

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRANCIANE PRESTES FERREIRA RIBEIRO

TEOREMAS DE PONTO FIXO E APLICAÇÕES PARA O ENSINO
MÉDIO

PONTA GROSSA
2020

FRANCIANE PRESTES FERREIRA RIBEIRO

**TEOREMAS DE PONTO FIXO E APLICAÇÕES PARA O ENSINO
MÉDIO**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia

**PONTA GROSSA
2020**

R484 Ribeiro, Franciane Prestes Ferreira
 Teoremas de Ponto Fixo e aplicações para o Ensino Médio / Franciane
 Prestes Ferreira Ribeiro. Ponta Grossa, 2020.
 66 f.

 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área
de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia.

 1. Ponto fixo. 2. Banach. 3. Brouwer. 4. Schauder. 5. Ensino Médio. I. La
Guardia, Giuliano Gadioli. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Matemática. III.T.

CDD: 510.7



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - <https://uepg.br>

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

FRANCIANE PRESTES FERREIRA RIBEIRO

“TEOREMAS DE PONTO FIXO e APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 30 de Outubro de 2020.

Membros da Banca:

Dr. Giuliano Gadioli La Guardia (UEPG) – Presidente

Dr. Marciano Pereira (UEPG)

Dr. Marcio Augusto Villela Pinto (UFPR)



Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles, Secretário(a)**, em 27/10/2020, às 15:30, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Giuliano Gadioli La Guardia, Professor(a)**, em



01/11/2020, às 17:11, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Marciano Pereira, Professor(a)**, em 03/11/2020, às 10:23, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site <https://sei.uepg.br/autenticidade> informando o código verificador **0335578** e o código CRC **190DF1E4**.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida, pela sabedoria e pela oportunidade de cursar o PROFMAT. Toda honra e toda glória seja dada a Ele!

Aos meus pais, Izaias e Ivanice, e minha irmã Fernanda, pelas orações, pelo amor, pelas palavras de incentivo e consolo, as quais renovaram-me em momentos difíceis.

Ao meu esposo Rafael, pela cumplicidade pois fez deste projeto pessoal, um projeto nosso apoiando-me em todo momento. Agradeço pelo amor, pela paciência, pelas orações e pelas palavras fortalecedoras.

A todos meus familiares e amigos, pelo apoio, orações e compreensão em alguns momentos em que estive ausente.

Aos meus amigos Alzenir e Felipe, pela amizade, pelas horas de estudo e pela parceria.

Ao meu Orientador Dr. Giuliano Gadioli La Guardia, pelos seus ensinamentos, pela paciência e por ter aceitado o convite para orientar-me.

Ao Professor Dr. Marciano Pereira, que durante toda graduação incentivou-me a fazer uma pós-graduação preparando-me com as orientações de iniciação científica.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar os Teoremas de Ponto Fixo de Banach, Brouwer e Schauder, mediante suas respectivas demonstrações bem como aplicações interessantes de tais teoremas. Esses teoremas tratam da existência e unicidade de pontos fixos de aplicações $A : M \rightarrow M$, em que A e M satisfazem certas hipóteses. Tais teoremas fornecem ferramentas matemáticas para se demonstrar outros teoremas importantes na matemática bem como originar métodos para resolver equações integrais e equações diferenciais. Além disso, o conceito de ponto fixo será abordado de uma maneira intuitiva para que o mesmo possa ser ensinado aos alunos do Ensino Fundamental e Médio, por meio de atividades propostas e aplicações à Geometria Fractal e ao buscador Google.

Palavras-chave: Ponto Fixo, Banach, Brouwer, Schauder.

ABSTRACT

The aim of this is to study the three Fixed Point Theorems, i.e., Banach, Brouwer and Schauder, by means of their respective proofs as well as their interesting applications to several areas. Such theorems deal with existence and uniqueness of fixed point of some applications $A : M \rightarrow M$, where A and M satisfy suitable hypotheses. Such fixed point theorems provide mathematical tools in order to prove other interesting results and also to generate methods to solve integral and differential equations. Additionally, the concept of fixed point will be carefully adapted in order to be able to be taught in the Middle and also in the High School by applying some activities containing applications to Fractal Geometry and also to be Google Search.

Keywords: Fixed point, Banach, Brouwer, Schauder.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Métrica Euclidiana em \mathbb{R}^2	14
Figura 3.2	Métrica da soma em \mathbb{R}^2	16
Figura 3.3	Métrica do máximo em \mathbb{R}^2	16
Figura 3.4	Tabuleiro de xadrez	16
Figura 3.5	a ponto interior e b ponto de fronteira	18
Figura 3.6	Função contínua	23
Figura 3.7	Função não contínua	23
Figura 4.1	Efeito Droste	27
Figura 4.2	Ponto fixo de uma função diferenciável	30
Figura 4.3	Folha amassada - Teorema de Brouwer no \mathbb{R}^2	34
Figura 4.4	Aplicação R	35
Figura 4.5	Contraexemplos	35
Figura 5.1	Pontos pertencentes ao gráfico da função f	41
Figura 5.2	Gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 8$	42
Figura 5.3	Pontos fixos da função f	43
Figura 5.4	Distância entre os pontos fixos da função f	44
Figura 5.5	Função Raiz Quadrada $a = x_0 > 1$	45
Figura 5.6	Função Raiz Quadrada $a = x_0 < 1$	45
Figura 5.7	Gráfico da função $f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$	46
Figura 5.8	$ g'_1(x) < 1$	47
Figura 5.9	Processo de iteração de $g_1(x)$	48
Figura 5.10	Triângulo de Sierpinski	50
Figura 5.11	Transformação geométrica T_1	52
Figura 5.12	Transformações geométricas T_2 e T_3	53
Figura 5.13	$S = F(S)$	53
Figura 5.14	Diagrama 1	55
Figura 5.15	Diagrama 2	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Iteração de g_1	47
Tabela 5.2	Iteração de g_2 para $x_0 = 1$	49
Tabela 5.3	Iteração de g_2 para $x_0 = 0.5$	50
Tabela 5.4	Iteração 0	55
Tabela 5.5	Iteração 1	56
Tabela 5.4	Iteração 2	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	BIOGRAFIA	11
2.1	STEFAN BANACH (1892-1945)	11
2.2	LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881-1966)	11
2.3	JULIUSZ PAWEL SCHAUDER (1899-1943)	12
3	CONCEITOS	13
3.1	ESPAÇO MÉTRICO	13
3.2	ESPAÇO VETORIAL	18
3.3	ESPAÇO NORMADO	20
3.4	ESPAÇO DE BANACH	24
4	TEOREMAS DE PONTO FIXO	26
4.1	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	26
4.1.1	Efeito Droste	26
4.1.2	Teorema do Ponto Fixo de Banach	27
4.1.3	Aplicações para Equações Diferenciais	30
4.2	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER	32
4.2.1	Ponto Fixo de Brouwer em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3	33
4.2.2	Ponto Fixo de Brouwer	34
4.3	TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER	36
4.3.1	Aplicações Compactas	36
4.3.2	Teorema do Ponto Fixo de Schauder	37
4.3.3	Aplicações em Equações Integrais	37
5	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PONTO FIXO	40
5.1	APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO	40
5.1.1	Ponto Fixo de uma função	40
5.1.2	Ponto Fixo da função raiz quadrada	44
5.1.3	Processo Iterativo	44
5.2	PONTO FIXO E A GEOMETRIA FRACTAL	50
5.3	PONTO FIXO E O BUSCADOR DO GOOGLE	54
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A	66

1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas em Matemática se reduzem a encontrar pontos fixos de alguma aplicação, ou seja, encontrar soluções para sistemas lineares, equações diferenciais ordinárias e equações integrais. Assim, tornam-se importantes as condições que garantam a existência de pontos fixos. Neste trabalho abordaremos os três Teoremas de Ponto Fixo: Brouwer (1912), Banach (1920) e Schauder (1930).

No Capítulo 2 apresentaremos as biografias de Stefan Banach, Luitzen Egbertus Jan Brouwer e Juliusz Pawel Schauder e suas contribuições na área da Matemática.

No Capítulo 3 introduziremos conceitos básicos para compreensão dos teoremas, proposições e propriedades que serão abordadas ao longo deste trabalho.

No Capítulo 4 evidenciaremos os teoremas de ponto fixo e suas aplicações. O Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como Princípio da Contração, é um resultado sobre espaços métricos, fonte de teoremas e com muitas aplicações em espaços normados, por exemplo, o Teorema de Picard. A demonstração de tal teorema é construtiva, a qual nos fornece aproximações sucessivas para o ponto fixo, em que o erro para tais aproximações torna-se menor a cada iteração. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer garante que toda aplicação contínua em um subconjunto compacto, convexo e não-vazio de um espaço vetorial normado de dimensão finita, possui um ponto fixo. Uma aplicação importante do Teorema do Valor Intermediário é na demonstração de um caso particular do Teorema do Ponto fixo de Brouwer. Geralmente, esse teorema é enunciado considerando-se a bola unitária fechada do R^n ao invés de um conjunto compacto e convexo. Em 1909, L. E. J. Brouwer obteve tal resultado para $n = 3$ e, em 1910, o caso geral foi demonstrado por J. Hadamard e, posteriormente em 1912, por Brouwer. Com algumas adaptações para espaços de Banach de dimensão infinita, obtemos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, o qual também possui muitas aplicações para encontrar soluções para equações integrais e equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 5 abordaremos exemplos contextualizados para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, os quais aplica-se o ponto fixo aos conteúdos pertencentes ao currículo de cada ciclo, auxiliando professores que tenham interesse de abordar tal tema em sala de aula. Os conteúdos estão relacionados à Geometria, como as sucessivas transformações geométricas nos fornecendo a ideia de fractais; raízes aproximadas de funções polinomiais, enriquecendo a interpretação de domínio, contradomínio, imagem e gráficos de uma função. Além disso, o ponto fixo nos possibilita evidenciar a importância do estudo sobre matrizes, mais especificamente, a multiplicação de matrizes, o qual nos fornecerá aplicações ao *PageRank* algoritmo.

Por fim, concluiremos o trabalho apresentando as considerações finais.

2 BIOGRAFIA

Neste capítulo, apresentamos as biografias de Stefan Banach, Luitzen Egbertus Jan Brouwer e Juliusz Pawel Schauder destacando suas respectivas carreiras acadêmicas e suas principais publicações.

2.1 STEFAN BANACH (1892-1945)

Stefan Banach nasceu no dia 30 de março de 1892 na Cracóvia, Polônia. O primeiro nome foi dado pelo seu pai Stefan Greczek e o segundo nome por sua mãe Katarzyna Banach, a qual Stefan Banach não chegou a conhecer. Banach foi criado por seus familiares. Durante o colegial Banach e seu amigo Witold Wilkosz se destacavam pela rapidez e interesse em solucionar problemas matemáticos. Assim que concluíram o colegial, em 1910, ambos queriam cursar Matemática, mas pensando que não haveria nada de novo a ser descoberto nesta área, acabaram optando por outros cursos, a saber, Banach foi cursar Engenharia e Witold idiomas orientais. O pai de Banach não apoiava seus estudos, então sentindo-se sozinho, Banach deixou a Cracóvia e foi para Lvov (atual Lviv, Ucrânia), onde matriculou-se na Faculdade de Engenharia da Universidade Técnica de Lvov. Sem apoio financeiro, ele começou a dar aulas particulares, o que o possibilitou a concluir o curso, em 1914. Por não estar preparado para trabalhar no serviço militar durante a Primeira Guerra Mundial por problemas de visão, Banach foi lecionar em escolas locais e trabalhar na construção de estradas. A grande mudança na vida de Banach foi em 1916, quando ele conhece Steinhaus e esse lhe apresentou um problema que, até aquele momento, não havia tido nenhum resultado satisfatório. Dentre alguns dias Banach conseguiu um contraexemplo para a teoria de Steinhaus e, assim, passaram a pesquisar e escrever juntos. Após esse encontro, Banach começou a pesquisar e escrever importantes documentos matemáticos em ritmo acelerado. Banach é considerado o pai da análise funcional recebendo várias homenagens como o Espaço Normado Completo, também conhecido como Espaço de Banach, além de um dos principais teoremas de ponto fixo abordado neste trabalho. Banach faleceu em Lvov em 31 de agosto de 1945 com câncer no pulmão.

2.2 LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881-1966)

Luitzen Egbertus Jan Brouwer nasceu em 27 de fevereiro de 1881, Overschie, Holanda. Brouwer estudou Matemática na Universidade de Amsterdã de 1897 a 1904. Brouwer é considerado o pai fundador da Topologia devido aos seus importantes trabalhos desenvolvidos nessa área. Em conexão com as pesquisas de Hilbert, ele descobriu um de seus primeiros Teoremas de Ponto Fixo, os quais, mais tarde, tornaram-se teorias importantes no ramo da Matemática para o desenvolvimento de outros ramos dela, como, por exemplo, equações diferenciais e teoria dos jogos. Entre outras teorias publicadas por

Brouwer, estão: o teorema da tradução plana, invariância da dimensão de uma variedade sob contínuas transformações invertíveis, publicações sobre teoria dos conjuntos, teoria da medida e teoria das funções. Além disso, no período de 1909 a 1951, Brouwer lecionou na Universidade de Amsterdã. Brouwer faleceu em 2 de dezembro de 1966, Blaricum.

2.3 JULIUSZ PAWEL SCHAUDER (1899-1943)

Juliusz Pawel Schauder era de família judia e nasceu em 21 de setembro de 1899 em Lvov (atual Lviv, Ucrânia). No ano 1917, Schauder formou-se no ensino médio e, dois anos depois, ingressou na Universidade Jan Kazimierz em Lvov. Em 1924, Schauder obteve o título de doutor com a tese *A teoria da medida de superfície*. Além de lecionar em escolas secundárias, Schauder também trabalhou em uma empresa de seguros. Com a publicação do artigo *Contribuições para a teoria de mapeamentos contínuos em espaços funcionais*, ele passou a lecionar na Universidade de Lvov em 1928.

A principal conquista de Schauder consistiu em adaptar os principais resultados da Topologia para espaços de Banach, por exemplo, o Teorema de Ponto Fixo, publicado em 1930. Com o auxílio de uma bolsa de estudos, em 1933, Schauder foi para Paris pesquisar juntamente com Jean Leray onde, em 1934, publicaram juntos um dos trabalhos mais importantes sobre Topologia e equações diferenciais parciais. Quatro anos depois, eles receberam o prêmio Grand Prix Internationaux de Mathématiques Malaxa por esse trabalho. Durante sua carreira, publicou 33 obras importantes para a Matemática a qual teve fim com o início da Segunda Guerra Mundial, onde Schauder, por ser judeu, foi assassinado em 1943 pelo exército alemão.

3 CONCEITOS

Neste capítulo, serão apresentados conceitos básicos para compreensão dos teoremas, proposições e propriedades que serão abordadas ao longo deste trabalho, usando os trabalhos de Zeidler [1] e de Elon [3].

3.1 ESPAÇO MÉTRICO

Em espaços métricos pode-se calcular a distância entre dois elementos, enquanto em espaços vetoriais pode-se somar elementos e multiplicar um elemento por um escalar. O ambiente em que é possível fazer tudo isso, é o ambiente dos espaços vetoriais normados.

Definição 3.1 Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par $(x, y) \in M \times M$, por meio da função d . Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

A condição (M_3) é conhecida como *desigualdade triangular*, tendo origem no fato de que o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor que soma do comprimento dos outros dois, no plano euclidiano. Cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de *distância* de x a y .

Definição 3.2 Um espaço métrico é um par (M, d) , em que d é uma métrica sobre M .

A noção de espaço métrico foi introduzida em 1906 por Maurice Fréchet e desenvolvida e batizada por Felix Hausdorff em 1914.

