UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDUARDO JOSÉ DE OLIVEIRA ESTEVÃO

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM E ENSINO DE ÁLGEBRA:
ATIVIDADES PROPOSTAS PARA MINIMIZAR ESSAS DIFICULDADES

CATALÃO
2021

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Eduardo José de Oliveira Estevão

3. Título do trabalho

Dificuldades na aprendizagem e ensino de álgebra: atividades propostas para minimizar essas dificuldades

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Tânia Maria Nunes Gonçalves**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/02/2021, às 11:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO JOSE DE OLIVEIRA ESTEVÃO**, **Discente**, em 11/02/2021, às 11:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 1872643 e o código CRC AE9ED2DD.

EDUARDO JOSÉ DE OLIVEIRA ESTEVÃO

DIFICULDADE NA APRENDIZAGEM E ENSINO DE ÁLGEBRA: ATIVIDADES PROPOSTAS PARA MINIMIZAR ESSAS DIFICULDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves.

CATALÃO
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Estevão, Eduardo José de Oliveira
Dificuldades na Aprendizagem e Ensino de Álgebra [manuscrito] : Atividades Propostas para Minimizar essas Dificuldades / Eduardo José de Oliveira Estevão. - 2021.
178 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2021.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Dificuldades com a Álgebra. 2. Pensamento algébrico. 3. Atividades. 4. Conceções algébricas.. I. Gonçalves, Tânia Maria Nunes, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **15** da sessão de Defesa de Dissertação de **Eduardo José de Oliveira Estevão**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração **Ensino de Matemática**.

Em **onze de fevereiro de 2021**, às **10h00min**, por Webconferência via sistema https://meet.google.com/bzv-hkxc-cgt, reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves (PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição"), orientadora, Dr. Fernando da Costa Barbosa** (**PROFMAT/IMTec - "RC/UFG - UFCAT em transição") e Dra. Maria Francisca da Cunha (UEG - Campus Morrinhos)** para, em sessão pública, procederem à avaliação da Dissertação intitulada *"Dificuldades na aprendizagem e ensino de álgebra: atividades propostas para minimizar essas dificuldades"*, de autoria de **Eduardo José de Oliveira Estevão**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da "RC/UFG - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente. **Onze de fevereiro de dois mil e vinte um**.

Obs.: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Tânia Maria Nunes Gonçalves**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/02/2021, às 11:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando Da Costa Barbosa**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/02/2021, às 11:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Maria Francisca da Cunha**, **Usuário Externo**, em 11/02/2021, às 11:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO JOSE DE OLIVEIRA ESTEVÃO**, **Discente**, em 11/02/2021, às 11:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1859989** e o código CRC **F70AA95A**.

Dedico este trabalho aos meus familiares, amigos, colegas de profissão e todos aqueles que de algum modo contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde e força para trilhar os caminhos desta pesquisa.

Aos meus pais: José O. Estevão e Luzmarina de O. M. Estevão, por sempre me prestarem toda a ajuda possível, acreditando na minha capacidade.

À minha irmã Patrícia M. de O. Estevão, por não deixar eu perder a esperança deste objetivo.

À minha noiva Camila C. Rosa, pelo amor, carinho e apoio emocional.

Às minhas amigas Mairica A. dos Santos e Raiane S. Lourenço, que desde a graduação em Matemática me incentivaram a fazer o mestrado, demonstrando forte amizade e presteza para realizar estudos.

Aos professores do curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás – Morrinhos, que durante a minha graduação me deram o importante suporte para eu chegar até aqui.

A todos os professores do PROFMAT, pelos ensinamentos transmitidos e por mostrar diferentes caminhos possíveis a serem vislumbrados na Matemática.

Aos professores da banca do exame de qualificação, Profa. Dra. Maria Francisca da Cunha e Prof. Dr. Fernando da Costa Barbosa, pelas valiosas sugestões e contribuições.

A todos os meus colegas do PROFMAT, em especial Leandro M. de Andrade, Fabrício F. Dias e Marcelo P. da Silva, pela amizade, ajuda, estudos e incentivo mútuo.

E à minha orientadora, Profa. Dra. Tânia Maria Nunes Gonçalves, pela paciência e apoio, indo muito além de apenas orientar, mostrando ser possível a conclusão desta dissertação.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda capacidade que o humano conseguir expressar”

François Viète

RESUMO

As dificuldades que os estudantes possuem no estudo de Álgebra são cada vez mais evidentes desde o Ensino Fundamental até ao Ensino Médio. Um modo de intervir positivamente neste cenário começa por conhecer estas dificuldades, entendendo as suas origens. Este trabalho tem como objetivo principal descobrir quais são as principais dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, e consequentemente propor atividades que possam minimizá-las e ao mesmo tempo desenvolver o pensamento algébrico. Para determinar estas dificuldades realizou-se uma pesquisa bibliográfica de caráter descritiva, objetivando detectar as causas e origens destas dificuldades. Através de uma análise qualitativa, esta pesquisa também se preocupou em definir algumas relações entre as dificuldades encontradas. Em uma análise sistemática e crítica das conceções de Álgebra e Educação Algébrica firmadas ao longo do tempo, bem como das relações supracitadas, concluímos este trabalho com uma proposta de atividades que poderão ser utilizadas pelos professores em sala de aula, visando contribuir positivamente para o processo de ensino da Álgebra.

Palavras-chave: Dificuldades com a Álgebra. Pensamento algébrico. Atividades. Conceções algébricas.

ABSTRACT

The difficulties that students possess in the study of Algebra are increasingly evident from Elementary School through to High School. A positive way to intervene in this scenario starts with knowing these difficulties and their origins. The principal aim of this work is to determine which are the main difficulties that crop up in the process of teaching and learning Algebra and subsequently propose activities which minimize them while they promote algebraic thinking. To ascertain these difficulties, a revision of the literature was done, with a descriptive approach, having in mind their causes and origins. Through a qualitative analysis, this research also focused in defining relationships amongst the difficulties encountered. In a systematic and critical analysis of Algebra and Algebraic Education conceptions established over time, as well as the aforementioned relationships, we conclude this work with a proposal of activities that can be used by teachers in the classroom, with the purpose to contribute positively in the teaching process.

Keywords: Difficulties with Algebra. Algebraic thinking. Activities. Algebraic conceptions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EEP	Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa
FPP	Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos
G	Dificuldade em generalizar
Ig	Dificuldade com a noção de igualdade
IL	Dificuldade em interpretar as letras
LEvsLA	Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa
Mem	Dificuldade em memorizar
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
P	Dificuldade em pensar
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SExpA	Dificuldade com simplificação de expressões algébricas
Ut	Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando se fala em Álgebra, comumente grande parte das pessoas logo pensam em equações, letras, símbolos e como achar o *x* da questão. Esta ideia não está errada, já que "Entende-se a Álgebra como parte da Matemática que trabalha a generalização e abstração, representando quantidades através de símbolos" (GIL, K., 2008, p. 11). Entretanto, a Álgebra é mais do que manipulações matemáticas e técnicas mecânicas de resolução, envolve o pensamento, ou seja, um modo de pensar que objetiva modelar matematicamente uma situação-problema transcrevendo-a da língua corrente para a linguagem matemática.

Ao analisar historicamente a introdução da Álgebra nos currículos brasileiros, observa-se que ela passou por várias transformações. De acordo com Miguel, Miorim e Fiorentini (1992), no início da década de 60 a Álgebra era ensinada de forma mecânica e reprodutiva, visando procedimentos sem clareza daquilo que era feito. A Álgebra passou por diversas evoluções, onde historicamente suas origens remetem "para a formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas" (PONTE, 2006, p. 5). Com o desenvolvimento do conceito de equação, a Álgebra passa a ser compreendida como o ramo da Matemática que estuda as equações e seus métodos de resolução. Segundo Baumgart (1992), a própria origem da palavra "Álgebra", remete-se à uma ciência de restauração e redução, ou seja, de caráter transformista. A partir de uma evolução profunda dos estudos relacionados às equações algébricas, a atenção "[...] dos matemáticos começa a voltar-se cada vez mais para o estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel, corpo e conjunto" (PONTE, 2006, p. 6).

Os objetivos de se ensinar e aprender Álgebra foram se alterando ao passar do tempo à medida que os matemáticos foram cada vez mais se aprofundando no seu estudo, e com isso surgem reflexões sobre o que é importante ser ensinado. Atualmente a Álgebra possui um caráter abstrato muito importante no estudo das funções, inequações, conjuntos e operações.

Durante a minha prática docente sempre tive muita dificuldade em conseguir fazer com que os estudantes compreendessem os conceitos algébricos, quiçá levá-los a ver sentido em aprender tal conteúdo. Os índices mais baixos em avaliações externas e internas eram aqueles relacionados à Álgebra, gerando muito desconforto em minha prática profissional. É comum nas salas de aula os muitos relatos de estudantes que se sentem desmotivados ao estudar a Álgebra devido à linguagem formalmente simbólica que ela utiliza para produzir significados, dentre outras dificuldades relatadas.

A escolha deste tema de pesquisa se tornou clara para mim durante as aulas de matemática que eu ministrava na 2ª série do Ensino Médio, dado que o currículo referência da rede estadual de educação de Goiás aborda muitos tópicos de Álgebra nesta série. Os estudantes questionavam-me sobre o porquê usar tantas letras na matemática: "já não bastam os números e agora colocam letras para complicar ainda mais?". Através das avaliações e exercícios em sala de aula, percebi que muitos estudantes não conseguiam compreender os enunciados, e dessa forma, não eram capazes de solucionar os problemas propostos. Além disso, alguns estudantes não conheciam os símbolos matemáticos e seus significados, comprometendo na tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica e vice-versa.

Fiquei durante muito tempo refletindo sobre estas dificuldades apresentadas, mas percebi que até então eu não estava oferecendo meios úteis para que os estudantes pudessem superá-las. Apesar de ter me sensibilizado por esta problemática, eu ainda enfatizava o ensino repetitivo através de listas de exercícios que refletiam, em sua maioria, aplicações simples e diretas de conceitos e regras. Na tentativa de mudar minha prática profissional, comecei a introduzir problemas ligados à realidade, trazendo um contexto mais significativo. A priori, minha intenção era interessante, contudo a minha concessão pessoal de Álgebra pautava-se unicamente em vê-la como uma linguagem: a aula era conduzida de modo a ir diretamente do enunciado até à resolução de alguma equação ou expressão algébrica, ainda enfatizando a aplicação de regras e procedimentos.

Essas inquietações me levaram a sempre questionar a forma como eu ensinava, encontrando no PROFMAT a oportunidade de investigá-las e me debruçar sobre os referenciais teórico-metodológicos do ensino de Álgebra. Foi a partir desse contexto que surgiu o objetivo principal desta pesquisa: descobrir quais são as dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, para assim propor atividades que possam ajudar a minimizá-las.

Surgiram inicialmente duas perguntas de pesquisa:

a) Quais são as principais dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Álgebra?

b) Quais os possíveis motivos destas dificuldades?

Para responder à pergunta a) foi realizada uma pesquisa bibliográfica, a qual abrange as publicações correntes em uma determinada área de estudo, podendo ser feita em livros, periódicos, dissertações, teses, jornais, sites da internet, entre outras fontes (MARCONI; LAKATOS, 2003). Dessa forma, esta pesquisa se classifica como exploratória, dado que se preocupa em desenvolver e esclarecer conceitos e ideias, proporcionando uma visão geral do problema e hipóteses para estudos futuros (GIL, A., 2008). Os dados obtidos em a) foram analisados qualitativamente para responder à pergunta b), para isso adotaram-se as etapas de pesquisa qualitativa encontradas em A. Gil (2008, p. 175), que são: redução, exibição e conclusão.

A etapa de redução consiste em selecionar e simplificar os dados, de acordo com temas ou padrões definidos conforme os objetivos da pesquisa. Esta etapa se consolidou quando a partir da revisão bibliográfica, identificamos muitas dificuldades no ensino e aprendizagem de Álgebra que foram apresentadas na Seção 4, bem como os fatores que originam tais dificuldades (que neste trabalho chamamos de *fatores dificultadores*). Estas dificuldades foram categorizadas sob os temas: linguagem algébrica, interpretação e tradução da linguagem escrita para a algébrica, ensino de Álgebra nas escolas, relação entre Aritmética e Álgebra, fórmulas e regras de procedimento e utilização de métodos informais.

Na etapa de exibição, os dados são organizados e apresentados em forma de diagramas, textos, etc., de modo a possibilitar a análise de semelhanças, diferenças e inter-relações. Assim, as dificuldades encontradas e os fatores dificultadores foram sintetizados em dois quadros para facilitar a análise e apresentação dos mesmos. Além disso, utilizamos diagramas para expor as interseções existentes entre as dificuldades. Para a criação destes diagramas utilizou-se o software online de diagramas e comunicação visual, Lucidchart.

Por fim, na última fase, a da conclusão, busca-se o significado dos dados, explicando-os e expondo conclusões válidas, dignas de crédito. A partir das observações da etapa anterior, foi possível verificar que as dificuldades se relacionavam mediante os fatores dificultadores que as originavam, permitindo otimizar a elaboração das atividades para minimizar tais dificuldades. Durante a elaboração de algumas atividades foi necessário a criação de gráficos e figuras. Para isso utilizamos o aplicativo de matemática dinâmica Geogebra, pelo qual foi possível combinar conceitos de Geometria e Álgebra.

Visando sustentar essa análise qualitativa buscando investigar a origem das dificuldades encontradas, fizemos um levantamento bibliográfico a partir dos temas: *Dificuldades no ensino e aprendizagem de Álgebra*, *Conceções de Álgebra* e *Pensamento Algébrico*. Esta pesquisa nos possibilitou conhecer diferentes conceções de Álgebra e Educação Algébrica, estabelecidas ao longo do tempo, permitindo reconhecer a relevância didática quando aplicamos/unimos/relacionamos tais conceções. Aliando essas conceções, enfatizando seus aspectos positivos, com o desenvolvimento do pensamento algébrico, elaboramos atividades que ajudarão a sanar as dificuldades encontradas: desenvolvendo o pensamento algébrico de modo a promover a aprendizagem, superando assim as dificuldades.

Este trabalho foi estruturado em 6 seções, sendo esta introdução a primeira. Na seção 2 foi apresentado as conceções de Álgebra e Educação Algébrica a partir dos trabalhos de Usiskin (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Lins e Gimenez (2001), além de mostrar sob a perspectiva dessas conceções como a Álgebra era abordada nos Parâmetros Curriculares

Nacionais (PCN) e o que se espera do seu ensino atual mediante à Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Posteriormente, na Seção 3 definimos o que é pensamento algébrico e mostramos como ele pode ser desenvolvido através de atividades que exploram padrões e regularidades, além de apresentar a importante relação que subsiste entre linguagem e pensamento algébricos.

Logo após, na Seção 4 foi apresentado a partir da revisão bibliográfica às principais dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de Álgebra.

Na Seção 5, apresentamos os fatores que originam cada dificuldade, o que possibilitou relacioná-las mediante similaridades na distribuição destes fatores, estruturando assim interseções entre elas. Tendo em vista essas relações, bem como todo o referencial teórico, nesta seção foram elaboradas atividades que servirão de subsídio didático para professores do Ensino Médio e Fundamental, visando minimizar as dificuldades encontradas, e assim melhorar o desempenho dos estudantes na aprendizagem de Álgebra.

Na Seção 6, fazem-se as considerações finais sobre o trabalho que desenvolvemos, e a seguir, apresenta-se as referências bibliográficas que foram utilizadas.

Por fim, na parte dos apêndices apresentamos o artigo derivado desta pesquisa de dissertação, que foi publicado nos anais do VII Congresso Nacional de Educação (VII CONEDU), no ano de 2020.

2 ENSINO DA ÁLGEBRA E PERSPECTIVAS ATUAIS

Um dos objetivos desta pesquisa foi observar a forma como é ensinada a Álgebra na educação básica e como os estudantes a encaram. A busca em entender melhor as conceções de Álgebra, é relevante devido às grandes dificuldades em aprender e ensinar esse conteúdo. Identificar e conhecer estas conceções ajudarão os professores a organizar seu trabalho com o objetivo de priorizar os tópicos mais essenciais naquele momento de ensino, levando em conta as diferentes abordagens e dificuldades em Álgebra.

Em geral, a Álgebra tem espaço privilegiado nos livros didáticos e currículos, em virtude de ser reconhecida como uma área de conhecimento necessária ao desenvolvimento da sociedade. Contudo, ainda ocorre do seu ensino ser abordado de forma mecânica, focalizando-se na manipulação, o que pode acarretar na desmotivação por parte dos estudantes no seu estudo. As dificuldades no ensino e aprendizagem da Álgebra, que serão apresentadas na Seção 3, sinalizam que é necessário repensar a forma como este conteúdo é ensinado em sala de aula. Algumas destas dificuldades podem estar relacionadas às conceções que se tinham e têm de Álgebra.

Diante das diferentes formas de lidar com a Álgebra, tanto os professores ao ensinar como os estudantes ao aprender, surge a necessidade de analisar as suas conceções, nos seus aspectos didáticos, de conteúdos e curriculares. Investigaremos estas conceções, comparando-as, com o intuito de criar referenciais e critérios que nos possibilitem analisar as dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem da Álgebra, dada a repercussão que estas conceções têm na prática docente e na atividade algébrica. Também na tentativa de compreender as formas como, e os contextos em que, é trabalhada a Álgebra nas salas de aula, apresentaremos nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 as conceções de Álgebra e/ou Educação Algébrica a partir dos trabalhos de Usiskin (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, 1993), de Lins e Gimenez (2001), respectivamente. Posteriormente apresentaremos o ensino de Álgebra pelo olhar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Por fim, examinaremos, como a Álgebra é abordada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), suas possíveis mudanças e perspectivas para o ensino atual.

2.1 AS CONCEÇÕES DE ÁLGEBRA SEGUNDO USISKIN

Ao tentar definir o que é Álgebra, comumente a relacionamos com as operações com letras e a compreensão dos seus significados, e assim “consideramos que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez” (USISKIN, 1995, p. 9). Para

Usiskin (1995), as variáveis possuem um conceito multiface, sendo concebidas em diferentes quadros de trabalho. Esses diferentes usos da variável, foram sintetizados no Quadro 1.

Quadro 1 - Conceito multiface de variável

Situações	**Exemplos de diferentes usos de uma variável**
Fórmula: $A = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}$	Fórmula da área de um retângulo, onde as letras (variáveis) representam coisas conhecidas, neste caso, A de área, b de base e a de altura.
Equação: $40 = 50x$	Variável como algo desconhecido: incógnita.
Identidade: $senx = cosx \cdot tgx$	Variável como argumento de uma função.
Propriedade: $1 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$	Variável como generalizadora de modelos.
Expressão que traduz uma função: $y = kx$	Variável traduz uma proporcionalidade direta, onde há o caráter de variabilidade.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Usinkin (1995, p. 10)

Ao olhar para a variável em apenas uma de suas conceções, ocorre uma supersimplificação que distorce os objetivos da Álgebra (USISKIN,1995). Com o objetivo de levar os educandos a compreender a Álgebra em seus diversos aspectos, é necessário que as atividades trabalhadas em sala de aula sejam significativas, motivando-os ao vislumbre matemático, através da análise, observação, argumentação, identificação de padrões, generalização, formalização e comunicação (HANKE,2008).

Para isso Usiskin (1995) identifica quatro conceções para a Álgebra: a Álgebra como aritmética generalizada, a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a Álgebra como estudo de relações entre grandezas e a Álgebra como estudo de estruturas. Segundo Usiskin (1997, p. 13, grifos do autor),

> **As finalidades da Álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes* **da Álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis.**

Essas conceções de Álgebra associada ao papel atribuído à variável, serão apresentadas a seguir.

2.1.1 A Álgebra como Aritmética Generalizada

Encarar a Álgebra como uma aritmética generalizada, é fundamental para ajudar a compreender a noção de variável e generalização, podendo ser trabalhada desde as séries iniciais com atividades que a envolvam intuitivamente. Segundo Usiskin (1995), dentro dessa conceção, a variável é encarada como generalizadora de modelos, sendo imprescindível para se trabalhar com a modelagem matemática. Trabalhar atividades algébricas sob esta conceção traz resultados positivos não somente na Álgebra, mas também em Aritmética, já que é necessário que o estudante conheça a estrutura aritmética e as operações entre os números.

Reconhecemos a utilização desta conceção quando o estudante começa a manipular letras em vez de números, compreendendo a Álgebra como uma ferramenta que generaliza processos, operações e propriedades sobre os números, utilizando uma linguagem mais sofisticada para esse fim (SANTOS, 2007). Por exemplo, podemos escrever para nossos estudantes que $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $2 + 0 = 0 + 2 = 2, \dots, 5 + 0 = 0 + 5 = 5$, para que ele possa generalizar a propriedade aritmética do elemento neutro na operação soma, escrevendo-se $b + 0 = 0 + b = b$. Nesse sentido, segundo Usiskin (1995), generaliza-se de modo a encontrar uma propriedade, através da tradução de uma ideia. Podemos exemplificar esse pensamento, ao generalizar $2 + 7.4 = 7.4 + 2,$ como $x + y = y + x,$ ou seja, através da inferência numérica, encontra-se intuitivamente a propriedade comutativa.

Portanto, na conceção de Álgebra como aritmética generalizadora, a variável generaliza propriedades através da observação de relações conhecidas entre números, ou seja, não há a ideia de incógnita, ou valores a serem descobertos.

2.1.2 A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

No entendimento da Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, ao contrário da conceção anterior, as variáveis são encaradas como incógnitas, ou seja, um termo desconhecido, onde as “[...] instruções-chave são *simplificar* e *resolver* ” (USISKIN, 1995, p. 15, grifos do autor).

Espera-se do estudante que ele traduza um problema para a linguagem algébrica (neste momento utilizando-se da primeira conceção de Álgebra) com o objetivo de resolvê-lo, usando certos passos em uma determinada ordem. Muitas vezes são criadas regras para a resolução de problemas, com o intuito de facilitar, mas estas só facilitam se o estudante entender de onde elas provêm e como estas foram obtidas; caso contrário, elas criam uma falsa sensação de facilitar o aprendizado. Um exemplo típico em sala de aula é a resolução do seguinte problema: O dobro de um certo número adicionado a 4 unidades é igual a 10. Encontre o número.

Traduzindo-o para a linguagem algébrica, escreveríamos $2x + 4 = 10$. O estudante deve perceber que é necessário realizar operações inversas em ambos os membros da equação, a fim de encontrar o valor da incógnita x, como descrito abaixo:

$$2x + 4 = 10$$
$$2x + 4 - 4 = 10 - 4$$
$$2x = 6$$
$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}6$$
$$x = 3$$

Ocorre que, “Essa regra da transposição, usando operações inversas, muitas vezes é assimilada pelo aluno como ‘muda de membro, muda sinal’ [...] ” (HANKE, 2008, p. 58). Como temos uma igualdade, tudo o que é feito em um membro tem que ser feito no outro, caso contrário, deixa de ser uma igualdade. Este comentário é o tipo de coisa que deve ser dita ao aluno. Talvez até exemplificar com uma balança em equilíbrio: o equilíbrio só é mantido se o peso de ambos os lados for o mesmo. Assim se tirar um quilo de um lado da balança, para que ela fique em equilíbrio preciso de tirar um quilo do outro: é o que acontece com igualdades.

Segundo Hanke (2008), deve-se dar muita atenção neste momento de ensino, para não focalizar apenas nos métodos, que muitas vezes não são compreendidos, mas sim decorados. Nesse sentido, os alunos não estarão traçando caminhos para desenvolver o pensamento algébrico e internalizar os conceitos da Álgebra, na verdade estarão apenas manipulando símbolos mecanicamente.

Dessa forma, essa conceção se pauta principalmente na resolução de equações, algo a ser resolvido, objetivando encontrar o valor numérico de uma letra (incógnita), a qual não tem caráter de variação, mas de valor desconhecido.

2.1.3 A Álgebra como estudo de relações entre grandezas

Na conceção de Álgebra como um estudo de relações entre grandezas, as letras (variáveis) podem assumir vários valores, expressando relações entre elas. Quando por exemplo, estamos lidando com a fórmula da área do retângulo $A = b \cdot a$, $(A, b\ e\ a$, são respectivamente a área, base e altura) não estamos lidando com a busca de valores, como se estivéssemos à procura do resultado de uma incógnita. Na verdade, não estamos resolvendo alguma coisa e sim relacionando três grandezas (USISKIN, 1995). É através dessa conceção que se dá significado ao estudo de funções, onde a noção de função pode ser iniciada através de atividades que exploram sequências geométricas, pois ao analisar e perceber os padrões, o estudante está relacionando grandezas (HANKE, 2008).

Para diferenciar esta conceção das anteriores, em relação ao sentido que é dado à variável, usaremos o exemplo de Usiskin (1995, p. 15): “O que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior? ” Concordamos com o autor, que apesar da simplicidade deste exemplo, ele pode provocar dúvidas nos estudantes, pois neste caso o “x” não é para ser encontrado, ou seja, não é uma incógnita. Não é também uma generalização, já que não faz sentido analisar o que acontece para um único valor em específico (USISKIN, 1995).

Nesta conceção, a Álgebra se preocupa com os modelos e relações funcionais, que promovem e descrevem relações entre grandezas. As letras atuando verdadeiramente como variáveis expressarão relações de dependência e independência entre quantidades e medidas, podendo ser representadas graficamente (SANTOS, 2007). Nesse sentido, a variável independente pode assumir o papel de argumento e todos os valores que este pode assumir formam o domínio da função, enquanto que os valores da variável independente formam a imagem da função. (O contradomínio contém a imagem da função, mas estes podem não ser iguais, ou seja, $Im(f)$ pode apenas estar incluso no contraminínio). Também as letras podem ser encaradas como parâmetros, como por exemplo na equação $y = mx + n$ onde m e n são parâmetros (USISKIN, 1995).

Assim, as atividades relacionadas com relações entre grandezas são importantes, além de desenvolverem o raciocínio envolvido na obtenção de modelos que descrevem fenômenos naturais e situações do cotidiano, também permitem aprimorar a linguagem algébrica.

2.1.4 A Álgebra como estudo das estruturas

Identifica-se a Álgebra como estudo das estruturas, quando lidamos com expressões variáveis, sem ligação direta, pelo menos inicialmente, com um problema numérico, uma relação funcional, ou um modelo a ser traduzido e generalizado (SANTOS, 2007). Usiskin (1995) exemplifica esta conceção pelo uso das propriedades atribuídas às operações com polinômios e números reais. Por exemplo, suponhamos que se queira fatorar a expressão $3x^2 + 4ax - 132a^2$. Observamos neste exemplo que a utilização e o significado da variável não é o mesmo que nas conceções anteriores. Primeiramente não há um modelo aritmético a ser traduzido e generalizado, como na primeira conceção. Segundo, este exemplo não consiste de uma equação, ou seja, a variável não assume papel de incógnita ou algo a ser encontrado. Finalmente, não se trata também de uma lei funcional, portanto a variável independente não é vista como um argumento (USISKIN, 1995). Sendo assim, nessa conceção as letras podem ser manipuladas segundo as regras da aritmética, como símbolos arbitrários, onde os estudantes muitas vezes as encaram simplesmente como rabiscos no papel (SANTOS, 2007; USISKIN, 1995).

Muitas das dificuldades e questionamentos no ensino de Álgebra vêm à tona quando estamos trabalhando atividades relacionadas a essa conceção, pois exige do estudante maior amadurecimento com relação às técnicas e operações algébricas, tendo em vista que as letras estarão em um contexto abstrato. Normalmente esta situação ocorre por volta do 7º ano do ensino fundamental, quando começa o trabalho com produtos notáveis, fatoração, simplificação de expressões algébricas e operações com monômios e polinômios. Neste contexto, o estudante irá manipular as variáveis “usando propriedades que são exatamente tão abstratas” (USISKIN, 1995, p. 18) quanto a “expressão a ser manipulada” (HANKE, 2008, p. 59).

É muito importante que os estudantes saibam lidar abstratamente com as variáveis utilizando técnicas adequadas, contudo, conforme Hanke (2008), o uso das técnicas ou regras sem significado, dificulta o aprendizado e consequentemente leva a erros conceituais. Podemos exemplificar esta situação com um exemplo bem comum nas salas de aula, que se trata de quando pedimos para os estudantes simplificarem uma expressão algébrica. Dificilmente o estudante vê algum objetivo ou sentido em executar esta ação, afinal de contas, não é para encontrar o valor da variável. Ele não entende que simplificar por si só é uma resolução: não sabe distinguir equações de expressões algébricas (HANKE, 2008).

A utilização de atividades sob esta conceção, oportuniza aos estudantes experiência com a Álgebra abstrata, aprimorando as técnicas de manipulação e compreensão de modelos mais abstratos e formais. E para isso, é necessário que se dê significado ao cálculo algébrico, justificando os objetivos que levam a simplificação e fatoração de expressões.

Portanto, para Usiskin (1995) as conceções de Álgebra estão relacionadas aos papéis atribuídos às variáveis, as quais devem ser exploradas e trabalhadas em contextos significativos. O autor destaca que estas conceções podem mudar com o tempo, como por exemplo devido às aplicações matemáticas e à utilização dos computadores. O autor exemplifica as conceções através de atividades, mas não menciona o pensamento algébrico ou sobre como essas atividades o podem desenvolver. Segue abaixo o Quadro 2, que resume as quatro conceções de Álgebra apresentadas por Usiskin (1995).

Quadro 2 - Síntese das conceções de Álgebra de Usiskin (1995)

Conceção da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de padrões (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: adaptado de Usiskin (1995, p. 20)

2.2 AS CONCEÇÕES DE ÁLGEBRA E EDUCAÇÃO ALGÉBRICA, SEGUNDO FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL

Os trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993) têm sido referência para pesquisas sobre conceções de Álgebra e Educação Algébrica, contribuindo com as investigações e reflexões sobre as implicações dessas conceções na organização dos currículos, confecção dos livros didáticos e no próprio ensino e aprendizagem de Álgebra atualmente (SILVA et al., 2015). Portanto, apresentaremos a seguir, as referidas abordagens didáticas do ensino de Álgebra, dissertando sobre como a Álgebra foi encarada (como uma forma de pensar, como linguagem, como procedimento, etc.) durante as mudanças significativas que ocorreram ao longo do tempo.

2.2.1 Conceções de Álgebra

As conceções de Álgebra segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), são estabelecidas levando em conta o seu desenvolvimento histórico, e a construção do pensamento e linguagem em cada etapa de evolução da Álgebra. Os autores categorizam essas conceções em: processológica, linguístico-estilística, linguístico-sintático-semântica e linguístico-postulacional.

A conceção processológica de Álgebra é encarada como um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) com o objetivo de resolver um certo tipo de problema, a partir de passos sequenciais padronizados. Observamos algumas semelhanças entre esta conceção e a conceção de Álgebra como procedimentos para resolver um problema, indicada por Usiskin (1995). Apesar de que em Usiskin (1995) especifica-se o uso da letra como incógnita e em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) não, as duas possuem em comum o caráter tecnicista e algoritmizado, com o objetivo de resolver um problema.

A conceção linguístico-estilística de Álgebra é encarada como uma linguagem, que é criada especificamente para expressar objetivamente os procedimentos da conceção anterior. Nesta conceção não basta existir um pensamento algébrico, mas enfatiza-se a forma de expressão desse pensamento (linguagem). Distingue-se o pensamento da sua expressão, propondo uma ruptura desta linguagem específica com a linguagem corrente.

Entende-se a conceção de Álgebra como linguístico-sintático-semântica, aquela que, como na conceção anterior, é caracterizada por uma linguagem concisa e específica, contudo valorizando os diferentes significados para a representação dos símbolos (semântica) e as relações existentes entres eles (sintático). Nas palavras dos autores: "É a distinção semântica possibilitando o desenvolvimento dessa linguagem ao nível sintático e ampliando, assim, o seu poder instrumental" (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 83). Os autores pontuam que esta conceção é ainda mais rigorosa que a anterior, pois nela, a condição necessária para que exista um pensamento algébrico vai além de se conceber uma linguagem específica para esse pensamento, mas

> [...] a consciência de que essa linguagem, para adquirir a dimensão operatória e revelar o seu poder transformacional e instrumental, deve atingir o *status* e o estágio mais elevado de uma linguagem verdadeiramente simbólica, no sentido anteriormente definido (FIORENTINI, MORIM, MIGUEL, 1993, p. 83, grifo dos autores).

A conceção linguístico-postulacional, também encara a Álgebra sob as lentes da linguagem simbólica, contudo os símbolos passam a representar entidades matemáticas de caráter genérico e abstrato. Diferente de antes, não se restringe à representação de quantidades contínuas ou discretas, mas estende os domínios da Álgebra ao tratar de entidades matemáticas que não estão sob o tratamento quantitativo, como por exemplo, as estruturas topológicas.

Após a identificação e caracterização destas conceções de Álgebra, os autores as relacionam com as principais conceções de Educação Algébrica, firmadas durante o desenvolvimento da educação matemática elementar. Essas conceções, e as referidas relações existentes, serão apresentadas a seguir.

2.2.2 Conceções de Educação Algébrica

No tocante a Educação Algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) dividem o desenvolvimento do ensino de Álgebra em três principais conceções: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica. Iremos ver a seguir essas três conceções sobre o ensino de Álgebra que surgiram antes, durante e depois do movimento da matemática moderna.

2.2.2.1 Conceção linguístico-pragmática

Antes do movimento da matemática moderna, a abordagem algébrica era mecânica e automatizada, onde Aritmética e Álgebra eram vistas numa relação de complementação: a Álgebra era encarada como mais poderosa que a Aritmética, devido a possibilitar generalizações (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1992).

A primeira conceção chamada linguístico-pragmática repercutiu-se durante o século XIX e a metade do século XX. Nela acreditava-se que para o estudante ter a capacidade de resolver problemas, seria suficiente e necessário mesmo que mecanicamente, adquirir o transformismo algébrico – por meio da aplicação de regras e propriedades, obter expressões algébricas equivalentes. Neste momento a Álgebra era vista apenas como um instrumento técnico para resolver problemas, em maior nível do que era feito em Aritmética, enfatizando-se a técnica (sintaxe) (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTÓVÃO, 2005).

Acreditava-se que para ser possível aplicar a Álgebra nas resoluções de problemas, era antes necessário a prática de manipulações algébricas em atividades totalmente descontextualizadas, a partir do cálculo literal. Dessa forma o ensino de Álgebra era baseado na seguinte sequência de tópicos: iniciava-se pelo estudo das expressões algébricas, por conseguinte, aplicava-se operações nestas mesmas expressões encontrando outras equivalentes, e por fim as utilizavam na resolução de algum problema (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993). Observa-se que esta abordagem didática para a Álgebra, baseia-se na conceção algébrica linguístico-sintático-semântica e processológica, onde enfatiza-se primeiro a linguagem algébrica e seu poder instrumental.

> Devido a essa característica de se investir na linguagem algébrica para depois resolver problemas, Fiorentini, Miguel e Miorim chamaram essa primeira conceção de linguístico-pragmática – aprendia-se uma linguagem para a prática da resolução de problemas (GOMES, 2013, p. 34).

Para ilustrar essa conceção, Fiorentini, Miorim e Miguel (1992) apresentam um exemplo retirado de Pérez y Marín (1928, p. 35), que trata da multiplicação de expressões algébricas, onde a explicação é apresentada em forma de regra, e logo em seguida é indicada a aplicação da mesma através de exemplos literais. Apresentamos esse exemplo no quadro abaixo.

