Nívia Monique Silva

ENSINO APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA EVIDENCIANDO O ELO ENTRE TEORIA E PRÁTICA.

Jataí

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

NÍVIA MONIQUE SILVA

3. Título do trabalho

ENSINO APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA EVIDENCIANDO O ELO ENTRE TEORIA E PRÁTICA

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Elias**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/12/2020, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **NIVIA MONIQUE SILVA**, **Discente**, em 07/12/2020, às 15:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1733240** e o código CRC **D30F61E0**.

Referência: Processo nº 23070.049551/2020-03 SEI nº 1733240

Nívia Monique Silva

ENSINO APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA EVIDENCIANDO O ELO ENTRE TEORIA E PRÁTICA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas da Universidade Federal de Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática. Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática. Orientadora: Profª. Drª. Luciana Aparecida Elias

Orientadora: Luciana Aparecida Elias

Jataí

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Nívia Monique
Ensino aprendizagem de trigonometria: uma abordagem histórica evidenciando o elo entre teoria e prática. [manuscrito] / Nívia Monique Silva. - 2020.
LXXVI, 76 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Luciana Aparecida Elias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2020.
Bibliografia.
Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Trigonometria. 2. História da Matemática. 3. Educação Básica. I. Elias, Luciana Aparecida, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **11** da sessão de Defesa de Dissertação de NÍVIA MONIQUE SILVA, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia vinte e seis de novembro de dois mil e vinte, a partir das **08h00 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada **“**ENSINO APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA EVIDENCIANDO O ELO ENTRE TEORIA E PRÁTICA**”**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Luciana Aparecida Elias (UAE de Ciências Exatas), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues (DM - UnB), membro titular externo; Professora Doutora Adriana Aparecida Molina Gomes (UAE de Ciências Exatas), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Luciana Aparecida Elias, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia vinte e seis de novembro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Elias**, **Professor do Magistério Superior**, em 26/11/2020, às 09:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Molina Gomes**, **Professora do Magistério Superior**, em 26/11/2020, às 09:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues**, **Usuário Externo**, em 30/11/2020, às 12:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1687000** e o código CRC **F8D4012A**.

Referência: Processo nº 23070.049551/2020-03 SEI nº 1687000

Dedico este trabalho a Deus e à minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora D' Abadia por me guiar e me amparar nos momentos difíceis, me dando força para prosseguir.

Aos meus pais Noelcio e Maria José por sempre me apoiarem e por desde criança me ensinarem que para vencer na vida e conseguir alcançar meus objetivos é preciso de esforço e dedicação. À minha irmã Laisa por me acompanhar e torcer por mim. Ao meu namorado Thieiner por me apoiar e ajudar a tornar este sonho realidade. Amo vocês!

À todos os professores que fizeram parte da minha caminhada, pela dedicação e compromisso, levo comigo suas valiosas contribuições. Em especial a minha orientadora professora Drª. Luciana Aparecida Elias pela paciência e dedicação.

Aos colegas do PROFMAT, vivemos bons momentos!

Resumo

Este trabalho objetiva propor, com base nos referenciais teóricos, uma abordagem ao ensino de trigonometria voltada à contextualização histórica, pois acreditamos que ao utilizá-la desmistificamos e humanizamos a matemática. Tem-se como objetivos específicos apresentar e resgatar a história da trigonometria e os recursos pedagógicos utilizados; evidenciar que seu surgimento e desenvolvimento está relacionado à resolução de problemas práticos da sociedade; propor atividades historicamente contextualizadas e contribuir com o aprimoramento de professores da educação básica. O trabalho tem uma abordagem qualitativa e a metodologia utilizada foi a revisão bibliográfica, com ele propõe-se a possibilidade de tornar as aulas mais dinâmicas, com os alunos mais participativos, críticos e reflexivos. Buscou-se com ele responder a questão: Como abordar a história como um recurso pedagógico no estudo de trigonometria? Para isso discorreu-se sobre o desenvolvimento histórico da trigonometria, em especial das funções trigonométricas nas antigas civilizações, os recursos pedagógicos utilizados, os personagens e acontecimentos importantes e as aplicações em astronomia, navegação e agricultura, mostrando que seus desenvolvimentos estiveram interligados à trigonometria e que ainda hoje contam com suas contribuições. As atividades que são propostas, no final desse trabalho, foram elaboradas a partir de uma revisão bibliográfica de artigos, teses e livros. Elas tratam de conteúdos de trigonometria da educação básica, como semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras, razões e funções trigonométricas. Sugere-se, a partir delas, um estudo voltado a trigonometria prática e não apenas teórica, onde os alunos participam da construção e formalização dos conceitos em estudo. Por meio do resgate de recortes da história, do uso de materiais manipulativos, de construções práticas, da participação efetiva dos discentes nas aulas e da possibilidade de trabalhar fora da sala de aula visamos, com essas atividades, tornar o ensino mais significativo e envolvente.

Palavras-chave: Trigonometria. História da matemática. Educação básica.

Abstract

This work aims to propose, based on theoretical frameworks, an approach to the teaching of trigonometry aimed at historical contextualization, as we believe that using it demystifies and humanizes mathematics. Our specific objectives are to present and rescue the history of trigonometry and the pedagogical resources used, to show that its emergence and development is related to the solution of practical problems in society; propose historically contextualized activities and contribute to the improvement of basic education teachers. Our work has a qualitative approach and the methodology used was a bibliographic review, with which we propose the possibility of making classes more dynamic, with students more participative, critical and reflective. We seek to answer the question: How to approach history as a pedagogical resource in the study of trigonometry? For this, we will discuss the historical development of trigonometry, especially the trigonometric functions in ancient civilizations, the pedagogical resources used, the important characters and events and the applications in astronomy, navigation and agriculture, showing that their developments were linked to trigonometry and which still count on their contributions today. The activities that we propose, at the end of this work, were elaborated from a bibliographic review of articles, theses and books. They deal with trigonometry contents of basic education, such as similarity of triangles, Theoremade Pythagoras, reasons and trigonometric functions. We propose, from them, a study focused on practical and not just theoretical trigonometry, where students participate in the construction and formalization of the concepts under study. Through the rescue of clippings from history, the use of manipulative materials, practical constructions, the effective participation of students in classes and the possibility of working outside the classroom, we aim, with these activities, to make teaching more meaningful and engaging.

Keywords: Trigonometry. Math history. Basic education.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A trigonometria é um ramo da matemática que está intimamente associado às relações entre as medidas dos lados e ângulos de triângulos, que surgiu da necessidade de calcular distâncias, principalmente distâncias inacessíveis. Essa palavra é de origem grega, no qual *trigonos* significa triângulos e *metron* significa medir, assim Trigonometria significa medida dos triângulos.

"A trigonometria, como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem" (BOYER, 1996, p.116), ela se desenvolveu graças "a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, a astronomia" (KENNEDY, 1992, p.1).

Ela surgiu para resolver problemas propostos na vida prática das antigas civilizações, "a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.135). Então é importante levar a história da trigonometria para as aulas, a fim de que o aluno consiga contextualizar os conteúdos e entender as possíveis aplicações.

Pois conforme Castejon e Rosa (2017) o ensino de matemática é ainda abstrato e descontextualizado, muitos profissionais ainda privilegiam o ensino tradicionalista, com forte apelo pela memorização de postulados, fórmulas e pela repetição de cálculos algébricos, em um estudo mecânico que não traz significado algum para o educando. Esse fato torna as aulas maçantes, dificulta o ensino aprendizado e promove a desmotivação, indisciplina, e até mesmo o abandono dos estudos.

Com base em minha breve experiência como docente, mas principalmente em minha vivência, na conversa com docentes e discentes do ensino básico e em minha trajetória como estudante, pude constatar isso, e perceber a necessidade de buscar formas diferenciadas de ensinar e aprender trigonometria.

Essa necessidade de renovar o ensino se tornou ainda mais evidente nesse ano de 2020, com o distanciamento social provocado pela pandemia de COVID-19[1], pois as dificuldades e a falta de interesse que já existiam, se acentuaram com o ensino remoto.

Então é necessário uma mudança no processo de ensino aprendizagem de matemática, haja vista a importância das aplicações de seus conteúdos na sociedade, é preciso que os estudantes se sintam interessados a aprender, e que esta aprendizagem contribua para sua atuação em seu meio social, e para que haja essa contribuição é imprescindível que os alunos consigam associar os conteúdos trabalhados em sala e situações concretas.

[1] É uma doença infeciosa causada pelo coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2).

Conforme D'Ambrósio (1986, p.1) ressalta "um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas". Por isso traremos a história da trigonometria como aliada no ensino aprendizagem, e buscaremos responder a questão: "Como abordar a história como um recurso pedagógico no estudo de trigonometria?"

Para responder essa questão nos orientamos em autores que trabalham com a história da trigonometria e com sua aplicação em sala de aula.

Trazendo a história da matemática como aliada, acreditamos que ela pode ser usada para contextualizar os conceitos matemáticos. A contextualização sociocultural é uma competência, proposta pelos PCN+ Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que visa aproximar o aluno de sua realidade e permite que este atue de forma crítica e participativa na sociedade. A história também permite mostrar a aplicação destes conceitos no passado e no presente, motivar os estudantes e auxiliá-los na aprendizagem dos conteúdos.

Entendemos que a matemática é inerente às atividades humanas e que muitas de suas teorias surgiram da necessidade de resolver problemas práticos do cotidiano de civilizações antigas e que assim suas "raízes se confundem com a história da humanidade". (D'AMBROSIO, 1999, p.1)

Então é essencial que o docente busque associar teoria e prática, e mostre as aplicações que aquele conteúdo teve e tem na sociedade e nas diferentes áreas do conhecimento. Conforme D'Ambrósio (1986, p.29) "a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época".

Resgatando essa história o aluno percebe como teoria e práticas se relacionaram, como conhecimentos, até então abstratos, foram criados e também como auxiliaram no desenvolvimento da sociedade. Isto pode aguçar a curiosidade do aluno, de forma que o interesse em aprender aumente. Utilizar "a história como fonte de significação", conforme Mendes, Fossa e Valdés (2006, p.93), faz com que os estudantes alcancem uma formação mais ampla com o desenvolvimento de habilidades e competências ao ensino da matemática e à formação social crítica.

Ainda segundo Mendes, Fossa e Valdés (2006, p.93) a partir da significação histórica os estudantes podem passar "a observar o seu contexto cotidiano" e assim "compreendam a matemática que está sendo feita hoje, de acordo com o momento histórico atual."

Conforme o Brasil. (2006, p.124) o ensino de matemática:

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvi-

> mento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática.

Percebe-se que o professor deve fazer uso das demonstrações para que o estudante perceba a validade de um resultado, e consiga entender a lógica da construção dessas definições, percebendo que elas não nasceram prontas.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino da trigonometria voltada à contextualização histórica e às aplicações de seus objetos nas diversas áreas de atuação humana, com a análise de seu surgimento nas antigas civilizações e seu desenvolvimento. A fim de quebrar o ciclo de desmotivação e desinteresse de grande parte dos alunos pelos conteúdos matemáticos, estando assim em conformidade com os objetivos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que visa contribuir com o aprimoramento de professores da educação básica. Seguindo assim também o que orienta o Brasil. (2006, p.122) para o ensino da trigonometria:

> O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

Seguindo também as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que afirma que "é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática". (BRASIL., 2017, p.298)

Ela também ressalta que o ensino de matemática precisa "estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos." (BRASIL., 2017, p.298)

A BNCC (BRASIL., 2017, p.267) ainda destaca em sua primeira competência específica de matemática para o ensino fundamental que os estudantes devem:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Percebe-se então a importância do resgate da história da matemática como um elemento motivador da aprendizagem, esclarecedor dos questionamentos feitos pelos alunos, e desmistificador, pois pode ser usada para mostrar que a matemática é um conhecimento humano que se desenvolveu junto ao desenvolvimento da sociedade.

Este trabalho de conclusão de curso está organizado em quatro capítulos.

No primeiro, apresentaremos um breve histórico da trigonometria, dando ênfase aos principais fatos históricos, povos e matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento, mostrando que esta é uma ciência humana, que foi construída pela colaboração de diversos povos afim de resolver problemas práticos do cotidiano.

No segundo, apresentaremos algumas aplicações atuais da trigonometria na astronomia, agricultura e navegação.

No terceiro, abordaremos as funções trigonométricas, na busca por entender como cada uma surgiu.

No quarto e último capítulo, traremos as propostas de atividades, com sete atividades desenvolvidas por meio da pesquisa bibliográfica. Elas abordam conteúdos de trigonometria e utilizam recortes de sua história como fonte de motivação e significado para introdução dos mesmos. Este capítulo é seguido das considerações pertinentes ao trabalho.

1 Breve histórico da trigonometria

Neste capítulo faremos a narrativa dos principais momentos históricos do desenvolvimento da trigonometria, evidenciando o contexto, a aplicação e o período onde a trigonometria foi importante, dessa forma queremos mostrar seu desenvolvimento perante o contexto histórico em que surgiu e se evoluiu.

Queremos também evidenciar que a trigonometria não nasceu de forma súbita, que surgiu como parte intrínseca à astronomia, e auxiliou o desenvolvimento da navegação e da agricultura com a resolução de problemas práticos oriundos destas ciências. No capítulo posterior traremos estes tópicos com mais profundidade.

Esse ramo da matemática foi construído e se desenvolveu ao longo dos séculos, a partir de contribuições de diversos povos. Somente após o século XV se tornou um ramo independente da astronomia. Hoje além das aplicações na base de sua descoberta e desenvolvimento, a trigonometria possui aplicações algébricas, geométricas e em análise numérica.

1.1 Trigonometria no Egito

O interesse da civilização egípcia pela matemática advém de sua aplicação para resolver problemas práticos no desenvolvimento de suas cidades em relação às grandes construções das pirâmides, agricultura, cálculos de áreas e em transações comerciais.