Como vimos anteriormente, em espaços métricos podemos medir a distância entre seus elementos. Tais elementos podem ser: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, entre outros. Vejamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 3.3 A reta \mathbb{R} , ou seja, o conjunto \mathbb{R} dos números reais, é um exemplo interessante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é definida por $d(x, y) = |x - y|$. De fato, essas propriedades de valor absoluto de números reais segue:

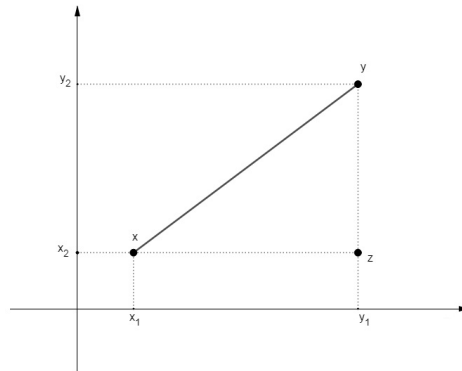
$$(M_1) \quad d(x, y) = |x - y| \geq 0 \quad \text{e} \quad d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y;$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x);$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

O valor absoluto de números reais é denominada *métrica usual da reta*. Outra métrica utilizada é a *métrica euclidiana* que pode ser facilmente compreendida, pois provém da fórmula para a distância entre dois pontos no plano a partir da análise do triângulo retângulo, veja a Figura 3.1, que prova-se usando o Teorema de Pitágoras.

Figura 3.1: Métrica Euclidiana em \mathbb{R}^2



Fonte: A autora

Em \mathbb{R}^2 , podemos pensar na distância euclidiana entre dois pontos como sendo o comprimento do segmento que os une, ou seja,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

em que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Notemos que as condições são satisfeitas uma vez que a distância entre dois pontos é sempre não negativa e somente nula quando estamos medindo a distância de um ponto a ele mesmo. Além disso, a distância de x a y é igual a distância de y a x , pois ela é simétrica. Por fim, a desigualdade triangular, onde o segmento de x a y é menor ou igual a soma dos segmentos de x a z e z a y .

Vejamos a generalização do *Espaço Euclidiano* para dimensão n :

Exemplo 3.4 Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Um elemento do espaço \mathbb{R}^n é denotado por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que x_i é um número real. Além da métrica euclidiana apresentada anteriormente, temos mais duas métricas usualmente utilizadas em \mathbb{R}^n , a saber, a métrica da soma (ou ângulo reto) e a métrica do máximo. Sejam os pontos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ do \mathbb{R}^n .

1. Métrica euclidiana (métrica usual):

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} ; \quad (3.1)$$

2. Métrica da soma:

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|; \quad (3.2)$$

3. Métrica do máximo:

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \quad (3.3)$$

Para uma ilustração geométrica dessas medidas de distâncias, utilizaremos o espaço \mathbb{R}^2 . A métrica Euclidiana, veja a Figura 3.1, conforme dito anteriormente, é a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas), ou seja, a distância em linha reta. A métrica da soma, veja a Figura 3.2, também conhecida como Métrica Metropolitana, associa-se a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Essa métrica também pode ser chamada de Manhattan, devido a um problema envolvendo o percurso a ser realizado por um carro entre dois pontos da cidade, a qual as ruas da ilha são em sua maioria quadriculadas. Isto ocorre devido às redes de transporte na forma de grades retangulares em muitas cidades americanas e também em cidades brasileiras. Sendo assim, a métrica mais adequada para medir distâncias de deslocamentos é a métrica da soma. Por fim, a métrica do máximo, veja a Figura 3.3, também conhecida como Distância de Chebyshev ou distância do tabuleiro de xadrez, pois representa o movimento do rei no xadrez. Perceba que no jogo de xadrez, o rei pode deslocar-se somente uma posição em cada jogada, sendo nas direções horizontais, verticais e nas diagonais. Temos que a quantidade de movimentos necessários para que o rei se desloque de uma posição a outra é igual a maior distância em uma dimensão. Na Figura 3.4, ilustramos a situação em que o rei se desloca da posição f6 para c1. Note que a quantidade necessária de movimentos é dada pela métrica do máximo. Essas ideias foram adaptadas dos conteúdos publicados em ([16], [17]).

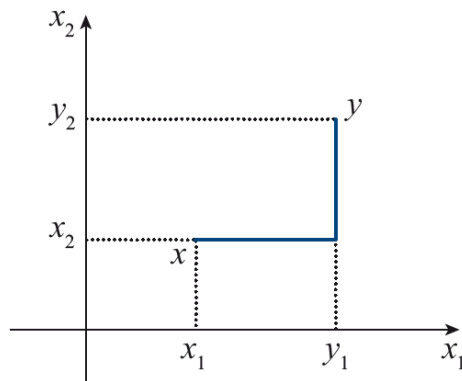
Proposição 3.5 *Sejam d, d_1 e d_2 definidas no Exemplo 3.4. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se que:*

$$d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_2(x, y).$$

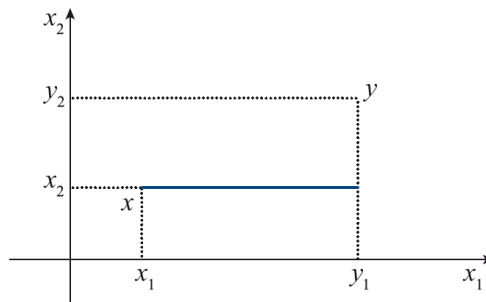
Devido a estas desigualdades, dizemos que essas métricas são equivalentes.

Demonstração: Na primeira desigualdade, temos: $d_2(x, y) = |x_r - y_r|$ para um certo r ($1 \leq r \leq n$). Daí

$$d_2(x, y) = |x_r - y_r| = \sqrt{(x_r - y_r)^2} \leq d(x, y).$$


Figura 3.2: Métrica da soma em \mathbb{R}^2 

Fonte: A autora

Figura 3.3: Métrica do máximo em \mathbb{R}^2 

Fonte: A autora

Figura 3.4: Tabuleiro de xadrez

	uma	b	c	d	e	f	g	h	
8	5	4	3	2	2	2	2	2	8
7	5	4	3	2	1	1	1	2	7
6	5	4	3	2	1		1	2	6
5	5	4	3	2	1	1	1	2	5
4	5	4	3	2	2	2	2	2	4
3	5	4	3	3	3	3	3	3	3
2	5	4	4	4	4	4	4	4	2
1	5	5	5	5	5	5	5	5	1
	uma	b	c	d	e	f	g	h	

Fonte: [16]

A segunda desigualdade, prova-se notando que:

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \\ &\leq (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + \cdots \\ &\quad + 2|x_{n-1} - y_{n-1}||x_n - y_n|, \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + \cdots + 2|x_{n-1} - y_{n-1}||x_n - y_n|} \\ &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = d_1(x, y). \end{aligned}$$

Na terceira desigualdade devemos supor que $|x_r - y_r| = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$, então

$$|x_1 - y_1| \leq |x_r - y_r|, \dots, |x_n - y_n| \leq |x_r - y_r|$$

para um certo r ($1 \leq r \leq n$) e daí

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n|x_r - y_r| = nd_2(x, y).$$

O conceito de bola desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços métricos. Vejamos as definições de bola aberta e bola fechada:

Definição 3.6 *Seja a um ponto no espaço métrico $M = (M, d)$ e $r > 0$ um número real. A bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja,*

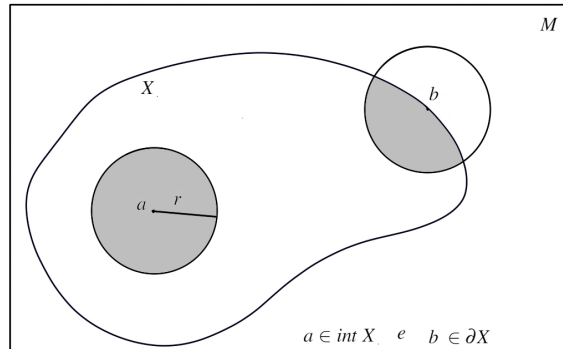
$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Definição 3.7 *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$, cujos pontos de M estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a , ou seja,*

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

Apresentaremos agora as noções de ponto interior e fronteira de um conjunto X contido no espaço métrico M .

Definição 3.8 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $a \in X$ diz-se um ponto interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \implies x \in X$, veja a Figura 3.5. Denota-se o interior de X em M ao conjunto $\text{int } X$ formado pelos pontos interiores a X .*

Figura 3.5: a ponto interior e b ponto de fronteira

Fonte: [3]

Definição 3.9 Seja $M = (M, d)$ o espaço métrico e $X \subset M$. A fronteira de X , denotado ∂X , é o conjunto dos pontos $b \in M$ tal que a bola aberta centrada em b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

Definição 3.10 Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se **aberto** em M quando todos seus pontos são interiores, isto é, $\text{int } A = A$. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$. O subconjunto A de M chama-se **fechado** se, e somente se, o conjunto $M - A$ é aberto.

3.2 ESPAÇO VETORIAL

O Espaço Vetorial é o ambiente onde pode-se somar e multiplicar seus elementos por escalar. A seguir definiremos espaço vetorial e conseqüentemente subespaço vetorial.

Neste trabalho usaremos o símbolo \mathbb{K} para denotarmos o corpo \mathbb{R} dos números reais ou o corpo \mathbb{C} dos números complexos, conforme a notação da página 4 em [1].

Definição 3.11 Um espaço vetorial sobre \mathbb{K} é um conjunto V , cujos elementos são chamados genericamente de vetores, sobre o qual estão definidas duas operações para todo x, y e $z \in V$ e α e $\beta \in \mathbb{K}$:

- Soma entre vetores, que satisfaz:
 - (1) Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$;
 - (2) Comutatividade: $x + y = y + x$;
 - (3) Elemento neutro: existe $0 \in V$ de modo que $0 + x = x$;
 - (4) Inverso aditivo: para todo $x \in V$, existe $(-x) \in V$ de maneira que $x + (-x) = 0$.
- Multiplicação de escalar por vetor, que satisfaz:

- (5) *Associatividade da multiplicação por escalar:* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
- (6) *Distributiva:* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- (7) *Distributiva:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
- (8) *Elemento neutro da multiplicação:* $1x = x$.

É comum mostrarmos que um subespaço é espaço vetorial, utilizando as propriedades da definição a seguir, ao invés de provarmos as oito propriedades apresentadas na Definição 3.11.

Definição 3.12 *Um espaço X é dito **subespaço vetorial** do espaço vetorial V , se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) X não é vazio;
- (ii) Para todo $x_1, x_2 \in X$, então $x_1 + x_2 \in X$;
- (iii) Se $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $\alpha x \in X$.

Exemplo 3.13 Seja $X = \mathbb{K}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, tal que o conjunto X consiste em todas as n -uplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Exemplo 3.14 Seja $C[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$,

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

em que $-\infty < a < b < \infty$. Para $f, g \in C[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $C[a, b]$ torna-se um espaço vetorial com as seguintes operações

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in [a, b].$$

A soma de funções contínuas resulta em uma função contínua e o produto de escalar por uma função contínua resulta em função contínua, ou seja,

$$f + g \in C[a, b]$$

e

$$\alpha f \in C[a, b].$$

Assim, $C[a, b]$ é um espaço vetorial real.

3.3 ESPAÇO NORMADO

Como dito anteriormente, em espaços métricos podemos calcular a distância entre dois de seus elementos, enquanto em espaços vetoriais somamos e multiplicamos por escalar seus elementos. Veremos agora que em espaços vetoriais normados podemos fazer tudo isso.

Definição 3.15 *Seja E um espaço vetorial. Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, denominado norma de x , que satisfaz as seguintes condições:*

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E \text{ e } \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$(N2) \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \text{ para todo escalar } \alpha \text{ e todo } x \in E;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Um espaço vetorial munido de uma norma será denominado de *espaço vetorial normado* ou simplesmente *espaço normado*.

Definição 3.16 *Uma sequência em um conjunto X é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, que a cada número natural n associa um $f(n) = x_n$, denominado de n -ésimo termo da sequência.*

A seguir, apresentamos a definição de limite e convergência de uma sequência, além de algumas propriedades:

Definição 3.17 *Seja (x_n) uma sequência no espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Diz-se que o limite da sequência (x_n) é o ponto $x \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon$. Diz-se que essa sequência converge para $x \in X$, e escreve-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

A *convergência* significa que a distância $\|x_n - x\|$ entre os pontos x_n e x converge para zero quando n tende ao infinito.

Proposição 3.18 *Seja X um espaço normado sobre \mathbb{K} . Sejam $x_n, y_n, x, y \in X$ e $\alpha_n, \alpha \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então temos:*

(i) O limite x é único;

(ii) Se $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, então a sequência (x_n) é limitada, isto é, existe um número $r \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq r$ para todo n ;

(iii) Se $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\|, \quad n \rightarrow \infty;$$

(iv) Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, então

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad n \rightarrow \infty;$$

(v) Se $x_n \rightarrow x$ e $\alpha_n \rightarrow \alpha, n \rightarrow \infty$, então

$$\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x, \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração:

(i) Seja $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\|x - y\| = \|(x - x_n) + (x_n - y)\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto $\|x - y\| = 0$, ou seja, $x = y$.

(ii) Seja $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, a sequência real $(\|x_n - x\|)$ é limitada, isto é, existe um número L tal que $\|x_n - x\| \leq L, \forall n$. Então,

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq L + \|x\|, \forall n.$$

(iii) Seja $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

(iv) Se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

(v) Se $x_n \rightarrow x$ e $\alpha_n \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|(\alpha_n - \alpha)x_n + \alpha(x_n - x)\| \\ &\leq \|(\alpha_n - \alpha)x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| \cdot r + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Uma sequência importante é a sequência de Cauchy. Intuitivamente, os termos da sequência ficam cada vez mais próximos uns dos outros quando o índice n tende para o infinito. Note que na definição de convergência os termos da sequência tornam-se cada vez mais próximos de um determinado ponto. A seguir, apresentamos a definição formal:

Definição 3.19 *Uma sequência (x_n) em um espaço normado X é denominada sequência de Cauchy se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existir um número $n_0(\epsilon)$ tal que*

$$\forall n, m \geq n_0(\epsilon) \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Quando os termos de uma sequência aproximam-se de um ponto fixo, obviamente os termos aproximam-se uns dos outros.

Proposição 3.20 *Se X é um espaço vetorial normado então toda sequência convergente é sequência de Cauchy.*

Demonstração: Se $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ então, pela Proposição 3.18, tem-se que $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, $n \rightarrow \infty$, isto é, para cada $\epsilon > 0$, existe um número n_0 tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $n \geq n_0(\epsilon)$.

Isso implica que

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $n, m \geq n_0(\epsilon)$.

Exemplo 3.21 Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Considere a sequência de números racionais x_n , dada por: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \frac{1}{3}$, $x_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $x_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Sabemos que $\lim x_n = \frac{\pi}{4}$, ou seja, x_n converge em \mathbb{R} . Pela Proposição 3.20, segue-se que a sequência (x_n) é de Cauchy no espaço \mathbb{Q} , mas não é convergente em \mathbb{Q} pois $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

Os teoremas de ponto fixo, os quais enunciaremos no próximo capítulo, garantem a existência de pelo menos um ponto fixo, desde que algumas hipóteses sejam satisfeitas. Sendo assim, definiremos conceitos como funções contínuas, conjunto convexo e conjunto compacto, pois os mesmos serão hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Brouwer.