Quadro 3 - Multiplicação de expressões algébricas

1º caso: Para multiplicar um monômio por outro, multiplicam-se os coeficientes e, em continuação, escrevem-se as letras, afetando cada uma de um expoente igual à soma dos expoentes que a mesma letra tem nos monômios, e ao produto obtido dá-se o sinal que lhe corresponde, segundo a regra dos sinais. Exemplos: $(3a^2b) \cdot (4ab^2c) = 12a^3b^3c$; $(-7xy) \cdot (5x^2z) = -35x^3yz$; $(5m^2n^4p^6) \cdot (-5mn^3p^5r^4s) = -25m^3n^7p^{11}r^4s$; $(-3a^3b^4c) \cdot (-2a^4b^2c^2d) = 6a^7b^6c^3d$.
2º caso: Para multiplicar um polinômio por um monômio, multiplica-se, pela regra do primeiro caso, cada um dos termos do polinômio pelo monômio, e somam-se os produtos parciais. É a mesma regra da multiplicação de uma soma e de uma diferença indicada por um número, já demonstrada em Aritmética. Exemplos: $(3a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3) \cdot 2a^2b = 6a^5b - 8a^4b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^4$ $(5x^3y - 2x^2y^2 - 9xy^3 - 4y^4) \cdot (-3xy^2) = -15x^4y^3 + 6x^3y^4 + 27x^2y^5 + 12xy^6$.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Pérez y Marín (1928, p. 35) apud Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, p. 43)

2.2.2.2 Conceção fundamentalista-estrutural

Com o movimento da matemática moderna na década de 60, houve uma busca por formalizar os conteúdos ensinados na matemática escolar, com a tentativa de unificar o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria. Isso deu-se

> [...] pela introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1992, p. 45).

Opondo-se à conceção anterior, (características pragmáticas com regras sem justificações e procedimentos mecânicos) surgiu uma nova conceção durante o movimento da matemática moderna: a fundamentalista-estrutural. Como o próprio nome já nos indica, ela tinha o objetivo de fundamentar a matemática escolar, baseada na conceção de Álgebra linguístico-postulacional, no qual se estudava as estruturas gerais. Para fornecer os fundamentos de toda à Matemática, em especial justificar cada passagem do transformismo algébrico, (cálculo algébrico e estudo das equações) introduziu-se o estudo dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e propriedades, das relações e funções (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTOVÃO, 2005). Pressupunham que justificando as operações através das propriedades, os estudos das equações levando em conta os campos numéricos das soluções, ajudariam os estudantes posteriormente a aplicar esses conceitos em outros contextos.

Para exemplificar essa conceção, Fiorentini, Miorim e Miguel (1992) lançam mão de exercícios retirados de um livro didático que refletia o ideário modernista, mostrando a fundamentação do transformismo algébrico a cada passo feito nos cálculos, por meio das propriedades estruturais dos conjuntos numéricos. Esses exemplos são apresentados no quadro a seguir.

Quadro 4 - Exercício resolvido, o qual pede para demonstrar $(a \cdot b) \div a = b$

Transformações	**Propriedades**
$(a \cdot b) \div a = (b \cdot a) \div a =$	Comutativa
$= (b \cdot a) \cdot \frac{1}{a} =$	Definição do divisor em $\mathbb{R}^*$
$= b \cdot \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) =$	Associativa
	Produto de elementos inversos
$= b \cdot 1 = b$	Elemento neutro

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Gruema (1977, p. 87 e 88) apud Fiorentini, Miorim e Miguel (1992)

Mostrando a contraposição entre essa nova conceção fundamentalista e a antiga conceção pragmática, observamos as duas definições de equação citadas abaixo, onde a primeira era comum no ensino “antigo” e a segunda no ensino “moderno”:

> Equação é toda igualdade que exprime uma relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas de um problema sendo as quantidades

> conhecidas, os dados do problema ou da equação e as quantidades desconhecidas as incógnitas (PÉREZ Y MARÍN, 1928, p.15 apud FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1995, p. 47).
>
> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um determinado conjunto universo (ZAMBUZZI, 1965, p. 14 apud FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1995, p. 47).

Observa-se que na segunda definição de equação, ao contrário da primeira, não se associa inicialmente o conceito de equação à necessidade de encontrar o valor da incógnita. Em vez de uma preocupação pragmática, enfatiza-se na precisão conceitual e na expressão de uma linguagem adequada que fundamente o conceito de equação. Assim conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), houve uma reorganização do currículo de Álgebra, de forma que os tópicos algébricos fossem antecedidos por tópicos fundamentadores: conjuntos numéricos, propriedades estruturais, estudos dos quantificadores, sentenças abertas e fechadas, conjunto universo e conjunto verdade, equações e inequações de 1º grau; e sucedidos por "novos" tópicos algébricos: funções, funções de 1º e 2º graus, entre outros.

2.2.2.3 Conceção fundamentalista-analógica

Após o movimento da matemática moderna, no final da década de 1970, surge uma nova conceção de Educação Algébrica chamada fundamentalista-analógica, a qual está vinculada a conceção de Álgebra linguístico-semântico-sintático. A conceção fundamentalista-analógica tenta sintetizar as outras duas anteriores, recuperando o transformismo algébrico – o valor instrumental da Álgebra através das regras e cálculos algébricos para resolução de problemas – e ao mesmo tempo se preocupando em justificar as passagens desse transformismo (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993). Por mais que essa conceção também tenha uma natureza fundamentalista, assim como ocorria no movimento modernista, a preocupação agora de fundamentar as passagens do transformismo algébrico se baseia em recursos geométrico-visuais.

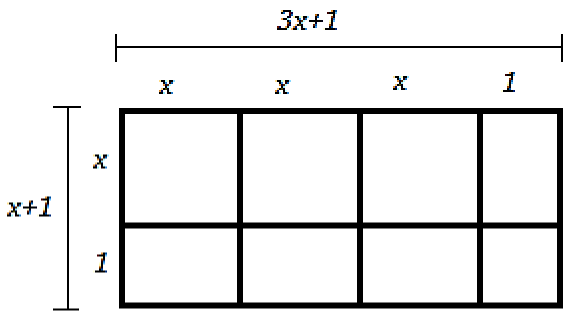
Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), nessa conceção acredita-se que uma "Álgebra geométrica" seria superior didaticamente falando, às abordagens estritamente lógico-simbólicas, devido essa nova abordagem permitir visualizar de forma mais concreta as identidades algébricas. Os autores ainda acrescentam que

> Isso, porém, não significa defender a tese determinista da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma de abordagem meramente simbólica e mais

> abstrata mas, simplesmente, acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 84).

Além de utilizar a Geometria para justificar o transformismo algébrico, outro recurso marcante dessa conceção é o uso de balanças e gangorras, para que através das leis de equilíbrio possam justificar aos estudantes a resolução de equações. Observamos que esta conceção ainda está relativamente presente em muitos livros didáticos e nas perspectivas atuais de ensino de Álgebra, quando se trabalha com produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas. Por exemplo para calcular o produto das expressões $3x + 1$ e $x + 1$, utiliza-se a ideia de área de um retângulo de lados respectivamente iguais a estas expressões, conforme ilustrado a seguir.

Figura 1- Produto de expressões algébricas utilizando a área de um retângulo



Fonte: produção do próprio autor

Com relação ao uso da balança, que também é presente hoje no ensino de Álgebra, é utilizada para mostrar que quando fazemos as mesmas operações em ambos os membros de uma equação, a igualdade se mantém. Para ilustrar essa situação podemos imaginar uma balança de dois pratos em equilíbrio, onde de um lado há um objeto de peso desconhecido e um peso de 10 kg. No outro há um peso de 5kg e outro de 10 kg. Ao se retirar dos dois lados o peso de 10 kg a balança continuará em equilíbrio e assim o objeto desconhecido possui peso igual 5kg. Justifica-se assim, as seguintes transformações: $x + 10 = 15 \Leftrightarrow x + 10 = 5 + 10 \Leftrightarrow x = 5$, subtraindo-se 10 de ambos os lados.

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) fazem uma síntese comparativa entre as três conceções e pontuam que elas possuem algo em comum que é didaticamente negativo: “[...] a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica”. Dessa forma dá-se destaque à ideia de um pensamento, que independente de uma linguagem especificamente algébrica, pode ser manifestado, conferindo assim uma outra possibilidade para a Educação Algébrica: desenvolver o pensamento algébrico.

2.3 AS CONCEÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA, SEGUNDO LINS E GIMENEZ

Segundo Lins e Gimenez (2001, p. 89), não há consenso do que seja pensar algebricamente, mas existe consenso sobre "[...] quais são as coisas da Álgebra: equações, cálculo literal, funções [...]". Tendo isso em vista, os autores afirmam que as diferentes Conceções de Educação Algébrica são pautadas nos diferentes conceitos de atividade algébrica, ou seja, no significado que se dá àquilo que é caracterizado como algébrico. Os autores afirmam que essa atividade, numa descrição mais superficial, é caracterizada por resolver problemas da Álgebra, ou seja, é descrita como "fazer ou usar Álgebra" (LINS, GIMENEZ, 2001, p. 90). Indicam, portanto, algumas abordagens para o ensino e aprendizagem de Álgebra, que serão apresentadas nas seções a seguir.

2.3.1 Conceção letrista e letrista facilitadora

Nessa conceção a Álgebra (as atividades ditas algébricas) se resume ao cálculo com letras, seguindo a tradicional sequência "técnica (algoritmo) / prática (exercícios) ". Os autores ainda dizem que essa abordagem didática é muito comum na maioria dos livros didáticos encontrados no Brasil. Essa forma de ensino não se baseia em reflexões ou investigações, mas apenas tradições, as quais já se mostraram ineficazes em relação à aprendizagem (LINS, GIMENEZ, 2001). Assemelha-se à conceção linguístico-pragmática de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), onde valorizava-se o transformismo algébrico no qual o cálculo literal para a aplicação de conceitos era o foco das atividades.

Os autores questionam porque esta prática ainda é tão popular, e mostram que a resposta tem ligação com a própria conceção que o professor internalizou, por seguirem por tanto tempo apenas o que os livros oferecem, sem talvez procurar outras alternativas.

> Por um lado, é verdade que ainda precisamos que as editoras e as universidades colaborem mais, para produzir material que ofereça alternativa ao que domina hoje, mas, por outro lado, é mais do que provável que a repetição dessa prática por tanto tempo, aliada ao fato de que o livro representa uma voz que se reveste de *autoridade,* termine por constituir, para a maioria dos professores, a noção de que a atividade algébrica *é* "cálculo literal", incluindo-se aí "cálculos" menos ou mais difíceis – entre estes últimos, por exemplo, a resolução de equações, vista apenas do ponto de vista dos algoritmos (LINS, GIMENEZ, 2001, p. 106).

Sobre o que foi dito no parágrafo anterior, os autores esclarecem dois pontos. Primeiro, que de fato, a prática letrista representa de certa forma uma atividade algébrica, pois caso contrário não teria sobrevivido por tanto tempo. Segundo que, repensar essa prática, propõe mudanças, e para isso será necessário convencer muitas pessoas que a atividade algébrica não se resume apenas em cálculo literal.

Seguindo ainda uma tendência letrista, mas com uma abordagem facilitadora, propôs-se o uso de situações concretas (uso de materiais manipulativos) para que através da abstração, se formalize os conceitos de algumas estruturas algébricas. Por exemplo, o uso de áreas para ensinar produtos notáveis e das balanças para a resolução de equações. Essa abordagem didática possui semelhanças com a Conceção fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), na qual justificava-se o transformismo algébrico utilizando recursos geométrico-visuais e materiais concretos como gangorras.

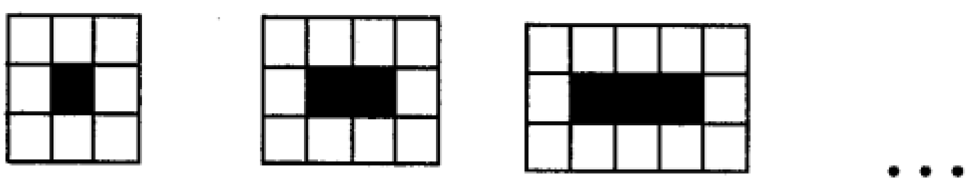
2.3.2 Álgebra como modelagem matemática

Nessa conceção, assim como na letrista facilitadora, as propostas partem do concreto, no entanto em situações reais (situações do cotidiano) ou realistas, (situações criadas com finalidade didática, com um máximo de semelhança com uma situação real) a partir de atividades investigativas e exploratórias. De acordo com Lins e Gimenez (2001, p. 109), essa abordagem didática se estabelece "[...] na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como uma ferramenta e não como objeto primário do estudo".

2.3.3 Álgebra como aritmética generalizada

Nessa abordagem didática, a atividade algébrica se caracteriza como expressão de uma generalidade. Para mostrar essa ideia de generalidade, podemos pensar em atividades que envolvam padrões geométricos, onde o objetivo é expressar algebricamente uma relação geral. Como por exemplo a relação entre quadrados brancos (B) e pretos (P), conforme a Figura 2.

Figura 2 - Atividade envolvendo padrão geométrico



$$B = 2P + 6$$

Fonte: Lins e Gimenez (2001, p. 110)

Há uma certa compensação com relação à tendência letrista, pois na conceção de Álgebra como aritmética generalizada, existe maior preocupação com a linguagem algébrica como meio de expressão, e não somente com os aspectos transformacionais da Álgebra. Portanto, nessa conceção é dado maior valor à linguagem algébrica como uma forma de exprimir ideias e significados, e ao mesmo tempo traduzir e generalizar padrões como é feito na conceção de Álgebra como aritmética generalizada de Usiskin (1995).

2.4 O ENSINO DE ÁLGEBRA SOB AS LENTES DOS PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais eram um conjunto de documentos com diretrizes curriculares, elaborados pelo Governo Federal com o objetivo de orientar e uniformizar a educação brasileira, antes da BNCC ser instituída. Os PCN para o ensino fundamental eram organizados em quatro ciclos, distribuídos em dois volumes (1997 e 1998) - Ensino fundamental I: ciclo 1 e 2, Ensino fundamental II: ciclo 3 e 4 - onde cada ciclo correspondiam a dois anos de ensino, na antiga divisão seriada. Os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM) foram elaborados em 1999, e posteriormente no ano de 2002 foram criadas orientações educacionais complementares a este documento (PCN+), focalizando em maior grau na formação profissional. Portanto, nesta seção examinaremos como a Álgebra e seu ensino eram abordados nesses documentos.

2.4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental

Os PCN do ensino fundamental I, que contemplava o primeiro e segundo ciclo, não fazia referência direta à Álgebra, mencionavam a pré-Álgebra, a qual poderia ser desenvolvida segundo o documento, nos anos iniciais, entretanto com maior foco nos anos finais do ensino fundamental.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-Álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1997, p. 39).

Nesse documento não havia uma proposta formal para o desenvolvimento do pensamento algébrico, de forma que a Álgebra era abordada sob o eixo do número e operações, com o objetivo de desenvolver procedimentos de cálculos, propriedades de operações e escrita numérica.

> Desenvolver procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados. Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática (BRASIL, 1997, p. 47).
>
> Ao construírem e organizarem um repertório básico os alunos começam a perceber, intuitivamente, algumas propriedades das operações, tais como a associatividade e a comutatividade, na adição e multiplicação. A comutatividade na adição é geralmente identificada antes de qualquer apresentação pelo professor. Isso pode ser notado em situações em que, ao adicionarem 4 + 7, invertem os termos para começar a contagem pelo maior número. Também algumas regularidades, presentes nas operações, começam a ser percebidas, tais como: observar que, nas multiplicações por 2, todos os resultados são pares; que, na tabuada do cinco, os resultados terminam em zero ou em cinco, etc. (BRASIL, 1997, p. 74).

No PCN do Ensino Fundamental II, a partir do terceiro ciclo (5ª e 6ª série), era sugerido a exploração de situações de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, mediante atividades que contemplassem os seguintes objetivos:

> - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
> - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

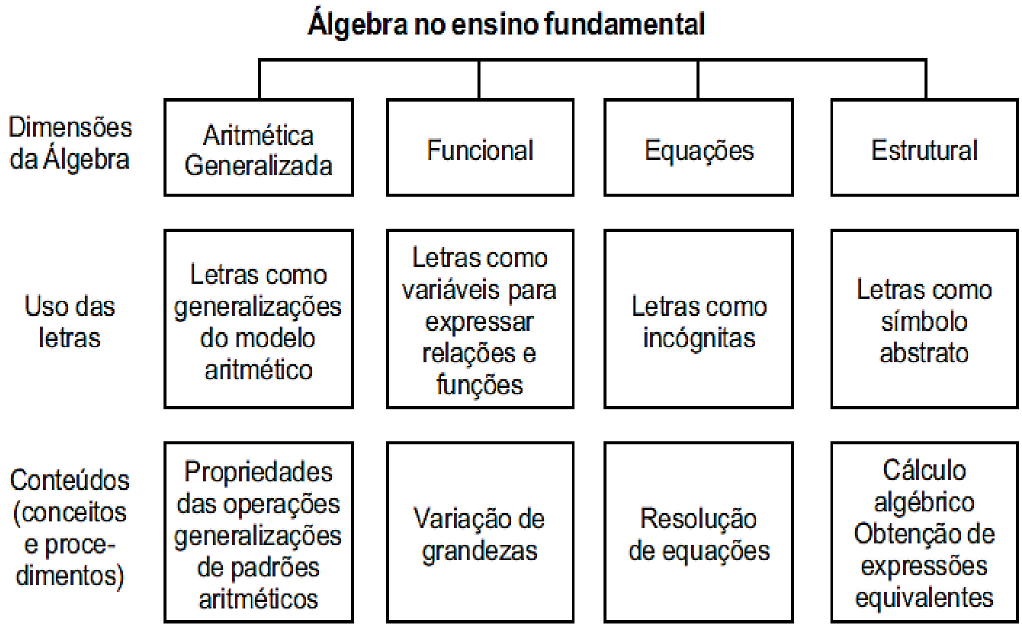
Finalmente, para o quarto ciclo (7ª e 8ª série), os PCN sugeriam desenvolver o pensamento algébrico a partir dos seguintes objetivos:

> - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
> - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (BRASIL, 1998, p. 81).

Nesse ciclo a Álgebra era desenvolvida a partir da pré-Álgebra trabalhada no ciclo anterior, onde os conceitos algébricos eram explorados intuitivamente por meio de jogos, generalizações, gráficos e modelos matemáticos, e não por procedimentos puramente mecânicos (BRASIL, 1998, p. 84). É indicado que a partir da resolução de problemas, os estudantes poderiam dar significado à linguagem algébrica e reconhecer as diferentes funções da Álgebra.

Os PCN para o ensino fundamental afirmavam que para desenvolver o pensamento algébrico, devia-se trabalhar atividades que inter-relacionam diferentes conceções de Álgebra. Estas conceções segundo os PCN, poderiam ser interpretadas levando em consideração o uso das letras, conforme a Figura 3.

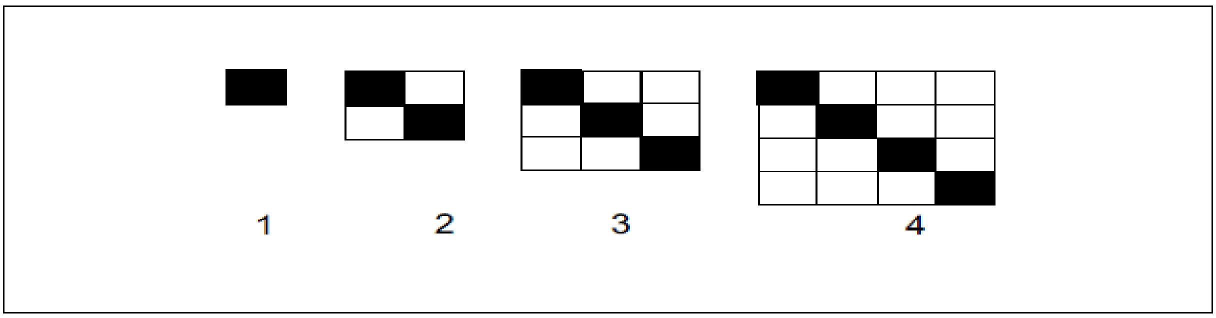
Figura 3 - Dimensões da Álgebra segundo os PCN



Fonte: Brasil (1997, p. 116)

Na dimensão da aritmética generalizada, os PCN recomendavam atividades que investigassem padrões, identificando sua estrutura e construindo uma linguagem algébrica para representá-la simbolicamente. Enfatizava-se o uso das letras para expressar regularidades, conforme ilustra a situação apresentada no Quadro 5.

Quadro 5 - Exemplo da dimensão aritmética generalizada



Nesta situação, o professor pode encaminhar uma atividade para que os alunos encontrem a expressão n^2 - n que determina o número de quadradinhos brancos da n-ésima figura (ao retirar-se n quadradinhos pretos do total n^2 de quadradinhos). Eles também verificam que os quadradinhos brancos de cada figura, a partir da segunda, podem formar um retângulo de $n \cdot (n-1)$ quadradinhos brancos. Assim os alunos podem constatar a equivalência entre as expressões: $n^2 - n$ e $n \cdot (n - 1)$.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Brasil (1998, p. 117)

Na dimensão funcional, as atividades tinham como objetivo identificar as letras como variáveis representando números de um conjunto numérico, ou seja, não somente como valor desconhecido (incógnita). E a partir da exploração de situações que envolviam variações de grandezas, desenvolver o conceito de função. Os PCN recomendavam a utilização de softwares, tabelas, planilhas, gráficos e calculadoras para a realização dos procedimentos. Exemplificando esta conceção

> O dono de um grande estabelecimento concluiu que o preço de uma determinada linha de produtos deveria ser vendida a varejo com um valor majorado em 40% sobre o de custo para que a margem de lucro fosse significativa (BRASIL, 1998, p. 119).

A partir desta situação, os estudantes deviam construir uma tabela expondo a relação entre o preço de venda e custo, conforme apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 - Exemplo da dimensão funcional

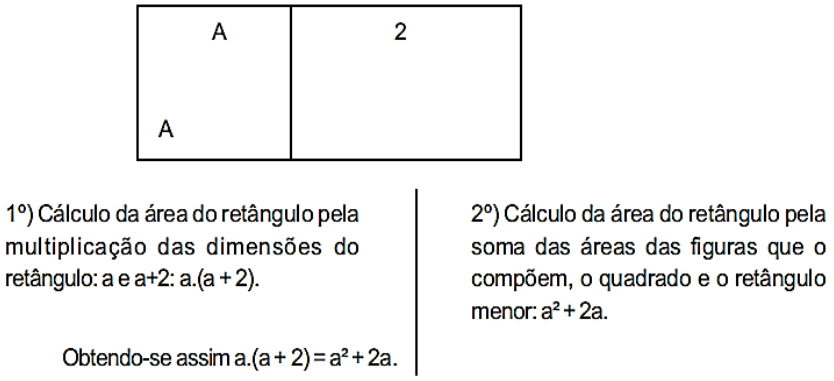
Produto	P: preço de custo (R$)	V: preço de venda (R$)
I	$2{,}80$	$2{,}80 + 2{,}80 \cdot 0{,}4 = 3{,}92$
II	$5{,}00$	$5{,}00 + 5{,}00 \cdot 0{,}4 = 7{,}00$
III	$8{,}25$	$8{,}25 + 8{,}25 \cdot 0{,}4 = 11{,}55$
IV	$9{,}45$	$9{,}45 + 9{,}45 \cdot 0{,}4 = 13{,}23$
V	$10{,}00$	$10{,}00 + 10{,}00 \cdot 0{,}4 = 14{,}00$
	$\dots$	$\dots$
	P	$P + P \cdot 0{,}4$

Fonte: adaptado de Brasil (1998, p. 119)

No exemplo citado acima, a letra representa uma incógnita, ou seja, um valor que necessita ser encontrado. A partir disso, propõe-se a resolução de uma equação, como por exemplo: “qual é o preço de custo de uma mercadoria que tem o preço de venda R$ 11,20? ” (BRASIL, 1998, p. 119).

Na dimensão estrutural, objetivava-se explorar atividades que envolviam simplificação de expressões algébricas, para facilitar a resolução de equações que modelam matematicamente uma situação-problema. Enfatizava-se também o cálculo algébrico, onde as letras possuem caráter abstrato, as quais podiam ser melhor compreendidas usando recursos geométricos, conforme é exemplificado na Figura 4.

Figura 4 - Visualização de expressões algébricas através do cálculo de áreas



Fonte: Brasil (1998, p. 121)

Os PCN recomendavam a interpretação geométrica dos cálculos algébricos por serem interessantes, mas nem sempre era possível encontrar um modelo geométrico para justificar um cálculo algébrico. Observamos uma forte influência do trabalho de Usiskin (1995) no PCN. Essas semelhanças serão melhor representadas, resumidamente, no Quadro 7.

Quadro 7 - Semelhanças entre as conceções de Álgebra de Usiskin (1995) e dimensões da Álgebra dos PCN

Conceções de Álgebra segundo Usiskin (1995)	Dimensões da Álgebra segundo o PCN
Aritmética generalizada • Letras como generalizadoras de padrões Objetivos: traduzir, generalizar	**Aritmética generalizada** • Letras como generalizações de modelos aritméticos Conteúdos: propriedades das operações e generalização de padrões

Conceções de Álgebra segundo Usiskin (1995)	Dimensões da Álgebra segundo o PCN
Meio de resolver certos problemas • Letras como incógnitas e constantes Objetivos: resolver e simplificar.	**Equações** • Letras como incógnitas Conteúdos: resolução de equações
Estudo de relações • Letras como argumentos e parâmetros Objetivos: relacionar, construir e analisar gráficos.	**Funcional** • Letras como variáveis para expressar relações e funções Conteúdo: variação de grandezas
Estudo das estruturas • Letras como rabiscos arbitrários no papel Objetivos: manipular e justificar.	**Estrutural** • Letras como símbolo abstrato Conteúdos: Cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Usiskin (1995) e BRASIL (1998)

Portanto, as atividades algébricas propostas pelos PCN do ensino fundamental desenvolviam-se a partir da resolução de problemas, com o objetivo de conferir significado à linguagem, dimensionando a Álgebra mediante as diferentes interpretações das letras.

2.4.2 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Nos PCNEM e PCN+ há um consenso sobre a importância da Álgebra para a comunicação e interpretação de situações da vivência cotidiana, se apresentando como linguagem (gráficos de um noticiário, por exemplo) e como instrumento de cálculo (cálculos financeiros, em geral). Os documentos afirmam que o currículo deve garantir o aprofundamento dos conhecimentos relativos à Álgebra levando em consideração as questões históricas e sociais do seu desenvolvimento. Elencam também habilidades que devem ser desenvolvidas, juntamente aos conteúdos algébricos: “[...] resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real" (BRASIL, 1999, p. 44).

O PCN+ tematiza a Álgebra como números e funções, e para o seu desenvolvimento propõe duas unidades: variação de grandezas e trigonometria. Destaca como procedimentos básicos da Álgebra, os processos de calcular, identificar variáveis, construir e interpretar gráficos, e resolver equações levando em conta os números reais (BRASIL, 2002, p. 120 e 121).

O PCN+, salienta que o estudo de funções deve ser abordado na forma de aplicações, de modo que o estudante adquira a linguagem algébrica como uma linguagem utilizada nas ciências. Sugere abandonar em parte o tradicional enfoque na linguagem excessivamente formal e iniciar diretamente pela noção de função em situações que apresentem dependência de grandezas. No tocante às sequências, sugerem conectá-las à ideia de função, associando-as a gráficos e analisando os conceitos de crescimento e decrescimento.

No estudo da trigonometria, indicam que é necessário que seu estudo esteja ligado às aplicações, como por exemplo problemas que envolvem medição, cálculo de distâncias e a construção de modelos de fenômenos periódicos. Ainda no campo da Álgebra, há o estudo das equações polinomiais e sistemas lineares, que deve ser uma extensão dos conhecimentos que os estudantes já possuem de equações de 1º e 2º grau, e de sistemas de equações lineares 2 x 2, respectivamente.

Os conteúdos e habilidades propostos por unidade temática, são apresentados no Quadro 8.

Quadro 8 - Conteúdos e habilidades por unidade temática

Variação de grandezas
Conteúdos: • noção de função; funções analíticas e não-analíticas; • representação e análise gráfica; • sequências numéricas: progressões e noção de infinito; • variações exponenciais ou logarítmicas; • funções seno, cosseno e tangente; • taxa de variação de grandezas. Habilidades: • Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.

- Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
- Associar diferentes funções a gráficos correspondentes.
- Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
- Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

Trigonometria

Conteúdos:

- Trigonometria do triângulo retângulo;
- Trigonometria de um triângulo qualquer;
- Trigonometria da primeira volta.

Habilidades:

- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana xem um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Brasil (2002, p. 122 e 123)

Portanto, percebemos que nestes documentos referentes ao ensino e divisão curricular da Álgebra, a abordagem utilizada é a resolução de problemas, priorizando a aplicação e contextualização dos conteúdos e não a obtenção teórica e rígida de conceitos puramente matemáticos. Também podemos observar, que a proposta de trabalho é multidisciplinar, ao passo que objetiva-se interpretar modelos e transformações, analisar regularidades, relacionar os conteúdos com sua parte histórica, social e cultural.

2.5 ÁLGEBRA SEGUNDO A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018, p. 7).

O objetivo desse documento é ser um referencial nacional para a construção dos currículos em toda rede de ensino da Educação Básica, alinhando políticas educacionais para a formação de professores, avaliação e elaboração de conteúdos e critérios para a oferta de infraestrutura. Será apresentado nas seções seguintes, como a Álgebra está inserida neste documento, nos níveis fundamental e médio, e também serão analisadas as possíveis diferenças e semelhanças com os PCNs.

2.5.1 A etapa do Ensino Fundamental

Desde os primeiros anos do ensino fundamental, a BNCC na unidade temática Álgebra, tem por objetivo desenvolver o pensamento algébrico, de forma que para o seu desenvolvimento

> é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL, 2018, p.270).

Nos anos iniciais, o trabalho com Álgebra é iniciado com as ideias de regularidades, generalização de padrões e propriedades de igualdade. Entretanto, não é proposto nesta fase a utilização de letras para expressar essas regularidades. Nesta fase, o trabalho com sequências envolve atividades de completar e construir uma sequência mediante alguma regra de formação. Também é trabalhada a noção de equivalência através de atividades que envolvam igualdade, como: “[...] se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$” (BRASIL, 2018, p. 270). Essas atividades são muito importantes para desconstruir a ideia de que a igualdade é um símbolo unidirecional (sempre precede uma resposta numérica ou obedece sempre um único sentido para a resolução) e também que a igualdade nem sempre significa que uma operação deve ser realizada. Ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o documento sugere trabalhar a noção intuitiva de função, através da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre grandezas, no entanto sem a utilização da regra de três.

Ao contrário dos PCN que traziam nos anos iniciais no ensino fundamental uma pré-Álgebra inserida no bloco de números e operações, na BNCC a Álgebra compõe um dos cinco eixos temáticos. Nos PCN os conteúdos algébricos eram sugeridos mais fortemente nos anos finais do ensino fundamental, e não faziam referência direta ao pensamento algébrico nas séries iniciais do ensino fundamental. Além disso, nos PCN as representações algébricas eram utilizadas para expressar propriedades aritméticas e construir procedimentos de cálculos, enquanto na BNCC - anos iniciais do ensino fundamental, o trabalho algébrico se estrutura fortemente na forma de pensar com relação às propriedades aritméticas e não apenas nos cálculos e algoritmos, dado que não se trabalha ainda a linguagem simbólica e abstrata. Percebemos que não houve um adiantamento de conteúdo, mas sim uma mudança na forma de trabalhar e o enfoque dado ao desenvolvimento de um pensamento que será muito útil nos anos seguintes.

Segundo a BNCC, a Álgebra no ensino fundamental - anos iniciais, está dividida conforme o Quadro 9.

Quadro 9 - Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
1º ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09)[1] Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
		(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

[1] Cada habilidade é indicada por um código alfanumérico cuja composição discrimina a etapa, o componente curricular e competências a que se refere.

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4ºano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
		(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
		(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
5º ano	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
		(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de BRASIL (2018, p. 278-295)

A Álgebra é estudada no 1º ano (antiga alfabetização), através de conteúdos que relacionam regularidades e padrões numéricos e geométricos, em operações e propriedades aritméticas, no 3º ano a partir do conceito de equivalência nas igualdades, e no 5º ano são introduzidos os conceitos de variação de grandezas.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe uma retomada ao que foi trabalhado em Álgebra nos anos iniciais, com o objetivo de ampliar e aprofundar os conceitos. É proposto que nesta fase os estudantes saibam os diferentes significados das variáveis em uma expressão, consigam generalizar uma propriedade, investigar regularidades em sequências numéricas, indicar valores desconhecidos e estabelecer variações entre duas grandezas (BRASIL, 2018). Para isso é necessário que os estudantes saibam relacionar função e variável, e equação e incógnita, além de trabalhar a resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, com o objetivo de resolver problemas em um determinado contexto. Outro aspecto que também é considerado neste eixo temático, é o fato da possibilidade de desenvolver o pensamento computacional, em virtude da semelhança que existe entre as linguagens algébricas e algorítmicas, em especial com respeito ao conceito de variável. Nesta fase, ao contrário da anterior, é destacado o uso da linguagem simbólica para representar e argumentar.

Podemos observar abaixo no Quadro 10, o que foi exposto no parágrafo acima relativamente à divisão da Álgebra proposta pela BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental.

Quadro 10 - Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental

SÉRIE	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6º ano	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º ano	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
		(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
		(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

SÉRIE	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
8º ano	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
		(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
		(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º ano	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para

SÉRIE	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
9º ano		analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
	Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	

Fonte: produção do próprio autor, a partir de BRASIL (2018, p. 302-317)

Observamos que no sexto ano é retomado o pensamento relacional da igualdade e problemas de partição, onde as primeiras noções foram trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No sétimo ano, percebemos a introdução da linguagem algébrica através da diferenciação e apropriação dos significados de variável e incógnita, permeando as expressões algébricas até chegar nas equações polinomiais do 1º grau. Diferentemente de conceções de Álgebra anteriores já citadas neste trabalho, como a processológica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Letrista de Lins e Gimenez (2001), aqui o manuseio dos símbolos deve ter sentido, aquando da tradução de situações diversas, em equações, tabelas e gráficos. Nos oitavo e nono anos não se trabalham exaustivamente a resolução de equações, mas a capacidade de resolver problemas através do pensamento algébrico, e daí utilizar equações, inequações e funções.

A BNCC estabelece que no Ensino Fundamental os estudantes devem aprender a Matemática para ser útil dentro e fora das salas de aulas, no entanto isso não significa que toda situação trabalhada deva ser do cotidiano. O foco é não trabalhar um certo conteúdo somente para cálculo e aplicação de propriedades, como era feito na conceção linguístico-pragmática proposta por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Portanto privilegia-se a construção de uma rede de significados, interligando conhecimentos adquiridos na escola e os que o estudante traz consigo.

2.5.2 A etapa do Ensino Médio

A BNCC propõe para o Ensino Médio, consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental, ainda numa perspectiva de aplicação à realidade (BRASIL, 2018). Observamos que a BNCC para o Ensino Médio também objetiva desenvolver o pensamento algébrico através da exploração de problemas em contextos significativos.

A BNCC enfatiza o uso da linguagem matemática para compreender, resolver e comunicar os resultados de um problema, levando o estudante a verificar que a linguagem específica da matemática é mais apropriada para buscar soluções e promover o raciocínio (BRASIL, 2018). Assim como nos PCN, há destaque ao uso de recursos tecnológicos para o desenvolvimento do pensamento computacional aliado ao pensamento matemático.

Para o Ensino Médio na BNCC é proposto que na área da Matemática e suas Tecnologias, desenvolvam-se competências específicas, onde relacionada a cada uma delas indicam-se habilidades a serem desenvolvidas. No que se refere aos conteúdos de Números e Álgebra, sintetizamos no Quadro 11 as competências e respectivas habilidades que a BNCC propõe para esse tema.

