UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ

Universidade Federal Jataí
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Ronaldo Martins Ferreira

Jataí-GO

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação   [ ] Tese

2. Nome completo do autor

RONALDO MARTINS FERREIRA

3. Título do trabalho

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM   [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **RONALDO MARTINS FERREIRA**, **Usuário Externo**, em 15/12/2020, às 11:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Molina Gomes**, **Professora do Magistério Superior**, em 15/12/2020, às 16:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1753025** e o código CRC **F048DBBE**.

Referência: Processo nº 23070.036568/2020-92 SEI nº 1753025

RONALDO MARTINS FERREIRA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de mestrado elaborada sob orientação da Profª. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes e coorientada pela Profª. Dra. Luciana Aparecida Elias apresentado à banca avaliadora do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas, Universidade Federal de Jataí como exigência para obtenção do título de mestre.

Orientadora: Profª. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes
Coorientadora Profª. Dra. Luciana Aparecida Elias

Jataí-GO
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ferreira, Ronaldo Martins
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA [manuscrito] / Ronaldo Martins Ferreira. - 2020.
109 f.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Aparecida Molina Gomes; co orientadora Dra. Luciana Aparecida Elias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2020.
Bibliografia.
Inclui siglas, lista de figuras.

1. Tecnologias de informação e comunicação. 2. Sequência didática. 3. Geometria. 4. Transformações geométricas. I. Gomes, Dra. Adriana Aparecida Molina, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **08** da sessão de Defesa de Dissertação de RONALDO MARTINS FERREIRA, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No trigésimo dia do mês de outubro de dois mil e vinte, a partir das **14h00 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada **"**VISUALIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA**"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora ADRIANA APARECIDA MOLINA GOMES (UFG/REJ), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor JOSÉ HIGINO DAMASCENO JUNIOR (UFG/REJ) membro titular externo e Professor Doutor FLÁVIO GOMES DE MORAES (UFG/REJ) membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sendo o candidato **aprovado(a)** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Orientadora, Professora Doutora ADRIANA APARECIDA MOLINA GOMES, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no trigésimo dia do mês de outubro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS POR MEIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Molina Gomes**, **Professora do Magistério Superior**, em 30/10/2020, às 16:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Flavio Gomes De Moraes**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/10/2020, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Higino Damasceno Junior**, **Professor do Magistério Superior**, em 03/11/2020, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1613657** e o código CRC **7545F9D2**.

Dedico esta conquista aos meus maiores mestres, meus pais; aos meus melhores estímulos, meus filhos; e àquela que esteve ao meu lado, meu amor, Denise.

Agradecimentos

A Deus, por ter me feito fraco para sentir a necessidade de Sua força suprema, apoiando-me no decorrer da vida e principalmente neste período em que estive cursando o mestrado.

Ao meu pai, pelo seu exemplo de vida, que foi para mim um estímulo para nunca desistir dos meus sonhos.

A minha mãe, minha eterna amiga, que, com seu amor incondicional, sempre me incentivou e apoiou em busca de realizações.

Agradeço em especial à minha esposa e aos meus filhos, que sempre me apoiaram, incentivaram e auxiliaram, em todos os momentos. A eles, o meu muito obrigado!

Agradeço a cada professor que ministrou aulas para minha turma: os mestres Gecirlei, Flávio, Wender, Esdras, Adriana Cintra, Benedito, Luciana, Claudiney e especialmente a professora Adrina Molina, que me auxiliou várias vezes, com todo o seu conhecimento e humildade.

Aos meus colegas de turma e a todos aqueles que contribuíram para a realização desta dissertação, direta ou indiretamente, a minha eterna gratidão!

*"Não considere nenhuma prática como imutável. Mude e esteja sempre pronto para mudar. Não aceite verdade eterna.Experimente!" (**SKINNER**, 1969).*

RESUMO

O objetivo deste estudo foi apresentar as transformações geométricas, especificamente translação, rotação, escala, espelhamento e homotetia, e, com isso, apresentar funções do *Software* GeoGebra dando ênfase na construção gráfica e animação de objetos geométricos. Objetiva-se também pesquisar estudos teóricos sobre o ensino de transformações geométricas utilizando o *software* GeoGebra, enfatizando suas contribuições, bem como propor uma sequência de atividades para o ensino de translação, rotação, escala e espelhamento pelo uso do o GeoGebra como recurso didático. Esse *software* vem sendo utilizado como ferramenta metodológica para despertar o interesse do educando e visa ao ensino e aprendizagem de modo significativo. Nesse contexto vários autores têm buscado ressaltar a importância da aproximação das tecnologias da informação e comunicação (TICs) no ambiente escolar como meio facilitador do processo ensino/aprendizagem. Assim tem-se como questão de investigação neste trabalho: "Quais as vantagens e limites do uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem das transformações geométricas?". Para tanto, foi utilizado como métodologia a pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, sendo levantado o referencial teórico sobre o uso do *software* GeoGebra no ensino de geometria o que pode tornar o ensino mais dinâmico e atrativo. A partir da análise bibliográfica, foi possível perceber a importância de se usarem às tecnologias em sala de aula, como o GeoGebra, o qual vem se tornando um dos *software*s de geometria dinâmica bastante usado com a finalidade de tornar o ensino-aprendizagem mais significativo na vida do aluno. Por meio de todo o estudo realizado e da sequência didática apresentada, foi possível avaliar que o uso do referido é de grande importância no ensino da geometria.

Palavras-chave: Tecnologias de Informação e Comunicação. Sequência Didática. Geometria. Transformações Geométricas.

ABSTRACT

This research aimed to introduce geometrical transformations, specially, translation, rotation, scale, mirroring and homothety, and, this way, presents GeoGebra software functions with emphasis on graphic and animation building of geometrical objects. Moreover, it focus on researching theoretical studies about geometrical transformations teaching using GeoGebra software, emphasizing its contributions, as well as it proposes a sequence of activities for the teaching of translation, rotation, scale and mirroring using GeoGebra as a didatic resource. This software has been used as a methodological tool to get and rise student attention and it aims to be a meaningful way of teaching and learning. In this context, several authors have been seeking to highlight the importance of approximating information and communication technologies (ICTs) at school environment as a way of favoring teaching and learning process. Thus, the investigation question in this study is: "What are the advantages and limits of using GeoGebra in the teaching and learning of geometrical transformations?". In order to do it, as methodology, a qualitative research on bibliographic database was used, the theoretical reference was risen about the use of GeoGebra software in the teaching of geometry that can make the teaching more dynamic and attractive. Henceforth bibliographical analysis, it was possible to realize the importance of using technologies in class, for example, GeoGebra, which has become a software of dynamic geometry widely used and aims to make the teaching and learning process more meaningful in the student life. Through the whole study done and the shown didatic sequence, it was possible to evaluate that the use of the referred software is very important in the geometry teaching.

Keywords: Information and Communication Technologies. Didatic Sequence. Geometry. Geometrical Tansformations.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A educação passa por diversas mudanças a todo instante, portanto, muitos conteúdos foram reorganizados e inseridos segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o que ocasionou novas prioridades e necessidades nos currículos de matemática, principalmente educação básica.

Nesse cenário de mudanças curriculares, a matemática e seu ensino não podem ficar "atados" somente a procedimentos metodológicos que não se interligam com a realidade atual da educação referente à construção de conceitos, conhecimentos e informações entre outros processos que auxiliam na melhora de aprendizagem do educando.

Entende-se que, nesse ambiente de contínuas mudanças no currículo, um ponto a ressaltar é o papel do professor na sala de aula, o qual deixa de ser o detentor único do saber e passa a ser o mediador, cuja função é desenvolver e ampliar conhecimentos, instigar novas aprendizagens, ouvir e interagir com os alunos para entendê-los e auxiliá-los no processo de ensino-aprendizagem (MARSCHALL; FIOREZE, 2015)[42].

De acordo com Marschall e Fioreze (2015), para ensinar e aprender matemática, os educadores, atualmente, buscam novos procedimentos educacionais como *softwares* educativos que podem ser incorporados como recursos pedagógicos. Essas são ferramentas para o ensino de matemática, facilitadores da aprendizagem que promovem o desenvolvimento de habilidades e estimula a construção de novos conhecimentos (MARSCHALL; FIOREZE, 2015)[42].

Com base nisso, o uso de *softwares* como qualquer técnica didática, deve sempre privilegiar os objetivos traçados, tomando o cuidado para que seu uso não seja feito de forma incorreta, pois corre-se o riso de tornar-se uma ferramenta obsoleta e sem adequação dentro do processo de ensino e aprendizagem (CYSNEIROS, 1999)[15]. Ademais, deve-se fazer uso de uma didática e metodologia que sejam expressivas, a fim de promover um ensino de forma construtiva e prazerosa (MARSCHALL; FIOREZE, 2015)[42].

Outro fator importante que em muito tem influenciado no uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (doravante TDIC), em especial, o *software* GeoGebra nas escolas é a realidade vivida na atualidade, por conta do necessário distanciamento e/ou isolamento social necessários para se combater à propagação do SARS-CoV-2, causador da doença COVID-19. Assim, devido à pandemia, os hábitos, as rotinas e os modos de viver foram alterados, situação não diferente dos profissionais da área da educação.

O distanciamento e/ou o isolamento social está fazendo escolas e universidades reverem suas estruturas, conceitos, perspectivas e metodologias de ensino, principalmente as questões que tangem às tecnologias digitais de comunicação e informação.

Nessa perspectiva, enquanto mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), ansiava por desenvolver um trabalho que envolvesse as tecnologias digitais e os conceitos matemáticos. Nesse sentido, optei por trabalhar com os objetos geométricos, especificamente as transformações geométricas. O PROFMAT visa qualificar professores da Educação Básica com ênfase no aprofundamento de conceitos matemáticos específicos, assim procurou-se aprofundar um estudo teórico acerca das transformações geométricas.

Sobre as TDICs, Ribeiro, Castro e Regattieri (2007)[53] defendem a atual importância e a necessidade de integração das tecnologias nas práticas pedagógicas, em especial as tecnologias digitais da informação e comunicação, considerando que elas estão cada vez mais presentes no cotidiano, essencialmente para os jovens, e que sua aplicação na educação, no trabalho e em outros contextos relevantes, é uma competência básica a ser propiciada pelos educadores no conjunto do currículo escolar e das disciplinas. Assim, na educação, as Tecnologias Digitais da Comunicação e Informação (TDCI) precisam ser utilizadas, de modo consciente, para que se reorientem os processos de descobertas, relações, valores e comportamentos (KENSKI, 2007)[39].

Nesse contexto tecnológico, a educação ganha novos rumos, e a escola, força para atender aos novos objetivos do ensino. O uso de diferentes meios tecnológicos é indispensável para o desenvolvimento da educação. É preciso entender como as TDICs podem auxiliar o processo educativo. Como tecnologia educacional se entende o conjunto de procedimentos ou técnicas que intentam auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem servindo-se de diferentes meios de instrumentalização, simbólicos ou organizadores e de suas transformações culturais (KENSKI 2008)[40].

Allan (2020)[3] destaca que não se pode esperar a adaptação repentinamente a estes novos tempos. Sabe-se dos inúmeros problemas de conexão à *Internet*, mas o contexto contemporâneo é um momento para reinventar e criar entusiasmo de testar o uso de ferramentas tecnológicas já disponíveis para estruturar alternativas no formato de educação à distância.

Para Filho (2011)[5], a utilização de *softwares*, como estratégia educacional trará outro tipo de interação aluno e professor, o que pode vir a tornar o ensino a distância mais interessante, principalmente em se tratando das transformações geométricas.

No que diz respeito a este trabalho, tem-se como questão de investigação, "Quais as vantagens e limites do uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem das transformações geométricas?"

Os estudos das transformações geométricas na educação contemplam alguns métodos de ensino que podem ajudar o educando compreender a sua diversidade, bem como sua relevância para a aprendizagem de práticas e de objetos geométricos.

Entre os diversos métodos utilizados para esse fim, há práticas que englobam o uso de *softwares* para a interpretação de conceitos e objetos geométricos. Assim, no presente trabalho, será utilizado o *software* GeoGebra.

O GeoGebra é um recurso dinâmico para a aprendizagem da Geometria, pois esse *software* permite ao aluno elaborar e desenvolver atividades que poderão aprimorar seus conhecimentos matemáticos. No caso deste trabalho mais especificamente, os geométricos, visto que ele auxilia na compreensão de propriedades e na visualização dos objetos que são manipulados.

Santos, Silva e Moura (2014) evidenciam que o mais interessante desse *software* é sua possibilidade de visualizar a representação de objetos e, se, por ventura, houver erros, o aluno poderá tentar percebê-los de mais fácilmente (SANTOS; SILVA; MOURA, 2014)[21].

Outro aspecto importante a ser destacado sobre o *software* GeoGebra é que, pela manipulação da figura ou a alteração de seu tamanho, sendo observadas suas propriedades em sua elaboração e construção, a representação da figura não se modifica, ou seja, ela não se deforma e permanece com as propriedades iniciais da sua construção (MARSCHALL; FIOREZE, 2015)[58].

Nesse contexto, o presente trabalho discorrerá sobre a importância do uso do *software* GeoGebra no ensino das transformações geométricas, o que pode vir a contribuir para com a melhoria do ensino e aprendizagem desses conceitos.

De acordo com Hespanhol et al. (2016)[34], uma relevância social se deve ao fato de que o professor precisa estabelecer conexões entre os conteúdos escolares e a extensa rede de saberes que muitos alunos já dominam. Portanto a utilização do computador é favorável tendo como contexto a era digital, buscando-se com o envolvimento de tecnologias, uma compreensão da ciência no meio social em que o aluno está inserido.

Sobre a relevância acadêmica, acredita-se que este recurso seja um facilitador de ensino e aprendizagem da geometria, buscando construir e fundamentar seus conceitos, através de atividades planejadas. O *software* GeoGebra pode ser utilizado como ferramenta metodológica para despertar o interesse do aprendiz visando um ensino e aprendizagem significativo desse conteúdo. Com uma visualização dinâmica de objetos no plano e no espaço, o estudante encontra uma nova forma de estudar Matemática, o que gera grande interesse em busca do conhecimento matemático.

A escolha do tema em questão tem especial relevância pessoal para mim, visto que, por ser professor atuante na rede pública do estado de Goiás e estar em busca de melhorias nas formas de ensinar as transformações geométricas, vislumbro as dificuldade de aprendizagem dos objetos geométricos, o que gera a necessidade de amplicar discussões nesse campo.

Nesse sentido, além de aprofundar os estudos das transformações geométricas e, posteriormente, elaborar-se-á a sequência didática para ensinar tais conceitos de transformações geométricas. Para tanto, será utilizado o GeoGebra. A sequência didática configura-se-á como uma proposta para que, futuramente, os professores da educação básica possam aplicar em sala de aula, contudo, saliente-se que ela não será aplicada ou desenvolvida neste trabalho. Essa opção deve-se ao tempo para a conclusão do PROFMAT.

Para Pais (2008)[50], a sequência didática é constituída por um determinado número de aulas planejadas e analisadas previamente tendo como alvo a observação das situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos.

Para Vaz e Jesus (2014)[25], por usa vez, o professor cria uma sequência didática com o intuito de mostrar situações de onde e quando pode ser utilizado o *software*, aumentando o interesse dos alunos, permitindo novos valores, verificando a dificuldade de aprendizagem de determinados conteúdos, oportunizando situações propícias à aprendizagem.

A partir disso, criou-se uma proposta de sequência didática envolvendo aplicação de matrizes e suas propriedades, por meio de transformações geométricas, especificamente a translação, a rotação, o espelhamento e a homotetia. As atividades foram planejadas de modo que o professor pudesse trabalhar conjuntamente ou separadamente esses conceitos, ou seja, por exemplo, o professor pode optar por utilizar as atividades da transformação de translação e não utilizar as de rotação.

A intenção é que seja uma proposta pedagógica de ensino para cada uma das transformações sem a intenção de sequenciamento ou "costurar" as quatros transformações, mas dar liberdade para o professor optar por trabalhar todas ou algumas delas. Por isso, as atividades são separadas, para facilitar sua identificação.

Desse modo, o objetivo do trabalho é aprofundar as discussões teóricas acerca das transformações geométricas e seu ensino por meio do *software* GeoGebra e propor atividades para serem desenvolvidas por professores da educação básica.

Em se tratando da metodologia adotada, esta é uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico. Para tanto, estudar-se-ão as transformações e será elaborada a sequência didática.

Estruturalmente, o trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo um, discutir-se-ão as bases para construção do tema, a importância do uso de tecnologias como mediação do ensino e aprendizagem e a metodologia escolhida para a construção de uma sequência didática que seja útil na aplicação de matrizes e suas propriedades, correlacionadas com geometria. No capítulo dois, será apresentada a metodologia e a sequência didática. No capítulo três, será dada uma explicação sobre as transformações geométricas. Por fim, finalizar-se-á com a sequência didática, na qual traremos uma possibilidade de aplicar as propriedades de matrizes, ligadas à Álgebra, com as transformações geométricas pelo uso do GeoGebra.

Capítulo 1

Início da construção do tema

Este capítulo discorrerá sobre como o trabalho se insere adequadamente nos objetivos do mestrado profissional de matemática (PROFMAT), abordando a importância do uso de tecnologias como mediação do ensino e aprendizagem e a metodologia escolhida para a construção de uma sequência didática que seja útil na aplicação de matrizes e suas propriedades, por meio de transformações geométricas.

Dá-se o nome de "transformação geométrica"à mudança de um objeto qualquer de um lugar para outro local, ou seja, é o movimento da antiga posição para a nova posição. Em Matemática transformações são as leis de associação que transformam pontos do plano em outros pontos do plano (MEDEIROS, 2012)[44]. Nessa definição, a reflexão, a rotação, a translação, a dilatação, a homotetia são alguns exemplos de transformações geométricas.

Costa (2012)[13] descreve que as transformações geométricas fazem parte da história da humanidade há muito tempo, antes mesmo do que se possa imaginar. Por exemplo, a cerâmica chinesa remonta ao período Neolítico (3000 a.C.), e, nela, pode-se notar a presença do uso de transformações geométricas na sua decoração. Outro exemplo encontra-se na Sibéria, na ornamentação do tapete Pazyryk, datado do século V a.C., no qual se obeservaram padrões geométricos e simetrias.

A utilização de *softwares* educativos é um recurso psicopedagógico interativo, integrado aos currículos escolares desde a educação infantil e, por isso, fazem-se necessários estudos sobre a sua utilização e se ela ocorre de forma satisfatória (SCATTONE; MASINI, 2007)[60].

Os *softwares* de geometria dinâmica são *softwares* que permitem ao professor tornar as aulas de geometria mais atrativas, e através deles, mostrar as propriedades geométricas, as construções geométricas que seriam difíceis de serem apresentados com certa qualidade por meio quadro e do giz. De acordo com Gravina (1996)[32] esses *softwares* podem ser entendidos como:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslo-

> camentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 6)[32].

Segundo Borges Neto, Cunha e Lima (2001)[48] com o *software* GeoGebra, o professor poderá abordar assuntos simples e, com a utilização de suas ferramentas que abordam conhecimentos mais complexos, pode melhorar a compreensão do aluno em vários campos da matemática.

1.1 Experiência docente

A situação gerada pelo COVID-19 trouxe à tona, também, de forma bastante notável, a necessidade de formação docente para este "reinventar da escola". Com isso, uma vez posta, parece incontornável, a necessidade de finalmente inverter a chave das práticas pedagógicas, promovendo um ensino ativo - cuja expressão, apesar de repisada, não encontra aplicabilidade efetiva na maior parte dos sistemas educativos - tornando, a pedagogia, usuária ativa e indutora das tecnologias.

Dessarte, o ano de 2020 confrontou a docência com suas dificuldades em estabelecer novas metodologias de ensino. Tais mudanças devem ser menos traumáticas, desde que tenham por objetivo estabelecer conexão com cada educando que é apresentado a cada ciclo didático.

No entanto, nota-se que pouco ou quase nenhum esforço é realizado de fato para a adoção de *softwares* educacionais nos vários níveis do ensino nacional. Outro fato marcante é a necessidade de metodologias que extrapolem os métodos tradicionais de ensino, logo, tal necessidade advém de um cenário de pandemia que trouxe consigo vários desafios para o ensino. O principal deles é, obviamente, o ensino remoto e a necessidade de prender a atenção dos estudantes, fazendo com que eles se apropriem dos conteúdos lecionados (SILVA; FILHO, 2020)[17].

1.1.1 Busca por conhecimento

Em se tratando da relevância deste tema, justifica-se sua escolha uma vez que o autor deste trabalho é aluno do curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Profmat pela Universidade Federal de Jataí, graduado em Matemática pela Universidade de Rio Verde-GO (UNIRV), e pós-graduado em

Matemática e Estatística pela mesma instituição, atua como professor efetivo de matemática da rede estadual de educação de Goiás, em Rio Verde e trabalha no Colégio Estadual Martins Borges (CEMB). Com base nesse currículo e com a experiência em sala de aula, então, percebeu a necessidade de inovação na dinâmica de ensino entre professor e aluno, e também a necessidade dos educandos de poderem aprender e conhecer novas formas de entender o conteúdo.

1.1.2 Integração entre temas

A abordagem aqui encaminhada está, construída sobre as bases acima mencionadas e assentada nas regras da LDB (BRASIL, 1996)[11], BNCC (BRASIL, 2017)[10] e de outros documentos que podem contribuir na correlação entre álgebra e geometria mediadas pela tecnologia.

Na educação matemática, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) foram inicialmente introduzidas para dinamizar e aumentar o interesse e a busca do conhecimento por parte do aluno. Assim os educadores matemáticos reconhecem nas TDICs, quando selecionadas e utilizadas adequadamente, um potente recurso didático para criar novas relações entre o aprendiz e o objeto do conhecimento, podendo até mesmo, serem usadas como mecanismo de luta contra o insucesso escolar, motivando os alunos, permitindo-lhes revelar melhor seus talentos, além de facilitar o acesso às informações (SANTOS; NEVES;TOGURA, 2016)[58].

Diante desses aspectos, entende-se que as TDICs vêm a contribuir para o ensino de matemática, posto que, o uso de computadores na sala de aula (*softwares* e *apps*) podem oferecer uma grande contribuição ao ensino-aprendizagem, à medida que:

- reforçam o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação;
- relativizam a importância do cálculo;
- permitem a manipulação simbólica.

O presente estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa, de cunho bibliográfico. Minayo (2003, p. 16-18)[45] aponta que a pesquisa qualitativa:

> É o caminho do pensamento a ser seguido. Ocupa um lugar central na teoria e trata-se basicamente do conjunto de técnicas a ser adotada para construir uma realidade. A pesquisa é assim, a atividade básica da ciência na sua construção da realidade. A pesquisa qualitativa, no entanto, trata-se de uma atividade da ciência, que visa a construção da realidade, mas que se preocupa , com as ciências sociais em um nível de realidade que não pode ser quantificado, trabalhando com o universo de crenças, valores, significados e outros construto profundos das relações que não podem ser reduzidos à

> operacionalização de variáveis. O pesquisador torna o principal foco para o alcance do produto quanto ao que sistematiza e oferece as condições das técnicas e análise dos dados que são referenciados.

Portanto, o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências (BICUDO, 2004)[8].

1.2 TDIC E TIC

A evolução tecnológica não se restringe somente à utilização de novos produtos ou equipamentos, ela reflete também em comportamentos. A partir dessa constatação, a ampliação e o uso de determinadas tecnologias se sobressaem à cultura existente, e transformam o comportamento individual e coletivo (KENSKI, 2012)[40]. Essas mudanças se refletem também no vocabulário da sociedade, conforme aponta Ponte (2000, p. 3)[40]:

> Temos aqui um problema de terminologia. Durante muitos anos falava-se apenas no computador. Depois, com a proeminência que os periféricos começaram a ter (impressoras, plotters, scanners, etc.) começou a falar-se em novas tecnologias de informação (NTI). Com a associação entre informática em telecomunicações generalizou-se o termo tecnologias de informação e comunicação (TIC).

Atualmente, surge, então, um novo conceito: Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), que se diferencia das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pela aplicação de elementos digitais (FONTANA; CORDENONSI, 2015)[29].

Maia e Barreto (2012)[41] citam que, embora se reconheça que os termos TIC e TDIC tenham uma pequena distinção conceitual, vêm sendo utilizados como sinônimos na literatura acerca do assunto.

O conceito de TIC é utilizado para expressar a convergência entre a informática e as telecomunicações, agrupando ferramentas computacionais e meios tele comunicativos como: rádio, televisão, vídeo e *Internet*, facilitando a difusão das informações (MISKULIN et al., 2006; CARDOSO, 2011; LEITE, 2014a; 2015)[23].

Já as TDIC englobam, ainda, uma tecnologia mais avançada: a digital. Por meio dela, é possível processar qualquer informação, o que provocou mudanças radicais na vida das pessoas, principalmente no que se refere à comunicação instantânea e busca por informações (KENSKI, 2012)[40].

Para melhor compreender as distinções entre TIC e TDIC, é possível fazer uma comparação entre as diferentes lousas disponíveis atualmente: a lousa analógica e a digital. Um quadro negro (lousa analógica) é uma tecnologia, é uma TIC, já a lousa digital é uma TDIC, pois ela, por meio da tecnologia digital, permite a navegação na *Internet*, além do acesso a um banco de dados repletos de *software* educacionais (FONTANA; CORDENONSI, 2015)[29].

A partir dessas diferenças conceituais, optou-se por usar na redação deste trabalho a sigla TIC.

Barbosa, Sanches e Souza (2011)[7] declaram que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) se constituem em um dos principais agentes de transformação da sociedade, uma vez que elas podem modicar o cotidiano do indivíduo e consequentemente seu meio de produção, influenciando a aprendizagem.

De acordo com Castells (2003)[12], citado por Castilho (2014, p.8) . "o surgimento dessas tecnologias é caracterizado pelo seu alcance global, pela integração de todos os meios de comunicação e pela interatividade que está mudando e mudará para sempre nossa cultura".

Assim sendo, entende-se que o uso das TICs, inseridas nas práticas pedagógicas recentes, torna-se um meio tecnológico que auxilia na formação do ser humano (ALBERTIN; MOURA, 1994)[2]. Outrossim, inseri-las em sala de aula é uma tendência definida por vários teóricos, pois como afirma Castilho (2014), constitui-se em uma fonte de influência que gera novos paradigmas educacionais vigentes.

A tecnologia integra o conjunto dos princípios, métodos, instrumentos e processos cientificamente determinados, que se aplicam à atividade de vigência para novos princípios que identifiquem as particularidades, quanto ao uso da tecnologia. Muitas vezes é deparada pelos professores como um desafio que ao longo de sua interação torna-se útil para o desenvolvimento das atividades do homem. Também se refere às aplicações das descobertas da ciência aos objetivos da vida prática. De fato, a ciência exerceu importante papel para o desenvolvimento tecnológico, mas nem toda tecnologia depende da ciência (OLIVEIRA, 2007)[49].

> Conforme as tecnologias são introduzidas pelos professores na sua aula, a qual vai criando novas formas de expressão na explanação dos conteúdos. A dinâmica e as potencialidades que os recursos oferecem permitem ao docente superar a prevalência da pedagogia da transmissão. Neste movimento, ele propõe desdobramentos, arquiteta situações de aprendizagem, cria ressignificações sobre a prática. Estimula que cada participante faça o mesmo, criando a possibilidade de co-professorar a aquisição de seu próprio conhecimento (KENSKI, 2011, p. 102)[40].

Nesse entendimento, nota-se que o estímulo e o incentivo para a adaptação das tecnologias de cada um permite construir e valorizar cada recompensa das atividades que os envolve e, ao longo das atividades, sejam fundamentadas em cada relação do homem com o seu meio.

> As novas tecnologias trazem consigo muitas facilidades, mas também introduzem novas exigências e competências no paradigma educacional, impondo

> adaptações (OLIVEIRA, 2007). Adaptações difíceis de superar, novos desafios, seja na formação inicial ou continuada do professor, que no momento atual ocorrem de forma lenta, conforme revela Valente (1993), se comparada com as mudanças em outros segmentos da sociedade que são incomparavelmente rápidas e que afetam diretamente o comportamento (OLIVEIRA, 2007, p. 15)[49].

Isto posto, as tecnologias na educação, por meio do uso dos recursos disponíveis (*data show*, computadores, celulares, dentre outros) auxiliam ao professor na prática de uma metodologia que pode incentivar e estimular o educando na sala de aula. Vem proporcionar o rompimento dos paradigmas, elevando a participação e a construção do homem em relação ao desenvolvimento como ação de um conhecimento que faz a diferença na prática da cidadania.

Diante desses novos contextos, o professor necessita estar preparado para os desafios de uma educação que faz a diferença em relação à ciência e o que de fato coopera, bem como aprimora a sistematização dos principais elos, quanto ao que facilita e orienta para a construção de valores junto ao que é mantido como melhoria das atividades que são envolvidas (OLIVEIRA, 2007)[49].