Definição 3.22 Uma aplicação $A : M \rightarrow Y$ definida no conjunto $M \subseteq Y$, diz-se contínua no ponto $a \in M$, se para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in M, \|x - a\| < \delta \implies \|A(x) - A(a)\| < \epsilon.$$

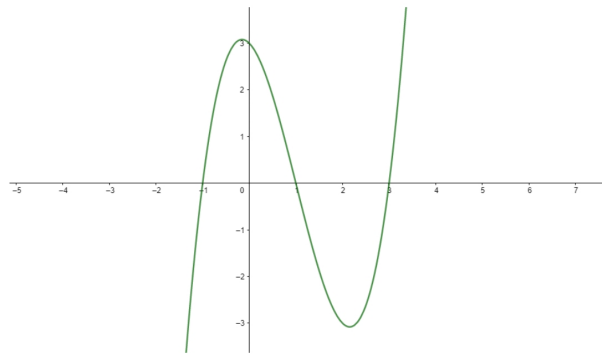
Diz-se que $A : M \rightarrow Y$ é contínua quando A for contínua em todos os pontos $a \in M$.

Se uma aplicação não é contínua, diz-se que tal aplicação é descontínua.

Quando $Y = \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, temos a definição de funções contínuas e funções não contínuas.

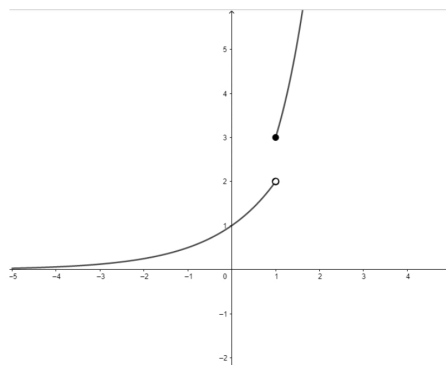
Exemplo 3.23 A seguir, apresentamos um exemplo de função contínua, veja a Figura 3.6 e um exemplo de função não contínua, veja a Figura 3.7.

Figura 3.6: Função contínua



Fonte: A autora

Figura 3.7: Função não contínua



Fonte: A autora

Intuitivamente, a convexidade de um conjunto M significa que dados dois pontos x e y pertencentes a M , o segmento formado por estes pontos também pertencem a M .

Definição 3.24 *Seja X espaço vetorial normado. O conjunto M no espaço vetorial X é denominado **convexo** se, e somente se*

$$\forall x, y \in M \quad e \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \implies \alpha x + (1 - \alpha)y \in M.$$

Definição 3.25 *Seja M um subconjunto no espaço vetorial normado X . A função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada **convexa** se, e somente se*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),$$

para todo $x, y \in M$ e todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

A teoria de Conjuntos Compactos é de grande importância na Matemática, pois desempenha um papel fundamental em espaços métricos e topológicos, em análise real e em análise funcional. Vejamos

Definição 3.26 *Seja M um conjunto no espaço vetorial normado X . Então:*

- M é denominado **conjunto relativamente compacto** se, e somente se, cada sequência (x_n) em M possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x$ quando $n_k \rightarrow \infty$;
- M é denominado **conjunto compacto** se, e somente se, cada sequência (x_n) em M possui uma subsequência convergente $x_{n_k} \rightarrow x$, quando $n_k \rightarrow \infty$, tal que $x \in M$;
- M é denominado **limitado** se, e somente se, existe um número $r \geq 0$ tal que $\|x\| \leq r$, para todo $x \in M$.

3.4 ESPAÇO DE BANACH

Vimos anteriormente, as definições de sequências limitadas e sequências convergentes, e em especial, a sequência de Cauchy. Tais definições serão importantes para o estudo do *espaço de Banach*.

Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente. Quando temos essa mesma propriedade da sequência de Cauchy, no espaço vetorial normado, denominamos espaço de Banach. Vejamos a próxima definição:

Definição 3.27 (*Espaço de Banach*) *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre \mathbb{K} . Dizemos que X é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X .*

Portanto, *Espaços de Banach* também são conhecidos como espaço normado completo.

Embora a sequência de números racionais (x_n) apresentada no Exemplo 3.21 seja uma sequência de Cauchy a mesma não converge em \mathbb{Q} , portanto o espaço \mathbb{Q} dos números racionais não é um espaço de Banach. Por outro lado, os espaços \mathbb{R} e \mathbb{C} são espaço de Banach.

Corolário 3.28 *O espaço \mathbb{R}^n é espaço de Banach.*

4 TEOREMAS DE PONTO FIXO

Encontrar os pontos fixos de funções significa encontrar as soluções de uma determinada equação, ou seja, encontrar um ponto x pertencente ao domínio da função f tal que $f(x) = x$; essa tarefa nem sempre é fácil de se executar. Uma pergunta natural que surge no processo é: toda função admite um ponto fixo? Se tal ponto existe, ele é único? Em alguns casos, necessitamos de ferramentas matemáticas para encontrar tal solução ou um número que seja aproximado, de preferência, com o menor erro possível.

Um **ponto fixo** de uma aplicação $F : M \rightarrow M$ de um conjunto M nele mesmo é um elemento $x \in M$, tal que

$$F(x) = x, \quad (4.1)$$

isto é, a imagem de x por F coincide com x .

Neste capítulo, nos concentramos em encontrar pontos fixos não somente de funções, mas de aplicações no espaço de Banach. Para esse fim, apresentaremos as ferramentas necessárias para a compreensão desse tipo de espaço além de enunciar os teoremas de ponto fixo de Banach, Brouwer e Schauder. Na Matemática exploramos diversos espaços cada qual com suas propriedades e relevâncias.

4.1 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

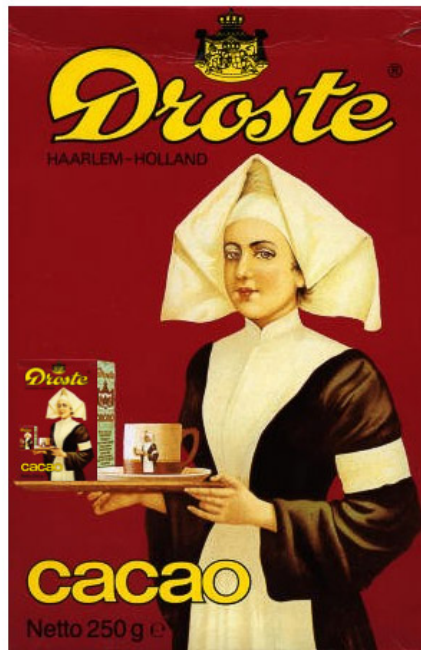
O Teorema de Ponto Fixo de Banach ou teorema da contração é um dos teoremas de existência e unicidade de pontos fixos de uma aplicação e isto também nos fornece um processo de construção para melhorar a aproximação do ponto fixo. Esse processo é denominado *iteração*.

4.1.1 Efeito Droste

Para melhor compreensão sobre o conceito de ponto fixo, observe a Figura 4.1, em que se apresenta o efeito Droste. O efeito Droste é um efeito que permite visualizar a imagem original reduzida na própria imagem. O nome deste efeito originou-se do nome da marca do cacau em pó chamado Droste, o qual era comercializado em 1904. A imagem mostra uma enfermeira segurando a mesma embalagem que, por sua vez, mostra a enfermeira segurando a embalagem, e assim por diante. A cada ponto da imagem original podemos associar um ponto correspondente na embalagem. Por exemplo, se associamos um ponto P_0 como sendo o olho direito da enfermeira, notamos que na embalagem contém o ponto P_1 correspondente ao olho direito. Porém, o olho direito pertencente à embalagem possui um ponto P_2 correspondente na imagem da embalagem, e assim sucessivamente. Logo, podemos associar uma função a esse processo da seguinte maneira: $P_1 = F(P_0)$, $P_2 = F(P_1)$, \dots , $P_{n+1} = F(P_n)$. Independentemente do ponto inicial que escolhermos, seja o olho direito, olho esquerdo ou queixo como sendo o ponto inicial, os pontos es-

tão convergindo para um único ponto. Essa ideia nos fornece o conceito de *sequência convergente*. Em relação a essa imagem podemos dizer que a partir de um determinado momento, mesmo usando a ferramenta do zoom, observamos um número finito de pontos, ou seja, não será possível distinguir os pontos, pois eles estão sobrepostos. Visualmente, a distância entre esses pontos parece ficar cada vez menor a cada imagem reduzida que observamos. Mas será que para qualquer função isso ocorreria? A resposta é não. Neste caso, isso acontece porque a função F é uma contração, ou seja, a imagem da função F é menor que seu domínio. Geometricamente isto significa que a distância entre dois pontos quaisquer do domínio P e Q será maior que a distância de seus pontos correspondentes $F(P)$ e $F(Q)$. Fazendo esse processo sucessivamente teremos a ideia de iteração e tal ponto encontrado será o **ponto fixo**. As ideias e a imagem foram adaptadas de [18] e [19].

Figura 4.1: Efeito Droste



Fonte: [19]

4.1.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 4.1 *Seja $M = (M, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $F : M \rightarrow M$ é chamada de contração em M se existe um número real positivo $k < 1$ tal que, para todo $x, y \in M$*

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

Teorema 4.2 *Seja X um espaço de Banach sobre \mathbb{K} . Se $\emptyset \neq M \subset X$ é um conjunto fechado e a aplicação $F : M \rightarrow M$ é k -contrativa, isto é, existe k , $0 \leq k < 1$, tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in M$, então valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Existência e unicidade de ponto fixo, ou seja, existe um único $x \in M$, tal que $F(x) = x$;*
- (ii) *Convergência do método de iteração, isto é, para cada $x_0 \in M$, a sequência (x_n) dada por $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge para a única solução x da equação $F(x) = x$;*
- (iii) *Estimativas de erro: $\forall n = 0, 1, 2, \dots$, são válidas*

$$\|x_n - x\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \quad (4.2)$$

e

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_{n+1} - x_n\|; \quad (4.3)$$

- (iv) *Razão de convergência: $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ tem-se que $\|x_{n+1} - x\| \leq k\|x_n - x\|$.*

A primeira estimativa de erro, Equação (4.2), também chamada de *estimativa de erro a priori*, pode ser usada no começo de um cálculo para estimar o número de passos necessários para obter uma dada precisão. A segunda estimativa de erro, Equação (4.3), chamada de *estimativa de erro posteriori*, pode ser usada para estágios intermediários ou no final do cálculo.

Demonstração: Para provar (i) e (ii) separamos em dois passos: primeiramente mostraremos que x_n é sequência de Cauchy. Seja $n = 0, 1, 2, \dots$; por hipótese F é k -contrativa, então

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \\ &\leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\ &= k\|F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\| \\ &\leq k^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq k^n\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Sejam $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots$. Somando-se e subtraindo-se os termos x_{n+1} , $x_{n+2}, \dots, x_{n+m-1}$ e, em seguida, utilizando-se a desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+m}\| &= \|(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \dots + (x_{n+m-1} - x_{n+m})\| \\ &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{n+m-1} - x_{n+m}\|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\| &\leq k^n\|x_1 - x_0\|, \\ \|x_{n+1} - x_{n+2}\| &\leq k^{n+1}\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\|x_{n+m-1} - x_{n+m}\| \leq k^{n+m-1} \|x_1 - x_0\|,$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+m}\| &= \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{n+m-1} - x_{n+m}\| \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1}) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Colocando k^n em evidência e fazendo algumas comparações, obtém-se

$$k^n(1 + k + k^2 + \dots + k^{m-1}) \leq k^n(1 + k + k^2 + \dots).$$

Por hipótese $0 \leq k < 1$, pois F é k -contrativa, logo a série converge. Utilizando-se a fórmula da soma de uma série geométrica $(1 + k + k^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$, tem-se

$$\|x_n - x_{n+m}\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

Novamente, pelo fato que $0 \leq k < 1$, tomando-se o limite de $k^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, segue-se que a sequência (x_n) é de Cauchy. Por hipótese, X é espaço de Banach, donde a sequência (x_n) é convergente, ou seja, $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

O segundo passo é mostrar que o limite x é a solução da Equação original (4.1). Seja $x_0 \in M$ e $x_1 = F(x_0)$; como $F(M) \subset M$, obtém-se $x_1 \in M$. Por indução, segue-se que $x_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como M é fechado, $x \in M$, donde $F(x) \in M$. Novamente, como F é k -contrativa, tomando-se o limite tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(x)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k \|x_n - x\| = 0$. Como $x_{n+1} = F(x_n)$ tem-se que $x = F(x)$.

Além disso, devemos provar a unicidade do ponto fixo x . Para isso, suponha que $F(x) = x$ e $F(y) = y$, com x e $y \in M$; então

$$\|x - y\| = \|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Como $0 \leq k < 1$, isto implica $\|x - y\| = 0$, donde $x = y$.

Provaremos agora, o Item (iii). Estimativa de erro a priori. Tomando-se $m \rightarrow \infty$ na desigualdade $\|x_n - x_{n+m}\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$ e sabendo-se que a norma é contínua, segue-se que

$$\|x_n - x\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Estimativa de erro a posteriori. Sejam $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots$. Observamos que

$$\|x_{n+1} - x_{n+m+1}\| \leq \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \|x_{n+2} - x_{n+3}\|$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \|x_{n+m} - x_{n+m+1}\| \\
& \leq (k + k^2 + \dots + k^m) \|x_n - x_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Tomando $m \rightarrow \infty$ tem-se que $\|x_{n+1} - x\| \leq \frac{k}{1-k} \|x_n - x_{n+1}\|$.

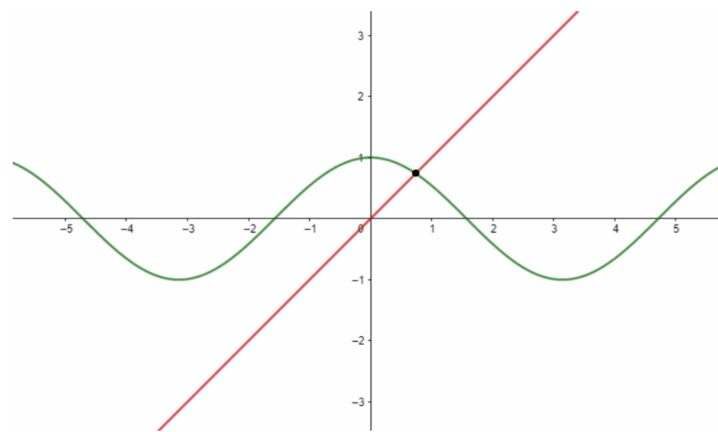
O Item (iv) é imediato; basta notar que $\|x_{n+1} - x\| = \|F(x_n) - F(x)\| \leq k \|x_n - x\|$.

Exemplo 4.3 Seja $-\infty < a < b < \infty$. Se $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma função diferenciável, tal que $|F'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in [a, b]$ e k fixo, então a equação

$$F(x) = x, \quad x \in [a, b],$$

tem única solução. De fato, basta aplicar o Teorema 4.2 com $M = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ e a norma $\|x\| = |x|$. Esta solução corresponde ao ponto de interseção entre o gráfico de F e a função identidade $I(x) = x$, veja a Figura 4.2.

Figura 4.2: Ponto fixo de uma função diferenciável



Fonte: A autora

4.1.3 Aplicações para Equações Diferenciais

Algumas equações originam de modelagens matemáticas que descrevem, por exemplo, algum fenômeno da física. Nesses casos, espera-se que existam soluções e que as mesmas sejam únicas.

Como dito anteriormente o Teorema do Ponto Fixo de Banach é fonte de teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais e integrais.

Dado o *problema de valor inicial* $u'(x) = f(x, u)$, $u(x_0) = u_0$, com hipóteses adequadas sobre f , pode-se usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que tal *problema de valor inicial* tem única solução (Teorema de Picard).

Consideremos uma equação diferencial ordinária de 1° ordem para resolvermos o seguinte *problema de valor inicial*, o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

A Equação (4.4) nos fornece infinitas soluções, mas como muitos problemas que envolvem equações diferenciais descrevem algum fenômeno da física, então é necessário garantir a existência e unicidade de tais soluções.