Quadro 11 - Competências e habilidades referentes ao eixo Números e Álgebra

Competência 1	**Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.**
Habilidades	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
Competência 2	**Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a**

	situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Habilidade	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência 3	**Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.**
Habilidades	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
	(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
	EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e geometria.
	(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
Competência 4	**Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico,**

	estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
Habilidades	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de Álgebra e geometria dinâmica.
	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de Álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
	(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
	(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais
	(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
Competência 5	**Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas**.
Habilidades	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Habilidades	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas
	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte: produção do próprio autor, a partir de Brasil (2018, p. 533-544)

A proposta da BNCC para a Álgebra do ensino médio vai além das escolas, propõe habilidades a serem desenvolvidas para preparar os estudantes para a vida e para uma profissão. Nessa proposta o estudante não apenas resolve um problema, mas também o cria, refletindo e explorando as mudanças nos enunciados e dados. As habilidades a serem desenvolvidas refletem o caráter multidisciplinar e interdisciplinar que é dado à Álgebra, tendo em vista que os conteúdos se relacionam dentro da própria Matemática e ao mesmo tempo com outras áreas de conhecimento, sendo as mesmas intraconexões e interconexões apontadas nos PCN. No entanto, a organização da BNCC não traz uma divisão curricular para cada ano do ensino médio e nem uma sequência de habilidades a serem trabalhadas. Para trabalhar um certo conteúdo, seria necessário o professor conjugar/ combinar habilidades de competências diferentes. Isso gera uma certa confusão, e como isso não ocorre na BNCC para o ensino fundamental, a princípio pode parecer que essa mudança de linguagem causa uma certa ruptura entre o ensino fundamental e médio. Portanto caberá aos governos estaduais traduzir essas competências e habilidades em currículos.

Faremos nos parágrafos a seguir, um breve resumo do que foi discutido nesta seção. Na Seção 2.1, foram apresentadas conceções de Álgebra de Usiskin (1995) baseadas na utilização das letras, mostrando o caráter multiface da variável, relacionando-as com as finalidades do ensino de Álgebra. Já na Seção 2.2, apresentamos as conceções de Álgebra e Educação Algébrica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993), onde o foco dos pesquisadores era na relação entre linguagem algébrica e pensamento algébrico, e como refletiam no processo de ensino. Algumas conceções priorizavam um em relação ao outro, e em alguns casos foi dada uma prioridade exacerbada sobre a linguagem simbólica. Na Seção 2.3, foram expostas as conceções de Educação Algébrica de Lins e Gimenez (2001), baseadas nas diferentes formas de atividade algébrica, ou seja, nas diferentes formas como se utiliza a Álgebra. Posteriormente, na Seção 2.4 mostramos como os PCN abordavam o ensino de Álgebra nos níveis fundamental e médio, onde nas séries iniciais do Ensino Fundamental propunham uma pré-Álgebra, e nos anos finais dimensionavam a Álgebra de acordo com os diferentes usos das letras, da mesma forma como em Usiskin (1995). Finalmente na Seção 2.5 apresentamos a forma como a Álgebra está inserida na BNCC, enfatizando a aplicação dos conceitos algébricos na vida real e profissional do estudante, além de recomendar o uso de tecnologias que aliam o pensamento computacional ao algébrico. Na BNCC, diferentemente dos PCN, desde os anos inicias desenvolve-se a Álgebra mediante o pensamento algébrico, no entanto sem utilizar ainda a linguagem simbólica, mas por meio da investigação e exploração de regularidades e padrões para desenvolver este pensamento.

Discutir sobre essas conceções é de grande importância para o nosso referencial teórico, tendo em vista que as dificuldades encontradas estão relacionadas com as conceções trabalhadas no passado e atualmente. Na tentativa de propor soluções para estas dificuldades, analisaremos como as diferentes conceções de Álgebra influenciam negativamente nessas dificuldades, e quais conceções ao serem desenvolvidas, aliadas ao pensamento algébrico, podem ajudar a saná-las. Nos PCN surgem as primeiras iniciativas para o desenvolvimento do pensamento algébrico como forma de aprendizagem da Álgebra, assim como já era sinalizado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), chegando até a BNCC, onde este pensamento é priorizado e objetivado por meio de habilidades a serem desenvolvidas. Em virtude de tudo que já foi dito, torna-se necessário investigar o que é o pensamento algébrico, que atividades utilizar para desenvolvê-lo e a relação entre ele e a linguagem algébrica, tendo em vista que várias conceções fazem essa relação. Portanto, na próxima seção falaremos sobre PENSAMENTO ALGÉBRICO, LINGUAGEM ALGÉBRICA E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO.

3 PENSAMENTO ALGÉBRICO, LINGUAGEM ALGÉBRICA E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Nesta seção, a partir de pesquisas de diversos autores, iremos caracterizar o pensamento algébrico e as condições para que ele se desenvolva. Posteriormente abordaremos a contribuição dos padrões e regularidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico e consequentemente da linguagem algébrica. Enquanto discutirmos a inter-relação entre pensamento algébrico e linguagem algébrica, faremos um breve relato sobre a evolução histórica da linguagem algébrica e como ela se relaciona com a construção do pensamento. Por fim, falaremos de mudanças que precisam de ocorrer no ensino da Álgebra, para que haja um desenvolvimento apropriado do pensamento algébrico e uma compreensão construída da linguagem algébrica.

3.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Atualmente, defende-se que a Álgebra é, entre outras coisas, uma forma de expressar um pensamento, já que através dela pode-se obter relações que nos ajudam a dialogar e entender o mundo ao nosso redor. Coelho e Aguiar (2018, p. 178), definem uma “primeira aproximação” sobre o pensamento algébrico: “[...] desenvolver no estudante um pensamento que o auxilie na busca de padrões e analogias quando enfrentar problemas cotidianos”. Não há um consenso sobre a definição de pensamento algébrico, no entanto, mediante esta pesquisa chegamos à seguinte definição: o pensamento algébrico é um raciocínio que ocorre durante a generalização de um padrão ou de uma regularidade, a determinação de um modelo, a demonstração de uma propriedade, entre outros, em que a manifestação desse pensamento, é mais comumente expressa, na forma de linguagem algébrica escrita.

Acredita-se que ao dar importância ao pensamento algébrico em vez de apenas à parte técnica e operacional, a Matemática poderia ajudar os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico e abstrato tão importante para a sociedade. Para desenvolver este pensamento é necessário que se tenha condições para que ele se manifeste. Dessa forma, como podemos criar estas condições a fim de favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico? Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), podemos elaborar atividades que estimulam (ou incentivam) o pensamento algébrico, ou seja, criar condições para que o pensamento algébrico se manifeste. E para isso estas atividades devem ter os seguintes aspectos caracterizadores do pensamento algébrico:

- estabelecer relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos;
- perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;
- produzir mais de um modelo aritmético para uma situação-problema;
- produzir vários significados para uma mesma expressão numérica;
- interpretar a igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
- transformar uma expressão aritmética em outra mais simples;
- desenvolver algum processo de generalização;
- perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias;
- desenvolver uma linguagem mais concisa ou sincopada para exprimir as situações-problema.

Concordamos com os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), ao dizerem que estes aspectos caracterizadores do pensamento algébrico podem ser apresentados aos estudantes mediante atividades bem planejadas, que possibilitam a observação, investigação e exploração.

Portanto, as tarefas enumeradas acima proporcionam um ambiente favorável para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que, segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), pode manifestar-se antes mesmo da apropriação de uma linguagem simbólica formal. Ainda segundo eles, os estudantes podem desenvolver o pensamento algébrico com atividades bem planejadas, que envolvem as tarefas supramencionadas.

Assim, o professor pode organizar seu trabalho com os estudantes a nível escolar, envolvendo-os no processo matemático a partir da observação das regularidades, analisar padrões numéricos e as expressões que generalizam uma situação-problema. Dessa forma, cria-se um ambiente propício para desenvolver o pensamento algébrico: os estudantes sentem-se instigados a raciocinar sobre uma situação até ao ponto de tentar expressar soluções gerais através de uma linguagem simbólica. Para isso, é necessário identificar a evolução do pensamento algébrico, o qual

> vai de uma fase **pré-algébrica** (quando o aluno utiliza algum [...] elemento considerado algébrico – letra, por exemplo – mas não consegue, ainda, concebê-lo como número generalizado qualquer ou como variável), passa por uma **fase de transição** (do aritmético para o algébrico, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalização, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica), atingindo, enfim, um **pensamento algébrico mais desenvolvido** (expressando capacidade de pensar e se expressar genericamente, sobretudo quando o aluno aceita e concebe a existência de grandezas numéricas abertas

> ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz não só de expressá-las por escrito, mas, também, de operá-las). Cabe, contudo, esclarecer que, para nós, o aluno pode atingir a terceira fase do pensamento algébrico, sem necessariamente fazer uso de uma linguagem estritamente algébrico-simbólica (FIORENTINI, FERNANDES, CRISTÓVÃO, 2005, p. 5 e 6, grifos dos autores).

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), no ano de 2000, publicou um documento com os princípios e normas para a matemática escolar, onde relaciona o pensamento algébrico ao estudo das estruturas, simbolização, modelação e o estudo da variação, como segue abaixo:

> - Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),
> - Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação)
> - Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação) (NCTM, 2000 apud PONTES, 2006, p. 7).

Observa-se que o pensamento algébrico além de envolver o cálculo, e para isso a manipulação de símbolos, dá importância ao sentido dos símbolos, usando-os na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outras áreas. Conforme Pontes (2006), no pensamento algébrico a atenção não é dada somente aos objetos, mas também às formas como eles se relacionam, afim de buscar representações genéricas, como no estudo de padrões e regularidades.

Segundo Ponte et al. (2007), o desenvolvimento do pensamento algébrico se dá a partir de exploração, investigação e construção de padrões, tanto em aspectos quantitativos como qualitativos, em contextos aritméticos, algébricos e geométricos. Portanto, serão abordadas abaixo, pesquisas que apontam o uso de padrões e regularidades no ensino de Álgebra, como o caminho a ser seguido rumo ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.1.1 A exploração de padrões e regularidades como instrumento para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Desde os tempos remotos da civilização, as necessidades e atividades humanas do cotidiano são pautadas na observação de regularidades e padrões, para assim, poder inferir convenientemente sobre a realidade. O próprio Universo possui regularidades que a humanidade começou a observar, e através do pensamento pôde definir padrões, como: estações do ano, movimento de rotação e translação da Terra e assim definir o dia, constelações de estrelas, etc. Existem vários exemplos em diversas áreas do conhecimento que nos mostram a utilização dos padrões, intrínseca às atividades humanas, mas em especial, na Matemática os padrões e regularidades tiveram grande contribuição para definir teoremas, equações, fórmulas, a própria definição de número, entre outros.

Cada vez mais têm-se analisado o papel dos padrões e regularidades no ensino da Matemática, em especial no ensino de Álgebra, área tão temida por muitos estudantes. Segundo Alvarenga e Vale (2007), essa nova forma de enxergar a Matemática (ciência dos padrões) alterou o modo como professores e estudantes a encaram. Sob as lentes dos padrões, a Matemática não é vista apenas como um aglomerado de conhecimentos específicos e abstratos, mas como um processo no qual o estudante faz parte da construção do conhecimento, justificando seus procedimentos e pensamentos.

Nas palavras de Sessa (2005), a generalização (de regularidades e padrões, por exemplo) está presente nas salas de aula e traz grandes contribuições para o ensino de Matemática:

> a generalização está no coração da matemática. Na sala de aula, é um projeto sempre presente para o professor: damos um problema para poder trabalhar, através dele ou a partir dele [...] Generalizar é encontrar características unificadoras, reconhecer tipos de objetos e problemas. Ao descontextualizar o trabalho realizado sobre um problema e discutir a matemática envolvida, entramos em um processo de generalização, que nos permitirá usar e adaptar o que fizemos com esse problema a outros problemas do mesmo tipo (SESSA, 2005, p. 71, tradução nossa).

Verificar padrões no ensino da Matemática, é uma tentativa de dar significado ao que está sendo ensinado, tendo em vista o estudante como artesão e sujeito ativo na construção do conhecimento, privilegiando o pensamento algébrico e desta forma o desenvolvimento da linguagem simbólica, que neste contexto é chamada de linguagem algébrica (CARMO, 2013). A linguagem algébrica é uma linguagem simbólica que usa letras e símbolos para "traduzir" frases (ou objetos) em expressões ditas algébricas, expressões estas que possibilitam/facilitam a resolução de problemas expostos verbalmente (figurativamente). Segundo Ponte et al. (2007),

> Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam regularidades em sequências e em padrões quer numéricos, quer geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e a lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Desenvolvem igualmente a noção de variação, identificando relações e usando a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de equações (PONTE et al., 2007, p. 45).

Compreender a abstração dos números, suas operações e relações é uma das dificuldades da grande maioria dos estudantes, o que compromete diretamente no entendimento da linguagem algébrica e o pensamento que ela manifesta. Dessa forma, é de extrema importância a escolha de estratégias de ensino que possam sanar ou minimizar essas dificuldades, e para isso

> Pressupõe-se que a procura de padrões e regularidades permite formular generalizações em situações diversas, particularmente em contextos numéricos e geométricos, o que contribuirá para o desenvolvimento do raciocínio algébrico do aluno (BORRALHO; BARBOSA, 2009, p. 60).

O conceito de padrão, de forma transversal, aborda vários tópicos da Matemática envolvendo conjuntos de números ou formas que possuem regularidades que podem ser continuadas através de sequências. Barbosa (2009), sintetiza em uma tabela os conceitos que são associados ao significado de padrão, adaptada no Quadro 12.

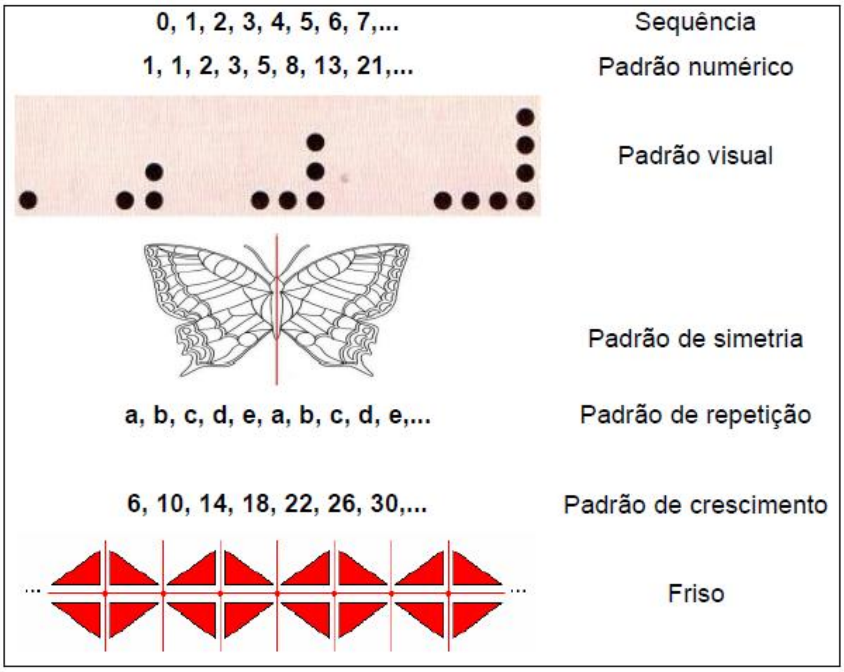
Quadro 12 - Definição de termos associados ao conceito de padrão

Termo	**Definição**
Sequência	Conjunto de elementos matemáticos ordenados de acordo com uma regra.
Padrão numérico	Sequência na qual os elementos matemáticos são números.
Padrão visual	Sequência na qual os elementos são objetos, figuras ou símbolos.
Padrão de simetria	Um objeto ou configuração que possui simetria é constituído por partes equivalentes que podem ser trocadas sem alterar a aparência global.
Padrão de repetição	Sequência de números ou formas na qual se reconhece uma unidade (conjunto de elementos da sequência) que se repete ciclicamente.
Padrão de crescimento	Sequência de números ou formas que se prolonga de modo regular.
Friso	Padrão de repetição que envolve formas que podem ser colocadas indefinidamente ao longo de uma superfície.

Fonte: Adaptado de Barbosa (2009, p. 47)

Para exemplificar essas definições, temos a Figura 5 desenvolvida por Carmo (2014), apresentada abaixo.

Figura 5 - Exemplos pautados nas definições do termo padrão



Fonte: Carmo (2014, p. 26)

Estes exemplos, apesar de não estarem aqui contextualizados em um quadro de trabalho, nos mostram como o ensino de padrões e regularidades podem envolver o estudante e influenciá-lo a desenvolver a habilidade de observação e exploração, em diversos temas matemáticos. Ao descobrir os padrões e regularidades, criam-se conexões entre Aritmética, Geometria e Álgebra, ajudando o estudante a refletir sobre os significados e desenvolver conceitos algébricos, ao invés de apenas seguir algoritmos, os quais muitas vezes não são compreendidos. Dessa forma, instigando e ao mesmo tempo motivando os estudantes a generalizar uma situação, descobrir a continuação do padrão e pensar/raciocinar sobre uma forma de expressar seus resultados, envolvendo assim a abstração.

A capacidade de raciocinar algebricamente utilizando uma linguagem para se expressar, é a manifestação clara do pensamento algébrico, onde o seu desenvolvimento utilizando padrões e regularidades é defendido por diversos autores como os caminhos a serem seguidos. Segundo Borralho e Barbosa (2009), o pensamento algébrico está diretamente relacionado com o desenvolvimento do sentido do símbolo, sua aplicação e significação num determinado contexto. Atividades que utilizam como instrumento de ensino a análise de padrões, regularidades e variações numéricas, podem ajudar os estudantes a compreenderem a natureza dos símbolos, em especial a noção de variável, de tal forma que “ [...] ajuda os alunos a pensar algebricamente” (BORRALHO; BARBOSA, 2009, p. 61).

Conforme Radford (2013), a generalização algébrica pode ser trabalhada através de atividades que envolvam percepção, gestos, símbolos matemáticos e até linguagem natural. O autor ainda acrescenta que a generalização algébrica de padrões nas sequências envolve três aspectos. No primeiro, é observada uma propriedade comum em alguns termos, de forma particular, como por exemplo: a_1, a_2, $a_3, \dots, a_k$. Posteriormente, essa característica comum é generalizada para todos os termos da sequência, como por exemplo, a_{k+1}, a_{k+2}, $a_{k+3,\dots}$ Por fim, a dedução de uma expressão direta, ou seja, uma fórmula que seja válida para todos os termos da sequência, permitindo calcular o valor de qualquer um deles. Esse tipo de raciocínio é muito importante no ensino de Álgebra, pois ajudará a compreender a noção de funções e a dar significado aos símbolos em expressões algébricas. Além disso, também se desenvolve o raciocínio lógico, quando o estudante busca estratégias para prever o próximo termo da sequência.

Em sua pesquisa Branco (2008) pontua que o estudo de padrões e regularidades ajudou os estudantes a dar sentido à linguagem algébrica, reconhecendo a letra como representante de um número. Isso contribuiu positivamente no trabalho com as equações e com expressões algébricas equivalentes, que representavam a generalização de um mesmo padrão. Assim atividades de investigação e exploração por meio de padrões e regularidades devem ser iniciadas desde cedo com os estudantes, para que possam aguçar o raciocínio em busca de generalizações e já começarem a organizar o pensamento em busca de soluções. O trabalho deve ser desenvolvido de maneira a trabalhar com as ideias, dando sentido às ações e passos dados (BRANCO, 2008).

Diante dessa pesquisa sobre padrões e sua implicação no ensino de Álgebra, percebemos que eles são ótimas ferramentas para desenvolver o pensamento algébrico e dessa forma dar sentido ao símbolo, o que acarreta no aprimoramento da linguagem algébrica. Além disso, a generalização de padrões facilita a transição do pensamento numérico para o algébrico, pois permite compreender as generalizações, sem ter que recorrer obrigatoriamente a fórmulas, ajudando a construir significados para a linguagem simbólica (ALVARENGA, VALE, 2007). Nesse sentido, à medida que o pensamento algébrico se desenvolve, surge a necessidade de exprimi-lo através de uma linguagem, que no seu nível mais avançado, é a linguagem simbólica. É muito importante trabalhar a linguagem algébrica de forma a potencializar o pensamento algébrico e vice-versa. Analisaremos agora a relação existente entre esses dois termos e as respectivas implicações pedagógicas.

3.1.2 Pensamento e linguagem algébricos: subordinação ou subsistência?

A linguagem algébrica pode ser entendida como uma forma de expressar ideias e uma ferramenta muito eficiente para tirar conclusões significativas dessas ideias, de forma que talvez não se conseguiria usando outros artifícios, como por exemplo a própria linguagem corrente. A definição de linguagem algébrica está relacionada a uma linguagem que é utilizada para transmitir as ideias da Álgebra, sendo expressa nas dimensões verbais, simbólicas ou gráficas, e utilizada para resolver problemas em diversas situações. Para isso criam-se elementos que compõem essa linguagem, como: expressões algébricas, fórmulas, equações, inequações e funções (VOISIN, 2011).

No ensino de Álgebra na educação básica, esta linguagem tem um importante papel: "[...] uma construção necessária para descrever simbolicamente regularidades [...]" (JACOMELLI, 2006, p. 24). Reforçando essa ideia, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) nos dizem:

> [...] é interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente (BRASIL, 1998, p. 117).

Percebe-se a importância dessa linguagem nas resoluções de problemas, como facilitadora dos cálculos e o fato de resumir as ideias através de símbolos. A título de exemplificação, temos o momento quando o estudante percebe que pode transformar uma expressão algébrica em outra mais simples que facilita encontrar a solução, reconhecendo a importância da linguagem algébrica como uma ferramenta para exprimir ideias. Conforme Arcavi (2013), é um instrumento para expressar relações e tirar conclusões, que a todo momento transita entre a manipulação simbólica e seus significados. Dessa forma, a linguagem possui grande importância na construção do pensamento, tanto em aspectos comunicativos como representativos, em virtude de suas diferentes funções:

> [...] como forma de pensamento, estruturando-o: como instrumento do pensamento, refletindo-o: como forma de ser do conhecimento, fixando seus resultados e possibilitando a apropriação dos significados da sociedade histórica: mediando a comunicação etc. (PANOSSIAN, 2008, p. 112).

Para Vygotsky (1998), existe uma inter-relação entre pensamento e linguagem, de tal forma que

> [...] o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, ou seja, pelos instrumentos lingüísticos do pensamento [...] O crescimento

> intelectual da criança depende do seu domínio dos meios sociais de pensamento, ou seja, da linguagem (VYGOTSKY, 1998, p. 62).

O pensamento como um processo mental, possibilita-nos observar o mundo e moldar nossa percepção de realidade de acordo com o meio em que vivemos. Ele está diretamente relacionado com as atividades humanas e os objetivos, planos e metas de cada pessoa. Conforme Kopnin (1978, p. 170), “[...] o pensamento nasce de necessidades práticas para satisfazer as necessidades da prática, é um processo dirigido a um fim. ” Dessa forma, o pensamento busca uma forma conveniente de se expressar. Nas palavras de Kopnin (1978, p. 150), “Não podemos imaginar o conhecimento do homem sem a linguagem, pois a linguagem consubstancia nas palavras os resultados do pensamento. ”

Pensando no ensino da Álgebra de forma significativa, não é possível dissociar a linguagem algébrica do pensamento algébrico, de forma a priorizar a primeira em detrimento do segundo. Entretanto, Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), ao estabelecer uma comparação entre as conceções de Álgebra durante seu desenvolvimento e as conceções de Educação Algébrica firmadas ao longo do ensino da Matemática, nos mostram que isso já ocorreu:

> De fato, do mesmo modo como as primeiras tenderam a priorizar a linguagem em detrimento do pensamento, também as últimas acabaram enfatizando o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993 p. 85).

É necessário repensar a relação entre pensamento e linguagem no ensino da Álgebra, afinal de contas de acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), a Educação Algébrica tinha como tendência a ideia de que o pensamento algébrico só se manifestaria e desenvolveria através da manipulação simbólica concisa, específica da Álgebra. Contudo, o autor pontua que “essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que [...] a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. ” (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993 p. 85).

Concordamos com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), sobre o pensamento algébrico e a linguagem estarem numa relação de subsistência, e não de subordinação. Ao analisar historicamente a evolução da linguagem algébrica, percebemos que nas diversas formas de se expressar algebricamente (não necessariamente simbólicos-formais) o pensamento algébrico estava presente. Nos parágrafos que se seguem, será apresentado resumidamente as mudanças que a Álgebra sofreu, não necessariamente com o objetivo de diferenciá-las a nível de importância, mas com objetivo de mostrar a articulação do pensamento e linguagem à medida que essas mudanças ocorrem, desde os caminhos da Álgebra não-simbólica, ou seja, onde o pensamento era representado por palavras.

Conforme Baumgart (1992, p. 3, grifo do autor), “O desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios: o *retórico* (ou verbal), o *sincopado* (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o simbólico”.

Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), na Álgebra dos egípcios, dos gregos pré-diofantinos e babilônicos, que é a fase retórica ou verbal, não se usavam símbolos para expressar o pensamento algébrico, os procedimentos sobre as equações e números eram descritos utilizando a linguagem corrente. Nesta fase muitos problemas relacionados ao cotidiano e à vida do povo, eram propostos usando linguagem comum, sem uma forma específica de linguagem para tal fim. Mesmo não utilizando uma linguagem simbólica, desenvolveu-se o pensamento algébrico, ao passo que se propunham soluções e observavam-se regularidades e movimentos, modelando matematicamente a realidade. Contudo, não seria prático, procedimentalmente falando, utilizar as palavras como representantes algébricos, já que “A ambiguidade da palavra traz muitas dificuldades para a representação do movimento. Com a retórica, é difícil criar palavras que representem quantidades desconhecidas” (PANOSSIAN, 2008, p. 47).

Alguns séculos mais tarde, Diofanto de Alexandria ao introduzir pela primeira vez uma representação simbólica para a incógnita, (a letra sigma do alfabeto grego) deu origem à fase sincopada, onde as equações e suas operações começaram a ter uma forma mais abreviada. Essa forma sincopada de se exprimir, foi também desenvolvida pelos hindus e algebristas italianos.

A fase simbólica, “[...] que é como encontramos a manifestação do pensamento algébrico avançado hoje [...]” (VELOSO, 2012, p. 27), correspondia “ [...] ao momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras” (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p.80). Apesar de ainda utilizar o estilo sincopado, Viète (1540-1603), contribuiu grandemente para esta fase ao introduzir novos símbolos na Álgebra: sinais de adição “+” e subtração “–”, além de utilizar vogais para constantes e consoantes para incógnitas. Entretanto, foi Descartes (1596-1650) quem consolidou a utilização da linguagem simbólica, ao usar as últimas letras do alfabeto $(\ldots, x, y, z)$ para representar variáveis e as primeiras letras do alfabeto $(a, b, c, \ldots)$ como representantes de constantes.

Com o passar do tempo, os símbolos ficaram cada vez mais diversificados e padronizados, e conforme foi apresentado nos parágrafos anteriores, por volta de 1500 o simbolismo moderno começou a surgir. Mostrando essa evolução simbólica, seguem exemplos retirados de Baumgart (1992).

Figura 6 - Evolução da Linguagem algébrica

Cardano (1545):	cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20.
	$x^3 + 6x = 20$
Bombelli (1572):	$\overset{6}{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{p} \cdot \overset{3}{8} \cdot$ Eguale à 20.
	$x^6 + 8x^3 = 20$
Viète (1591):	I QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120.
	$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot (1631):	aaa − 3bba ═══ + 2 · ccc.
	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes (1637):	$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$
Wallis (1693):	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Fonte: Baumgart (1992, p. 12 e 13)

A evolução da Álgebra nasceu de uma necessidade, não estando dissociada da cultura e dos trabalhos humanos e como tal tenta descrever ou entender o mundo e seus movimentos (SOUZA, 2004). Nessa evolução histórica da Álgebra é perceptível o movimento do pensamento algébrico adjunto à linguagem algébrica, onde esta surge "[...] no sentido de mediar a comunicação, primeiro por palavras (Diofanto), por figuras (Euclides), por símbolos (Viète) [...]" (PANOSSIAN, 2008, p. 113).

Veloso (2012) ao observar a evolução da linguagem simbólica, concorda com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) quanto à linguagem algébrica ser uma manifestação do pensamento algébrico, assim como com Panossian (2008), que a compreensão daquela potencializa o pensamento algébrico.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) concluem que o pensamento algébrico pode ser expresso de diferentes formas:

> A análise das situações em que esse pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 88).

Segundo Coelho e Aguiar (2018), e Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o pensamento algébrico não aparece somente na Matemática ou Álgebra, ele é desenvolvido de acordo com o ambiente em que o sujeito está inserido. Com certeza, a forma de se expressar linguisticamente (escrita, fala, gestos, símbolos) está relacionada com o meio social que vivemos, e desta forma, utilizando da relação pensamento e linguagem já mencionada neste trabalho, o pensamento algébrico está presente até mesmo “[...] quando discutimos política ou religião ou mesmo esporte, quer seja quando buscamos padrões ou analogias em nossas argumentações” (COELHO, AGUIAR, 2018, p. 177).

Nesta seção foi exposto o forte elo entre pensamento e linguagem, ou mais especificamente entre pensamento algébrico e linguagem algébrica, onde o primeiro não está subordinado ao segundo, mas que os dois subsistem, um sustentando o outro, permeando as mais diversas atividades humanas. Vale ressaltar que o pensamento algébrico irá se potencializar com o aprimoramento de uma linguagem mais apropriada e específica a ele, sendo de extrema importância buscar um equilíbrio de forma a introduzir a linguagem simbólica sem demérito ao pensamento e vice-versa, conforme os autores Fiorentini, Miguel e Miorim (1993):

> [...] se a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal constitui-se também em impedimento para o seu pleno desenvolvimento (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993, p. 89).

Encarando a aplicação da linguagem simbólica, também como um processo que exige método, essa situação apresentada por Fiorentini, Miguel e Miorim, é descrita por Arcavi (2013) como uma competição, na qual deve coexistir procedimento e significado, onde o primeiro favorece uma aplicação rápida e eficiente, mas quando for necessário deve-se interrompê-lo para fazer questionamentos e conectar ideias, a fim de produzir o segundo.

3.2 MUDANÇAS NECESSÁRIAS NO ENSINO DA ÁLGEBRA

O que foi apresentado até aqui nos leva a questionar ou repensar sobre o momento de introdução da Álgebra no ensino da Matemática, já que o pensamento algébrico não necessita especificamente de uma linguagem rígida e formal para se manifestar, então não faz sentido a introdução tardia de tópicos relativos à Álgebra no ensino fundamental. Conforme Araújo (2008), o pensamento algébrico está presente em vários campos de conhecimento e não somente no contexto da Álgebra formal, sendo assim manifestado por diferentes linguagens, inclusive a própria linguagem natural.

Espera-se do estudante ao desenvolver o pensamento algébrico, que ele consiga dar sentido aos símbolos de modo a conseguir interpretar uma situação e descrever seu raciocínio utilizando uma linguagem coerente, indo além de apenas entender os algoritmos empregados na resolução. Para isso, segundo Borralho e Barbosa (2009), deve-se criar atividades de natureza investigativa e exploratória, onde os estudantes consigam observar a noção de variável, no seu verdadeiro sentido e não apenas como um valor desconhecido. Nesse sentido, o estudante não dará atenção somente à natureza transformista e manipulável das letras que podem surgir numa situação que envolva a Álgebra, mas também em outros aspectos importantes, como: o motivo de ter utilizado aquela letra, o seu significado, as relações que existem entre esse ente matemático e outros que podem aparecer nas expressões algébricas, o que essa letra está representando (incógnita, variável, parâmetro, ...) e quais as operações que se estabelecem entre essas letras.

O pensamento algébrico está relacionado diretamente com o conceito de variável, já que é a partir dela que se observa movimento, fluência, campo de variação numérica e o próprio conceito de número. De acordo com Souza (2004), é na abundância e no ajuntamento desses conceitos que o pensamento algébrico é refinado, possibilitando o estudante obter o conhecimento algébrico, ou seja, pela experimentação objetiva, cultural, tátil, cognitiva, ele internaliza os conceitos algébricos, não pela simples memorização, mas pela compreensão. Essa forma de pensar intencionalizando a construção do conhecimento algébrico, chama-se pensamento algébrico. Assim, o pensamento algébrico desenvolve-se quando há o ancoramento de conhecimentos que o estudante já traz do cotidiano com os conhecimentos formais apresentados a ele na escola.

Os símbolos são integrantes fundamentais na Álgebra, entretanto nas séries iniciais o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser favorecido quando são reconhecidas e valorizadas as diferentes formas de se apresentar e/ou representar ideias: o próprio símbolo, desenhos e imagens, material manipulável, atividades de agrupamento e ordenação que envolvam padrões (OLIVEIRA, LAUDARES, 2015). O ensino de Álgebra não deveria ser primariamente uma ferramenta para apenas resolver problemas, deveria também focar na compreensão dos significados e conceitos algébricos. A técnica e o algoritmo são importantes, entretanto, “Entender, em um primeiro momento, que existem padrões e propriedades por trás das operações é mais importante do que a mera memorização de técnicas operatórias” (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 184).

O professor tem um papel muito importante como mediador entre o estudante e o pensamento algébrico, onde através de atividades bem planejadas para este fim, ele pode criar um ambiente de aprendizado que estimule o estudante a refletir sobre os padrões e propriedades de um certo problema. Deve-se ter estratégias diversificadas, que contemplam os estudantes, para que possam compreender a linguagem algébrica de forma mais natural, em especial, nas séries iniciais devido ao momento de “transição” da Aritmética para a Álgebra.

A evolução da linguagem algébrica mostra a necessidade de se obter um simbolismo que seja simples de aplicar, onde é fácil compreender cada um de seus elementos, com notações adequadas para transmitir ideias. Quanto ao ensino e aprendizagem da Álgebra, a linguagem simbólica usada atualmente implica que o estudante saiba dar significados a cada um dos símbolos de modo a tornar a leitura de textos matemáticos compreensível. Panossian (2008) acrescenta que sem os significados dos símbolos, o uso da linguagem simbólica de forma indistinta é como um som vazio.

Para isso, K. Gil (2008, p. 33) diz que "[...] é necessário que o trabalho com conceitos e procedimentos algébricos também seja gradual, passando por uma fundamentação verbal, a fim de que os alunos tenham se apropriado deles de uma forma efetiva". Pode ocorrer de os estudantes darem vários sentidos aos símbolos da linguagem algébrica, antes mesmo de aprender seus significados.

> Os sentidos e símbolos que os estudantes constituem para o conhecimento algébrico em geral estão também relacionados à sua atividade, aos motivos que os conduzem e aos objetivos que os dirigem. O significado se relaciona com a realidade objetiva enquanto que o sentido que é pessoal se relaciona à vida do sujeito propriamente às suas motivações (PANOSSIAN, 2008, p. 172).

É neste momento que os professores têm o papel de identificar como os estudantes encaram estes símbolos, de verificar se os sentidos que eles encontraram condizem com os significados desses.

Um dos principais objetivos ao ensinar Álgebra deveria ser o de desenvolver o pensamento algébrico, indo muito além da habilidade de manipular símbolos e como diz Veloso (2012, p. 27) "O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo [...] e saber aplicar tais conhecimentos na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios". Portanto, o pensamento algébrico pode ser estimulado nos anos iniciais do Ensino Fundamental através das linguagens utilizadas na Geometria e na Aritmética, que nesse estágio ainda não utilizam uma linguagem algébrica totalmente simbólica e formal.

Como já foi dito, o pensamento algébrico encontra-se em diversas áreas do conhecimento, consequentemente isso implica pedagogicamente na articulação dessas áreas afim de desenvolver esse pensamento nestes campos e linguagens. Para tanto, utilizar situações-problema aplicadas em diversas áreas (Matemática, Física, Química, Biologia, ...) podem ajudar a desenvolver o pensamento algébrico, levando os estudantes a pensar sobre a solução e como expressar essa solução, ou seja, permitindo construir uma linguagem simbólica significativa.

Carmo e Bianchini (2013) defendem a ideia de introduzir a linguagem algébrica através de generalizações de padrões, incentivando assim o pensamento algébrico.

