r = (e^{n \cdot r})^{\frac{1}{n}} = e^r.$$

Portanto,

$$\exp r = e^r, \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{2.24}$$

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe uma sequência crescente $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionais tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n = \alpha$ (veja a seção 1.5).

Daí, pelas propriedades da função e^x e da função $\exp(x)$, temos.

$$e^\alpha = \lim_{n \to \infty} e^{r_n} = \lim_{n \to \infty} \exp(r_n) = \exp\left(\lim_{n \to \infty} r_n\right) = \exp(\alpha).$$

Logo,

$$e^\alpha = \exp(\alpha), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, a função e^x possui as seguintes propriedades.

(1) A função e^x é estritamente crescente.

(2) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow -\infty} e^x = 0$, $\mathrm{Dom}(e^x) = (0, +\infty)$.

(3) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

(4) A função e^x é contínua e diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$.

(5) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Irracionalidade e Cálculo das Casas Decimais do Número e

Neste capítulo vamos mostrar que e é irracional e vamos exibir um método de encontrar sua aproximação decimal.

3.1 Irracionalidade de e

Teorema 3.1.1 *e é irracional.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que e é irracional. Isto significa que

$$e = \frac{k}{m}, \text{ onde } k, m \in \mathbb{N} \text{ e } \mathrm{mdc}(k, m) = 1.$$

Vimos na seção 2.2, Corolário 2.2.6, que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{3.1}$$

Daí segue que

$$\frac{k}{m} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.2}$$

Agora observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+1)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^j}.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^j}$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{m+1}$ e $0 < \dfrac{1}{m+1} < 1$, segue do Teorema 2.2.5 que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^j} = \frac{\frac{1}{m+1}}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m}. \tag{3.3}$$

Substituindo 3.3 na estimativa, obtemos

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{m}. \tag{3.4}$$

Agora,substituindo 3.4 em 3.2, obtemos

$$0 < \frac{k}{m} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{m}. \tag{3.5}$$

Então, multiplicando 3.5 por m!, obtemos

$$0 < m! \cdot \left(\frac{k}{m} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{m} \leq 1. \tag{3.6}$$

Observemos que

$m!\left(\dfrac{k}{m} - \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\right) = k \cdot (m-1)! - \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!} := a \in \mathbb{Z}$, o que é uma contradição, pois teríamos por 3.6 que $0 < a < 1$. Logo e é irracional.

A demonstração que fizemos acima encontra-se na referência D. G. Figueiredo [4]. Não sabemos se a mesma é originalmente de sua autoria. Na referência A. Caminha [2] há uma demonstração ligeiramente diferente, mas de natureza análoga (veja o Teorema 5.21 em [2]).

Outro modo de se provar que e é irracional é provando sua transcendência, porque se um número é transcendente, então ele é irracional. Mas provar que um número é transcendente geralmente envolve ferramentas matemáticas bem mais avançadas que aquelas empregadas em nosso trabalho, o qual é voltado para professores e estudantes do ensino médio que gostam de matemática.

Na referência [4] tem um capítulo dedicado à demonstração da transcendência de e. O autor convida o leitor a fazê-la através de uma sequência de exercícios. Para realizá-los é preciso conhecimento básico de polinômios, derivadas (inclusive o Teorema do Valor Médio).

3.2 Cálculo das Aproximações Decimais do Número e

Nosso principal objetivo aqui não é somente encontrar aproximações decimais de e, mas também mostrar um método de prova de que essas são de fato as aproximações decimais de e. Por que isso? Porque em alguns livros de análise 1 e de teoria dos números, são exibidas aproximações decimais de e, ou mesmo um método para encontrá-las, mas porque já sabem de antemão que são aproximações. Por exemplo, se você substituir n por 100,1000,10000, 1000000 e 10000000 no termo geral da sequência

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

você encontrará, respectivamente.

$$2{,}7...,\ 2{,}71...,\ 2{,}718...,\ 2{,}7182...,\ 2{,}71828...,$$

indicando que as n-1 casas decimais do número

$$\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}.$$

são as $n-1$ primeiras casas da representação decimal de e. Mas concluímos isso porque sabemos de antemão quais são essas casas decimais.