O *problema de valor inicial* nos garante uma solução local, ou seja, tal solução deve passar por um ponto inicial. Enunciaremos o Teorema da Existência e Unicidade de Picard e usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Banach para prová-lo.

Teorema 4.4 *Seja f uma função contínua no retângulo R , em que*

$$R = \{(x, y) | x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \text{ e } y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

e f limitada em R , isto é,

$$|f(x, y)| \leq c, \quad \forall (x, y) \in R. \quad (4.5)$$

Suponha que f seja lipschitziana em relação à segunda variável em R , ou seja, existe uma constante real k , tal que, para quaisquer $(x, y_1), (x, y_2) \in R$, tem-se

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|. \quad (4.6)$$

Então o problema do valor inicial possui solução única e tal solução pertence ao intervalo $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, em que $\alpha < \min \{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$.

Demonstração: Seja $C(J)$ o espaço métrico de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo J munido com a métrica

$$d(g, h) = \max_{x \in J} |g(x) - h(x)|.$$

Sabemos que o espaço $C(J)$ é completo (toda sequência de Cauchy converge para um elemento do conjunto) pois J é um intervalo fechado.

Seja C^* um subespaço de $C(J)$ consistindo de todas as funções $y \in C(J)$ que satisfazem

$$|y(x) - y_0| \leq c\alpha.$$

Sabemos que o subespaço C^* é fechado em $C(J)$, o qual é completo, donde C^* também é completo, a demonstração desse resultado pode ser encontrado página 30 da referência

[2]. Por integração, provaremos que a Equação (4.4) pode ser escrita como $y = F(y)$, em que $F : C^* \rightarrow C^*$ é definida por

$$F(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (4.7)$$

De fato, F está definida para todo $y \in C^*$. Por hipótese $c\alpha < b$ se $y \in C^*$, então $s \in J$ e $(s, y(s)) \in R$, e a integral em (4.7) existe pois f é contínua em R . Para que F seja uma aplicação de C^* em C^* , usaremos as Equações (4.7) e (4.5), obtendo

$$|F(y(x)) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \leq c|x - x_0| \leq c\alpha. \quad (4.8)$$

Mostraremos agora que F é uma contração em C^* . Pela Equação (4.6),

$$\begin{aligned} |F(y(x)) - F(t(x))| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y(s)) - f(s, t(s))] ds \right| \\ &\leq |x - x_0| \max_{s \in J} k |y(s) - t(s)| \\ &\leq k\alpha d(y, t). \end{aligned}$$

Como a última expressão não depende de x , pode-se tomar o máximo obtendo

$$d(F(y), F(t)) \leq \beta d(y, t), \quad \text{onde} \quad \beta = k\alpha.$$

Como $\beta = k\alpha < 1$, segue-se que F é uma contração em C^* ; o Teorema 4.2 implica que F possui um único ponto fixo $y \in C^*$, ou seja, uma função contínua y em J , satisfazendo $y = T(y)$. Substituindo em (4.7), segue-se que

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (4.9)$$

Como $(s, y(t)) \in R$ e f é contínua, $y(x)$ é diferenciável e satisfaz o problema de valor inicial. Isso conclui a demonstração.

4.2 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um teorema muito interessante. Este assegura que toda aplicação contínua em um subconjunto compacto, convexo e não vazio de um espaço vetorial normado de dimensão finita, possui pelo menos um ponto fixo.

Neste trabalho consideraremos, para cada $n \geq 1$,

$$B^n(a; r) = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\},$$

a bola unitária fechada do espaço \mathbb{R}^n munida com a norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Enunciaremos definições e conceitos úteis para o entendimento desse teorema ilustrando-os para funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma aplicação importante do Teorema do Valor Intermediário está na demonstração de um caso particular do Teorema do Ponto fixo de Brouwer, dado a seguir. De maneira intuitiva, é fácil pensarmos que se $f(a) < k < f(b)$, se a função for contínua, esta interceptará a reta $y = k$ em algum ponto, ou seja, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$. Esse conceito foi estudado e provado analiticamente, pela primeira vez, por Bolzano em 1817.

Teorema 4.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se a função $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ é contínua e $f(a) < k < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.*

A demonstração do Teorema 4.5 pode ser encontrada na página 137 em [3].

Teorema 4.6 *(de Brouwer, $n=1$) Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = c$.*

Demonstração: Suponha que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Além disso, seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. Por hipótese, como x e $f(x)$ são contínuas, $g(x)$ é contínua, sabemos que a soma de funções contínuas é contínua. Além disso, $g(a) = a - f(a) < 0$ e $g(b) = b - f(b) > 0$. Pelo Teorema do Valor intermediário existe um $c \in [a, b]$, tal que $g(c) = c - f(c) = 0$, uma vez que $g(a) < 0 < g(b)$. Portanto $f(c) = c$.

4.2.1 Ponto Fixo de Brouwer em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

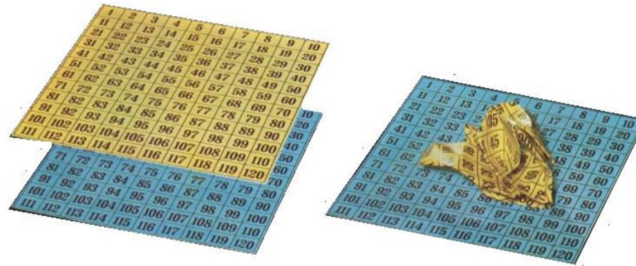
No plano \mathbb{R}^2 , a bola aberta $B(0; 1)$ é o interior de um círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1, ou o interior de um quadrado de centro $(0, 0)$ e lado de comprimento 2, paralelos aos eixos. Esses casos variam de acordo com as métricas que escolhemos.

Uma ilustração curiosa para o caso em duas dimensões, é o fato de considerarmos duas folhas idênticas e numeradas, veja Figura 4.3. Uma das folhas deve ser amassada, de modo que não sofra rasgaduras e colocada sobre a outra folha. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, temos que pelo menos um dos pontos da folha amassada está diretamente acima do ponto correspondente da outra folha. A folha não amassada representa o domínio enquanto a folha amassada representa a imagem, pois sofreu uma aplicação (ato de amassar) sobre ela.

Teorema 4.7 *(de Brouwer, $n=2$). Toda a aplicação contínua $A : B^2 \rightarrow B^2$, tem pelo menos um ponto fixo em B^2 .*

No espaço \mathbb{R}^3 , a bola aberta $B(0, 1)$ é a esfera aberta (sem o bordo) de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1. Uma ilustração para o entendimento deste caso, e, supostamente, é considerado como a origem de tal teorema, é o fato de Brouwer, enquanto mexia uma xícara de café,

Figura 4.3: Folha amassada - Teorema de Brouwer no \mathbb{R}^2



Fonte: [7]

observou que, ao misturar seu café, existia pelo menos uma partícula que não estava em movimento ou que voltava ao seu lugar de origem.

As ideias desses exemplos, o Teorema 4.7 e a Figura 4.3 foram baseadas nos trabalhos de Albuquerque [7] e Su [11].

4.2.2 Ponto Fixo de Brouwer

Teorema 4.8 *A aplicação contínua $A : M \rightarrow M$ possui no mínimo um ponto fixo, em que $M \neq \emptyset$ é compacto e convexo, em um espaço vetorial normado de dimensão finita sobre \mathbb{K} .*

Demonstração: Apresentaremos apenas uma demonstração intuitiva deste teorema, uma vez que uma demonstração rigorosa não faz parte do escopo deste trabalho.

Seja M uma bola fechada em \mathbb{R}^2 , e seja $A : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua.

Suponha que $A : M \rightarrow M$ não possua ponto fixo, isto é, $A(u) \neq u$ for all $u \in M$. Então podemos construir um operador $R : M \rightarrow \partial M$ da seguinte forma. Para cada $u \in M$, considere o segmento reto direcionado do ponto $A(u)$ passando por u até a interseção com o bordo ∂M , dado pelo ponto $R(u)$. Obviamente, a aplicação definida é uma retração, ou seja, R é contínua e $R(u) = u$, $\forall u \in \partial M$. Intuitivamente, tal retração não existe, o que é uma contradição. Uma demonstração rigorosa de que essa retração não existe é totalmente não trivial e, devido a isso, não a apresentaremos aqui. A demonstração desse fato e a Figura 4.4 podem ser encontradas na página 55 de [1].

Um resultado imediato do teorema anterior é dado na sequência.

Corolário 4.9 *A aplicação contínua $B : X \rightarrow X$ possui no mínimo um ponto fixo, em que X é um subconjunto de um espaço vetorial normado homeomorfo a um conjunto M como considerado no Teorema 4.8.*

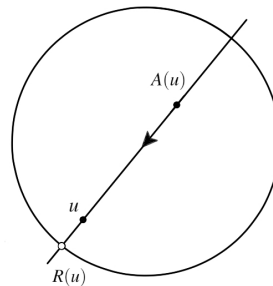
A definição de homeomorfia pode ser encontrada na página 28 da referência [1].

Demonstração: Seja $C : M \rightarrow X$ um homeomorfismo. Então a aplicação

$$C^{-1} \circ B \circ C : M \xrightarrow{C} X \xrightarrow{B} X \xrightarrow{C^{-1}} M \quad (4.10)$$

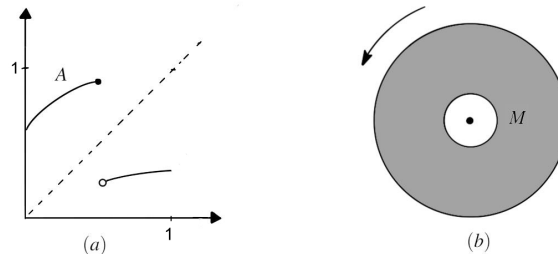
é contínua. Pelo Teorema 4.8, existe um ponto fixo u de $A = C^{-1} \circ B \circ C$, isto é, $C^{-1}(B(Cu)) = u$, $u \in M$. Tomando-se $v = C(u)$ o resultado segue.

Figura 4.4: Aplicação R



Fonte: [1]

Figura 4.5: Contraexemplos



Fonte: [1]

Contraexemplos 4.10 As hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Brouwer são essenciais para a existência de pelo menos um ponto fixo. Apresentamos, a seguir, um contraexemplo para cada uma das hipóteses.

- (i) Observemos o caso em que o conjunto, definido por $M = [0, 1]$, seja compacto e convexo. A aplicação $A : M \rightarrow M$ conforme a Figura 4.5 (a) não é contínua, portanto a aplicação A não possui ponto fixo.
- (ii) Seja o conjunto $M = \mathbb{R}$ e a aplicação contínua $A : M \rightarrow M$ definida por $A(u) = u + 1$. Notamos nesse caso, que a aplicação f é contínua e M é convexo. Como o conjunto M não é compacto, então a aplicação A não possui ponto fixo.

(iii) Seja um anel fechado, conforme a Figura 4.5 (b). Então a rotação $A : M \rightarrow M$ do anel em volta do centro não possui ponto fixo. Embora a aplicação A seja contínua e M seja compacto, M não é convexo, donde o Teorema de Brouwer não é válido.

Os contraexemplos e a Figura 4.5 podem ser encontrados na página 56 da referência [1].

4.3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER

Esse Teorema foi provado por Schauder em 1930. Se a dimensão de um espaço de Banach for finita, então tal teorema coincide com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 4.8).

4.3.1 Aplicações Compactas

Uma das condições necessárias para que o Teorema do Ponto Fixo de Schauder garanta a existência de pelo menos um ponto fixo é de que a aplicação seja compacta. Vejamos a seguinte definição:

Definição 4.11 *Sejam X e Y espaços normado sobre \mathbb{K} . Então a aplicação $A : M \subset X \rightarrow Y$ é denominada aplicação compacta se, e somente se, A é contínua e A transforma conjuntos limitados em conjuntos relativamente compacto.*

Utilizaremos as seguintes notações: seja M um subespaço do espaço vetorial X sobre \mathbb{K} , então

$span(M)$ = menor subespaço vetorial de X contendo M ;

$co(M)$ = menor subconjunto convexo de X contendo M .

A proposição a seguir será uma ferramenta para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Proposição 4.12 *(Teorema das aproximações para Aplicações Compactas) Seja $A : M \subseteq X \rightarrow Y$ uma aplicação compacta, onde X e Y são espaços de Banach sobre \mathbb{K} , e M um subespaço limitado e não vazio de X . Então, para cada $n = 1, 2, \dots$ existe uma aplicação contínua $A_n : M \rightarrow Y$, tal que*

$$\sup_{u \in M} \|A(u) - A_n(u)\| \leq \frac{1}{n} \quad e \quad \dim(span(A_n(M))) < \infty,$$

bem como, $A_n(M) \subseteq co(A(M))$.

A demonstração da Proposição 4.12 pode ser encontrada na página 41 da referência [1].

4.3.2 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Teorema 4.13 *Seja A uma aplicação compacta e M um subconjunto limitado, fechado, convexo e não-vazio do espaço de Banach X sobre \mathbb{K} . Então $A : M \rightarrow M$ possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Seja $u_0 \in M$. Substituindo u por $u - u_0$ se necessário, assumimos que $0 \in M$. Pela Proposição 4.12, segue que para cada $n = 1, 2, \dots$, existe um subespaço de dimensão finita X_n de X e uma aplicação contínua $A_n : M \rightarrow X_n$, tal que

$$\|A(u) - A_n(u)\| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall u \in M. \quad (4.11)$$

Definimos $M_n = X_n \cap M$. Então, M_n é um subconjunto de X_n , limitado, fechado e convexo com $0 \in M_n$ e $A_n(M) \subseteq \text{co}(A(M)) \subseteq M$, visto que M é convexo.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer 4.8, a aplicação $A_n : M_n \rightarrow M_n$, tem um ponto fixo, isto é,

$$A_n(u_n) = u_n, \quad u_n \in M_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Pela Equação (4.11), temos

$$\|A(u_n) - u_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Como $M_n \subseteq M, \forall n$, e M é limitado, segue-se que a sequência (u_n) também é limitada. A compacidade da aplicação $A : M \rightarrow M$ implica que existe uma subsequência, agora denotada por (u_n) , tal que, quando $n \rightarrow \infty$, segue-se

$$A(u_n) \rightarrow v.$$

Pela Equação (4.13), $\|v - u_n\| \leq \|v - A(u_n)\| + \|A(u_n) - u_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $u_n \rightarrow v$ quando $n \rightarrow \infty$. Visto que $A(u_n) \in M$ para todo n e o conjunto M é fechado, obtemos que $v \in M$. Finalmente, como a aplicação é $A : M \rightarrow M$ é contínua, obtem-se $A(v) = v, v \in M$, como requerido.

4.3.3 Aplicações em Equações Integrais

Pode-se mostrar utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder que a equação integral dada a seguir possui solução:

$$u(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y)) dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.14)$$

em que $-\infty < a < b < \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para qualquer $r > 0$, defina $Q = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in [a, b], |u| \leq r\}$.

Enunciaremos o Teorema de Arzelà-Ascoli, pois tal teorema será útil para provar que a aplicação $A : M \rightarrow M$, a qual definiremos posteriormente, é compacta.

Teorema 4.14 *Seja $X = C[a, b]$ com a norma definida por $\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ e $-\infty < a < b < \infty$. Dado o conjunto $M \subset X$, tal que:*

(i) *M é limitado, isto é, $\|u\| \leq r$ para todo $u \in M$ e qualquer $r \geq 0$;*

(ii) *M é equicontínuo, isto é, por definição, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$|x - y| < \delta \text{ e } u \in M \implies |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Então, M é um subconjunto de X relativamente compacto.

A demonstração do Teorema 4.14 pode ser encontrada na página 35 da referência [1].