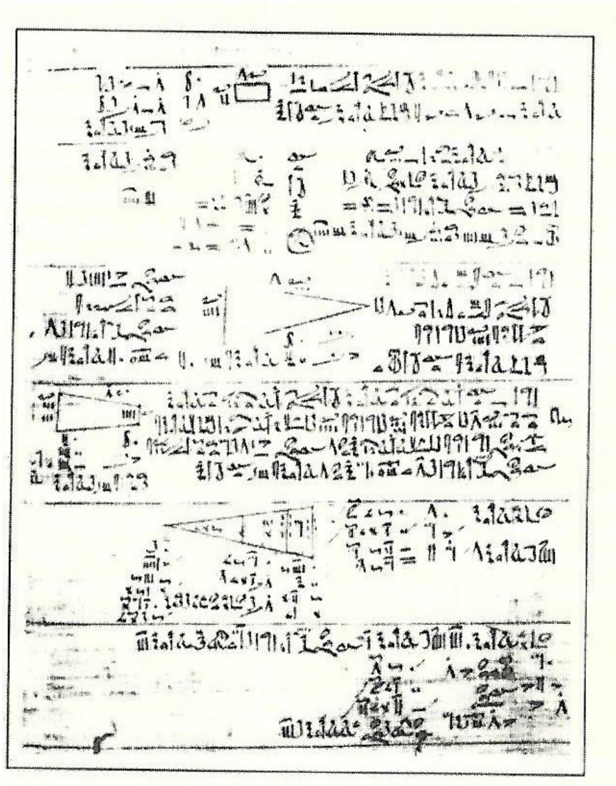
Os egípcios foram um dos primeiros povos a utilizarem rudimentos da trigonometria. Conforme informações encontradas no Papiro Rhind, ilustrado na figura 1, que recebeu esse nome em homenagem a Henry Rhind que o comprou em 1858, numa cidade à beira do Nilo, no Egito. Essa fonte histórica é também chamada de Papiro Ahmes em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.

Conforme o escriba essa obra provém de um protótipo de cerca de 2000 a 1800 a.C.. É um rolo de papiro de 30 centímetros de altura e 5 metros de comprimento, que apresenta um texto matemático, em escrita hierática, na forma de manual prático, com 84 problemas. (BOYER, 1996)

No problema 56, desse papiro, temos uma amostra da manipulação trigonométrica realizada pelos egípcios. Neste problema "pede-se que ache o seqt de uma pirâmide de 250 cúbitos[1] de altura cujos lados da base medem 360 cúbitos".

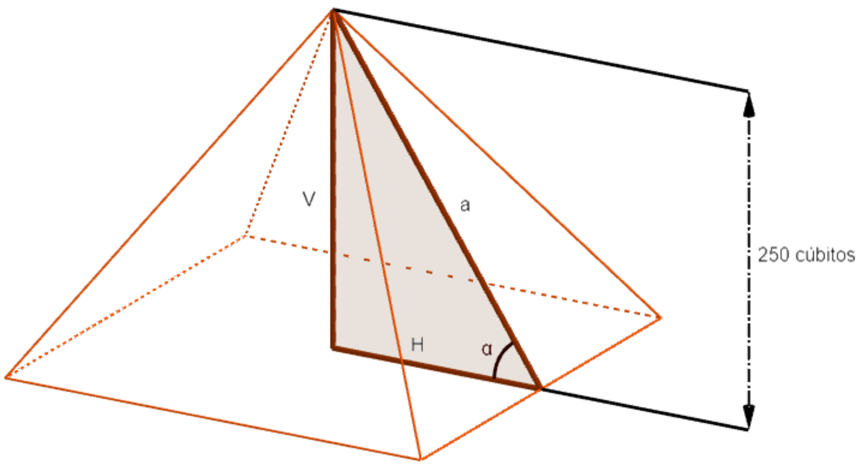
[1] Unidade de comprimento egípcia, que correspondia a medida de 7 palmos, esse por sua vez consistia na medida dos quatro dedos juntos.

Figura 1 – Parte do Papiro Rhind.



Fonte:Eves (2004, p.74).

Figura 2 – Seqt da Pirâmide.



Fonte: Elaborado pela autora.

Seqt seria a razão entre o afastamento horizontal (H) e a elevação vertical (V), que é equivalente a cotangente do ângulo α. Essa preocupação era necessária a fim de que todas as faces da pirâmide tivessem a mesma inclinação, ou seja, para que o apótema(a) da pirâmide fosse de mesmo comprimento em todas as faces.

Também surgiu no Egito por volta de 1500 a.C. a ideia de associar sequencias numéricas às sombras projetadas por bastões verticais, e relacionar cada comprimento às horas do dia (relógio de sol). Uma observação dos limites atingidos pela sombra permitiam medir a duração do ano e o seu movimento lateral diário permitia medir a duração do dia.

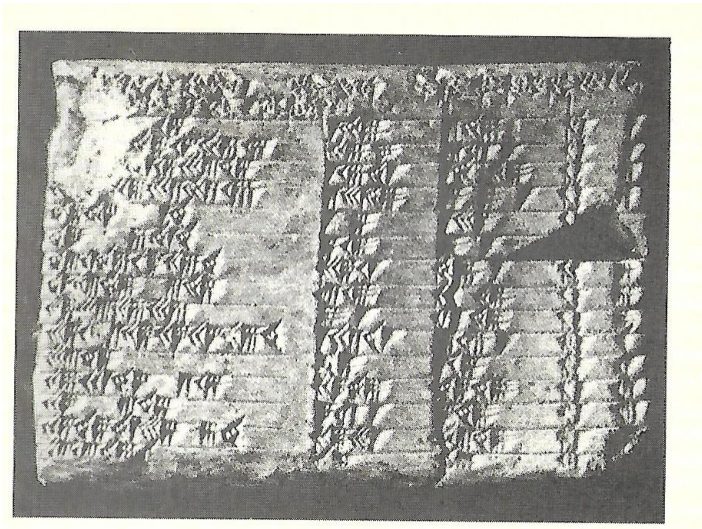
Eram chamados Gnomons, o mais antigo que chegou até nossos dias está no Museu de Berlim, conforme Eves (2004, p.69). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi essencial para a observação de fenômenos astronômicos pelos povos antigos.

1.2 Trigonometria Babilônica

Os Babilônios tiveram enorme interesse na astronomia, tanto por razões religiosas, quanto por definições de calendário e épocas de plantio. Assim eles usavam a trigonometria para estudar os pontos cardeais, as estações do ano, as fases da Lua. Foram eles que no século 28 a.C. construíram um calendário e elaboraram a partir de 747 a.C. uma tábua de eclipses lunares.

A Plimpton 322, ilustrada na figura 3, é um dos registros históricos babilônicos mais importantes, parte da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322, escrita por volta de 1900 e 1600 a.C..

Figura 3 – Plimpton 322.



Fonte: Eves (2004, p.65).

Conforme Boyer (1996, p.24) e Eves (2004, p.63) nela está a representação dos ternos pitagóricos primitivos, mas apenas como uma noção intuitiva das relações entre a hipotenusa e os catetos de triângulos retângulos. A partir de exames minuciosos concluiu-se que ela apresenta uma tábua de secantes ao quadrado para ângulos decrescentes de 45° a 31°, formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez de no ângulo correspondente.

1.3 Trigonometria na Grécia

O desenvolvimento progressivo da trigonometria ao longo do tempo esteve relacionado ao desenvolvimento da Geometria e da Astronomia. A Grécia se destacou com grandes sábios que se dedicaram a esses estudos, entre eles podemos citar Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirene, Hiparco de Nicéia e Ptolomeu de Alexandria.

Aristarco, segundo autores posteriores, teria proposto um sistema heliocêntrico[2], se antecipando a Copérnico, mas qualquer vestígio escrito referente se perdeu.

Cerca de 260 a.C. ele deixou-nos um tratado sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua. Segundo Boyer (1996, p.108), nesse tratado ele observa que quando a Lua está exatamente meio cheia o ângulo formado entre as linhas de vista ao Sol e à Lua é de $\frac{29}{30}$ de um ângulo reto, ou seja esse ângulo mede 87°, o que também corresponde a dizer que a razão da distância da Terra à Lua para a distância da Terra ao Sol é sen 3°. Com esses dados usando a desigualdade trigonométrica

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta},$$

onde $0 < \beta < \alpha < 90°$, e construindo um triângulo semelhante, como o ilustrado na figura 4 ele concluiu que o Sol está a mais de dezoito vezes e menos de vinte vezes mais longe da Terra do que a Lua.

A figura 4 representa um triângulo semelhante ao analisado por Aristarco, onde o ponto A corresponde à Lua, o ponto C à Terra e o ponto B ao Sol, esse triângulo é retângulo em A, o ângulo em C mede 87° e o ângulo em B mede 3°.

Figura 4 – Triângulo semelhante ao triângulo Terra-Lua-Sol.

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim analisando esse triângulo temos que a razão entre a distância da Terra ao Sol com a distância da Terra à Lua é:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{9,02}{0,48} \approx 18,79$$

[2] Modelo de Sistema Solar no qual a Terra e os demais planetas se movem ao redor do Sol, sendo este, o centro do Sistema Solar.

Apesar do resultado ser bastante equivocado quanto ao que temos hoje, seu método era indiscutível e estava completamente certo, o erro se deu apenas pela observação equivocada do ângulo em B.

Aristarco sabia que os tamanhos do Sol e da Lua estavam na mesma razão, pelo fato de subentenderem o mesmo ângulo ao olho de observador na Terra, assim obteve uma aproximação para o tamanho do Sol e da Lua em comparação com a Terra.

Mas para uma avaliação correta dos tamanhos do Sol e da Lua era necessária a medida do raio da Terra, foi Eratóstenes, quem calculou o valor mais célebre.

Conforme Boyer (1996, p.109), ele observou que num dia de solstício de verão, ao meio dia, o Sol brilhava diretamente dentro de um poço profundo em Siene, isso significa que o poço e o raio da terra estavam alinhados, e que um bastão no mesmo momento em Alexandria fazia uma sombra, que lhe permitiu dizer que a distância angular do Sol ao Zênite [3] era $7,2°$ ou seja, um cinquentavo de um círculo.

Estando Alexandria no mesmo meridiano e cerca de 740 quilômetros ao norte de Siene, pode-se concluir que a circunferência da Terra é 50 vezes a distância de Siene a Alexandria, ou seja a circunferência da Terra é cerca de 37 000 quilômetros.

Pode se perceber que as relações entre retas e círculos eram bastante estudadas e aplicadas a problemas na astronomia, mas ainda não se tinha uma trigonometria sistemática. Por volta de 150 a.C. Hiparco de Niceia compilou a primeira tabela trigonométrica. Ele foi o primeiro a associar valores numéricos às cordas, e ficou conhecido como "o pai da trigonometria", apesar de suas tabelas terem sido calculadas a fim de serem usadas em sua astronomia.

A origem da divisão do círculo em 360° em matemática, segundo Boyer (1996, p.113) deve-se a Hiparco através de suas tabelas. E é possível que ele tenha tomado de Hipsicles, que antes havia dividido o dia em 360 partes, subdivisão que pode ter sido originada na astronomia babilônica. Conforme Eves (2004, p.61)

> Indubitavelmente devemos aos babilônios antigos a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais. Diversas explicações já foram aventadas para a razão dessa escolha, mas nenhuma é tão plausível como a que se segue, sustentada pela imensa autoridade de Otto Neugebauer. Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de milha babilônica, igual a sete das milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para percorrer uma milhar babilônica. Mas tarde, talvez no primeiro milênio a.C., quando a astronomia babilônica atingiu o estágio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado por 12 milhas-tempo, e um dia

[3] Ponto imaginário interceptado pelo eixo vertical imaginário traçado a partir da cabeça de um observador localizado sobre a superfície terrestre e que se prolonga até a esfera celeste.

> completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a $(12)(30) = 360$ partes iguais num ciclo completo.

Segundo Guelli (2010) a divisão do círculo em 360 partes se deve ao fato desse número ter um grande número de divisores e que pode ser facilmente decomposto num produto de fatores. Assim se explica a conveniência em dividir a milha-tempo em 30, e conseguir um ciclo completo de 360 partes iguais.

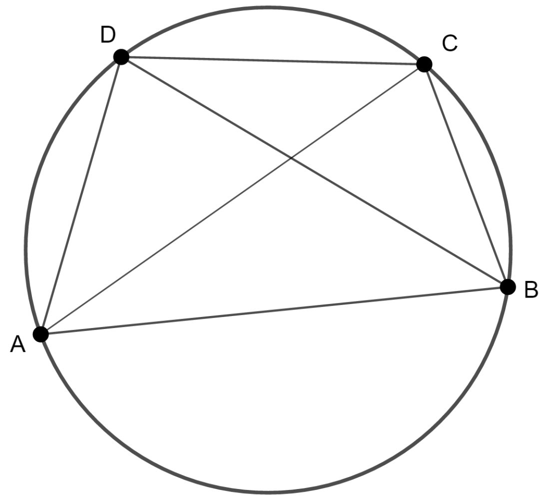
Apesar de não restarem obras de Hiparco, a partir de comentários como o de Teon de Alexandria sobre as tabelas de cordas de Ptolomeu, que referiu-se a ele dizendo que este escreveu um tratado de 12 livros sobre cordas de um círculo, isso permitiu concluir que seus métodos foram semelhantes aos de Ptolomeu.

O Almagesto (o maior) foi a obra trigonométrica mais influente e significativa da história, composta por 13 livros, escrita por Ptolomeu, cerca de 150 d.C..

Nele temos a proposição geométrica 1.3.1, conhecida como "Teorema de Ptolomeu":

Teorema 1.3.1 (Teorema de Ptolomeu)**.** *Se um quadrilátero convexo $ABCD$ está inserido em um círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual a soma dos produtos das diagonais.*

Figura 5 – Quadrilátero inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

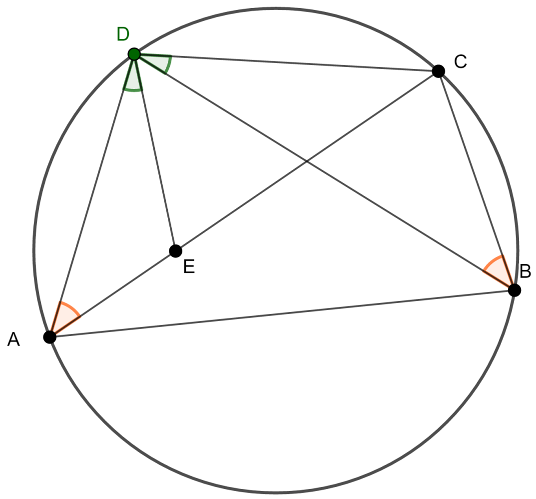
Assim pelo Teorema de Ptolomeu e observando a figura 5 temos:

$$\overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AC}.\overline{BD}$$

Demonstração:

Consideremos o quadrilátero ABCD inscrito na circunferência, tomemos um ponto E sobre o segmento $\overline{AC}$, de forma que $A\hat{D}E = B\hat{D}C$, conforme figura 6.