Assim, então, cada vez mais inseridas no cotidiano das pessoas tais tecnologias, podendo portanto facionarem como instrumento metodológico eficazes no processo do desenvolvimento da aprendizagem. De acordo com Kawamura (1990, p. 14)[38] "procurar relacionar a educação com as inovações tecnológicas e o processo de trabalho remetendo à necessidade de situá-la no contexto amplo das relações sociais".

Ao longo da história da educação, a tecnologia tende a favorecer mudanças no processo de cidadania, utilizada como um instrumento facilitador, para a interação do homem em seu meio.

Assim sendo, a tecnologia vem auxiliar e estabelecer novas conquistas e demonstrações do que de fato considera relevante. A participação do educando, mediante sua vivência, contexto social e formas que ao longo da história possibilitam e facilitam as construções de um sujeito, permite atender as diversas variáveis envolvidas na construção de uma aprendizagem com maior interatividade. Permite também favorecer e atribuir as fontes de riquezas, que asseguram e permitem indagar e manifestar, possibilitando as melhorias do grupo, a fim de contribuir para a formação de um cidadão que faz parte de um processo histórico, na ação de desenvolvimento do homem.

O contexto social, portanto, é o que vem a acrescentar e contribuir com as várias diretrizes e fontes de recursos que possibilitem as vantagens e busca do que de fato acrescenta e a possibilita fazer a diferença junto ao que compreende e salienta para as atividades de uma diversidade, em relação ao que é vivenciado por parte do homem.

Para Kawamura (1990, p. 33)[38],

> Na área da educação é significativa a proposta da "educação para todos", no contexto do discurso "tudo pelo social"(governo Sarney), contando com as inovações tecnológicas principalmente educativas. Dentre as metas, destaca-se o aproveitamento dos recursos da indústria cultural e da informática.

Nesse cenário, a educação, como apontamento para o que constrói, associa a tecnologia, como parte do processo desenvolvimento do desempenho do educando, em toda sua formação, o que propicia novas práticas, contribuindo para seu reconhecimento na sociedade. Além disso, a educação também referencia a teoria e a prática no conhecimento, e, consequentemente, orienta a ação do homem, ou seja, a pesquisa é o ponto de conquista do ser humano, no meio em que está inserido.

Para a educação, a informação torna-se necessária porque visa superar todas as dificuldades advindas da ideia do saber consolidado, sendo que o professor deve auxiliar o aluno a desenvolver sua criatividade e habilidades que assegurem a formalização do saber, segundo com o que é vivenciado na sociedade.

Para Valle, Mattos, Costa (2013, p. 59)[14], "o educador precisa fazer interações com o conhecimento científico e o conhecimento pedagógico, utilizando as melhores estratégias ensino para motivar o aluno, permitindo que ele compreenda a importância das tecnologias da informação e comunicação e suas utilizações".

De acordo com Arruda (2004)[6], a inserção da tecnologia no ambiente da sala de aula para a prática da aprendizagem exige que se tenha o conhecimento das práticas relacionadas quanto à diversidade e as inferências dos resultados vivenciados por parte do homem.

Por sua vez, Arruda (2004)[6] destaca que, o docente, ao desenvolver as habilidades de reflexão e autorreflexão no aluno e em si próprio, compreende essas dimensões para os valores que assiste e faz parte do envolvimento e das diversas formalidades e atendimento ao que se tem como didática e a facilidade do homem no seu meio.

Considerando esse contexto, é possível então concluir que os recursos tecnológicos para o professor são uma ferramenta de grande utilidade para atribuir formas que fazem parte de um processo de contextualização e mediação das várias oportunidades, do que assegura e tende a referenciar compor a sua exploração.

A tecnologia na educação está presente no cotidiano, proporcionado o uso de modernos recursos didáticos promovendo melhorias no processo ensino e aprendizagem. Diante de tudo isso, é inevitável reconhecer a importância das inovações tecnológicas no contexto educacional, posto que ela propicia aos professores, uma nova forma de ensinar e aprender, integrando valores e competências nas atividades educacionais.

Nesse âmbito, como ressalta Padilha (2014)[16], para ter uma inserção das Tecnologias de Informação e Comunicação no contexto escolar, torna-se importante o comprometimento dos professores, além de uma formação específica sobre as TICs enquanto recursos educacionais que torna a aprendizagem mais significativa.

Porto (2006, p. 45)[52] evidencia que as TICs têm potencial educativo, mas é necessário compreender "alguns elementos que pertencem a essas novas tecnologias: rapidez, recepção individualizada, interatividade e participação, hipertextualidade, realidade virtual e digitalização/ideologia".

Recepção individualizada: As tecnologias põem à disposição do usuário amplo conjunto de informações/conhecimentos/linguagens em tempos velozes e com potencialidades incalculáveis, disponibilizando, a cada um que com elas se relacione, diferentes possibilidades e ritmos de ação (PORTO, 2006)[52].

Assim, entende-se por interatividade e participação uma relação interativa com os meios, o que permite ao usuário assumir o papel de sujeito (PORTO, 2006)[52]. Para Gutiérrez Martín (2002)[33], os novos sistemas multimídias são quase humanos, pois possibilitam uma relação próxima de diálogo e comunicação exclusiva dos indivíduos.

Quanto à hipertextualidade, entende-se que o texto virtual permite associações, mixagens, e faz com que o usuário tenha diferentes opções de escolha, situação que põe o sujeito em busca da complexidade de informações/caminhos que, na maioria dos processos escolares, não é usual (PORTO, 2006)[52].

Como se nota, á complexidade do mundo moderno não está presente nos ensinamentos da sala de aula. As relações de causa e efeito, o encadeamento linear seriado dos currículos escolares não dá conta, por exemplo, de situações vividas pelos jovens em contato com outros jovens e/ou em situações do dia a dia de incertezas, acertos, erros, medos, entre outros aspectos (PORTO, 2006)[52].

Em se tratando do conceito de realidade virtual, este é compreendido como o tempo virtual o qual se impõe ao espaço real, desse modo, como a imagem impõe-se sobre o objeto e o virtual impõe-se ao atual, o indivíduo interage com a realidade das imagens, criando elementos próprios para entender a situação virtual, significá-la e interagir com ela (PORTO, 2006). Para Lévy (2000, p. 47)[59], o virtual é o que existe em potência, e não em ato. Enquanto a realidade pressupõe uma efetivação material, uma presença tangível, o virtual é um "passe de mágica misterioso"; contudo, o virtual não se opõe ao real, são apenas "dois modos diferentes da realidade".

Além disso, a realidade virtual prazerosa tem um pequeno lugar pedagógico, principalmente nos primeiros anos escolares, com a fantasia das histórias vividas/contadas; entretanto, na continuidade da vida escolar são mais trabalhados textos formais, distantes das emoções, dos desejos e do conhecimento informal do cotidiano (PORTO, 2006)[52].

A partir de tais considerações, entendemos que o prazer na aprendizagem pode ser obtido com modernas tecnologias, como o *videogame* e a *Internet*, assim como com tecnologias mais tradicionais, como a leitura e escrita de textos, desde que respondam aos anseios imaginários dos estudantes e propiciem vivências significativas e criativas para eles (PORTO, 2006)[52].

No que concerne ao conceito de digitalização/ideologia, faz-se referência ao fato de que os meios/tecnologias têm diferentes linguagens que lhes permitem se inter-relacionar com outras linguagens. Com especificidades próprias – imagens, narrativas, sons e movimentos–, o meio chega ao receptor com fortes apelos de sedução, contribuindo para que o usuário crie códigos de entendimento e se envolva com as mensagens nele divulgadas. Todavia, há uma significativa distância entre o criador/produtor do meio e o usuário (PORTO, 2006)[52].

A escola, assim, possibilita que os alunos, "agentes sociais por natureza, mergulhem na realidade das imagens/mensagens, procurando, primeiramente, compreendê-las pelas experiências, para depois proceder ao distanciamento reflexivo e pensar sobre elas" (PORTO, 2000, p. 130)[52].

Com essas reflexões sobre o potencial educativo das tecnologias, verifica-se que a escola e os meios tecnológicos de comunicação e informação caminham em paralelo. Ambos retratam a realidade e cotidiano; apresentam valores, conceitos e atitudes presentes na realidade em geral, que são absorvidos sob diferentes matizes. Os meios são de livre escolha, regem-se pela lógica do mercado, contribuem para a criação e reprodução da ideologia dominante, sendo, porém, atraentes e socialmente legitimados; a outra, a escola, é impositiva e, de certa forma, sem atrativos, mas é socialmente legitimadora do saber, do conhecimento, reproduzindo a ideologia dominante (PORTO, 2000).

O GeoGebra entra nesse contexto como um *software* desenvolvido para que a aprendizagem do educando seja sistematizada, e acompanhe as práticas e diretrizes, oferecendo oportunidades variadas de aprendizagem dinâmica, o que facilita as várias abordagens que compõem o desenvolvimento de uma aprendizagem com significado.

Assim, entende-se que os usos adequados de *softwares* matemáticos podem proporcionar um ambiente, espaço, favorável e motivador para o ensino e aprendizagem de alguns conceitos matemáticos (BRANDT; MANTORFANO, 2017)[9].

Nesse sentido, como alternativa para o ensino de construções geométricas planas, Brandt e Mantorfano (2017)[9] declaram que o uso de *Software* GeoGebra poderá enriquecer o ambiente de aprendizagem, bem como contribuir para com a aprendizagem matemática dos alunos.

1.3 *Software* Educativo

A matemática nas escolas ainda é vista como algo fragmentado, com ensinos mecanizados, descontextualizados, com base em memorização, levantando uma barreira quanto ao real objetivo do ensino, proporcionar situações concretas de como essa disciplina pode ser utilizada no cotidiano (ROCHA; RAMOS; BRASIL, 2019)[54].

A inclusão da Informática aplicada à Educação tem sido um fator preponderante no domínio educacional, proporcionando aos professores expandir os métodos de ensino e, aos alunos, ampliar as chances de aprendizagem (ROCHA; RAMOS; BRASIL, 2019)[54].

Com isso, o emprego do computador como aliado aos métodos de ensino e aprendizagem tornou-se essencial na vida de todos. De acordo com os estudos, as crianças desde pequenas já possuem uma habilidade notável no manejo das tecnologias, e a partir daí as propostas escolares podem incluir essas tecnologias nas salas de aula, em forma de jogos educacionais e pelo emprego de *softwares*, englobando as diversas áreas do conhecimento (TEDERKE; FORTES; SILVEIRA, 2016)[63].

O que caracteriza um *software* educativo de outros recursos é o fato de ele distinguir os erros com uma opinião imediata e viabilizar a reorganização da ação dos educandos. Ele possibilita que as informações sejam comparadas e organizadas. Além disso, favorece a capacidade de concentração e atenção; a interpretação das ordens e regras; o raciocínio lógico e, a percepção visual e auditiva por meio de som, imagem e animação (SCATTONE; MASINI, 2007)[60].

Além disso, ao interagirem com os *softwares*, os educandos serão incitados ao desafio de fazerem a análise dos dados apresentados, de levantarem hipóteses e de estabelecerem estratégias de ação, ocorrendo assim o fenômeno educativo (SCATTONE; MASINI, 2007)[60].

Mostra-se assim a necessidade de se formar professores com foco tanto no conteúdo como nas práticas pedagógicas, para que desenvolva habilidades para dar possibilidades para a construção de conhecimentos pelos alunos. Desse modo, o professor, durante sua formação, precisa vivenciar metodologias que colaborem posteriormente com o conteúdo e com as estratégias para o ensino (LOPES; D'AMBROSIO, 2015) [22].

Para tanto, os professores precisam compreender que o processo de construção do conhecimento nessa nova realidade acontece quando se integra criticamente a tecnologia da informação no processo educativo, no qual o computador, como recurso pedagógico, não possui autonomia para conclusão do processo ensino-aprendizagem, mas o que se pretende é que uma incorporação do computador nas aulas de matemática de maneira auxiliar e instigar os alunos a se apropriarem das significações e conceitos estudados pelo uso da ferramenta computacional (MIRANDA; BLAUDARES, 2007)[26].

No entanto, as dificuldades apresentadas por alunos em relação ao conteúdo da geometria podem estar relacionadas à desarticulação de métodos didáticos com o conteúdo a ser explorado. Nesse sentido, acredita-se que o *software* GeoGebra possa ser um recurso que auxilie no ensino da matemática.

Como é sabido, a utilização do computador é favorável neste momento de ensino remoto imerso em uma era digital, assim busca-se, com o envolvimento de tecnologias, uma compreensão da ciência no meio social em que o aluno está inserido. Espera-se, então, que esse recurso seja um facilitar do ensino e da aprendizagem da geometria, buscando construir e fundamentar seus conceitos, através de atividades planejadas realizadas utilizando-se o *software* GeoGebra (HESPANHOL et al., 2016)[34].

Esse *software* foi desenvolvido por Markus Horenwarter, da Universidade de Salzburg, para estudos de diversas áreas da matemática e, principalmente, da geometria, destacada neste artigo (HOHENWARTER; LAVICZA, 2009)[36]. O GeoGebra está disponível para *download*, é gratuito, de fácil acesso e entendimento. Configura-se como um recurso que favoreceu a percepção gráfica das figuras estudadas e a investigação dos conceitos que a compõem (HESPANHOL et al., 2016)[34].

1.4 O GeoGebra no ensino de matemática

A inserção das tecnologias no ambiente escolar pode ser vista como uma consequência natural da própria conformação da sociedade, permeada por um fluxo constante de informações e artefatos que instigam os sujeitos a buscarem o acesso cada vez maior aos recursos tecnológicos disponíveis. Tal realidade interfere diretamente na forma de atuação do professor (POLLI; FIGUEIREDO, 2017)[20].

Os docentes podem usar as novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem como ferramentas tecnológicas, dessa forma, os *softwares* educacionais são poderosas ferramentas, com as quais o professor poderá tornar suas aulas em um ambiente no qual o aluno torna-se um ser ativo no processo de aprendizagem enquanto o professor passa a ter o papel de orientador e motivador (ALVES, 2017)[4].

Com base nisso, a escolha, por parte do professor, de um determinado *software* como ferramenta educacional é de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho a ser efetuado com seus alunos, pois, de acordo com Tajra (2001)[24] a escolha e utilização de um *software* está relacionado à percepção que o professor possui em associar a tecnologia envolvida nele ao seu planejamento educacional.

O estímulo ao educando, por meio do *software*, é uma prática que a atividade de matemática procura desenvolver e aprimorar, para que o estudante seja estimulado a questionar, o que faz parte das atividades matemáticas, posto que é preciso identificar as relações em cada situação de domínio das metodologias aplicadas (VALENTE, 1993)[64].

Portanto, o *software* viabiliza a análise e o estudo do objeto matemático, em especial, o geométrico, visto que possibilita apreender, desenvolver e verificar as mudanças de comportamento e de posição de cada objeto.

Quanto a essas possibilidades, GeoGebra possibilita a exploração de diversos objetos geométricos e algébricos, pois é um *software* de matemática que trabalha de modo dinâmico utilizando em uma única interface gráfica a exploração da geometria e da álgebra.

Com a exploração do GeoGebra, o professor pode promover a aprendizagem do aluno para que este possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e a descoberta. Antes de propor um plano, que deverá ser resultado de um trabalho cooperativo, dos que estão envolvidos na aprendizagem, o professor precisa conhecer as potencialidades de seus alunos e suas experiências anteriores (VALENTE, 1993) [64].

Conforme destaca Valente (1993, p. 19)[64]

> O professor com uma atitude crítico reflexiva, diante de sua prática trabalha em parceria com os alunos na construção cooperativa do conhecimento, promove-lhes a fala e o questionamento e considera o conhecimento sobre a realidade que o aluno traz para construir um saber científico que continue a ter significado. Para tanto, é preciso desafiar os alunos em um nível de pensamento superior ao trabalhado no treinamento de habilidades e incitá-los a aprender. As ações do professor são para despertar a curiosidade, a dúvida, a pergunta, a investigação e a criação, num ambiente em que, além de ensinar, o professor aprende, e o aluno, além de aprender, ensina.

Isto posto, o ensino, por meio das transformações, é fator inerente às várias construções do ambiente da sala de aula, estabelece e menciona as diversas formalidades e apreensão do reconhecimento de cada proposição nas experiências para um estudo de ferramentas pedagógicas.

As transformações de atividades possíveis no GeoGebra permitem ao aluno realizar reflexões e possibilidades de enriquecer o exercício, criar padrões geométricos interessantes e acrescentam na aprendizagem do educando as formalidades e relações que de fato acrescentam e operam com aplicações de cursos e outras atividades que garantem a aplicação e importância na sua exploração (FROTA, 2012)[30].

Por meio da exploração do GeoGebra, o educando possui a oportunidade de visualizar e desmistificar o que envolve a sua praticidade e mudanças em relação ao que oportuniza uma aprendizagem com o que faz parte das mudança, em relação a exploração do *software*, o qual possibilita de modo enriquecedor a sua contribuição de modo dinâmico e eficaz, na construção da aprendizagem que estimula e incentiva o educando na interpretação das atividades matemáticas.

Nesse contexto, o GeoGebra é um *software* de matemática que possibilita a construção e a exploração de diversos objetos geométricos e algébricos. Permite ao professor, enquanto mediador, criar situações, que despertem a curiosidade dos alunos, verificando a apreensão do conhecimento de determinados conteúdos e oportunizando situações propícias à aprendizagem.

O *software* possui uma interface, que possibilita uma visualização extraordinária, estimulando ao aluno investigar, examinar e procurar caminhos, que possam ajudá-lo a compreender a definição de determinados conteúdos e resolver situações problemas.

A informática possibilita ao ensino da matemática, uma atitude de experimentação. Portanto, os recursos disponibilizados a partir da tecnologia, como os *softwares* educacionais, instigam a participação dos alunos, a tomada de decisão, o levantamento conjecturas e analogias em um processo de ensino/aprendizagem.

Dentre as TICs para a área da matemática, o que vem tomando espaço atualmente é *software* GeoGebra, pois ajuda a construir uma matemática dinâmica para se utilizar em sala de aula, já que reúne geometria, álgebra e cálculo (FERREIRA, 2010) [28].

Criado por Markus Hohenwarter, [35] o GeoGebra é um *software* livre sendo lançada a sua primeira versão em 2001, a partir de um projeto em sua dissertação de mestrado. Com a progressão de suas pesquisas, ele alcançou premiações e alguns patrocínios em academias e instituições de ciências internacionais. Inclusive ganhou o prêmio de *software* educacional Alemão (ARREBOLA, S/D).

O referido *software* abrange tópicos Matemáticos, e é classificado como livre e dinâmico. Livre, por permitir sua reprodução ou *download* sem a necessidade de obtenção de registros, sob forma de pagamento prévio ou pré-determinado. Dinâmico, por possuir uma plataforma que unifica o sistema de geometria dinâmico (DGS) com o sistema de computação algébrico (CAS) (SILVA, 2016)[22].

Com esse utilitário, é possível criar páginas interativas na *web* com *applets* integrados – também chamadas de páginas dinâmicas de trabalho – as quais podem ser acessadas com qualquer navegador de Internet que suporte o Java. Essas páginas de trabalho são totalmente independentes do próprio programa. Portanto, é uma ferramenta útil para se criar conteúdo para autoaprendizagem *(e-learning)*, e os chamados *Objetos de Aprendizagem* (AO) (RIBEIRO, 2016)[19].

Com tais explorações, a ação metodológica explorando o GeoGebra tende a interagir, possibilitar o que configura os conceitos do campo da matemática e sua importância para a aprendizagem. Com ele é possível produzir construções gráficas usando o menu, o qual contém ferramentas que permitem construir objetos geométricos, como: ponto, reta, polígono, círculo, ângulo, retas paralelas e perpendiculares, entre outros. As propriedades, que definem essas figuras permitem a sua manipulação direta.

> O *software* GeoGebra, é programa configurado a partir de propriedades matemáticas, constituído com a finalidade da universalização do conhecimento no ambiente escolar. É um aplicativo dinâmico que faz a junção de conceitos de geometria e de álgebra em uma interface gráfica, que promove a construção de vários conceitos no campo matemático [12] (FERREIRA, 2010, p. 3)[28].

O GeoGebra como *software* para a prática da exploração das atividades em matemática acrescenta e possibilita a diversidade quanto ao meio que envolve e tende a favorece novas formas de interações e identificação dos movimentos que caracterizem as mudanças e práticas do que considera e fomenta a participação de cada um ao longo da história, bem como a atuação, quanto ao meio que perpassa o seu desenvolvimento e participação na sociedade (FERREIRA, 2010)[28].

A principal vantagem desse *software* é a possibilidade de manusear os objetos após a sua construção, que vão além do quadro, giz, pois o educando verifica suas propriedades e desenvolvimento ao longo da história da humanidade.

Com isso, o dispositivo explorado no ambiente da sala de aula tende a instigar a participação dos alunos, os quais tomam as experimentações como recurso de um processo de aprendizagem que disponibiliza o uso da tecnologia e a praticidade de cada um quanto ao que demonstra as variáveis para o processo de aprendizagem com maior assimilação do educando.

A concepção sistemática da interpretação, identificação dos valores e outras análises referentes vêm acrescentar e apontar o que considera como prática o manuseio do educando, com o *software* para melhor acompanhamento e desenvolvimento das atividades propostas.

Ademais, o GeoGebra na matemática possui como objetivo a relação da dinâmica dos valores que agregam e faz parte da análise e desenvolvimento das funções do primeiro grau, das funções quadráticas e alguns tópicos de geometria plana, nos quais pode-se explorar conceitos tais como: coeficiente angular e linear, observação dos esboços dos gráficos, o comportamento das funções, pontos de máximo e mínimo, vértice da parábola, raízes da função, intervalos, concavidade da parábola e parâmetros. Na geometria, permite visualizar os polígonos regulares, quadriláteros, circunferências.

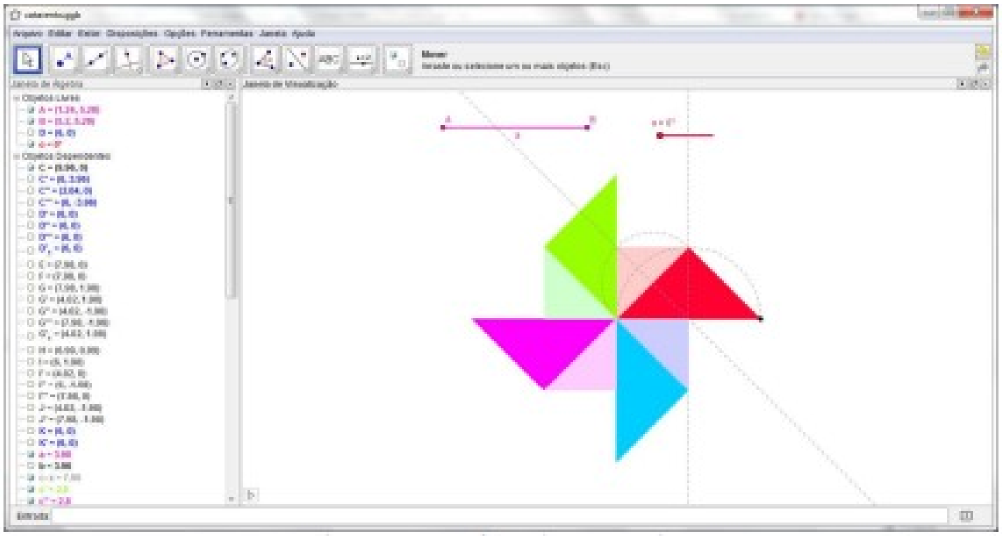
Portanto, é um sistema operacional que estimula a atratividade para o reconhecimento do homem e de suas ações como o que conceitua e faz parte do desenvolvimento e ações do homem quanto ao que relaciona as demonstrações na prática e facilidades das interpretações para melhor compreensão do educando, ou seja, a permissão das visualizações do que envolve a sua interpretação (FERREIRA, 2010) [28].

Na percepção das transformações, o educando identifica os valores da mudança e o que ao longo da história propicia os valores e relações de cada um com o seu universo e proposições do que valoriza e tende a compor as medidas que são valorizadas para a aprendizagem. O que pode ser visualizado na figura 1 (NOTARE; BASSO; 2013, p.73).

Além disso, permite-se visualizar melhor os objetos geométricos, o que o torna um facilitador no ensino de transformações geométricas, uma vez que permite a observação de cada figura antes e depois de cada transformação.

Outrossim, o GeoGebra pode auxiliar na aproximação entre, as disciplinas de matemática e computação, o que promove um processo interdisciplinar, propiciando a construção de novos conceitos. Também pode transformar as funções para a melhor compreensão do educando e sua demonstração quanto ao que é vivenciado, além de permitir atribuir, e compor apontamentos, isto é, facilita-se a interpretação do educando.

Figura 1 – Interface do GeoGebra, apresentado por Notare e Basso (2013)



Fonte: NOTARE; BASSO; 2013, p.73

Tecnicamente, o GeoGebra é um *software* de distribuição livre de acordo com os termos da GNU (General Public License), que se baseia na liberdade de execução para qualquer propósito; liberdade de modificação do programa para adaptação às necessidades; liberdade de redistribuir cópias de formas gratuitas ou mediante pagamentos; e liberdade de distribuir versões modificadas (SABINO; KON; 2009)[57]. Por exemplo, segundo Oliveira (2014)[49], o programa possuía 11 janelas na barra de ferramentas, em versões antigas, mas, após atualizações, foi agregada mais uma janela, com o intuito de inserir e manipular textos e imagens. Sendo o Campo de Entrada a principal ferramenta para desenvolver trabalhos que envolvem conteúdos algébricos, permite-se construir gráficos de funções e fazer cálculos de grandezas matemática, através de comandos pré-estabelecidos.

Segundo os autores Sabino e Kon (2009), o GeoGebra produz uma dimensão que extrapola o plano de visão e imaginário proposto pela educação tradicional, que se baseia no quadro/giz e nos livros-textos, visto que ele proporciona, a partir de seus recursos, a ideia de movimento correspondente à ação dos coeficientes das funções, desse modo, o aluno pode observar o efeito gráfico e algébrico.

A proposta do uso do GeoGebra no ensino de matemática vem crescendo a cada dia, por ser um programa com interface bastante simples e intuitiva, então se torna adequado a usuários com ou sem conhecimentos em informática. Na realidade, que o ponto fundamental de sua utilização é o conhecimento matemático.

Pereira (2012)[51] fez uma pesquisa investigativa utilizando o GeoGebra e alega:

> O trabalho com as tarefas geométricas mediadas pelo *software* GeoGebra foi primordial para a consolidação de alguns conceitos ligados a circunferência, por exemplo. Os alunos tiveram a oportunidade de validar suas hipóteses,

> conjecturar sobre possíveis caminhos para a solução das tarefas e discutir de forma colaborativa suas soluções encontradas. A relação entre as conjecturas levantadas no transcorrer da pesquisa, evidenciou a recorrência dos alunos as tarefas anteriores ou a conceitos percebidos durante as plenárias, para dar continuidade a solução de uma tarefa nova a qual se debruçavam. A utilização do recurso "arrastar" disponível no *software* GeoGebra possibilitou aos alunos, desenvolver uma autonomia para experimentar e validar as suas conjecturas. Contribuiu, também, para revisar os conceitos de triângulos, circunferência, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento e retas paralelas, quando os mesmos apresentavam-se como conceitos necessário para o transcorrer das soluções propostas (PERREIRA, 2012, p. 98)[51].

Costa (2017)[14] desenvolveu um projeto utilizando o GeoGebra no ensino de matemática voltada para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), com a finalidade de comprovar que a utilização do *software* realmente torna o ensino mais significativo. Isso foi comprovado em seu trabalho, com a demonstração através de questionários, feitos tanto pelos alunos quanto pelos professores participantes da pesquisa, mostrando-se que, quando o conteúdo matemático é apresentado de forma dinâmica com o auxílio do GeoGebra, a aprendizagem se torna mais significativa.

Ainda, segunda Costa (2017)[14], o uso do GeoGebra em sala de aula é uma maneira diferente da tradicional de se ensinar e aprender, e professor e aluno podem, por meio dele, tornar o processo ensino-aprendizagem com mais qualidade.

De acordo com sua tese de mestrado, Luz (2016)[61] comprovou, pelo estudo da correlação linear entre as notas de uma turma que fez uso do *software* GeoGebra com outra que não fez uso para aprendizagem do mesmo conteúdo. A pesquisa mostrou, com base nos resultados, a existência de uma relação entre o processo de ensino-aprendizagem e a usabilidade do GeoGebra.