A proposição a seguir, garante que a Equação (4.14) possui solução desde que todas as hipóteses do Teorema 4.13 sejam satisfeitas.

Proposição 4.15 *Suponha que sejam válidas as seguintes condições:*

(a) *a função $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;*

(b) *definimos $(b - a)\mu = \max_{(x,y,u) \in Q} |F(x, y, u)|$. Seja dado λ um número real tal que $|\lambda|\mu \leq r$;*

(c) *o conjunto $X = C[a, b]$ e $M = \{u \in X \mid \|u\| \leq r\}$.*

Então, a Equação (4.14) possui pelo menos uma solução em M .

Demonstração: Definimos a aplicação

$$A(u(x)) = \lambda \int_a^b F(x, y, u(y)) dy, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (4.15)$$

Então a Equação (4.14) corresponde ao problema de ponto fixo

$$u = A(u), \quad u \in M. \quad (4.16)$$

Para satisfazer as hipóteses do Teorema 4.13, mostremos que a aplicação $A : M \rightarrow X$, é compacta. Notemos que a função F é uniformemente contínua, pois F é contínua em um subconjunto compacto, não vazio Q . Isto implica que, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|F(x, y, u) - F(z, y, v)| < \epsilon, \quad (4.17)$$

para todo $(x, y, u), (z, y, v) \in Q$ em que $|x - z| + |u - v| < \delta$.

A aplicação $A : M \rightarrow X$ é contínua. De fato, se $u \in M$, então a função $u = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, e $|u(x)| \leq r$ para todo $y \in [a, b]$. Portanto, a função $A(u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ também é contínua. Seja $u, v \in M$. Então

$$\|u - v\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(y) - v(y)| < \delta$$

implica

$$\|A(u) - A(v)\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b [F(x, y, u(y)) - F(x, y, v(y))] dy \right| \leq (b - a)\epsilon.$$

Portanto $A : M \rightarrow X$ é contínua.

Mostremos agora, que a aplicação $A : M \rightarrow X$ é compacta. Por hipótese M é um conjunto limitado, portanto basta mostrar que o conjunto $A(M)$ é relativamente compacto. Pelo Teorema 4.14, é equivalente mostrar que o conjunto $A(M)$ é limitado e equicontínuo. $A(M)$ é limitado, pois para todo $u \in M$,

$$\|A(u)\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b F(x, y, u(y)) dy \right| \leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |F(x, y, u(y))|.$$

Além disso, o conjunto $A(M)$ é equicontínuo. Seja $|x - z| < \delta$ e $x, z \in [a, b]$. Então pela Equação (4.17), temos

$$|A(u(x)) - A(u(z))| \leq \left| \int_a^b [F(x, y, u(y)) - F(z, y, u(y))] dy \right| \leq (b - a)\epsilon,$$

para todo $u \in M$.

Sendo assim, a aplicação $A : M \rightarrow M$ é compacta. Para cada $u \in M$,

$$\|A(u)\| \leq |\lambda| \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b F(x, y, u(y)) dy \right| \leq |\lambda|\mu \leq r. \quad (4.18)$$

Consequentemente $A(M) \subseteq M$. Assim, o Teorema de Ponto Fixo de Schauder nos garante que a Equação (4.16) possui solução.

5 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PONTO FIXO

Apesar de já termos visto algumas aplicações do teorema do ponto fixo no estudo da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, Subseção 4.1.3, e equações integrais, Subseção 4.3.3, neste capítulo no dedicamos a outras aplicações que servem como motivação ao estudo da teoria do ponto fixo, como por exemplo, as aplicações no Ensino Médio, na Geometria Fractal e nos buscadores do Google.

5.1 APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área.[9]

Segundo as competências e habilidades direcionadas ao Ensino Médio o aluno deve ser capaz de modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. Uma das habilidades citadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é: resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1^o e 2^o graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais (EM13MAT302).[9]

O Ensino de funções no Ensino Médio é pautado em conhecer as características das funções reais, conhecer o comportamento das funções no plano cartesiano, bem como seus domínios e imagens, ou seja, condições de existência para que essas funções estejam bem definidas. Assim, compreender essa característica (continuidade) de uma função, mesmo que intuitivamente, é importante para que o aluno saiba da existência de funções “bem comportadas”. Além disso, conceitos sobre função identidade - ou bissetriz dos quadrantes ímpares (1^o e 3^o), função composta, raízes de função polinomial com grau menor que 2, também são abordados no Ensino Médio. Tais conceitos são bases para a compreensão da aplicação $F(x) = x$, pois o Teorema de Ponto Fixo em particular é uma função polinomial, tal que $f(x) = x$.

É interessante observar que o Teorema do Valor Intermediário é de fácil compreensão e pode ser abordado no Ensino Médio para determinar as raízes de uma determinada função.

5.1.1 Ponto Fixo de uma função

Notamos que exames de ingresso no Ensino Superior abordam questões envolvendo Pontos Fixos de funções polinomiais. A questão a seguir, foi proposta no vestibular da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, referenciada em [8].

Exemplo 5.1 *Questão 44, UESB*

Ponto fixo do gráfico de uma função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , é aquele cuja ordenada é igual a sua própria abscissa. Sabe-se que uma função quadrática $f(x)$, tal que $f(1) = -4$, $f(0) = -8$ e $f(-1) = -10$, possui dois pontos fixos. De acordo com essas informações, pode-se afirmar que a distância, em u.c., entre os pontos fixos da função $f(x)$ é igual a:

(01) $3\sqrt{2}$

(02) $4\sqrt{2}$

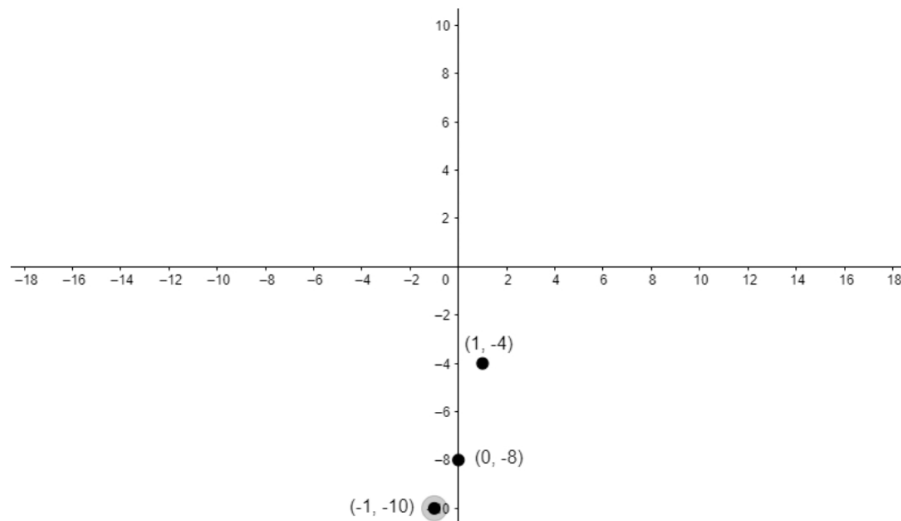
(03) $5\sqrt{2}$

(04) $6\sqrt{2}$

(05) $7\sqrt{2}$

Resolução: Por hipótese sabe-se que a função é uma função quadrática dada por $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, para quaisquer a , b e c pertencentes a \mathbb{R} e os pontos $(1, -4)$, $(0, -8)$ e $(-1, -10)$ pertencem a função, veja a Figura 5.1.

Figura 5.1: Pontos pertencentes ao gráfico da função f



Fonte: A autora

Com essas informações, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4, \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -8, \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -10. \end{cases}$$

Da segunda equação temos $c = -8$, substituindo na primeira e terceira equação, temos:

$$\begin{cases} a + b - 8 = -4, \\ a - b - 8 = -10. \end{cases}$$

Utilizando o método da soma das equações para a resolução de sistemas, obtemos:

$$2 \cdot a - 16 = -14$$

$$2 \cdot a = -14 + 16$$

$$2 \cdot a = 2$$

$$a = 1$$

Substituindo $a = 1$ na primeira equação, obtemos:

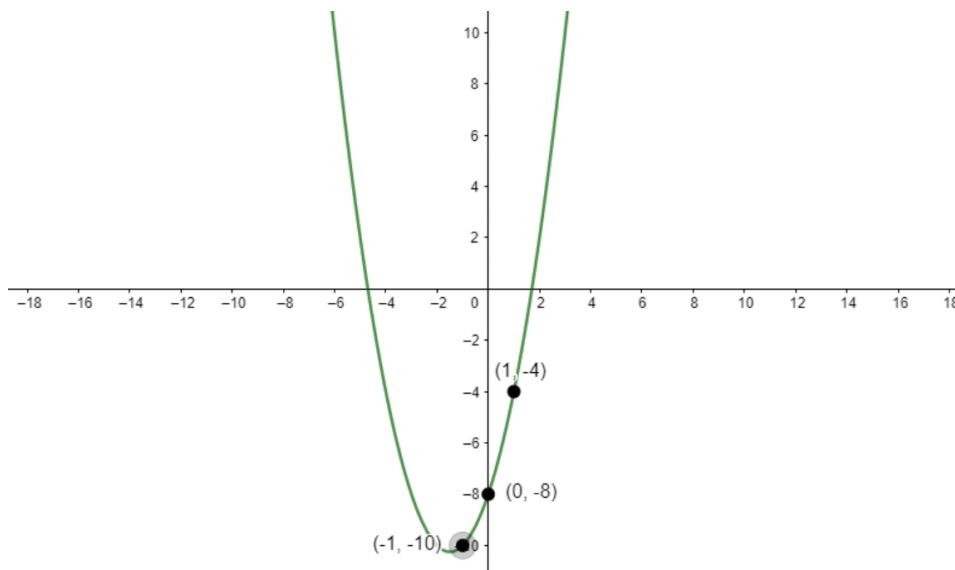
$$1 + b - 8 = -4$$

$$b - 7 = -4$$

$$b = -4 + 7$$

$$b = 3$$

Figura 5.2: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 8$



Fonte: A autora

Portanto, a função é dada por $f(x) = x^2 + 3x - 8$, veja a Figura 5.2. Por hipótese, a função possui dois pontos fixos, então devemos encontrar os valores x_1 e x_2 , tais que $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$. Logo, basta calcular $f(x) = x$, ou seja, a interseção dos gráficos das funções f e a função identidade, veja a Figura 5.3, ou ainda, as raízes da função g dada por $g(x) = f(x) - x$, isto é, $g(x) = (x^2 + 3x - 8) - x$. Portanto,

$$g(x) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

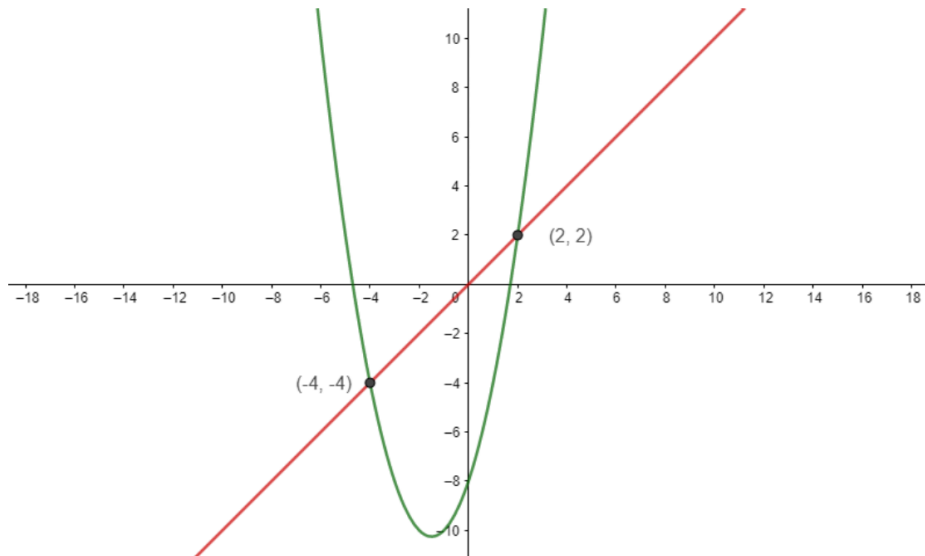
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 2$$

Figura 5.3: Pontos fixos da função f



Fonte: A autora

Portanto, os valores -4 e 2 são pontos fixos da função f , de fato:

$$f(-4) = (-4)^2 + 3(-4) - 8 = 16 - 12 - 8 \Rightarrow f(-4) = -4,$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 8 = 4 + 6 - 8 \Rightarrow f(2) = 2.$$

Conseqüentemente, a distância entre os pontos $(2, 2)$ e $(-4, -4)$ pode ser calculada utilizando-se o Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância entre dois pontos a qual é consequência do mesmo, logo:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{((-4) - 2)^2 + ((-4) - 2)^2}$$

$$d = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

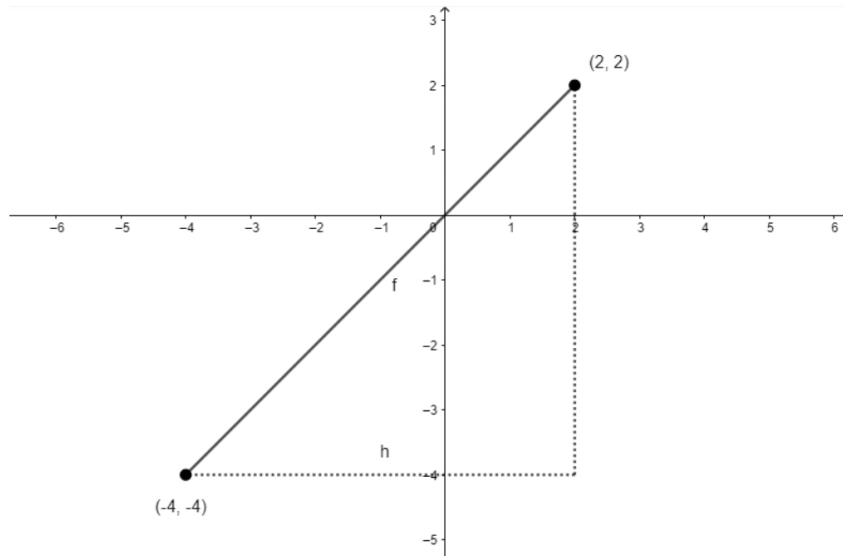
$$d = \sqrt{2 \cdot 36}$$

$$d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36}$$

$$d = 6\sqrt{2}$$

A Figura 5.4 representa a distância entre os pontos fixos.

Portanto, a distância, em u.c., entre os pontos fixos da função $f(x)$ é igual a $d = 6\sqrt{2}$.

Figura 5.4: Distância entre os pontos fixos da função f 

Fonte: A autora

5.1.2 Ponto Fixo da função raiz quadrada

O efeito Droste apresentado na Seção 4.1.1 pode ser aplicado em funções matemáticas. Por exemplo, encontrar o ponto fixo da função raiz quadrada de um número real.