Figura 6 – Quadrilátero inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

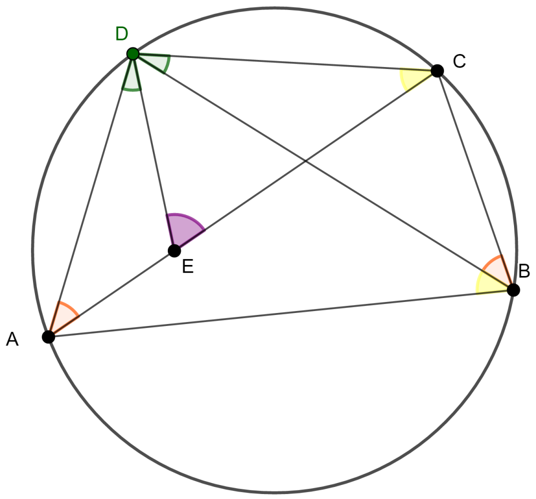
Analisando a figura 6, temos que os △ADE e △BDC são semelhantes pelo caso (AA), pois os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são inscritos à circunferência e correspondem ao mesmo arco portanto são iguais. Por construção os ângulos A$\hat{D}$E e B$\hat{D}$C também são iguais. Assim pela razão de semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BC}}$$

logo:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{AE}. \tag{1.1}$$

Figura 7 – Quadrilátero inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a figura 7 temos que os △DEC e △DAB são semelhantes pelo caso (AA), pois os ângulos A$\hat{B}$D e $A\hat{C}D$ são inscritos à circunferência e correspondem ao mesmo arco portanto são iguais. O ângulo $D\hat{E}C$ é externo ao △ADE e portanto $D\hat{E}C = C\hat{A}D + A\hat{D}E$, temos também que $C\hat{A}B = C\hat{D}B$ por serem ângulos inscritos e corresponderem ao mesmo arco, e ainda são iguais a $A\hat{D}E$ por construção. Daí podemos concluir que $D\hat{A}B = D\hat{E}C$, e assim temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BA}}.$$

Então:

$$\overline{CD} \cdot \overline{BA} = \overline{BD} \cdot \overline{CE}. \tag{1.2}$$

Observando novamente a figura 7 podemos notar que $\overline{CE} = \overline{CA} - \overline{AE}$. Substituindo em 1.2, temos:

$$\overline{CD} \cdot \overline{BA} = \overline{BD} \cdot (\overline{CA} - \overline{AE}). \tag{1.3}$$

Logo:

$$\overline{CD} \cdot \overline{BA} = \overline{BD} \cdot \overline{CA} - \overline{BD} \cdot \overline{AE}. \tag{1.4}$$

Então:

$$\overline{BD} \cdot \overline{CA} = \overline{CD} \cdot \overline{BA} + \overline{BD} \cdot \overline{AE}. \tag{1.5}$$

Substituindo 1.1 em 1.5 concluímos:

$$\overline{BD} \cdot \overline{CA} = \overline{CD} \cdot \overline{BA} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

Esse teorema leva aos resultados das fórmulas para seno e cosseno da soma e da diferença de dois ângulos.

$$\text{sen}\ (a \pm b) = \text{sen}a \cdot \cos b \pm \text{sen}b \cdot \cos a.$$

$$\cos\left(a \pm b\right) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}a \cdot \text{sen}b.$$

Com isso Ptolomeu construiu sua tabela contida no primeiro livro do Almagesto e foi um instrumento indispensável para os astrônomos por mais de mil anos, falaremos da construção dessa tabela em capítulo posterior.

Percebe-se que na Grécia, a trigonometria muito se desenvolveu, mas não como ramo da matemática, e sim para aplicações na astronomia, satisfazendo necessidades dessa.

1.4 Trigonometria Hindu

A partir do século IV d.C. povos hindus, árabes e persas ganharam destaque no cenário intelectual. Na Índia a trigonometria se revolucionou, uma de suas grandes contribuições na história da matemática foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria substituindo a tabela de cordas gregas.

Os Hindus diziam que o autor do Surya Siddhantas (400 d.C.) foi Surya, o deus do sol, e por isso a falta de explicações e provas para os resultados. A relação usada nas tabelas dessas obras era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente à corda, chamada de jiva. Assim passou se a ter uma nova visão de um triângulo retângulo na circunferência. (BOYER, 1996)

O seno apareceu pela primeira vez de fato no trabalho de Aryabhata, cujo título é Aryabhatiya (499 d.C.), onde ele elaborou tabelas de senos, usando jiva no lugar de seno. Siddhantas e Aryabhatya são as mais antigas tabelas da função seno preservadas.

Os hindus usavam nessas tabelas nossos conhecidos graus, minutos e segundos, nelas eram expressos o comprimento do arco e o comprimento do seno, e o raio era tomado como sendo 3438. A Tabela também contém os valores do que chamamos seno versor ou $1 - cos\theta$, que na trigonometria hindu seria $3438(1 - cos\theta)$.

Com os conceitos de semi corda e seno os hindus demonstraram algumas identidades, entre elas a equivalente verbal de $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ demonstrada por Varahamihira em 505 d.C.. (COSTA, 1997)

E assim como na Grécia a trigonometria na Índia foi um instrumento útil para aplicações na astronomia.

1.5 Trigonometria Árabe

O Império Árabe, no final do século VIII até o século XI d.C., viveu um enorme avanço nos diversos campos das artes e da ciência. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, à difusão da língua árabe, e as traduções permitiram a preservação de obras antigas, que assim se difundiram entre os intelectuais muçulmanos.

Os árabes consideraram dois tipos de trigonometria:

- A geometria grega das cordas, presente no Almagesto.
- As tabelas hindus de senos, derivadas dos Sindhind.

Por fim triunfou-se o sistema hindu, e então quase toda trigonometria árabe se baseou na função seno.

Al-Battani nascido, aproximadamente 850-929 d.C., na cidade de Harran, na antiga Mesopotâmia, atual Turquia, adotou a trigonometria hindu e introduziu o círculo de raio unitário, e demonstrou que jiva é uma razão valida para todo triângulo retângulo. (COSTA, 1997)

Abû'l Wefâ, nascido na região montanhosa persa de Khorâsân, foi, segundo Eves (2004, p.261), o mais ilustre matemático mulçumano do século X, por ter introduzido a função tangente com incrementos de 15', isso a partir do aperfeiçoamento do método de Ptolomeu.

Posteriormente em Maragha, Nasîr Eddin al-Tusi continuando a obra de Abû'l Wefâ, foi responsável pelo primeiro tratado de trigonometria plana e esférica como assunto independente da astronomia. Nesse tratado são usadas as seis funções trigonométricas que conhecemos hoje e são apresentadas várias regras para resolver problemas de triângulos planos e esféricos.

Ulugh Beg no século XV constituiu em seu observatório em Samarqand, junto a cientistas lá reunidos, notáveis tábuas de senos e tangentes, corretas até pelo menos a oitava casa decimal, com incrementos de um minuto (1'). (KENNEDY, 1992)

1.6 Trigonometria na Europa

Regiomontanus, como era mais conhecido Johann Muller (1436-1476), nascido na Alemanha, segundo Boyer (1996, p.187), marcou o renascimento da trigonometria na Europa com sua obra *De triangulis omnimodis* (1532), obra essa que se divide em 5 livros tratando da primeira exposição Europeia de trigonometria plana e esférica independente da astronomia. Os dois primeiros livros tratam de trigonometria plana e os outros três de trigonometria esférica, no entanto, nessa obra são empregados apenas as funções seno e cosseno.

Nicolau Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo polonês que revolucionou a visão do mundo mostrando que a Terra move-se ao redor do Sol. Dele temos o tratado *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado em 1543, que contém secções sobre trigonometria, estas já haviam sido publicadas um ano antes sob o titulo *De lateribus et angulis triangulorum*.

O austríaco Georg Joachim Rheticus combinou as ideias de Regiomontanus e Copérnico e escreveu o mais elaborado tratado de trigonometria da época, o *Opus palatinum de triangulis*, nele o autor foca nos triângulos retângulos e as seis funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) são completamente utilizadas. Ele foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre os lados de um triângulo retângulo.

O matemático francês François Viéte considerava a trigonometria um ramo independente da matemática e em geral não se referenciava a meias cordas num círculo. No *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) ele preparou extensas tabelas para as seis funções trigonométricas com ângulos aproximados até minutos. No *Variorum de rebus mathematicis* (1593) há um enunciado equivalente a lei de tangentes, essa já havia aparecido em 1583 em *Geometria rotundi* do dinamarquês Thomas Fincke.

Nesse período as identidades trigonométricas surgiam em toda parte da Europa, havia um grupo de fórmulas conhecidas como regras de prostaférese ou seja fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença.

Viete também observou que o problema de trissecção do ângulo levava a uma cúbica, e então concluiu que a trigonometria poderia auxiliar na álgebra e na aritmética. Segundo Boyer (1996, p.213) no ano de 1595 foi publicado o primeiro livro com a palavra trigonometria no título, e o Alemão Bartholomais Pitiscus (1561-1613), autor do livro, ficou conhecido como o inventor desta palavra.

O autor inglês Willian Oughtred em *Trigonometrie* (1657) apresentou uma das primeiras tentativas de introduzir abreviações para os nomes das funções trigonométricas, mas foi Albert Girard (1595-1632) nascido na França, que em 1626 publicou o tratado de trigonometria que contém o mais antigo uso de abreviações das funções tais como conhecemos hoje.

O francês Thomas-Fantem de Lagny evidenciou a periodicidade das funções trigonométricas, mas foi a partir de Leonhard Euler (1707-1783), nascido em Basiléia na Suíça, que a trigonometria assumiu sua forma atual. Ele foi o primeiro a afirmar que seria melhor considerar o seno e o cosseno como funções do ângulo e defini-los em termos do círculo unitário. E a partir da chamada função de Euler ocorreu a transição da definição de seno e cosseno de um ângulo para seno e cosseno de um número real, e as funções trigonométricas passaram a ser vistas como funções periódicas.

Percebe-se que a trigonometria em suas origens tinha aplicações quase que exclusivamente astronômicas, mas no decorrer de seu desenvolvimento mostrou suas utilidades como uma ferramenta a ser explorada de forma incessante, em problemas de álgebra e aritmética. Hoje ela é utilizada no estudo de fenômenos que apresentam padrões repetitivos, cujas funções apresentam gráficos que tem comportamentos periódicos.

2 Aplicações da trigonometria

A trigonometria surgiu a fim de resolver problemas práticos que os povos antigos se propuseram, em medições de ângulos e distâncias, no cálculo de áreas agricultáveis, auxiliando na navegação e principalmente na astronomia, pois esses povos sempre se preocuparam em entender os fenômenos relacionados com o Sol, a Lua, a Terra, e outros planetas e estrelas.

2.1 Astronomia

A origem da trigonometria está intimamente associada à astronomia, uma vez que as civilizações antigas, na busca por uma produção agrícola melhor, passaram a estudar os astros, a conhecerem as estações do ano e o movimento da Terra.

Etimologicamente, astronomia significa “lei dos astros”. É uma ciência que envolve a observação, estudo e a explicação de eventos que acontecem nos corpos celestes (planetas, estrelas, asteroides, cometas, galáxias, entre outros.).

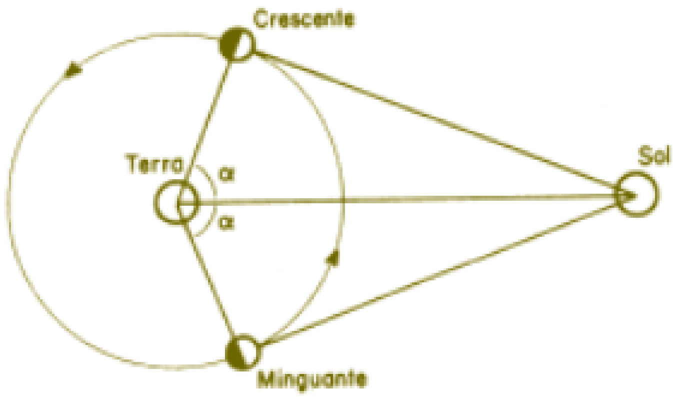
A trigonometria é aplicada à astronomia por meio da triangulação, com o auxílio de aparelhos especiais que fornecem ângulos e algumas distâncias, assim é possível utilizá-la para fazer medições de astros e de distâncias, inclusive dentro do sistema solar. Exemplos disso são:

- Cálculo do tamanho da sombra de eclipses e do raio dessa sombra.
- Determinação do raio lunar.
- Distâncias entre planetas.
- Distância Terra-Sol e Terra-Lua.

Sabemos que Aristarco fez excelentes medições das distâncias entre Terra - Sol e Terra - Lua, com erros originados de pequenos equívocos nas medições dos ângulos, segundo Ávila (1982, p.40)

> Aristarco observou que existem duas posições da Lua em sua órbita, o “quarto crescente ” e o “quarto minguante”, quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e metade escura. Quando isso acontece o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, no vértice ocupado pela Lua.

Figura 8 – Triângulo Terra-Lua-Sol.



Fonte: Ávila (1982).

O erro de Aristarco foi considerar que o ângulo α de vértice centrado na Terra, ilustrado na figura 8, media 87°, quando na verdade esse ângulo mede aproximadamente $89,85°$, então corrigindo esse erro, basta, como já vimos em 1.3, construir um triângulo retângulo com os mesmos ângulos, ou seja um triângulo semelhante, e verificar o valor da razão

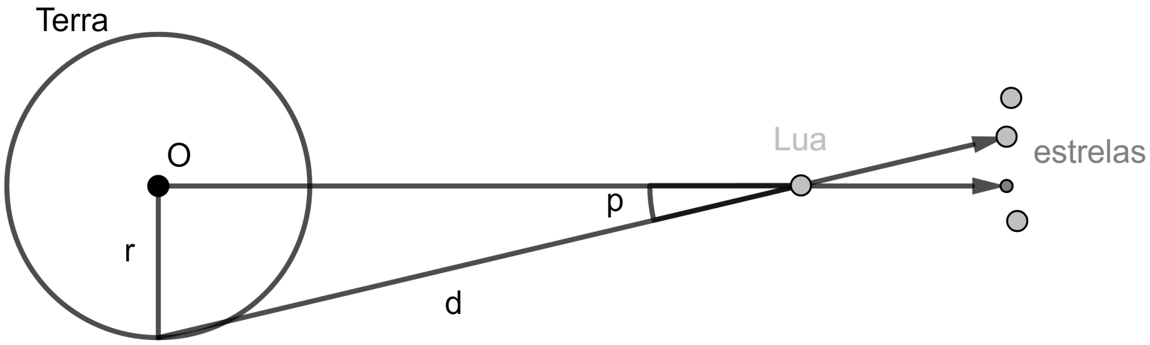
$$\frac{TL}{TS} = \text{sen}0,15° \simeq 0,0026 \simeq \frac{1}{390}.$$

Portanto a distância Terra-Sol é cerca de 390 vezes a distância Terra-Lua.