O ensino de Álgebra deve ser pautado a partir das relações que se constroem entre a matemática e a realidade, e a partir dessas relações os estudantes poderão ler e compreender melhor o mundo: construindo modelos, socializando ideias e comunicando soluções para os problemas que surgirem. A partir do pensamento que emerge desse contexto que é possível a abstração matemática, e posteriormente, a formulação de algoritmos, o reconhecimento de padrões e a compressão das fórmulas, ou seja, desenvolve-se a linguagem algébrica. Nesse sentido, quanto mais desenvolve-se o pensamento e a linguagem, maiores são as chances de aprender, e assim resolver problemas. Desta forma é clara a importância do trabalho mútuo entre pensamento e linguagem quando olhamos sob a ótica da resolução de problemas. Assim, a linguagem simbólica e formal, no momento apropriado, cumpre seu papel no ensino de Álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico, por oportunizar a expressão de situações em sua totalidade de uma forma mais enxuta e concisa, permitindo desenvolver um plano de resolução.

Durante a pesquisa percebemos que uma das principais críticas relativas ao ensino de Álgebra, refere-se ao exagero dado à simbologia formal, priorizando a manipulação desses caracteres sem lhes dar significado. Contudo, ressaltamos a importância e a necessidade da simbologia matemática para a Álgebra, já que é através desta linguagem que se possibilita um desenvolvimento mais aprofundado do pensamento algébrico abstrato, além de facilitar e simplificar os cálculos. Para criar uma linguagem algébrica que tenha significado para os estudantes, deve-se antes desenvolver o pensamento algébrico, através de atividades que estimulam este pensamento, como por exemplo:

> [...] tarefas que exijam do aluno competência para lidar com quantidades indeterminadas e variáveis em situações que envolvam processos de generalização – como no caso do trabalho com padrões e sequências. Nessa proposta, os estudantes têm liberdade de, inicialmente, recorrer a recursos que surgem naturalmente no contexto de cada tarefa (gestos, falas), para se comunicar e expressar uma indeterminação, uma incógnita, uma variável – o que, até então, não apresentava uma nomeação em seu ‘vocabulário’ matemático (VELOSO, 2012, p. 29).

Assim, a linguagem algébrica pode ser desenvolvida, pelo menos inicialmente, a partir das descobertas dos estudantes, num cenário significativo que os leve naturalmente à necessidade de simbolizar e de formalizar esses símbolos a partir da adoção de convenções. Desta forma, preocupa-se mais com o sentido dos símbolos num determinado quadro de trabalho do que com o símbolo propriamente dito, criando, portanto, os caminhos que levam a pensar algebricamente. Refletir sobre as relações entre linguagem e pensamento são importantes para analisar o contexto de ensino atual, ajudando o professor a montar estratégias de ensino e compreender os comportamentos dos estudantes.

Nesta seção vimos como o pensamento algébrico pode ser desenvolvido através de atividades elaboradas pelo professor, em especial as que envolvam a generalização. Reforçamos aqui também, a importante relação da linguagem e pensamento algébricos para a resolução de exercícios e a construção de um conhecimento que vai além das escolas, combatendo o ensino unicamente mecânico e tradicional. Dessa forma repensar sobre esse processo de ensino e aprendizagem de Álgebra leva-nos à procura das principais dificuldades dos estudantes em compreender os conceitos e procedimentos algébricos. Essas dificuldades e o impacto das mesmas no processo de ensino, serão apresentadas na próxima seção.

4 DIFICULDADES ENCONTRADAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Muitas são as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem deste importante ramo da Matemática chamado Álgebra. Através da análise de vários pesquisadores sobre os erros cometidos pelos estudantes, desde a introdução da Álgebra no ensino fundamental até o ensino médio, poderemos identificar estas dificuldades. Já que esses erros “[...] passam a significar dificuldades, pois ao tentar corrigi-los recaem nos mesmos erros ou em outros semelhantes [...]” (SCARLASSARI, 2007, p. 44).

Estas dificuldades não podem ser totalmente evitadas, pois elas compõem o processo de ensino, entretanto cabe ao professor conhecer estas dificuldades para que seja possível facilitar o novo aprendizado (SOCAS et al 1998, p. 81). É através da análise desses erros e dificuldades, que nós professores poderemos colher informações sobre como o estudante pensa ao se deparar com procedimentos algébricos e assim sugerir formas de ajudar.

Esta seção será destinada a apresentar essas dificuldades, que foram resultado de um levantamento bibliográfico de produções brasileiras e de outros países, com o enfoque no ensino e aprendizagem de Álgebra na Educação Básica. As dificuldades serão apresentadas segundo as categorias: linguagem algébrica, interpretação e tradução da linguagem escrita para a algébrica, ensino de Álgebra nas escolas, relação entre Aritmética e Álgebra, fórmulas e regras de procedimento e utilização de métodos informais.

4.1 LINGUAGEM ALGÉBRICA

Algumas das dificuldades relacionados à aprendizagem de Álgebra têm suas raízes na falta de domínio da linguagem algébrica. Bezerra (2016, p. 27) nos diz que muitos estudantes até sabem fazer, mas não possuem elementos simbólicos para expressar seu pensamento. Essa situação é muito recorrente no estudo de equações e funções, onde são comuns as dificuldades dos estudantes ao lidar com os diferentes significados das letras: variáveis, parâmetros, incógnitas e constantes (GIRALDO; CAETANO; MATOS, 2013). A primeira dificuldade relacionada à linguagem algébrica está na interpretação equivocada das letras, sem a devida diferenciação entre variável e incógnita. K. Gil (2008) acrescenta que o insucesso no estudo da Álgebra por parte de grande maioria dos estudantes é devido a esta dificuldade.

Quando os estudantes não fazem a devida diferenciação e significação entre variáveis e incógnitas, eles não entendem a ideia de movimento, fluxo, variação, regularidade, e consequentemente, não conseguem generalizar uma situação. Gil e Felicetti (2016, p. 32) acrescentam:

> Acredita-se que há dificuldade no que se refere à abstração das regularidades que estão implícitas nas sequências. O fato de não abstrair a regularidade presente impossibilita o aluno de fazer a representação da mesma através da linguagem algébrica.

Pesquisadores como Trujillo (2012) mostram-nos que esta imaturidade quanto à linguagem algébrica, em especial compreender o conceito correto de variável, leva os estudantes a terem dificuldades ao lidar com problemas que precisem usar esse conceito. Por exemplo, ao assumir a variável apenas como um objeto eles não conseguem modelar matematicamente situações e daí trabalham com expressões algébricas como se fossem expressões numéricas.

A segunda dificuldade encontrada em relação à linguagem algébrica, comum nos estudantes, é a ideia fixa que todas as letras são representações numéricas, o que dificulta dar significado à linguagem simbólica utilizada. Sobre esse problema, Usiskin (1995) acrescenta:

> Muitos alunos acham que todas as variáveis são letras que representam números. Contudo, os valores assumidos por uma variável nem sempre são números, mesmo na matemática do 2º grau. Na geometria, as variáveis muitas vezes representam pontos, como se vê no uso de A, B e C, quando escrevemos "Se AB = BC, então o Δ ABC é isósceles". Na lógica, as variáveis p e q muitas vezes representam proposições; na análise, a variável f muitas vezes representa uma função; na Álgebra linear, a variável A pode representar uma matriz, ou a variável v, um vetor; e em Álgebra superior a variável * pode representar uma operação. O último exemplo mostra que não há necessidade de representar as variáveis por letras (USISKIN, 1995, p.11).

As dificuldades em dar significados aos símbolos matemáticos utilizados na Álgebra, prejudicam o entendimento de expressões algébricas que vão além de apenas obter um resultado numérico. Alguns autores concordam que há a propensão de considerar a letra como sendo um valor único e sempre possível de ser determinado, como por exemplo em $2x - 2 = 7$: não se considera apenas a expressão $2x - 2$, onde x pode assumir uma infinidade de valores (SCHNEIDER, 2013; VELOSO; FERREIRA, 2011).

Compreender os símbolos operatórios é de suma importância para ampliar os significados deles na linguagem algébrica. Assim a terceira dificuldade relacionada a linguagem algébrica, é a que se refere à compreensão dos símbolos operatórios. Ponte (2005) destaca que:

> Outra dificuldade, ainda, é compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e =, bem como das convenções adotadas; assim, em Aritmética, 23 tem um significado aditivo (20 + 3), enquanto que em Álgebra 2x tem um significado multiplicativo (2 x x); em Aritmética 3 + 5 significa uma "operação para fazer" (cujo resultado é 8), mas

> em Álgebra x + 3 representa uma unidade irredutível (enquanto não se concretizar a variável x) (PONTE, 2005, p. 39).

Trujillo (2012) mostra que as dificuldades com os símbolos operatórios, além das operacionais citadas por Ponte (2005), podem estar relacionadas com a notação, perfazendo assim na quarta dificuldade relacionada à linguagem algébrica. Exemplificando este fato Trujillo descreve uma situação onde o produto de dois números "k" e "g" pode ser escrito como $kg, (k)(g), k\ x\ g, k(g)\ e\ k \cdot g.$ Na primeira notação a criança poderia entender que se trata da abreviação do termo quilograma ou em um número que possui k dezenas e g unidades. Ainda sobre essa ideia de concatenação na Aritmética, " Um erro típico em Álgebra é concluir que, se $x = 6, 4x = 46$ " (GOMES, 2013, p. 52). Essa confusão com a notação acontece devido ao fato de não ter noção de variável, levando os estudantes a não dar significados e utilidades aos símbolos.

O pensamento algébrico está intimamente relacionado com a linguagem matemática, de tal forma que "A linguagem algébrica representa a manifestação do pensamento algébrico" (SORTISSO, 2011, p. 8). Contudo, utilizar o raciocínio lógico e matemático para resolver situações-problema " [...] é uma habilidade pouco explorada pelos alunos, por apresentarem dificuldades em articular o pensamento através da linguagem adequada " (BEZERRA, 2016, p. 48).

Conclui-se então que, diversas dificuldades apresentadas pelos estudantes relacionadas à linguagem algébrica têm profunda ligação com a falta de habilidades de organizar ideias, identificar e diferenciar os símbolos matemáticos apropriadamente, compreender os significados destes últimos e, por conseguinte, ser capaz de propor um raciocínio lógico para escrever a solução. Resumindo, é necessário que saiba interpretar os enunciados e traduzir a linguagem simbólica para a linguagem corrente.

4.2 INTERPRETAÇÃO E TRADUÇÃO DA LINGUAGEM ESCRITA PARA A ALGÉBRICA

É essencial os estudantes saberem interpretar os enunciados, antes mesmo de tentar traduzir o problema na forma escrita para a linguagem matemática. De fato, é uma tradução, já que a Matemática possui uma estrutura de símbolos específicos e universais em sua maioria: é uma nova língua, que não é a maternal, que gera nos educandos estranheza e muitas dificuldades. Estas dificuldades possuem suas raízes na interpretação da linguagem.

A falta de interpretação de alguns estudantes é um problema sério, que dificulta muito o aprendizado não só no domínio da Matemática, mas nas diversas áreas de conhecimento. Além das dificuldades na linguagem simbólica da Álgebra, muitos estudantes possuem nível limitado na própria linguagem corrente. Este fato também gera dificuldades, já que “ [...] há uma estreita relação entre a linguagem matemática e a língua materna, visto que, a primeira depende da oralidade da segunda” (GIL; FELICETTI, 2016, p. 27).

Muitos estudantes não possuem o hábito da leitura, quanto menos de textos que envolvem Matemática. Esse fato interfere diretamente na compreensão de problemas no contexto algébrico. Como mostra a pesquisa de Scotto (2014), ao resolver exercícios com equações do 1º e 2º grau os estudantes acharam extensos os enunciados, levando-os a iniciar a resolução antes de ler o problema inteiro. Consequentemente não compreenderam os dados do enunciado, bem como aquilo que era necessário para encontrar uma solução e verificar sua validade. A interpretação é o primeiro passo para o pensamento algébrico, em virtude de que através dela é possível traduzir matematicamente a fraseologia de uma situação-problema.

Gonçalves (2013, p.12) aborda experiências sobre seu estágio supervisionado, relatando que uma das grandes barreiras enfrentadas pelos alunos “[...] está no processo de passagem de uma situação-problema na linguagem escrita para a linguagem algébrica”. Em concordância com Gonçalves (2013), Stocco (2014) também traz como resultado de sua pesquisa que muitos estudantes possuem essa dificuldade. Bezerra (2016) conclui que

> Os alunos muitas vezes têm dificuldades de interpretação, de equacionar, de articular o pensamento e observar as relações existentes entre as grandezas e expressar os resultados com o rigor científico necessário. Por isso, o aluno precisa conhecer os símbolos e aprender a estabelecer relações entre variáveis, e o que elas representam (BEZERRA, 2016, p. 57).

Egodawatte (2009) relata em sua pesquisa uma situação semelhante à de Bezerra (2016) e Gonçalves (2013), onde as dificuldades dos estudantes ao resolver problemas de Álgebra se concentram em maior número durante as fases de processamento e compreensão, com quase 50% dos erros relativos à transformação do problema na forma escrita para a linguagem algébrica.

Essas pesquisas mostram-nos que, se o estudante não consegue compreender a linguagem corrente e os símbolos matemáticos, as grandezas, os elementos matemáticos que compõe uma situação, ele dificilmente conseguirá interpretá-la a fim de resolvê-la, e consequentemente não desenvolverá o seu raciocínio através da escrita.

Portanto é notória a intersecção que se dá entre as dificuldades na linguagem algébrica e as dificuldades referentes à interpretação de enunciados, em especial enunciados matemáticos.

As escolas, tendo como mediador do conhecimento o professor, têm um papel fundamental na fomentação da leitura e interpretação de textos matemáticos, para que se tenha prazer e sentido no estudo de Álgebra.

4.3 ENSINO DE ÁLGEBRA NAS ESCOLAS

4.3.1 A Álgebra Somente para a Escola e Não para a Vida

O objetivo da escola é proporcionar um ensino que ajude o educando a se situar como agente ativo de construção de conhecimentos na sociedade. Isso é mais importante que apenas passar em provas ou não ser reprovado no fim do período de ensino. Na verdade este aprendizado escolar deve interligar aquilo que é ensinado na escola com as vivências de sua realidade, para que assim evite um fracasso muito pior que o da escola:

> Quando falamos de fracasso, não se trata, naturalmente, de fracasso dentro dos muros da escola. Embora em muitos casos o fracasso seja completo, isto significa que o aluno não aprende o que a escola lhe propõe, há um outro fracasso, igualmente preocupante, que é a farsa de tantas pessoas que aprendem o que é ensinado na escola, mas somente para a escola (LINS; GIMENEZ, 1997, p.17).

Temos então, o fato da escola possuir uma matemática que pode não estar contemplando a realidade dos estudantes, a qual é passível de aplicação. A matemática do cotidiano não é tão formalizada e simbólica, desta forma aquele que não compreende a matemática formalizada se vê inapto para pensar sobre ela, e por fim se afasta de seu estudo.

É possível que o estudante crie até mesmo bloqueios e ansiedades devido a não entender a Álgebra, e talvez este seja um dos motivos da criação de uma imagem da Matemática como "um bicho de sete cabeças". Essa situação ocorre em grande escala nas escolas, onde os alunos se sentem frustrados e com isso não conseguem ter um bom desempenho em Matemática, e consequentemente passam a não enxergar sentido em aprender (ARAÚJO, 2009).

Segundo Bezerra (2016), a formalidade e o rigor da linguagem algébrica podem afugentar os estudantes levando-os a encarar a Álgebra como algo totalmente fora de sua realidade, sendo assim impossível de ser compreendida. É fundamental descontruir essa ideia, pois há aqueles estudantes que acreditam que a Matemática não serve de nada para a vida fora dos muros da escola. Isso pode levá-los a "detestar a Matemática", o que é muito preocupante porque intensificará as dificuldades na aprendizagem de Álgebra (GIL; FELICETTI, 2016, p.21).

Esse tipo de pensamento é que leva ao desinteresse e desmotivação dos educandos, contribuindo para o mal desempenho dos mesmos (BEZERRA, 2016). Não que esteja errado usar esta linguagem, obviamente não é este o problema. Porém, deve-se tentar fazer uma ponte que interligue o ensino de Álgebra (bem como sua linguagem) com o mundo em que se insere o estudante, e não aprender um certo tópico de Álgebra porque o professor disse que tem que ser aprendido. Deve-se abandonar a ideia de que a linguagem matemática é para alguns alunos seletos.

Estas dificuldades não se limitam apenas à Matemática propriamente dita, já que outras ciências utilizam a Matemática como ferramenta para expressar ideias, teorias e resultados em geral. Deve-se enxergar a Álgebra para além da própria Matemática, para além das escolas: assim ficaria nítido o sentido de estudar Álgebra para compreender os fenômenos, os processos físicos e químicos, a vida em geral. Entretanto, quando se trabalha os conteúdos algébricos de forma fragmentada sem a importante contextualização em outras áreas, em especial dentro da própria Matemática (Geometria, Aritmética e Trigonometria), “ [...] ignora-se totalmente a formação das ideias em que a Álgebra se apoia” (SORTISSO, 2011, p. 8).

Ao entrevistar professores de química do ensino médio, Bezerra (2016) traz uma importante reflexão, na qual o ensino de Matemática é desconexo das demais ciências. Os estudantes não conseguem enxergar a utilização da Álgebra nos exercícios de química, citando assim a fala de um dos professores:

> [...] muitas vezes temos que interromper o conteúdo de química e fazer uma revisão dos conceitos matemáticos, necessários para a aprendizagem daquele conteúdo. Os alunos não conseguem equacionar um problema, têm dificuldades em resolver equações e compreender símbolos matemáticos necessários para a resolução de problemas e análises de dados químicos (BEZERRA, 2016, p. 44).

A fala deste professor reflete a realidade do ensino básico, onde os estudantes muitas vezes não enxergam a poderosa ferramenta de aplicabilidade que é a Álgebra. Nesse aspecto percebemos que além da Álgebra não ser compreendida para além da escola, não é visto sua grande utilidade ao ser empregada nos diversos ramos do conhecimento.

Em sua formação, em licenciatura em Matemática, Sortisso (2011, p. 2) traz reflexões sobre aprender e ensinar Álgebra, onde os alunos “ [...] não formulam ideia sobre qual é o sentido de estudar Álgebra, aprendendo-a somente para o período escolar e não para a vida”. Novamente lança-se mão do fato da Matemática escolar, nesse caso especificamente a Álgebra, estar desconexa com a Matemática do dia a dia.

Enfatizando a estranheza que existe entre a Matemática escolar e a da vida dos estudantes, D' Ambrósio (1998, p. 3) nos afirma que "A matemática dos sistemas escolares é congelada. São teorias em geral antigas, desligadas da realidade. Foram concebidas e desenvolvidas em outros tempos [...] ".

As operações aritméticas e algébricas rigorosamente trabalhadas em sala de aula, muitas vezes são distantes dos processos algébricos e aritméticos da vivência de mundo do estudante. Portanto, a Álgebra ensinada dentro das salas de aulas, deve ser para além dos muros das escolas. Deve ser ensinada também para facilitar os processos do dia a dia, para impulsionar as descobertas científicas dos educandos e para aprimorar o pensamento e o raciocínio crítico. Todo esse processo de (des)construção do ensino algébrico se apoia no trabalho conjunto entre professores e educandos, onde os professores precisam ser pesquisadores e os educando conscientes da importância do seu aprendizado. Contudo, essa forma de ensinar Álgebra, ainda não está totalmente presente nas salas de aula.

4.3.2 Ensino Tradicional

Muitas dificuldades e resistências no aprendizado de Álgebra, na sua significação e ampliação de conceitos, estão relacionadas à forma como é abordado esse conteúdo (SBRANA et al., 2016). As abordagens tradicionais que utilizam unicamente a memorização e repetição como forma de aprendizado, dificultam a compreensão da Álgebra nos seus diversos aspectos, tanto operacionais como de interpretação.

Apesar da Álgebra ser fundamental no ensino da Matemática e estando presente a todo momento em nosso cotidiano, ainda existe deficiências no seu processo de ensino e aprendizagem que são apontadas em pesquisas e avaliações governamentais (COELHO; AGUIAR, 2018). Acredita-se que as dificuldades de aprendizado encontradas no ensino da Álgebra recorrem do fato da " ênfase que se dá a seus aspectos técnicos, deixando de lado, muitas vezes, o desenvolvimento dos conceitos e uma busca por um pensamento mais abstrato" (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 171).

Há tempos atrás, Usiskin (1995) já nos dizia que estas técnicas de manipulação e simplificação se tornaram uma questão relativa, tendo em vista as tecnologias que podem ser usadas didaticamente. Como afirma o autor:

> Consideramos, por exemplo, a questão das técnicas manipulatórias lápis-papel. No passado, tinha-se que dominar essas técnicas para resolver problemas e estudar funções e outras relações. Hoje, como os computadores são capazes de simplificar expressões, resolver sentenças e fazer gráficos de funções, o destino das técnicas manipulatórias torna-se uma questão relativa

> à importância da Álgebra como uma estrutura, como o estudo de sinais arbitrários no papel, como o estudo de relações arbitrárias entre símbolos. O ponto de vista predominante hoje, ao que parece, é que esse não deveria ser o critério principal (nem certamente o único critério) para se determinar o conteúdo da Álgebra (USISKIN, 1995, p.20).

De acordo com Silva (2008), nas provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), e Ribeiro (2001), nas provas do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), observa-se a dificuldade dos estudantes ao resolver questões de matemática, em especial Álgebra. Isso mostra a relevância em se pesquisar sobre o ensino e a aprendizagem deste tema, já que os resultados não são satisfatórios. Corroborando com esta ideia, Ribeiro (2001, p. 24) em sua pesquisa com alunos do 8º ano pondera que "Os resultados das avaliações fortalecem a ideia de que o ensino de Matemática vem sendo ineficiente".

Gil e Felicetti (2016, p. 21) ao analisar os resultados da Prova Brasil concordam com Ribeiro (2001), onde indicam que muitos estudantes do ensino fundamental não possuem as habilidades necessárias para resolver problemas de cunho algébrico. Como por exemplo, "[...] identificar uma expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências e identificar uma equação ou uma inequação de primeiro grau que expressa um problema". Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) traziam também essa reflexão:

> [...] a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem um índice de 40 % de acerto em muitas regiões do país (BRASIL, 1998, p.115-116).

Os PCNs traziam ainda a ideia de que para a aprendizagem ser significativa, é necessário criar uma rede de conhecimentos interligados como uma teia de significados (BRASIL, 1998). Contrapondo a isso, é comum o livro didático ser o único ou principal recurso didático utilizado pelos professores dentro das salas de aula (AGUIAR, 2016); e muitas vezes "É deste que ele retira as explicações e os exercícios a serem propostos para a turma e também se informa de alguma novidade dentro do ensino da Matemática" (GIL, K., 2008, p. 41). Segundo Souza (2004), a consequência disso será os estudantes terem a impressão que o conhecimento científico inserido nos livros didáticos é linear e imutável.

Além disso, muitos livros didáticos abordam a Álgebra utilizando a Geometria como ferramenta de visualização dos processos algébricos, contudo sem se preocupar com a linguagem, com os símbolos e seus significados (SCARLASSARI, 2007).

O ensino tradicional da Álgebra se estrutura quando desde a introdução deste conteúdo nas séries iniciais do ensino fundamental, se prioriza a aplicação e memorização de fórmulas e algoritmos em detrimento dos significados dos mesmos. As dificuldades que surgem a partir deste cenário são do tipo didático, ou seja, referentes ao método como o professor ensina, à forma como ele aborda e desenvolve o conteúdo (TRUJILLO, 2012).

Portanto ao analisarmos pesquisas sobre as dificuldades que os estudantes encontram no campo da Álgebra, fica claro que muitas vezes a maneira como a Álgebra é trabalhada em sala de aula não é suficiente para que os estudantes tenham as habilidades e competências necessárias para interpretar/analisar o enunciado de um problema. Estas dificuldades se iniciam desde a inserção de Álgebra nas séries iniciais do ensino fundamental, já que tradicionalmente, muitas escolas abordam a aritmética separada do estudo da Álgebra (BECHER; GROENWALD, 2010).

4.4 RELAÇÃO ENTRE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

Ao analisar pesquisas de diversos autores sobre o ensino de Álgebra e Aritmética, a primeira dificuldade encontrada tem suas raízes no ensino fundamental onde a Álgebra muitas vezes é introduzida de forma pronta, sem que os estudantes saibam suas aplicações e utilizações (SORTISSO, 2011).

Esta situação acontece devido à compartimentalização dos ensinos de Álgebra e Aritmética, onde se ensina de maneira isolada os respectivos tópicos sem que haja conexão e amadurecimento dos conceitos de um em relação ao outro. Lins e Gimenez defendem que “É preciso começar mais cedo o trabalho com a Álgebra, e de modo que esta e a Aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra” (LINS; GIMENEZ, p. 10, 1997).

Quando a Aritmética não é trabalhada concomitante com a Álgebra, não é natural para o estudante trabalhar com simbologias. Isso mostra a atenção que o professor deve dar nesse momento de passagem da Aritmética para a Álgebra, sem haver uma brusca ruptura, como se fosse duas áreas disjuntas. Concordando com Linz e Gimenez (1997) os PCN’s de Matemática do ensino fundamental nos dizem:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1997, p. 117).

Evidenciando essa grande conexão entre Aritmética e Álgebra Sortisso (2011, p. 8) nos diz ainda que “A Álgebra, no contexto essencialmente matemático, não passa de uma aritmética generalizadora ou a estrutura da Aritmética, criada para suprir as necessidades que a simples Aritmética não conseguia suprir. ” Portanto, a segunda dificuldade referente à relação que existe entre Aritmética e Álgebra, estão ligadas à abordagem que se dá no ensino de Aritmética.

Gonçalves (2013) nos aponta que, os estudantes mostravam dificuldades em procedimentos algébricos devido à forma como foi introduzida a Álgebra a partir de uma aritmética formal, com resultados numéricos mecanizados sem conexão com a realidade. Em virtude disso, torna-se difícil a compreensão da linguagem matemática dada a brusca mudança na forma de pensar.

Souza (2004) nos diz que, ao ensinar Aritmética se o foco for as técnicas de cálculo, perde-se a capacidade de pensar de forma genérica. Complementando essa ideia, Booth (1995) nos alerta sobre a necessidade de amadurecer os procedimentos aritméticos, suas generalizações no próprio campo da Aritmética, destacando esse fato, conclui:

> Nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em Álgebra poderá ser afetado (BOOTH, 1995, p. 33).

Em um artigo da revista *Interuniversitaria de Formación del Profesorado: didácticas de las matemáticas para los profesores de educación secundaria* (Formação Interuniversitária de Professores: didáticas de matemáticas para professores do ensino médio) Collis (1974), conforme citado por Socas et al. (1998), aponta que quando se inicia o estudo da Álgebra, as crianças enxergam as expressões algébricas como incompletas. Isso se dá devido à natureza abstrata que a Álgebra possui, à qual elas não estavam acostumadas. Um exemplo disso é a propriedade aritmética do fechamento, na qual ao realizarmos as operações numéricas as respostas continuam ainda sendo números. Ao contrário da Álgebra que generaliza ideias e operações, Booth (1995) diz que:

> Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na Álgebra, porém, é diferente. Na Álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral. [...] Muitos alunos não percebem isso e continuam achando que devem dar uma resposta numérica (BOOTH 1995, p.24).

Gil e Felicetti (2016) em sua pesquisa, apontam a terceira dificuldade referente à relação entre Aritmética e Álgebra: simplificações algébricas. O autor relata dificuldades nas reduções de expressões algébricas, onde o resultado nem sempre é um número. Por exemplo Araújo (2009) nos mostra que muitos estudantes cometem erros como, $8a^2 + 216x^6 = 224a^2x^6$.

No tocante à relação entre Aritmética e Álgebra, temos a quarta dificuldade encontrada: erros que os estudantes trazem para o contexto algébrico, originados no contexto aritmético; utilização de procedimentos aritméticos em situações algébricas de forma equivocada (GIL, K., 2008). Socas et al. (1998, p. 82) exemplificam esses erros em Álgebra oriundos da Aritmética:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2+3} \longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{2+3} \longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{(2\ .\ 3)} \longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x\ .y)}$$

É muito recorrente os erros relacionados a operações simples com frações. O exemplo acima mostra-nos que os estudantes podem transportar estes erros para as operações algébricas que envolvam frações. Consequentemente, o estudante tem dificuldade em entender o sentido das operações algébricas, suas estruturas e simplificações.

Gomes (2013) e Egodawatte (2009) apontam a existência de erros cometidos pelo mau uso ou a falta de uso dos parênteses, como por exemplo, quando se tem um sinal negativo antes de um parêntese, $-(x + y) = -x + y$, ou ainda, um sinal negativo na frente de uma fração, $-\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{-2x+1}{3x-1}$.

A quinta dificuldade relacionada a Álgebra e Aritmética, está no fato de se pressupor que os estudantes iniciando o estudo da Álgebra possuem a bagagem numérica e operacional necessária para tal estudo. Mas há pesquisas que mostram que isso nem sempre acontece, como o de Gil e Felicetti (2016), e K. Gil (2008, p.84) ao citar a fala de uma professora entrevistada: “Às vezes ele está na 7ª série e não tem maturidade para entender a Álgebra, isso para mim também é um fator importante”. Muito além da maturidade, quando os estudantes não possuem conceitos bem definidos das séries anteriores (em especial os aritméticos), fica comprometido o aprendizado em Álgebra.

Não somente os iniciandos em Álgebra, mas os estudantes que estão no ensino médio, também demonstram falta de requisitos básicos em Aritmética, essenciais para a resolução de problemas algébricos. Stocco (2014, p. 10) mostra-nos que alguns estudantes não conseguiram resolver os problemas algébricos devido a "[...] erros de matemática básica como: adição, subtração, multiplicação e divisão".

Temos ainda a sexta dificuldade encontrada: erros relacionados à noção de igualdade em Aritmética. Os estudantes têm o hábito de pensar que o membro que fica à esquerda da igualdade consiste de uma sequência de operações que têm como resposta um número que fica à direita da igualdade (SERRES VOISIN, 2011). Além disso utilizam mecanicamente regras do tipo: mudou de lado da igualdade troca o sinal. Esta forma decorada de se resolver uma relação de igualdade leva os estudantes a cometerem erros, que consequentemente geram dificuldades. Exemplificando este fato, Scarlassari (2007) nos relata

> Muito comum na sala de aula, ela pode induzir o aluno a erros durante a resolução das equações do tipo: 2x = 10, então x = 10 – 2, pois se troca de sinal, o 2 estava sem sinal, portanto compreendido como positivo, então vai para o segundo membro com o sinal negativo (SCARLASSARI, 2007, p.30).

Ainda sobre o conceito de igualdade Trujillo (2012) indica-nos que há dificuldades em diferenciar expressões como $4x - 8 = x + 10$ e $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Os erros recorrentes transformam-se em dificuldades quando não compreendem que na primeira igualdade existe um valor particular para a incógnita, já na segunda as variáveis podem assumir quaisquer valores no conjunto dos números reais, visto que a segunda igualdade corresponde a uma simplificação na qual se pegou o lado esquerdo e se procedeu ao produto de $(a + b)$ por si mesmo e assim obtendo o lado direito.

Os estudantes também apresentam dificuldades no estudo da Álgebra devido à confusão que fazem com a linguagem utilizada na Aritmética e na Álgebra, sendo essa a sétima dificuldade encontrada referente a relação entre Aritmética e Álgebra. Os estudantes confundem os símbolos utilizados nestes dois ramos da Matemática, achando que possuem o mesmo significado, devido a ter o mesmo símbolo. Sobre esta situação a autora Booth (1995) afirma:

> As letras também aparecem em aritmética, mas de maneira bastante diferente. A letra m, por exemplo, pode ser utilizada em aritmética para representar 'metros', mas não para representar o número de metros, como em Álgebra. A confusão decorrente dessa mudança de uso pode resultar numa 'falta de referencial numérico', por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em Álgebra (BOOTH, 1995, p. 30).

Entender a relação entre a Aritmética e Álgebra, sob o ponto de vista das dificuldades encontradas, é muito importante devido à implicação que existe no entendimento e correção dos erros nos procedimentos algébricos. Percebemos que muitos erros oriundos da Aritmética são cometidos na Álgebra, os quais podem ser estendidos nas aplicações de fórmulas e regras em situações algébricas.

4.5 FÓRMULAS E REGRAS DE PROCEDIMENTO

Algumas dificuldades se originam de erros cometidos ao usar erroneamente fórmulas e regras " [...] que extraíram de um protótipo ou livro-texto e que usam tal qual as conhecem ou as adaptam incorretamente a uma situação nova" (GOMES, 2013, p. 56).

Tanto Gomes (2013) como Socas et al. (1998) citam que esses erros se devem a generalizações falsas que talvez se verificam em alguns casos particulares, como por exemplo, quando os estudantes usam indevidamente a linearidade nas fórmulas e regras de procedimento. Socas et al. (1998) nos dão alguns exemplos desse uso indevido da linearidade, os quais foram sintetizados no Quadro 13.

Quadro 13 - Erros de linearidade

Uso indevido da linearidade
$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
$\sin 3a = 3 \sin a$
$2^{n+m} = 2^n + 2^m$

Fonte: produção do próprio autor

A análise desses erros é muito importante, pois observamos que diversas áreas da própria Matemática são afetadas negativamente devido a essas falhas de procedimentos. Nota-se claramente essa situação ao resolver um exercício que envolva o Teorema de Pitágoras, onde aplica-se indevidamente a linearidade acreditando que a raiz da soma de quadrados, é igual à soma das raízes dos quadrados.

Gomes (2013, p. 56 - 60), Socas et al. (1998, p.83) e Trujillo (2012, p. 33) citam erros de procedimentos que envolvem o uso errado de fórmulas, regras e generalizações, conforme sintetizado no Quadro 14.

Quadro 14 - Erros de Procedimento

Grupos de erros	Exemplos
Uso incorreto de propriedades distributivas	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ $a(b.c) = ab.ac$ $\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$
Uso errado dos inversos	$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7}, \Rightarrow\ 3 = x + 7$
Erros relativos ao cancelamento	$\frac{(x+y)}{(x+z)} = y + z$ $\frac{9x+6}{6} = 9x$
Falsas generalizações sobre os números	$(x - a)(x - b) = k, para\ k \neq 0$ $\Rightarrow x - a = k\ ou\ x - b = k$

Fonte: produção do próprio autor

Existem também certas convenções, "macetes" que muitas vezes são estabelecidos com o objetivo de facilitar o aprendizado. Mas que na verdade são afirmações imprecisas. É muito importante no momento da aprendizagem, atentar-se para " [...] afirmações verbais corretas e precisas da Matemática" (VELOSO; FERREIRA, 2011, p. 62). Exemplificando essa falta de rigor aritmético que interfere diretamente no desenvolvimento algébrico, Booth (1995) nos diz

> Alguns alunos acham que a divisão, como a adição, é comutativa. Outros não vêem a necessidade de distinguir as duas formas, acreditando que o maior número sempre deverá ser dividido pelo menor. Isso parece decorrer da recomendação bem-intencionada feita pelo professor de matemática, no início do aprendizado da divisão, e da própria experiência dos alunos, pois todos os problemas de divisão encontrados em aritmética elementar, de fato, exigem que o número maior seja dividido pelo menor (BOOTH, 1995, p. 29).

Ensinar é uma tarefa complexa, que está ligada a diversos fatores, e é nesse momento de ensino e aprendizagem que pode surgir a falsa impressão que uma regra decorada ou um padrão estabelecido imutável, poderá facilitar o ensino, já que bastará apenas seguir os passos previstos. Contudo, a Álgebra necessita de pensamento, e que este seja expresso usando uma linguagem simbólica, afim de ser possível proceder matematicamente. Quando existem dificuldades com esta linguagem, será uma tarefa difícil a compreensão de situações algébricas, e aliadas com um ensino tradicional que não prioriza o pensamento algébrico, os estudantes não conseguirão resolver um problema. Assim, é pouco provável que enxerguem a utilidade de aplicar corretamente os procedimentos algébricos, recorrendo a métodos informais para a resolução de problemas.