Façamos os seguintes experimentos:

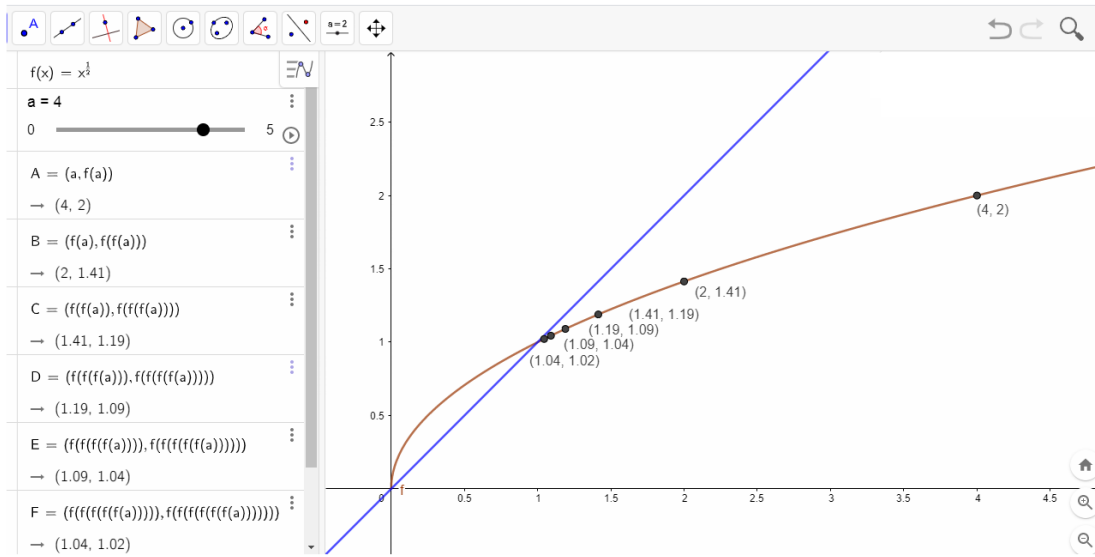
Experimento 1: escolha um número real positivo e extraia a sua raiz quadrada com o auxílio de uma calculadora. Depois extraia a raiz quadrada do resultado obtido, e assim, sucessivamente. Após algumas repetições, você irá observar que tal número aproxima-se de 1 a cada iteração. Isso ocorre pois o ponto fixo da raiz quadrada é o número 1.

Experimento 2: com o uso *software Geogebra*, digite no campo de entrada a função raiz quadrada dada por $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Novamente no campo de entrada, crie o primeiro ponto digitando $A = (a, f(a))$. O comando deslizante, dado por a , será criado automaticamente e representará o valor inicial escolhido x_0 da função f e abscissa do primeiro ponto da sequência. O segundo ponto será o ponto $B = (f(a), f(f(a)))$, o terceiro ponto será o ponto $C = (f(f(a)), f(f(f(a))))$ e assim sucessivamente. Observe a sequência de pontos aproximando-se do número 1. Veja a Figura 5.5 se $a = x_0 > 1$ e a Figura 5.6 se $a = x_0 < 1$. Note que mesmo que alteremos o valor inicial, a sequência continua convergindo para o número 1.

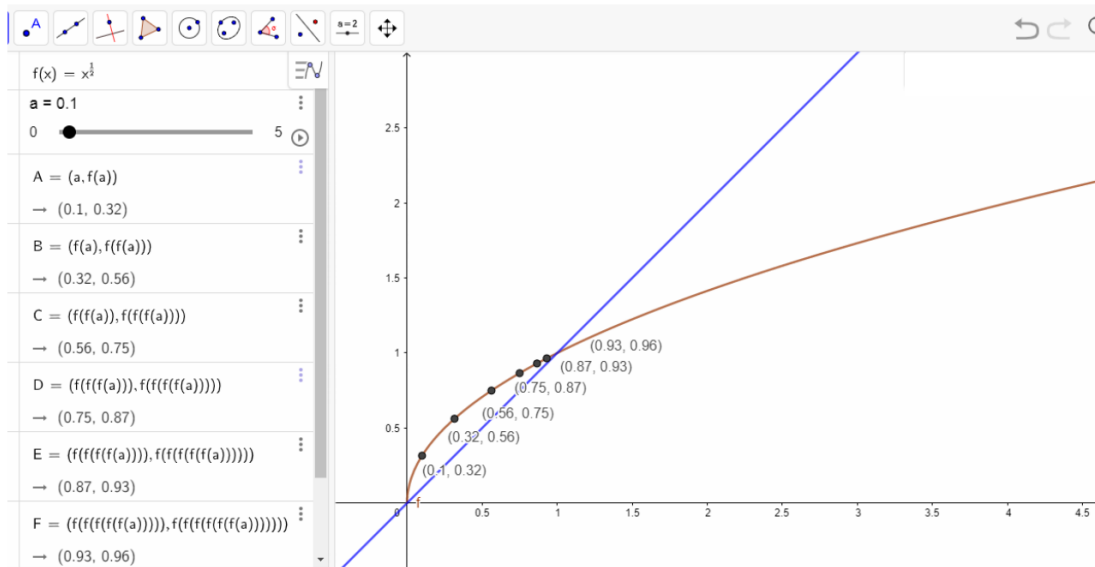
A Figura 5.4 representa a distância entre os pontos fixos.

5.1.3 Processo Iterativo

O processo iterativo pode ser muito eficaz no caso em que desejamos encontrar pelo menos uma raiz real de uma função. O exemplo a seguir é um exercício enunciado na página 305 de [2].

Figura 5.5: Função Raiz Quadrada, $a = x_0 > 1$ 

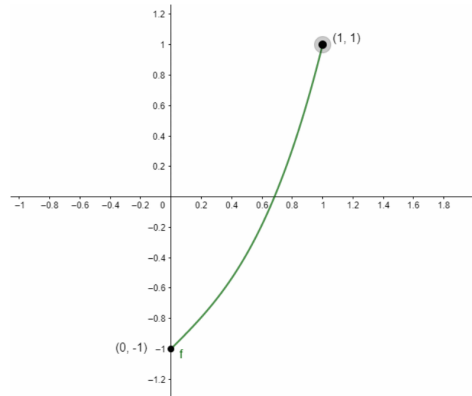
Fonte: A autora

Figura 5.6: Função Raiz Quadrada, $a = x_0 < 1$ 

Fonte: A autora

Exemplo 5.2 Considere o processo iterativo para resolver $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.

Analisando os possíveis intervalos para que f tenha uma raiz real, notamos que a raiz pertence ao intervalo $[0, 1]$, pois $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 4.6) temos que $x^* \in [0, 1]$, tal que $f(x^*) = 0$, veja a Figura 5.7. Para saber o momento em que deve-se parar as iterações, escolhe-se um certo x^* tal que $f(x^*) < 0, 1$ e, para descobrir se tal x^* é suficientemente bom, basta substituí-lo na função f .

Figura 5.7: Gráfico da função $f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 

Fonte: A autora

1º passo. Encontremos as possíveis funções de iteração $g(x) = x$.

- $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \implies x(x^2 + 1) - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{x^2 + 1}$.
Logo $g_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;

- $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \implies x = 1 - x^3$.
Logo $g_2(x) = 1 - x^3$;

- $f(x) = x^3 + x - 1 = 0 \implies x(x^2 + 1) - 1 = 0 \implies x^2 + 1 = \frac{1}{x} \implies x^2 = \frac{1}{x} - 1$.
Logo $g_3(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.

Faremos primeiramente para $g_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. A condição suficiente para a convergência de g é que g seja continuamente diferenciável e $|g'_1(x)| < 1$, para todo $x \in [0, 1]$. Verifiquemos:

$$|g'_1(x)| = \left| \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \right| = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Analisando para os pontos dos extremos $[0, 1]$, temos que

$$|g'_1(0)| = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0 \quad \text{e} \quad |g'_1(1)| = \frac{2 \cdot 1}{(1^2 + 1)^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

Mas isso não é suficiente para provar que $|g'_1(x)| < 1$. Vamos analisar o máximo de $g'_1(x)$ calculando as raízes de $g''_1(x)$, ou seja, $g''_1(x) = 0$. Verifiquemos:

$$|g''_1(x)| = \left| \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} \right| = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

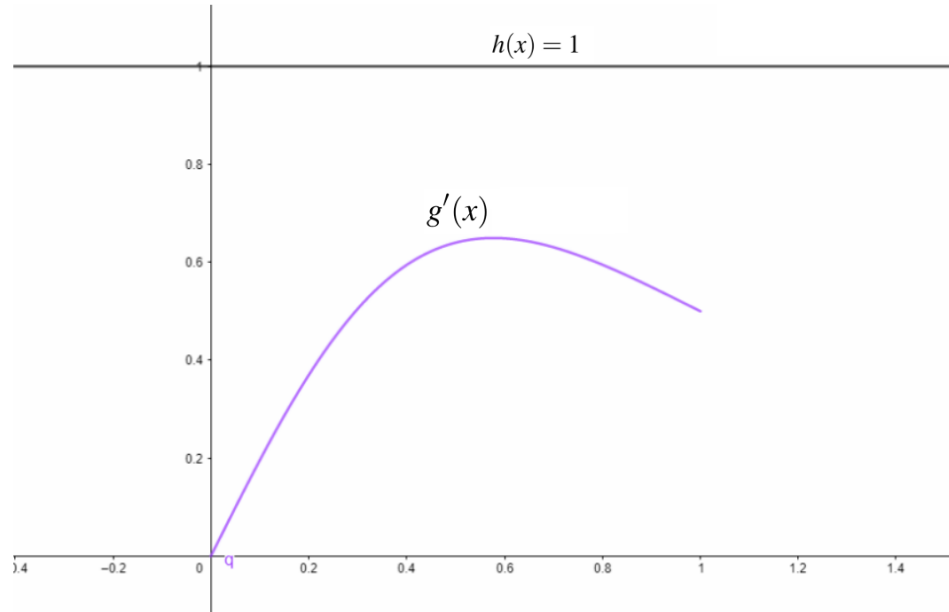
Portanto,

$$|g''_1(x)| = 0 \implies \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Como vimos, $g'_1(x)$ assume o valor máximo, no intervalo $[0, 1]$, em $x \approx 0,58$, logo

$g'_1(0,58) \approx 0,65 < 1$. Logo a função de iteração $g_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$ satisfaz a condição $|g'_1(x)| < 1$, veja a Figura 5.8.

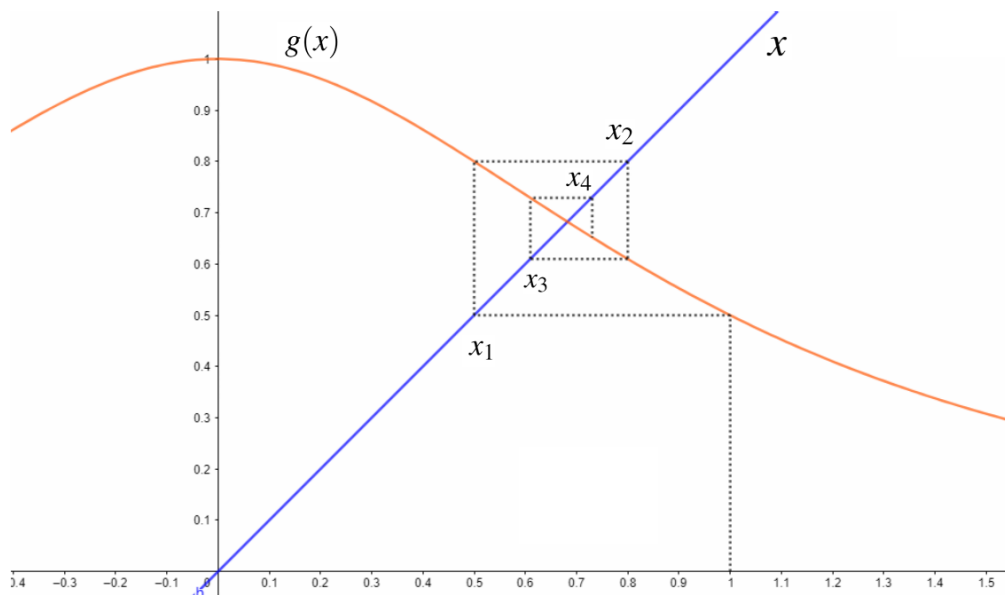
Figura 5.8: $|g'_1(x)| < 1$



Fonte: A autora

Escolhendo $x_0 = 1$ e realizando 4 passos, temos o seguinte gráfico, veja a Figura 5.9 e a Tabela 5.1.

Figura 5.9: Processo de iteração de $g_1(x)$



Fonte: A autora

Tabela 5.1: Iteração de g_1

i	x_i	$g_1(x_i) = x_{i+1}$	$f(x_{i+1}) = x^3 + x - 1$	$ f(x_{i+1}) $
0	1	0,5	-0,375	0,375
1	0,5	0,8	0,312	0,312
2	0,8	0,609...	-0,163...	0,163...
3	0,609...	0,728...	0,116...	0,116...
4	0,728...	0,652...	-0,068...	0,068...

Fonte: A autora

Para $i = 0$, temos

$$x_0 = 1 \implies \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Para que possamos verificar a qualidade da solução, substituímos o valor encontrado em $f(x)$, assim temos

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} \implies |-0,375| = 0,375.$$

Para $i = 1$, temos

$$x_1 = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Substituindo o valor encontrado em $f(x)$, temos

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{4}{5} - 1 = \frac{39}{125} \implies |0,312| = 0,312.$$

Para $i = 2$, temos

$$x_2 = \frac{4}{5} \implies \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} = \frac{25}{41} \approx 0,60975609756.$$

Substituindo o valor encontrado em $f(x)$, temos

$$\left(\frac{25}{41}\right)^3 + \frac{25}{41} - 1 = -\frac{11271}{68921} \implies |-0,16353506188| = 0,16353506188.$$

Para $i = 3$, temos

$$x_3 = \frac{25}{41} \implies \frac{1}{\left(\frac{25}{41}\right)^2 + 1} = \frac{1681}{2306} \approx 0,7289679098.$$

Substituindo o valor encontrado em $f(x)$, temos

$$\left(\frac{1681}{2306}\right)^3 + \frac{1681}{2306} - 1 = \frac{1426581741}{12262468616} \implies |0,1163372389| = 0,1163372389.$$

Para $i = 4$, temos

$$x_4 = \frac{1681}{2306} \implies \frac{1}{\left(\frac{1681}{2306}\right)^2 + 1} = \frac{5317636}{8143397} \approx 0,6529997248.$$

Substituindo o valor encontrado em $f(x)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{5317636}{8143397}\right)^3 + \frac{5317636}{8143397} - 1 &= -\frac{37021963118096871993}{540028677420051831773} \\ \implies |-0,0685555502| &= 0,0685555502. \end{aligned}$$

Portanto, $x_5 = g_1(x_4) \approx 0,6529997248$ é uma aproximação para a raiz real da função $f(x) = x^3 + x - 1$, com $f(x_5) < 0,1$.

A segunda função de iteração é dada por $g_2(x) = 1 - x^3$. Notemos que a derivada de $|g_2'(x)|$ é dada por $|-3x^2|$. Analisando para os pontos extremos $[0, 1]$, temos que

$$|g_2'(0)| = |-3 \cdot 0^2| = 0 < 1 \quad \text{e} \quad |g_2'(1)| = |-3 \cdot 1^2| = |-3| = 3 > 1.$$

Como a condição $|g_2'| < 1$ não é satisfeita, isto significa que tal função g_2 não atende as hipóteses que garantem a convergência. De fato, mostremos o que acontece quando a condição não é satisfeita. Tomando como valor inicial $x_0 = 1$, notamos que a sequência gerada fica alternando entre os valores 0 e 1 e não se aproxima da raiz desejada, veja a Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Iteração de g_2 para $x_0 = 1$

i	x_i	$g_2(x_i) = x_{i+1}$	$f(x_{i+1}) = x^3 + x - 1$	$ f(x_{i+1}) $
0	1	0	1	1
1	0	1	3	3

Fonte: A autora

Se tomarmos o valor inicial $x_0 = 0,5$, a sequência gerada também não irá convergir. Aqui vemos a importância de que a função de iteração seja convergente, veja a Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Iteração de g_2 para $x_0 = 0,5$

i	x_i	$g_2(x_i) = x_{i+1}$	$f(x_{i+1}) = x^3 + x - 1$	$ f(x_{i+1}) $
0	0,5	0,875	0,544...	0,544...
1	0,875	0,330...	-0,633...	0,633...
2	0,330...	0,964...	0,859...	0,859...