Atualmente o método usado para determinar distâncias de planetas e estrelas à Terra é o método da paralaxe, que consiste em calcular a distância à objetos pela diferença de ângulos vista por dois pontos distintos (linhas de base), quanto mais distante estiver o objeto menor é a paralaxe. Como planetas e estrelas estão muito distantes a linha de base deve ser muito grande para que o ângulo seja perceptível.

Na paralaxe geocêntrica, figura 9, determinam-se as distâncias de planetas próximos ou da lua usando o diâmetro da Terra como linha de base. Para a determinação da distância nesse método é preciso medir a posição do planeta em relação às estrelas em duas posições opostas na Terra, assim a paralaxe geocêntrica corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra.

Figura 9 – Paralaxe Geocêntrica.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa paralaxe é expressa por:

$$\text{sen}p = \frac{r}{d};$$

onde p é o ângulo da paralaxe, r é o raio da Terra e d a distância da Terra à Lua, ou ao planeta que se deseja calcular a distância. Como para arcos muito pequenos temos:

$$\text{sen}p = p(rad).$$

Então:

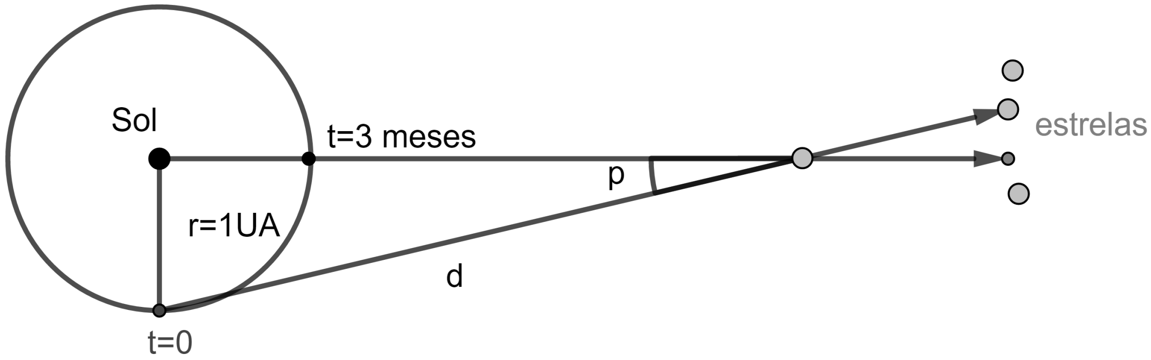
$$p(rad) = \frac{r}{d}.$$

Portanto:

$$d = \frac{r}{p(rad)}.$$

Na paralaxe heliocêntrica, figura 10, determina-se a distância das estrelas mais próximas usando o diâmetro da órbita da Terra como linha de base. Na medida que a Terra gira em torno do Sol podemos medir a direção de uma estrela em relação às estrelas de fundo, com um intervalo de tempo de 6 meses, no primeiro quando a Terra esta de um lado do Sol e depois quando a Terra está do outro lado do Sol. A metade do desvio total na posição da estrela corresponde à paralaxe heliocêntrica.

Figura 10 – Paralaxe Heliocêntrica.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essa paralaxe é expressa por:

$$\text{sen} p = \frac{r}{d}.$$

Logo:

$$p(rad) = \frac{r}{d}.$$

Então:

$$d = \frac{1UA}{p(rad)};$$

onde p é o ângulo da paralaxe, r é o raio da órbita da Terra, d é a distância da Terra à estrela e UA é a unidade astronômica.

2.2 Agricultura

A trigonometria é muito importante na agricultura. Quando associada à astronomia estuda as estações do ano e define as melhores épocas para o plantio. É também utilizada no nivelamento de terrenos para a confecção de curvas de nível, visando controlar a erosão do solo.

O nivelamento trigonométrico é definido pelas normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (NBR) como:

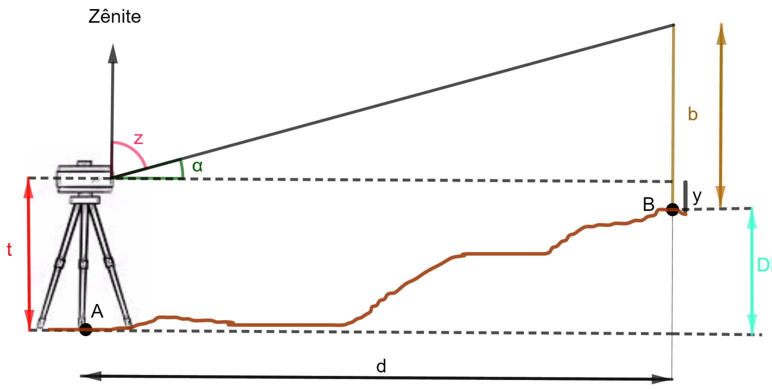
> Nivelamento que realiza a medição da diferença de nível entre pontos do terreno, indiretamente, a partir da determinação do ângulo vertical da direção que os une e da distância entre estes, fundamentando-se na relação trigonométrica entre o ângulo e a distância medidos, levando em

> consideração a altura do centro do limbo vertical do teodolito ao terreno e a altura sobre o terreno do sinal visado. (ABNT, , p.4)

Esse nivelamento se baseia na análise trigonométrica de um triângulo retângulo específico, que é determinado a partir da coleta de informações referentes à distância horizontal dos pontos de desníveis e dos ângulos (horizontais e verticais). Essa coleta de informações é feita em campo, utilizando um instrumento óptico de precisão, que lê ângulos horizontais e verticais, e uma baliza.

Para calcular a diferença de nível (DN) entre os pontos A e B, na figura 11, é necessário que se tenha feito as medidas dos seguintes elementos:

Figura 11 – Nivelamento trigonométrico.



Fonte: Elaborado pela autora.

1. d - Distância horizontal;
2. t - Altura do teodolito ou do instrumento óptico utilizado;
3. b - Comprimento da baliza;
4. z - Ângulo de inclinação em relação ao zênite;
5. α - Ângulo de inclinação em relação a horizontal;
6. y - Medida da distância vertical entre o topo do teodolito e o começo da baliza.

Com o teodolito se mede o ângulo em relação ao zênite (z), e o ângulo em relação a horizontal (α) é o complemento de z.

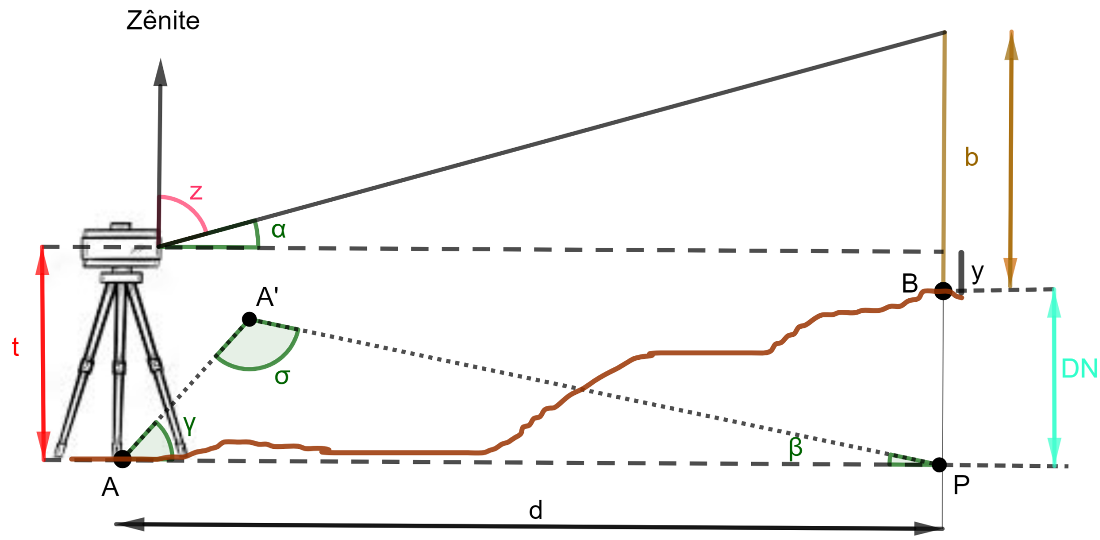
A distância horizontal (d) pode ser calculada pelo método da triangulação, onde se determina a medida dos ângulos, e depois com a aplicação da Lei dos senos se calcula a distância d.

Para aplicar o método da triangulação, deve-se:

- tomar um ponto A', de forma que seja possível medir, com o auxílio de uma trena, a distância $\overline{AA'}$.

- posicionar o teodolito e realizar a medida dos ângulos internos planos $P\hat{A}A' = \gamma$ e $A\hat{A'}P = \sigma$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, tem-se também a medida do ângulo $A\hat{P}A' = \beta$, visto que ele é o suplemento dos outros dois ângulos.

Figura 12 – Método da triangulação no nivelamento trigonométrico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Aplicando a Lei dos senos ao triângulo AA'P ilustrado na figura 12, temos a distância d:

$$\frac{\overline{AA'}}{\text{sen}\beta} = \frac{d}{\text{sen}\sigma}$$

$$d = \frac{\overline{AA'} \cdot \text{sen}\sigma}{\text{sen}\beta}$$

Para calcular a diferença de nível (DN) entre os pontos A e B, precisamos ainda calcular o valor da medida y, que é a distância entre o topo do teodolito e o começo da baliza. Para isso utilizaremos a tangente do ângulo α.

Como $\tan\alpha = \dfrac{b-y}{d}$

$$y = -d.\tan\alpha + b \tag{2.1}$$

Temos também que $DN = t - y$.

Então de 2.1 concluímos que:

$$DN = t - (-d.\tan\alpha + b)$$

$$DN = t + d.\tan\alpha - b$$

Portanto a diferença de nível (DN) entre os pontos A e B pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$DN = d.\tan\alpha - b + t.$$

2.3 Navegação

A navegação está intimamente associada a astronomia, que como vimos foi uma aliada ao desenvolvimento da trigonometria. Nesta seção falaremos de dois métodos de navegação bastante eficazes, o primeiro é a navegação astronômica que utiliza a observação dos astros para determinar posições e a segunda é o GPS (Sistema de Posicionamento Global) que utiliza satélites transmissores de sinais e aparelhos receptores.

2.3.1 Navegação astronômica

A navegação astronômica é um método de navegação suficientemente simples, onde através dos astros se determina a posição em qualquer ponto da terra utilizando apenas um sextante, instrumento usado para medir a distância angular na vertical entre um astro e a linha do horizonte, um bom cronômetro e um conjunto de tábuas. Nesta seção sempre que falarmos em altura estaremos falando de altura angular.

Sendo simples e eficaz a navegação astronômica é admirável, mesmo com a existência de equipamentos eletrônicos sofisticados, pois estes dependem da energia elétrica e a navegação astronômica não.

Para a obtenção de uma linha de posição (LDP) e a posição do navio na navegação astronômica deve se seguir, conforme Miguens (1999), a seguinte sequencia:

a) com o sextante o navegante conhece sua posição estimada (posição assumida) observando um astro; com isso se aplica várias correções à altura instrumental obtida, a altura verdadeira do astro (a);

b) com a posição assumida o navegante resolve o triângulo de posição e determina a altura calculada do astro, que é a altura que o astro apresentaria se o navio estivesse exatamente na posição assumida, e o Azimute Verdadeiro (A) do astro;

c) então o navegante compara a altura verdadeira (h) com a altura calculada, e baseado na diferença de alturas e no azimute verdadeiro calculado para o astro, determina uma linha de posição (LDP) para o navio;

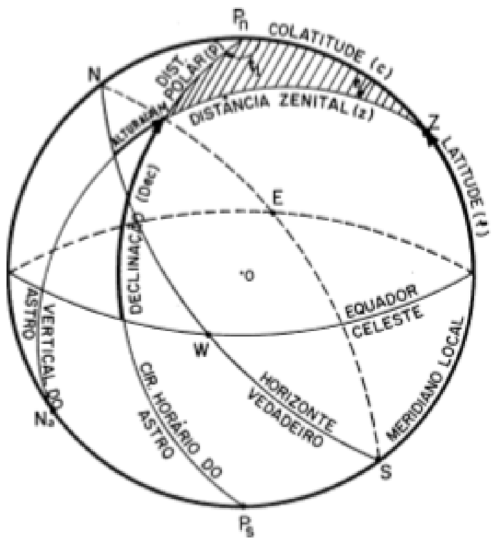
d) o navegante precisa observar 3 (ou mais) astros, e determinar 3 (ou mais) linhas de posição (LDP) para assim obter a posição do navio, na interseção das linhas de posição.

O triângulo de posição, de acordo com Miguens (1999), é um triângulo esférico obtido da combinação dos seguintes sistemas de coordenadas:

1. Geográficas (Latitude-ϕ e Longitude-λ)
2. Horárias (Ângulo Horário Local-α e Declinação- γ)
3. Horizontais ou azimutais (Altura verdadeira do astro[1]-h e Azimute verdadeiro[2]-A)

E seus principais elementos estão representados na figura 13.

Figura 13 – Triângulo de posição e seus elementos.



VÉRTICES	LADOS	ÂNGULOS
– PÓLO ELEVADO	– COLATITUDE $c = 90° - \varphi$	– ÂNGULO NO PÓLO (t)
– ZÊNITE DO OBSERVADOR (POSIÇÃO ESTIMADA OU ASSUMIDA)	– DISTÂNCIA ZENITAL $z = 90° - a$	– ÂNGULO NO ZÊNITE (Z)
– ASTRO OBSERVADO	– DISTÂNCIA POLAR $p = 90° \pm Dec$	– ÂNGULO PARALÁTICO

Fonte: Miguens (1999, p.650).

A colatitude (c) é obtida a partir da latitude estimada, utilizando a fórmula: $c = 90° - \phi$, que assim como a longitude é obtida a partir da observação do astro, utilizando o sextante.