Sá (2014)[56], por sua vez apresentou em sua tese de mestrado o resultado de sua pesquisa realizada através de um questionário feito pelo endereço eletrônico "www.survio.com"com uma consulta a professores de Matemática das redes pública e privada sobre a utilização do GeoGebra em sala, cujo objetivo era verificar junto aos professores da educação básica se eles utilizavam o GeoGebra referido programa em suas práticas de ensino. A pesquisa teve como resultado importante que a maioria das respostas foram favoráveis ao uso do GeoGebra, confirmando sua utilidade para o ensino e aprendizagem na produção e utilização de um material didático que pudesse ser trabalhado em sala de aula.

O uso do GeoGebra no ensino das transformações geométricas, portanto, é de muita valia, pois faz com que os alunos consigam visualizar essas transformações, situação geradora de maior interesse pelo assunto e, consequentemente, melhoramento das notas.

Como o *software* Geogebra, é um aplicativo dinâmico que faz a junção de conceitos de geometria e de álgebra em uma interface gráfica, promove a construção de vários conceitos no campo matemático. Portanto, comprometidos com essa modalidade, ensino de matemática e tecnologia, nota-se uma condição favorável à aprendizagem porque o referido problema viabiliza a visualização concreta dos conteúdos e, nesse caso, permite poder ver no efeito gráfico das funções e da geometria plana, uma forma de representação que contribui fortemente para a compreensão e incorporação dos conceitos matemáticos.

Capítulo 2

Metodologia

A metodologia que subsidia esta pesquisa é a qualitativa, com foco no estudo bibliográfico na perspectiva de Gil (2000)[31].

De acordo com o dicionário Houaiss (2001)[65], a etimologia do termo qualitativo está ligada ao sentido de qualidade, da natureza das coisas. Já em Abbanano (2000), o termo qualitativo se refere a:

> Qualquer determinação de um objeto. Como determinação qualquer, a **qualidade** distingue-se da **propriedade**, que, em seu significado específico, indica a **qualidade**, que caracteriza ou individualiza o próprio objeto, sendo, portanto, própria dele. A noção de qualidade é bastante extensa e de difícil redução a um único conceito. Pode-se dizer que a tarefa de definir o que é qualidade nos remete à caracterização de uma família de conceitos, a qual tem em comum a função de responder à pergunta "qual?". (ABBAGNANO, 2000, p. 816, grifos do autor)[1].

Acerca do estudo bibliográfico, acredita-se que é importante por proporcionar um melhor desenvolvimento do pensamento científico e de conhecimentos teóricos. Dessa forma, esta pesquisa bibliográfica foi feita baseando-se em teses e em dissertações encontradas no banco de teses da CAPES, CNPQ, SBM e SBEM, em artigos de periódicos e em livros relacionados ao tema. Essa seleção se deu pelas palavras-chave e pela leitura atenciosa dos resumos.

A partir disso, criou-se uma sequência didática como sugestão para os professores desenvolverem em sala de aula. Cabe ressaltar que essa proposta não será aplicada por esta pesquisa, configurando-se, como uma proposição de trabalho que poderá ser futuramente utilizada por aqueles que se interessarem. Os resultados observados pelo uso do GeoGebra, têm a ver, com mudança de metodologia, o que será abordado na próxima seção.

No que se refere à estrutura deste trabalho, serão abordadas no capítulo três as transformações geométricas a partir de operações com matrizes e, no capítulo quatro, finalizar-se com a sequência didática, em que se trará a possibilidade de ampliar as propriedades de matrizes, ligadas à Álgebra, com as transformações geométricas com o uso do GeoGebra.

Para tal, dar-se-á a conhecer a literatura básica sobre as transformações geométricas que abordam os movimentos rígidos e deformações. Os critérios para a seleção dessa revisão literária foram: textos-que de fácil acesso e que contemplem conceitos e objetos matemáticos, bem como os aspectos educacional e/ou computacional.

2.1 Sequência didática

A sequência didática consiste em definir e explorar as atividades que são definidas por um conjunto encadeado de passos e etapas ligadas entre si, de modo que a aprendizagem se torne mais clara e objetiva [47](NASCIMENTO, 2009).

> *esse dispositivo didático contribui para uma conscientização à necessidade de repensar o ensino e a aprendizagem de modo que ultrapasse as fontes de rompimentos de paradigmas e torne eficaz para o que favorece o educando em todo processo sistemático de desempenho e valores das situações que são referências para a melhoria da aprendizagem junto ao meio que se encontra (NASCIMENTO, 2009, p. 68).*

Com isso, a sequência didática propicia as diversas formas e interpretações para a aprendizagem, o que possibilita relacionar as informações durante a aprendizagem, que está sendo vivenciada. O trabalho com sequência didática, por isso, pressupõe a elaboração de um conjunto de atividades pedagógicas ligadas entre si, planejadas para ensinar com organização e, consequentemente, oferecer ao educando a linguagem que faça parte do seu cotidiano, social, cognitivo em diferentes formas, como instrumento para a melhoria de sua capacidade de compreensão do conteúdo que é apresentado. [27] (DOLZ, NOVERRAZ SCHNEUWLY, 2004).

As sequências didáticas exploradas na educação e na matemática como um material de riquezas que explora as características, que são propostas nas atividades, contribuindo para o aperfeiçoamento de novas formas de interpretação e exploração do conteúdo quanto ao que associa na efetividade de seus valores e relações com o universo.

[37] Marcuschi (2011) aponta um outro aspecto fundamental no trabalho com sequência didática: a criação de situações com contextos, que permitam reproduzir em grandes linhas e no detalhe a situação concreta, ou seja, as várias formas de visualizar e agregar os valores de um sujeito capaz de interagir com o seu meio.

As situações que são desenvolvidas até o processo final acrescentam bem como orientam na disseminação de horizontes, tornando possível o aprimoramento e a relevância do que atende à produção, neste contexto, as figuras geométricas, as quais neste caso são visualizadas em várias dimensões.

Além disso, uma metodologia diferenciada é ponto de referência e acréscimo das atividades que rompe o tradicional para a associação do educando com o seu universo.

Segundo [46] Moretto (2001), para o educando que explora uma sequência didática a partir dos recursos do GeoGebra, pode ser que ele consiga descrever os objetos, independentemente do contexto do observador, pois, nesse processo, a aprendizagem é desencadeada pelo uso das experiências, utilizando objetos visíveis, palpáveis ou sensitivos.

Essas experiências fazem com que o aluno interaja com o objeto de conhecimento e construa seu pensamento em um processo contínuo. Afirma-se, então, que o professor trabalha com o aluno fazendo que ele deixe de ser um mero receptor e passe a ser um ativo elaborador, um sujeito do conhecimento, isto é, ele assume o papel de mediador, isto é, facilitador do processo de aprendizagem. Sua presença e atitude nesta linha é indispensável.

A sequência didática aqui proposta, procura-se basear no princípio de que o aluno está em constante desenvolvimento, cuja atividade é uma condição para seu crescimento físico e intelectual. Portanto é fundamental que exista a participação ativa do aluno no espaço que o professor reserva para as descobertas do educando.

Nesse sentido, ao elaborar de sequência didática em matemática apoiada na tecnologia para se "ensinar objetos geométricos", visou-se promover ações e dar oportunidades para a aprendizagem desse conhecimento a partir da utilização do GeoGebra.

A sequência didática explorando o GeoGebra pode ser um dos componentes fundamentais que facilita a compreensão do educando, no caso deste trabalho, a compreensão das transformações geométricas a partir das operações com matrizes pelo uso do GeoGeobra.

A utilização desse *software* na matemática exige preparo do conteúdo, ação dos professores e o conhecimento da tecnologia. Com isso, o GeoGebra pode facilitar ao educando descobrir as transformações que vão sendo vivenciadas e articuladas durante as construções, bem como tem a possibilidade de visualizar o objeto construído, o que pode vir a auxiliar no aprofundamento conceitual.

Existe uma forte possibilidade de trabalhar a questão da construção do saber, uma vez que, com esse *software* pode-se inverter o processo de ensino aprendizagem, passando de um modelo baseado na informação, para um modelo que permite ao aluno jogar o jogo, isto é, construir o saber, por meio da possibilidade de experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar a matemática, permitindo que o professor trabalhe com o aluno, uma tendência moderna da "Educação Matemática"[35] (Hohewarter, 2012).

Isso posto, esse *software*, permite a exploração de objetos matemáticos consistindo em integrar a geometria com a álgebra.

A solução das situações vivenciadas se dá por meio de ações e práticas, que acrescentam possibilidades de investigação para a proposta de aprendizagem das transformações geométricas.

Para a prática docente, a sequência didática favorece a construção do que tende a aprender a aprendizagem e o reconhecimento do educando.

Por fim, entende-se que cabe ao professor explicar a importância de se estudarem as transformações geométricas por meio do GeoGebra. Nesse sentido, é proposta deste trabalho é elaborar uma sequência didática e não desenvolvê-la, visto que o intento primordial é mostrar uma sequência possível que, adotada pelos mestres em sala de aula, poderá potencializar as possibilidades de aprendizagem.

Capítulo 3

Bases matemáticas

3.1 Matrizes

Matrizes são organizações de informações numéricas em uma tabela retangular formada por linhas e colunas.

Esse formato de organização facilita que se possam efetuar vários cálculos simultâneos com as informações contidas na matriz.

Toda matriz tem a ordem $m \times n$ (leia-se: m por n, com m e $n \in N^*$), onde m é o número de linhas e n o número de colunas.

Apresentamos duas maneiras de se representar uma matriz, que são:

- Entre colchetes: [ ]
- Entre parênteses: ( )

Essas são as mais comuns de serem encontradas na literatura, onde $(a_{ij}) = A$, com i o endereço da linha e j, o endereço da coluna.

Exemplos:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Por exemplo, $a_{21} = -2,\ a_{13} = 0$.
A matriz genérica A, será dada por :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1.1 Operações com matrizes

Neste subtópico, discorre-se sobre os algoritmos de três operações com matriz.

3.1.1.1 Adição

A adição de duas matrizes, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem, será dada pelo algoritmo

$$S = (s_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}).$$

Veja-se que S terá a mesma ordem de A e B

Exemplo:

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem 3×2. A matriz $S = A + B$, será dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+(-2) \\ 3+(-1) & 4+0 \\ 5+3 & 6+(-6) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

3.1.1.2 Subtração

A subtração de duas matrizes, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem, será dada pelo algoritmo

$$T = (s_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij}).$$

Veja-se que T terá a mesma ordem de A e B

Exemplo:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-7 & 2-(-2) \\ 3-(-1) & 4-0 \\ 5-3 & 6-(-6) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

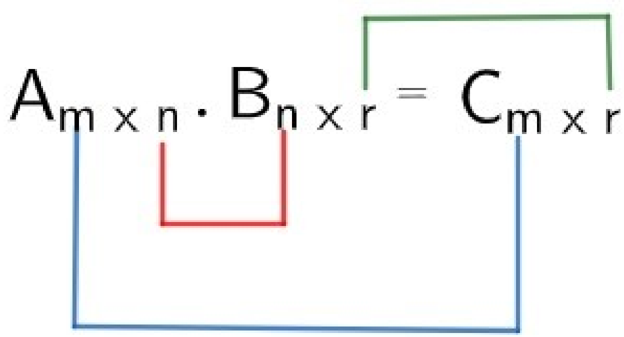
$$T = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

3.1.1.3 Multiplicação

A multiplicação de matrizes não é tão trivial quanto a adição e subtração delas. Seu algoritmo será dado por $M = (m_{ij})$ com

$$m_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

Observe-se que, para se efetuar o algoritmo a matriz A, deve-se ter o mesmo número de colunas que o número de linhas da matriz B e que a matriz multiplicação terá a ordem igual ao número de linhas de A pelo número de colunas de B. Veja-se a figura que esquematiza a operação.



Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \tag{3.6}$$

$$A \cdot B \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 0 & 0\cdot 3 + 2\cdot 2 + 4\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 5\cdot 0 & 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 5\cdot 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{3.7}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 20 \\ -5 & 29 \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{3.8}$$

3.2 Transformações geométricas no Plano

Como foi citado anteriormente, o PROFMAT preza pela solidez do conhecimento teórico. Neste tópico, apresenta-se uma explicação sobre as transformações geométricas.

3.2.1 Definição Geral

Definição 3.2.1. *Chamamos de transformações lineares os movimentos (no plano) de modo que*

$$\begin{array}{ccc} \pi & \rightarrow & \pi \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

$$\text{com } P, P' \in \pi$$

Para Costa[13] e Rodrigues (2012, p. 30)[55], as transformações geométricas tornam-se aplicações bijetivas entre figuras geométricas, partindo de uma figura original, no mesmo plano ou em planos diferentes, formando uma figura geometricamente semelhante ou igual à primeira figura apresentada. Este trabalho procurará se ater às transformações no plano.

Definição 3.2.2. *Chamamos de transformações lineares os movimentos de modo que*

$$\begin{array}{ccc} \pi & \rightarrow & \pi' \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

$$\text{com } P \in \pi \text{ e } P' \in \pi'$$

As interpretações das transformações auxiliam na compreensão do seu significado e melhoria da aprendizagem, uma vez que aponta os reais valores, aproximando o educando no seu processo de contextualização do que representa o significado da matemática [55] (RODRIGUES, 2012).

Nas atividades de interpretação, o docente é o mediador que possui as relações de entendimento no processo de construção dos elementos que aproxima cada fator quanto a contextualização das variadas formas de interpretações da geometria.

Com o uso do *software*, o norteamento dos estudos de transformações são relacionados a vários princípios, que facilitam e atendem, quanto as transformações geométricas e desenvolvendo a percepção de que toda transformação geométrica euclidiana é uma função, cujo domínio não é numérico. Mais do que isso, os alunos terão oportunidade de estabelecer as relações entre: Álgebra, Cálculo e Geometria. Stormowski (2008, p.44), [62] em busca de uma definição sobre transformações geométricas, declara:

> [...] não parece existir na literatura uma definição clara e de consenso do que seja uma transformação geométrica. Diante disto optamos por não enunciar uma definição, e usar o termo transformação geométrica em um sentido mais amplo e não muito rígido. Neste contexto, vamos entender que transformações geométricas são aquelas bijeções entre regiões do plano que, de alguma maneira, tem um sentido geométrico, tais como as translações, rotações, simetrias, homotetias e cisalhamentos." (STORMOWSKI, 2008, p.44)[62]

As deformações, em geral, são estudadas apenas em topologia, mas para este trabalho, será feito um breve estudo destas, uma vez que, os estudos sobre este tópico são extensos e bem complexos.

As transformações geométricas são muito importantes para a computação gráfica por terem diversas formas de aplicação, como: permitir alterar, modelar e manipular objetos pela tela do computador [43](GATTASS, 2017).

A transformação geométrica no plano é uma aplicação bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo. As principais transformações no plano euclidiano são as reflexões translações, rotações, reflexões centrais e homotetia. A imagem de uma figura por uma transformação geométrica é o conjunto de pontos que são imagens de pontos de figuras pela transformação [4](ALVES, 2004). Barbosa (2013)[7] afirma que "as transformações geométricas se apresentam como recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e às suas operações, conteúdo que, em geral, é estudado de forma bastante mecânica, privilegiando os métodos algébricos" (BARBOSA, 2013, p.19).

A aplicação de recursos que atenda às necessidades do educando é essencial para que se traga ao educando um estudo da prática do que é vivenciado em seu cotidiano de modo a relacionar as diversas formas de como alcançar as medidas geométricas.

> O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.(BRASIL,201p.124) [11]

Portanto, o professor aplica a melhor forma que permite seu desenvolvimento e acompanhamento nas diversas ações com a exploração dos devidos recursos que permitem atender e oferecer as condições de reconhecimento e atendimento de cada um quanto ao que faz parte da percepção do educando em suas mudanças e atenuações do que é vivenciado e operacionalizado nas transposições geométricas.

A projeção de como consolidar e atribuir os valores do que ocupa e oferece as condições de manifestação e relação das situações de projeções oferece a prática e ajuste do que considera essencial nas transformações geométricas.

As projeções por meio de fontes específicas atendem e enumeram uma prática de valorização e acompanhamento de toda configuração da prática docente para um melhor aprimoramento da geometria quanto ao que é vivenciado por parte do educando.

Nesse contexto, as tecnologias vêm para somar, atribuir e constituir novos horizontes quanto ao que permite agregar e aponta o que de fato é considerado a base e a dinâmica das várias oportunidades, para a associação do homem com o seu meio

As transformações (lineares ou não) aplicadas dentro do plano euclidiano são chamadas de transformações geométricas no plano, pois transformam objetos no plano. No próximo tópico, estudam-se as transformações de reflexão, dilatação, contração, escala e rotação.

3.3 Descrição

A partir de agora, será estabelecida definição e a correlação das transformações geométricas que serão trabalhadas na sequência didática.

3.3.1 Translação

Na busca de uma ideia intuitiva de translação, pensa-se na alteração de algum móvel. É muito comum nos lares, fazer a alteração de móveis, trocando-os de lugar, por se achar que naquele momento outra disposição da mobília seja mais conveniente.

Se o movimento dos móveis não apresentar nenhum giro, pode-se dizer que foi realizado um movimento de translação. Assim sendo, translação como movimento ocorre quando um objeto sofre uma alteração em sua posição inicial. Nesse movimento há um deslocamento seguindo uma direção e sentido.

A transformação de translação envolve as diferentes formas do que é construída pela função com as transformações pelos lados opostos.

Conforme destaca [18] Silva (2014), "Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E. **Orientado** significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A, e depois B".

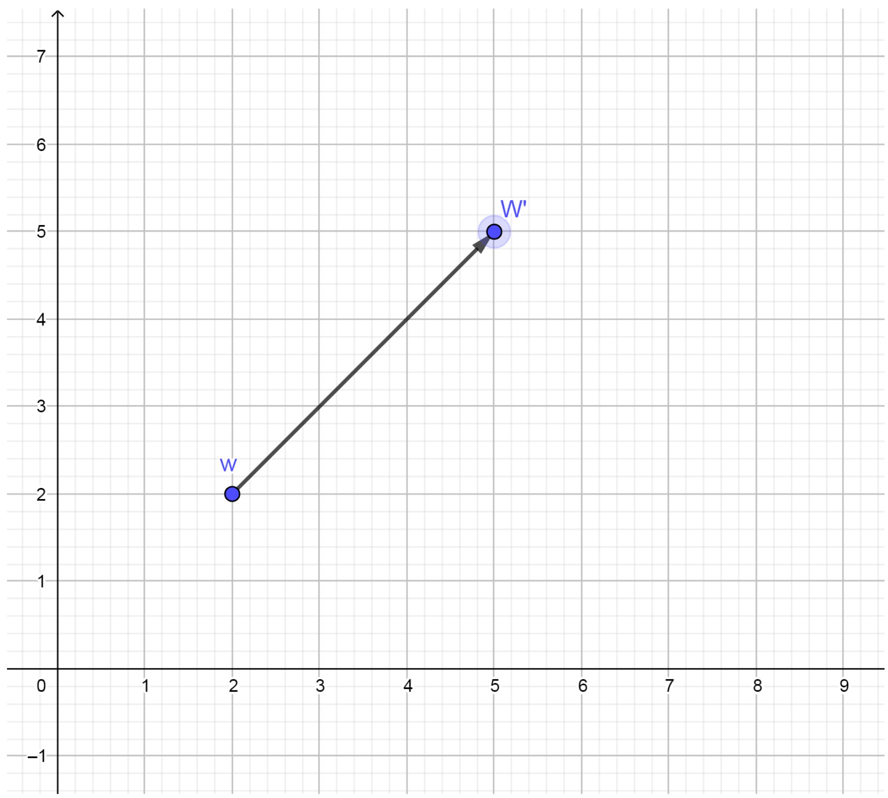
Definição 3.3.1. *A translação de P determinada por AB é a transformação* $\tau = \begin{matrix} E & \to E \\ P & \mapsto P' \end{matrix}$, *de modo que*

$$P' = \begin{pmatrix} x_P + x_{AB} \\ y_P + y_{AB} \end{pmatrix}$$

Uma translação é, portanto, uma transformação geométrica, em que os segmentos orientados dados pelos pontos de uma figura com os seus respetivos transformados possuem a mesma direção, o mesmo sentido e estão à mesma distância.

Se transladar o ponto $W = (x, y)$, pelo segmento orientado AB, ele terá novas coordenadas, $W' = (x', y')$. Podem-se determinar as coordenadas do ponto W' em função das coordenadas do ponto W. Dessa forma, o segmento orientado WW' tem a mesma direção, sentido de AB, além disso, W e W' estão à mesma distância que A de B.

Figura 2 – Ponto W



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

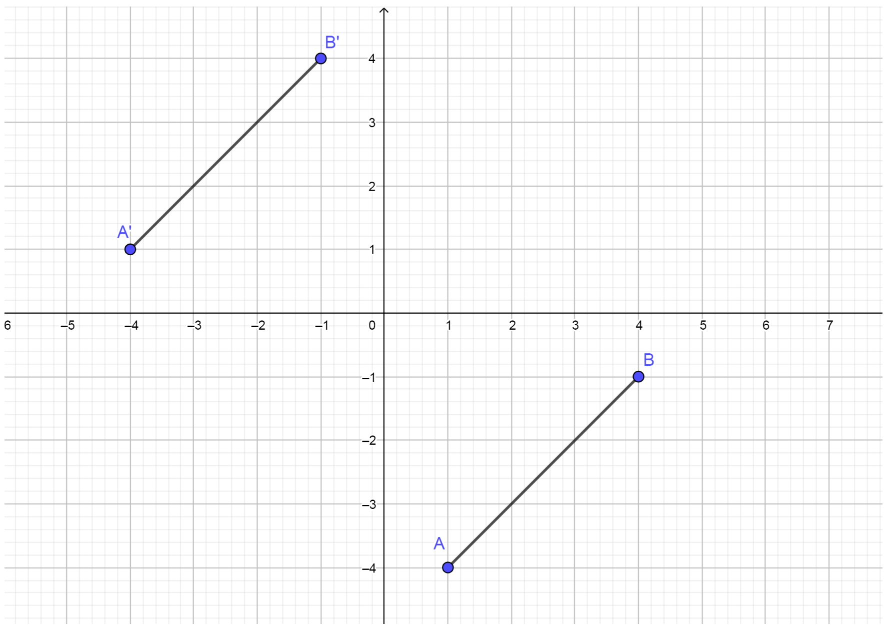
Considerando as coordenadas do ponto $W = (x, y)$ e do ponto $W' = (x', y')$ na forma de matrizes coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, respectivamente, é possível determinar as coordenadas do ponto W' por meio de soma de matrizes. Conhecendo a, referente ao deslocamento horizontal do ponto W, e b, referente ao deslocamento vertical do ponto W, tem-se a matriz coluna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dessa forma, as coordenadas do ponto $W' = (x', y')$ são dadas pela equação 3.11.

$$W' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{logo } W' = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix} \rightarrow W' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$W' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{logo } W' = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 2+3 \end{pmatrix} \rightarrow W' = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Uma propriedade importante da translação enuncia a seguir.

Figura 3 – Translação de Segmento



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Proposição 3.3.1. *Uma translação pelo segmento orientado $TT' = (x_t, y_t)$ transforma o segmento de reta AB no segmento de reta $A'B'$, tal que $A'B'$ tem o mesmo comprimento e é paralelo a AB.*

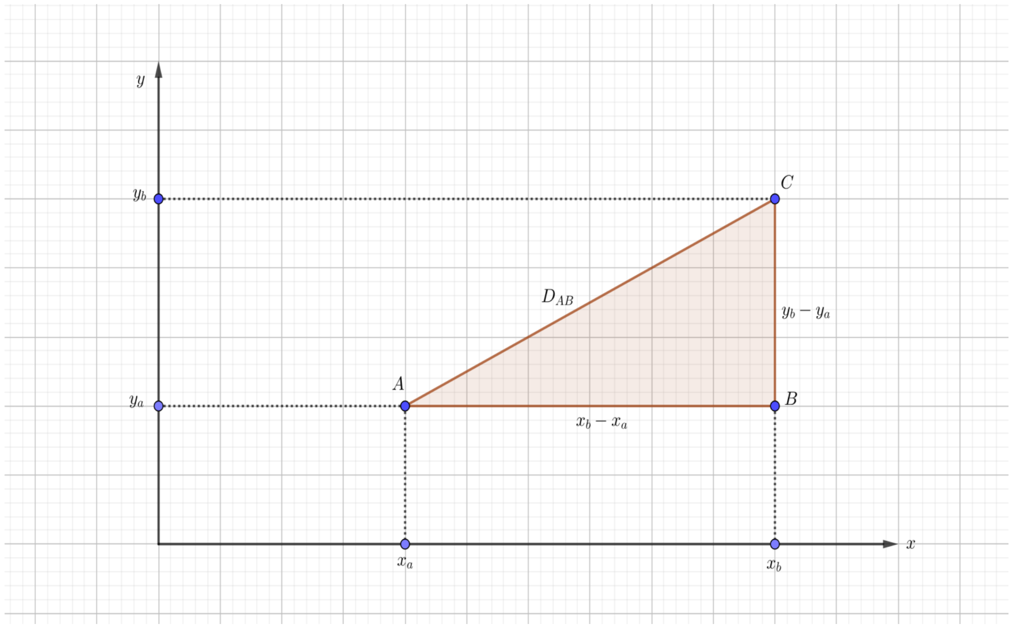
Para provar essa propriedade, primeiro vai ser utilizada a fórmula da distância entre dois pontos. A título de recordação remetemo-nos ao assunto do livro de matemática do Ensino Médio, Contexto Aplicações, volume 3 (LUIZ ROBERTO, 2016).

Para determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano, é necessário realizar a análise, tanto no sentido do eixo das abscissas (x), quanto no do eixo das ordenadas (y). Confira:

Nota-se que, na distância entre o ponto A e B existe uma variação, tanto no eixo x, quanto no eixo y, logo, a distância entre os pontos deve ser dada em função dessas variações. Observe que, para calcular a distância entre o ponto $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ basta aplicar o Teorema de Pitágoras, já que a figura é um triângulo retângulo. Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3.11}$$

Figura 4 – Distância entre dois pontos no plano cartesiano



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$$(d_{AB})^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \tag{3.12}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \tag{3.13}$$

Prova 1. *Seja um segmento de reta AB com $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Pela translação pelo segmento orientado TT', A será transformado no segmento de reta $A'B'$ e as coordenadas dos pontos A' e B' são $A' = (x_a + x_t, y_a + y_t)$ e $B' = (x_b + x_t, y_b + y_t)$.*

$$\begin{aligned} d(A'B') &= \sqrt{((x_a + x_t) - (x_b + x_t))^2 + ((y_a + y_t) - (y_b + y_t))^2} = \\ &= \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \\ &= d(A, B) \end{aligned}$$

Prova 2. *A inclinação m de um segmento é dada pela razão da variação entre suas ordenadas pelas suas abscissas.*

$$\begin{aligned} m_{A'B'} &= \frac{y_b + y_t - (y_a + y_t)}{x_b + x_t - (x_a + x_t)} = \\ &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \\ &= m_{AB} \end{aligned}$$

É possível ver na figura 3 os vértices do ponto $A(1,-4), B(4,-1), A'(-4,1)$ e $B'(-1,4)$, logo, substituindo na fórmula, é comprovável que a distância do ponto AB tem que ser igual à distância de A'B'. Se isso ocorrer, está provado que esses segmentos são congruentes.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \tag{3.14}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (-4+1)^2} \tag{3.15}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \tag{3.16}$$

$$d_{AB} = \sqrt{9+9} \tag{3.17}$$

$$d_{AB} = \sqrt{2 \cdot 9} \tag{3.18}$$

$$d_{AB} = 3\sqrt{2} \tag{3.19}$$

$$d_{A'B'} = \sqrt{(x'_b - x'_a)^2 + (y'_b - y'_a)^2} \tag{3.20}$$

$$d_{A'B'} = \sqrt{(-4+1)^2 + (1-4)^2} \tag{3.21}$$

$$d'_{A'B'} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \tag{3.22}$$

$$d_{A'B'} = \sqrt{9+9} \tag{3.23}$$

$$d_{A'B'} = \sqrt{2 \cdot 9} \tag{3.24}$$

$$d_{A'B'} = 3\sqrt{2} \tag{3.25}$$

Para provar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos, é necessário provar que eles possuem a mesma inclinação, em relação ao eixo das abscissas por meio do cálculo dos seus respectivos coeficientes angulares.Cabe lembrar que o coeficiente angular de um segmento de reta $\overline{AB}$, $A(x_a, y_a)eB(x_b, y_b)$ é dada por $M_{AB} = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$, com a inclinação do segmento de reta $\overline{A'B'}$.