Fonte: A autora

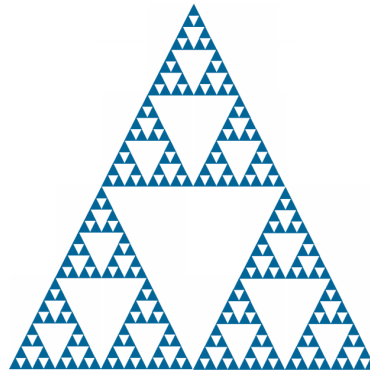
Analogamente para a função de iteração $g_3(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$, temos que a condição $|g'(x)| < 1$ não é satisfeita e portanto a função de iteração g_3 não é convergente.

5.2 PONTO FIXO E A GEOMETRIA FRACTAL

Os fractais são objetos compostos por partes que assemelham-se ao objeto como um todo. Os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte a partir de inúmeras repetições e transformações geométricas. A palavra "fractal" vem do adjetivo em latim *fractus*, que significa fracionar, quebrar, gerar fragmentos irregulares. Tal estudo teve início em 1975, pelo matemático francês Benoit Mandelbrot. A Geometria Fractal descreve diversos comportamentos na natureza e pode ser aplicada em diversas áreas, tais como: Ciência, Arte e Tecnologia. Geralmente é gerado por uma função, a qual iterada repetidas vezes fornece-nos a imagem do fractal idêntica à inicial. Esse processo iterativo remete-nos ao conceito de ponto fixo de uma função.

Os conceitos a seguir foram adaptadas dos trabalhos de [12], [15] e [18]. Se analisarmos o Triângulo de Sierpinski, veja a Figura 5.10, veremos que à medida que aproximamos a imagem, uma nova imagem idêntica à primeira é formada.

Figura 5.10: Triângulo de Sierpinski



Fonte: A autora

Seja S a imagem do Triângulo de Sierpinski. Note que a imagem pode ser reconstruída com a composição de três transformações geométricas:

- T_1 : a partir do vértice inferior esquerdo, reduzimos pela metade as medidas dos lados da imagem;
- T_2 : transladamos a imagem à direita de forma que suas bases sejam adjacentes;
- T_3 : transladamos novamente a imagem, de forma que a base da nova imagem seja adjacente ao topo das duas imagens anteriores.

Chamaremos de F o processo que realiza as três transformações citadas acima:

$$F = T_1 \cup T_2 \cup T_3.$$

Mesmo após realizar tal processo, observamos que a nova imagem gerada é idêntica à inicial, ou seja, $F(S) = S$. Isso significa que a imagem do Triângulo de Sierpinski é o ponto fixo da transformação geométrica F .

E se pensarmos no processo inverso? Partindo de um triângulo inicial, ou uma outra figura geométrica qualquer, fazendo algumas transformações geométricas, a saber, simetria de translação e a homotetia, repetidas vezes construiremos o Triângulo de Sierpinski.

Essa ideia de construir um fractal a partir de inúmeras iterações é muito utilizada para a compressão de imagens. Imagine se nosso computador precisasse guardar em sua memória as imagens reais? Para que isso fosse possível, precisaríamos de uma memória muito grande para esse computador. Foi então que surgiu a ideia de compressão de imagens. Existem muitos procedimentos para a compressão de imagens digitais, mas o mais conhecido é o JPEG. Essa técnica de construir figuras através da repetição, fazendo inúmeras transformações geométricas, foi introduzida pelo matemático Michael Barnsley, a qual foi chamada de *sistemas de funções iteradas*. Construiremos o Triângulo de Sierpinski (ou tapete de Sierpinski) utilizando essa ideia.

Optamos por realizar tal construção de forma simplificada, pois tal construção pode ser aplicada nos anos finais do Ensino Fundamental, uma vez que transformações geométricas, plano cartesiano e conceitos básicos sobre fractais fazem parte do currículo. Dessa forma, além de explorarmos conteúdos essenciais, também exploraremos uma área da Matemática considerada exclusiva para Ensino Superior, a saber, Teorema do Ponto Fixo.

O exemplo a seguir pode ser realizado em turmas, a partir, do 7º ano do Ensino Fundamental, utilizando folha quadriculada ou o *software* Geogebra. Para obter-se um resultado satisfatório, sugere-se realizar, no mínimo, quatro vezes a transformação F , a qual definiremos a seguir.

Exemplo 5.3 Seja o quadrado $ABCD$, onde $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$. Construa o Triângulo de Sierpinski seguindo as orientações.

A primeira transformação geométrica será uma homotetia com fator $\frac{1}{2}$, ou seja, uma redução pela metade das medidas dos lados, veja a Figura 5.11. Neste caso, basta multiplicarmos todas as coordenadas dos pontos por $\frac{1}{2}$. Após esse processo, obtemos:

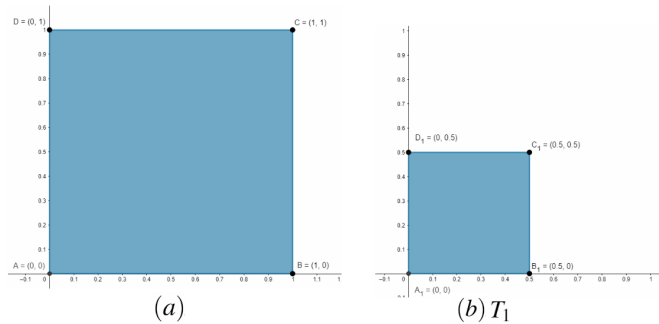
$$T_1(A) = A_1 = (0, 0),$$

$$T_1(B) = B_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$T_1(C) = C_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$T_1(D) = D_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Figura 5.11: Transformação geométrica T_1



Fonte: A autora

A segunda transformação geométrica será a simetria de translação de $\frac{1}{2}$ unidade à direita, ou seja, devemos adicionar $\frac{1}{2}$ unidade na coordenada das abscissas de todos os pontos, veja a Figura 5.12(c). Assim, obtemos:

$$T_2(A_1) = A_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$T_2(B_1) = B_2 = \left(1, 0\right),$$

$$T_2(C_1) = C_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right),$$

$$T_2(D_1) = D_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A terceira transformação geométrica será novamente a simetria de translação de $\frac{1}{2}$, porém agora queremos transladar $\frac{1}{4}$ unidade à direita e $\frac{1}{2}$ unidade à cima, ou seja, devemos adicionar $\frac{1}{4}$ unidade na coordenada das abscissas e adicionar $\frac{1}{2}$ unidade na coordenada das ordenadas de todos os pontos, veja a Figura 5.12(d). Assim, obtemos

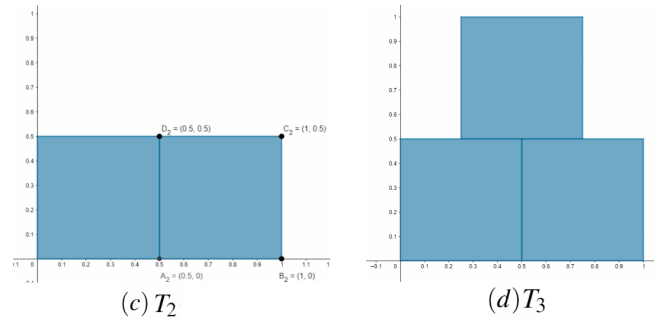
$$T_3(A_1) = A_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$T_3(B_1) = B_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$T_3(C_1) = C_3 = \left(\frac{3}{4}, 1\right),$$

$$T_3(D_1) = D_3 = \left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

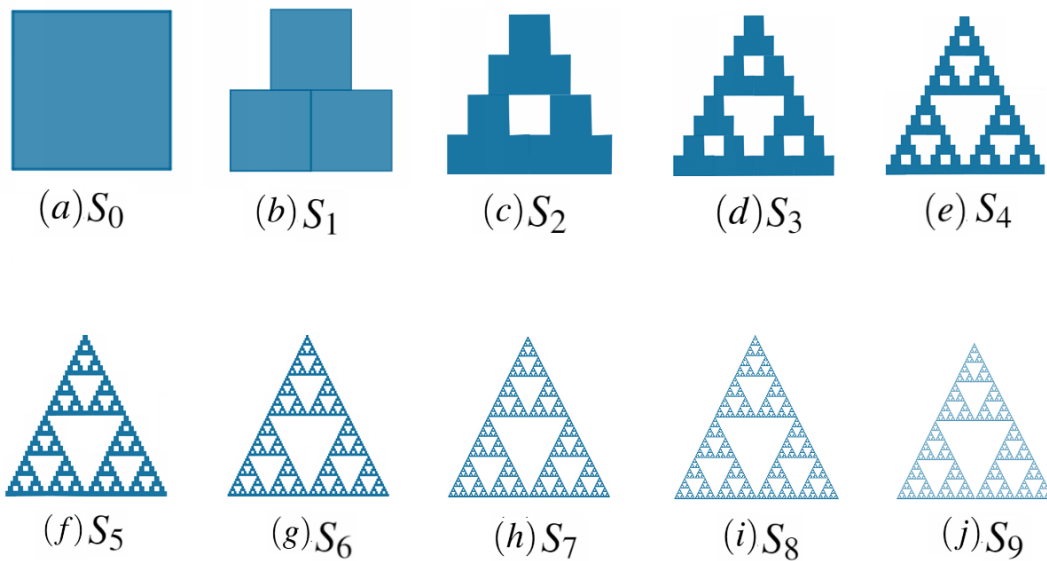
Chamaremos novamente de F o processo que realiza as três transformações citadas

Figura 5.12: Transformações geométricas T_2 e T_3 

Fonte: A autora

acima, ou seja,

$$F = T_1 \cup T_2 \cup T_3.$$

Figura 5.13: $S = F(S)$ 

Fonte: A autora

Note que na primeira transformação a imagem gerada, não lembra em nada o Triângulo de Sierpinski, mas se repetirmos inúmeras vezes a transformação F , observamos que a partir da nona iteração F^9 nossos olhos não conseguem distinguir alguns detalhes, nos fazendo acreditar que a imagem, veja a Figura 5.13 (j), é o Triângulo de Sierpinski. Assim, concluímos o exemplo.

Se continuarmos o processo até a F^{20} , ou F^{30} , dependendo das dimensões dessa imagem, nada irá mudar. Isto significa que o computador pode ser programado para fazer

quantas iterações forem necessárias, sem que precise armazenar inúmeras informações e sempre apresentar um ótimo resultado final. Seja S_n uma sequência de imagens geradas a partir das iterações F , onde S_0 é a imagem inicial. Neste caso, utilizamos o quadrado por ser a forma de um *pixel*, mas independente da imagem inicial, após o processo iterativo de F o resultado seria o mesmo. Isso acontece, porque a função de iteração F converge para o Triângulo de Sierpinski. Assim temos que S é o ponto fixo de F , ou seja

$$F(S) = S.$$

5.3 PONTO FIXO E O BUSCADOR DO GOOGLE

Você já parou para pensar como os buscadores são capazes de lhe fornecer em poucos minutos um determinado assunto pesquisado na internet? A maioria dos buscadores classificam os resultados pela busca por páginas que possuem as palavras ou frases digitadas. O algoritmo desses buscadores é chamado de *Matching*. O algoritmo *Matching* classifica as páginas de acordo com o conteúdo das páginas ou a proximidade das palavras pesquisadas.

Mas qual o diferencial do buscador do Google? O Google possui um algoritmo para classificar os resultados da pesquisa chamado *algoritmo PageRank*. Tudo começou quando L. Page, S. Brin, R. Motwani e T. Winograd, pesquisadores da Universidade de Stanford, na Califórnia, nos Estados Unidos, propuseram um algoritmo para classificar as páginas na web, levando em consideração a relevância desse site. No entanto, quem fundou a empresa Google foram Sergey Brin e Larry Page, em 1998. A relevância de um determinado site era determinada pelo número de páginas e pela importância dessas páginas. Após diversas sugestões, optaram por escolher Google, uma brincadeira com a palavra "googol", termo matemático para designar o número representado pelo dígito 1 seguido de cem dígitos 0. A inovação de Page e Brin foi perceber que era possível usar a estrutura da web para determinar a relevância das páginas, pois tais páginas na internet são conectadas por *hyperlinks* (ou apenas links). Assim as páginas são como nós de um grafo direcionado e os links são como as arestas.

Suponha que você deseje pesquisar como fazer um bom café. Em um primeiro momento o buscador do Google fará uma seleção de todas as páginas que contêm a palavra café. No segundo momento, ele precisará ranquear essas páginas de acordo com sua relevância. A ideia é simples: a quantidade de links que chegam e que saem de uma página devem dizer alguma coisa sobre a relevância dela, ou seja, o algoritmo atribui uma nota para a página, a qual diz o quão importante ela é.

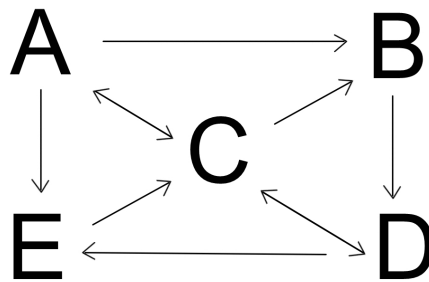
Enquanto outros buscadores classificam as páginas de acordo com a quantidade de conteúdo, o *PageRank* leva em consideração não somente a quantidade, mas a qualidade desses conteúdos. Foi essa ideia que garantiu o sucesso do Google. A relevância de uma

página é dada pela relevância das outras páginas que indicam a primeira, dividida pelo número de links que saem delas. O processo de repetição pode ser associado ao processo de iteração. Isso é necessário para que as notas sejam atualizadas, isto é, os valores obtidos em cada iteração convergem para os valores desejados de *PageRank*. Tais conceitos e exemplos foram adaptados dos trabalhos de [10], [12] e os vídeos citados em [14].

Vejam os seguintes exemplos:

Exemplo 5.4 Sejam A, B, C, D e E páginas chamadas de nós, as quais são interligadas pelas arestas, ou seja, pelos links. Chamaremos de PR a relevância das páginas. Assim temos que $PR(A)$, $PR(B)$, $PR(C)$, $PR(D)$ e $PR(E)$ indicam a relevância das páginas A, B, C, D e E, respectivamente, veja a Figura 5.14. Para descobrir a importância de cada página o algoritmo *PageRank* repete uma quantidade n de vezes. Como vimos anteriormente, o processo de repetição pode ser associado ao processo de iteração.

Figura 5.14: Diagrama 1



Fonte: A autora

Iteração 0: Inicialmente, todas as páginas possuem a mesma nota *PageRank*, ou seja, na iteração 0 a relevância das páginas são iguais, veja a Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Iteração 0

Página	Iteração 0	Iteração 1	Iteração 2	<i>PageRank</i>	Classificação
A	1				
B	1				
C	1				
D	1				
E	1				

Fonte: A autora

Iteração 1:

PageRank da página A: Analisando a página A, observamos que apenas a página C indica a página A. Devemos lembrar que a relevância de uma página é dada pela relevância das outras páginas que indicam a primeira, dividida pelo número de links que saem delas.

Então a relevância da página A é a importância inicial da página C dividida pelo número de links que saem de C, portantoo

$$PR_1(A) = \frac{PR_0(C)}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{15}.$$

PageRank da página B: Analisando a página B, observamos que as páginas A e C indicam a página B, assim temos

$$PR_1(B) = \frac{PR_0(A)}{3} + \frac{PR_0(C)}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{3} + \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{2}{15}.$$

PageRank da página C: Analisando a página C, observamos que as páginas A, D e E indicam a página C, logo

$$PR_1(C) = \frac{PR_0(A)}{3} + \frac{PR_0(D)}{2} + \frac{PR_0(E)}{1} = \frac{\frac{1}{5}}{3} + \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{11}{30}.$$

PageRank da página D: Analisando a página D, observamos que as páginas B e C indicam a página D, logo

$$PR_1(D) = \frac{PR_0(B)}{1} + \frac{PR_0(C)}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{1} + \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{4}{15}.$$

PageRank da página E: Analisando a página E, observamos que as páginas A e D indicam a página E, logo

$$PR_1(E) = \frac{PR_0(A)}{3} + \frac{PR_0(D)}{2} = \frac{\frac{1}{5}}{3} + \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{5}{30}.$$

A Tabela 5.5 apresenta os valores com as frações equivalentes para facilitar a comparação das frações.