[1] Ângulo medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no horizonte e extremidade no astro.
[2] Ângulo do objeto ao longo do horizonte, normalmente medido a partir do norte, crescendo em direção ao leste.

A distância polar (p) é obtida a partir da declinação, pela fórmula: $p = 90° \pm \gamma$. As coordenadas horárias (α e γ) são obtidas pela transformação da hora exata da observação em Hora Média de Greenwich e pela longitude estimada.

O Ângulo no Polo (t) é determinado pelo Ângulo Horário Local (α), se a oeste do observador $t = \alpha$ e se a Leste do observador $t = 360° - \alpha$.

A Distância Zenital (z) e o Ângulo no Zênite (Z) são calculados por meio da solução do triângulo de posição, utilizando normalmente tábuas, calculadoras pré programadas ou programas de computadores.

A partir deles obtém-se a altura calculada do astro ($a = 90° - z$) e o Azimute Verdadeiro (se a nordeste $A = Z$; se a noroeste $A = 360° - Z$; se a sudeste $A = 180° - Z$; se a sudoeste $A = 180° + Z$), que em conjunto permitem traçar uma linha de posição.

A altura calculada do astro (a) pode ser calculada pela fórmula:

$$a = \arcsin(\text{sen}\phi \cdot \text{sen}\gamma + \cos\phi \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha)$$

E o Ângulo no Zênite (Z) pela fórmula:

$$Z = \arccos\frac{\text{sen}\gamma - \text{sen}\phi \cdot \text{sen}a}{\cos a \cdot \cos\phi}$$

É preciso se atentar ao fato de que se a latitude e a declinação tiverem nomes contrários deve-se utilizar a declinação com sinal negativo.

Ambas as fórmulas são obtidas a partir da lei dos cossenos no triângulo de posição ilustrado na figura 13:

$$\cos e = \cos f \cdot \cos g + \text{sen}f \cdot \text{sen}g \cdot \cos E;$$

assim descrita para um triângulo EFG.

2.3.2 GPS (Sistema de Posicionamento Global)

Um sistema de navegação muito usado e bastante acessível é o GPS, sigla para Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global). É um moderno sistema de navegação por satélites, criado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

Conforme Alves (2006), trata-se de uma constelação de 24 satélites, orbitando em torno da Terra, permitindo a receptores conhecer a posição de um objeto em qualquer lugar sobre a Terra, fornecendo sua localização por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e elevação).

Para determinar uma posição são utilizados quatro satélites, e é feita a intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas considerando cada satélite como centro e a distância do satélite ao objeto o raio de cada esfera. Apesar do uso de quatro satélites, três são suficientes.

Para a determinação da posição o GPS utiliza técnicas de triangulação e cálculos trigonométricos semelhantes aos da navegação astronômica, porém conta com o controle da posição dos satélites, transmissão de sinais de rádio e o processamento computadorizado do receptor.

Neste capítulo foi possível ver que a trigonometria continua presente na astronomia, na agricultura e na navegação, isso a partir de alguns exemplos de suas aplicações. Conhecendo essas e outras aplicações da trigonometria é possível demonstrar sua importância para a sociedade. Explorar essas aplicações em sala de aula possibilita a interdisciplinariedade, a contextualização e pode facilitar o processo de construção do conhecimento.

3 As funções trigonométricas

Neste capítulo falaremos sobre como as funções trigonométricas surgiram e se desenvolveram na história das antigas civilizações, a partir de suas principais aplicações e obras dos principais matemáticos que auxiliaram no desenvolvimento dessas.

3.1 Função Seno e Cosseno

O conceito seno surgiu a partir do problema astronômico de compreender como a Terra e o Sol se moviam e também em calcular a distância entre Terra, Sol e Lua, ou seja, surgiu relacionado ao estudo da circunferência e dos ângulos.

A função seno que conhecemos hoje se desenvolveu muito. A princípio era relacionada ao termo corda (crd), que hoje conhecemos como o segmento de reta que une dois pontos extremos de um arco do círculo. Por volta de 150 a.C. Hiparco compilou a primeira tabela trigonométrica, em que associava a corda de um arco ao ângulo central correspondente a esse arco em um círculo de raio fixo, no entanto suas obras não chegaram aos nossos dias. As tabelas de cordas feitas por Ptolomeu, na obra Almagesto, que provavelmente foram feitas nos mesmos moldes das de Hiparco, são as mais completas e consideradas pelos historiadores uma aproximação das tabelas de senos que temos hoje.

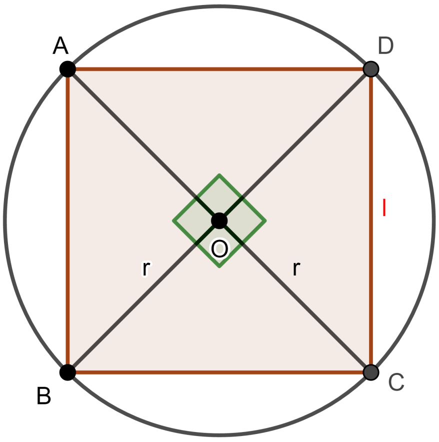
Para a construção desta tabela Ptolomeu calculou as cordas que representavam os lados dos polígonos regulares inscritos no círculo, assim obteve a $crd\,90°$ lado do quadrado, $crd\,72°$ lado do pentágono regular, $crd\,36°$ lado do decágono regular e $crd\,60°$ lado do hexágono regular.

O raio era dividido em 60 partes, o círculo em 360 partes e utilizava 377/120 como aproximação para π.

Para determinar o valor da $crd\,90°$ Ptolomeu observou que um quadrado pode ser dividido em quatro triângulos retângulos, conforme ilustrado na figura 14, onde os catetos são os raios da circunferência circunscrita ao quadrado, então, pelo Teorema de Pitágoras 3.1.1, $crd\,90° = r\sqrt{2}$.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa e igual a soma dos quadrados dos catetos.*

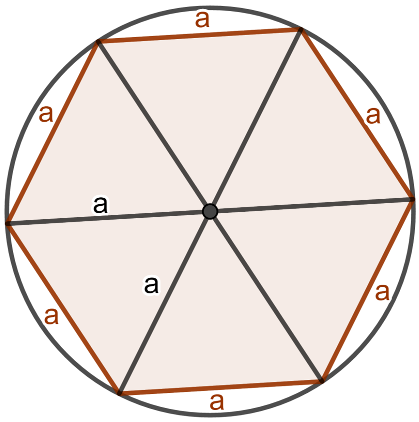
Figura 14 – Quadrado inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para determinar a $crd\,60°$ ele observou que ela corresponde ao lado do hexágono inscrito na circunferência, como ilustra a figura 15, que pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, cujos lados terão a mesma medida do raio da circunferência, logo $crd\,60° =$ lado do hexágono regular $=$ r

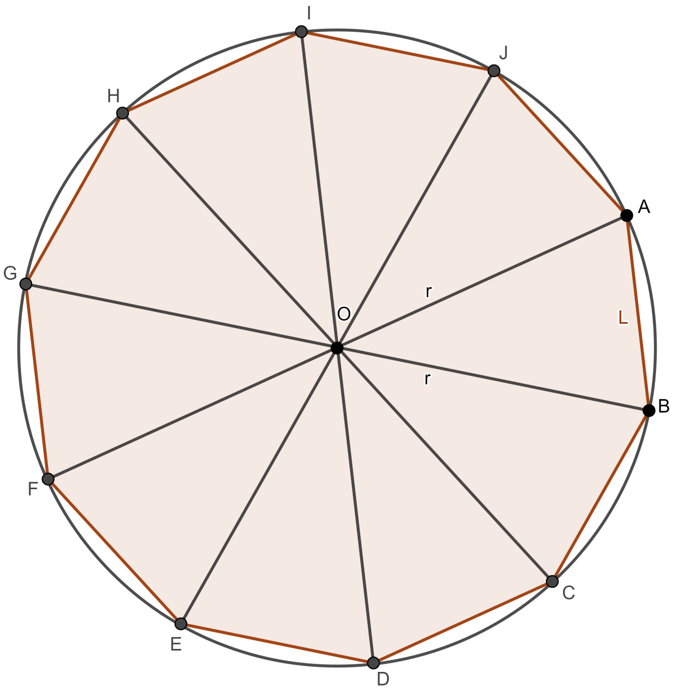
Figura 15 – Hexágono regular inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

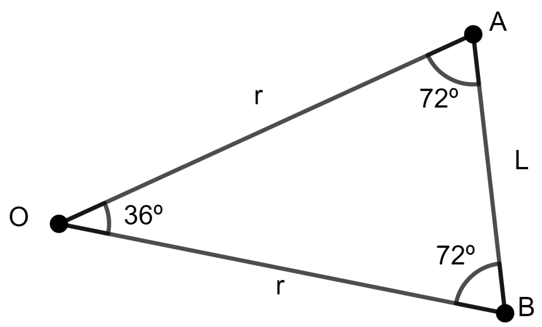
Para a $crd\,36°$ Ptolomeu observou que corresponde ao lado do decágono regular inscrito numa circunferência, figura 16. Traçando as diagonais concêntricas desse decágono determina-se dez triângulos isósceles, iguais ao triângulo AOB, ilustrado na figura 17.

Figura 16 – Decágono regular inscrito na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 17 – Triângulo isósceles AOB.

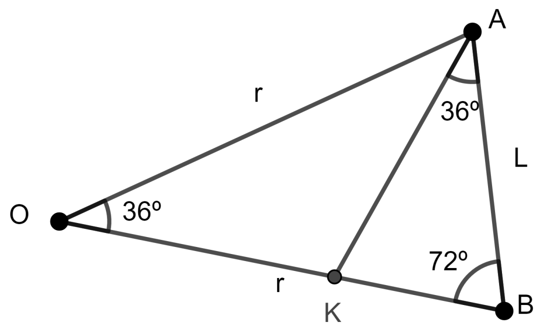


Fonte: Elaborado pela autora.

Traçando a bissetriz do ângulo $O\hat{A}B$, determina-se o ponto K sobre o segmento $\overline{OB}$, conforme figura 18. Dessa forma temos que o triângulo KAB é isósceles, uma vez que a bissetriz determina dois ângulos de mesma medida $K\hat{A}B = 36°$, e já sabemos que $A\hat{B}K = 72°$ então $A\hat{K}B = 72°$.

O triângulo OKA também é isósceles de base $\overline{OA}$. Assim temos que $\overline{AB} = \overline{AK} = \overline{OK} = L$. Como $\overline{OB} = r$ e $\overline{OK} = L$, então $\overline{KB} = r - L$.

Figura 18 – Triângulos isósceles semelhantes.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os triângulos OAB e ABK, figura 18, tem ângulos congruentes, logo são semelhantes e então seus lados correspondentes são proporcionais, assim temos:

$$\frac{r}{L} = \frac{L}{r-L},$$

logo

$$L^2 = r^2 - rL.$$

Portanto

$$L^2 + rL - r^2 = 0.$$

Aplicando a fórmula resolutiva temos:

$$L = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4.1.(-r^2)}}{2.1}$$

$$= \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2}$$

$$= \frac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2}$$

$$= \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$$

Como L é o lado do decágono, ou seja é a medida de um comprimento, o seu valor não pode ser negativo, por isso continuaremos usando apenas o valor positivo.

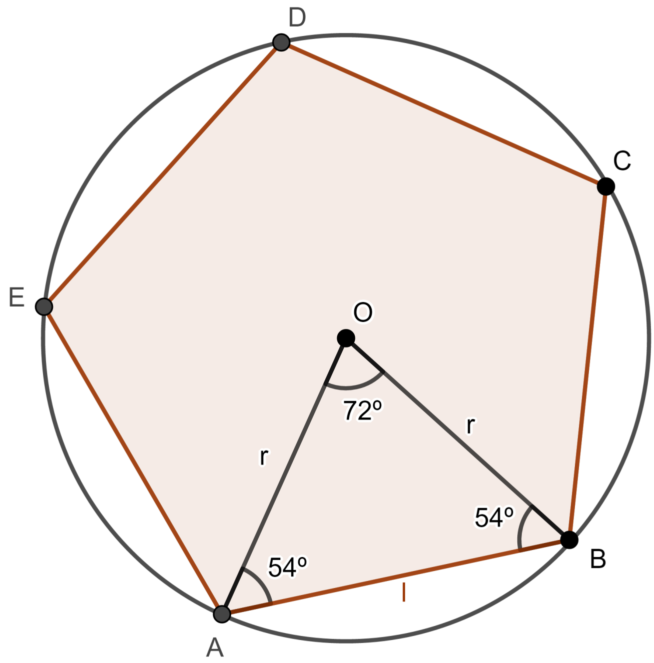
$$L = \frac{-r + r\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}. \tag{3.1}$$

Logo $crd\,36° = L =$ lado do decágono regular $= \dfrac{r \cdot (\sqrt{5}-1)}{2}$.

Ptolomeu observou que o lado do pentágono regular inscrito em uma circunferência, figura 19, corresponde à $crd\,72°$.

Figura 19 – Pentágono regular inscrito na circunferência.

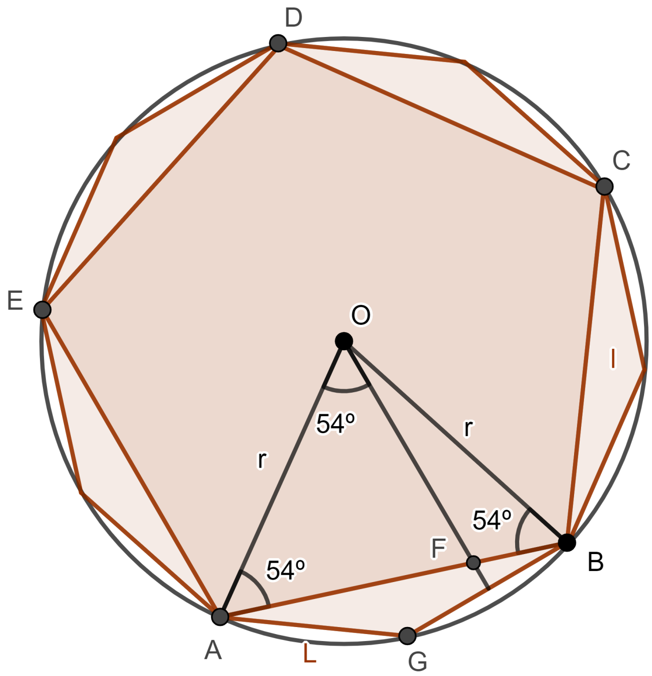


Fonte: Elaborado pela autora.