De acordo com a figura 3, têm-se os vértices $A(1,-4), B(4,-1), A'(-4,1), B'(-1,4)$, logo:

$$M_{AB} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \tag{3.26}$$

$$M_{AB} = \frac{-1+4}{4-1} \tag{3.27}$$

$$M_{AB} = \frac{3}{3} \tag{3.28}$$

$$M_{AB} = 1 \tag{3.29}$$

$$M_{A'B'} = \frac{y_{b'} - y_{a'}}{x_{b'} - x_{a'}} \tag{3.30}$$

$$M_{A'B'} = \frac{4-1}{-1+4} \tag{3.31}$$

$$M_{A'B'} = \frac{3}{3} \tag{3.32}$$

$$M_{A'B'} = 1 \tag{3.33}$$

Pela definição, duas retas r e s, no plano são paralelas (r//s) se, e somente se, ambas forem verticais, ou se seus coeficientes angulares forem iguais. Com isso, conclui-se que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos, pois seus coeficientes angulares são iguais $m_{AB} = m_{A'B'}$.

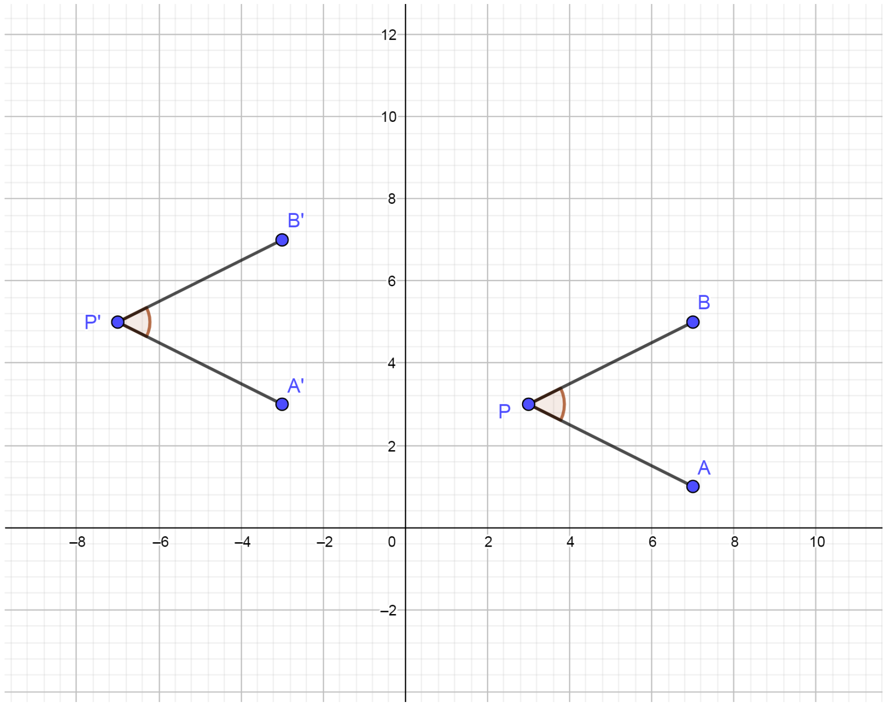
Na figura 5, apresenta-se a translação dos segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ em 10 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima. Dados: $P = (3,3), A = (7,1), B = (7,5)$. O ponto P' será o transladado do ponto P, o ponto A' será o transladado do ponto A e o ponto B' será o transladado do ponto B.

Para fazer essa translação, deve-se deslocar 10 unidades para esquerda e 2 unidades para cima, com isso $a = -10$ e $b = 2$ e, em seguida, fazer a soma das matrizes onde a primeira linha recebe os valores da abscissa (x) e a segunda linha os valores da ordenada (y), então:

$$\text{Ponto A'}: \quad A' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ logo } A' = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{logo } A' = \begin{pmatrix} 7-10 \\ 1+2 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Figura 5 – Translação do segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$$A' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Ponto B' :

$$B' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ logo } B' = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ logo } B' = \begin{pmatrix} 7-10 \\ 5+2 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$$B' = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Ponto P' :

$$P' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ logo } P' = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ logo } P' = \begin{pmatrix} 3-10 \\ 3+2 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Após ser realizada a soma das matrizes, deve-se localizar os pares ordenados no plano cartesiano, e, na sequência, ligar os pontos, logo, o segmento de retas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ formam o ângulo $\widehat{APB}$, pois possuem P em comum. Da mesma forma, se procedo aos pontos transladados $\overline{P'A'}$ e $\overline{P'B'}$, pois possuem o ponto P' em comum. Assim, pela definição da propriedade de translação, pode-se concluir que $\widehat{APB}$ e $\widehat{A'PB'}$ são congruentes, pois o segmento $\overline{PA}$ é paralelo a $\overline{P'A'}$ e o segmento $\overline{PB}$ é paralelo ao segmento $\overline{P'B'}$.

Para transladar um polígono $P = A_1A_2 \cdots A_n$ pelo segmento orientado $T = (t_1, t_2)$, a matriz da transformação será dada por

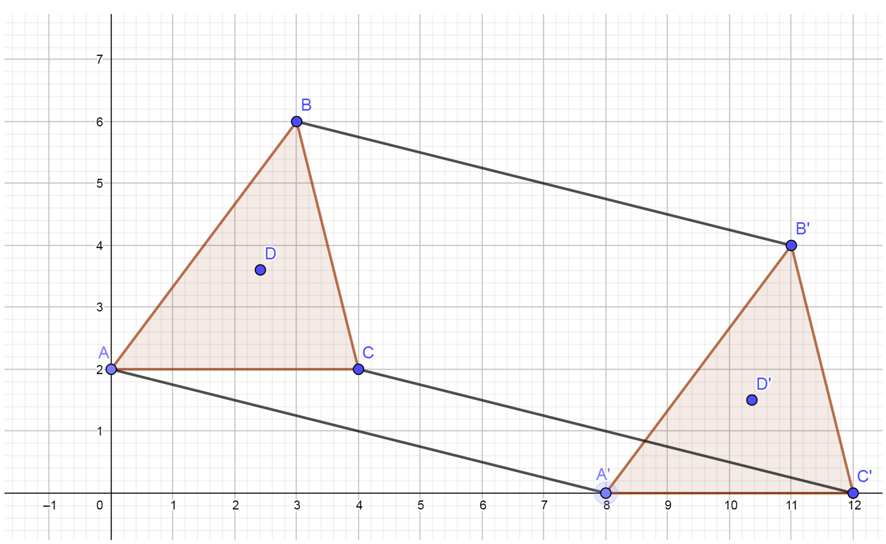
$$P' = \begin{pmatrix} x_{A_1} & x_{A_2} & \cdots & x_{A_n} \\ y_{A_1} & y_{A_2} & \cdots & y_{A_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Exemplo. Vamos transladar o triângulo $D = \triangle ABC$ pelo segmento orientado $T(8, -2)$, sendo $A(0, 2), B(3, 6)$ e $C(4, 2)$ seus vértices

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

Veja-se a figura 6

Figura 6 – Translação do triângulo

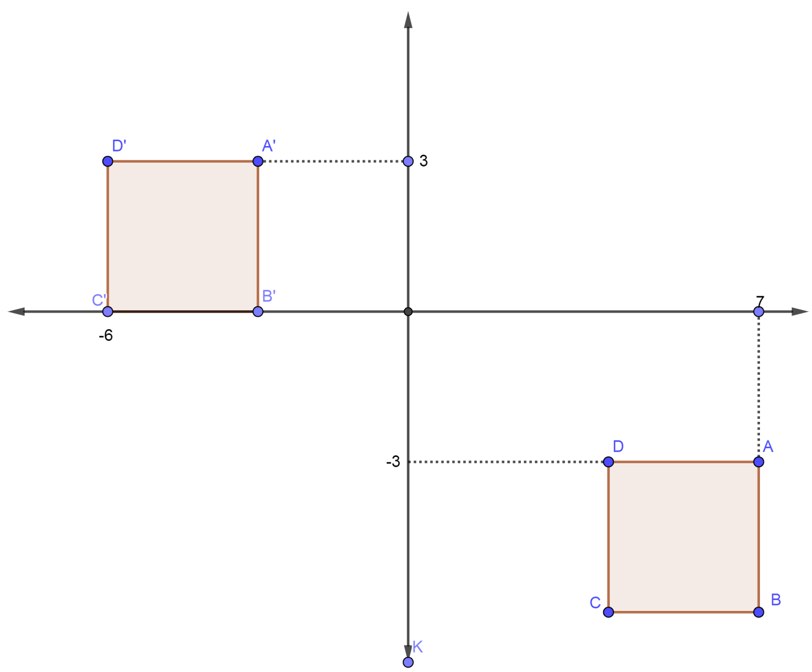


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Outro exemplo. Dado um quadrado $Q = ABCD$, cujos vértices são $A(7,-3), B(7,-6)$, $C(4,-6), D(4,-3)$ e o segmento orientado dado por $T(-10,6)$

$$Q' = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 & -10 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Figura 7 – Translação do quadrado ABCD



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

3.3.2 Rotação

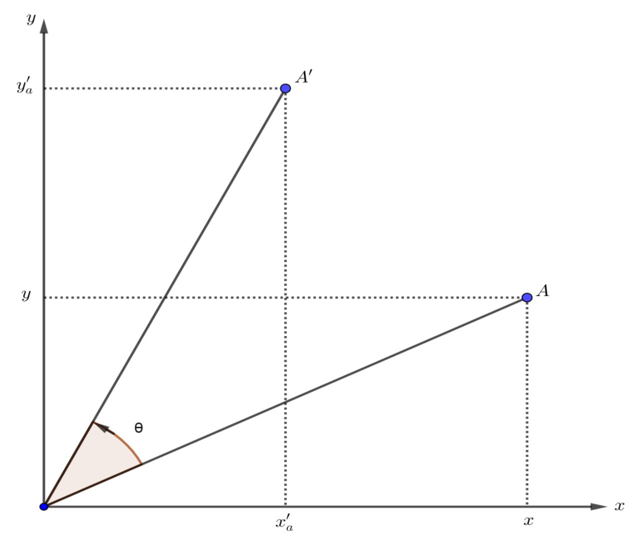
Conforme destaca Wagner (1993)[66], "Fixa um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α, a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = R\alpha(A)$ de forma que se tenha $A'O = AO, A\hat{O}A' = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo".

Enquanto transformação geométrica, a rotação estabelece as seguintes propriedades:

- em um rotação, um segmento de reta é transformado em um segmento de reta congruente;
- um ângulo é transformado em um ângulo congruente e o centro de rotação mantém-se fixo.

O ponto A foi deslocado em relação à origem no plano, fazendo com que ele descreva uma arco θ graus no sentido anti-horário, assim o arco terá como centro a origem. Quando o ponto A sofre esse tipo de deslocamento, diz-se que A sofreu uma rotação de um ângulo θ de graus no sentido anti-horário em torno da origem. Dessa forma, A' terá novas coordenadas, como $A' = (x'_a, y'_a)$, onde a situação pode ser observada na figura 8.

Figura 8 – Arcos descrito pelo ponto A



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

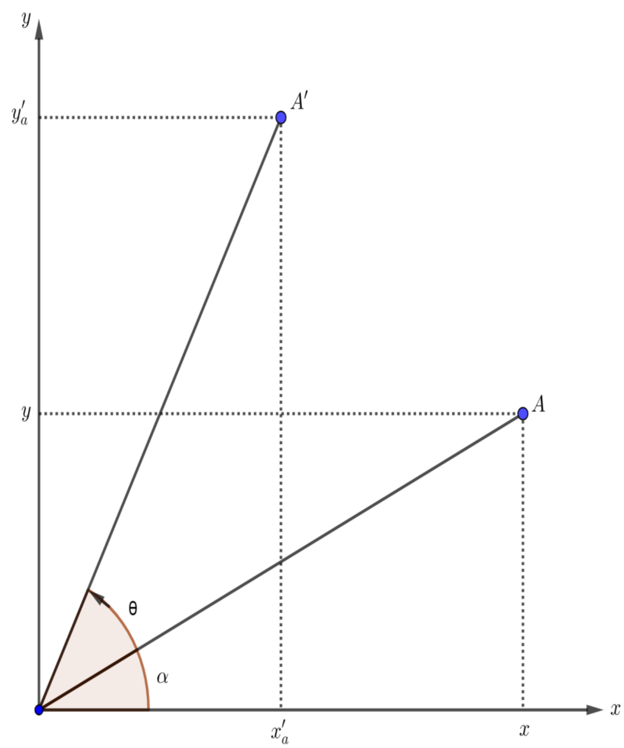
Dado um ponto $A(x_a, y_a)$, o ponto $A'(x'_a, y'_a)$ é obtido pela rotação de A por um ângulo θ no sentido anti-horário em torno na origem, para isso se deve fazer a multiplicação de matriz por matriz em que a matriz de rotação é fixa e, vai ser utilizada sempre que se deseja fazer a rotação no sentido anti-horário. Para uma melhor compreensão do texto, é importante que o leitor esteja familiarizado com algumas noções básicas de trigonometria, tal que:

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

Para mais facilmente entender a matriz de rotação, será apresentada abaixo a demonstração da fórmula do seno da soma de arco e o cosseno da soma de arco, baseada no livro de matemática do Ensino Médio, Contexto e Aplicações, volume 2 (DANTE, 2016).

Dado um ponto $A = (x_a, y_a)$, seja α o menor ângulo formado entre o eixo (x) e o segmento $\overline{PA}$, sendo $P = (0, 0)$. Aplicando ao ponto A uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, em torno da origem, obtemos o ponto $A' = (x'_a, y'_a)$, que, por sua vez, forma um ângulo de $\alpha + \theta$ com o eixo (x), como evidenciado na figura 9.

Figura 9 – Rotação no ponto A



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

De acordo com a definição de distância entre dois pontos que já foi mencionada anteriormente, na transformação de translação envolvendo a rotação, tem-se a distância de A a origem P dada por:

$$d_{AP} = \sqrt{(x_a - x_p)^2 + (y_a - y_p)^2} \tag{3.47}$$

$$d_{AP} = \sqrt{(x_a - 0)^2 + (y_a - 0)^2}, \tag{3.48}$$

logo a distância do ponto A ao ponto P é

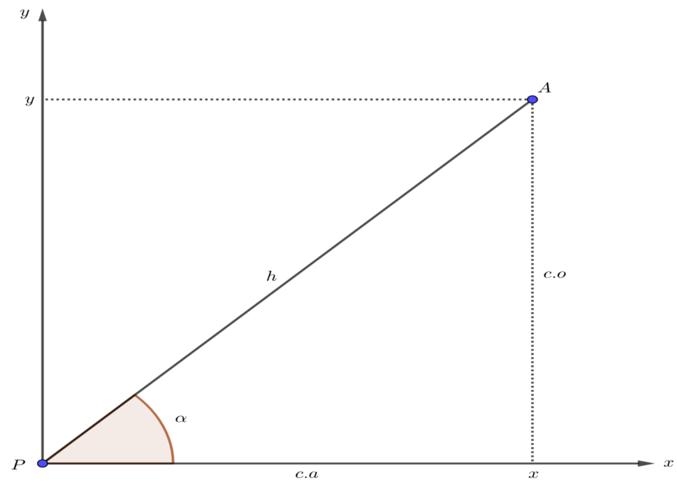
$$d_{AP} = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}. \tag{3.49}$$

Sendo $d_{AP} = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}$, a distância de A à origem P, então calcula-se o seno e o cosseno do ângulo α no triângulo retângulo formado pelos pontos P, A e $(x, 0)$.

Contudo, para tanto, é preciso recordar as fórmulas, que permitem calcular seno e cosseno de qualquer ângulo no triângulo retângulo, como pode ser observado na figura 10.

$$\text{sen}\alpha = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} \tag{3.50}$$

Figura 10 – Triângulo Retângulo



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$$\text{sen}\alpha = \frac{CO}{Hip} \tag{3.51}$$

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} \tag{3.52}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{Hip} \tag{3.53}$$

Calculando o valor de seno, em relação ao ângulo α, tem-se que o cateto oposto corresponde ao valor de y, e a hipotenusa corresponde à distância do ponto P ao ponto A, onde $d_{AP} = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}$, então:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{d_{AP}} \tag{3.54}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}} \tag{3.55}$$

aplicando a regra de três simples, tem-se

$$y = \text{sen}\alpha \cdot \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \tag{3.56}$$

Para calcular o cosseno em relação ao ângulo α, o cateto adjacente corresponde ao valor de x, e a hipotenusa corresponde $d_{AP} = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}$, então:

$$\cos\alpha = \frac{x}{d_{AP}} \tag{3.57}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}} \tag{3.58}$$

aplicando a regra de três simples, tem-se

$$x = \cos \alpha \cdot \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \tag{3.59}$$

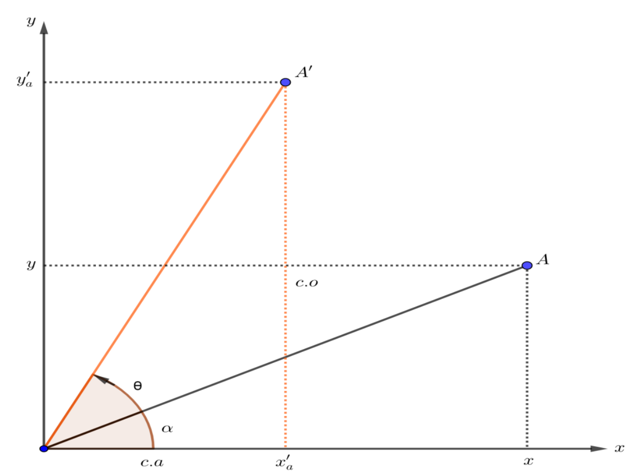
A rotação não altera o comprimento do segmento, então $d_{PA'} = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}$, é o comprimento PA', calculando o seno e o cosseno do ângulo $\alpha + \theta$ no triângulo formado por P, A' e $(x'_a, 0)$ e utilizando as igualdades trigonométricas como seno da soma de arcos e o cosseno da soma de arcos.

Fórmula

$$\begin{gathered} \text{Seno da Soma} \\ \text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a \end{gathered} \tag{3.60}$$

$$\begin{gathered} \text{Cosseno da Soma} \\ \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}a \cdot \text{sen}b \end{gathered} \tag{3.61}$$

Figura 11 – Ângulo $\alpha + \theta$



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

O cálculo do seno e do cosseno do ângulo $\alpha + \theta$ no triângulo formado por P, A' e $(x'_a, 0)$, pode ser visto na figura 11, assim, tem-se:

Fórmula do $\text{sen}(\alpha + \theta)$

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{CO}{Hip} \tag{3.62}$$

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{y'_a}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}} \tag{3.63}$$

aplicando a regra de três simples, vai-se obter a seguinte equação

$$y'_a = \text{sen}(\alpha + \theta) \cdot \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \tag{3.64}$$

aplicando a fórmula do seno da soma, tem-se que:

$$y'_a = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\theta + \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\alpha \tag{3.65}$$

Fórmula do $\cos(\alpha + \theta)$

$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{CA}{Hip} \tag{3.66}$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{x'_a}{\sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2}} \tag{3.67}$$

aplicando a regra de três simples, vai-se obter a equação

$$x'_a = \cos(\alpha + \theta) \cdot \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \tag{3.68}$$

aplicando a fórmula do seno da soma, tem-se que:

$$x'_a = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2} \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\theta \tag{3.69}$$

Substituindo as equações 3.56 e 3.59 nas equações 3.65 e 3.69 conclui-se que:

$$y'_a = y \cdot \cos\theta + x\text{sen}\theta \tag{3.70}$$

$$x'_a = x\cos\theta - y\text{sen}\theta \tag{3.71}$$

De forma geral, a rotação, em sua forma matricial dar-se-á como a seguir:

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Desse modo, conclui-se a demonstração e a definição da transformação de rotação da matriz de um ângulo θ em torno da origem, em relação ao sentido anti-horário.

A matriz definida por $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é chamada matriz de rotação.

Observa-se que a matriz de rotação só depende do ângulo e não do ponto a ser rotacionado, por isso, para rotacionar, em torno da origem, um polígono ou qualquer outra estrutura definida por pontos e segmentos de reta, basta efetuar a multiplicação entre a matriz de rotação e a matriz do polígono.

Para rotacionar, em torno da origem, um polígono ou qualquer outra estrutura definida por pontos e segmentos de reta, basta efetuar a multiplicação entre a matriz de rotação e a matriz do polígono.

A seguir, tem-se um polígono com os seguintes vértices $A(2,2), B(6,2), C(6,3), D(4,3)$, $E(4,5)$ e $F(2,5)$, no qual se aplicará um movimento de rotação de 90° em torno da origem. Para isso, deve-se registrar todos os vértices na forma de matricial e fazer a multiplicação de matriz por matriz.

Aplicando a transformação de rotação de 90° no polígono H de vértices $A(2,2), B(6,2)$, $C(6,3)$, $D(4,3), E(4,5)$ e $F(2,5)$, em torno da origem no sentido anti-horário, logo os vértices deverão ser colocados na forma de matriz coluna, na qual os valores de x serão localizados na primeira linha, e os valores de y na segunda linha.

Depois de ter organizado os vértices em forma de matriz coluna, deve-se efetuar a multiplicação pela matriz de rotação $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

A tabela abaixo possui os valores de seno e cosseno dos arcos notáveis, para substituir na matriz, e, em seguida fazer a multiplicação para obter as coordenadas do polígono rotacionado.

x	0	90°	180°	270°	360°
senx	0	1	0	-1	0
cos x	1	0	-1	0	1

Fazendo a substituição $H' = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}90° \\ \text{sen}90° & \cos 90° \end{pmatrix}$, tem-se que:

$H' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, agora deve-se efetuar a multiplicação de matrizes, de acordo com a definição de multiplicação de matriz por matriz.

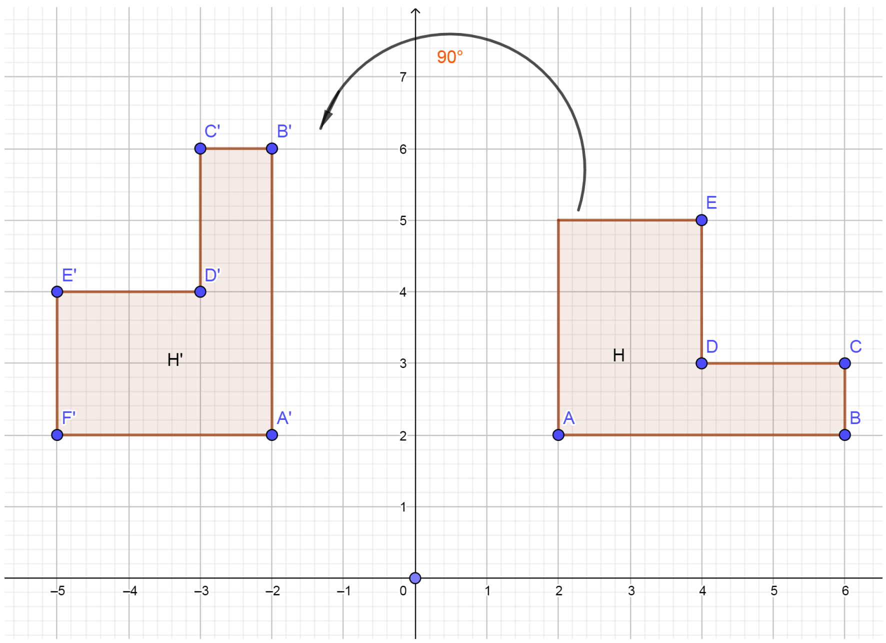
$$H' = \begin{pmatrix} 0-2 & 0-2 & 0-3 & 0-3 & 0-5 & 0-5 \\ 2+0 & 2+0 & 6+0 & 6+0 & 4+0 & 2+0 \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

$$H' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -3 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

Os vértices do polígono rotacionado H' são $A'(-2,2), B'(-2,2), C'(-3,6), D'(-3,6)$, $E'(-5,4)$, e $F'(-5,2)$. Tendo as coordenadas dos vértices do polígono H e H', faz-se necessário localizar os pontos no plano cartesiano, de preferência em papel quadriculado e, em seguida, ligar os pontos para formar os polígonos H e H'.

Na figura 12, apresenta-se o polígono H que sofreu a transformação de rotação de 90°, em torno da origem no sentido anti-horário.

Figura 12 – Polígono Rotacionado



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

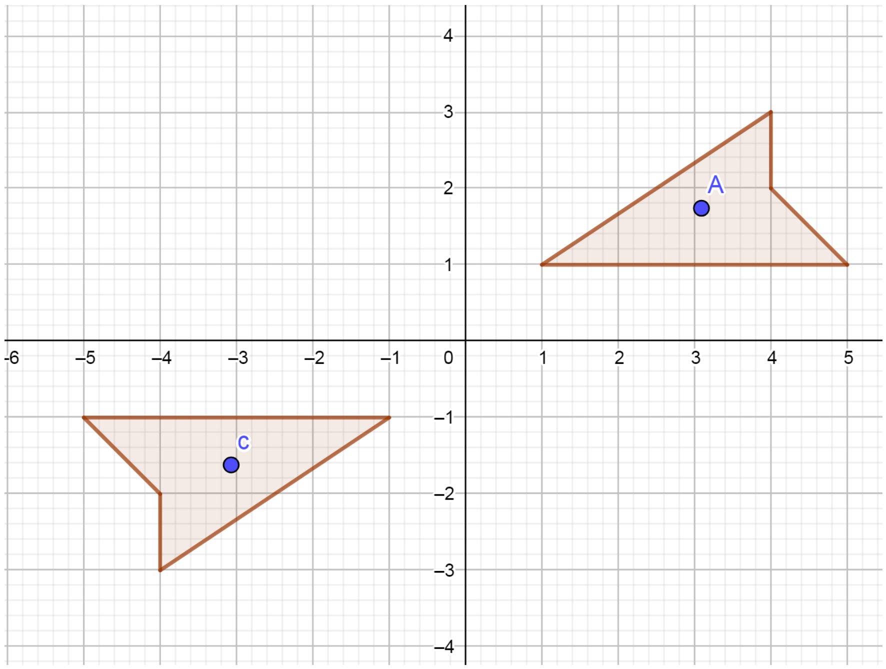
Nesse exemplo, o polígono A sofreu uma rotação de 180° no sentido anti-horário em torno da origem $(0,0)$, dando origem à figura polígono C , que pode ser vista na figura 13.

Os vértices da figura A são: $(1,1),(4,3),(4,2)$ e $(5,1)$ e os vértices da figura C são: $(-1,-1),(-4,-3),(-4,-2)$ e $(-5,-1)$. As matrizes associadas a cada uma dessas figuras são:$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Indica-se a rotação que leva A em C por: $A \to C$, ou seja
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Nesse caso, obtemos a matriz associada à figura C multiplicando a matriz associada à figura A pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que é correspondente a $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}180° \\ \text{sen}180° & \cos 180° \end{pmatrix}$, fazendo a substituição do seno e cosseno dos arcos notáveis, tem-se: $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times$

Figura 13 – Rotação em torno da origem



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & -4+0 & -4+0 & -5+0 \\ 0-1 & 0-3 & 0-2 & 0-1 \end{pmatrix}$, então, pode-se concluir o valor de $C = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Nesse exemplo, foi aplicada a transformação de rotação de 270° no sentido anti-horário nos vértices da figura $A = (1,1), (5,1), (4,2)$ e $(4,3)$. O objetivo aqui é apenas encontrar os vértices da figura rotacionada, logo deve-se construir equação matricial.

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos 270° & -\text{sen}270° \\ \text{sen}270° & \cos 270° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

Substituindo os valores do seno e cosseno:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+1 & 0+2 & 0+4 \\ -1+0 & -5+0 & -4+0 & -4+0 \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

Os vértices são A'= (1,-1), (1-5), (2,-4) e (4,-4).

Para montar os pares ordenados, os valores da primeira linha são os valores de x, e o valores da segunda linha correspondem aos valores de y. Assim, os vértices da figura rotacionada $A' = (1,-1),(1-5),(2,-4)$ e $(4,-4)$.

Sabe-se que um ponto $Q = (x, y)$, após sofrer uma rotação de um ângulo de θ graus em torno da origem, é transformado no ponto Q' de coordenadas (x', y'). Se a rotação ocorre no sentido anti-horário, as coordenadas do ponto Q' podem ser determinadas por multiplicação de matrizes pela equação $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Entretanto, uma rotação pode ocorrer tanto no sentido anti-horário, quanto no sentido horário, e, dessa forma, precisa-se saber como determinar as coordenadas de um ponto após uma rotação em torno da origem também no sentido horário.

As transformações de rotação foram definidas no sentido anti-horário. Para obter uma rotação no sentido horário, portanto, basta redefinir a matriz de transformação por sua transposta. Esse fato decorre da função seno ser ímpar, e a função cosseno ser par, ou seja, $\text{sen}-\theta = -\text{sen}\theta$ e $\cos-\theta = \cos\theta$. Assim, aplicando um ângulo negativo, $-\theta$, para a rotação ser no sentido horário, a transformação de rotação fica sendo:

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos-\theta & -\text{sen}-\theta \\ \text{sen}-\theta & \cos-\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

Desse modo, conclui-se a definição da transformação de rotação da matriz de um ângulo θ em torno da origem, em relação ao sentido horário. A matriz definida por $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é chamada matriz de rotação.