Nesse mesmo sentido A. Caminha em [2] indica um método de encontrar a aproximação decimal de e com cinco casas decimais (veja o problema 2.1, página 348 de [2]).

Na referência [6], página 30, exemplos 12 e 13, E. Lima mostra que $2 < e \leq 3$ e exibe a aproximação 2,7182 para e, mas não ensina como encontrá-la e nem indica um método para isso.

Já na referência [6], os autores provam que $2 \leq e \leq 4$ (depois, num exercício indicam como provar que $e \leq 3$) e depois informam como provar que $e \simeq 2,71828182...$, mas não indicam um método de encontrar as aproximações decimais (veja [6], Teorema 16.6, a página 52 e o exercício 16.6, página 54).

Por fim, em [4], capítulo 6, são apresentados alguns métodos de aproximação de irracionais por racionais e seu grau de precisão, mas não indica nenhum método de obtenção da aproximação decimal de um número irracional.

Vamos aqui empregar o Teorema 1.5.2 junto com as sequências $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ para determinar as aproximações decimais de e provando que estas são de fato as aproximações à esquerda de e.

Lema 3.2.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a < b$.*

Então $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} > (n+1)\cdot a^n, \forall n \geq 1.$

Demonstração:

$\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = b^n + a\cdot b^{n-1} + a^2\cdot b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}\cdot b + a^n > a^n + a\cdot a^{n-1} + a^2\cdot a^{n-2} +$
$+ \cdots + a^{n-1}\cdot a + a^n = (n+1)\cdot a^n$, como queríamos mostrar.

Lema 3.2.2 *Dado $n \geq 1$, vale.*

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\right).$

Demonstração: Tomando $a = 1+\dfrac{1}{n+1}$ e $b = 1+\dfrac{1}{n}$ no Lema anterior 3.2.1, obtemos:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} > (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{(n+1)}{n*(n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}\right).$$

Lema 3.2.3 *Para todo natural $n \geq 1$, vale.*

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{3.7}$$

Demonstração: De fato

Temos que

$$n + 2 + \frac{1}{n} > n + 2$$

Logo

$$\frac{1}{n} \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right) > n + 2$$

Assim podemos escrever

$$\frac{1}{n}(n+1)^2 > n + 2$$

o que equivale a

$$\frac{1}{n} > \frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{3.8}$$

Somando $1 + \dfrac{1}{n+1}$ a ambos os lados da desigualdade (3.8) concluimos

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

ou seja

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2. \tag{3.9}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2. \tag{3.10}$$

Daí, multiplicando ambos os lados da desigualdade 3.10 por $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n$, obtemos a desigualdade 3.7.

Teorema 3.2.4 *A sequência*

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

é decrescente e converge para e.

Demonstração: Dado $n \geq 1$ tem-se, do Lema 3.2.2 que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right).$$

Já o Lema 3.2.3 nos diz que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Logo, por transitividade,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}, \forall n \geq 1.$$

Portanto, a sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

Consideremos as sequências $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sabemos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ e $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

Então ambas as sequências convergem. Logo,

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$, como queríamos demonstrar.

Por fim, estamos prontos para demonstrar nosso principal teorema.

Teorema 3.2.5 *e=2,7182...*

Demonstração: Vamos usar o algoritmo da demonstração do Teorema 1.5.2 junto com as sequências.

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} e \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{3.11}$$

que serão usadas na delimitação das casas decimais.

Pelo Corolário 2.2.6 e pelo Teorema 3.2.4 deduzimos facilmente que:

$$2 < e < 3. \tag{3.12}$$

Neste caso, $[e] = 2$ e podemos então escrever (aqui $[x]$ é a parte inteira de x):

$$e = 2, a_1a_2a_3...a_n... \tag{3.13}$$

onde cada $a_n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 9$ e,

$$a_1 = \max\left\{k/0 \leq k \leq 9 \quad e \quad 2+\frac{k}{10} \leq e\right\},$$

$$a_2 = \max\left\{k/0 \leq k \leq 9 \quad e \quad 2+\frac{a_1}{10}+\frac{k}{10^2} \leq e\right\},$$

$$a_3 = \max\left\{k/0 \leq k \leq 9 \quad e \quad 2+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{k}{10^3} \leq e\right\},$$