Para o cálculo da $crd\,72°$ utilizaremos o teorema 3.1.2, que demonstraremos a seguir.

Teorema 3.1.2. *Um pentágono regular está inscrito em um círculo, então o quadrado do lado do pentágono é igual a soma dos quadrados dos lados do hexágono e do decágono, também regulares, inscritos no mesmo círculo.*

Figura 20 – Pentágono e decágono inscritos na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a figura 20 temos que $\overline{AB} = l$ é o lado do pentágono regular inscrito e $\overline{AG} = L$ é o lado do decágono regular inscrito. Por construção o segmento $\overline{OF}$ forma o ângulo $A\hat{O}F = 54°$, então $A\hat{O}F$ é congruente a $O\hat{A}F$, logo o triângulo AFO é isósceles de base $\overline{OA}$. Como o triângulo AOB também é isósceles de base $\overline{AB}$, e lados $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, temos que os triângulos AOB e AFO são semelhantes. Portanto da razão de semelhança temos:

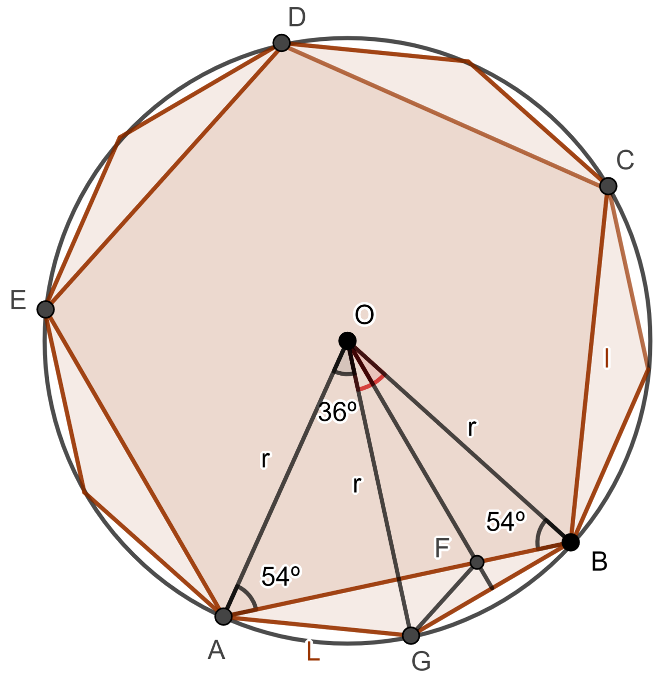
$$\frac{r}{l} = \frac{\overline{AF}}{r}.$$

Portanto

$$r^2 = l \cdot \overline{AF}. \tag{3.2}$$

Pela figura 20, tínhamos que $A\hat{O}F = 54°$ e observando a figura 21, temos que $A\hat{O}G$ é o ângulo correspondente ao lado do decágono e então mede $36°$, logo $G\hat{O}F = 18°$. Tínhamos também que $A\hat{O}B = 72°$, então $F\hat{O}B = 18°$. Portanto $G\hat{O}F = F\hat{O}B = 18°$

Figura 21 – Pentágono e decágono inscritos na circunferência.



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim podemos concluir que os triângulos GOF e BOF, na figura 21, são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{OG} = \overline{OB} = r$, $G\hat{O}F = F\hat{O}B$ e $\overline{OF}$ é lado comum. Então $O\hat{G}F = O\hat{B}F$, daí podemos concluir que $F\hat{G}B = F\hat{B}G$. Portanto o triângulo FBG é isósceles e semelhante ao triângulo GAB. Da razão de semelhança temos:

$$\frac{L}{\overline{BF}} = \frac{l}{L}.$$

Logo

$$L^2 = l \cdot \overline{BF}. \tag{3.3}$$

Somando 3.2 e 3.3 temos:

$$r^2 + L^2 = l \cdot (AF + BF).$$

Observando a figura 21 tem-se que AF+BF= l, logo:

$$r^2 + L^2 = l \cdot l$$

$$r^2 + L^2 = l^2 \tag{3.4}$$

Como

$$L = \text{lado do decágono regular inscrito} = crd\, 36° = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2};$$

$$r = crd\,60^\circ = \text{lado do hexágono regular inscrito}$$

e

$$l = \text{lado do pentágono regular inscrito } = crd\,72^\circ,$$

concluímos assim a demonstração do teorema 3.1.2 e temos que:

$$(crd\,72^\circ)^2 = r^2 + (\frac{r\cdot(\sqrt{5}-1)}{2})^2$$

$$= r^2 + \frac{r^2\cdot(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$= \frac{4r^2+5r^2-2r^2\sqrt{5}+r^2}{4}$$

$$= \frac{10r^2-2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$= r^2\cdot\frac{(10-2\sqrt{5})}{4}$$

$$= r^2\cdot\frac{(5-\sqrt{5})}{2};$$

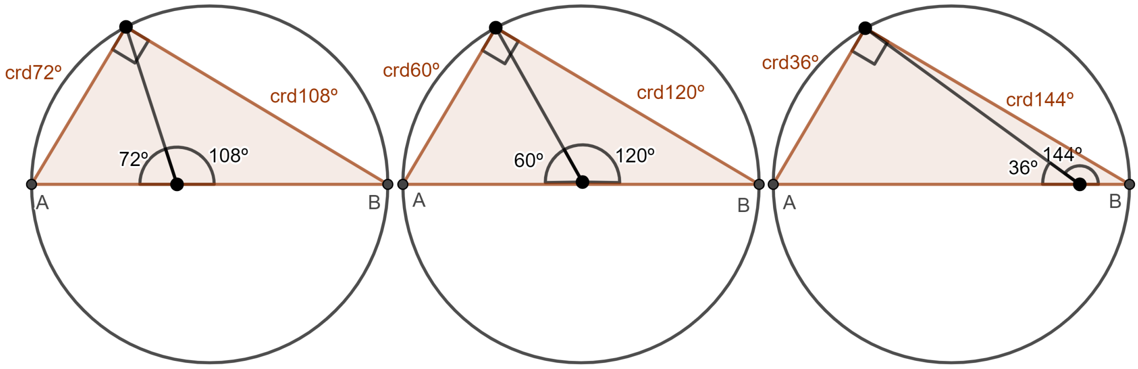
então

$$crd\,72^\circ = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}. \tag{3.5}$$

Logo $crd\,72^\circ =$ lado do pentágono regular $= r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Usando o fato de que um ângulo inscrito na circunferência, que subentende o diâmetro, é um ângulo reto, Ptolomeu determinou as cordas de $108^\circ, 120^\circ$ e 144° usando o Teorema de Pitágoras 3.1.1 e os valores das cordas dos ângulos de 72°, 60° e 36° calculadas anteriormente, conforme ilustra a figura 22.

Figura 22 – Método utilizado para o cálculo das cordas dos ângulos de 108°, 120° e 144°.



Fonte: Elaborado pela autora.

$$(crd\,108°)^2 = (\overline{AB})^2 - (crd\,72°)^2;$$
$$(crd\,120°)^2 = (\overline{AB})^2 - (crd\,60°)^2;$$
$$(crd\,144°)^2 = (\overline{AB})^2 - (crd\,36°)^2.$$

Para os demais resultados ele utilizou as fórmulas da corda da diferença de dois arcos, do arco-metade e da soma de dois arcos.

Os Hindus foram os primeiros a trabalhar com o seno da forma como definimos hoje, no século l d.C. calculavam tábuas de cosseno, chamando-as de seno reverso. Por volta de 400 d.C. eles escreveram a obra Surya Siddhanta, nela apareceu a jiva (nosso atual seno) como a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, calculada pela divisão da metade da corda pelo raio da circunferência, assim foi possível notar um triângulo retângulo na circunferência. Por volta de 500 d.C. Aryabhata em seu livro Aryabhatya se referiu pela primeira vez explicitamente ao seno como uma função de um ângulo, e também à tabela jiva.

Com a introdução do círculo de raio unitário, al Battani demonstrou que a razão jiva é válida para qualquer triângulo retângulo independente da medida da hipotenusa. O nome seno se deve a uma tradução feita da obra scientia stellarun de al Battani, os árabes usavam o nome jiba (corda) que muito se assemelha a outra palavra árabe jaib (baía, golfo), daí nas traduções para o latim Gerardo de Cremona, conforme Kennedy (1992, p.40), usou o equivalente em latim sinus, daí nosso atual seno.

A função cosseno desenvolveu concomitante ao seno, mas essa palavra surgiu somente no século XVll pelo inglês Edmund Gunter, na obra Canon Triangulorum (1620), quando este autor sugeriu combinar os termos complemento e seno, pois a palavra representava o seno do complemento de um ângulo.

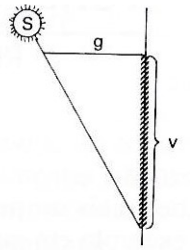
3.2 Função Tangente e Co-tangente; Secante e Co-secante

Esses conceitos se desenvolveram juntos, sendo importantes nos cálculos de sombras de objetos. Foi no Egito por volta de 1500 a.C. que apareceu a ideia de associar a sombra projetada pelo gnomon (vara vertical, cujo comprimento era medido em mão, ou associado a altura de um homem) à sequências numéricas, associando os comprimentos às horas do dia, e calculando assim as tabelas de sombras, equivalentes as nossas funções tangente e cotangente.

Os árabes muito contribuíram no desenvolvimento dessas funções, eles também se dedicaram a construir tabelas de sombras, estes utilizaram o gnomon vertical e o horizontal. Al Battani foi o primeiro a preparar uma tábua de cotangente.

Eles chamavam de 'sombra reversa' a sombra projetada em uma parede por um gnomon fixado horizontalmente nesta, figura 23, representando nossa atual tangente de elevação do sol.

Figura 23 – Gnomon Horizontal.

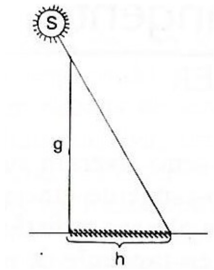


Fonte: Kennedy (1992, p. 42).

A hipotenusa da sombra reversa, que era a distância entre a ponta do gnomon e a ponta de sua sombra, corresponde à nossa atual secante.

A 'sombra horizontal' que era a sombra projetada por um gnomon vertical, figura 24, fixado no solo formando um ângulo reto com este, representa nossa atual co-tangente do ângulo de elevação do sol.

Figura 24 – Gnomon Vertical.



Fonte: Kennedy (1992, p. 42).

E a hipotenusa da sombra horizontal corresponde a nossa atual função co-secante.

No Papiro Rhind quando Ahmes traz o termo seqt, ele não expressa claramente o seu significado, mas a partir do contexto pode-se concluir que o seqt de uma pirâmide regular mencionado, seria a razão entre o afastamento horizontal da face da pirâmide pela sua altura (sua elevação vertical), o que equivale à cotangente do ângulo formado pela face da pirâmide e sua base. As primeiras tabelas de tangentes e co-tangentes foram construídas por volta de 860 d.C. pelos árabes.

Al-Biruni elaborou uma tabela de tangente usando a razão entre o seno e o cosseno, e a cotangente como $\tan(90° - \theta)$, portanto ele considerava o cotangente como o complementar da tangente.

O nome tangente foi usado pela primeira vez por Thomas Finck, em 1583 e o termo co-tangente por Edmund Gunter, em 1620.

O conhecimento do surgimento e das aplicações das funções trigonométricas permite que o aluno estabeleça comparações, entenda que surgiram para resolver problemas práticos do cotidiano das antigas civilizações e com isso tem a possibilidade de encontrar aplicações delas em seu próprio cotidiano. Portanto neste capítulo foi possível conhecer um pouco mais sobre o histórico das funções e perceber que este propicia a construção do conhecimento com mais profundidade e com significado.

4 Propostas de atividades

Para a construção dessas atividades nos referenciamos em autores que trabalham com a história da matemática e/ou desenvolvem atividades de trigonometria baseadas em sua história. Autores como Boyer (1996), Eves (2004), Mendes (2009. p.105-178.), Guelli (2010), Gomes (2011) e Gonçalves (2018).

As atividades que propomos visam seguir uma sequência contínua de ensino aprendizagem dos conteúdos de trigonometria.

Cada atividade será composta pelos seguintes itens:

- titulo da atividade: deve indicar o tema central do conteúdo;
- objetivos: devem deixar explicitas as principais finalidades da atividade;
- contexto histórico: deve apresentar o tema historicamente construído, o que pode motivar fazer com que o aluno queira participar e esclarecer suas dúvidas;
- desenvolvimento: deve descrever a atividade e os materiais necessários para sua realização; será composto por construções e atividades práticas, situações-problemas, momentos para pensar e responder e também para calcular.

As propostas são compostas por atividades que contemplam habilidades e competências previstas na BNCC. Nelas buscamos a articulação entre as áreas do conhecimento a partir do desenvolvimento histórico, possibilitamos à representação de situações históricas, reconstrução de recursos pedagógicos semelhantes aos utilizados pelas antigas civilizações, comunicação e interação entre os alunos, pesquisa para aprofundamentos e a compreensão da formação do pensamento matemático.

Além disso são atividades e construções simples, que exigem poucos recursos, sendo fácil e acessível para qualquer escola. Acreditamos que essa proposta de atividade será motivadora e geradora de conhecimento.

4.1 Medindo alturas inacessíveis pela sombra: semelhança de triângulos

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental, nela temos como objetivos:

- conceituar a semelhança entre dois ou mais triângulos;

- identificar dois ou mais triângulos semelhantes;
- resolver situações-problemas que envolvam semelhança de triângulos retângulos;

4.1.1 Contexto histórico

Tales de Mileto, por volta de 600 a.C., realizou uma grande façanha, conseguiu com uma vara e duas sombras calcular a altura de uma pirâmide no Egito. Para tal feito Tales fincou uma vara no chão e mediu o seu comprimento, depois disso esperou até que sua sombra fosse exatamente do seu tamanho, e então ordenou que medissem depressa o comprimento da sombra da pirâmide e a essa medida acrescentasse metade do comprimento da base da pirâmide, e assim teria-se a altura da pirâmide.

Sua grande façanha estava em compreender que no momento em que a sombra da vara tem exatamente o seu comprimento, é formado um triângulo retângulo isósceles semelhante ao triângulo retângulo isósceles formado pela pirâmide e sua sombra. Então usando semelhança de triângulos ele concluiu que a altura da pirâmide naquele instante era igual a sua sombra mais metade de sua base, pois como ela era muito grande, escondia parte de sua sombra.