Verifica-se que a matriz de rotação só depende do ângulo θ e não do ponto a ser rotacionado.

No exemplo a seguir, será realizada uma transformação de rotação de 180° na figura Z em torno da origem no sentido horário, que pode ser observado na figura 18. Os vértices da figura $Z = (-1,2),(-3,2),(-5,1),(-4,1)$. Para fazer o movimento rotacional, primeiramente se deve localizar os pares ordenados no plano cartesiano, de preferência em uma malha quadriculada.

Depois de se localizarem os pares ordenados no plano cartesiano, ligam-se os pontos em ordem, para formar a figura. Agora, para descobrir as coordenadas da figura rotacionada, deve-se montar a equação matricial e, em seguida, efetuar-se a multiplicação.

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

$$Z' = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \text{sen}180^\circ \\ -\text{sen}180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

$$Z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

$$Z' = \begin{pmatrix} +1+0 & +3+0 & +5+0 & +4+0 \\ 0-2 & 0-2 & 0-1 & 0-4 \end{pmatrix} \tag{3.85}$$

$$Z' = \begin{pmatrix} +1 & +3 & +5 & +4 \\ -2 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

Assim, obtiveram-se as coordenadas de $Z' = (1, -2), (3-2), (5, -1), (4, -4)$. Agora, marcam-se os pares ordenados no mesmo plano cartesiano do polígono Z, liguando os pontos em ordem, para formar o polígono Z', como na figura 14.

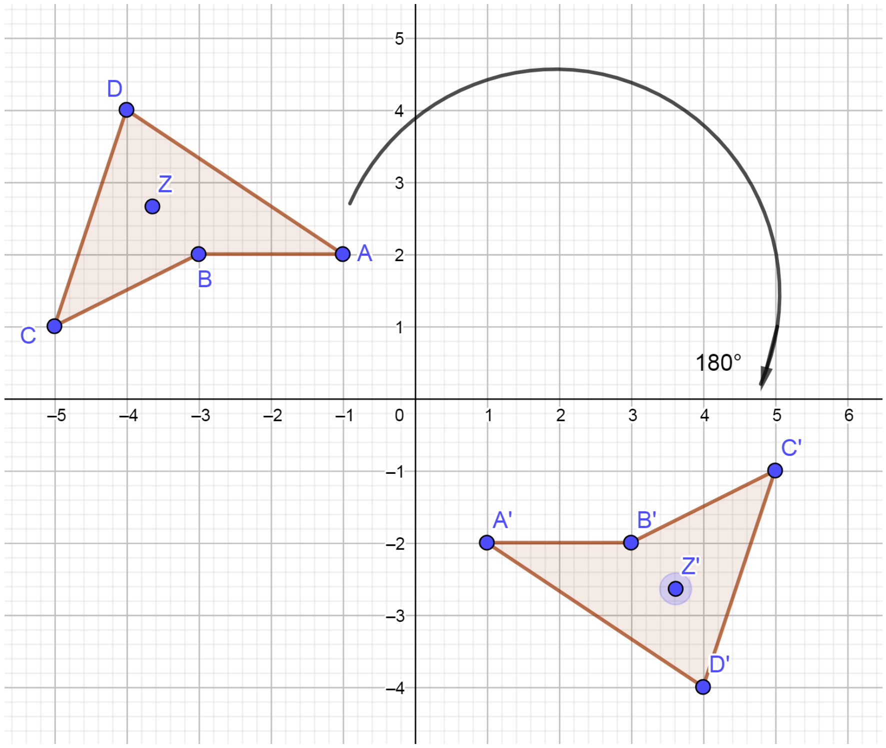
De modo geral, para se obter uma rotação de θ graus no sentido anti-horário em torno da origem $(0, 0)$, de uma figura cuja a matriz associada é dada, por exemplo, por $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, e, para se obter uma rotação de θ graus no sentido horário, em torno da origem $(0, 0)$, basta multiplicar a matriz por $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Quando rotacionamos um ponto, mudamos a sua posição fazendo com que ele descreva um arco de circunferência. As rotações que utilizam a origem como centro do arco da circunferência descrito por esse ponto são chamadas de rotações em torno da origem. Agora, analisa-se a rotação de um determinado ponto arbitrário distinto da origem, que servirá de referência para a rotação. Esse ponto arbitrário será chamado de A_0.

Todavia, é preciso adaptar esse tipo de rotação fazendo com que o problema recaia em uma rotação em torno da origem e, assim, pode-se rotacionar o ponto A a partir das equações já conhecidas para rotações, em torno da origem. Dessa forma, A_0 será transladado para origem.

Como ponto A_0 é distinto da origem, sendo $A'(x', y')$ a imagem do ponto $A(x, y)$ após uma rotação de um ângulo de θ graus em torno do ponto $A_0(x_0, y_0)$, deve-se fazer o seguinte:

Figura 14 – Rotação em torno da origem



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

- Transladar o ponto A e o ponto A_0 pela matriz translação $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. Dessa forma, o ponto A_0 será transladado para a origem.

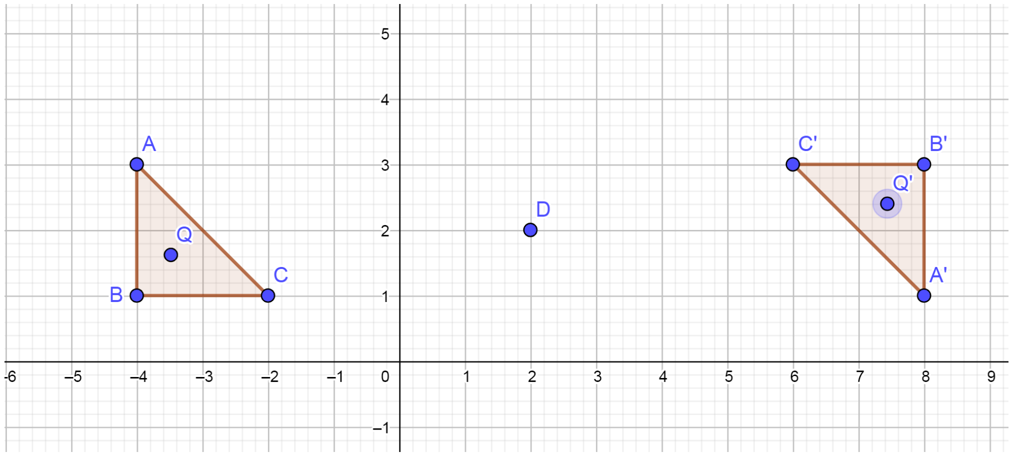
O ponto A será transformado por essa translação no ponto $P = (a, b)$. Após a translação, rotacionar o ponto A em torno da origem obtendo o ponto $P'(a', b')$ e obter as coordenadas do ponto A' transladando o ponto P' pela matriz translação $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Após esse procedimento, o ponto A' passa a ser a imagem do ponto A pela rotação em torno de A_0. A translação final de fato deve ocorrer a partir da matriz $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, pois ela desfaz a translação feita inicialmente.

Na figura 15, o triângulo retângulo com os vértices $A(-4, 3), B(-4, 1)$ e $C(-2, 1)$, sofreu uma rotação de 180° em torno do ponto D, no sentido anti-horário. Assim, obteve-se o triângulo retângulo com os seguintes vértices $A'(8, 1), B'(8, 3)$ e $C'(6, 3)$.

Como o triângulo retângulo sofreu uma rotação de 180° em torno do ponto $D(2, 2)$, no sentido anti-horário, deve- se transladar o ponto D para origem, para fazer isso é necessário colocar o vértice em matriz coluna e fazer a adição pela matriz oposta.

Figura 15 – Rotação em torno do ponto D



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$D + D_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, logo o ponto D será transformado no ponto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que é a origem.

Por essa translação, as coordenadas do triângulo retângulo Q serão transformadas no ponto A da seguinte maneira:

$$A = Q + D_0 \tag{3.87}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

As transformações efetuadas de forma separada são uma tarefa cansativa. Entretanto, existe uma forma de representar as três transformações utilizando apenas uma matriz.

Assim, deve-se ampliar as coordenadas do ponto D_0, pois a soma de matrizes pela definição tem que possuir a mesma ordem, assim, tem-se $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Agora vai ser realizada a transformação de rotação no ponto A sob um ângulo de 180° no sentido anti-horário, e, em seguida, vai ser efetuada a soma com o ponto D para obter o triângulo retângulo Q'. A rotação se dá pela origem, então se pode usar a equação mencionada anteriormente.

$$
\begin{aligned}
Q' &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times A + D \\
Q' &= \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\text{sen}180^\circ \\ \text{sen}180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + D \\
Q' &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.89}
$$

Agora, deve-se efetuar a multiplicação de matriz linha vezes coluna e depois fazer a soma com o vértice D. Como as coordenadas do ponto $D(2,2)$ e o triângulo retângulo Q possuem três vértices, deve-se ampliar esse par ordenado, assim, tem-se:

$$
Q' = \begin{pmatrix} +6+0 & +6+0 & +4+0 \\ 0-1 & 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.90}
$$

$$
Q' = \begin{pmatrix} +6 & +6 & +4 \\ -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.91}
$$

$$
Q' = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.92}
$$

Dessa forma, obtiveram-se as novas coordenadas do triângulo retângulo Q', após a rotação em torno do ponto D, com os seguintes vértices: $A'(8,1), B'(8,3)$ e $C'(6,3)$.

Para fazer a rotação no sentido anti-horário ou horário de um determinado ponto que não seja a origem, faz-se necessário transladar esse ponto para origem, para que se torne uma rotação em torno da origem. Para fazer isso, é necessário colocar o vértice em matriz coluna e fazer a adição pela matriz oposta.

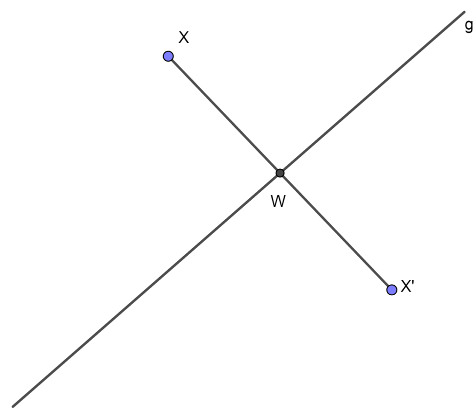
3.3.3 Reflexão

É uma transformação geométrica do ponto, da reta, do plano ou do espaço que "espelha"todos os pontos em relação, respectivamente, a um ponto, uma reta ou um plano, transformando o ponto, a reta ou o plano num outro, que lhe é simétrico em relação ao eixo dado.

> "Uma transformação de reflexão do ponto, da reta, do plano ou do espaço consiste em espelhar um objeto em relação a uma reta. Mais precisamente uma reflexão no plano é uma simetria ortogonal em relação a uma reta, chamada de eixo de simetria. As transformações de reflexão, diferentemente das demais transformações geométricas, são evolutivas, ou seja, uma transformação de reflexão e sua inversa são iguais".Pereira (2017, p. 30)[51].

Seja uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $Rr : \Pi \to \Pi$, definida por: $Rg(X) = X$, para todo seja $X \in g$ e, para $X \notin g, Rg(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta g. Em outras palavras, seja W o pé da perpendicular baixada de X sobre g. Então W é o ponto médio do segmento XX'.

Figura 16 – Reflexão em torno da reta g



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

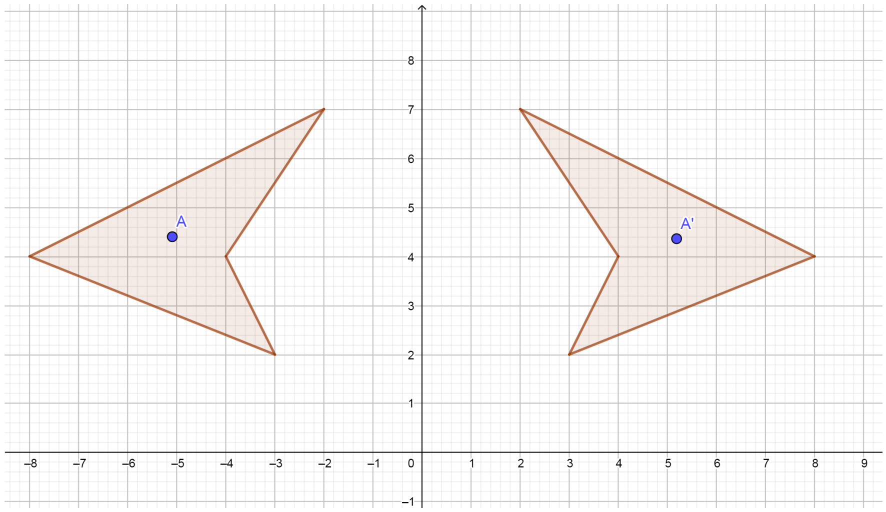
Para aplicar algumas transformações de reflexão no plano, $R : R^2 \times R^2$, devem-se seguir os seguintes passos.

- Reflexão em torno do eixo x, logo $R_x(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Reflexão em torno do eixo y, logo $R_y(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Reflexão em torno de $y = x$, logo $R_{x=y} = (x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Para mostrar que reflexão é uma isometria, demonstrar-se-ão os três casos mencionados anteriormente. Observe-se o diagrama da figura 17, na qual a figura A sofreu uma reflexão em relação ao eixo y dando origem à figura A'.

Assim, conforme a figura 17, são os vértices da figura $A = (-3, 2), (-4, 4), (-2, 7)$ e $(-8, 4)$ e os vértices da figura $A' = (3, 2), (4, 4), (2, 7), (8, 4)$. Desse modo, a partir das coordenadas do vértice, podem-se construir as matrizes associadas às figuras A e A':

Figura 17 – Reflexão em relação ao eixo y



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$$\text{A}=\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

A reflexão que leva A em A' é indicada por: $A \rightarrow A'$, ou seja, $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, nesse caso a reflexão ocorreu em relação ao eixo y. Para obter a matriz de A' , deve-se multiplicar a matriz de A pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

$$A' = \begin{pmatrix} +3+0 & +4+0 & +2+0 & +8+0 \\ 0+2 & 0+4 & 0+7 & 0+4 \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

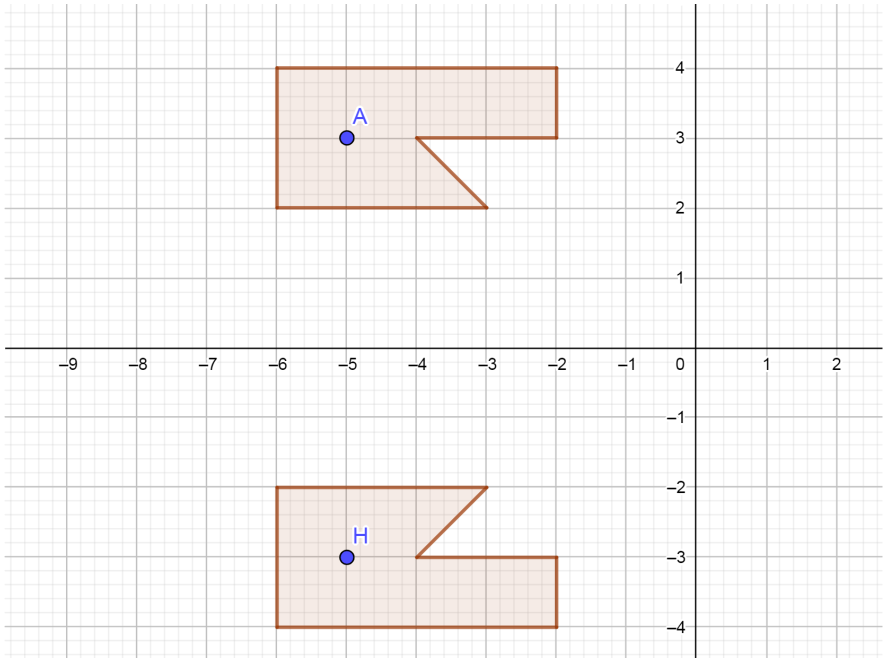
$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

No segundo caso, a reflexão do polígono A vai ocorrer em relação ao eixo x, obtendo o polígono H, como descrito na figura 18.

Vértices da figura $A = (-6, 4), (-6, 2), (-3, 2), (-4, 3), (-2, 3)$ e $(-2, 4)$ e os vértices da figura H $(-6, -4), (-6, -2), (-3, -2), (-4, -3), (-2, -3)$ e $(-2, -4)$, logo as matrizes associadas a essas figuras são:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\ \text{H}=\begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Figura 18 – Reflexão em relação ao eixo x



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A reflexão que leva A em H é indicada por:
$A \rightarrow H$, ou seja, $A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow H = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Nesse caso a reflexão em relação ao eixo x, pode-se obter a matriz de H multiplicando a matriz A pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, logo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

$$H = \begin{pmatrix} -6+0 & -6+0 & -3+0 & -4+0 & -2+0 & -2+0 \\ 0-4 & 0-2 & 0-2 & 0-3 & 0-3 & 0-4 \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

$$H = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

No terceiro caso, será aplicada a transformação de reflexão em torno da reta $y = x$ sobre o polígono V. As coordenadas dos vértices do polígono V são $A(9,4), B(9,1), C(13,1), D(13,4)$ e $E(11,7)$. Para obter as coordenadas dos vértices do polígono V', deve-se montar a matriz V e efetuar a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então:

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 9 & 13 & 13 & 11 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

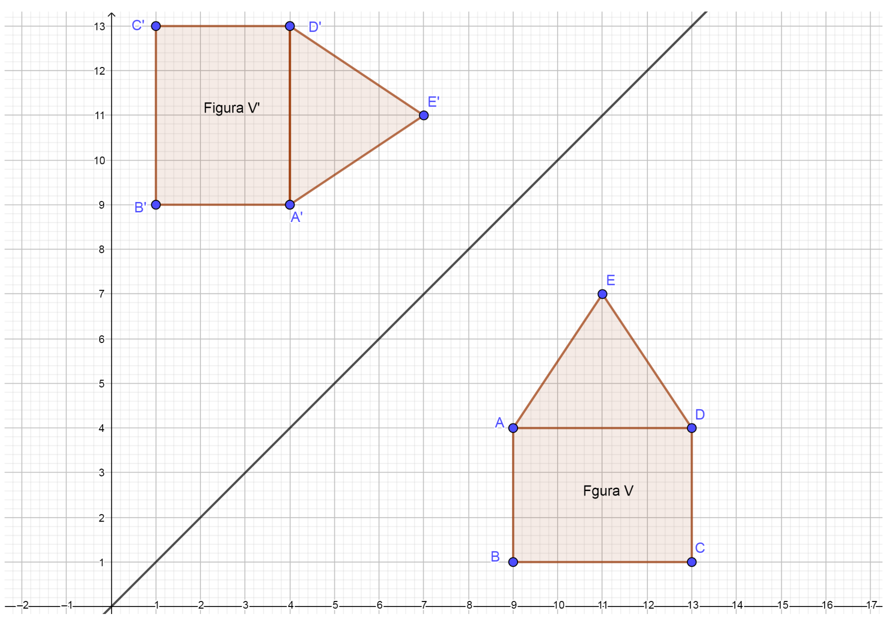
$$V' = \begin{pmatrix} 0+4 & 0+1 & 0+1 & 0+4 & 0+7 \\ 9+0 & 9+0 & 13+0 & 13+0 & 11+0 \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

$$V' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 13 & 13 & 11 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

Assim, as coordenadas do vértice da figura V', após a transformação de reflexão são $A'(4,9)$, $B'(1,9), C'(4,9), D'(4,13)$ e $E'(7,1)$. Para visualizar essa transformação, basta localizar os pares ordenados da figura V e V' no mesmo plano cartesiano, de preferência em folha de papel quadriculado, liguando os pontos em ordem para formar a figura V e V'.

Uma reflexão em torno da reta $y = x$ é a transformação que reflete cada ponto do plano em torno da reta $y = x$, que, por sua vez, faz o papel de espelho, ou seja, os pontos cujas coordenadas são (x, y) da figura original transformarão nos pontos (y, x) do novo polígono, sendo vistos na figura 19.

Figura 19 – Transformação de reflexão da figura V para V'

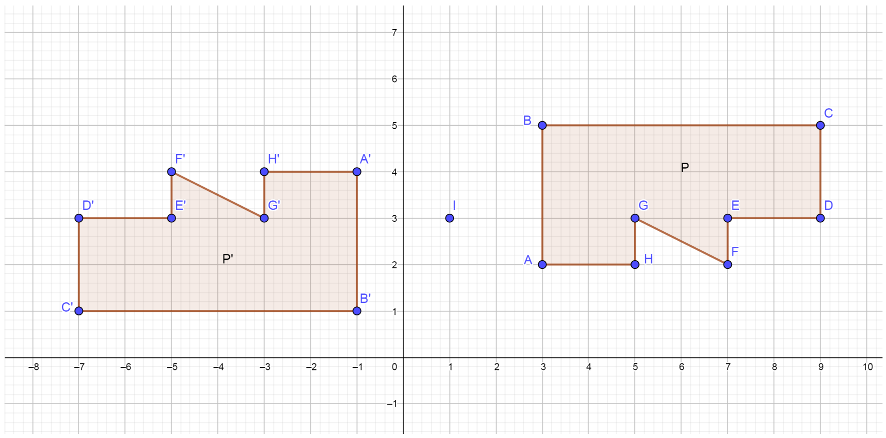


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A reflexão em relação a um ponto é o mesmo proceder, que simetria de rotação de 180°. Esse movimento, em que um objeto gira em torno de um ponto, chama- se rotação. Na simetria de rotação a figura toda gira em torno de um ponto que pode estar na figura ou fora dela, e cada ponto da figura percorre um ângulo com vértice nesse ponto.

Para entender melhor essa definição, na figura 20 observa-se a transformação de reflexão no sentido anti-horário a 180° em um polígono P com as seguintes coordenadas de vértice $A(3,2), B(3,5), C(9,5), D(9,3), E(7,3), F(7,2), G(5,3)$ e $H(5,2)$, em torno de ponto I, e polígono P' com as seguintes coordenadas de vértice $A'(-1,4), B'(-1,1), C'(-7,1), D'(-7,3),$ $E'(-5,3), F'(-5,4), G'(-3,3)$ e $H'(-3,4)$.

Figura 20 – Transformação de reflexão em torno do ponto I



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A reflexão em relação a um ponto é a o mesmo proceceder, que simetria de rotação, qual pode ocorrer no sentido anti-horário ou no sentido horário. Se a rotação for em torno da origem, deve-se efetuar a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, onde θ é o ângulo de rotação.

Não obstante, se a transformação de reflexão for em torno da origem no sentido horário deve-se efetuar a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Contudo, se o ponto não estiver na origem, assim como já foi mencionado anteriormente, faz-se necessário transladar esse ponto para origem, tornando-se uma rotação em torno da origem.

Primeiramente, é necessário transladar o ponto I para origem. Para isso, basta efetuar a soma com a sua matriz oposta, que vai ser Z, logo:

$$\begin{gathered} O = I + Z \\ O = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{3.102}$$

Na sequência, é preciso montar a matriz com as coordenadas do polígono P, e, em seguida, somar com a matriz oposta, que foi chamada de Z, então:

$P + Z$, nesse caso, a ordem da matriz P é 2×7 e a matriz Z é 2×1. No entanto, para que haja soma de matrizes, elas devem possuir a mesma ordem, portanto, nesse caso se devem ampliar os valores de Z.

$$P + Z = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 9 & 7 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$P + Z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 & 6 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

Agora, é preciso aplicar a transformação rotacional de 180° em torno do ponto I no sentido anti-horário. Assim, deve-se multiplicar a matriz de rotação com o resultado da matriz anterior, assim:

$$P' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 & 6 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + I \tag{3.104}$$

$$P' = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\text{sen}180^\circ \\ \text{sen}180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 & 6 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + I \tag{3.105}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 8 & 6 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -8 & -8 & -6 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

Para finalizar, é necessário as coordenadas do vértice do polígono P'. Para tanto, deve-se efetuar a soma com as coordenadas do ponto I, logo:

$$P' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -8 & -8 & -6 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times7} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2\times1} \tag{3.107}$$

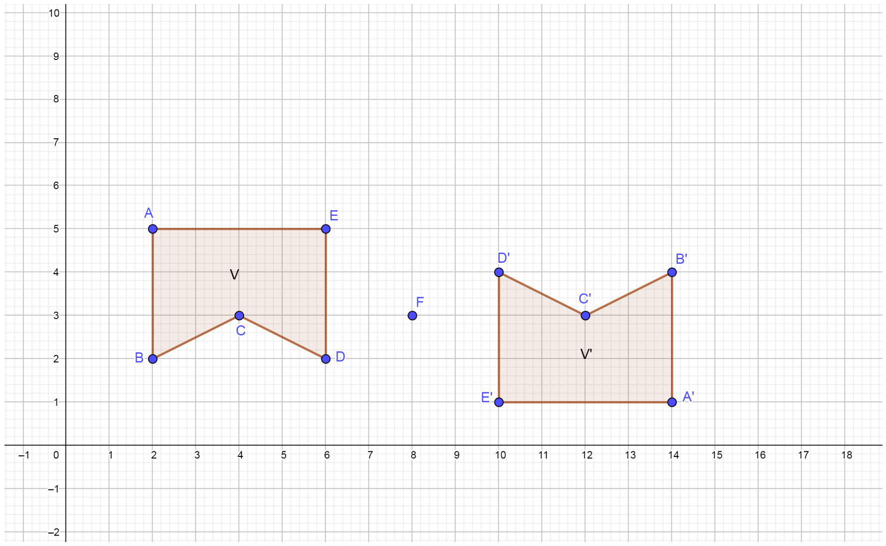
$$P' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -8 & -8 & -6 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times7} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{2\times7} \tag{3.108}$$

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -7 & -7 & -5 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.109}$$

Observe-se novamente que, para efetuar a soma das matrizes, teve-se que ampliar as coordenadas do ponto I, para que elas ficassem com a mesma ordem, e dessa forma, obtivessem as novas coordenadas do polígono de reflexão.

Na figura 21, é possível observar a transformação de reflexão no sentido horário de 180° em um polígono V com as seguintes coordenadas de vértice $A(2,5), B(2,2), C(4,3), D(6,2)$ e $E(6,5)$, em torno de ponto F, e o polígono V' com as seguintes coordenadas de vértice $A'(14,1), B'(14,4), C'(12,3), D'(10,4)$ e $E'(10,1)$. Assim, se a transformação de reflexão

Figura 21 – Transformação de reflexão em torno do ponto F



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

for em torno da origem no sentido horário, deve-se efetuar a multiplicação pela matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Contudo, se o ponto não estiver na origem, faz-se necessário transladar esse ponto para origem, para a que se torne uma rotação em torno da origem. Para fazer isso é necessário colocar o vértice em matriz coluna e fazer a adição pela matriz oposta.

Nesse caso, é preciso transladar o ponto $F(8,3)$ para origem. Para tanto, deve-se efetuar a soma com a sua matriz oposta que vai ser Z, logo:

$$O = F + Z$$
$$O = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

Depois deve-se construir a matriz com as coordenadas do polígono V, e em seguida somar com a matriz oposta, que foi chamada de Z, então:

$$V + Z \tag{3.111}$$

Nesse caso, a ordem da matriz V é 2×5 e a matriz Z é 2×1, mas, afim de que haja a soma de matrizes, elas devem possuir a mesma ordem. Assim, devem-se ampliar os valores de Z.

$$V + Z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \tag{3.112}$$

$$V + Z = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

Agora, aplica-se a transformação rotacional de 180° em torno do ponto F no sentido horário. Nesse caso, deve-se multiplicar a matriz de rotação com o resultado da matriz $V + Z$, assim:

$$V' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} + F \tag{3.114}$$

$$V' = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & \text{sen}180^\circ \\ -\text{sen}180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} + F \tag{3.115}$$

$$V' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6 & +6 & +4 & +2 & +2 \\ -2 & +1 & 0 & +1 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

Para finalizar, determinam-se as coordenadas do vértice do polígono V', ou seja, deve-se efetuar a soma com as coordenadas do ponto F em sua forma ampliada, logo:

$$V' = \begin{pmatrix} +6 & +6 & +4 & +2 & +2 \\ -2 & +1 & 0 & +1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 5} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 5} \tag{3.117}$$

$$V' = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 12 & 10 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.118}$$

De modo geral, para se obter a reflexão em relação ao eixo y de uma figura cuja a matriz associada é dada, por exemplo, $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$, deve-se efetuar a multiplicação: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$.

Por outro lado, para se obter a reflexão em relação ao eixo x de uma figura cuja a matriz associada é dada, por exemplo, $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & k & l \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & k & l \end{pmatrix}$.

Agora, para se obter a reflexão em torno da reta $y = x$ de uma figura cuja a matriz associada é dada, por exemplo $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & k & l \end{pmatrix}$, basta efetuar a multiplicação: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & k & l \end{pmatrix}$.