4.6 UTILIZAÇÃO DE MÉTODOS INFORMAIS

A Álgebra é uma ferramenta de grande importância para resolver diversos problemas, dos reais aos abstratos. Contudo, é comum os estudantes usarem métodos informais para resolver estas situações, começando com problemas aritméticos e se estendendo negativamente para os de cunho algébrico. Booth (1995) nos relata um exemplo

> Se um aluno geralmente não determina o número total de elementos de dois conjuntos de, digamos, 35 e 19 alunos utilizando a noção de adição, como 35 + 19, mas resolve o problema, utilizando o processo de contagem, então é pouco provável que o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos seja prontamente representado por x + y (BOOTH, 1995, p. 35).

Observamos que muitos estudantes ao se deparar com um problema, optam por usar séries de cálculos numéricos testando possibilidades; como por exemplo atribuir valores para uma incógnita até encontrar a solução. Temos como exemplo a situação descrita por Stocco (2014), onde os estudantes tiveram dificuldades em encontrar um modelo matemático para um problema envolvendo equações, decorrendo assim na utilização da dedução, tentativas e lógica para a resolução de equações do 1º e 2º grau. Este tipo de resolução não dá a possibilidade de generalizar situações, e assim muitos problemas não são resolvidos; além de que se perde imenso tempo com as tentativas. Isso porque esses métodos informais podem funcionar bem para problemas simples, entretanto nos de natureza mais complexa não há êxito.

Apresentamos nesta seção, as principais dificuldades que encontramos nas literaturas que abordam o ensino e aprendizagem de Álgebra. Tendo em mente todo este arcabouço teórico, inclusive das seções anteriores, seremos capazes de olhar sistematicamente sob uma perspectiva didática para as dificuldades que encontramos no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra, de modo a propor soluções para essas. Percebemos que essas dificuldades perpassam vários tópicos de Álgebra, refletindo-se e originando-se até mesmo na Aritmética. Portanto, essas correlações serão discutidas mais profundamente na próxima seção, onde analisaremos as informações obtidas nesta pesquisa e proporemos atividades para minimizar essas dificuldades.

5 ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Nesta seção iremos analisar as dificuldades encontradas na Seção 4, com o objetivo de descobrir as possíveis relações que elas possuem entre si e sugerir algumas formas das ultrapassar por meio de atividades. Para isso, iremos começar por ver quais são os fatores que dão origem a essas dificuldades, que passaremos a chamar de *fatores dificultadores*. Posteriormente, proporemos atividades que ajudam a ultrapassar essas dificuldades, ou até mesmo que as elimine. Usando as conceções de Álgebra apresentadas na Seção 2, essas atividades foram elaboradas sobretudo com o intuito de desenvolver o pensamento algébrico. Portanto, iremos sugerir maneiras de trabalhar com a Álgebra, mostrando como o pensamento algébrico pode contribuir para solucionar as dificuldades que encontramos em nossa pesquisa bibliográfica.

5.1 AS DIFICULDADES E OS FATORES DIFICULTADORES

Com base em nosso referencial teórico, apresentado nas Seções 2 e 4 que relatam as conceções de Álgebra e as principais dificuldades no ensino e aprendizagem desta matéria, respectivamente, e na nossa experiência profissional, estabelecemos os principais fatores dificultadores. Apresentamos no Quadro 15 esses fatores dificultadores, que resolvemos representar simbolicamente por F_i, i = {1,2,3, ...,13}, com o objetivo de facilitar a análise e apresentação dos dados.

Quadro 15 – Principais fatores dificultadores

Fatores Dificultadores	**Representação Simbólica**
Conhecimento sobre símbolos e seus significados	F1
Diversos usos para as letras	F2
Falta de atividades ligadas à leitura	F3
Falta de estímulos ao raciocínio	F4
Uso inapropriado de letras pelo professor	F5
Metodologia empregue pelo professor que induz em erro	F6
Falta de aplicações em outras áreas de conhecimento	F7
Aplicações desconexas da realidade	F8
Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos	F9
Compartimentalização da Álgebra e aritmética	F10

Fatores Dificultadores	Representação Simbólica
Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra	F11
Uso de métodos informais	F12
Falta de atividades voltadas à memorização	F13

Fonte: produção do próprio autor

Os fatores dificultadores apresentados no Quadro 15 dão origem às dificuldades no ensino e aprendizagem da Álgebra. Cabe aqui dar algumas explicações sobre estes fatores dificultadores. Os fatores F1 a F4, e F7 não requerem esclarecimentos, dado que seus nomes indicam claramente do que tratam. O fator *Uso inapropriado de letras pelo professor* (F5) remete-se ao exemplo citado por Trujillo (2012, p. 32), onde o produto de dois números "k" e "g" pode ser escrito como $kg, (k)(g), k\ x\ g, k(g)\ e\ k\ \cdot\ g$. O fato do professor usar, por exemplo, kg para representar $k\ x\ g$ é um mau emprego das letras: os estudantes estão habituando-se a usar letras, portanto em uma fase inicial o professor não deve usar símbolos com significados específicos, como é o caso de kg (abreviatura de quilograma), para não confundi-los. Isso também acontece quando se utiliza em certos contextos a letra *m* para indicar uma medida ou para representar um valor numérico, logo no início do estudo de Álgebra. Pode causar confusões, já que o estudante está acostumado a associar a letra m à representação da unidade de medida metros.

Outro aspecto relevante a considerar sobre F5, é a utilização das letras para uma escrita literal de uma afirmação algébrica. Por exemplo, quando lemos a fórmula da área de um retângulo $A = bxa$, notadamente é uma versão resumida da afirmação verbal " *Área é igual à base multiplicada pela altura"*, facilitando a compreensão por utilizar especificamente as letras A, b e a. No entanto, isso não acontece em todas as afirmações algébricas, podendo influenciar os estudantes a sempre fazer essa aliteração. Deve ser dito ao estudante, que no caso de áreas e volumes as letras usadas correspondem à primeira letra da palavra, o que facilita a memorização, mas no caso de outras fórmulas pode não haver essa ligação.

O professor deve ficar atento ao introduzir questões do tipo: " b significa a quantidade de bananas, então quanto vale $5b$?" Isso poderá levar o estudante a concluir que $5b$ corresponde a 5 bananas e não a 5 multiplicado pela *quantidade* de bananas. Ainda sob este enfoque, deve-se evitar o uso inapropriado de letras no emprego de afirmações como " três pêras mais duas bananas", ao traduzi-las para $3p + 2b$. Como já exemplificado, isso leva os estudantes a terem uma visão muito limitada do emprego das letras, podendo até gerar erros como $3p + 2b = 5pb$, já que é verdade que "3 pêras mais 2 bananas" pode ser igual a " 5 *pêras e bananas*". Uma sugestão de solução para esse problema pode ser por exemplo, utilizar q_b e q_p para quantidade bananas e quantidade de pêras, respectivamente.

O fator *Metodologia empregue pelo professor que induz em erro* (F6) remete-se a algumas convenções e/ou métodos de ensino que de início podem parecer técnicas facilitadoras, mas que na verdade produzirão erros e confusões. Por exemplo, a representação da multiplicação em Álgebra utilizando a justaposição, (como $2k$, em vez de $2\ x\ k$, $k\ x\ 2$ ou $2 \cdot k, k \cdot 2$) onde suprime-se muito cedo o sinal de multiplicação levando o estudante, o qual está familiarizado a mais tempo com a Aritmética, interpretar $2k$ como 2 dezenas $+\ k$ unidades. Segundo Booth (1995), os estudantes têm tendência a enxergar essa justaposição como uma soma ou como representação de valores posicionais, portanto, aconselha que na fase inicial do estudo da Álgebra, deve-se escrever estas multiplicações por extenso. No entanto, surge aqui uma questão: porquê os estudantes tendem a visualizar, por exemplo, o número 31 como a justaposição de dois algarismos, em vez de um número como um todo? Talvez isso aconteça quando os professores introduzem a multiplicação por decomposição nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por exemplo, eles mostram que o produto de 31 com 13 pode ser obtido através da multiplicação da decomposição dos números 31 e 13, como segue.

	30	1
10	300	10
3	90	3

$$\begin{array}{r} 300 \\ 10 \\ 90 \\ \underline{+\quad 3} \\ 403 \end{array}$$

Como é possível verificar, os números 31 e 13 correspondem, respectivamente, a (30+1) e (10+3). Porque os estudantes depois não haveriam de pensar que $2x$ é igual a $20+x$? De acordo com o exemplo anterior essa é a lógica. Portanto, não seria melhor os estudantes visualizarem os números 31 e 13 como um todo? Entende-se que a ideia de decompor os números 31 e 13 seja para simplificar a multiplicação, mas esse método acaba introduzindo uma forma errada de visualizar expressões como $2x$. Talvez seja melhor voltar à forma tradicional de multiplicar números com mais de um algarismo.

Também se relacionando ao F6, existem algumas convenções de resolução e representação de expressões algébricas que não podem ser adotadas tão apressadamente ou exigidas pelos professores antes que os estudantes entendam os motivos e os conceitos por trás de suas utilizações. Por exemplo, sabemos que é interessante que o estudante escreva as constantes antes das letras, como: $2{,}5x + x$. Contudo, dependendo da forma que o estudante interpreta o enunciado de um problema, ele poderá traduzir algebricamente a fraseologia do texto como $x2{,}5 + x1$ (é comum os estudantes escreverem o número 1 quando ainda não o reconhece como elemento neutro na multiplicação), não interferindo no resultado. O importante é o estudante dar significado a essa expressão, e com o tempo ele irá se acostumar com as convenções.

Outro exemplo é a supergeneralização que se faz na resolução de uma equação, onde o professor ensina que basta "passar os termos de um lado da equação para o outro, fazendo as devidas operações inversas". Utilizar essa metodologia de transposição como introdução à resolução de equações produz muitos problemas e traz pouco significado ao papel da igualdade, pois os estudantes não estão familiarizados e nem têm ciência do que é essa operação inverter: não sabem se é para multiplicar, dividir, somar ou subtrair. Assim, para que fique clara a ideia de igualdade, os estudantes deveriam ser inicialmente familiarizados com a ideia de igualdade com o uso de uma balança: se se tirarem objetos de um lado da balança, a balança ficará desequilibrada (Vide atividade 5.2.8.3 A igualdade e a balança). Mais adiante, quando se ensina como resolver equações deve-se usar a mesma ideia da balança: se se tirar algo de um lado da equação e não do outro, esta deixará de ser uma igualdade. Assim, sugere-se a seguinte forma para resolver a equação $3x – 2 = 5x + 3$.

$$
\begin{array}{cc}
3x - 2 = 5x + 3 & \Leftrightarrow \\
3x - 2 - 3 = 5x + 3 - 3 & \Leftrightarrow \\
3x - 5 = 5x + 3 & \Leftrightarrow \\
3x - 5 - 3x = 5x - 3x + 1 & \Leftrightarrow \\
-5 = 2x & \Leftrightarrow \\
1/2 \cdot (-5) = 1/2 \cdot (2x) & \Leftrightarrow \\
-5/2 = x. &
\end{array}
$$

Os caracteres a vermelho devem ser colocados para que os estudantes entendam: obviamente é um pouco entediante para o professor colocar todos esses passos, mas pulá-los em uma fase inicial é um erro. Aqui deve ficar claro que as operações em ambos os lados da igualdade têm que ser as mesmas, caso contrário deixa de ser uma igualdade, tal como acontece com os dois lados de uma balança. Uma vez que os estudantes tenham percebido que ao fazer isso, em um dos lados o termo que estava lá sumiu – conforme ilustram os termos cercados nas equações acima, os estudantes poderão limitar-se a usar a metodologia de transposição.

De certa forma relacionado a F7, o fator *Aplicações desconexas da realidade* (F8) ocorre quando o trabalho desenvolvido em Álgebra é totalmente descontextualizado da realidade, em especial da realidade do estudante. Esse fator está diretamente relacionado às dificuldades que os estudantes possuem em ver sentido no estudo da Álgebra. Por exemplo, se for solicitado ao estudante que resolva a equação $cos^2(\theta) + 2 \cdot sen(\theta) + sen^2(\theta) = 2$, eles enxergarão justificativas para simplificar, já que reconhecerão a facilidade em trabalhar com uma expressão mais simples. Resolvendo a expressão acima, temos que $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, e assim $2 \cdot sen(\theta) = 1$. Logo, $sen(\theta) = \frac{1}{2}$.

Assim, contextualizar através de situações realísticas (por exemplo, a expressão citada acima poderia ser um modelo matemático de uma situação-problema) dá sentido aos conteúdos ensinados. Uma recomendação seria introduzir alguns tópicos de Álgebra a partir da ideia de como eles poderiam ser aplicados, instigando os alunos a atividades investigativas.

O fator *Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos* (F9) está muito presente nas salas de aula, onde o ensino é focado em simplesmente expor um algoritmo ou fórmula, e de imediato uma aplicação conteudista, ou seja, um exemplo e depois "siga o modelo". O problema está em sempre ou somente fazer isso, onde os estudantes decoram a fórmula para depois aplicar em uma imensa gama de exercícios semelhantes que não adicionam significado algum. O ensino da regra por si só, é de fato um processo mecânico que não tem muito significado na realidade do estudante, contudo quando utilizado em aplicações e demonstrado a sua origem ou lógica, a regra ou algoritmo passa a ter sentido. Um detalhe importante a ser mencionado é que, em especial na Matemática, o governo e a sociedade exigem de nós educadores bons índices e altas notas em exames cada vez mais padronizados. Muitas vezes essa excelência exigida é confundida com altas notas nas avaliações internas e externas, sem mencionar sobre as aprovações quase que automáticas. Nesse contexto, na tentativa de atender a essas exigências, o professor sente-se pressionado a ensinar "para passar na prova", ou seja, dá mais importância em habilidades mecânicas fáceis de serem medidas (e assim melhores notas), enfraquecendo o processo de avaliação e maquiando o índice de desenvolvimento educacional.

Com relação ao fator *Compartimentalização da Álgebra e aritmética* (F10), observamos que a Álgebra é ensinada de maneira isolada da Aritmética, sem que haja conexão e amadurecimento dos conceitos de uma em relação à outra. Lins e Gimenez (2001) defendem que essas duas áreas da Matemática devem ser desenvolvidas juntas desde cedo. A Álgebra é vista também como uma aritmética generalizada, no entanto como compreender certas generalizações e procedimentos a nível algébrico se o estudante não reconhece que essas generalizações e procedimentos podem ser encontrados e derivados do contexto aritmético? Por exemplo, o estudante entenderá mais facilmente que $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, $\forall\ a$ e $b \in \mathbb{R}$, se mostrarmos através de vários exemplos numéricos, que ao substituir a e b tanto do lado esquerdo como no direito, a igualdade mantém-se. Outro caminho também é mostrar que desenvolvendo o lado esquerdo, aplicando *operações aritméticas*, chega-se ao resultado do lado direito. Outro exemplo ainda, bem simples mas importante, é entender a propriedade comutativa da multiplicação $x\cdot y = y\cdot x$, verificando a sua validade no contexto aritmético. Esses exemplos remetem-se à conceção de Álgebra como Aritmética generalizada, de Usiskin (1995).

Um dos exemplos mais recorrentes do fator *Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra* (F11) é a incapacidade dos estudantes em somar, subtrair, multiplicar e dividir corretamente frações algébricas, por não serem capazes de fazê-lo com frações numéricas. Por exemplo, é muito comum os estudantes cometerem erros como,

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{6}{8}$$

Transferindo assim esta forma equivocada de somar frações para o contexto algébrico:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Assim, antes de começar a introduzir as operações com frações algébricas, o professor deve garantir que os seus estudantes dominam essas operações com frações numéricas. Outro exemplo é aquele mencionado no fator F6, em que os estudantes pensam que $2x$ corresponde a $20+x$, dado que nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os professores introduzem os números, no processo de multiplicação, como a justaposição de algarismos em vez de números como um todo. Aqui, na nossa opinião, deve-se abandonar este processo e usar o modo convencional de multiplicar números.

O fator *Uso de métodos informais* (F12) foi observado nas pesquisas de Booth (1995) e Scotto (2014), onde os estudantes recorriam para métodos informais, utilizando sequências de cálculos aritméticos para resolver problemas algébricos, em especial nas resoluções de equações: utilizavam o método da tentativa, ao atribuir valores para a incógnita. O uso desses métodos pode implicar negativamente na destreza do estudante ao se deparar com situações mais complexas, onde esses procedimentos informais não podem ser aplicados de maneira tão imediata. Booth (1995) enfatiza que os estudantes devem enxergar a necessidade de utilizar os procedimentos formais, e para isso é necessário:

- que o professor reconheça que os estudantes podem arranjar métodos informais para resolver problemas;
- que seja discutido e reconhecido esse método e os valores encontrados a partir dele;
- que seja avaliada as limitações deste método, utilizando-o em situações mais complexas, para que assim o próprio estudante reconheça a necessidade e a eficácia de um método formal e geral.

O fator *Falta de atividades voltadas à memorização* (F13) pode parecer uma contradição quando comparado com o fator Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9). No entanto, não há contrassenso nenhum aqui: o ensino não pode ser feito baseado "unicamente" na memorização de fórmulas, algoritmos, etc., mas o processo de memorização não pode ser "totalmente descartado". A memorização sempre é associada a repetição, que também é fundamental, uma vez que o estudante cria um repertório que pode ser utilizado em outros cálculos e situações. Contudo, são necessárias atividades que levem os estudantes a construir o raciocínio, encontrando sentido no que aprenderam. Por exemplo, para memorizar uma fórmula trigonométrica pode-se mostrar ao estudante como ela foi originada, desenvolvendo até mesmo atividades lúdicas com material concreto aliado à visualização geométrica. Dessa forma decorar resultados, fórmulas, conceitos, fatos, etc., é uma consequência final desse processo de construção do raciocínio.

Outro exemplo é a tabuada: os estudantes e/ou professor podem criar inúmeros métodos para memorizar os resultados das multiplicações, através da composição e decomposição dos números, além de ser uma oportunidade para mostrar a importância de algumas propriedades (comutativa, distributiva, associativa). O foco destas atividades é, portanto, levar os estudantes a memorizar conceitos e fórmulas algébricas a partir da compreensão dos significados de tais conceitos e fórmulas.

Ainda com base em nosso referencial teórico e levando em conta as dificuldades que foram percebidas durante a minha trajetória como professor, resumimos no Quadro 16 as principais dificuldades dos estudantes relativamente à Álgebra.

Quadro 16 - Principais dificuldades dos estudantes relativamente à Álgebra

Dificuldades dos estudantes	**Representação Simbólica**
Dificuldade em pensar	P

Dificuldades dos estudantes	Representação Simbólica
Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa	LEvsLA
Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa	EEP
Dificuldade em interpretar as letras	IL
Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado	Ut
Dificuldade com simplificação de expressões algébricas	SExpA
Dificuldade com a noção de igualdade	Ig
Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos	FPP
Dificuldade em generalizar	G
Dificuldade em memorizar	Mem

Fonte: produção do próprio autor

Como o objetivo de elaborar atividades que ajudam a sanar as dificuldades supramencionadas no Quadro 16, necessitamos analisá-las mais profundamente: precisamos descobrir que fatores dificultadores lhes dão origem. No restante desta seção iremos justificar porque certos fatores dificultadores levam ao surgimento de dadas dificuldades e na Seção 5.2 mostraremos algumas formas de lidar com esses fatores de modo a tentar eliminar essas dificuldades.

Dificuldade em pensar – P

Segundo Charpentier (1992) a criança não pode ler ou escrever sem compreender. Portanto em primeiro lugar, a criança precisa de compreender, antes de aprender a ler. No entanto, uma vez que a criança já sabe ler, de acordo com Cunningham e Stanovich (2001), quanto mais ela lê, mais ela desenvolve o raciocínio. Daqui conclui-se que os atos de raciocinar e ler estão interligados. Sendo assim, é crucial instigar a leitura de modo a aprimorar o ato de pensar (F3). Além disso, o ato de raciocinar tem que ser treinado, tal como os músculos, quanto mais o raciocínio é estimulado mais ele fica desenvolvido (F4). Para ajudar o desenvolvimento do pensamento, é também importante que fórmulas e procedimentos matemáticos sejam explicados pelos professores, pois quando os estudantes entendem a lógica e os passos que foram usados para determinar uma dada fórmula, algoritmo, etc., eles conseguem replicar e aplicar esse raciocínio a outras situações (F9). Para facilitar o raciocínio os estudantes precisam também de possuir algumas informações em mente, como por exemplo, para demonstrar que

$$cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -sin(\theta),$$

eles têm que se lembrar das definições de seno e cosseno (F13). Resumindo, para suprimir a dificuldade em pensar deve-se cuidar dos seguintes fatores dificultadores:

- Falta de atividades ligadas à leitura (F3);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9);
- Falta de atividades ligadas à memorização (F13).

Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa – LEvsLA

Para que os estudantes não tenham dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica é necessário que acima de tudo compreendam o que está escrito em linguagem corrente, pois sem entender corretamente o que está escrito torna-se difícil transcrever a escrita para a linguagem algébrica. O que mais frustra um indivíduo aquando da resolução de um problema não são as operações matemáticas ou os princípios científicos envolvidos, mas sim a complexidade do próprio texto (KINTSCH; GREENO, 1984; NESHER; KATRIEL, 1977 apud THOMAS, 1988). Para tentar resolver essa falta de habilidade em interpretar, devem-se propiciar atividades ligadas à leitura (F3). Estas por sua vez irão desenvolver o raciocínio (F4).

Com conhecimento dos diversos usos das letras (F2), havendo uma melhoria na interpretação do texto, os estudantes serão capazes de discernir se o problema apresentado pede para estabelecer uma relação entre fatores, características, componentes, etc. (variáveis), ou se pede para determinar um valor ou vários valores que satisfazem as condições dadas (incógnitas), ou se não varia ao longo do tempo (constante), ou se apresenta uma família de soluções (parâmetros), entre outros. Obviamente, sem o conhecimento dos símbolos e seus significados, passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa torna-se impossível (F1). Por fim, para que se possa eficientemente passar de uma linguagem para a outra sem grandes dificuldades e demoras, é crucial que as informações sobre símbolos e usos das letras já estejam interiorizadas (F13). Portanto, para eliminar a dificuldade LEvsLA, devemos tratar dos seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Falta de atividades ligadas à leitura (F3);
- Falta de atividade voltadas à memorização (F13);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4).

Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa – EEP

Conforme já foi mencionado acima, há uma estreita relação entre leitura e raciocínio: o desenvolvimento de um impulsiona o desenvolvimento do outro. Portanto, para que seja possível entender o que lê e exprimir o que pensa é necessário que os estudantes acima de tudo, tenham o hábito da leitura, o qual pode ser estimulado pelos professores através de atividades que tragam textos interessantes para os estudantes (F3) e ao mesmo tempo esses textos devem instigar o raciocínio (F4).

Entender o que está sendo lido envolve ter conhecimento sobre a linguagem que está sendo utilizada, dando significado a cada elemento, de forma individual e conjunta. Assim, esse processo de leitura e compreensão exige que o estudante tenha um bom conhecimento de símbolos (F1) e que saibam reconhecer os seus diversos usos (F2). Portanto, para o estudante superar a dificuldade EEP devemos minimizar os seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Falta de atividades ligadas à leitura (F3);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4).

Dificuldade em interpretar as letras – IL

Como já mencionado nesta pesquisa, em especial na Seção 3, muitos estudantes ao se depararem com as letras em enunciados matemáticos, não conseguem entender os motivos de se utilizar tais letras, não reconhecendo suas utilidades e seus significados. Conforme Usiskin (1995), os objetivos do ensino da Álgebra, as conceções dessa matéria e a utilização das variáveis estão intimamente relacionados. Dessa forma, o professor deve trabalhar em sala de aula as diferentes conceções de Álgebra, as quais possibilitam ao estudante conhecer os diversos usos para as letras (F2). Assim, contribuindo para que ele tenha conhecimento sobre os símbolos em variados contextos algébricos, dando-lhes, portanto, significados (F1). Nesse sentido, o professor tem um papel fundamental, tem de se atentar às notações e representações utilizadas no ensino da Álgebra, especialmente quando se está iniciando seu estudo, tomando o cuidado de não utilizar letras que podem gerar confusões na interpretação dos estudantes (F5). Booth (1995) apresenta algumas situações mostrando que o uso inapropriado de letras pode levar os estudantes a não as interpretar corretamente, como por exemplo, encarar a variável apenas como um rótulo, onde a letra utilizada representa sempre a letra inicial de um certo nome ou objeto.

A compreensão das letras em Álgebra, especialmente no enunciado de um problema, deve ser conduzida a partir de estratégias que dêem ao estudante rapidez e destreza em sua análise. Para isso é necessário que o estudante já tenha interiorizado certos conceitos. Dessa forma, atividades que viabilizem estratégias de memorização, podem ajudar nesse processo (F13). Portanto, visando sanar a dificuldade IL, deve-se tratar dos seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Uso inapropriado de letras pelo professor (F5);
- Falta de atividades ligadas à memorização (F13).

Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado – Ut

Para que se tenha uma aprendizagem significativa é necessário que o estudante enxergue utilidade naquilo que está sendo ensinado. Segundo Ausubel (1968), para que a aprendizagem tenha significado, o ensino deve oportunizar o estudante a relacionar os conhecimentos novos aprendidos com aquilo que ele já sabe, ou seja, levar em conta o seu conhecimento prévio. Assim, as novas informações ancoram-se a conceitos já existentes na experiência do estudante, adquirindo significado (F8).

Além disso, o ensino não pode se restringir à memorização de regras e procedimentos (F9), pois não é suficiente para que se dê sentido ao que está sendo ensinado. Não dando ao estudante motivações para progredir neste processo, mas pelo contrário, causando desânimo. Por fim, é necessário que os conhecimentos adquiridos sejam aplicados em outras áreas de conhecimento de modo que os estudantes possam visualizar a utilidade desses (F7), conforme exposto por Rodrigues (2005):

> É importante que a presença do conhecimento matemático seja percebida, e claro, analisada e aplicada às inúmeras situações que circundam o mundo, visto que a matemática desenvolve o raciocínio, garante uma forma de pensamento, possibilita a criação e amadurecimento de ideias, o que traduz uma liberdade, fatores estes que estão intimamente ligados a sociedade. Por isso, ela favorece e facilita a interdisciplinaridade, bem como a sua relação com outras áreas do conhecimento (filosofia, sociologia, literatura, música, arte, política, etc.) (RODRIGUES, 2005, p. 5).

Desta forma, ao darem sentido ao ensino, reconhecendo sua importância para a vida, os estudantes vêem sentido em estudar Álgebra. Portanto, para acabar com a dificuldade Ut, devemos suprimir os seus fatores originadores, que são:

- Falta de aplicações em outras áreas de conhecimento (F7);
- Aplicações desconexas da realidade (F8);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9).

Dificuldade com simplificação de expressões algébricas – SexpA

O objetivo de simplificar expressões algébricas é torná-las mais fáceis de compreender e usar, resolvendo um problema proposto através de um problema mais simples (USISKIN, 1995; POLYA, 1957). Segundo Granell (1977, p. 265) muitos erros que os estudantes cometem devem-se “[...] ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos”. A simplificação de expressões algébricas consiste na manipulação de símbolos, portanto antes de proceder à simplificação deve-se conhecer a simbologia utilizada, bem como os seus respectivos significados (F1). Além disso, os estudantes devem conhecer corretamente os diferentes tipos de usos para as letras, de modo a permitir a resolução correta dos problemas (F2).

Outro fator que dificulta a simplificação de expressões algébricas é o uso inapropriado pelo professor de certos métodos (F6). Por exemplo, quando o professor usa o produto cruzado para resolver a equação

$$\frac{2x+1}{x-1} = -2 \tag{1}$$

sem querer ele acaba induzindo em erro os estudantes, pois estes depois pensam que podem usar o produto cruzado para resolver a inequação

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq -2. \tag{2}$$

Para resolver a desigualdade em (2), os estudantes devem primeiro simplificar a expressão, ou seja, colocar todos os termos não nulos em um lado da desigualdade e escrever a expressão na forma de uma só fração, só assim será possível determinar corretamente a solução. Se o professor usar esta forma para determinar a solução da equação (1), o professor irá obter a mesma solução que obteria com o uso do produto cruzado. O exemplo dado aqui também mostra que o ensino baseado em memorização de procedimentos sem compreender o que está acontecendo gera dificuldades aquando da simplificação de expressões algébricas (F9). Portanto, o professor deve ter o cuidado com os métodos usados.

No entanto, é necessário também que o professor trabalhe expressões algébricas sob referenciais concretos indo além da prática repetitiva de exercícios, através de situações realísticas e aplicações em outras áreas do conhecimento (F8). Diante disso, o estudante verá sentido em resolver/ simplificar uma expressão, porque enxergará objetivos a serem alcançados num determinado contexto: generalizar uma situação, representar algebricamente uma informação, simplificar a linguagem corrente, etc. Eles serão estimulados a raciocinar através destas expressões, ou seja, dar/criar justificativas para que elas sejam simplificadas.

Igualmente ao conceito de aprendizagem significativa, o ensino de expressões algébricas deve ser pautado naquilo que os estudantes já conhecem, não como uma continuação, mas como uma interação e complementação de conhecimentos aritméticos já aprendidos (F10). Nesse sentido, "A Álgebra não está separada da aritmética; com efeito, ela é, em grande parte, aritmética generalizada. Daí que, para entender a generalização de relações e processos, requer-se que eles sejam assimilados primeiramente no contexto aritmético" (GOMES, 2013, p. 54). Assim deve-se trabalhar desde cedo com os estudantes exemplos de generalizações representadas através de expressões algébricas, advindas do contexto aritmético, e mostrar a validade que existe numa expressão algébrica como forma de resposta de uma situação, assim como acontece com os números numa expressão aritmética. Muitas vezes as dificuldades que os estudantes apresentam ao simplificar expressões algébricas, são na verdade, problemas que não foram corrigidos no estudo das expressões aritméticas (F11). Gomes (2013) aponta que erros em operações com frações, parênteses e potências influem na resolução de expressões algébricas.

Finalmente, devem ser desenvolvidas atividades voltadas à simplificação, de modo que os estudantes consigam interiorizar todos os procedimentos ligados à simplificação (F13). É importante compreender como se simplifica e porquê, mas é necessário possuir destreza visto que o processo de simplificação é fundamental em qualquer resolução de problema.

Diante de tudo que foi apresentado, superar a dificuldade SExpA, significa suprimir os seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Metodologia empregue pelo professor que induz em erro (F6);
- Aplicações desconexas da realidade (F8);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9);
- Compartimentalização da Álgebra e aritmética (F10);
- Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra (F11);
- Falta de atividades voltadas à memorização (F13).

Dificuldade com a noção de igualdade – Ig

Segundo Tinoco (2008, p. 4, apud CIVINSKI; BAIER, 2014, p. 5) as dificuldades ligadas à igualdade "[...] são, de fato, problemas herdados da Aritmética, o que indica a importância de valorizar o trabalho, desde as séries iniciais, com a noção de igualdade, como equivalência" (F11). Assim, o entendimento da igualdade com a finalidade de comparar, mostrar equilíbrio e apresentar propriedades de equivalência (simétrica, reflexividade e transitividade) devem ser trabalhados logo de início durante o ensino da Aritmética, e não apenas quando iniciar o ensino da Álgebra (F10).

Segundo Booth (1995), uma das recomendações para minimizar as dificuldades dos estudantes quanto à noção de igualdade está associada ao significado que se dá aos símbolos desde as primeiras experiências aritméticas (F1), em especial ao papel que é dado às letras (F2). Assim, se considerarmos a expressão $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, para qualquer θ em $\mathbb{R}$, esta corresponde a uma identidade algébrica por ela ser verdadeira para qualquer valor numérico θ em $\mathbb{R}$; neste caso a letra corresponde a uma variável. No entanto, se considerarmos $cos(\theta) = \frac{1}{2}$, então aqui só alguns valores numéricos para θ tornam a igualdade verdadeira; neste caso diz-se que a letra é uma incógnita.

Quando se ensina a noção de igualdade apenas sob a ótica da Aritmética, o estudante muitas vezes encara o sinal de igualdade como algo unidirecional, estendendo esse conceito para a resolução de equações, onde "[...] o sinal de igual é visto como um sinal operacional" (LIMA, 2007, p. 282). Dessa forma, quando não é ensinado o conceito de igualdade como equivalência ao resolver equações, ou seja, a realização da mesma operação em ambos os membros, o ensino é prejudicado e dificuldades irão surgir (F6).

Nesse sentido, o sinal de igual é visto como uma ação "fazer algo", ou seja, dar a resposta da operação ou de uma equação através de passos a serem seguidos, restringindo-se à memorização de um conjunto de regras (F9). Assim, muitos pesquisadores recomendam introduzir o conceito de igualdade sob a ideia de equilíbrio, através do uso da balança (F8).

Gomes (2013) também nos ajuda a entender esta dificuldade, quando aponta que é comum os estudantes utilizarem métodos informais para resolver equações, gerando erros (F12). Logo, para minimizarmos a dificuldade Ig, devemos tratar dos seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Metodologia empregue pelo professor que induz em erro (F6);
- Aplicações desconexas da realidade (F8);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9);
- Compartimentalização da Álgebra e aritmética (F10);
- Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra (F11);
- Uso de métodos informais (F12).

Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos – FPP

As fórmulas, propriedades e procedimentos foram criados para facilitar a resolução de problemas e efetuar cálculos de maneira mais prática, contudo, introduzir tais ferramentas nem sempre é uma tarefa fácil. É necessário que os estudantes entendam o sentido das fórmulas, as propriedades e procedimentos, ou seja, associá-los a um determinado porquê, sabendo como e quando utilizá-los em diversas áreas do conhecimento (F7).

A nossa memória tende a lembrar melhor de um conteúdo ou conceito quando os associamos às informações que já conhecemos, ainda mais quando mostramos a origem de tais conceitos ou aplicamos a situações realísticas (F8). As abordagens tradicionais de ensino de Álgebra focam apenas na memorização de fórmulas e propriedades, e aplicações mecânicas de procedimentos, afetando negativamente na aprendizagem da Álgebra (F9) (OLIVEIRA; LAUDARES, 2015; LIMA; SILVA, 2017). No entanto, isso não significa que a memorização deve ser descartada; ela deve ser usada apenas uma vez que as fórmulas, as propriedades e os procedimentos foram entendidos (F13). Essa metodologia de ensino pode desencorajar os estudantes a utilizar os métodos formais, levando-os a enxergar os métodos informais como sendo mais fáceis (F12). Esses métodos informais geram dificuldades e não são suficientes para o desenvolvimento amplo da Álgebra. Assim, em vez de apenas decorar, os estudantes devem ser instigados a raciocinar através de diversas situações que colocam em xeque esses métodos informais (F4).

Alguns erros ocorrem devido ao fato dos estudantes utilizarem inadequadamente fórmulas ou regras que lhes foram apresentadas, fazendo falsas generalizações sobre operações e números (GOMES, 2013). Acontece que os estudantes muitas vezes não possuem o conhecimento necessário sobre os símbolos e o significado deles nas fórmulas e propriedades (F1), e assim aplicam-nas “cegamente”, ou seja, sem entender o processo. Para que o estudante saiba utilizar corretamente as fórmulas, os procedimentos e as propriedades deve antes re/conhecer os diversos usos para as letras (F2). No entanto, não se deve fazer uma ruptura entre as abordagens Aritméticas e Algébricas (F10), como se a segunda fosse uma nova Matemática: a Matemática das letras com novas regras, das fórmulas e aplicações (OLIVEIRA; LAUDARES, 2015). Muito pelo contrário, antes de introduzir as fórmulas, propriedades e procedimentos, o professor deve mostrar exemplos numéricos que facilitam o entendimento; levando o estudante a perceber que não é possível compartimentalizar Álgebra e Aritmética.

A sugestão é que se utilize os conceitos já aprendidos em Aritmética para aplica-los de forma mais natural em Álgebra, visto que já foram compreendidos no contexto aritmético. Portanto, os fatores dificultadores que devem ser sanados, pois originam a dificuldade FPP, são:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);

- Diversos usos das letras (F2);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4);
- Falta de aplicações em outras áreas de conhecimento (F7);
- Aplicações desconexas da realidade (F8);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9);
- Compartimentalização da Álgebra e aritmética (F10);
- Uso de métodos informais (F12);
- Falta de atividades voltadas à memorização (F13).