Tales demonstrou que a relação existente entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes é sempre a mesma, independente do comprimento desses lados. Desde então a semelhança de triângulos vem sendo usada para o cálculo de distâncias inacessíveis e também na redução ou ampliação de mapas e objetos.

4.1.1.1 Atividade prática 1

Materiais: Régua e transferidor

Para essa atividade o professor deverá seguir os seguintes passos:

1. Distribuir triângulos de diversos tamanhos, e semelhantes entre si, aos alunos.
2. Pedir que utilizem o transferidor para medir os ângulos de seu triângulo.
3. Orientar que os alunos se agrupem com os colegas cujos três ângulos tiveram a mesma medida.
4. Explicar que cada grupo ficou com triângulos semelhantes pelo caso Ângulo/ Ângulo. E apresentar os demais casos de semelhança de triângulos.
5. Pedir que os alunos meçam os lados dos triângulos e relacionem aos lados correspondentes do triângulo de seu colega, e depois que calculem a razão de semelhança entre os lados dos triângulos.

4.1.1.2 Atividade prática 2

Materiais: Trena e vareta (ferro ou madeira medindo cerca de 1 metro)

Para essa atividade o professor deve seguir os seguintes passos:

1. Pedir que os alunos escolham o objeto a ser medido (prédio, torre, árvore, caixa de água...), onde incida luz solar e seja possível medir sua sombra.
2. Fixar a vareta verticalmente no chão, e pedir que os alunos meçam e anotem sua altura, sua sombra e a sombra do objeto no mesmo instante.
3. Orientar que representem por meio de desenho a situação que acabaram de presenciar, e depois que representem geometricamente.
4. Orientar que calculem a razão de semelhança e a apliquem para calcular a altura do objeto escolhido.

4.2 Teorema de Pitágoras

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 8º e 9º ano do ensino fundamental, nela temos como objetivos:

- formular o Teorema de Pitágoras a partir de informações históricas;
- resolver situações-problemas utilizando o Teorema de Pitágoras;

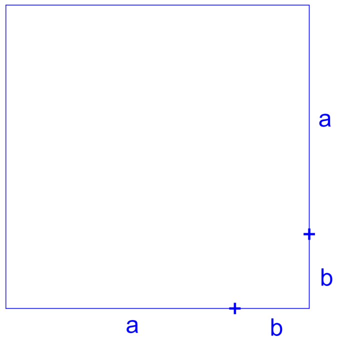
4.2.1 Contexto Histórico

O Teorema de Pitágoras faz relações entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, e também foi responsável pela descoberta dos números irracionais e das raízes quadradas.

A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras sua descoberta e demonstração, no entanto esse teorema era conhecido e usado pelos egípcios e babilônios em construções e medições de terras séculos antes de Pitágoras. Mas sua primeira demonstração geral pode ter realmente sido dada por Pitágoras, ou por alunos de sua escola, e acredita-se que essa demonstração tenha sido por meio da decomposição de figuras e equivalência de áreas, conforme segue:

1º desenha-se um quadrado de lado $a + b$, figura 25;

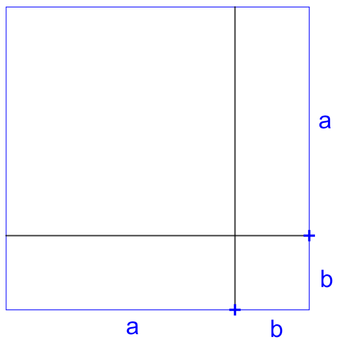
Figura 25 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas - 1º passo.



Fonte: Elaborado pela autora.

2º traça-se dois segmentos paralelos aos lados do quadrado e de largura medindo b, figura 26;

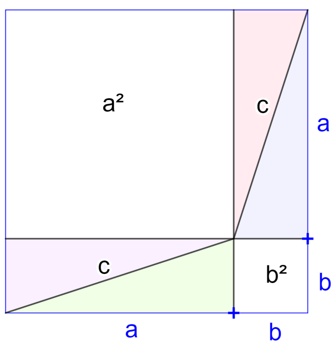
Figura 26 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas - 2º passo.



Fonte: Elaborado pela autora.

3º traça-se a diagonal (c) dos retângulos formados no passo anterior, figura 27;

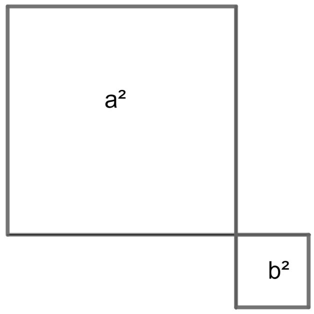
Figura 27 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas - 3º passo.



Fonte: Elaborado pela autora.

A área da região formada ao retirar os quatro triângulos retângulos é $a^2 + b^2$, figura 28;

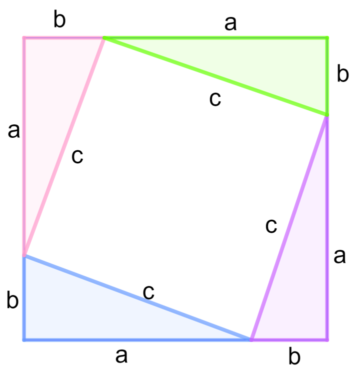
Figura 28 – Região formada ao retirar os quatro triângulos retângulos.



Fonte: Elaborado pela autora.

4º desenha-se agora o mesmo quadrado de lado a + b, mas ajustando os quatro triângulos nas laterais, conforme figura 29.

Figura 29 – Demonstração do Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas - 4º passo.



Fonte: Elaborado pela autora.

4.2.1.1 Atividade prática

Materiais: EVA, régua, esquadro, lápis coloridos e tesoura.

Para essa atividade o professor deve seguir os seguintes passos:

1. Pedir que construam no EVA dois quadrados iguais.
2. Pedir que dividam os lados de um dos quadrado de forma que seja possível formar nos dois vértices opostos dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Orientar que tracem as diagonais dos retângulos formados nos outros vértices, assim obtendo quatro triângulos retângulos de catetos a e b. Conforme figura 27.

3. Pedir que pintem os quadrados a e b de cores distintas e os triângulos da mesma cor.

4. Pedir que dividam os lados do outro quadrado e marquem os mesmos comprimentos a e b, de forma que fiquem em sequência. Orientar que formem triângulos retângulos de catetos a e b em cada canto do quadrado. Dentro do quadrado vai formar um quadrado menor de lado c. Conforme figura 29.

5. Pedir que pintem os triângulos da mesma cor usada nos triângulos anteriores e o quadrado de lado c de cor diferente.

6. Pedir que recortem os triângulos do quadrado em que aparece a região de área c^2, e sobreponha-os no outro quadrado em cima dos triângulos congruentes a eles. Orientar que recortem os triângulos formados no outro quadrado e pedir que observem as áreas que restaram em cada quadrado.

4.2.1.2 É hora de pensar e responder!

1. Analisando as figuras que representam a demonstração do Teorema de Pitágoras por equivalência de áreas tente explicar a que conclusão Pitágoras chegou em relação as áreas dos quadrados de lados a, b e c.

2. Conclua a demonstração igualando as áreas das figuras 25 e 29, pois como se sabe são iguais e representam um quadrado de lado $a + b$, com isso enuncie o Teorema de Pitágoras, para isso estabeleça a relação entre a hipotenusa e os catetos no triângulo retângulo abc.

4.2.1.3 É hora de calcular!

- **Situação Problema 1**

  Duas águias descansam no topo de duas pirâmides, cujas alturas são 200 cúbitos e 100 cúbitos, a distância entre as pirâmides é de 250 passos. As águias percebem que há uma cobra entre as pirâmides e voam em sua direção, elas à alcançam no mesmo instante. Se elas percorreram a mesma distância, que distância a cobra estava da pirâmide menor? Considere 1 passo $\approx 0,8$ metros e 1 cúbito $\approx 0,5$ metros.

- **Situação Problema 2**

  A área da base de uma pirâmide retangular mede 600 cúbitos quadrados e a diagonal de sua base mede 130 cúbitos. Qual a medida dos lados dessa pirâmide?

4.3 O relógio de sol

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, nela temos como objetivos:

- construir e explorar um relógio de sol;
- representar no gráfico as relações entre as medidas das sombras e as horas do dia;

4.3.1 Contexto Histórico

Durante muitos séculos os homens observaram a sombra de um objeto ou de si mesmo projetada pelo sol, por meio da observação perceberam que a sombra decrescia do amanhecer ao meio dia e crescia do meio dia ao entardecer. Surgiu então, no Egito, a ideia de associar essas sombras às horas do dia.

Assim foi inventado o primeiro relógio, o relógio do sol, um simples bastão fincado no solo, para observação do movimento de sua sombra.

Posteriormente surgiram os gnomons, simples obeliscos de pedra, com marcos dispostos de forma circular onde a luz do sol projetava a sombra e assinalava as horas do dia.

4.3.1.1 Construção do relógio de sol

Materiais: Pedaço de papelão 30 x 30 cm, caneta, canetão, transferidor, régua, palito para churrasco, arame e bússola.

Para a construção do relógio de sol deve se seguir os seguintes passos:

1º Trace as diagonais no papelão para encontrar o centro. A intersecção das diagonais será o centro.

2º Trace uma reta paralela a uma das bases do papelão e que passe pelo centro.

3º Faça as divisões das horas utilizando o transferidor. Como a circunferência inteira mede 360° e o dia tem 24 horas, realizando a divisão temos que cada hora corresponde a 15°. Como estamos construindo um relógio de sol somente nos interessa 12 horas do dia, o intervalo das seis às dezoito horas. Por isso faremos a marcação de apenas 12 horas.

4º Faça um furo no centro do papelão de forma que o palito de churrasco atravesse formando um ângulo reto.

5º Fixe o relógio onde haja luz incidente do sol sem interferência de sombras e posicione sua base na direção leste oeste, de forma que seis horas aponte para a direção leste e dezoito para a direção oeste.

6º Incline o relógio de acordo com a latitude do local onde for instalado, o ângulo de inclinação deve ser o ângulo complementar à latitude do local. Para fixar o relógio nessa angulação use o arame, dobre-o até que forme exatamente o ângulo complementar à latitude do local e fixe-o ao papelão.

4.3.1.2 Atividade Prática

Para essa atividade o professor deve seguir os seguintes passos:

1. Pedir que os alunos observem a sombra que o relógio projeta no decorrer das horas do dia e descrever o que acontece.

2. Orientar que repitam a observação por 3 dias consecutivos, medindo o tamanho das sombras a cada hora.

3. Pedir que representem por meio de um gráfico as observações feitas.

4.4 Das cordas de uma circunferência à função seno e cosseno

Adaptação da proposta de Gomes (2011)

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 2º ano do ensino médio, nela temos como objetivos:

- relacionar a função corda e a função seno.
- relacionar a função seno e a função cosseno

4.4.1 Contexto Histórico

O Almagesto de Ptolomeu representou quando foi escrito, no primeiro século da era Cristã, a mais importante fonte de consulta para astrônomos de todo o mundo. Nele estão contidas tábuas trigonométricas que relacionavam as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes.

No Almagesto Ptolomeu explica detalhadamente como calcular sua tabela de cordas, para isso pode-se utilizar a função corda (crd):

$$crd\,\alpha = 2R\text{sen}\frac{\alpha}{2}. \tag{4.1}$$

Juntamente com a função seno se desenvolveu a função cosseno, que representava o seno do complemento de um ângulo. Na linguagem matemática:

$$\cos\alpha = \text{sen} 90^\circ - \alpha. \tag{4.2}$$

4.4.1.1 É hora de calcular!

1. Considerando a função corda 4.1, que traz a relação entre corda e seno, o raio (R) igual a 60 como era utilizado por Ptolomeu, e utilizando uma calculadora, complete a tabela 1.

Tabela 1 – Relação entre corda e seno.

α	$crd\,\alpha$	$\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}$ (fração)	$\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}$ (decimal)
36°	$\dfrac{R\cdot(\sqrt{5}-1)}{2}$		
60°		$\dfrac{1}{2}$	
72°	$R\cdot\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$		
90°	$R\cdot\sqrt{2}$		
120°		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	
180°		1	

Fonte: Elaborado pela autora.

2. Utilizando a equação 4.2 e os valores encontrados na tabela 1, calcule:

a) $\cos 30^\circ$

b) $\cos 45^\circ$

c) $\cos 54^\circ$

d) $\cos 60^\circ$

e) $\cos 72^\circ$

3. Compare os valores obtidos nas atividades 1 e 2 com os valores das tabelas atuais.

4.5 Razões trigonométricas no círculo

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 2º ano do ensino médio, nela temos como objetivo determinar os valores do seno, cosseno e tangente para alguns ângulos agudos.

4.5.1 Contexto Histórico

As primeiras tábuas trigonométricas construídas tiveram origem provavelmente na matemática Babilônica onde relacionavam a corda de um arco ao ângulo central. Ganharam destaque a partir da obra de Hiparco, que foi incorporada ao Almagesto de Ptolomeu e assim contribuiu com a determinação numérica das razões trigonométricas.