....

$$a_n = \max\left\{k/0 \leq k \leq 9 \quad e \quad 2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{10^j} + \frac{k}{10^n} \leq e\right\},$$

Então $a_1 = 7$, pois escolhendo n=80 nas sequências em (3.11) vemos que

$2 + \dfrac{k}{10} < 2 + \dfrac{7}{10} < \left(1 + \dfrac{1}{80}\right)^{80} < e < \left(1 + \dfrac{1}{80}\right)^{81} < 2 + \dfrac{8}{10}, k = 0, ..., 6.$

Para descobrir a_2 tomamos $n = 1000$. De fato,

$2 + \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{10^2} < e < \left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{1001} < 2 + \dfrac{7}{10} + \dfrac{2}{10^2}.$ e obviamente,

$$2,72 < 2 + \frac{7}{10} + \frac{k}{10^2}, \forall k = 3, ..., 9.$$

$a_3 = 8$, pois para n=5000:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} < \left(1 + \frac{1}{5000}\right)^{5000} < e.$$

e

$$e < \left(1 + \frac{1}{5000}\right)^{5001} < 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{9}{10^3}.$$

$a_4 = 2$, pois para n=10000:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} < \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} < e.$$

e

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{3}{10^4} > \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100001} > e.$$

$a_5 = 8$, pois para $n = 1000000 = 10^6$ temos:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} < \left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^{10^6} < e.$$

e

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{9}{10^5} > \left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^{10^6+1} > e.$$

$a_6 = 1$, pois para $n = 10^7$ temos:

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{1}{10^6} < \left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} < e.$$

e

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{2}{10^6} > \left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^{10^7+1} > e.$$

E assim sucessivamente. Portanto,

$$e \approx 2,718281....$$

Observação 4 *Acreditamos que a aproximação decimal de 8 a 12 casas para e que aparece nas calculadoras científicas quando acionamos a tecla "e"já vem gravado na memória do equipamento, assim como a aproximação de π. Mas notamos que usando um valor bem grande em $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ obtemos uma aproximação decimal de e com um bom número de casas, mas não sabemos a relação entre n e o número de casas decimais exatas na aproximação de e. Por exemplo, para n potências de 10, temos*

Para $n = 10^6$

$$\left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^{10^6} \simeq 2,\underbrace{71828}_{5\ exatas}0469319$$

Para $n = 10^7$, temos

$$\left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq 2,\underbrace{718281}_{6\ exatas}692544$$

Para $n = 10^8$, temos

$$\left(1 + \frac{1}{10^8}\right)^{10^8} \simeq 2,\underbrace{7182818}_{7\ exatas}14867$$

Para $n = 10^9$, temos

$$\left(1 + \frac{1}{10^9}\right)^{10^9} \simeq 2,\underbrace{71828182}_{8\ exatas}7099$$

O mesmo ocorre para $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. Isto sugere que cada número

$$\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)^{10^n}, n \geq 2,$$

fornece n-1 casas decimais da aproximação decimal de e. Mas não sabemos provar essa afirmação e nem a encontramos na literatura que tivemos acesso até o presente momento. Ficamos por aqui. Pelo visto ainda temos muito o que aprender sobre esse magnífico número.

Referências Bibliográficas

[1] F. Andrelino da Silva, *A Representação de um Número Real numa Base Qualquer*, Dissertação Profmat-UFPI, 2019.

[2] A. Caminha, *Fundamentos de Cálculo*, Coleção Profmat, SBM, 2015.

[3] H. Domingues, *Fundamentos de Aritmética*, Editora UFSC, Florianópolis, 2013.

[4] D. Guedes de Figueiredo, *Números irracionais e transcendentes*, Coelção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1985.

[5] R. Johnsonbaugh, W. E. Pfaffenberger, *Foundations of mathematical analysis*, Dover, 2002.

[6] E. L. Lima, *Análise real Vol. 1*, Coleção Matemática Universitária, SBM, 2017.

[7] R. de Moura, *Notas de aula do curso de fundamentos de matemátca elemtentar*, Dep. de Matemática, CCN, UFPI.

[8] I. Nivem, *Números: Racionais e Irracionais*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1984.