Tabela 5.5: Iteração 1

Página	Iteração 0	Iteração 1	Iteração 2	PageRank	Classificação
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{30}$			
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{30}$			
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$			
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$			
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$			

Fonte: A autora

Iteração 2: Seguindo a mesma ideia da iteração 1, porém agora levando em consideração a relevância das páginas obtidas na iteração 1, obtemos:

PageRank da página A:

$$PR_2(A) = \frac{PR_1(C)}{3} = \frac{\frac{11}{30}}{3} = \frac{11}{90}.$$

PageRank da página B:

$$PR_2(B) = \frac{PR_1(A)}{3} + \frac{PR_1(C)}{3} = \frac{\frac{1}{15}}{3} + \frac{\frac{11}{30}}{3} = \frac{13}{90}.$$

PageRank da página C:

$$PR_2(C) = \frac{PR_1(A)}{3} + \frac{PR_1(D)}{2} + \frac{PR_1(E)}{1} = \frac{\frac{1}{15}}{3} + \frac{\frac{4}{15}}{2} + \frac{\frac{5}{30}}{1} = \frac{1}{45} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{90}.$$

PageRank da página D:

$$PR_2(D) = \frac{PR_1(B)}{1} + \frac{PR_1(C)}{3} = \frac{\frac{2}{15}}{1} + \frac{\frac{11}{30}}{3} = \frac{2}{15} + \frac{11}{90} = \frac{23}{90}.$$

PageRank da página E:

$$PR_2(E) = \frac{PR_1(A)}{3} + \frac{PR_1(D)}{2} = \frac{\frac{1}{15}}{3} + \frac{\frac{4}{15}}{2} = \frac{1}{45} + \frac{4}{30} = \frac{14}{90}.$$

Assim obtemos os seguintes valores na Iteração 2, veja a Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Iteração 2

Página	Iteração 0	Iteração 1	Iteração 2	<i>PageRank</i>	Classificação
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{11}{90}$	0,122...	5°
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{13}{90}$	0,144...	4°
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{29}{90}$	0,322...	1°
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{23}{90}$	0,255...	2°
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{14}{90}$	0,155...	3°

Fonte: A autora

Comparando as notas de *PageRank* podemos dizer que a página mais relevante é a página C (isto significa que ela seria a primeira colocada); em segundo lugar a página D, e, assim sucessivamente. Poderíamos repetir esse processo inúmeras vezes. O que nos diz quantas vezes devemos iterar é a quantidade de páginas que citam um determinado conteúdo.

Reescrevendo o Exemplo 5.4, seja v o vetor que representa as notas de *PageRank* na iteração 0 e M a matriz que representa a conectividade dos links de saída, assim obtemos $v = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ e

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto para calcular as notas de *PageRank* das quatro páginas, fazemos algumas iterações da matriz M , ou seja, elevamos a matriz M a uma determinada potência. Por exemplo, para calcular v_2 , que representa as notas de *PageRank* na iteração 2, calculamos M^2 e multiplicamos por v .

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{15}{18} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que

$$v_2 = M^2 \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{90} \\ \frac{13}{90} \\ \frac{29}{90} \\ \frac{23}{90} \\ \frac{14}{90} \end{bmatrix}$$

Novamente a página C é a página que possui a maior nota entre as demais.

A partir da t -ésima iteração, ou seja, a matriz M^t , com t suficientemente grande, os valores da matriz são constantes. As definições e teoremas citados no Apêndice A nos garante que, se encontrarmos um autovetor v da matriz de transição M associado ao autovalor 1 e nesse caso temos $M(v) = v$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ k \end{bmatrix}$$

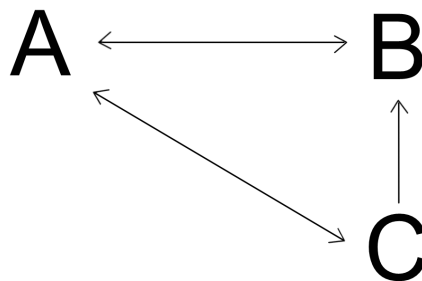
onde $x = PR(A)$, $y = PR(B)$, $z = PR(C)$, $w = PR(D)$ e $k = PR(E)$.

Isso significa, que para encontrarmos as notas de *PageRank*, temos duas opções: fazemos algumas iterações da matriz M e multiplicamos por v^* , assim obteremos a matriz v ; e a segunda encontramos a matriz v , que é o ponto fixo da matriz M .

Optamos por realizar um segundo exemplo sobre o *PageRank*, afim de, servir como uma atividade a ser proposta para as turmas do Ensino Médio (2^a série e 3^a série). Tal exemplo, demanda conhecimentos sobre matrizes, multiplicação de matrizes e sistemas lineares. Portanto, aplicar tais conhecimentos a este exemplo, pode servir de estímulo para fixação do conteúdo sobre matrizes e a descoberta sobre o conceito de ponto fixo. Usaremos a ideia de que desejamos fazer um delicioso café, citada anteriormente.

Exemplo 5.5 Suponha que você deseje pesquisar como fazer um bom café. Em um primeiro momento o buscador do Google fará uma seleção de todas as páginas que contém a palavra café. Suponhamos que de todas as páginas disponíveis, apenas as páginas A, B e C contém a palavra café. Inicialmente observamos que ambas as páginas possuem a mesma chance de serem acessadas pelo navegador, ou seja, $\frac{1}{3}$. Utilizando a notação de vetor, escreveremos $v^* = (x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, onde x , y e z representam respectivamente a nota de PageRank das páginas A, B e C. No segundo momento, precisaremos ranquear essas páginas de acordo com sua relevância. Mas como podemos ranqueá-las de forma que o navegador encontre a página desejada o mais rápido possível? A ideia é analisar a relação que existe entre as páginas e escrever uma matriz para representar suas respectivas relevâncias.

Figura 5.15: Diagrama 2



Fonte: A autora

Mas como escrever essa matriz? Como temos 3 páginas, então teremos uma matriz quadrada 3×3 .

1^o Passo: analisar as páginas que indicam a página A, ou seja, os termos a_{11} , a_{12} e a_{13} , veja a Figura 5.15. Note que a página A não possui autolink, ou seja, a página A não indica ela mesma, sendo assim temos $a_{11} = 0$. A página B indica somente a página A, sendo assim sua importância é integralmente associada a A, logo $a_{12} = \frac{1}{1} = 1$. A página C indica A, mas também indica B, sendo assim a importância de C é compartilhada com

as páginas A e B, portanto $a_{13} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

2º Passo: analisar as páginas que indicam a página B, ou seja, os termos a_{21} , a_{22} e a_{23} , veja a Figura 5.15. Note que a página A indica a página B, e também indica a página C, então sua importância é compartilhada com as duas páginas, portanto $a_{21} = \frac{1}{2}$, a página B, não possui autolink, então $a_{22} = 0$. A página C indica a página B e também a página A, logo $a_{23} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

3º Passo: analisar as páginas que indicam a página C, ou seja, os termos a_{31} , a_{32} e a_{33} , veja a Figura 5.15. Note que a página C recebe indicação da página A, porém a página A também compartilha sua importância com a página B, então $a_{31} = \frac{1}{2}$. A página B não indica a página C então, $a_{32} = 0$. A página C também não possui autolinks, portanto $a_{33} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto temos as seguintes matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$v^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Para encontrarmos o ranqueamento das páginas, temos duas opções onde a primeira devemos fazer pelo menos duas iterações da matriz M e multiplicarmos por v^* , assim obteremos o vetor v com as notas de *PageRank*, e a segunda encontrarmos o vetor v , que é o ponto fixo da matriz M . Vejamos:

1º método: Fazemos duas iterações da matriz M e multiplicarmos por v^* , assim obteremos o vetor v com as notas de *PageRank*, ou seja,

$$M^2 \cdot v^* = v.$$

Multiplicando a matriz M por ela mesma, obtemos

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$M^2 \cdot v^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{4}{12} \\ \frac{3}{12} \end{bmatrix}.$$

Logo $x = 0,416\dots$, $y = 0,333\dots$ e $z = 0,25$. Portanto, as páginas serão ranqueadas da seguinte forma: página A, página B e página C.

2º método: Usar o conceito de ponto fixo da matriz M , ou seja,

$$M \cdot v = v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

O sistema linear que representa a forma matricial é dado por:

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = y \\ \frac{1}{2}x = z \end{cases}$$

Escrevendo as variáveis y e z em função de x , temos $y = \frac{3}{4}x$ e $z = \frac{1}{2}x$, ou ainda,

$$v = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3}{4}x \\ \frac{1}{2}x \end{bmatrix}.$$

O sistema linear possui soluções possíveis porém elas são infinitas, mas esse não é um problema, visto que nosso interesse baseia-se apenas no ranqueamento das páginas. Sendo assim, podemos colocar a variável x em evidência e considerarmos apenas as constantes

do vetor. Considerando $x = k$, teremos

$$v = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Analisando os resultados, obtemos a mesma classificação do 1º método.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram abordados alguns conceitos, resultados e técnicas de demonstração utilizadas em Análise Funcional. Mais precisamente, estudamos os Teoremas de Ponto Fixo e quais as aplicações dos mesmos na Matemática em diferentes ramos da Análise. Verificamos que tais teoremas são alicerces fundamentais para se demonstrar teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias bem como são utilizados para a resolução de equações integrais. Tais resultados, revelam a importância de suas aplicações em diversos ramos da Matemática.

Os exemplos contextualizados mostram que é possível abordar alguns conceitos básicos sobre ponto fixo nos anos finais do Ensino Fundamental bem como no Ensino Médio. Com o objetivo de descobrir, por exemplo, como o buscador do Google faz a classificação das páginas desejadas, ou como as transformações geométricas são utilizadas na compressão de imagens, é possível estimular os alunos a aprender conceitos matemáticos importantes, os quais seriam abordados somente no Ensino Superior.

Acreditamos e desejamos que este trabalho seja fonte inspiradora para novas pesquisas, além de fornecer novas abordagens de aplicações dos Teoremas do Ponto Fixo tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Além disso, espera-se que tais conhecimentos antecipados possam motivar, de alguma forma, alunos que possuam interesse em cursar Matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ZEIDLER, E. . **Applied Functional Analysis - Applications to Mathematical Physics**, Nova Iorque: Springer, 1999.
- [2] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**, Nova Iorque: John & Sons, 1989.
- [3] LIMA, E.L. **Espaços Métricos**, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [4] OLIVEIRA, C. **Introdução à Análise Funcional**, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [5] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**, São Paulo: Atual Editora- Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [6] CAISSOTTI, T. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**, Lisboa, Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores), Universidade de Lisboa, 2012. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8942/1/ulfc104399_tm_Maria_caissotti.pdf. Acesso em: 06 jul. 2020.
- [7] ALBUQUERQUE, P. T. L. F. **Ponto fixo: uma introdução no ensino médio**. 2014. 69 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/110607>. Acesso em: 27 ago. 2020.
- [8] UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA. Provas anteriores: provas 2012. Vitória da Conquista, BA: UESB, 5 dez. 2011. Caderno 2, 2 dia, p. Mat-13, questão 44. Disponível em: <http://www2.uesb.br/vestibular/o-processo-seletivo/provas-anteriores/>. Acesso em: 11 jun. 2020.
- [9] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular - Etapa Ensino Médio**. Brasília, DF, MEC, 2018, p. 470, 528. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 11 jun. 2020.
- [10] MAGELA. M. M. **Teoria Básica das Cadeias de Markov**. Dissertação (Mestrado Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo, 2013. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=87175. Acesso em: 30 ago. 2020.

- [11] SU, Francis E. **Teorema de Ponto Fixo de Brouwer**: Curiosidades da matemática. Disponível em: <https://www.math.hmc.edu/funfacts>. Acesso em: 27 jul. 2020.
- [12] ROUSSEAU, Christiane; SAINT-AUBIN, Yvan. **Collection Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology**. Editorial: Springer, New York; ISSN: 1867-5506. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/frasson/ALED/material/RMAT.pdf>. Acesso em: de jul. 2020.
- [13] KOMINEK, John. Advances in Fractal Compression for Multimedia Applications. **Multimedia Systems**. Ontário, Canada, ago. de 1995. v. 5. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/2776076_Advances_in_Fractal_Compression_for_Multimedia_Applications. Acesso em: 28 jul. 2020.
- [14] GOOGLE'S PageRank Algorithm. Produção Global Software Support. 25 de abr. de 2017. 9 vídeos (79 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=P8Kt6Abq_rM. Acesso em: 31 jul. 2020.
- [15] BARROS, Cícero Demétrio Vieira de. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7531/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2020.
- [16] Wikipedia contributors. **Chebyshev distance**. Wikipedia, The Free Encyclopedia. 28 jul. 2020, 23h40min. Disponível em: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Chebyshev_distance&oldid=970054377. Acesso em: 31 ago. 2020.
- [17] Wikipedia contributors. **Geometria do táxi**. Wikipedia, The Free Encyclopedia. 28 jun. 2019, 20h08min. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometria_do_t%C3%A1xi&oldid=55602034. Acesso em: 31 ago. 2020.
- [18] NECTOUX, Antoine. **Banach e seu microscópio para encontrar pontos fixos**. Blog Projeto Klein. 2 abr. 2013. Disponível em: <http://blog.kleinproject.org/?p=1704&lang=pt-br>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- [19] BUZING, Arnoud. **Droste Effect**. Wolfram Demonstrations Project. 7 mar. 2011. Disponível em: <http://demonstrations.wolfram.com/DrosteEffect/>. Acesso em: 09 fev. 2020.

APÊNDICE A

MATRIZ ESTOCÁSTICA

Definição 6.1 *Uma matriz quadrada é chamada de matriz estocástica quando todos os seus elementos são números reais não negativos e a soma dos elementos em cada coluna é sempre igual a 1.*

Teorema 6.2 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz estocástica de ordem m . Então A^n com n inteiro positivo, também é matriz estocástica.*

Definição 6.3 *Seja A uma matriz estocástica e n um inteiro positivo. Se todos elementos de A^n são estritamente positivos, então a matriz A é chamada de matriz estocástica regular.*

Definição 6.4 *(Ponto fixo de uma Matriz Estocástica Regular) Seja A uma matriz quadrada e $v \in \mathbb{R}$ um vetor não nulo. O vetor v será chamado de autovetor da matriz A se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$A(v) = \lambda v.$$

Note que se $\lambda = 1$, temos

$$A(v) = v,$$

ou seja, v é o ponto fixo da matriz A .

Teorema 6.5 *Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro positivo. Se v é um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ , então v é um autovetor de A^n associado ao autovalor λ^n .*

Corolário 6.6 *Seja v um ponto fixo da matriz A , ou seja, $A(v) = v$. Se tomarmos $\lambda = 1$, o teorema anterior nos garante que $A^n(v) = v$, ou seja, v é ponto fixo da matriz A^n , onde n é um inteiro positivo.*

Teorema 6.7 *Toda matriz estocástica A tem pelo menos um ponto fixo.*

Teorema 6.8 *Seja v um ponto fixo da matriz A e seja $k \in \mathbb{R}$, tal que $k \neq 0$, então o vetor kv é um ponto fixo da matriz A .*