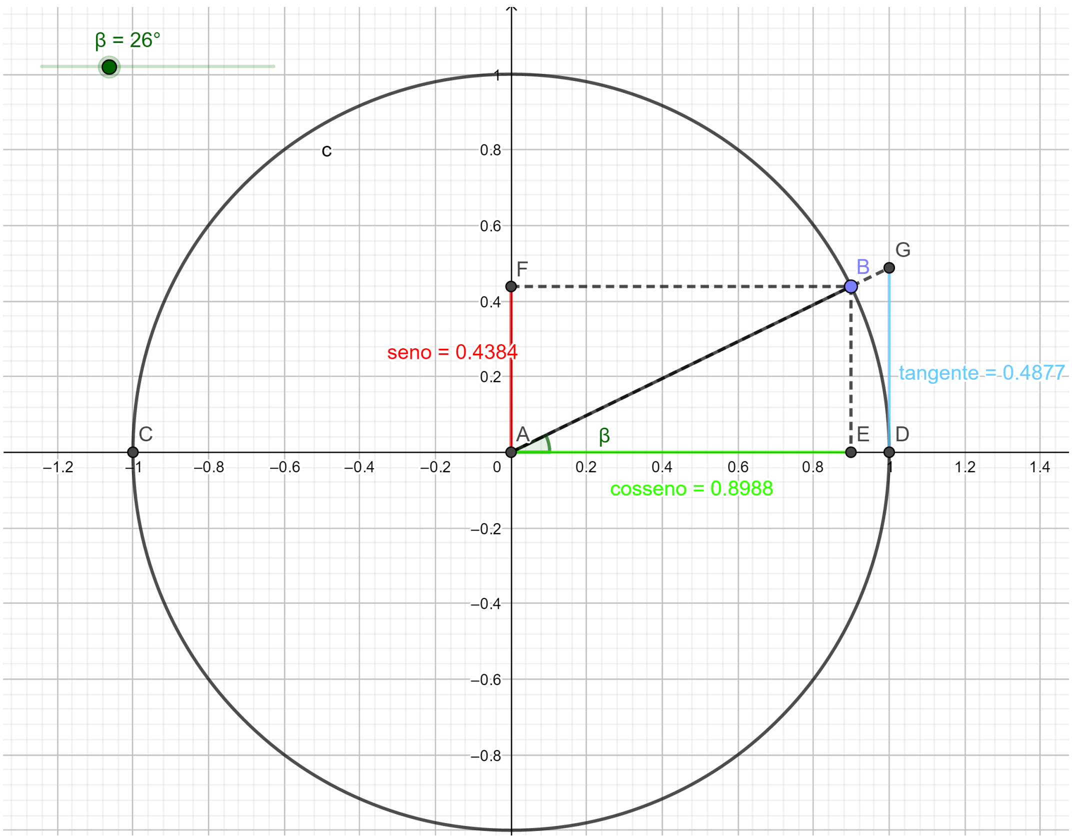
Na construção dessas tábuas os hindus buscaram no interior do círculo um triângulo retângulo, que era determinado pela meia corda. Essas tabelas hindus apresentavam valores diferentes para o seno de um mesmo arco, isso acontecia porque tomavam diferentes valores para o raio da circunferência.

Al-Battani adotou a trigonometria hindu e introduziu o estudo do seno na circunferência de raio unitário. Posteriormente Euler definiu as razões trigonométricas como funções de um ângulo, seno e cosseno deixaram de ser segmentos de reta e passaram a ser, respectivamente, a ordenada e abcissa de um ponto na circunferência de raio unitário.

Na circunferência trigonométrica a origem dos arcos que representam os ângulos está no ponto de coordenadas (1,0) e os valores positivos estão no sentido anti-horário.

4.5.1.1 Construção do círculo trigonométrico no geogebra

Figura 30 – Círculo Trigonométrico.



Fonte: Elaborado pela autora; Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mnz7arua.

Para a construção do círculo trigonométrico no Geogebra[1], figura 30, deve se seguir os seguinte passos:

1º Construa um círculo (c) de Centro $A(0,0)$ e raio $= 1$ e crie um segmento partindo do ponto A até a extremidade (ponto B) da circunferência (raio). Vá nas propriedades e desmarque a opção de exibir rótulo.

2º Marque os pontos C e D na intersecção do círculo com o eixo das abcissas.

3º Crie uma reta perpendicular ao eixo das abcissas passando pelo ponto B. Marque o ponto E na interseção da reta com o eixo das abcissas e depois oculte a reta.

4º Crie um segmento que parta de B e que vá até E, vá até as propriedades desse segmento e o ponha o estilo de linha tracejado, também desmarque a opção de exibir rótulo.

5º Crie uma reta paralela ao eixo das abcissas passando pelo ponto B. Marque o ponto F na interseção dessa reta com o eixo das ordenadas, depois oculte a reta.

6º Crie um segmento de origem em F e que vá até A, para uma melhor visualização iremos destacá-lo entrando na propriedade dele e colocando uma cor diferente de preta. Esse segmento é denominado de seno, portanto altere a legenda dele para seno e marque a opção exibir legenda e valor.

7º Crie um segmento que parta de F e que vá até B, coloque no estilo tracejado,também desmarque a opção de exibir rótulo.

8º Crie um segmento que tenha origem no ponto A e que vá até o ponto E. Esse segmento é o cosseno, altere em suas propriedades a cor e a legenda, marque a opção exibir legenda e valor.

9º Crie uma reta tangente à circunferência (c), passando pelo ponto D.

10º Crie uma reta passando pelos pontos A e B, marque o ponto G de interseção dessa reta com a reta tangente à circunferência e depois às oculte.

11º Crie um segmento que tenha origem em A e que vá até G, altere seu estilo de linha para tracejado, também desmarque a opção de exibir rótulo.

12º Crie um segmento que parta de G e que vá até D.Esse segmento é a tangente, portanto altere sua cor e sua legenda, marque a opção exibir legenda e valor.

13º Marque o ângulo α formado pelo eixo das abcissas com o segmento a, depois vá nas propriedades e altere sua legenda para β.

[1] Software de matemática dinâmica gratuito, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo.

14º Para variarmos o ângulo vamos criar um objeto livre, que será o nosso ângulo β, no campo entrada digite: $\beta = 0°$.

15º Entre nas propriedades do ponto B no campo definição no lugar de "$Ponto[c]$" digitemos "$GIRAR[D, \beta, A]$".

- Após a construção do círculo trigonométrico no geogebra o professor deve orientar que preencham a tabela 2 utilizando-o. E depois pedir que descrevam a relação de crescimento e decrescimento entre os valores e os ângulos.

Tabela 2 – Razões trigonométricas para ângulos notáveis.

Ângulo	Razões trigonométricas		
(Grau)	Seno	Cosseno	Tangente
0°			
15°			
30°			
45°			
60°			
75°			
90°			

Fonte: Elaborado pela autora.

4.6 Medindo alturas com o auxílio do teodolito

O público alvo desta proposta de atividade são estudantes de trigonometria de cursos técnicos de agrimensura, nela temos como objetivos:

- construir e explorar o teodolito;
- representar geometricamente situações problemas que envolvam semelhança de triângulos retângulos;
- determinar a altura de objetos a partir das razões trigonométricas;

4.6.1 Contexto Histórico

Após a grande façanha de Tales de Mileto medindo a altura da pirâmide, outros geômetras na tentativa de medir a altura de outros objetos utilizaram a mesma estratégia, e a aperfeiçoaram quando houve necessidade de fazer medições em dias chuvosos ou nublados, onde o sol não aparecia.

Essas situações levaram o homem a desenvolver mecanismos de medição, como o astrolábio e o teodolito, esses permitiram calcular alturas e distâncias, inclusive inacessíveis.

4.6.1.1 Construção do teodolito caseiro

Um dos instrumentos criados para auxiliar no cálculo de alturas é o teodolito, um instrumento óptico utilizado para realizar medidas de ângulos. A construção e aplicação do teodolito exige, além de um pouco de prática, conhecimentos geométricos e trigonométricos para que os resultados alcançados nas medições sejam corretos, propomos então que essa atividade seja realizada por estudantes de trigonometria de cursos técnicos de agrimensura.

Materiais: Três cabos de 1,5 metros de comprimento, garrafa pet, duas tampas de garrafa pet, arame, dois compensados 22 x 20 cm, nivelador, transferidor, canudo, parafusos, cola quente.

Passo a passo

1º Corte a garrafa pet ao meio, e depois faça três cortes do meio em direção a boca da garrafa.

2º Fixe cada parte da garrafa a um cabo utilizando o arame. Finalizando assim o tripé.

3º Perfure o centro das tampas, e em uma delas faça dois furos nas laterais, de forma que um furo fique oposto ao outro e que seja possível atravessar o canudo por eles.

4º Fixe a tampa na parte superior do compensado pelo furo do centro, usando um parafuso e de forma que seja possível girá-la.

5º Coloque o canudo pelos furos da lateral da tampa.

6º Fixe a outra tampa no centro do outro compensado, certifique-se que esteja bem fixado pois esta se encaixará ao tripé.

7º Fixe o transferidor ao lado da tampa com o canudo, de forma que a reta $0°$ à $180°$ fique paralela ao lado superior do compensado.

8º Cole os compensados de forma que formem entre si um ângulo reto.

9º Fixe o nivelador no compensado da base.

4.6.1.2 Atividade Prática

Materiais: teodolito, objeto a ser medido, lápis, borracha e papel.

Para essa atividade o professor deve seguir os seguintes passos:

1. Orientar que os alunos escolham o objeto a ser medido, lembrando que é preciso visualizar o objeto por inteiro.

2. Orientar que posicionem o teodolito a uma distância do objeto a ser medido de modo que consigam ver o topo do objeto utilizando o canudinho.

3. Certificar que o teodolito esteja nivelado e pedir que observem o ângulo marcado pelo canudinho no transferidor.

4. Pedir que anotem o ângulo encontrado, a altura do teodolito e a distância em que foi feita a medição.

5. Pedir que representem a situação geometricamente em uma folha de papel.

6. Orientar que utilizem as razões trigonométricas e calculem a altura do objeto.

4.7 Explorando o círculo trigonométrico

Adaptação da proposta de Gonçalves (2018)

O público alvo desta proposta de atividade são alunos do 2º ano do ensino médio, nela temos como objetivos:

- explorar o círculo trigonométrico;
- relacionar os valores trigonométricos encontrados no primeiro quadrante com os demais quadrantes;

4.7.1 Contexto Histórico

A divisão da circunferência em 360 partes se deve a Hiparco. Esse teve influência dos Babilônios, que utilizavam a base 60 por ser um número com muitos divisores e poder ser facilmente decomposto em um produto de fatores. Por essa mesma razão Hiparco optou por dividir o círculo em 360 partes.

Cada uma das 360 partes iguais recebeu o nome de arco de 1 grau. Cada arco de 1 grau foi dividido em 60 partes iguais, que receberam o nome de arco de 1 minuto. Cada arco de 1 minuto foi também dividido em 60 partes iguais, que receberam o nome de arco de 1 segundo.

Os arcos do círculo também podem ser medido em radianos, onde o círculo completo $(360°)$ mede 2π radianos, e os demais arcos são frações dessa medida.

4.7.1.1 Construção do círculo trigonométrico

Materiais: Régua de 1 metro, giz, cordão e transferidor.

Para a construção do círculo trigonométrico deve se seguir os seguintes passos:

1º Marque no chão o ponto que será o centro do círculo trigonométrico.

2º Faça um compasso utilizando o cordão e o giz, e trace a circunferência de raio 1 metro.

3º Divida a circunferência em quatro partes iguais. Cada uma dessas partes corresponde a um quadrante.

4º Marque os ângulos notáveis correspondidos entre 0° e 360°.

5º Faça marcações nos eixos do seno e cosseno de forma que cada marcação corresponda a um décimo do raio.

4.7.1.2 Hora de pensar e responder!

Preencha os valores correspondentes dos ângulos em radianos e depois calcule os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos marcados na circunferência, e assim preencha a tabela 3. Por fim, analisando à mesma descreva a relação observada entre os valores do seno, cosseno e da tangente dos ângulos do 1º quadrante com os ângulos dos demais quadrantes.

Tabela 3 – Razões trigonométricas para ângulos notáveis no círculo trigonométrico.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianos																	
Sen																	
Cos																	
Tg																	

Fonte: Elaborado pela autora.

.

Considerações finais

Com a construção do histórico da trigonometria, investigamos as diferentes civilizações que contribuíram para seu desenvolvimento. A partir desse histórico é possível dizer que a história proporciona a contextualização e interdisciplinaridade. Por meio dela percebemos que a trigonometria surgiu a fim de resolver problemas oriundos de outras ciências, em especial da astronomia. Vimos, por exemplo, que as tabelas trigonométricas foram criadas para facilitar os cálculos para astrônomos. Ela também contribuiu na navegação e agricultura. Percebemos então que o desenvolvimento destas ciências estiveram interligados.

Nosso trabalho teve como problemática responder a questão: “Como abordar a história como um recurso pedagógico no estudo de trigonometria?”. Na intenção de respondê-la apresentamos as propostas de atividades. Nelas buscamos trazer trechos da história que se relacionavam ao conteúdo em estudo, que visam possibilitar ao aluno entender a formação do pensamento matemático e tornar as aulas mais cativantes e agradáveis.

Acreditamos que a oportunidade de conhecer e entrar em contato com construção do pensamento matemático faz com que o educando se sinta motivado e que sua curiosidade pelos conteúdos em estudo aumente. Além disso em nossas propostas de atividades buscamos criar situações de aprendizagem que possibilitem o diálogo e a interação, que desenvolvam o pensamento reflexivo dos alunos e que propicie o processo de construção e formalização dos conceitos trigonométricos.

Quero destacar que o PROFMAT e a presente dissertação contribuiu significativamente para a minha formação acadêmica e na aquisição de novos conhecimentos, em especial sobre a história da trigonometria. Após essa pesquisa compreendo o quanto à pesquisa é importante e necessária na formação profissional.

Em trabalhos futuros, pretende-se aplicar as atividades elaboradas, para confirmar os resultados previstos neste estudo, e ainda aprofundar o estudo em aplicações atuais da trigonometria nas diversas ciências e também no estudo do funcionamento do GPS.

Referências

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 13.133**: execução de levantamento topográfico. 35p. Rio de Janeiro, RJ: Comitê Brasileiro de Construção Civil: Comissão de Estudo de Serviços Topográficos, mai. 1994, ABNT.

ALVES, S. A matemática do gps. **Revista do professor de matemática**, v. 59, p. 17-26. São Paulo, SP: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

ÁVILA, G. A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia antiga. **Revista do professor de matemática**. n. 1, p. 9-13. São Paulo, SP: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1982.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. v.2. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC. SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC. SEB, 2017.

CASTEJON, M.; ROSA, R. O. **Olhares sobre o ensino de matemática**: Educação básica. Uberaba, MG: IFTM, 2017.

COSTA, N. M. L. d. **Funções seno e cosseno**: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo, SP: Summus, 1986.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, p. 97–115, 1999.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

GOMES, S. C. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica**. 2011. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

GONÇALVES, R. M. **A trigonometria e a história da matemática em sala de aula**: uma experiência com a construção de instrumentos de navegação e do relógio de sol. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Porto Alegre, 2018.

GUELLI, O. Contando a história da matemática. **6 Dando corda na trigonometria**. 9. ed. São Paulo, SP: Ática, 2010.

KENNEDY, E. S. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: trigonometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. v.5. São Paulo, SP: Atual, 1992.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. cap.2. In: MIGUEL, A. et al.. **História da matemática em atividades didática**s. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2009. p.105–178.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre, RS, Sulina, 2006.

MIGUENS, A. P. **Navegação: a ciência e a arte.** vol. II. Navegação astronômica e derrotas. Rio de Janeiro: DHN, 1999.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. d. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2012.