Dificuldade em generalizar – G

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apontam como um dos caracterizadores do pensamento algébrico, a presença do processo de generalização. Assim, atividades que envolvem generalização são ótimas para desenvolver o pensamento algébrico, estimulando os estudantes a raciocinar e exprimir suas ideias através da linguagem algébrica. Dessa forma, a generalização está intimamente relacionada com o desenvolvimento do pensamento, sendo assim necessário estimulá-lo nos estudantes (F4).

Para Usiskin (1995), a Álgebra pode ser encarada em uma de suas conceções, como uma Aritmética generalizada, na qual as letras têm o papel de generalizar modelos. Isso nos leva a concluir que não há como separar Aritmética e Álgebra, ainda mais se tratando de tópicos da matemática que são ensinados a partir da abstração e generalização (F10) (PEREIRA, 2017). Dessa forma, a generalização é essencial para a matemática: simplificando ideias, encontrando modelos para relações entre números, descrevendo matematicamente situações, etc. Nesse sentido, é necessário conhecer as funções das letras (F2), bem como os símbolos utilizados (F1), já que “Muitas vezes encontramos relações entre números que desejamos descrever matematicamente, e as variáveis são instrumentos utilíssimos nessa descrição” (USISKIN, 1995, p. 13).

Por outro lado, para que o estudante consiga generalizar sem grandes dificuldades, é necessário que se tenha atividades que prezem não só a aplicação, mas a busca pela generalização de fórmulas e expressões algébricas que tratam de exemplos ligados à realidade (F8). Nesse sentido, se o ensino for baseado apenas na memorização de fórmulas e procedimentos (F9), sem lhes mostrar como elas se originaram, os estudantes não verão sentido em generalizar e buscar soluções através dos padrões encontrados. Assim, um processo crucial para criar experiências que oportunizam os estudantes generalizar, é a seleção e elaboração de tarefas pelo professor (VALE, 2013). O professor deve, portanto, propor aos estudantes atividades desafiadoras que permitam explorar padrões em diversas aplicações matemáticas (F7).

Vale (2013) propõe que a generalização vai além de permitir os estudantes escrever uma fórmula, é raciocinar "de modo a convencerem-se a eles próprios e aos outros, da validade dessa regra ou fórmula que obtiveram através da generalização, recorrendo a raciocínios sobre os números e/ou figuras" (VALE, 2013, p. 72). Assim para minimizar a dificuldade G, deve-se tratar dos seguintes fatores dificultadores:

- Conhecimento sobre símbolos e seus significados (F1);
- Diversos usos das letras (F2);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4);
- Falta de aplicações em outras áreas de conhecimento (F7);
- Aplicações desconexas da realidade (F8);
- Ensino baseado em memorização de fórmulas e procedimentos (F9);
- Compartimentalização da Álgebra e aritmética (F10).

Dificuldade em memorizar – Mem

A capacidade de memorização se desenvolve à medida que exercitamos e utilizamos a memória, assim como o corpo humano: caso não seja exercitado, pode atrofiar (SOISTAK; PINHEIRO, 2009). Nesse sentido, é necessário estimular a criatividade através de situações novas, instigando o raciocínio lógico (F4). Além disso, a leitura é um dos melhores exercícios para estimular a memória, portanto, devem-se desenvolver com os estudantes, atividades que envolvam a leitura (F3). Ler com entendimento requer relacionar informações novas com outras preexistentes no cérebro, e para isso a memória é essencial (FLÔRES; CARDOSO, 2014). Assim, a capacidade de memorização será adquirida através de atividades que estimulem as ações de reter, armazenar e recobrar informações no cérebro, usando-as para as diversas situações na vida (F13).

Dessa forma, para minimizarmos a dificuldade Mem devemos tratar dos seguintes fatores dificultadores:

- Falta de atividades ligadas à leitura (F3);
- Falta de estímulos ao raciocínio (F4);
- Falta de atividades voltadas à memorização (F13).

O Quadro 17 resume os fatores dificultadores que originam as dificuldades.

Quadro 17 - Fatores dificultadores associados às dificuldades

DIFICULDADES	**FATORES DIFICULTADORES**
P	F3, F4, F9, F13
LEvsLA	F1, F2, F3, F4, F13
EEP	F1, F2, F3, F4
IL	F1, F2, F5, F13
Ut	F7, F8, F9
SExpA	F1, F2, F6, F8, F9, F10, F11, F13
Ig	F1, F2, F6, F8, F9, F10, F11, F12
FPP	F1, F2, F4, F7, F8, F9, F10, F12, F13
G	F1, F2, F4, F7, F8, F9, F10
Mem	F3, F4, F13

Fonte: produção do próprio autor

O Quadro 17 nos oportuniza apontar algumas observações que podem ser feitas analisando similaridades na distribuição dos fatores dificultadores em relação às suas respectivas dificuldades, com o intuito de elaborar atividades que ajudem a sanar mais de uma dificuldade.

Para melhor analisarmos os dados colhidos no Quadro 17, organizaram-se as informações na forma de diagramas: essa organização foi baseada nos fatores dificultadores comuns entre as diferentes dificuldades. Na Figura 7, fez-se a junção das dificuldades em interpretar as letras (IL), em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA), em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), em pensar (P) e em memorizar (Mem), dado que:

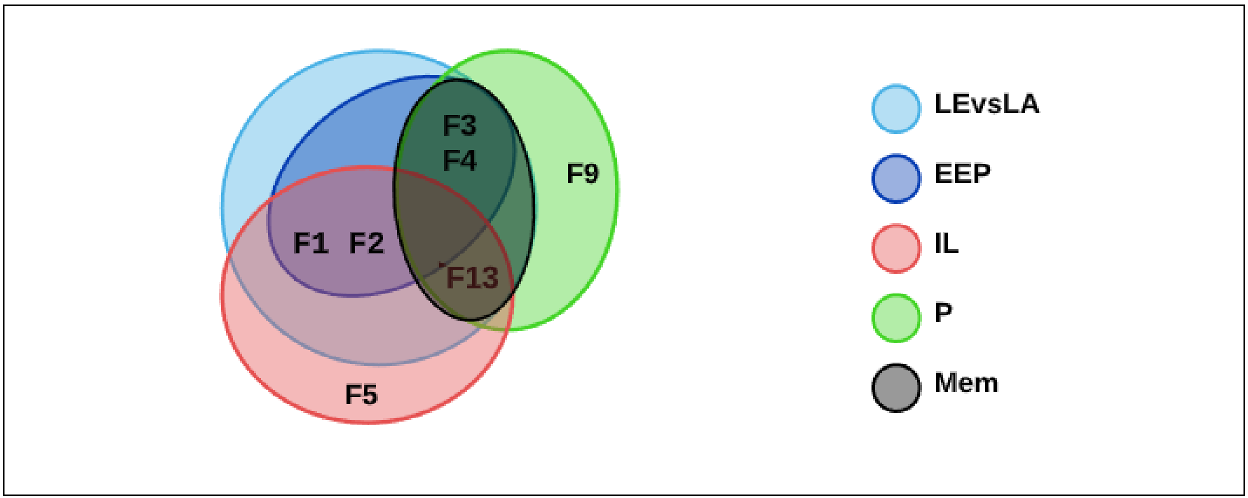
- o ato de interpretar as letras consiste de um ato de raciocínio;
- saber interpretar as letras ajudará a passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa;
- a linguagem e o pensamento têm uma relação de subsistência;
- e, finalmente, o raciocínio e a leitura auxiliam a memorização.

Assim, na Figura 7 podemos ver que a união dos fatores dificultadores da dificuldade interpretar as letras (IL) com os da dificuldade em pensar (P), incluem todos os fatores dificultadores das dificuldades entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA) e memorizar (Mem). Portanto, se criarem atividades que tentam sanar as dificuldades IL e P, muito provavelmente estas também irão remediar as dificuldades com EEP, LEvsLA e Mem. Isto não é surpreendente, visto que criar uma atividade que tente eliminar as dificuldades IL e P, implica criar uma atividade:

- que propicie a aprendizagem dos símbolos e seus significados, assim como os diferentes usos que alguns desses símbolos possuem;
- que possibilite o desenvolvimento da leitura e da capacidade de raciocinar;
- e consequentemente, que permita a memorização das fórmulas, propriedades e procedimentos aí desenvolvidos.

Percebe-se aqui que, os fatores dificultadores mau uso das letras pelo professor (F5) e ensino baseado na memorização de fórmulas, propriedades e procedimentos (F9), são fatores que as atividades não resolvem diretamente: esses fatores estão relacionados com os métodos de ensino de diferentes professores, sobre os quais o professor que está dando a atividade não tem controle.

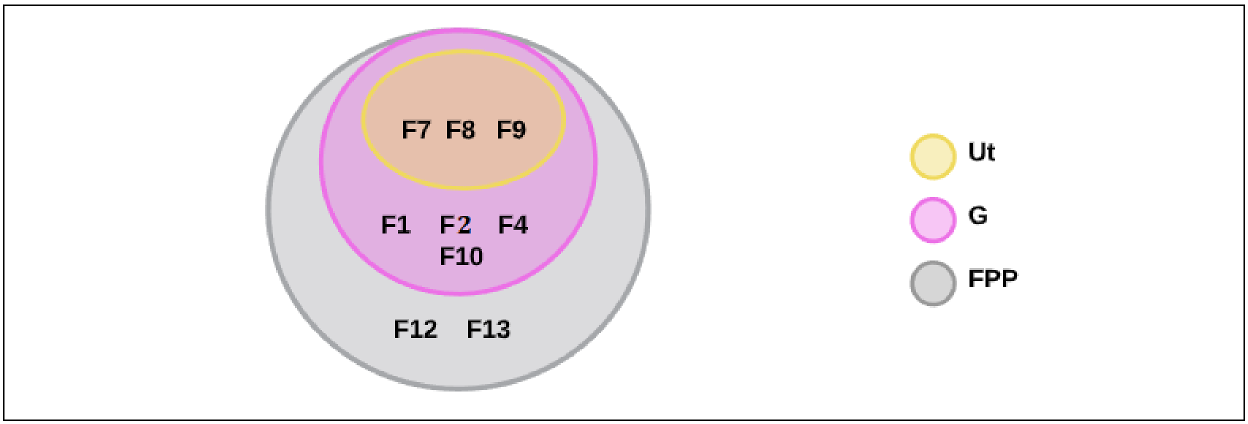
Figura 7 - Relação entre as dificuldades LEvsLA, EEP, IL, P e Mem



Fonte: produção do próprio autor

É interessante notarmos também a relação entre a dificuldade em usar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP) e a dificuldade em generalizar (G), onde a primeira engloba todos os fatores dificultadores da segunda dificuldade. É através da generalização que muitas fórmulas, propriedades e procedimentos se originam, portanto, a dificuldade em generalizar pode originar as dificuldades com tais fórmulas, propriedades e procedimentos. Relacionada a estas duas dificuldades, temos também a dificuldade em enxergar a utilidade no que está sendo ensinado (Ut), onde todos os fatores dificultadores que a originam também originam FPP e G. Isso leva-nos a concluir que o ensino mecânico e descontextualizado pode levar os estudantes a terem dificuldade em utilizar fórmulas, propriedades e procedimentos, e encontrar generalizações. A Figura 8 contém um diagrama que ilustra essas relações.

Figura 8 - Relação entre as dificuldades Ut, G e FPP



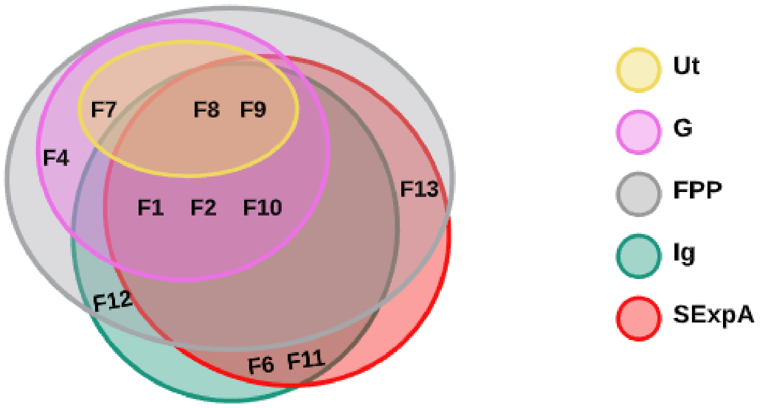
Fonte: produção do próprio autor

Temos também que as dificuldades com a noção de igualdade (Ig) estão relacionadas com as dificuldades em usar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP), dado que possuem seis fatores dificultadores em comum. Muitas das fórmulas e propriedades utilizam as igualdades, para estabelecer identidades, relações e expressões, justificando-se assim a relação supramencionada.

Outra notoriedade é a relação entre a dificuldade com a noção de igualdade (Ig) e a dificuldade com simplificação de expressões algébricas (SExpA), onde as duas possuem sete fatores dificultadores em comum, dentre os oito fatores que originam cada uma delas. Este fato não é espantoso, dado que muitas igualdades envolvem expressões algébricas. Uma consequência imediata disso é que a dificuldade com simplificação de expressões algébricas também se relaciona com a dificuldade com o uso de fórmulas, propriedades e procedimentos. Dessa forma, os estudantes têm dificuldade em utilizar fórmulas, propriedades e procedimentos para resolver/simplificar expressões algébricas, as quais muitas vezes estão contidas em uma igualdade. Essa relação remete-se particularmente aos erros cometidos nas equações, onde simplificar as expressões algébricas inclusas na relação de igualdade corresponde a resolver a equação.

Além disso, dada a relação entre as dificuldades em enxergar utilidade (Ut), generalizar (G) e usar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP), tem-se que as duas primeiras também se relacionam com as dificuldades em simplificar expressões algébricas (SExpA) e a noção de igualdade (Ig): muitas vezes os estudantes não compreendem o propósito de fazer certas simplificações algébricas em igualdades, por terem recebido um ensino muito mecanizado e com pouca ênfase no pensamento algébrico. Resumem-se na Figura 9 as relações citadas nestes dois últimos parágrafos.

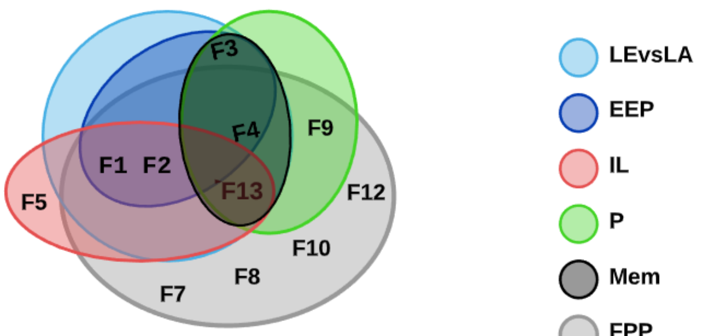
Figura 9 - Relação entre as dificuldades Ut, G, FPP, Ig e SExpA



Fonte: produção do próprio autor

Ainda observando as relações entre as dificuldades, é válido ressaltar que os fatores dificultadores que originam a dificuldade em memorizar (Mem), além de diferentes combinações desses estarem presentes nas dificuldades em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA), em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), em interpretar as letras (IL) e em pensar (P), como já supramencionado, estão também presentes nas dificuldades em usar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP). Isso nos sinaliza que atividades que estimulem a capacidade de memorização podem ajudar significativamente no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra. Na Figura 10 ilustramos as relações mencionadas neste último parágrafo.

Figura 10 - Relação entre às dificuldades FPP, LEvsLA, P, EEP e Mem



Fonte: produção do próprio autor

Existem outras combinações entre as dificuldades, no entanto, apresentamos através dos diagramas e das relações supracitadas, as que tinham maiores sobreposições mediante os fatores dificultadores.

Apresentaremos abaixo o Quadro 18, que discrimina para cada fator dificultador todas as dificuldades que ele gera, auxiliando assim na análise destas dificuldades.

Quadro 18 - Quantidade de dificuldades relacionadas a cada fator dificultador

FATORES	**QTD. DE DIFICULDADES QUE CADA FATOR ORIGINA**	**DIFICULDADES**
F1	7	LEvsLA, EEP, IL, SExpA, Ig, FPP, G
F2	7	LEvsLA, EEP, IL, SExpA, Ig, FPP, G
F3	4	P, LEvsLA, EEP, Mem
F4	6	P, LEvsLA, EEP, FPP, G, Mem
F5	1	IL
F6	2	SExpA, Ig
F7	3	Ut, FPP, G
F8	5	Ut, SExpA, Ig, FPP, G
F9	6	P, Ut, SExpA, Ig, FPP, G
F10	4	SExpA, Ig, FPP, G
F11	2	SExpA, Ig
F12	2	Ig, FPP
F13	6	P, LEvsLA, IL, SExpA, FPP, Mem

Fonte: produção do próprio autor

O Quadro 18 permite-nos constatar quais são os fatores dificultadores que ocorrem com maior frequência, de forma que possamos elaborar atividades que os contemplem e também aqueles que influenciam diretamente na práxis pedagógica do professor. Inicialmente observamos que os fatores *Conhecimento sobre símbolos e seus significados* (F1) e *Diversos usos para as letras* (F2) foram os de maior incidência nas dificuldades, totalizando sete dificuldades que cada um deles ajuda a originar. O fato do F1 e F2 serem os fatores que mais aparecem nas dificuldades não é surpreendente, visto que as letras e símbolos fazem parte da linguagem usada para resolver diferentes problemas.

Os fatores com menor quantidade de dificuldades originadas são *Uso inapropriado de letras pelo professor* (F5), *Metodologia empregue pelo professor que induz em erro* (F6), *Erros originados em aritmética e transferidos para a Álgebra* (F11) e *Uso de métodos informais*

(F12). Todos os fatores dificultadores são importantes; a ocorrência dos fatores não diminui a relevância dos fatores com menor incidência. Por exemplo, quando um professor usa o produto cruzado para resolver igualdades, ele introduz uma metodologia que produzirá vários erros. Suponhamos que um professor de cálculo em mais de uma variável, peça aos seus estudantes para desenhar as curvas de nível do gráfico da função $z = \frac{(x+y)}{y}$. Os estudantes que usarem o produto cruzado irão obter curvas de nível que são retas que passam pela origem e nem perceberão que essas retas são "furadas" - a origem não está contida em nenhuma dessas retas. Como pode-se ver, uma metodologia usada no Ensino Básico pode propagar-se até ao Ensino Superior.

Portanto, mediante tudo o que já foi apresentado até aqui, percebemos que não há outro caminho para um ensino de qualidade em Álgebra, tendo como base a compreensão, ou seja, desenvolver nos estudantes o pensamento algébrico através de atividades. A partir dos quadros mencionados nesta seção, foi possível tratar as dificuldades de forma mais ampla, descobrindo causas mais gerais que contemplem também outras dificuldades, e por conseguinte, foi possível elaborar atividades que sanam algumas dessa dificuldades simultaneamente.

5.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES QUE PODEM SER DESENVOLVIDAS COM OS ESTUDANTES COM O OBJETIVO DE SANAR AS DIFICULDADES

As atividades sugeridas aqui, foram escolhidas e/ou desenvolvidas levando em conta os Quadros 16, 17 e 18 da Seção 5.1, bem como as conclusões que eles oportunizaram, e os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

5.2.1 O problema dos pinguins

O problema dos pinguins apresentado na Figura 11 foi parcialmente retirado de uma prova do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) do ano de 2012: aqui vamos considerar apenas as três primeiras questões do problema dos pinguins, onde as questões foram ligeiramente alteradas.

Figura 11 - O problema dos pinguins

PINGUIM

O fotógrafo de animais Jean Baptiste fez uma viagem de um ano e tirou inúmeras fotos de pinguins e de seus filhotes.

Ele se interessou particularmente pelo crescimento do tamanho de diferentes colônias de pinguins.

Fonte: PISA (2012, p. 27)

O problema dos pinguins na prova PISA oferece questões de múltipla escolha, que são uma forma de avaliação apropriada para a escala da prova, mas aqui nesta atividade o intuito é fazê-los pensar. Ver as possibilidades de respostas pode induzi-los a tentar adivinhar a resposta, o que vai contra o objetivo desta atividade: que é fomentar o raciocínio.

Conforme pode verificar-se, este problema consiste de uma aplicação real, pois trata do importante tema do crescimento populacional de uma espécie animal. É um problema que, sem sombra de dúvidas ajudará os estudantes a enxergar utilidade no que é ensinado (Ut).

Neste problema podem surgir várias dificuldades: dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), dificuldade em pensar (P), dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica (LEvsLA), dificuldade em usar procedimentos (FPP), e dificuldade em generalizar (G). Para que os estudantes ultrapassem essas dificuldades, é necessário serem expostos aos problemas onde elas surgem. Só assim, eles poderão as superar. Assim com este tipo de problema, os estudantes têm uma oportunidade de pôr em prática a leitura, obriga-os a pensar e desenvolver uma forma simbólica de representar o que pensam, pôr em prática procedimentos, e por fim, este problema foi formulado de um modo que orienta os seus pensamentos: cada passo da resolução contribui para a generalização da fórmula do crescimento populacional dos pinguins. A resolução de problemas como este também ajuda os estudantes a memorizar determinados conceitos: como são eles que constroem a fórmula, é mais provável que eles não se esqueçam, por conta de se sentirem mais seguros – pois pensam, mesmo que eu não me lembre da fórmula, eu consigo derivá-la de novo.

Neste tipo de atividade, voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, os professores devem evitar cair na tentação de resolver na lousa o problema, eles devem limitar-se a orientar os estudantes. Levando em conta as fases do pensamento algébrico de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), esta atividade pode levar os estudantes a transitar entre o pensamento pré-algébrico e um pensamento algébrico mais desenvolvido, em virtude de estabelecer alguns processos de generalização podendo ou não utilizar a linguagem algébrica simbólica. Dessa forma os estudantes estarão lidando com conceitos de recorrência de forma simples, focando na observação e no raciocínio, sem que os professores dêem uma resposta a todos os erros cometidos, mas sim instigando-os a pensar e ao mesmo tempo dando dicas para que alcancem o objetivo.

A BNCC sugere para a etapa do Ensino Médio a seguinte competência específica de Matemática:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções

propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).

Portanto, a atividade apresentada nesta seção é indicada a estudantes da primeira série do Ensino Médio em diante, podendo ser um exercício fomentador dos conteúdos de potenciação e função exponencial, os quais estão incluídos no currículo desta série.

Figura 12 - Questão 1

Questão 1: PINGUINS *PM921Q01*

Normalmente, um casal de pinguins produz dois ovos por ano. Em geral, o filhote que nasce do maior dos dois ovos é o único a sobreviver.

Com os pinguins saltadores, o primeiro ovo pesa em torno de 78 g e o segundo em torno de 110 g.

Em que proporção aproximadamente o segundo ovo é mais pesado que o primeiro?

Fonte: PISA (2012, p. 27)

A primeira questão do problema, apresentada na Figura 12, serve como diagnóstico, no sentido de balizar se os estudantes sabem lidar com as operações aritméticas, em especial frações e porcentagem, tendo em vista que erros em Aritmética podem originar diretamente erros em Álgebra. Além disso, permite ver a noção de diferença de pesos dos ovos em termos absolutos e em termos relativos.

Figura 13 - Questão 2

Questão 2 : PINGUINS *PM921Q02 – 0 1 9*

Jean se pergunta como o tamanho de uma colônia de pinguins vai evoluir ao longo dos próximos anos. Para determinar essa evolução, ele levanta as seguintes hipóteses:

- No início do ano, a colônia tem 10 000 pinguins (5 000 casais).
- Cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera.
- No final do ano, 20 % de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos.

Ao final do primeiro ano, quantos pinguins (adultos e filhotes) haverá nessa colônia?

Fonte: PISA (2012, p. 28)

A questão presente na Figura 13 exige que os estudantes compreendam uma situação real, na qual ocorre variação de dados (quantidades de pinguins), para que possam calcular o valor pedido. Esta questão pode ser resolvida de forma discursiva, permitindo ao professor explorar a produção escrita dos estudantes, pedindo que escrevam os passos que seguiram para determinar a solução. É comum neste tipo de questão (que envolvem porcentagens), os estudantes e professores utilizarem/ensinarem como estratégia de resolução a famosa regra de três, devido a ser encarada como uma "fórmula mágica" na qual basta seguir sempre os mesmos passos, os quais muitas vezes não são compreendidos. Podemos aproveitar aqui a oportunidade para mostrar que a regra de três não funciona, porque a relação entre as quantidades não é linear.

Apresentamos a seguir, a forma ideal de resolver a Questão 2.

1) Primeiro devemos transcrever as informações importantes em símbolos. Assim, temos que
P_0 – quantidade inicial de pinguins na colônia,
F_0 – quantidade de filhotes que nasce na primeira primavera,
t – taxa de mortalidade (adultos e filhotes) por ano.

Portanto, é-nos dito que

$$P_0 = 10.000, F_0 = \frac{P_0}{2} = 5.000 \; e \; t = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2.$$

2) Queremos determinar quantos pinguins haverá no fim do primeiro ano, ou seja, queremos P_1.

Se $t = 20\% = 0{,}2$ é a taxa de mortalidade, então $(1 - t) = 80\% = 0{,}8$ é a taxa de sobrevivência. Portanto,

$$P_1 = (1 - t) \cdot (P_0 + F_0) = (1 - t) \cdot \left(P_0 + \frac{P_0}{2}\right) \tag{3}$$

$$= (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} P_0\right) = 0{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 10.000 = 12.000 \text{ pinguins.}$$

É possível que os estudantes fossem resolver do seguinte modo:

$$0{,}2 \cdot (P_0 + F_0) = 0{,}2\,(10.000 + 5.000) = 3.000 \; pinguins \; mortos,$$

$$total \; de \; pinguins - pinguins \; mortos = 15.000 - 3.000 = 12.000.$$

Aqui os estudantes acabam vendo que é mais rápido resolver a conta com a taxa de sobrevivência, mas que ambas as formas são equivalentes.

Figura 14 - Questão 3

Questão 3: PINGUINS PM921Q03

Jean supõe que a colônia continuará a crescer da seguinte maneira:

- No início de cada ano, a colônia tem um número igual de machos e fêmeas que formam casais.
- Cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera.
- Ao final do ano, 20 % de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos.
- Os pinguins com um ano de idade também terão filhotes.

De acordo com os dados apresentados acima, qual é o número total de pinguins no final de 7 anos? A partir de suas descobertas, determine uma fórmula geral que permita calcular o número total de pinguins no final de n anos.

Fonte: adaptada de PISA (2012, p. 29)

Para resolver a Questão 3, os estudantes têm que seguir a mesma linha de raciocínio que na questão anterior e determinar a fórmula que produz o número total de pinguins no final do segundo ano. Observando as fórmulas para os números totais de pinguins no final do primeiro e segundo anos e não os números totais de pinguins no final desses anos, é possível verificar um padrão e usar a fórmula em (3), para reescrever a fórmula do número total de pinguins no final do segundo ano em termos do valor inicial da população de pinguins naquela colônia. Os estudantes têm que entender que se usassem só os números totais, eles seriam incapazes de verificar o padrão emergindo. Talvez aqui os estudantes já sejam capazes de generalizar a fórmula do número total de pinguins no final do ano n, mas caso não sejam, pode ser interessante eles fazerem o mesmo processo para determinar as fórmulas dos números totais de pinguins no final do terceiro e quarto anos. É importante neste tipo de problemas, dar-lhes tempo para pensar. Muitas vezes os alunos pensam um pouquinho e se não chegam a uma conclusão, desistem logo. Devemos evitar que isso aconteça, eles têm que entender que pensar, tal como nos esportes, requer treino. Quanto mais eles fizerem esse tipo de treino, melhor eles ficarão. Vejamos como eles poderiam proceder.

A primeira coisa que os estudantes deveriam fazer é representar simbolicamente os dados da questão. Assim, temos que

P_1– quantidade de pinguins no final do primeiro ano,

P_2 – quantidade de pinguins no final do segundo ano,

F_1 – quantidade de filhotes que nasce na segunda primavera,

t – taxa de mortalidade (adultos e filhotes) por ano.

Nós sabemos que

$$P_1 = 12.000 \ e \ t = 20\% = 0{,}2.$$

Deste enunciado, sabe-se que no final de cada ano, da totalidade dos pinguins metade são machos e a outra metade são fêmeas e cada casal procria um filhote. Logo

$$F_1 = \frac{P_1}{2}$$

Então a quantidade de pinguins no final do segundo ano é

$$P_2 = (1 - t) \cdot \left(P_1 + \frac{P_1}{2}\right) = (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} P_1\right)$$
$$= 0{,}8 \cdot \frac{3}{2} \cdot 12.000 = 14.400 \, pinguins.$$

Procedendo similarmente, tem-se que

$$P_3 = (1 - t) \cdot \left(P_2 + \frac{P_2}{2}\right) = (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} P_2\right)$$
$$= 0{,}8 \cdot \frac{3}{2} \cdot 14.400 = 17.280 \, pinguins.$$

Daqui os estudantes percebem que $P_{\,i} = (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} P_{\,i-1}\right)$, para $i = 1, 2, \ldots$: isto é uma equação de diferença que os estudantes aprendem a resolver em cursos de matemática na universidade. No entanto, não é preciso saber resolver este tipo de equação para poder resolver esta questão.

Se reescrevermos P_3 em termos de P_0, os estudantes descobrirão o padrão que está emergindo. Então reescrevendo primeiro P_3 em termos de P_1 e depois em termos de P_0, obtemos

$$
\begin{aligned}
P_3 &= (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_2\right) \\
&= (1 - t) \cdot \frac{3}{2} \cdot (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_1\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (1 - t)^2 \cdot P_1 \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (1 - t)^2 \cdot (1 - t) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_0\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot (1 - t)^3 \cdot P_0.
\end{aligned}
$$

Daqui os estudantes conseguem concluir que

$$P_{\,i} = \left(\frac{3}{2}\right)^i \cdot (1 - t)^i \cdot P_0, para \ i = 1, 2, \ldots,$$

ou seja, os estudantes foram capazes de generalizar. Note que isto aqui não é uma demonstração. Consequentemente,

$$P_7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot (1 - t)^7 \cdot P_0 = 1{,}5^7 \cdot 0{,}8^7 \cdot 10.000 \, pinguins.$$

Agora, é interessante começar uma discussão com os alunos sobre o modelo obtido para o crescimento populacional dos pinguins. Faz sentido? O que eles acham que vai acontecer com o crescimento dos pinguins? Tem algum fator ou vários fatores que podem limitar o crescimento dos pinguins? Essa discussão ajudará os estudantes a compreenderem o funcionamento da expressão algébrica encontrada, bem como sua limitação quando se leva em conta alguns fatores da realidade.

5.2.2 Os números triangulares

A sequência dos números triangulares é composta por números naturais, com os quais sempre é possível construir triângulos retângulos isósceles, onde estes números representam a quantidade de pontos dessa forma triangular. Trabalhar com esse tipo de sequência oportuniza várias formas de resolução, possibilitando aos estudantes proporem diferentes formas de pensar e solucionar o problema.

Atividades como esta, que envolvem sequências numéricas, ajudam a desenvolver o raciocínio dedutivo nos estudantes, induzindo-os a encontrar termos desconhecidos e observar a existência de padrões ou regularidades. Este tipo de atividade ajudará a combater as dificuldades relacionadas a generalização (G), dado que ela implica a representação dos padrões ou regularidades através de uma expressão algébrica geral válida para todos os termos, permitindo encontrá-los em qualquer posição ou ordem. Também proporcionará aos estudantes uma oportunidade para desenvolver a capacidade de raciocínio, ajudando a minimizar as dificuldades em pensar (P): essa atividade instiga-os a estabelecer relações entre termos, observar as mudanças e variações em quantidades e formas, e assim propor modelos algébricos que sejam válidos.

Conforme já foi falado na Seção 5.1, as dificuldades em ler/escrever e pensar estão interligadas. Assim, muitas vezes aliada à dificuldade em pensar vem também a dificuldade em exprimir o que pensa (EEP): esta atividade aqui proporciona um treino a exprimir o que pensa. Outra dificuldade que o estudante tem que pode ser superada mediante esta atividade é a de enxergar utilidade naquilo que lhe é ensinado (Ut): o estudante perceberá que para resolver necessitará conhecimentos sobre Geometria plana ou progressões aritméticas, os quais facilitarão a determinação do termo geral da sequência. E dessa forma desenvolve-se o pensamento algébrico à medida que se estabelece relações e comparações entre expressões numéricas e/ou padrões geométricos, desenvolvem-se processos de generalização e expressão de regularidades através da linguagem algébrica.

Vale ressaltar que nesta atividade estamos aliando a conceção de Álgebra como aritmética generalizada proposta tanto por Usiskin (1995) como por Lins e Gimenez (2001), com as conceções de Educação Algébrica: *fundamentalista-analógica* de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), *e Letrista facilitadora* proposta por Lins e Gimenez (2001). Isso deve-se ao fato desta atividade ter como um dos objetivos expressar algebricamente o termo geral e também por esta poder utilizar recursos geométrico-visuais para auxiliar no entendimento e justificar os procedimentos algébricos.

A BNCC indica como objeto de conhecimento para o 7º ano a "Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica", a partir da habilidade de "Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. " (BRASIL, 2018, p. 306). Quanto ao Ensino Médio, a BNCC cita a seguinte competência específica de Matemática:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

Portanto, esta atividade pode ser aplicada tanto no Ensino Fundamental II (7º ano em diante) como no Ensino médio (especialmente na 1ª série), dependendo de como o professor trabalhará com os estudantes os conceitos. Por exemplo, para o Ensino Fundamental o enfoque deve ser nos aspectos geométricos, de visualização dos padrões sem a utilização do conceito de progressão aritmética, o qual é visto somente no Ensino Médio.

Abaixo, no Quadro 19 encontra-se a questão que iremos desenvolver nesta atividade.

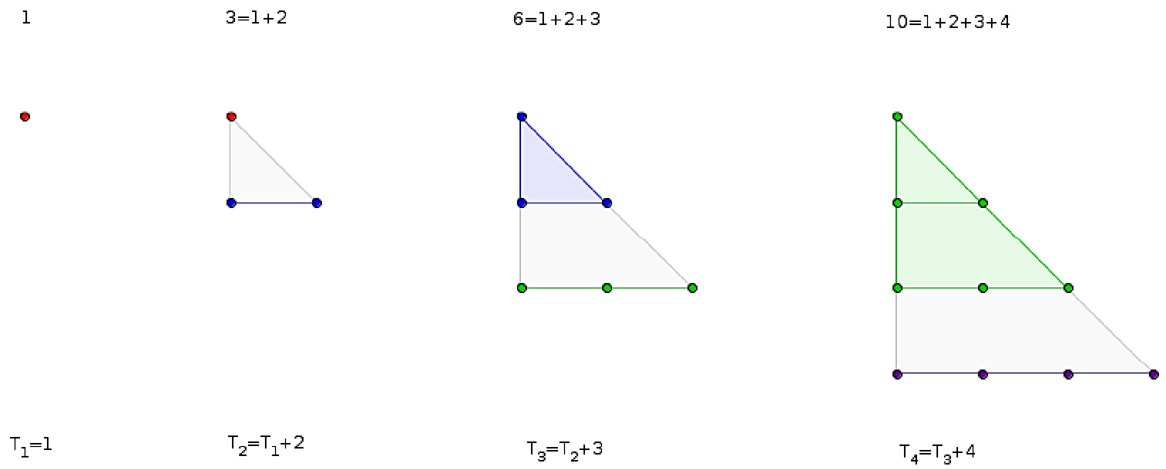
Quadro 19 - Atividade utilizando números triangulares

Considere a seguinte sequência de números 1, 3, 6, 10, 15, ... i) Quais são os próximos 2 números da sequência? ii) Mostre que o n-ésimo termo da sequência é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Fonte: produção do próprio autor

Para solucionar o primeiro item, os estudantes devem inicialmente observar esta sequência de modo a analisar as mudanças entre os números consecutivos, buscando algum padrão ou regularidade, criando assim suas hipóteses de resolução. Para isso, seguindo uma tendência letrista facilitadora, o professor pode utilizar materiais concretos, como tampas de garrafas pet, ou bolinhas feitas de massa de modelar, para representar esses números na forma de triângulos retângulos isósceles (ver Figura 15). Isso irá tornar o problema menos abstrato permitindo que os estudantes enxerguem as mudanças que ocorrem a cada triângulo retângulo construído, levando em consideração o triângulo retângulo anterior.