O termo reflexão muitas vezes é apresentado a partir de uma interpretação que envolve o reflexo de um espelho, e, por isso, muitas vezes é chamado de espelhamento. Geometricamente existem dois tipos de reflexões: a reflexão em relação a um ponto e a reflexão em relação a uma reta.

3.3.4 Homotetia

Atualmente, com o avanço da tecnologia, uma atividade que ganha cada vez mais importância é a manipulação de imagens, tais como: alterações em sua cor, luminosidade, contraste, dentre outras. Um tipo de manipulação que se destaca é a alteração nas dimensões de uma imagem ampliando ou reduzindo o seu tamanho original. No presente texto, pretende-se abordar escala definida como uma alteração realizada nas dimensões de uma imagem, a qual nominar-se-á “processo de transformação de escala”.

A dilatação é um tipo de transformação geométrica de escala, que altera o tamanho da figura, mas mantém as características principais, como forma e os ângulos, ou seja, é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo.

Nas transformações de escala, tem-se que os escalares S_x e S_y são números reais positivos. Assim, quando eles variam no intervalo $(0, 1)$, temos um redução da dimensão correspondente, e, se S_x e S_y forem maiores que 1 haverá um aumento.

Caso o fator seja igual a 1, a imagem não sofre nenhuma alteração em relação ao eixo correspondente ao fator de escala. Destaca-se que fatores de escala menores que 0 não serão abordados neste estudo.

Nem todas as transformações geométricas preservam distâncias como foram apresentadas até o presente momento. Acompanhe-se o caso a seguir:

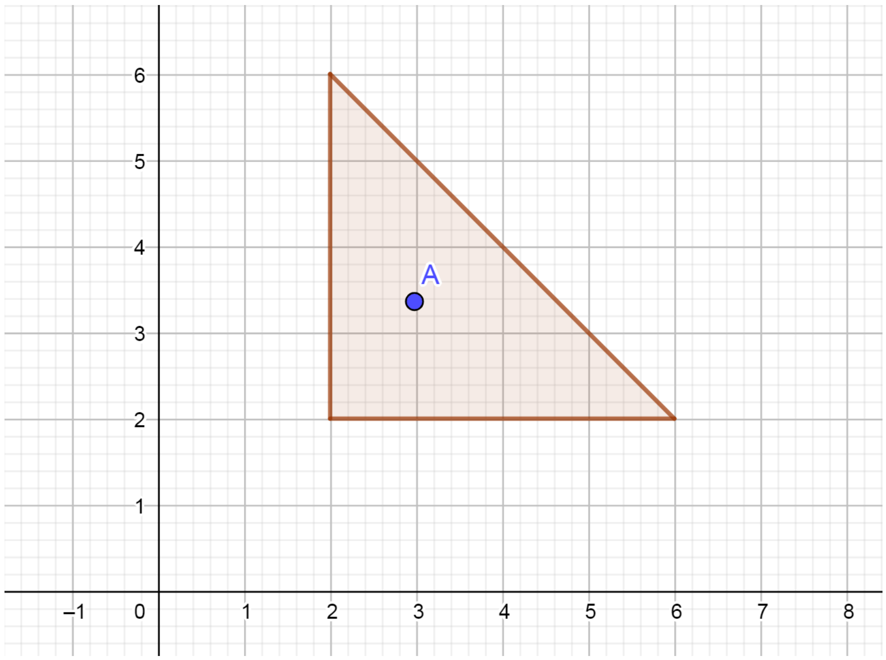
Considerando a mudança de escala de um ponto $P(x, y)$ em relação à origem e, usando um fator multiplicativo S_x para a coordenada x, bem como um fator multiplicativo S_y para a coordenada y. Ter-se-á a matriz $A = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$ e a matriz $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, com isso, encontra-se $H = A \times P$.

Desse modo, as coordenadas do vértice da figura, após sofrerem uma transformação de escala, serão dadas pela equação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.119}$$

Nas transformações de escala em que $S_x = S_y$, as deformações na imagem ocorrem de forma idêntica em relação aos eixos ordenados O_x e O_y. A imagem que recebe esse tipo de transformação tem as suas medidas modificadas de forma proporcional. A essa transformação de escala damos o nome de expansão ou contração uniforme, isso pode ser observado na região triangular A a seguir na figura 22.

Figura 22 – Figura triangular



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Pode-se aplicar transformação escala a todos os pontos $P(x, y)$, onde essa figura foi aumentada em 100% nas direções dos eixos O_x e O_y, para isso, foi preciso multiplicar por 2. Assim, tem-se $S_x = 2$ e $S_y = 2$, e os vértices da figura $A = (2, 2), (2, 6)$ e $(6, 2)$ que pode ser verificado geometricamente na figura 23, logo:

$$G = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \times A \tag{3.120}$$

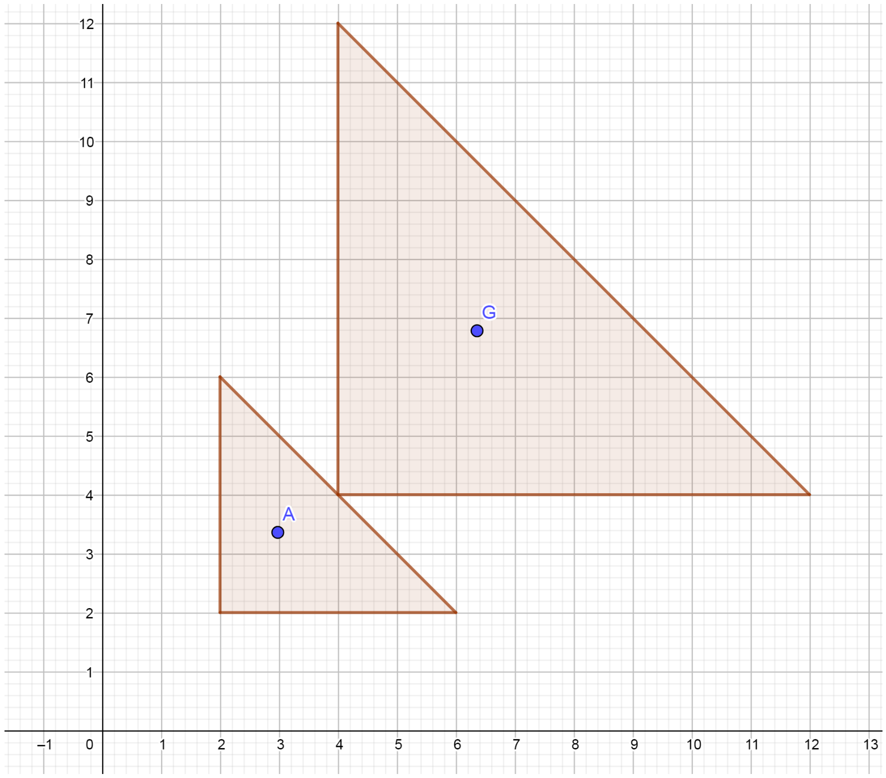
$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4+0 & 4+0 & 12+0 \\ 0+4 & 0+12 & 0+4 \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

Na figura 23, é possível observar a transformação escalar de fator 2 no polígono A que, e assim, gerou o polígono G, é possível perceber as matrizes associadas às figuras $A =$

Figura 23 – Transformação escalar fator 2



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$, isso significa que os vértices da figura $A = (2,2), (2,6)$ e $(6,2)$, enquanto da figura $G = (4,4), (4,12)$ e $(12,4)$.

Nesse âmbito, pode surgir o seguinte questionamento: qual é a relação entre a área da figura inicial A e a área da figura transformada G?

Para responder a essa questão, calcular-se-á a área S de cada triângulo, lembrando que $S = \dfrac{b \times h}{2}$

- Área de $A = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$
- Área de $G = \dfrac{8 \times 8}{2} = 32$

Então, pode-se concluir que a área da figura transformada G é 4 vezes maior que da figura A. Também se pode provar que a figura A e a figura transformada G são semelhantes.

Verifica-se que, nas duas transformações, as alterações nas dimensões do triângulo retangular foram proporcionais, resultando em uma igualdade entre as razões de segmentos correspondentes do triângulo retângulo original e do triângulo retângulo transformado, como por exemplo $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \dfrac{4}{4} = \dfrac{8}{8} = 1$. Dessa forma, concluímos que os triângulos A e G são semelhantes.

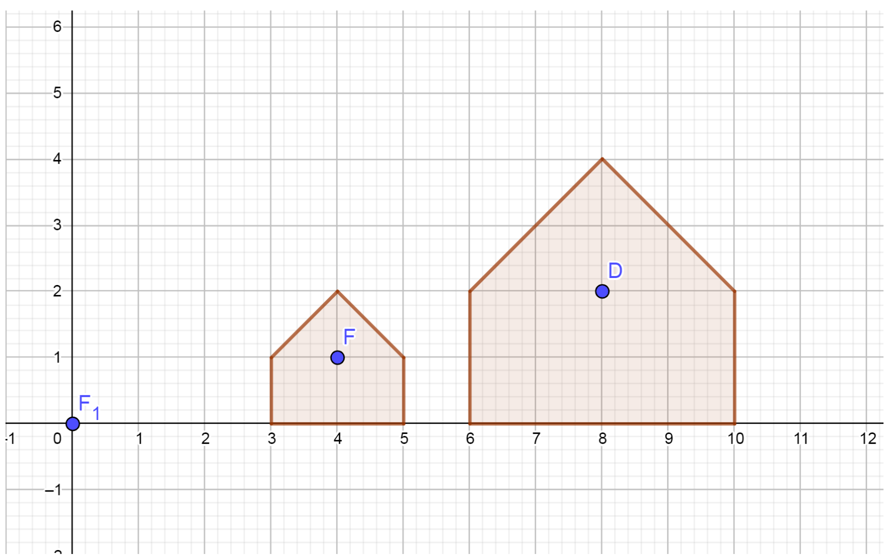
Nas transformações de homotetia (escala) em que $S_x = S_y$, as deformações na imagem ocorrem de forma idêntica, em relação aos eixos ordenados O_x e O_y. A imagem que recebe esse tipo de transformação tem as suas medidas modificadas de forma proporcional. Contudo, podem ocorrer transformações de escala a que se dá o nome de expansão ou contração uniforme.

Para melhor compreensão de transformação escalar em que $S_x = S_y$, vai ser aplicada uma transformação escalar que varia no intervalo $(0, 1)$. Assim, tem-se uma redução da dimensão correspondente.

Na figura 24, tem-se uma figura D que sofreu uma transformação escalar, onde ela diminuiu 50% nas direções dos eixos O_x e O_y. Para isso ocorrer, foi preciso multiplicar por $0,5$.

Assim, tem-se $S_x = 0,5$ e $S_y = 0,5$, no qual seus vértices $D = (6, 0), (6, 2), (8, 3), (10, 2)$ $(10, 0)$ e $F = (3, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 1)$ e $(5, 0)$.

Figura 24 – Transformação escalar fator 0,5



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

As matrizes associadas às figuras F e D anteriores são: $D = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, logo, tem-se:

$$F = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \times D \qquad (3.124)$$

$$F = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

Nas transformações de escala em que $S_x = S_y$, as deformações na imagem ocorrem de forma idêntica em relação aos eixos ordenados O_x e O_y.

A imagem que recebe esse tipo de transformação tem as suas medidas modificadas de forma proporcional. Entretanto, podem ocorrer transformações de escala em que $S_x \neq S_y$.

Agora, analisar-se-ão as transformações de escala quando $S_x \neq S_y$ em relação à origem.

- A transformação de escala com relação à coordenada x é definida por $S_x : S_x(x, y) = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sendo $\theta \in R^*$.
- A transformação de escala com relação à coordenada y é definida por $S_y : S_y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sendo $\theta \in R^*$.

No exemplo a seguir, será aplicada a transformação de escala em relação ao eixo x, para $S_x = 2$, em relação ao uma figura P com os seguintes vértices $A(2, 5), B(2, 1), C(6, 1), D(6, 2)$, $E(3, 2)$ e $F(3, 5)$. Para tanto, precisa-se aplicar a transformação de escala, e, assim, montar a equação matricial para, em seguida, fazer a multiplicação de matrizes, de modo que a nova figura vai ser chamada de P', então:

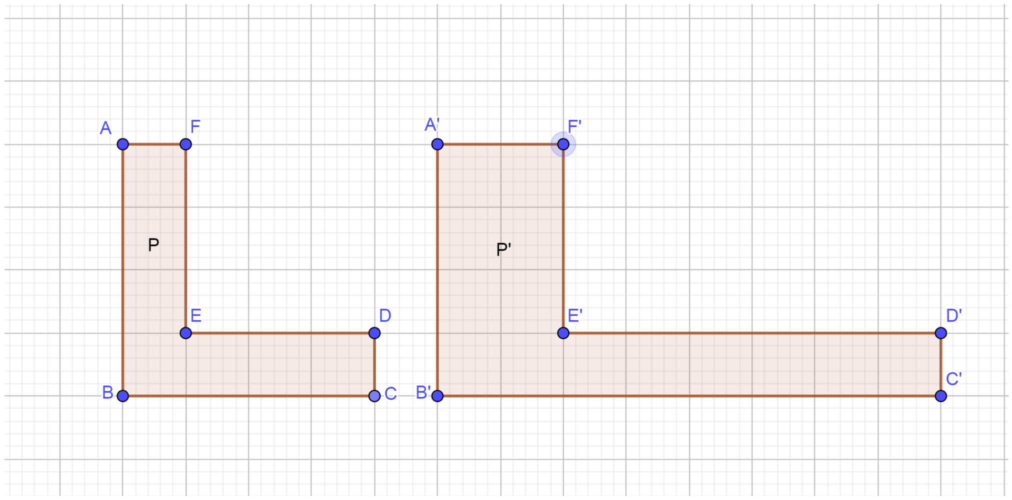
$$P' = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.128}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{3.129}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 & 12 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{3.130}$$

Assim, as coordenadas do polígono transformado P' são $A'(4, 5), B'(4, 1), C'(12, 1), D'(12, 2)$,$E'(6, 2)$ e $F'(6, 5)$. Para verificar o polígono transformado, devem-se localizar os pares ordenados de P e P' no plano cartesiano, pode-se utilizar uma malha quadriculada, e ligar os pontos para formar as figuras P e P', como pode ser visto na figura 25.

Figura 25 – Transformação escalar de P para P'



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Nesse tipo de transformação escalar somente os valores da coordenada x sofreram a transformação enquanto as coordenadas de y permaneceram sem alterações.

No entanto, pode ocorrer o contrário, ser aplicada a transformação escalar somente nos valores da coordenada y, enquanto as coordenadas de x permanecem sem alterações, como visto no exemplo da figura 26.

No exemplo da figura 26, foi aplicada uma transformação escalar no triângulo T com os seguintes vértices $A(-1,0), B(0,1)$ e $C(1,0)$ em relação ao eixo y, para $S_y = 3$.

Assim, aplicando a transformação de escala, tem-se a equação matricial e, em seguida, deve-se fazer a multiplicação de matrizes, e a nova figura será chamada de T', então:

$$S_y(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.131}$$

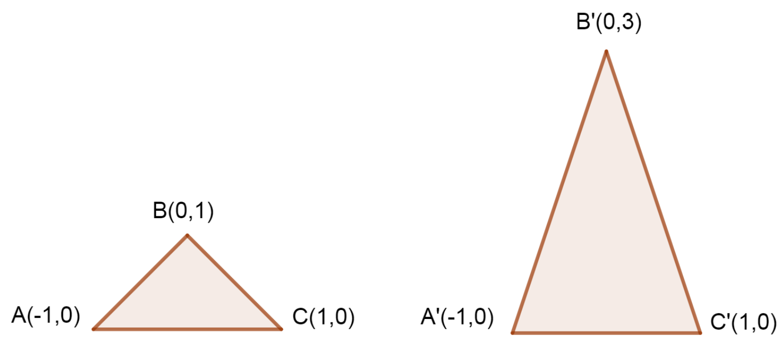
$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.132}$$

$$T' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.133}$$

Desse modo, os vértices do polígono T' transformado é $A'(-1,0), B'(0,3)$ e $C'(1,0)$. Na figura 26, pode-se conferir como ficou essa transformação escalar do polígono T para T'.

Na figura 26, somente os valores da coordenada y sofreram a transformação escalar, enquanto as coordenadas de x permaneceram sem alterações. Todos os exemplos mencionados anteriormente, de transformações escalares para $S_x = S_y$ e $S_x \neq S_y$ foram aplicados em torno da origem.

Figura 26 – Transformação escalar de T para T’



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A transformação de escala é geralmente aplicada tendo a origem como ponto de referência, porém, pode-se determinar um ponto arbitrário distinto da origem que servirá de referência para a transformação escalar.

Caso isso ocorra, deve-se transladar esse ponto arbitrário para a origem, de maneira que o problema recaia em uma transformação de escala em relação à origem.

Sendo $A_0 = (x_0, y_0)$, ponto distinto da origem e, o ponto de referência para a transformação de escala, os seguintes procedimentos devem ser tomados:

- Transladar os pontos (x, y) que pertencem à imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. Dessa forma, A_0 será transladado para a origem.

- Aplicar a transformação de escala em relação à origem e, depois, transladar os pontos (x, y) que pertencem à imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_o \end{pmatrix}$.

Para compreender melhor a transformação escalar, em relação a um ponto arbitrário, aplica-se a transformação escalar no triângulo K, que possui os seguintes vértices $A(2, 1)$, $B(4, 3)$ e $C(6, 1)$, em torno do ponto $D(8, 3)$.

Deve-se transladar o ponto D para origem, para fazer isso é preciso montar as matrizes em forma de coluna e fazer a adição pela matriz oposta.

$$O = D + D_0$$
$$O = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.134}$$

Logo, o ponto D foi transladado para a origem e, será transformado no ponto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que é a origem.

Por essa translação, as coordenadas do triângulo K serão transformadas no ponto A, onde os vértices K devem ser colocados em forma de coluna.

Em seguida, deve-se fazer a adição com a matriz oposta da seguinte maneira:

$$A = K + D_0$$

Para fazer a adição de K com a matriz oposta D_0, deve-se ampliar as coordenadas do ponto D_0, pois a soma de matrizes, por definição, tem que possuir a mesma ordem, assim, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \tag{3.135}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.136}$$

Agora se aplica a transformação escalar, com fator 2 nas direções dos eixos O_x e O_y no triângulo K, como já foi mencionado anteriormente, para $S_x = S_y$ em torno da origem.

Em seguida, deve-se fazer a soma de cada vértice, com as coordenadas do ponto $D(8, 3)$, para obter as coordenadas do triângulo transformado, que será chamado de K'.

$$K' = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \times A + D \tag{3.137}$$

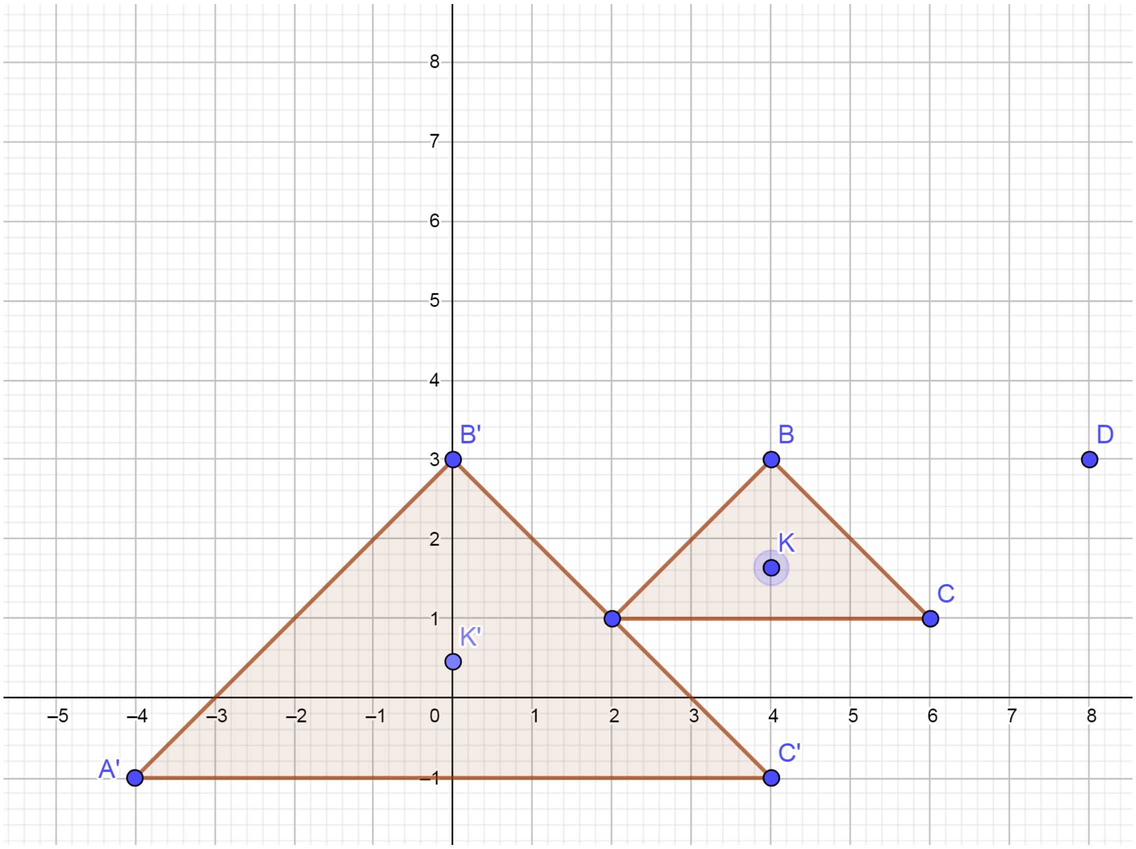
$$K' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.138}$$

$$K' = \begin{pmatrix} -12 & -8 & -4 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.139}$$

$$K' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.140}$$

Assim, após aplicação da transformação escalar no triângulo K, obteve-se o triângulo K' com as seguintes coordenadas $A'(-4, -1), B'(0, 3)$ e $C'(4, -1)$. Desse modo, na figura 27, pode-se observar como era a figura K antes e como ficou após a sua transformação.

Figura 27 – Transformação escalar em relação ao ponto D



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Dessa maneira, obtiveram-se as novas coordenadas do triângulo K', após transformação escalar em torno do ponto D. Portanto, sempre que se desejar fazer uma transformação escalar, de um ponto qualquer que não seja a origem, deve-se sempre transladar o ponto para origem e seguir os passos já descritos no texto anteriormente.

Capítulo 4

Atividades da sequência didática

A partir de agora, trazemos uma possibilidade de aplicar as propriedades de matrizes, ligadas à Álgebra, com as transformações geométricas com o uso do GeoGegra.

4.1 Atividade 01

4.1.1 Translação

Aplicação de soma e diferença de matrizes utilizando transformações geométricas e os recursos do GeoGebra.

4.1.2 Objetivos

Compreender e aplicar transformações geométricas a partir de um ponto no plano.

Translação é uma isometria, ou seja, uma figura desliza em um plano, em linha reta, em qualquer direção sem girar. Com isso, os pontos se movem em linhas paralelas formando a imagem da figura original, no qual todos os pontos da figura obtida por translação são equidistantes da figura original.

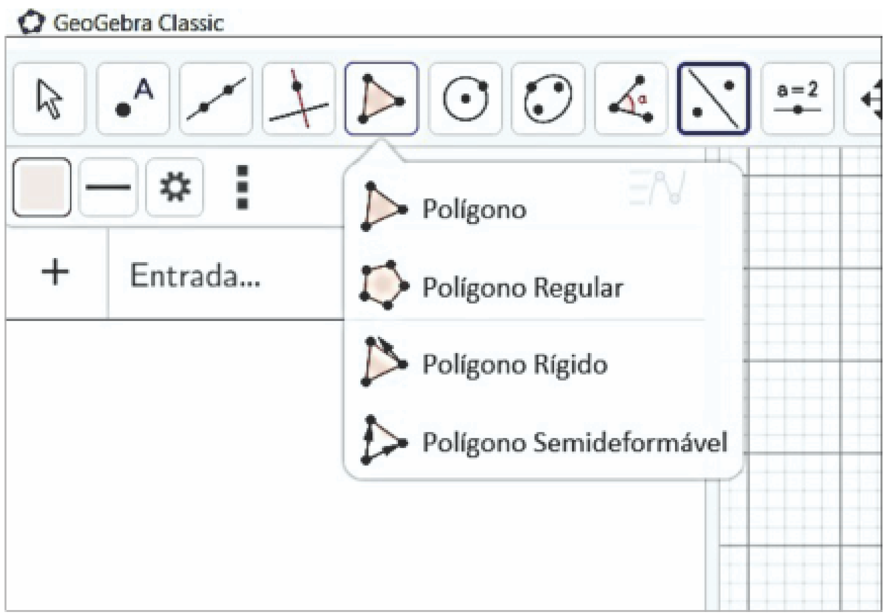
Nesta atividade, o objetivo é formalizar a definição de translação e visualizar a construção das figuras geométricas no *software* bem como perceber a translação da figura construída.

Assim, inicialmente abrir-se-á o GeoGebra. Depois, deve-se buscar na parte superior, nas barras de ferramentas, a ferramenta polígono. Em seguida, escolhe-se um polígono e colocam-se suas coordenadas, como pode ser observado na figura 28 a seguir.

4.1.3 Aplicação

Para apresentação dessa transformação geométrica, foi utilizado o polígono quadrado como exemplo trazido na figura 28.

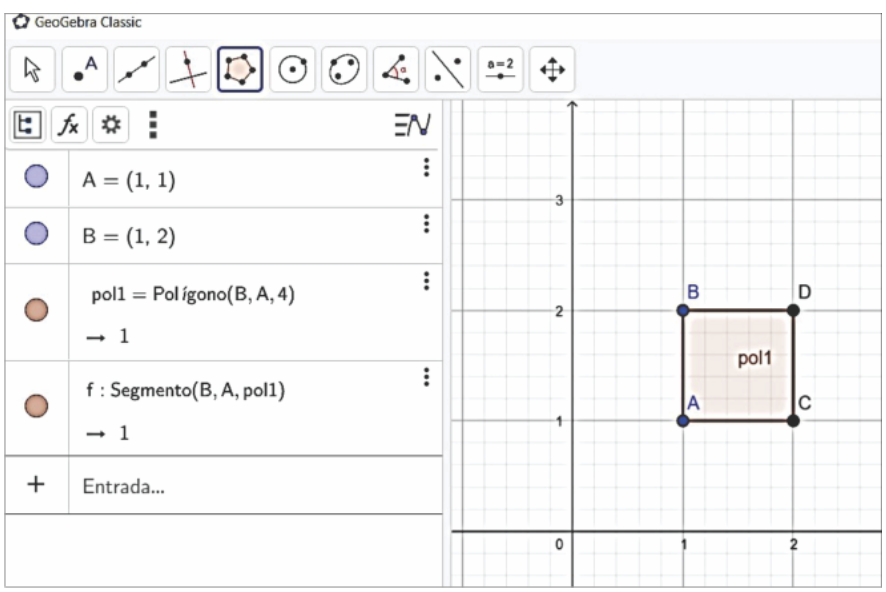
Figura 28 – Ferramenta Polígono



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Abre-se, então, um quadrado de vértices $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, 1)$. $D = (2, 2)$

Figura 29 – Quadrado

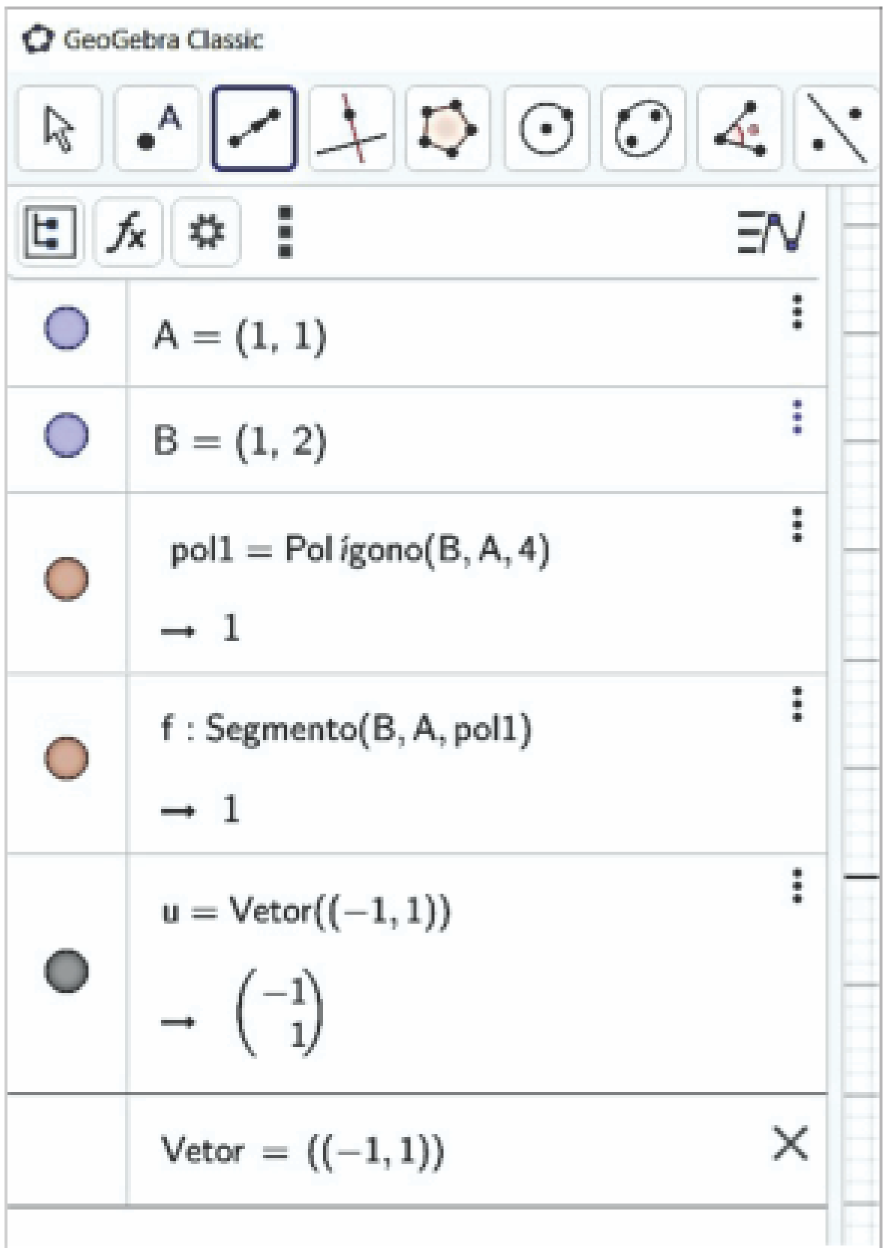


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Depois, busca-se no GeoGebra o comando "Transladar", este pode ser utilizado como um vetor para orientar o caminho da translação.

Cria-se, então, um vetor "u"qualquer, tal como: $u = (-1, 1)$, para indicar a direção em que o polígono será transladado.

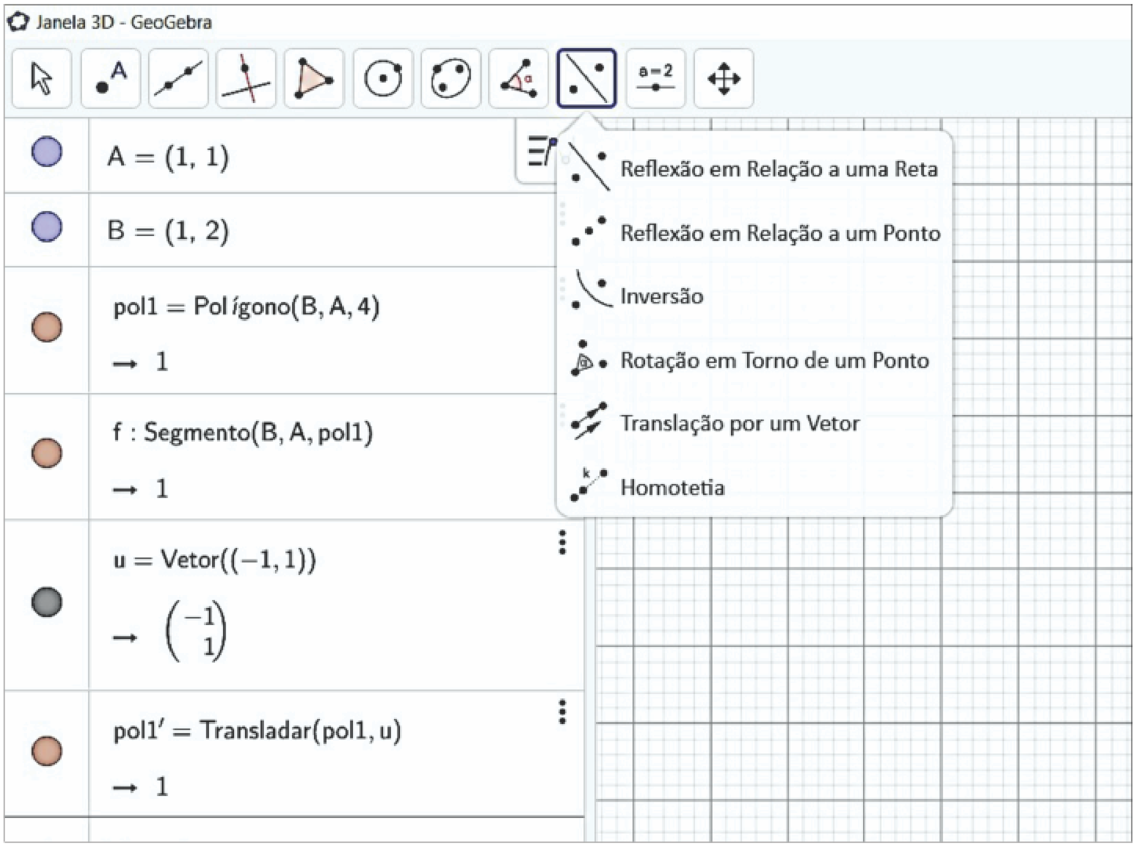
Figura 30 – Ferramenta polígono Transladar



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Em seguida, utiliza-se a ferramenta “Transladar”ou o comando na caixa de entrada.

Figura 31 – Translação por um vetor



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

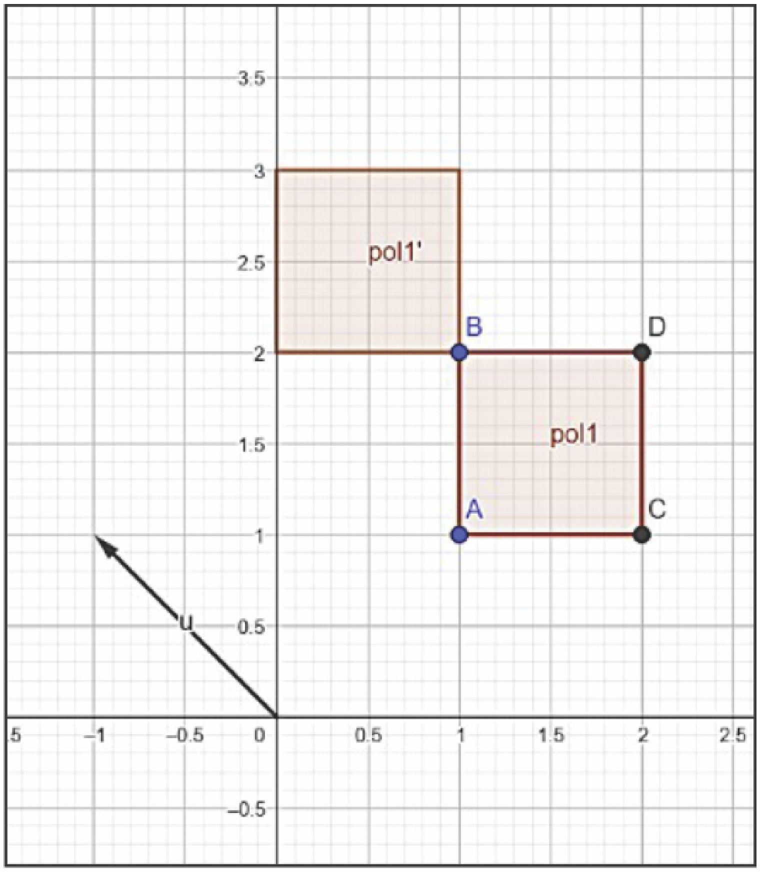
Depois disso, no GeoGebra, deve-ser abrir a janela de gráfico para visualizar o polígono, que foi transladado, como visto na figura 32, a seguir.

Neste momento, o professor pode aproveitar e mostrar que o vetor $u(-1, 1)$, representa o deslocamento ao longo do eixo x e y, em que o eixo x deslocou -1 unidade para a esquerda na horizontal e 1 unidade no eixo y para cima na vertical. Para obter o polígono transladado por matriz, deve-se somar a matriz do vetor u com cada uma das coordenadas do polígono1.

$$Poligono1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Para obter o polígono transladado, precisa-se efetuar a soma com a matriz do vetor u, mas antes de efetuar a soma, é preciso ampliar as coordenadas da matriz u para que ambas

Figura 32 – Translação por um vetor - Quadrado



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

fiquem com a mesma ordem de formação.

$$\begin{gathered} Poligono1 + u \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$Poligono1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Logo, as coordenadas do polígono transladado são $A'(0,2)$, $B'(0,3)$, $C'(1,2)$ e $D'(1,3)$. Para finalizar a atividade, o professor pode complementar, observando que, ao movimentar o vetor u, as coordenadas de translação serão alteradas e, consequentemente, as coordenadas do polígono transladado.

Atividade 1.1

a) A região polígono1 sofreu uma translação dando origem à região polígono1'. Para concluir essa atividade, considere os pares ordenados $A = (0, 2)$, $B = (3, 6)$ e $C(4, 2)$, depois localize-os e marque-os no plano cartesiano.

Após isso, construa segmentos de reta para unir os pontos e formar uma figura e, em seguida, faça a translação da figura geométrica utilizando o vetor $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Em um novo arquivo do GeoGebra, utilize as ferramentas "Ponto", "Vetor", "Polígono"e o comando "Transladar"no campo "Entrada"para:

- Criar um polígono qualquer;
- Criar um vetor u ;
- Faça a translação do polígono pelo vetor u.
- Após transladar o polígono, arraste o vetor u e descreva como se comporta o polígono transladado.

4.2 Atividade 02

4.2.1 Homotetia

Atividade de aplicação de produto entre matrizes utilizando transformações geométricas com os recursos do GeoGebra.

4.2.2 Objetivos

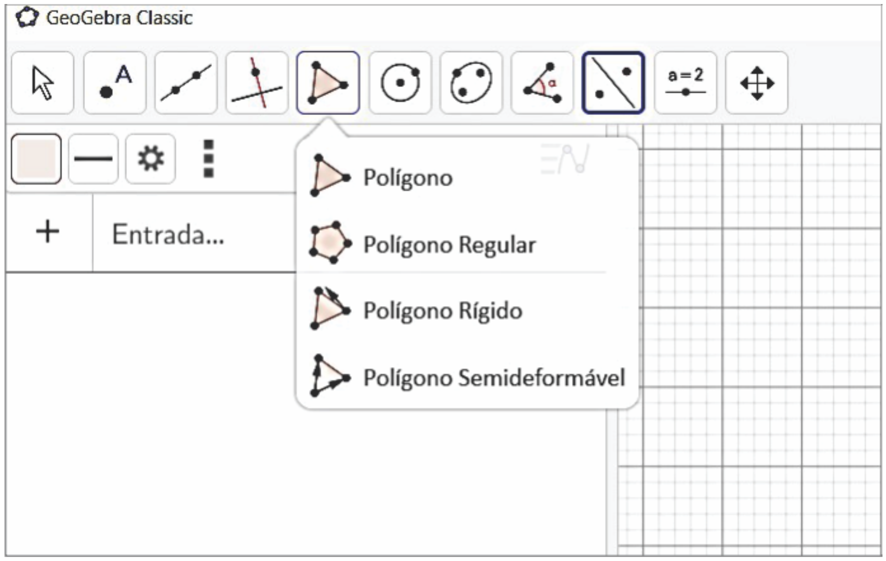
Compreender e aplicar e explorar a transformação de dilatação de homotetia.

Nesta atividade, o objetivo é mostrar que homotetia consiste na ampliação ou na redução de distância de áreas a partir de um ponto fixo. Para exemplificar, pode-se utilizar qualquer polígono que há na ferramenta do polígono do GeoGebra.

4.2.3 Aplicação

Nesse caso, utilizar-se-á a ferramenta polígono: triângulo. Em seguida, colocar-se-ão as suas coordenadas, como constado na figura 33.

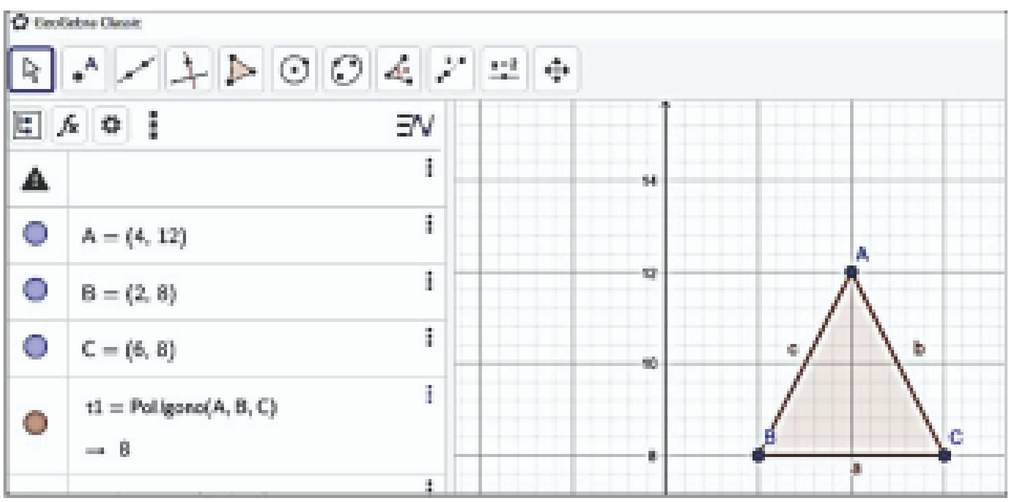
Figura 33 – Ferramenta polígono



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Neste exemplo, construiu-se um triângulo de vértices : $A = (4, 12), B = (2, 8), C = (6, 8)$, figura 34.

Figura 34 – Triângulo

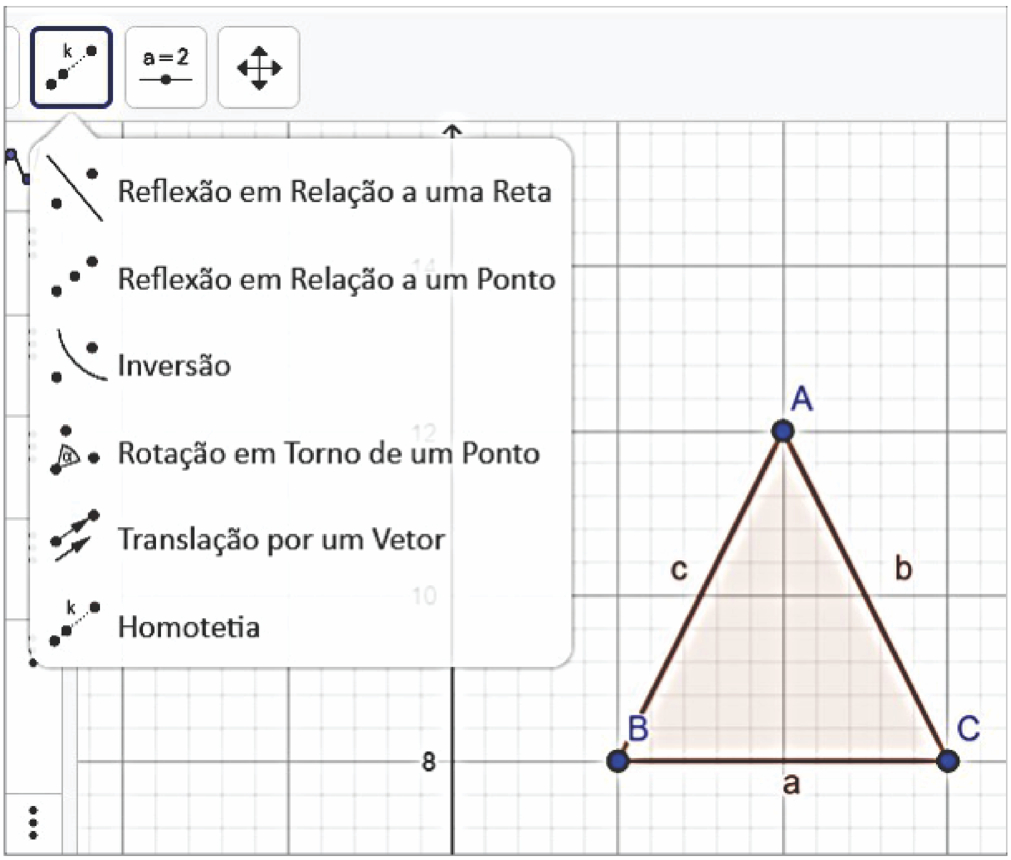


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Depois da construção do triângulo, deve-se "dilatar"a figura. A dilatação consiste em aumentar o tamanho dos lados do polígono mantendo suas proporções. Utiliza-se a ferramenta "Homotetia", como apresentado na figura 35.

A homotetia é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais, como a forma e os ângulos, ou seja, é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas, a partir de um ponto fixo.

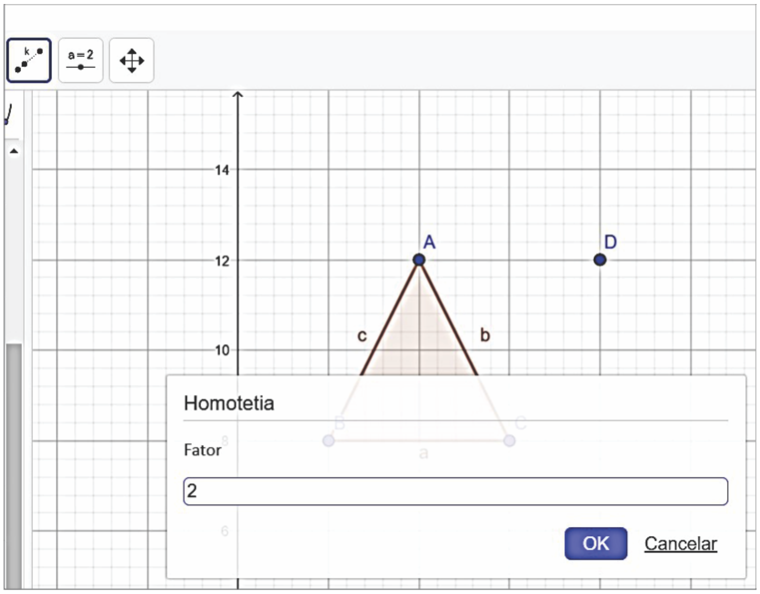
Figura 35 – Ferramenta polígono Homotetia



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

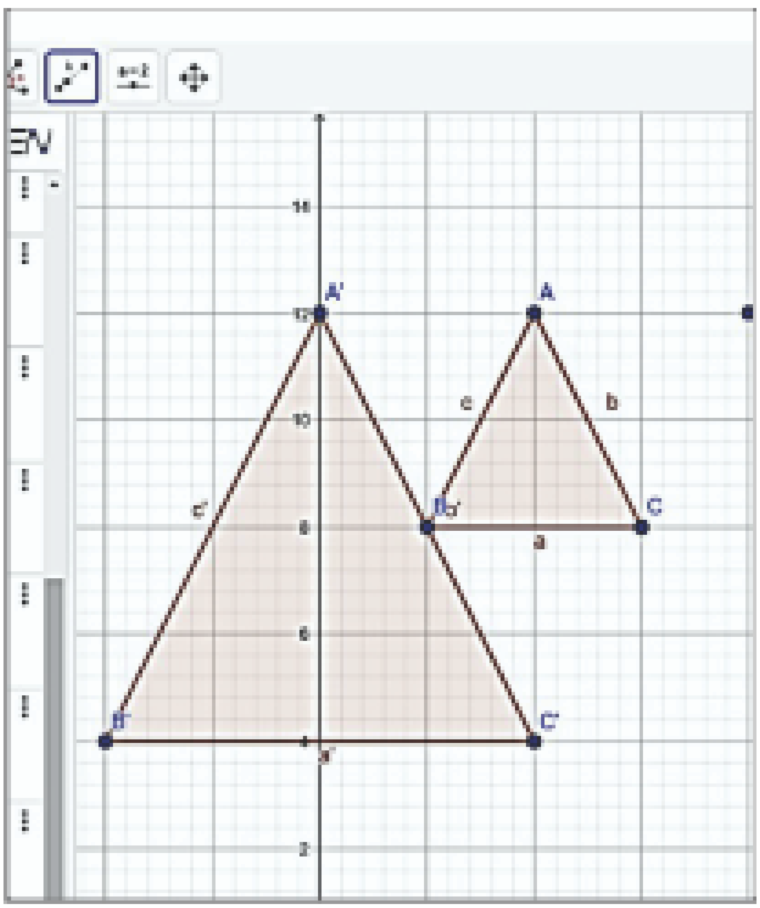
Neste exemplo, dilata-se o triângulo, por um fator de 2, como na figura 37 a seguir:

Figura 36 – Fator de Dilatação



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

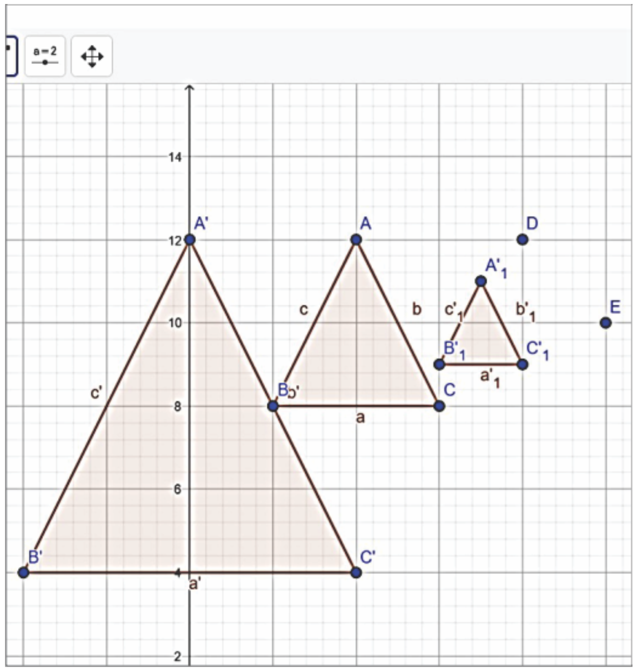
Figura 37 – Figura Dilatada



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Tem-se aqui a dilatação por um fator de 2, ou ainda, a contração no fator 0,5, como na figura 38.

Figura 38 – Figura Contraída



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Note-se que, à direita, o objeto está contraído por um fator de 0,5.

Segue uma sugestão de atividade para o professor desenvolver em sala de aula com os alunos.

Atividade 2.1

a) A figura P possui os seguintes pares ordenados $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$; $D(2;2)$ e $E(1,3)$. Localize e marque esses pares no plano cartesiano. Em seguida, ligue os pontos para formar uma figura e, depois, faça a transformação da dilatação e contração dessa figura geométrica do plano cartesiano utilizando o fator 4. Explore, investigue e responda.

- Qual é a área da figura P?
- Qual é a área da figura transformada pelo fator 4?
- Qual é a relação da área da figura inicial B e a área da figura transformada?
- O que ocorreu com a figura P após a transformação?

b) Em um novo arquivo do GeoGebra, utilize as ferramentas "Ponto", "Polígono", e o comando "Homotetia"no campo "Entrada"para:

- Criar um polígono qualquer;
- Faça a transformação de dilatação do polígono pelo fator 0,25.

Agora, explore, investigue e responda.

- O que ocorreu com a figura após a transformação?
- Qual é a relação da área da figura inicial e a área da figura transformada?
- Quais são as matrizes associadas às figuras: inicial e a transformada.
- Verifique se a matriz associada à figura transformada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

4.3 Atividade 03

4.3.1 Rotação

Outra atividade utilizando transformações geométricas para aplicar multiplicação de matrizes.

4.3.2 Objetivos

Compreender e aplicar o comando rotação em um objeto.

Nesta atividade, o objetivo é que se compreenda o processo de rotação, o que é rotacionar um objeto ao redor de um ponto mantendo suas características originais. Para fazer essa demonstração, constrói-se um polígono e utiliza-se a ferramenta de rotação para poder aplicar a rotação em torno de um ponto qualquer no plano.

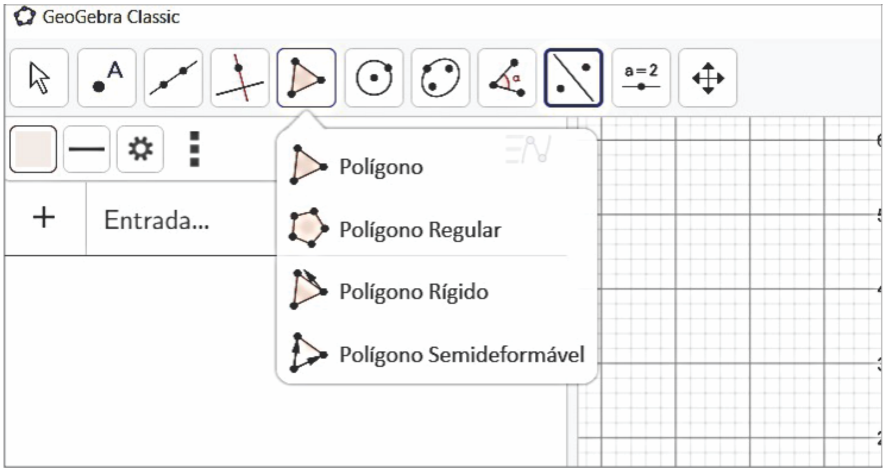
4.3.3 Aplicação

Primeiramente abre-se a ferramenta “polígono”para criar um polígono e, em seguida, colocam-se as suas coordenadas.

Para iniciar a explicação, sugere-se utilizar a opção “polígono regular”e informar ao GeoGebra o número de vértices do polígono, selecionando apenas o ponto inicial, como mostra a figura 39.

Assim, após selecionar a ferramenta “polígono regular”, informa-se ao GeoGebra a quantidade de vértices. No exemplo, a seguir, utilizou-se um total de 5 e usaram-se as coordenadas

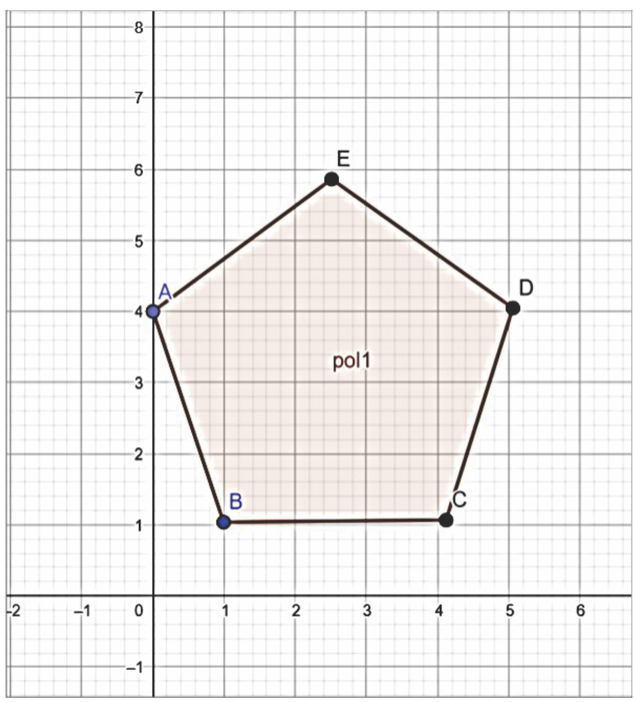
Figura 39 – Ferramentas Polígonos



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

iniciais $(0, 4)$ para o ponto inicial A, resultando em um pentágono, como observado na figura 40.

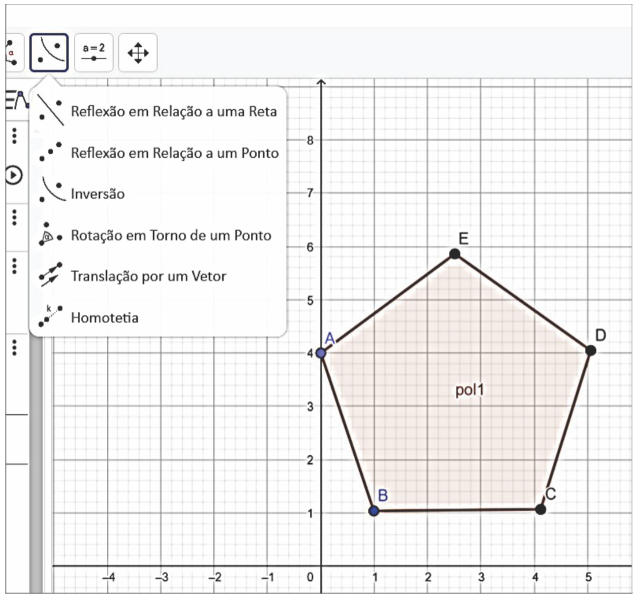
Figura 40 – Polígono Regular - Pentágono



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Para aplicar a rotação em relação a um plano, usa-se a ferramenta “rotação em torno de um ponto”, como pode ser observado na figura 41.