Figura 15 - Construção dos triângulos



Fonte: produção do próprio autor

Assim, a partir da análise desses triângulos, os estudantes perceberão que o triângulo T_n é obtido da adição de uma linha, com n pontos, a um dos catetos adjacentes ao ângulo reto do triângulo T_{n-1} , ou seja, o *n*-ésimo termo da sequência de números corresponde ao (*n-1*)-ésimo termo mais *n*. Daqui eles conseguem concluir que os próximos dois números da sequência são: $15 + 6 = 21$ e $21 + 7 = 28$. Os estudantes poderiam ter respondido ao item *i* da questão sem o uso dos triângulos, mas o uso destes é crucial para responder ao segundo item da questão, especialmente no caso dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

Portanto, esta estratégia ajudará os estudantes a observar que o *n*-ésimo termo é igual à soma dos n primeiros números naturais, já que

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$T_3 = T_2 + 3 = (T_1 + 2) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$T_4 = T_3 + 4 = (T_2 + 3) + 4 = ((T_1 + 2) + 3) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\vdots$$

$$T_n = T_{n-1} + n = (T_{n-2} + (n-1)) + n = \ldots = (((T_1 + 2) + 3) + \ldots) + n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

mas principalmente, permitirá mostrar que o n-ésimo termo, que corresponde à soma dos *n* primeiros números naturais, é igual a n(n+1)/2. Existem várias formas de demonstrar quanto é a soma dos *n* primeiros termos da sequência dos números naturais:

a) utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo isósceles T_n;
b) utilizando a soma da progressão aritmética dos *n* primeiros números naturais;
c) utilizando a indução finita sobre $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
d) utilizando equações de diferenças.

Para os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, vamos continuar a trabalhar com os triângulos retângulos presentes na Figura 15. Aqui convém dar-lhes uma dica na forma de uma pergunta: "Qual é a fórmula da área de um triângulo e em que isto pode-nos ajudar a demonstrar que a soma dos *n* primeiros termos naturais é igual a

$$\frac{n(n+1)}{2}\ ?"$$

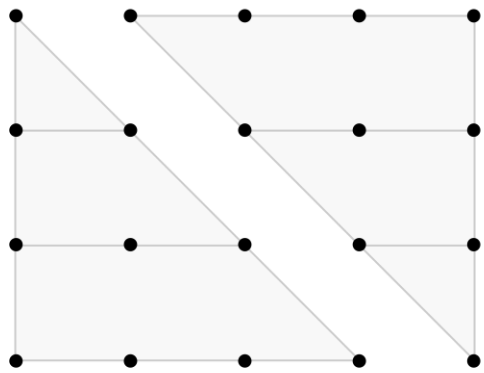
Os estudantes irão olhar para os triângulos retângulos da Figura 15 e provavelmente aplicar a fórmula da área de um triângulo. Daí perceberão que a fórmula da área de um triângulo não dá origem aos números de pontos presentes nos triângulos:

• para o triângulo T_2 a fórmula da área deu 2 em vez de 3 pontos;
• para o triângulo T_3 a fórmula da área deu 4,5 em vez de 6 pontos;
• para o triângulo T_4 a fórmula da área deu 8 em vez de 10 pontos.

Se os estudantes não tiverem ideia de como proceder, o professor pode pedir-lhes para completar os triângulos T_2, T_3 e T_4 e ver quantos pontos estão faltando para completar os quadrados (eles verão que estão faltando T_1, T_2 e T_3, respectivamente). Eles perceberão que para cada figura o número de pontos faltando é inferior ao número de pontos presentes no triângulo: o que está faltando são os pontos da diagonal. Como a fórmula da área de um triângulo é a base vezes a altura dividido por 2, então os pontos da diagonal são também divididos por dois e por esse motivo, o número obtido com a fórmula da área de um triângulo não produz o número de pontos no triângulo, mas um valor inferior.

Se o professor vir que os estudantes não estão conseguindo descobrir o que fazer a seguir, ele pode pedir-lhes para que considerem dois triângulos T_4, cada um com 10 pontos, e que formem um retângulo com eles. Eles deverão chegar a um retângulo como aquele que está ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Junção de dois triângulos formando um retângulo



Fonte: produção do próprio autor

Aqui os estudantes perceberão que para obter o número de pontos no triângulo T_n, eles terão que calcular a área de um retângulo n por $n + 1$ e dividi-la por 2, em vez da área de um quadrado n por n dividido por 2. Portanto,

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para que os estudantes enveredem pelo método de resolução no item b, eles precisam descobrir que a soma dos números naturais forma uma progressão aritmética de razão 1, e como a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (P.A.) é dada por

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(t_1 + t_n) \cdot n}{2},$$

onde t_1 é o primeiro termo da sequência de n termos e t_n é o último termo, então

$$T_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}.$$

Os métodos sugeridos nos itens c e d, para demonstrar o item ii, não podem ser usados no Ensino Básico, por estes não fazerem parte do currículo.

Ao final da atividade, deverão ser propostas algumas questões investigativas acerca dos números triangulares, como:

1- Quando somamos dois números triangulares subsequentes, o resultado é sempre que tipo de número? Talvez eles perceberão que já viram isso antes: enquanto investigavam como podiam usar a fórmula da área do triângulo para demonstrar o item ii.
2- Em uma festa, todos os convidados se cumprimentam com um aperto de mãos. Se nesta festa há n pessoas, qual a quantidade total de apertos de mãos?

3- O que são número figurados? Dê exemplos.

Portanto, através desta atividade desenvolve-se o pensamento algébrico e treina-se a exprimir esse pensamento à medida que se descobre as regularidades, analisa os padrões e se modela o termo geral. Dessa forma o estudante aprimorará a habilidade do raciocínio, oportunizando aplicá-la em outras atividades que também necessitem de generalizar situações.

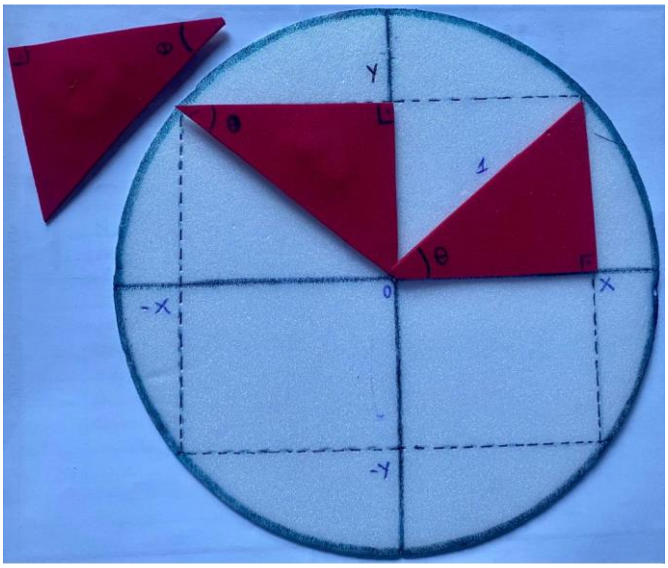
5.2.3 Construindo o círculo trigonométrico

A trigonometria é um dos ramos da matemática que constantemente utiliza a Álgebra para expressar seus conceitos, fórmulas, relações e identidades. Na sala de aula muitas vezes é um desafio para os professores e alunos a transição da trigonometria do triângulo retângulo para a do círculo trigonométrico. As dificuldades desse processo de transição se concentram especialmente em entender as fórmulas e procedimentos trigonométricos, no sentido de não enxergar as suas origens e não saber onde e como aplicá-los corretamente. Consequentemente, por não compreenderem as propriedades e os conceitos trigonométricos, os quais são representados por expressões algébricas, não conseguem memorizá-los a fim de serem utilizados convenientemente em outras situações.

Iremos propor como atividade, a construção do círculo trigonométrico utilizando materiais simples, como cartolina, isopor e um prendedor de latão ou percevejo. Também será proposto a construção de triângulos retângulos, com os quais será possível observar na prática as definições de seno e cosseno. Nesta atividade o pensamento algébrico se desenvolve à medida que os estudantes estabelecem relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, observados mediante as mudanças que ocorrem no posicionamento dos triângulos no círculo trigonométrico.

Não iremos detalhar precisamente os passos para a construção do círculo trigonométrico, tendo em vista que o professor poderá determinar as medidas e os materiais de acordo com a necessidade e a realidade dos estudantes. Na Figura 17, temos um exemplo de construção do círculo trigonométrico e dos triângulos, utilizando materiais recicláveis e/ou de baixo custo, como: isopor, papel E.V.A., e um ímã de neodímio para fixação e movimentação dos triângulos.

Figura 17 - Construção do círculo trigonométrico e dos triângulos



Fonte: produção do próprio autor

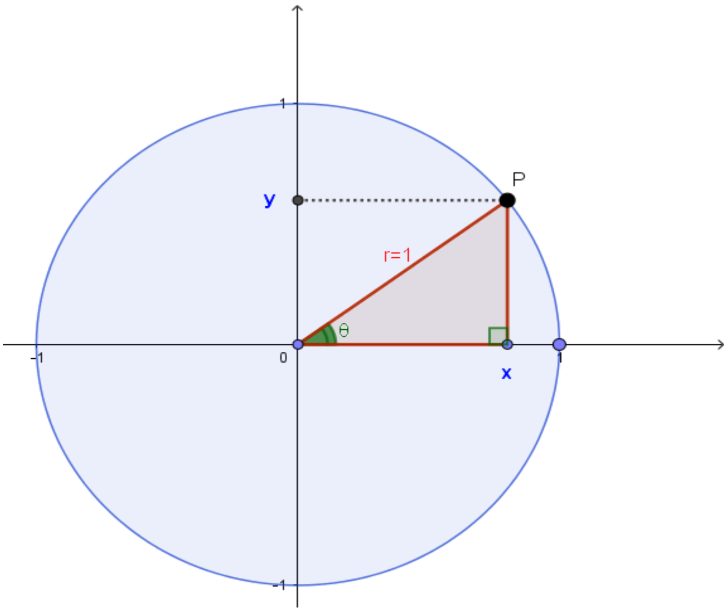
Nosso objetivo com esta atividade é através de algumas sugestões, mostrar como usar essa construção para dar sentido aos conceitos trigonométricos de forma a memorizá-los e aplicá-los, levando os estudantes a raciocinar sobre como obter as fórmulas e relações trigonométricas (que são expressões algébricas). Sugerimos que esta atividade seja aplicada para os estudantes da 2ª série do Ensino Médio, onde geralmente são introduzidos os conceitos de trigonometria na circunferência. Corroborando com isso, a BNCC indica que na etapa do Ensino Médio, um objeto matemático deve ser representado e utilizado de diferentes formas (nesta atividade, representação algébrica e geométrica), a fim de poder compreender as ideias matemáticas e quando possível fazer a conversão destas ideias em diferentes contextos (nesta atividade, referindo-se à origem e construção das fórmulas) (BRASIL, 2018, p. 538). Dessa forma esta atividade ajudará a solucionar as seguintes dificuldades:

- dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos (FPP);
- dificuldade em memorizar (Mem);
- dificuldade com simplificação de expressões algébricas (SExpA);
- dificuldade em pensar (P);
- dificuldade em generalizar (G).

A memorização é muito importante, pois ajuda na resolução de problemas, dando mais praticidade. No entanto quando a memória falha é crucial o estudante ter meios para determinar as fórmulas trigonométricas e assim usá-las. Muitas vezes as fórmulas e relações trigonométricas, são ensinadas de forma mecânica sem focar na compreensão, levando o estudante a decorar. Com esta atividade o estudante memorizará os conceitos por associá-los ao que ele construiu e observou visualmente a cada passo, formalizando as definições por meio da Álgebra e Geometria sem a necessidade de focar em uma linguagem exageradamente formal. Para elaborar esta atividade nos apoiamos teoricamente na conceção de Álgebra como estudo de relações entre grandezas de Usiskin (1995), encarando a variável como argumento, e também na conceção de Educação Algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), na qual a Geometria é utilizada para justificar o transformismo algébrico.

Para iniciar a atividade o professor deve propor para os estudantes construírem um círculo trigonométrico com cartolina ou outro papel mais resistente, com um decímetro de raio, e alguns triângulos retângulos todos iguais, com hipotenusas do mesmo tamanho que o raio do círculo. O professor deve deixar claro aos estudantes que, por definição, o círculo trigonométrico tem raio igual a 1 e está centrado na origem. Primeiramente os estudantes devem posicionar um dos triângulos retângulos no primeiro quadrante do círculo, conforme ilustrado na Figura 18.

Figura 18 - Círculo trigonométrico



Fonte: produção do próprio autor

O professor pedirá que os estudantes apliquem as definições de seno e cosseno no triângulo retângulo, as quais neste momento de ensino já são conhecidas por eles. Dessa forma, a partir da Figura 18, os estudantes concluem que:

$$\sin\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{y}{1} = y\ (cateto\ oposto)$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{x}{1} = x\ (cateto\ adjacente)$$

A partir dessa atividade o estudante compreenderá que um dado ponto P pertencente à circunferência, determina um arco correspondente a um ângulo θ, possuindo como projeções nos eixos das abscissas e ordenadas, os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$, respectivamente. Os estudantes perceberão que quando o seno cresce, o cosseno decresce e vice-versa. Aqui também poderão perceber que o cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrante, dado que como o cosseno é lido no eixo x e este é positivo nesses quadrantes. Do mesmo modo, eles compreenderão que o seno é positivo no primeiro e segundo quadrante, visto que o seno é lido no eixo do y e este é positivo no primeiro e segundo quadrantes. Assim, mediante a compreensão o estudante irá memorizar esses conceitos, que são elementares para o entendimento da Trigonometria.

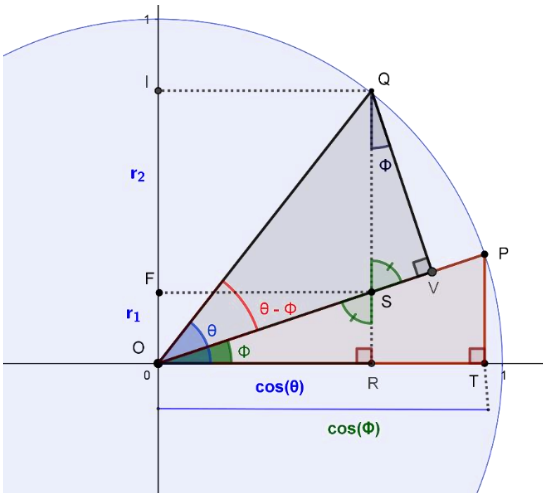
Como os estudantes já formalizaram que $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ e aplicando o Teorema de Pitágoras, eles conseguirão obter a *equação cartesiana de um círculo centrado na origem de raio 1*: $x^2 + y^2 = 1$. Esta equação poderá também ser reescrita como $\sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$, denominada de *Relação Fundamental da Trigonometria*.

Com essa atividade o professor pode demonstrar muitas fórmulas e conceitos trigonométricos para seus estudantes, de um modo mais intuitivo e fácil de entender. Iremos propor através da construção desse círculo trigonométrico os seguintes conceitos: soma e diferença de ângulos, redução de ângulos dos segundo, terceiro e quarto quadrantes ao primeiro quadrante, e ângulos complementares. Apresentaremos nas seções a seguir tais sugestões.

5.2.3.1 Soma e diferença de ângulos

O professor pedirá para os estudantes tentarem encontrar a fórmula do seno e cosseno da diferença de dois arcos, como ilustrado na Figura 19. Existem várias maneiras de determinar essas fórmulas, não necessariamente como é apresentado na Figura 19, portanto os estudantes devem ser incentivados a encontrar outros modos.

Figura 19 - Diferença de ângulos



Fonte: produção do próprio autor

Da figura acima podemos obter a fórmula do seno da diferença entre dois ângulos como segue abaixo.

Considere os triângulos *OSR* e *QSV*, os quais são semelhantes, pois $O\hat{S}R = Q\hat{S}V$ (opostos pelo vértice) e $S\hat{R}O = S\hat{V}Q$ (ângulos retos). Logo, $S\hat{O}R = \phi = S\hat{Q}V$. Do triângulo *QOV*, temos que $\sin(\theta - \phi) = \frac{\overline{QV}}{1} = \overline{QV}$, mas $\overline{QV}$ por sua vez é igual a

$$\overline{QS}cos(\phi) = r_2 \cdot \cos(\phi). \tag{4}$$

Temos ainda que

$$sin\theta = r_1 + r_2 \Leftrightarrow r_2 = sin\theta - r_1, \tag{5}$$

e r_1 obtêm-se aplicando a definição de semelhança nos triângulos *OSR* e *OPT*,

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{RO}} \Leftrightarrow \frac{\sin(\phi)}{r_1} = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow r_1 = \cos(\theta)\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}. \tag{6}$$

Substituindo r_1 em (5) e o resultado disso em (4), obtemos a fórmula para o seno da diferença entre dois ângulos,

$$sin(\theta - \phi) = \left(\sin(\theta) - \cos(\theta)\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right)\cos(\phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) - \cos(\theta) \cdot \sin(\phi).$$

A partir desta fórmula os estudantes poderão encontrar várias outras, deduzindo-as. Por exemplo, pode-se encontrar o seno da soma de dois ângulos, considerando $sin(\theta + \phi) = sin\big(\theta - (-\phi)\big)$.

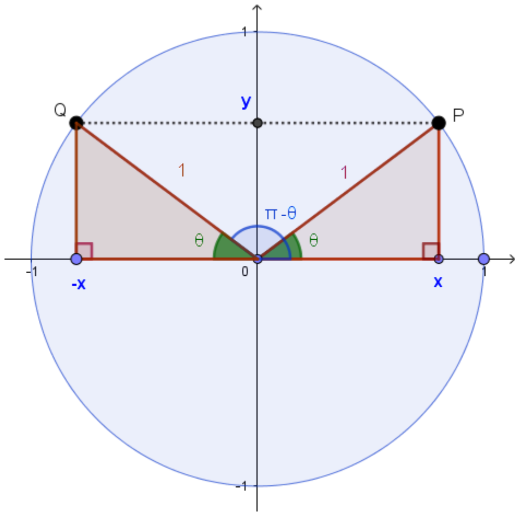
5.2.3.2 Reduções ao primeiro quadrante

Um dos desafios que também se encontra no ensino de Trigonometria, acontece quando o estudante está lidando com ângulos que não pertencem ao primeiro quadrante, ou seja, um dado ângulo α que não está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Através da construção do círculo trigonométrico, posicionando os triângulos, o professor pode provar visualmente para o estudante que sempre é possível reduzir esse ângulo α de forma a encontrar um ângulo correspondente no primeiro quadrante $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Apresentaremos nos parágrafos abaixo as reduções ao primeiro quadrante, através da observação visual à medida que fixamos um triângulo no primeiro quadrante e posicionamos o outro nos demais quadrantes (através de giros e reflexões).

5.2.3.2.1 Redução do segundo ao primeiro quadrante

Na Figura 20 iremos mostrar a redução do segundo ao primeiro quadrante, onde o ponto Q é simétrico de P em relação ao eixo do y. O professor deve orientar o estudante a posicionar os dois triângulos de forma a haver uma simetria em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, refletir em torno do eixo y. Um triângulo é fixo no primeiro quadrante, e o outro será posicionado no segundo quadrante, conforme ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Redução do segundo ao primeiro quadrante



Fonte: produção do próprio autor

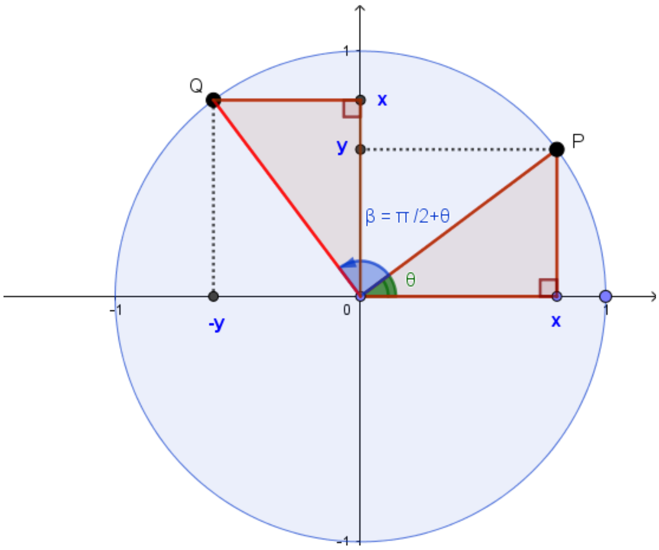
Da construção acima o estudante poderá concluir que

$$\sin(\pi - \theta) = y = \sin\theta,$$

$$\cos(\pi - \theta) = -x = -cos\theta.$$

Existe outra redução de ângulo do segundo quadrante ao primeiro, fazendo uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad, conforme ilustra a Figura 21.

Figura 21- Outro exemplo de redução do 2º ao 1º quadrante



Fonte: produção do próprio autor

Como os dois triângulos são iguais, temos que a projeção ortogonal do ponto Q sobre o eixo das ordenadas determina um comprimento de medida igual ao da projeção P sobre o eixo das abscissas (x). Da mesma forma, temos também que a projeção ortogonal do ponto Q sobre o eixo das abscissas determina um comprimento de medida igual (em módulo) ao da projeção do ponto P sobre o eixo das ordenadas (y). O estudante deve ser instigado a observar que na verdade o segundo triângulo é uma rotação de $\frac{\pi}{2} rad$ do primeiro triângulo no sentido anti-horário. O professor pode ajudar a construir esse raciocínio dizendo que o triângulo está girando no sentido contrário aos dos ponteiros de um relógio.

Como os estudantes já aprenderam através da Figura 18 que $x = cos(\theta)$ e que $y = \sin(\theta)$, irão concluir da Figura 21 que

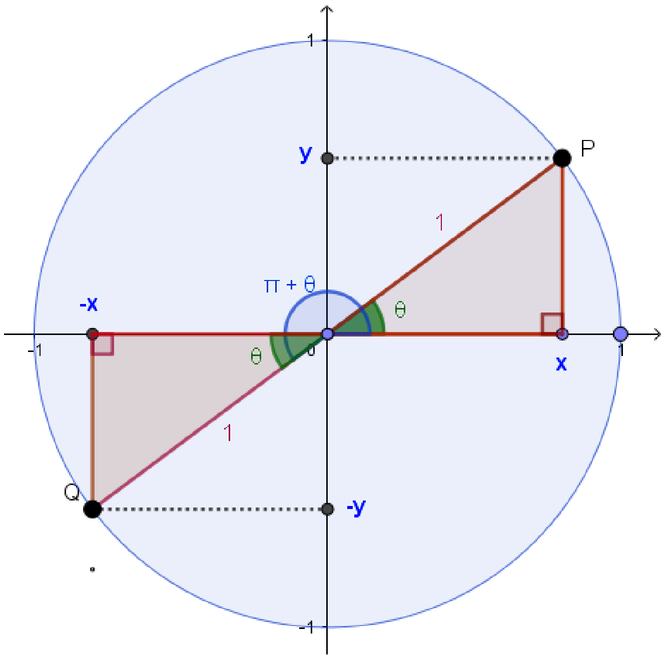
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = x = \cos(\theta),$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -y = -\sin(\theta).$$

5.2.3.2.2 Redução do terceiro ao primeiro quadrante

A partir da mesma estratégia, a redução do terceiro ao primeiro quadrante pode ser demonstrada aos estudantes, posicionando o segundo triângulo no terceiro quadrante de forma que o vértice Q seja simétrico ao P em relação à origem, ou seja, representa um giro de 180º no sentido anti-horário.

Figura 22 – Redução do terceiro ao primeiro quadrante



Fonte: produção do próprio autor

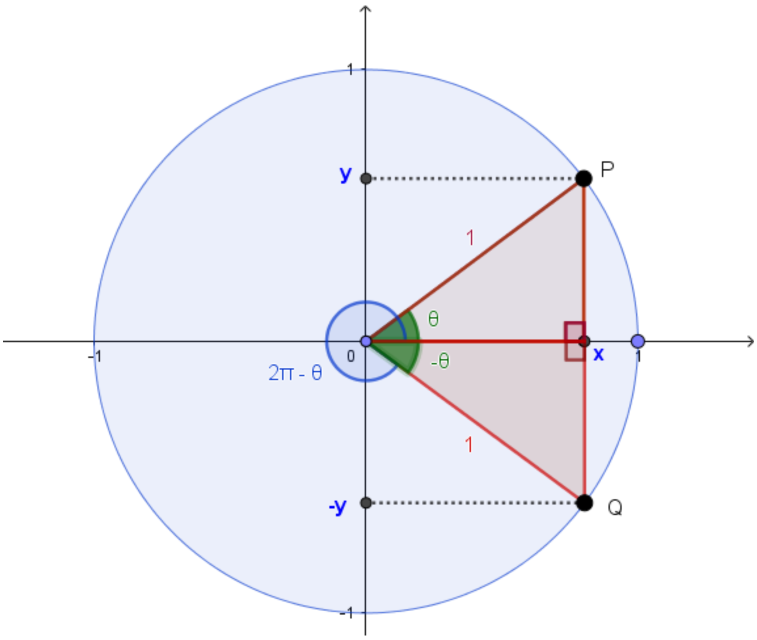
Existe outro ângulo do terceiro quadrante que pode ser reduzido ao primeiro quadrante: redução do $sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ e do $cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$. Assim, da Figura 22 os estudantes podem concluir que

$$\sin(\theta+\pi) = -y = -\sin(\theta),$$
$$\cos(\theta+\pi) = -x = -\cos(\theta).$$

5.2.3.2.3 Redução do quarto ao primeiro quadrante

Para a redução do quarto ao primeiro quadrante, os estudantes posicionarão o segundo triângulo no quarto quadrante, de maneira que o vértice Q seja simétrico ao vértice P em relação ao eixo das abscissas, ou seja, mostrar para os estudantes que o segundo triângulo representa uma reflexão do primeiro triângulo em relação ao eixo das abscissas, ou ainda que o primeiro triângulo sofreu um giro de $2\pi - \theta\ rad$.

Figura 23 – Redução do quarto ao primeiro quadrante



Fonte: produção do próprio autor

Há também outra redução do quarto ao primeiro quadrante, na qual os estudantes terão que desenvolver o $sen\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ e $cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$.

O estudante poderá concluir a partir da Figura 23

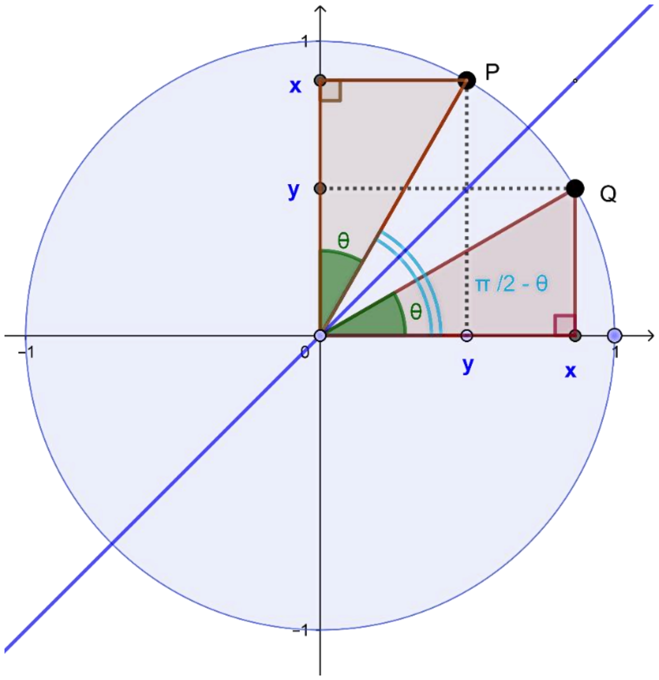
$$\sin(-\theta) = \sin(2\pi-\theta) = -y = -\sin(\theta),$$

$$\cos(-\theta) = \cos(2\pi-\theta) = x = \cos(\theta).$$

5.2.3.3 Ângulos complementares

Em vez de começar com o conceito formal de ângulos complementares, o professor pode pedir aos estudantes para construí-lo à medida que posicionam os dois triângulos no primeiro quadrante de forma que aconteça uma reflexão em torno da reta $y = x$. A Figura 24 mostra esta construção.

Figura 24 – Ângulos Complementares



Fonte: produção do próprio autor

Partindo do fato dos dois triângulos serem iguais, temos que a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo das abscissas é igual à projeção ortogonal do ponto Q sobre o eixo das ordenadas, ou seja, y. Analogamente, a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo das ordenadas é igual à projeção ortogonal do ponto Q sobre o eixo das abscissas, ou seja, x. O estudante conseguirá observar que os valores de seno e cosseno do ângulo $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ podem ser encontrados a partir das projeções ortogonais do ponto P sobre o eixo das ordenadas e abscissas, respectivamente. Assim, o estudante poderá concluir que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x = \cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = y = \sin\theta\,.$$

Portanto, através da construção de vários modelos apresentados em sala de aula, como por exemplo as reduções ao primeiro quadrante, e as somas e diferenças de ângulos, as fórmulas e procedimentos podem se tornar naturais e simples de serem feitos. Assim, melhor do que apenas decorar as fórmulas é sempre melhor tentar visualizá-las, facilitando a memorização e aplicação das mesmas.

5.2.4 As máquinas de transformar

A atividade que apresentaremos nesta seção é retirada e adaptada de Falcão (2003), o qual propõe a importância de se iniciar o estudo da Álgebra desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental. O objetivo desta atividade é desenvolver o pensamento algébrico, mostrando que o professor poderá estimulá-los através da resolução de problemas desafiadores, que levem os estudantes a utilizarem recursos que podem ser considerados como atividades algébricas.

O conceito de função pode ser explorado através de uma atividade que tenha como objetivo identificar os princípios que regem o funcionamento de "máquinas de transformar". Esta atividade poderá ser aplicada desde os anos finais do Ensino Fundamental, tendo em vista que a BNCC indica para o 7º ano o objeto de conhecimento "Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita" (BRASIL, 2018, p. 306). Assim, este recurso permite que os estudantes observem as transformações e mudanças que ocorrem a cada objeto que " entra" nessa máquina, estabelecendo algum tipo de relação entre eles e representando-os através de símbolos adequados. Dessa forma esta atividade ajudará a sanar as seguintes dificuldades:

- Dificuldade em interpretar as letras (IL), visto que desde cedo os estudantes começam a internalizá-las, ajudando-os futuramente a interpretá-las de forma correta ao reconhecer suas funcionalidades e utilidades;
- Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA), pois desde cedo os estudantes serão condicionados que é possível e interessante representar de forma mais simbólica e simplificada objetos e acontecimentos do mundo real. Nesta atividade, a sequência de todas as etapas permeia toda as fases da linguagem algébrica, ou seja, começando por uma linguagem verbal (expressar os objetos ou transformações em linguagem natural), passando por uma linguagem sincopada (representar os objetos pelos nomes, ou conjunto de letras) e por fim chegando a uma linguagem relativamente simbólica compatível com o nível de ensino (representar os objetos utilizando apenas uma letra);

- Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), dado que esta atividade instiga o estudante a interpretar situações de mudanças e tentar escrever seu raciocínio através de uma linguagem;
- Dificuldade em generalizar (G), visto que os estudantes serão estimulados a descobrir fórmulas que regem as mudanças encontradas em certas máquinas;
- Dificuldades em pensar (P), visto que algumas das etapas desta atividade ajudam a desenvolver o pensamento.

Esta atividade aumentará de forma gradual o nível de linguagem algébrica, de forma que o estudante tenha tempo para pensar e comparar a sua utilidade. Para iniciar a atividade, o professor dará aos estudantes um modelo de máquina, como ilustrado na Figura 25, a qual modifica os objetos.

Figura 25 - Máquina mágica

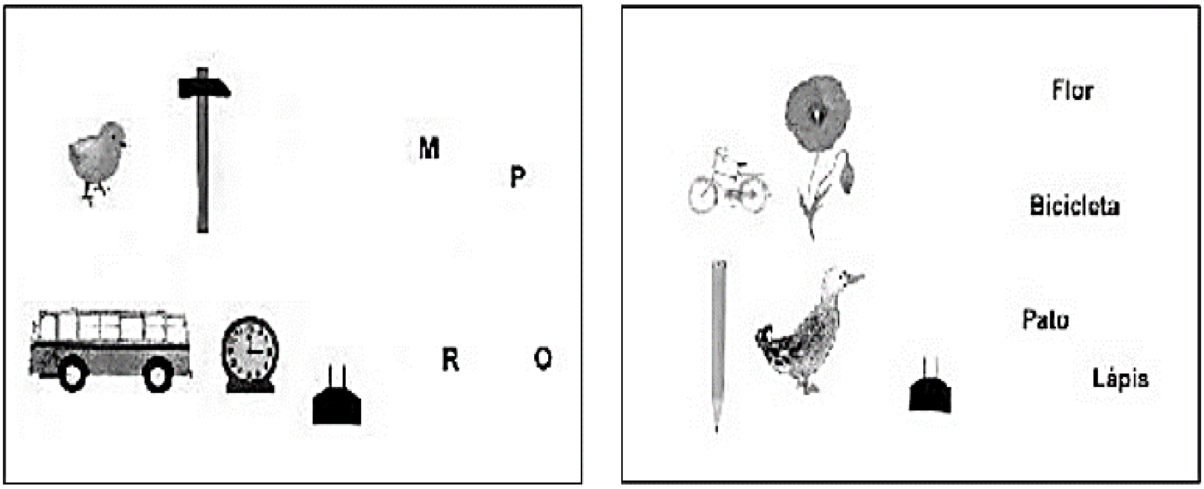
Fonte: Falcão (2003, p. 12)

O objetivo aqui é que o estudante consiga expressar em termos gerais tais mudanças, escrevendo verbalmente seu raciocínio sobre a mudança do aspecto perceptual de objetos nelas introduzidos. Portanto os estudantes serão questionados mediante as perguntas:

a) Que mudanças ocorreram com os objetos, antes e depois de entrarem na máquina?
b) Essas mudanças ocorreram igualmente em todos os objetos?
c) Que nome você daria para essa máquina? (Levando em conta a transformação que ela gera).

Posteriormente, pode-se trabalhar com máquinas de atribuições simbólicas, onde os objetos que entram nelas são transformados na letra que representa os seus nomes ou no próprio nome do objeto. O professor dará a cada aluno um modelo de máquina conforme a Figura 26 e pedirá que eles representem de alguma forma tais objetos. O professor não deve influenciar a escolha da representação simbólica dos estudantes, mesmo que ela não seja pertinente, pois depois de todos responderem haverá um momento para compartilhar as respostas e assim refletir sobre como cada objeto poderia ser representado e a vantagem de tal representação.

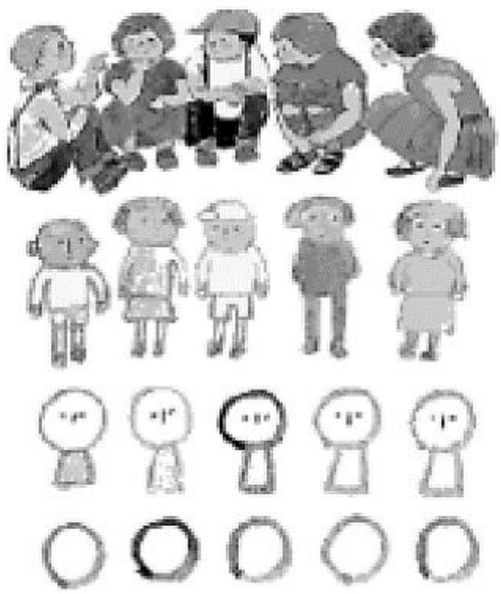
Figura 26 - Máquinas de atribuição simbólica



Fonte: Falcão (2003, p. 12)

Neste momento os estudantes já começam a comparar sobre o que seria mais prático: escrever o nome do objeto ou representá-lo por uma letra. A próxima etapa da atividade evidenciará o interesse de representar de forma simplificada os objetos do mundo real através de símbolos, onde cada estudante receberá um modelo como descrito na Figura 26.