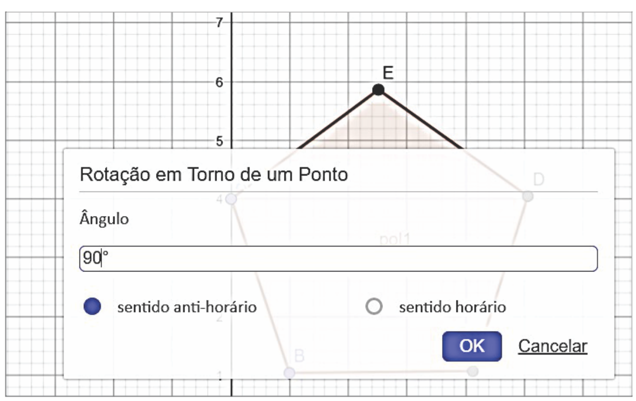
Figura 41 – Ferramenta Rotação em torno de um ponto



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Seleciona-se a ferramenta “rotação”em torno de um ponto. Neste, faz-se uma rotação do polígono em 90º no sentido anti-horário, como na figura 42.

Figura 42 – Condição de Rotação

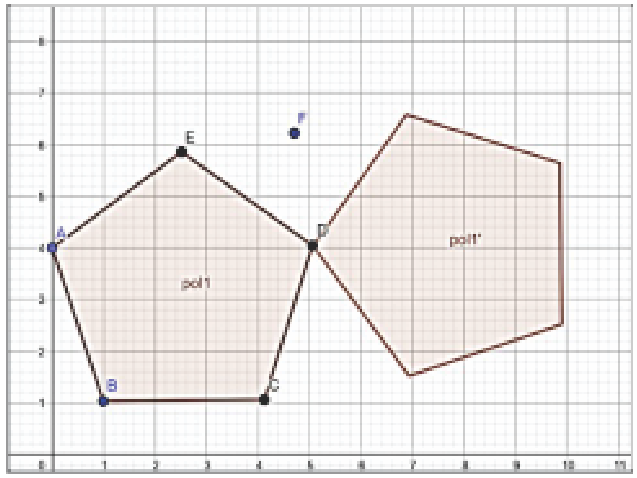


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Após informar o ângulo de rotação e clicar no botão “Ok”, o GeoGebra gera a imagem rotacionada como evidenciada na figura 43.

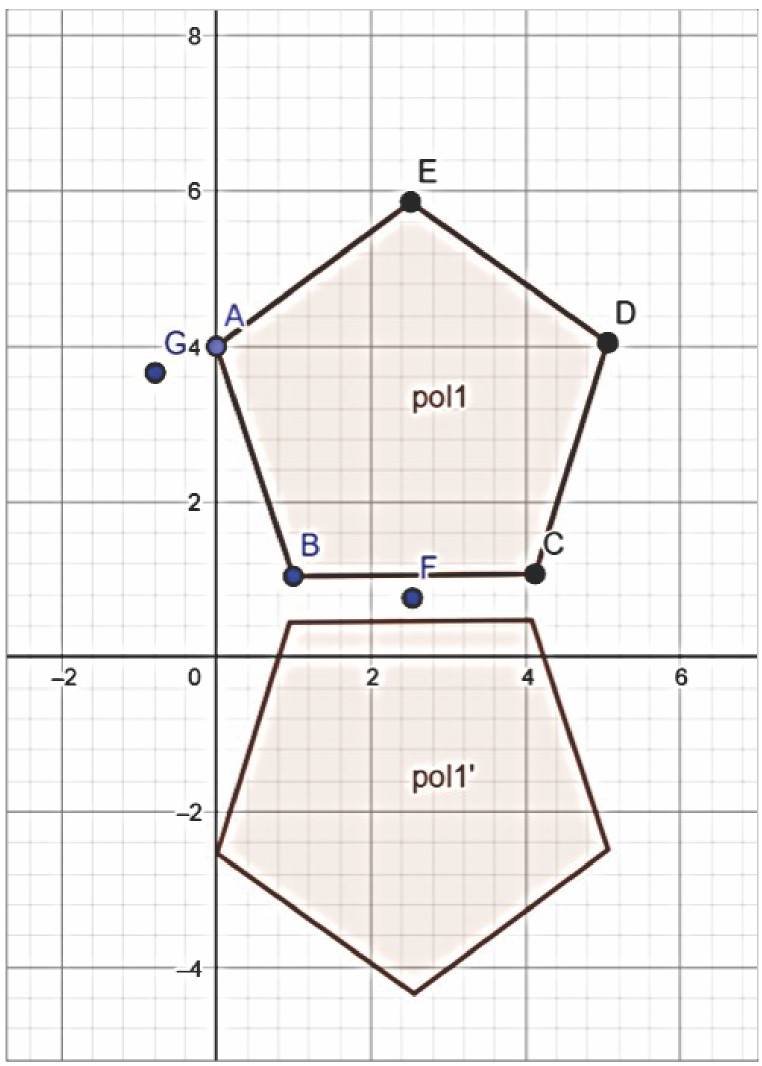
Pode-se alterar o ângulo de rotação, como por exemplo, aplicar uma rotação de 180º no sentido anti-horário. Nesse sentido, tem-se a figura rotacionada, tal como pode ser visto na figura 44.

Figura 43 – Figura Rotacionada



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Figura 44 – Rotação em 180°



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A seguir, dar-se-á uma sugestão de atividade para ser realizada com os alunos.

Atividade 3.1

a) Considere a figura P com as coordenadas $A = (5, 1)$, $B = (4, 2)$, $C = (4, 3)$ e $D = (1, 1)$. Depois, localize-as e marque-as no plano cartesiano. Após, ligue os pontos para formar uma figura e, em seguida, faça a transformação de rotação de 180 no sentido anti-horário em torno da origem $(0, 0)$ dessa figura geométrica no plano. Agora:

- Obtenha as matrizes associadas a cada uma dessas figuras.
- Verifique se a matriz associada à figura transformada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 180 & -\text{sen}180 \\ \text{sen}180 & \cos 180 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Em um novo arquivo do GeoGebra, utilize as ferramentas "Ponto", "Polígono", e o comando "Rotação"em torno de um ponto no campo "Entrada". Neste instante:

- Coloque os pares ordenados da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para forma uma figura.
- Na matriz A, aplique uma rotação de 90°, no sentido anti-horário, em torno da origem.
- Escreva a matriz associada à figura transformada.
- Verifique se a matriz associada à figura transformada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos 90 & -\text{sen}90 \\ \text{sen}90 & \cos 90 \end{pmatrix}$

4.4 Atividade 4

4.4.1 Reflexão

Esta, é mais uma aplicação da multiplicação de matrizes. Utilizar-se-ão os mesmos recursos.

4.4.2 Objetivos

Compreender e aplicar o comando de reflexão em um objeto

Nesta atividade, o objetivo é mostrar que reflexão é a transformação geométrica do ponto, da reta, do plano ou espaço que se "espelha" todos os pontos em relação, ao eixo de reflexão ou também conhecido como eixo de simetria.

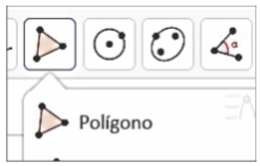
4.4.3 Aplicação

Para fazer esse exemplo, constrói-se um pentágono e mostra-se como será à aplicação de uma reflexão do objeto em torno de um ponto qualquer no plano.

Nesse momento, o professor pode perguntar à classe, como criar um polígono.

Após o questionamento, é possível demonstrar como construir um polígono no GeoGebra a partir da utilização da ferramente polígono, como na figura 45, e, em seguida, colocam-se as suas coordenadas:

Figura 45 – Ferramenta Polígono

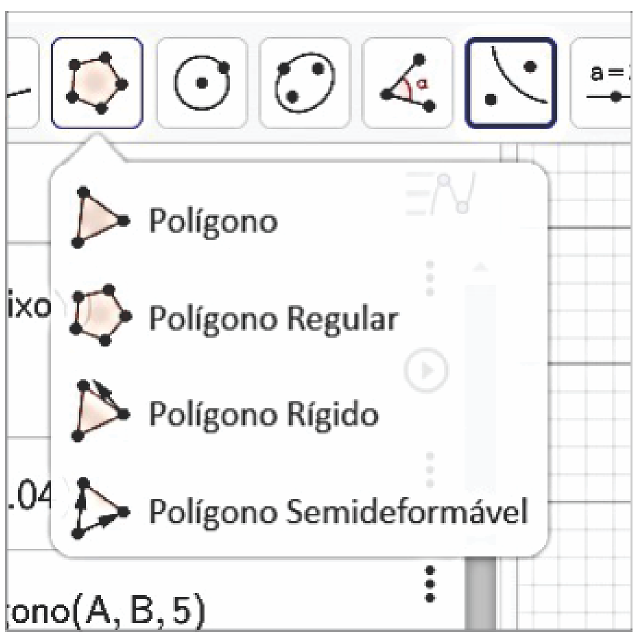


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

A seguir, pode-se levantar a questão: “qual polígono vamos criar?”Então os alunos podem escolher o polígono.

Contudo, para facilitar a criação de objetos, sugere-se, na explicação, utilizar a opção polígono regular e informar ao GeoGebra o número de vértices do polígono selecionado, bem como as coordenadas do ponto inicial, como mostra a figura 46.

Figura 46 – Polígono Regular

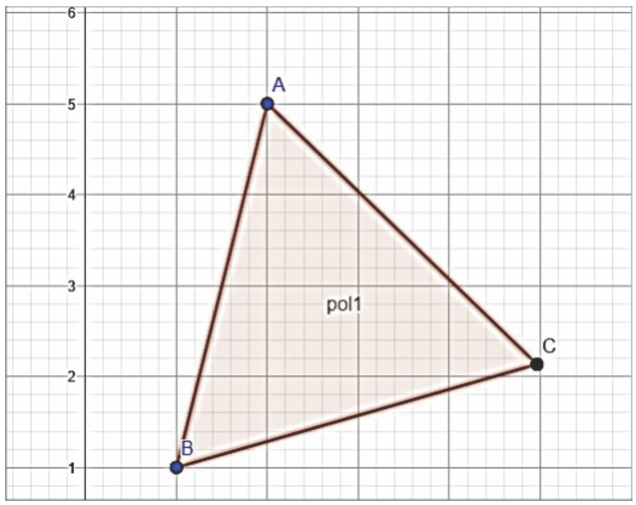


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Pode-se ainda propor aos estudantes: "agora devemos colocar as coordenadas nos vértices desse polígono. Como fazer isso?"

Assim, ao informar, nesse exemplo, o número 3 como total de vértices, e usar as coordenadas $(2, 5)$ para o ponto inicial A, o que resulta é em um triângulo, como observado na figura 47.

Figura 47 – Polígono Regular Triângulo



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Para aplicar a reflexão em relação a uma reta, usa-se a ferramenta reflexão em relação a uma reta, como mostra a figura 48:

Depois, seleciona-se a ferramenta rotação em torno de uma reta, mas para isso cria-se também, uma reta usando o comando "ferramenta reta", tal como evidenciado na figura 49:

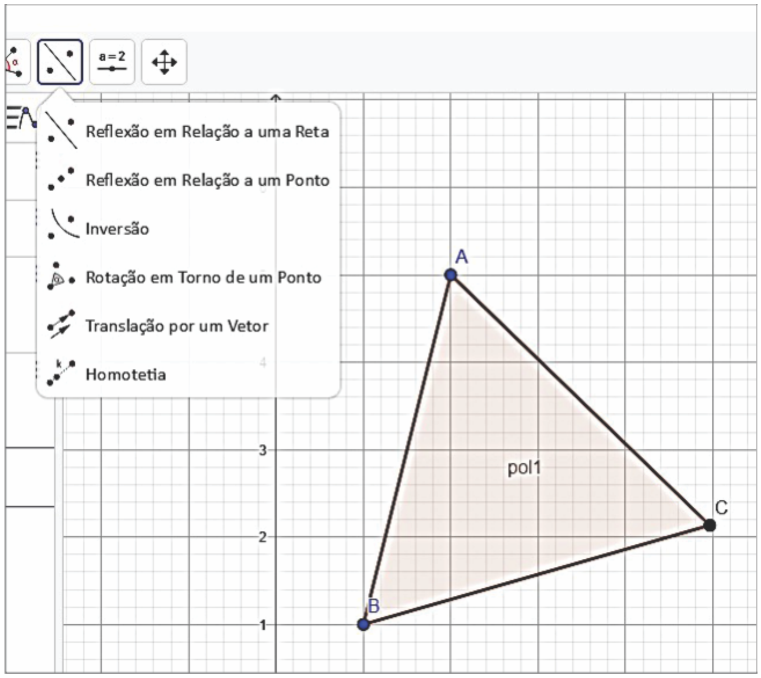
Em seguida, selecionam-se dois pontos para a criação de uma reta no plano, neste exemplo, selecionaram-se $D(2, 8)$ e $E(4, 8)$, que pode ser observado na figura 50.

Tendo-se criado o polígono desejado juntamente com uma reta, aplica-se o comando reflexão em relação a uma reta. Primeiramente, seleciona-se, o polígono e, em seguida, a reta, como mostra a figura 51.

Após, o GeoGebra constrói a figura solicitada.

A seguir, teremos uma atividade em que se pode construir um polígono a partir da transformação da reflexão.

Figura 48 – Ferramenta Reflexão

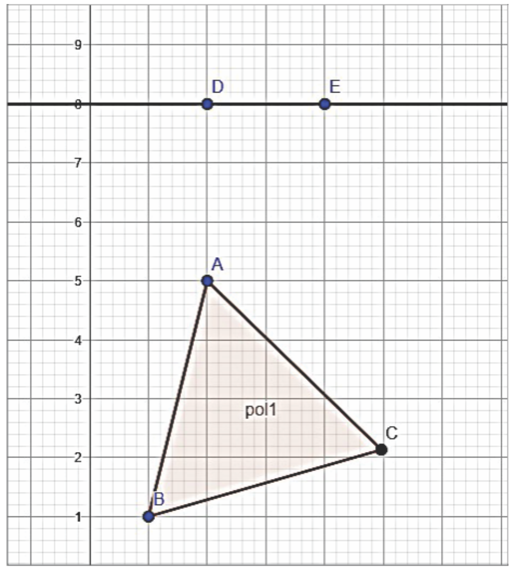


Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Figura 49 – Ferramenta Reta

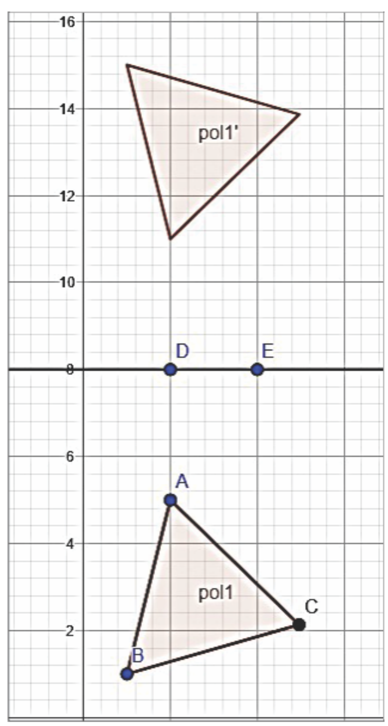
Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Figura 50 – Reta



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Figura 51 – Reta



Fonte: Imagem elaborada pelo autor (2019)

Atividade 4.1

a) Considere a figura R com as coordenadas $A = (-3, 2)$, $B = (-4, 4)$, $C = (-2, 7)$ e $D = (-8, 4)$. Localize-as e marque-as no plano cartesiano. Após, ligue os pontos para formar uma figura, e, em seguida, aplique a reflexão em relação ao eixo y dessa figura geométrica no plano e, por fim:

- Escreva a matriz associada a cada uma dessas figuras.
- Verifique se a matriz associada à figura refletida pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

b) Em um novo arquivo do GeoGebra utilize as ferramentas "Ponto", "Polígono", e o comando "Reflexão"em relação a uma reta no campo "Entrada". Nesse instante:

- Coloque os pares ordenados da matriz $D = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para forma uma figura.
- Na matriz D, aplique uma reflexão em relação ao eixo x.
- Escreva a matriz associada à figura transformada.
- Verifique se a matriz associada à figura transformada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considerações Finais

Os professores e alunos têm a oportunidade de fazerem investigações dos conteúdos de geometria de forma ágil e mais eficiente, pois o movimento das figuras favorece a visualização das propriedades no *software* GeoGebra.

Contudo, vale destacar que podem ser encontradas várias limitações para o uso do *software*, sendo elas: falta de conhecimento em informática tanto do aluno como do professor, laboratório de informática não disponível na escola ou o aluno não ter computador, empecilhos para aprendizagem. Neste trabalho, criou-se uma sequência didática que não foi desenvolvida em sala de aula com os alunos, funcionando, apenas como apresentação de uma proposta didática para que os professores possam utilizá-la em sala de aula.

O *software* GeoGebra traz diferentes funcionalidades, além de possuir uma aparência e linguagem amigável, de forma que se permita o autodidatismo de suas ferramentas. A sequência de atividades propostas também incentiva o aprendizado contínuo do aluno.

De um modo geral, nas pesquisas bibliográficas levantadas como referencial teórico, argumenta-se que a utilização do GeoGebra nas aulas sobre geometria, as tornaram mais dinâmicas e interessantes, o que pode provocar nos alunos um interesse em aprender os conceitos matemáticos, principalmente aqueles que eles ainda possuem dificuldades em entender.

As transformações geométricas no plano são importantes para a computação gráfica pelo fato de permitirem modificar, modelar e manipular objetos pela tela do computador. Com isso, as interpretações das transformações dos objetos auxiliam na compreensão do seu significado, e na melhoria da aprendizagem, uma vez que distingue os reais valores, aproximando o educando no seu processo de contextualização do que representa o significado na matemática.

Além disso, foi possível verificar que as transformações geométricas, necessitam de estudos acadêmicos pelo pequeno número de dissertações e teses encontradas (no Brasil), e, até por isso, possivelmente este tema seja pouco inserido no cotidiano escolar.

Outrossim, o uso de recursos tecnológicos no âmbito escolar, como o GeoGebra, permite aos professores mediarem o processo ensino/aprendizagem de forma mais enriquecedora, motivando o aluno a ter mais interesse e vontade de aprender de maneira intuitiva e contextualizada.

Por fim, pesando em uma perspectiva futurista, o avanço das TICs e o desenvolvimento cada vez mais aprimorado do GeoGebra permitirão futuras novas abordagens deste trabalho, tornando-o aberto a olhares inovadores e ao desenvolvimento de diferentes metodologias que possam contribuir para o enriquecimento das práticas pedagógicas e melhorar o ensino-aprendizado da matemática.

Referências

[1] Abbagnano, N. *Dicionário de filosofia. trad.* Alfredo Bossi, Band 2. 2000.

[2] ALBERTIN, A. & MOURA, R. *Informática e a educação básica: elaboração de cenários alternativos.* ENCONTRO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO, Band 18. 1994. Anais... Curitiba.

[3] Allan, L. *Como a tecnologia pode ajudar nossas escolas a vencer o coronavírus?* 2020. URL `https://exame.com/blog/crescer-em-rede/como-a-tecnologia-pode-ajudar-nossas-escolas-a-vencer-o-coronavirus/`.

[4] Alves, G. d. S. *O uso de softwares de geometria dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio.* Dissertation, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2004.

[5] Amarilla Filho, P. *Educação a distância: uma abordagem metodológica e didática a partir dos ambientes virtuais.* Educação em Revista, Band 27(2): 41–72. 2011.

[6] Arruda, E. *Ciberprofessor: novas tecnologias, ensino e trabalho docente.* Autêntica Editora Belo Horiznte, MG. 2004.

[7] Barbosa, R. N. C. *O ambiente do softare geogebra: Uma ferramenta interativa para o ensino da matemática.* 2011.

[8] Bicudo, M. A. V. *et al.*. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.* Ed. UNESP. 1999.

[9] Brandt, S. T. J. & Montorfano, C. *O software geogebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores.* Acedido em, Band 30: 329–4. 2007.

[10] BRASIL, M. d. E. *Base nacional comum curricular.* Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica. 2017.

[11] Brasil, P. C. N. *ensino médio.* Ministério da Educação. 2000.

[12] CASTILHO, L. B. *O uso da tecnologia da informação e comunicação (tic) no processo de ensino e aprendizagem em cursos superiores.* Projetos e Dissertações em Sistemas de Informação e Gestão do Conhecimento. Belo Horizonte, MG, Band 4(2). julho/2018.

[13] Costa, B. & Rodrigues, E. *Novo espaço. matemática 9º ano.* 2012.

[14] Costa, S. R. S.; Duqueviz, B. C.; & Pedroza, R. L. S. *Tecnologias digitais como instrumentos mediadores da aprendizagem dos nativos digitais.* Psicologia Escolar e Educacional, Band 19(3): 603–610. 2015.

[15] Cysneiros, P. G. *et al.*. *Novas tecnologias na sala de aula: melhoria do ensino ou inovação conservadora.* Informática Educativa, Band 12(1): 11–24. 1999.

[16] da Silva, C. V. & Padilha, N. A. *Uso das tecnologias de informação e comunicação:(h) a prática na educação de jovens e adultos (?).*

[17] da Silva, J. d. P. B. & Leite Filho, D. M. *Softwares educacionais e suas aplicações em tempos de pandemia: estudo sobre possibilidades de aplicação.* Brazilian Journal of Development, Band 6(7): 50866–50878. 2020.

[18] da Silva, W. R. *Aplicação do geogebra no estudo de funções quadráticas.* SYNTHESIS— Revistal Digital FAPAM. Pará de Minas, Band 5(5): 160–185. 2014.

[19] da Silva, W. R. *Aplicação do geogebra no estudo de funções quadráticas.* SYNTHESIS— Revistal Digital FAPAM, Band 5(5): 160–185. 2016.

[20] da Silva Polli, C. T. & Figueiredo, H. R. S. *Importância do uso das tecnologias no ensino de geometria: Experiências educacionais com o uso do software geogebra.*

[21] da Silveira Moura, D. A.; dos Santos, A. d. S.; & da Silva, J. J. *Tecnologia a favor da educação matemática: geogebra e suas aplicações.* SYNTHESIS— Revistal Digital FAPAM, Band 7(7): 333–346. 2016.

[22] D'Ambrosio, B. S. & Lopes, C. E. *Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático.* BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Band 29(51): 1–17. 2015.

[23] de Almeida, A. L. & Miskulin, R. G. S. *Aspectos matemáticos, didáticos e pedagógicos das disciplinas de conteúdo matemático na licenciatura: um olhar a partir de teses e dissertações (2001-2017).* Revemop, Band 1(3): 397–419. 2019.

[24] de Almeida, H. M. *O uso de celulares, tablets e notebooks no ensino da matemática.* Revista Eletrônica de Educação Matemática, Band 11(2): 318–327. 20160.

[25] de Freitas Vaz, D. A. & de Jesus, P. C. C. *Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software geogebra.* Revista EVS-Revista de Ciências Ambientais e Saúde, Band 41(1): 59–75. 2014.

[26] de Miranda, D. F. & Laudares, J. B. *Informatização no ensino da matemática: investindo no ambiente de aprendizagem.* Zetetiké, Band 15(1): 71–88. 2007.

[27] Dolz, J.; Noverraz, M.; Schneuwly, B.; *et al.*. *Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento.* Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, 95–128. 2004.

[28] Ferreira, R. C. F. *Ensinando matemÁtica com o geogebra.* Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. 2010.

[29] Fontana Júnior, M. *O uso de ferramentas digitais no ensino da odontologia.* 2015.

[30] FROTA, M. C. R. & BORGES, O. *Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática.* Anais da 27ª reunião anual da Anped. 2004.

[31] Gil, A. & Métodos, C. *técnicas de pesquisa social.* São Paulo: Atlas. 1999.

[32] Gravina, M. A. *Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.* Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Band 1: 1–13. 1996.

[33] Gutiérrez, A. *El discurso tecnológico de los nuevos medios: implicaciones educativas.* Comunicar, Band 9(18): 90–95. 2002.

[34] HESPANHOL, L. L.; NICOLA, L.; SILVA, C. d.; *et al.*. *A utilização do software geogebra para o ensino da geometria.* Artigo apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo–SP. 2016.

[35] Hohenwarter, M. *Multiple representations and geogebra-based learning environments.* Union Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Band 39: 11–8. 2014.

[36] Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. *The strength of the community: How geogebra can inspire technology integration in mathematics teaching.* MSOR Connections, Band 9(2): 3–5. 2009.

[37] KARWOSKI, A. M.; GAYDECZKA, B.; & BRITO, K. *Gêneros textuais e ensino.* São Paulo: Editora Parábola. 2011.

[38] Kawamura, L. K. *Novas tecnologias e educação*. 184. Editores Ática. 1990.

[39] Kenski, V. M. *Aprendizagem mediada pela tecnologia*. Revista diálogo educacional, Band 4(10): 1–10. 2003.

[40] Kenski, V. M. *Tecnologias e tempo docente*. Papirus Editora. 2014.

[41] Maia, D. L. & Barreto, M. C. *Tecnologias digitais na educação: uma análise das políticas públicas brasileiras*. EFT: Educação, Formação & Tecnologias, Band 5(1): 47–61. 2012.

[42] Marschall, J. *Geogebra no ensino das transformações geométricas: uma investigação baseada na teoria da negociação de significados*. 2015.

[43] Martha, L. & Gattass, M. *Um resumo das transformações geométricas para visualização em 3d*. Caderno de Comunicações do VII SIBGRAPI, 9–12. 1994.

[44] Medeiros, P. C. *Fundamentos teóricos e práticos do ensino de Geografia*. IESDE BRASIL SA. 2010.

[45] Minayo, M. C. d. S. a. *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. In *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. 2003.

[46] Moretto, V. P. *Prova: um momento privilegiado de estudo não um acerto de contas*. DP & A. 2008.

[47] NASCIMENTO, E. L. *Gêneros da atividade, gêneros textuais: Repensando a interação em sala de aula*. Gêneros Textuais: da didática das línguas aos objetos de ensino. São Carlos, Editora Claraluz. 2009.

[48] NETO, A. S. S.; RETÂNGULO, R. T. N. T.; DO, U. A. S. A. P.; *et al.*. *Licenciatura em matemática*.

[49] OLIVEIRA, F. D. M. *O software geogebra como ferramenta para o ensino da geometria analítica*. 2014.

[50] Pais, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. Autêntica. 2008.

[51] Pereira, D. P. F. *et al.*. *Transformações geométricas com aplicações no geogebra para o ensino médio*. 2017.

[52] Porto, T. M. E. *As tecnologias de comunicação e informação na escola: relações possíveis... relações construídas*. Revista Brasileira de Educação, Band 11(31): 43–57. 2006.

[53] Ribeiro, A.; Castro, J. M. d.; & Regattieri, M. M. G. *Tecnologias na sala de aula: uma experiência em escolas públicas de ensino médio*. 2007.

[54] Rocha, P. S. R.; Ramos, C. V.; & Brasil, T. A. *A utilização de softwares no ensino de matemática para ensino fundamental e médio*. In *Anais do IV Congresso sobre Tecnologias na Educação*, 40–49. SBC. 2019.

[55] Rodrigues, F. C. & Gazire, E. S. *Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão reflections on use of material in school teaching of mathematics manipulable: trial of action to ponder*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Band 7(2): 187–196. 2012.

[56] SÁ, D. J. D. C. *Tópicos da geometria plana por meio do geogebra*. 2014.

[57] Sabino, V. & Kon, F. *Licenças de software livre história e caracterısticas*. 2009.

[58] SANTOS, F. V. d.; SILVA, K. A. P. d.; & ALMEIDA, L. M. W. d. *O uso do computador no estudo de funções no ensino médio*. ENEM, IX. 2007.

[59] Santos, R. C. *Neologismos lexicais em gênero textual emergente*.

[60] Scattone, C.; Masini, E.; *et al.*. *O software educativo no processo de ensino-aprendizagem: um estudo de opinião de alunos de uma quarta série do ensino fundamental*. 2007.

[61] Steinmacher, I. F.; Wiese, I. S.; da Luz, J. A.; *et al.*. *Uso do geogebra no ensino de matemática: Avaliação de usabilidade e de aprendizado*. Encontro Nacional de Informática e Educaçao (II ENINED). 2016.

[62] Stormowski, V. *Estudando matrizes a partir de transformações geométricas*. 2008.

[63] Tederke, A. d. R. *Um estudo de caso envolvendo a aplicação de um software educacional de geometria espacial*. 2016.

[64] Valente, J. A. *Por que o computador na educação*. Computadores e conhecimento: repensando a educação. Campinas: Unicamp/Nied, 24–44. 1993.

[65] VILLAR, M. d. S. *Dicionário houaiss*. Org. Instituto Antônio Houaiss São Paulo: Moderna. 2001.

[66] Wagner, E. & Carneiro, J. P. Q. *Construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática. 2007.