Figura 27 - Representação simplificada de objetos

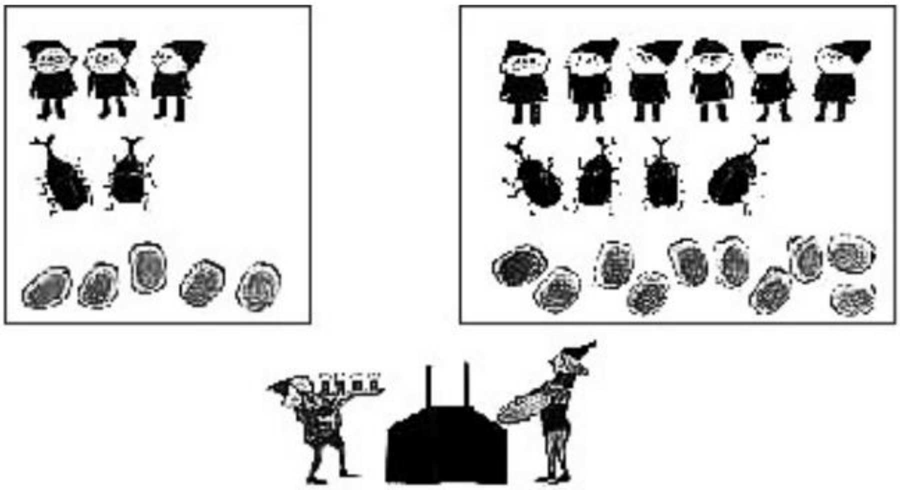


Fonte: Falcão (2003, p. 14)

A ideia é mostrar para os estudantes as vantagens de representar simbolicamente os objetos de um conjunto, nomeadamente a simplificação dos dados mantendo a cardinalidade (número de elementos do conjunto). Por outro lado, o professor pode questionar os estudantes quanto à existência de alguma desvantagem na representação escolhida na imagem anterior, no sentido de eles perceberem que as bolinhas são todas iguais, e assim não é possível identificar ou diferenciar cada objeto. Tendo isso em mente, o próximo passo é discutir com os estudantes a possibilidade de substituir as bolinhas por outros símbolos. Dessa forma desenvolve-se o pensamento algébrico à medida que se constrói uma linguagem mais concisa ou sincopada para exprimir as situações-problema.

O próximo passo será o professor dar aos estudantes modelos de máquinas que realizam algum tipo de operação aritmética, como mostra a Figura 28.

Figura 28 - Máquina que dobra a quantidade de objetos



Fonte: Falcão (2003, p. 13)

Nesta figura o estudante será estimulado a descobrir que a máquina multiplica por dois cada conjunto de objetos. Permita ao estudante também perceber que é possível colocar vários objetos nesta máquina, de diferentes naturezas, podendo ser também números. O estudante deve perceber que no lado esquerdo há uma entrada para colocar os objetos, e do lado direito uma saída de onde retira-se o produto, ou seja, os objetos duplicados. O professor deve incentivar os estudantes a tentar representar essa situação através da linguagem algébrica, como por exemplo,

A – lado da máquina onde entram os objetos;

B – lado da máquina onde saem os objetos.

Sendo possível assim, representar a máquina de transformar pela expressão

$$2 \cdot A = B.$$

Amadurecendo então essa ideia, o professor pode utilizar a máquina como uma metáfora do conceito de função, ou seja, um porta-valores. Assim, seguindo a conceção algébrica Estudo das relações de Usiskin (1995), estaremos encarando estes símbolos como argumentos, assumindo vários valores que podem ser expressos por uma relação.

O próximo passo é trabalhar tabelas simulando estas máquinas de transformar, focalizando em algumas operações aritméticas simples. O Quadro 20 dá-nos um exemplo.

Quadro 20 - Máquina de transformar utilizando operações aritméticas

	SAÍDA		
ENTRADA	**Máquina 1** Some 3 à entrada	**Máquina 2** Subtraia 2 à entrada	**Máquina 3** Multiplique por 5 à entrada
0			
1			
7			
10			
	14		
		15	
			100
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n			
Qual é a fórmula da máquina 1?			
Qual é a fórmula da máquina 2?			
Qual é a fórmula da máquina 3?			

Fonte: produção do próprio autor

O estudante neste momento de aprendizagem já consegue identificar as mudanças e variações que acontecem e também criar algum tipo de representação para os objetos que passam pela máquina. Dessa forma através da tabela ele aplicará os conceitos que foram aprendidos nas máquinas anteriores, a fim de generalizar através de uma fórmula as variações que ocorrem em cada uma das 3 situações apresentadas no Quadro 20. Eles podem também criar suas próprias máquinas, com as operações que eles desejarem, dado que a BNCC considera positiva a elaboração de problemas e exercícios pelos próprios alunos. Essa criação de máquina pode ir além do papel e se estruturar concretamente, através da construção de uma câmera escura que metaforiza a ideia de uma câmera fotográfica. A etapa final desta atividade é então a construção dessa câmera: numa primeira fase, o professor pode pedir para que os estudantes investiguem um pouco sobre o assunto - havendo assim uma interação com outras áreas de conhecimento - e numa segunda fase, construir a dita câmera.

A câmera escura pode ser feita de maneira simples utilizando os seguintes itens:

- 1 lata de leite em pó;
- papel vegetal;
- 1 pedaço de cartolina preta;
- tesoura;
- fita adesiva;
- prego e martelo.

Primeiramente faça um furo com o prego no fundo da lata. Posteriormente, recorte o papel vegetal um pouco maior que o diâmetro da lata e cole-o com fita na abertura da lata onde ficaria a tampa. Encape a lata com o papel escuro. O estudante apontará o furo feito na lata para um objeto iluminado e observar a imagem no papel vegetal. Após os estudantes construírem a câmera escura e observarem empiricamente seu funcionamento, o professor irá propor os seguintes questionamentos:

a) Qual mudança ocorre com a imagem formada em relação à original?
b) Descreva hipóteses para a mudança ocorrida em a).
c) O que acontece se eu aproximo o objeto?
d) O que ocorre se eu afasto o objeto?

Estas perguntas irão ajudar os estudantes a buscar conceitos e explicações ao tentar justificar as mudanças que ocorrem na prática. Desta forma, ao pesquisar e inter-relacionar os conteúdos de Álgebra e Física, os estudantes caminham para uma aprendizagem mais significativa: aliando teoria e prática, lidando com conhecimentos realísticos, interligando conhecimentos prévios e, portanto, vencendo as dificuldades.

5.2.5 Traduzindo as linguagens

Esta atividade tem como objetivo fixar nos estudantes a ideia de podermos escrever simbolicamente uma quantidade ou situação, familiarizando-os com os símbolos, as notações e com o vocabulário propriamente matemático. As dificuldades que os estudantes podem ter nesta atividade relativas a traduzir um problema da linguagem corrente para a algébrica, podem surgir devido: o estudante não conhecer alguns símbolos matemáticos; confundir a utilização desses símbolos com outros significados que lhe são dados em outros campos de estudo; não estar familiarizados com fraseologias matemáticas, como a metade, a terça parte, o dobro, o triplo, a diferença, o quadrado, a quarta parte do produto de uma diferença, entre outros. Dessa forma, ao expô-los a tais contextos, esta atividade ajudará a minimizar as dificuldades dos estudantes em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA).

Essa atividade leva os estudantes a refletir sobre a notação e as letras que se utilizam para expressar uma ideia algébrica. Uma situação aparentemente simples, mas que pode confundir os estudantes, é sempre utilizar as letras iniciais dos nomes referentes aos dados de um enunciado como as variáveis do problema. O que pode ocorrer é que ao se deparar com uma letra, ele sempre faça essa relação, com um certo objeto cujo nome comece com essa letra. Acreditamos que essa correspondência nome-variável pode ser benéfica em certas situações, no sentido de enfatizar ainda mais o significado das letras, no entanto o problema está em sempre fazer isso, condicionando os estudantes a pensar que isso é uma regra. Assim, através dessas reflexões esta atividade também ajudará a minimizar as dificuldades relativas a interpretação das letras (IL).

Através desta atividade os estudantes acabam treinando a leitura, e como já vimos quanto mais se lê, melhor se entendem as coisas e mais aptos se tornam a exprimir o que pensam, ajudando assim a minimizar as dificuldades em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP). Também por meio desta atividade, os estudantes serão expostos a problemas que envolvem igualdades, portanto, ajudando a minimizar as dificuldades relativas a esta (Ig). Por fim, esta atividade possibilita aos estudantes memorizar certos símbolos e seus significados, ajudando desta forma a minimizar as dificuldades em memorizar (Mem).

Esta atividade pode ser aplicada nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A BNCC evidencia a resolução de equações do 1º grau e representação algébrica através do conceito de variável desde o sétimo ano do Ensino Fundamental, e aprofunda estes conceitos no Ensino médio desde a primeira série. Cabe ao professor adequar o nível das questões para cada etapa de ensino, sendo esta atividade um modelo de como isso poderia ser feito.

Inicialmente o professor deve apresentar aos estudantes os símbolos que serão utilizados, relembrando seus nomes e dando alguns exemplos de utilização. Por exemplo, os símbolos: $=,\ \neq,\ >,\ <,\ \geq,\ \leq,\ +,\ -,\ \div,\ \times,\ \cdot$. Após essa breve revisão, o professor poderá refletir com os estudantes que um número ou objeto desconhecido pode ser representado por uma letra qualquer, como por exemplo chamá-lo de x. Posteriormente, pode-se desafiar os estudantes a escreverem na linguagem algébrica algumas sentenças escritas na linguagem corrente, utilizando até então a letra x e os símbolos que foram mencionados anteriormente, como por exemplo:

- Um número positivo: $x > 0$;
- Um número negativo: $x < 0$.

O próximo passo é realizar atividades que levem os estudantes a transcrever a linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa, como mostra o Quadro 21.

Quadro 21 - Atividades envolvendo linguagem escrita e algébrica

1- Escreva em linguagem algébrica as frases descritas abaixo:

LA: linguagem algébrica

LE: linguagem escrita

a) LE: Um certo número aumentado em 25 unidades é igual ao dobro de 20.
LA: ____

b) LE: Ao diminuir uma certa quantidade de 40, o resultado é igual a metade do valor inicial.
LA: ____

c) LE: Para todo o y no contradomínio da função f, existe um x no domínio de f tal que y é igual a $f(x)$.[2]
LA: ____

d) Pense em um número natural com 3 algarismos:[3]

- Se esse número possui x unidades, y dezenas e z centenas, como podemos representá-lo algebricamente?
- Imagine o número do item anterior escrito ao contrário. Subtraindo o segundo número do primeiro, obtém-se 99. Escreva a equação correspondente a essa situação.
- Sabendo que $x + z = 3$, que y é igual 2 dezenas e levando em conta as informações anteriores, descubra qual é o número xyz.

[2] Exemplo de questões que podem ser trabalhadas com os estudantes do Ensino Médio.
[3] Exemplo de exercício que deve ser introduzido a estudantes mais avançados.

2- Faça enunciados de situações que podem ser solucionadas utilizando as expressões abaixo:

a) LA: $5x - 4 = x$

LE: ____

b) LA: $\frac{k}{3} = k + 4$

LE:____

3- Sabendo que as expressões $\frac{m}{3} - 4$ e $m + 6$ representam a mesma quantidade numérica, responda:

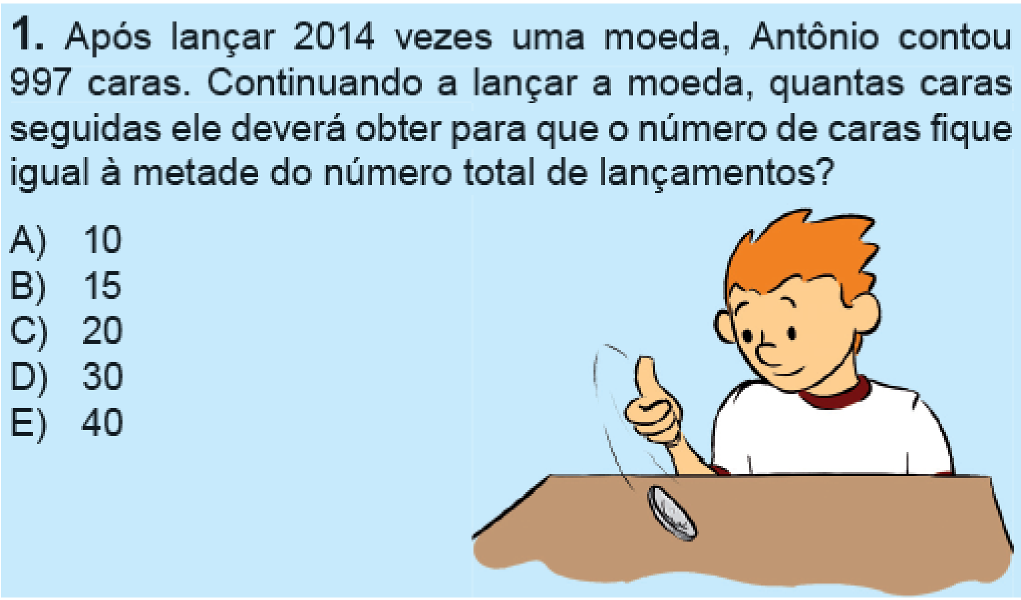
a) Como você representaria algebricamente este enunciado?

b) Qual o valor de m?

Fonte: produção do próprio autor

Após esta atividade de fixação de termos e símbolos, e formalização de algumas escritas matemáticas, o professor pode trabalhar questões que envolvam contextos realísticos, para que possam desenvolver a interpretação e o raciocínio. Para isso escolhemos uma questão retirada da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escolas Públicas (OBMEP), como ilustrado na Figura 29.

Figura 29 - Questão da OBMEP 2014, 1ª fase


1. Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 30
E) 40

Fonte: Banco de provas da OBMEP [4]

[4] Disponível em : http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 19 ago. 2020.

Se o estudante ainda tiver dificuldades em traduzir de uma linguagem para a outra, pode-se trabalhar com ele a escrita e resolução do exercício através de uma tabela, na qual ele escreve paralelamente as duas formas de linguagem, conforme o Quadro 22.

Quadro 22 - Linguagem escrita *versus* linguagem algébrica

Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos?	
Linguagem escrita	**Linguagem algébrica**
"quantas caras seguidas"	c
"número de caras"	$997 + c$
"número total de lançamentos"	$2014 + c$
"metaxde do número total de lançamentos"	$\frac{2014 + c}{2}$
"número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos"	$997 + c = \frac{2014 + c}{2}$

Fonte: produção do próprio autor

No momento de resolver esta atividade, é bem provável que o estudante utilize a letra c para representar a quantidade de caras, o que é bastante conveniente dentro do contexto. No entanto, se utilizarem outras letras, até mesmo o tradicional x, o professor não deve corrigi-lo. A ideia aqui é dar significado a letra, não importando necessariamente qual letra ele use.

Após encontrar a resposta, $c = 20$, o estudante poderá aplicá-la no enunciado, de modo a investigar se é factível esta solução: teremos que o número total de caras será $997 + 20 = 1017$, que é exatamente à metade do número total de lançamentos $2014 + 20 = 2034$.

5.2.6 A matemática e o COVID-19

Esta atividade tem por objetivo mostrar aos estudantes a importância da Matemática para a sociedade, ajudando a minimizar as dificuldades em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado (Ut). Em nosso referencial teórico vimos que muitas vezes a Matemática da sala de aula não é capaz de refletir a realidade dos estudantes. Nesta atividade mostraremos que é possível trabalhar em sala de aula informações reais noticiadas em meios midiáticos, modelando-as matematicamente. Neste ano de 2020, a pandemia do coronavírus assolou todo o mundo. Assim, no mínimo todas as pessoas possuem conhecimento razoável sobre a quantidade de casos de infectados que ocorrem diariamente. Desta forma, por meio da Matemática podemos trazer certas discussões sobre a situação atual, contribuindo para a formação de cidadãos conscientes e que se responsabilizam com o bem-estar das outras pessoas.

Por outro lado, se o problema proposto nesta atividade for dado a estudantes que ainda não viram o conteúdo de progressão geométrica, pode funcionar como um motivador. Nesse sentido, ele pode ajudar nas seguintes dificuldades: dificuldades em pensar (P), pois ajuda a desenvolver o raciocínio; dificuldades em passar da linguagem escrita para a algébrica e vice-versa, uma vez que é necessário traduzir a linguagem corrente para a simbologia matemática; dificuldades em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), visto que treina a leitura e induz o estudante a exprimir seu raciocínio; dificuldade em generalizar (G), ao buscar uma expressão geral para representar o problema, e a dificuldade em memorizar (Mem), dado que tem muitos alunos que às vezes não se lembram como é o gráfico de uma função exponencial.

Nesta atividade o professor pedirá que os estudantes construam um modelo matemático que simplifique essa situação real, nos valendo da conceção de Educação Algébrica Modelagem Matemática de Lins e Gimenez (2001), sendo assim possível prever quantidades de pessoas contaminadas.

A BNCC indica para a etapa do Ensino Médio, a competência de

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (BRASIL, 2018, p. 531).

Portanto, esta atividade pode ser aplicada no Ensino Médio, especialmente na 1ª série, onde são introduzidos os conteúdos de progressão geométrica e função exponencial.

Para iniciar a atividade podemos propor uma discussão sobre o trecho da notícia veiculada pela Folha de São Paulo no dia 11 de março de 2020: *"Os primeiros casos contaminaram de duas a 3 pessoas. Agora a progressão é geométrica, não tem jeito. É um para dois, dois para quatro, quatro para oito, oito para 16*" (FOLHA DE SÃO PAULO, 2020). Neste momento talvez seja necessário relembrar o que é uma progressão geométrica, relacionando com os dados da notícia tais conceitos, pedindo que os estudantes construam a sequência mencionada.

$$\boxed{1 = a_1, \qquad 2 = a_2, \qquad 4 = a_3, \qquad 8 = a_4, \qquad 16 = a_5, \dots}$$

Após isso, propor algumas perguntas:

1- O que acontece de um termo anterior da sequência para outro posterior?
2- Qual é a razão de crescimento desta sequência?
3- Quantas pessoas estariam contaminadas nas fases a_7 e a_8?
4- Crie um modelo matemático que generalize essa situação.
5- É possível representar graficamente esta situação?

As Questões 1 e 2 são resolvidas de forma imediata, necessitando apenas que o estudante observe que cada termo subsequente é igual ao seu anterior multiplicado por 2. A partir disso a Questão 3 poderá ser resolvida, já que $a_6 = 2 \cdot a_5 = 2 \cdot 16 = 32$, portanto $a_7 = 2 \cdot a_6 = 2 \cdot 32 = 64$ e $a_8 = 2 \cdot a_7 = 2 \cdot 64 = 128$.

Para responder à Questão 4, o estudante deve observar o padrão que relaciona os termos da sequência, de modo a encontrar um termo geral, ou seja, para o n-ésimo termo. Apresentaremos a seguir, como o estudante deve resolver a Questão 4.

i) Primeiramente deve-se escrever cada termo em função de seu antecessor, observando que os resultados serão potências de base 2, visto que a razão é igual a 2. Assim, temos que

$$a_1 = 1 = 2^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot 2 = 2^0 \cdot 2 = 2^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot 2 = 2^1 . 2 = 2^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2 = 2^4 \text{ , etc.}$$

ii) Queremos determinar uma fórmula geral que seja válida para todos os termos da sequência, portanto

$$a_n = C \cdot 2^{n-1},$$

onde a_n é o n-ésimo termo da sequência e C é uma constante que neste caso em específico tem o mesmo valor que a_1, portanto, $a_n = 2^{n-1}$.

Para resolver a Questão 5, o professor pode questionar os estudantes se é possível representar esta sequência de forma gráfica, levando-os a relacionar o termo geral da PG com o gráfico de uma função exponencial. Para isso, o professor pode sugerir a criação de uma tabela, onde a variável independente (x) corresponde às etapas de contágio e a variável dependente (y) à quantidade de infectados, conforme ilustra o Quadro 23.

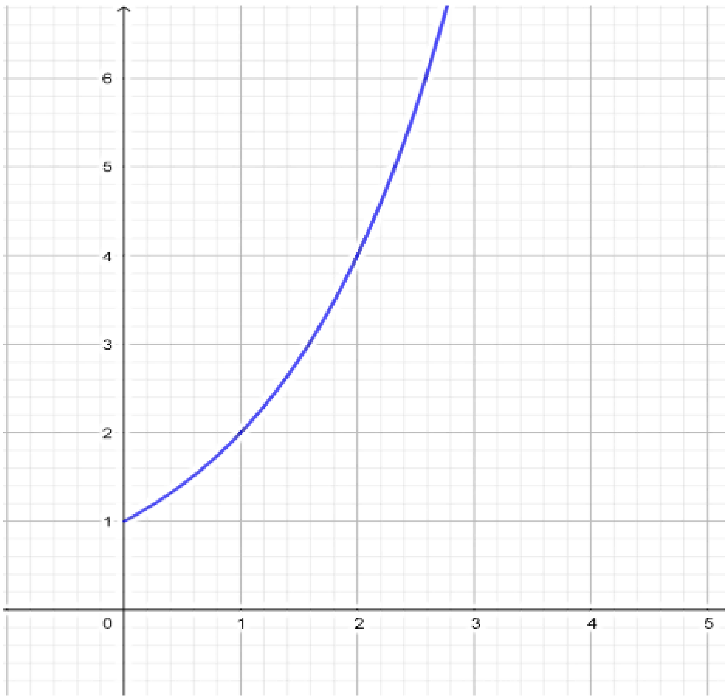
Quadro 23 - Quantidade de pessoas infectadas

x	y
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
$\dots$	$\dots$
8	$256 = 2^8$
$\dots$	$\dots$
x	2^x

Fonte: produção do próprio autor

Após discutir sobre a tabela, os estudantes poderão analisar esses dados através de um gráfico, tal como o Gráfico 1.

Gráfico 1 - Função $f(x) = 2^x$



Fonte: produção do próprio autor

Sabemos que por se tratar de pessoas estamos lidando com quantidades discretas, assim o professor pode ressaltar que o gráfico serve apenas para facilitar a observação de como se comportam estes valores discretos ao longo do tempo.

Agora o professor, irá questionar os estudantes sobre o crescimento deste gráfico, no sentido de despertar atenção para a agressiva contaminação em massa que ocorre devido a não serem seguidas as orientações de higiene e distanciamento social. Também é relevante o professor esclarecer que este gráfico representa um modelo simples de uma situação real, não condizente totalmente com o que acontece na realidade, tendo em vista que vários outros parâmetros que influenciam nos dados não estão sendo levados em conta. Por outro lado, esta atividade oportuniza os estudantes exprimirem suas ideias sobre como poderíamos ter uma curva menos acentuada, relacionando assim com a base da potência da função $f(x) = a^x$, onde $f(x)$ é crescente quando $a > 1$. Os estudantes irão mudar a base desta função verificando como a curva se comportaria. Vale ressaltar que os estudantes podem utilizar softwares para fazer os gráficos, introduzindo os importantes meios tecnológicos nas salas de aula.

5.2.7 Jogando com a linguagem algébrica

Esta atividade se estrutura no formato de um jogo, o qual ajudará os estudantes a ler e escrever expressões algébricas, relacionando-as com a linguagem natural, ajudando dessa forma a sanar as dificuldades em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica (LEvsLA). Durante o jogo os estudantes terão que memorizar e correlacionar as informações que serão expostas em linguagem natural e em linguagem algébrica. Portanto, esta atividade também os ajudará a superar as dificuldades em memorizar (Mem), uma vez que se sentirão instigados a desenvolver a memorização.

Pensando numa perspectiva didática, os vencedores poderão ganhar livros como recompensa pelo bom desempenho no jogo, estimulando assim o interesse dos estudantes tanto em participar no jogo, como pela leitura. Estes livros poderão ser de diversos gêneros, condizentes à idade dos estudantes. Dessa forma eles serão estimulados a se deslumbrar com os livros, a enxergá-los como um prêmio e não um peso. Além disso, ajudará a convencer os estudantes a associar a Matemática com a leitura, e não somente aos números e às fórmulas. Uma sugestão interessante de livros são os da série *A descoberta da Matemática*, que trazem os conteúdos matemáticos em forma de contos e histórias.

Instruções do jogo: O jogo consiste em cartelas com expressões algébricas, que representam situações que serão verbalizadas pelo professor. As cartelas serão colocadas viradas para baixo, como se fosse um jogo da memória. A sala será dividida em dois grupos, de modo que em cada rodada dois integrantes, um de cada grupo, terão que localizar a expressão algébrica condizente à que o professor falará ou mostrará na linguagem natural. O grupo que encontrar mais cartelas corretas vence o jogo.

Esta atividade pode ser desenvolvida a partir das séries finais do Ensino Fundamental, tendo em vista que as cartelas podem ser adaptadas de acordo com a série, e também podem ser adaptadas para situações realísticas. No Quadro 24 exemplifica-se como poderiam ser essas cartelas.

Quadro 24 - Exemplo de cartelas para o jogo da linguagem

CARTELAS (Linguagem algébrica)	**Linguagem natural**
$X + 2 \cdot 6$	Soma de um número com o dobro de seis
$3(x - 3)$	Triplo da diferença de um número com três
$\frac{x + 7}{\frac{2}{3}}$	Três meios da soma de um número com sete
$x^{3} \cdot 5x^{2}$	Produto do cubo de um número pelo quíntuplo de seu quadrado
$\frac{3x - 5}{4}$	Diferença entre o triplo de um número e 5, dividida por quatro
K	Quarta parte do quádruplo de um número K
$2(7 + x)$	Dobro da soma de um número com sete

Fonte: produção do próprio autor

5.2.8 Atividades relacionadas à igualdade

5.2.8.1 Pensando nas igualdades

Esta atividade tem como objetivo explorar o conceito de igualdade, de maneira que os estudantes tenham abertura para expressar como compreendem o sinal de igualdade em cada situação. Através desta atividade, pode-se minimizar as dificuldades com a noção de igualdade (Ig), ao passo que o estudante descontrói o seu conceito unidirecional e apenas operacional, e constrói o conceito bidirecional da igualdade, estabelecendo relações entre variáveis, levando os estudantes a pensar algebricamente. Também ajudará os estudantes a formalizarem algumas propriedades, como a propriedade comutativa em relação à operação da soma. Desta forma esta atividade também ajudará a minimizar as dificuldades em generalizar (G), visto que os estudantes expressarão estas propriedades através de uma expressão algébrica.

A BNCC propõe para o 6º ano do Ensino Fundamental a seguinte habilidade:

> Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas (BRASIL, 2018, p. 303).

Desta forma, os itens de **1)** à **4)** desta atividade, que tratam de operações com números na igualdade, podem ser trabalhados a partir do 6º ano do Ensino Fundamental. E o item **5)** deve ser trabalhado no 7º ano, devido tratar de resolução de equações do 1º grau. Segue abaixo a sequência estabelecida para esta atividade.

1) Refletindo sobre a igualdade "operação = resultado": Inicialmente consideraremos o exemplo da igualdade aritmética $8 + 2 = 10$. Solicitaremos aos estudantes que respondam:

a) Em sua opinião o que significa essa expressão?
b) O que representa o sinal de igualdade?

2) Refletindo sobre a igualdade "resultado = operação": Posteriormente será apresentada outra igualdade aritmética, $10 = 7 + 3$, mudando a ordem para "resultado = operação". Solicitaremos novamente que respondam as mesmas perguntas a) e b) do item anterior. O objetivo é que o estudante perceba que não importa se a operação ou o resultado esteja no primeiro ou segundo membro, o sinal de igualdade terá o mesmo significado, além disso, poderão observar que na ordem " resultado = operação", um número pode ser decomposto na soma de dois números.

3) Analisando as igualdades: Após estas observações, o professor pode perguntar ao estudante: que relação podemos concluir entre os membros $8 + 2$ e $7 + 3$? Dessa forma o estudante irá concluir que $8 + 2 = 7 + 3 = 10$.

4) Generalizando: A partir dessa ideia, o professor poderá questionar os estudantes se existe outras formas de escrever o número 10 através da soma de dois números. Para esse item, o professor poderá dividir os estudantes em grupos, disponibilizando a cada grupo duas caixas de fósforos e feijões (poderia ser outro tipo de objeto, que dê para colocar dentro da caixa) que representarão as quantidades. Cada caixinha representará um dos números, onde uma será chamada de A e outra de B, de forma que somando as duas dê o valor 10. Poderia utilizar x e y, ao contrário de A e B, ou outras letras quaisquer.

O professor deve sugerir que à medida que vão fazendo as combinações, anote-as matematicamente conforme ilustra o Quadro 25. O professor poderá fazer alguns questionamentos quanto à possibilidade de não colocar nenhum feijão em uma caixinha, ou de inverter as caixinhas em cada uma das combinações. Após ser feita a tabela com todas as possibilidades, o professor trabalhará com as letras, de forma a generalizar estas somas, introduzindo o conceito de variável.

Quadro 25 - Possibilidades para a soma das caixinhas ser igual a 10

Caixa A	Caixa B	Linguagem matemática
0	10	$0+10=10$
1	9	$1+9=10$
2	8	$2+8=10$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A	B	$A+B=10$
Caixa B	Caixa A	Linguagem matemática
10	0	$10+0=10$
9	1	$9+1=10$
8	2	$8+2=10$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B	A	$B+A=10$

Fonte: produção do próprio autor

5) Resolvendo equações simples: O professor poderá também trabalhar com equações simples, encarando as letras como incógnitas, oportunizando os estudantes encontrarem intuitivamente as soluções, tendo em vista a tabela criada anteriormente. Como por exemplo:

a) $2 \cdot x = 8 + 2$,

b) $7 + 3 = 2 \cdot x + 2$.

5.2.8.2 Resolvendo equações em grupo

Esta atividade é uma adaptação da lição *Equations in Groups* (Equações em Grupos) criada por Candice Silberschatz do Departamento de Educação da Universidade de Tufts, baseada na abordagem de ensino *Early Algebra*, que trata de ensinar tópicos de Álgebra nas séries iniciais a partir do pensamento algébrico. Mediante problemas simples, cria-se um trabalho de grupo que oportuniza comparar diversas estratégias que cada estudante pode utilizar para a resolução de um problema. Dedica-se grande parte da atividade para que os estudantes expressem seus pensamentos, suas representações e soluções. O objetivo desta atividade é produzir outras equações equivalentes a partir de uma solução inicial, verificando sua validade para todas.

Esta atividade ajudará a minimizar as dificuldades em simplificar expressões algébricas (SExpA) e as dificuldades com a igualdade (Ig), tendo em vista que os estudantes irão discutir algumas mudanças que ocorrem em ambos os lados das equações sem alterar a igualdade ou a solução. Esta atividade pode ser aplicada a partir do 7º do Ensino Fundamental, já que é nesta etapa de ensino que se introduz a resolução e simplificação de equações, conforme a BNCC. A sequência definida para esta atividade segue abaixo.

1) Discutindo mudanças nas igualdades: Inicialmente o professor irá discutir com os estudantes algumas mudanças que podem ocorrer na igualdade, a partir de uma informação inicial (solução). Por exemplo, pode-se utilizar os nomes dos próprios estudantes e formular uma situação-problema envolvendo-os: Ana nos disse que possui $R\$\ 50{,}00$ e Marcos disse que possui a mesma quantidade que Ana. Este problema é muito simples, e imediatamente os estudantes concluem que Marcos e Ana possuem cada um $R\$\ 50{,}00$, no entanto o objetivo é que eles percebam se essa ideia inicial se mantem após as mudanças. E a partir dessa situação, implementar algumas transformações de modo que os estudantes decidam se, em cada etapa:

a) Marcos e Ana possuem quantias iguais de dinheiro;
b) O valor desconhecido representado pela incógnita permanece o mesmo.

O professor disponibilizará para os estudantes uma tabela, na qual em cada linha da tabela eles trabalharão em cima da equação da linha anterior, como sugerido no Quadro 26.

Quadro 26 - Discutindo situações de igualdade

EQUAÇÃO A			EQUAÇÃO B	
Dinheiro de Ana		**Dinheiro de Marcos**	**Linguagem Algébrica**	**Operação em cada lado da equação**

Dinheiro de Ana		**Dinheiro de Marcos**	**Linguagem Algébrica**	**Operação em cada lado da equação**
$50{,}00$	$=$		$50{,}00 = M$	[nenhuma]
	$=$			Adicionar 
	$=$			Adicionar 10
	$=$			Multiplicar por 2
	$=$			Subtrair 5
	$=$			Dividir por 3
				Elevar ao quadrado

Fonte: produzido pelo próprio autor, a partir da lição *Equations in Groups*[5]

O professor e os estudantes podem implementar várias outras transformações, como subtrair “carteiras”. Na equação final o professor orienta o estudante a desenvolvê-la ao máximo, e posteriormente pede para os estudantes irem simplificando até retornar à solução inicial. A tabela irá auxiliar, ajudando-os a enxergar as operações inversas que devem ser aplicadas em ambos os membros das equações. Esta atividade também mostra para o estudante que a letra pode ficar do lado direito, e que a sequência “ letra = número” não é um padrão.

2) Trabalho em grupo: O próximo passo é trabalhar em grupo, compostos por três estudantes cada, pedindo-lhes que criem equações com as mesmas soluções. Para isso os estudantes receberão uma tabela com instruções que devem ser seguidas, modificando a equação inicial, mantendo a igualdade e solução, conforme ilustra o Quadro 27.

Quadro 27 - Equações com as mesmas soluções

Inicie criando uma solução (equação), preenchendo um valor para S.		
Nível	Equação	Nome de quem escreveu a equação.
1	$S =$	
2		

[5] Disponível em: https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/dis play/EarlyAlgebraResources/Equations+in+Groups. Acesso em: 20 set. 2020.

Nível	Equação	Nome de quem escreveu a equação.
3		

Fonte: produzido pelo próprio autor, a partir da lição *Equations in Groups*[6]

Os estudantes começam por criar uma solução, dando uma valor para S, que pode até mesmo ser uma outra letra. A cada nível o estudante escreverá uma nova equação com base na do nível anterior, manteando a igualdade, ou seja, a mesma solução. A atividade anterior, onde foi discutido sobre igualdade, ajudará na criação destas novas equações.

3) Compartilhando tabelas entre grupos: Todos os grupos compartilharão suas tabelas, de maneira que analisem as tabelas dos outros grupos, respondendo as seguintes perguntas listadas no Quadro 28:

Quadro 28 - Discutindo sobre as equações

1- A equação 3 tem a mesma solução que a equação 1 e 2? Sim ou não? ______ Explique como você chegou a esta conclusão.
2- Se você escreveu “ sim” na questão anterior, descreva como as equações 2 e 3 foram feitas.
3- Se você respondeu não na questão 1, explique o que os estudantes fizeram de errado.

Fonte: produzido pelo próprio autor, a partir da lição *Equations in Groups*[7]

4) Discutindo entre a classe: Após cada grupo analisar as tabelas, o professor chamará o grupo à frente na lousa, para que cada estudante explique sua equação, dando liberdade a toda a sala para discutirem os possíveis erros e acertos. Neste momento o professor como mediador irá mostrar o que deveria ter sido feito, caso haja erros.

5) Exercícios de fixação: Para finalizar os estudantes receberão uma lista de exercícios fixando o que foi ensinado.

---

[6] Disponível em: https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/dis play/EarlyAlgebraResources/Equations+in+Groups. Acesso em: 21 set. 2020.
[7] Disponível em: https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/dis play/EarlyAlgebraResources/Equations+in+Groups. Acesso em: 21 set. 2020.

1- Escreva três equações distintas que possuam soluções iguais à da equação $\frac{x-3}{2} = 20.$

Justifique sua resposta.

2- Escreva três equações distintas que não possuam soluções iguais à da equação $\frac{x-3}{2} = 20.$

Explique por que as soluções são diferentes.

3- Decida se as duas equações a seguir são equivalentes (possuem a mesma solução):

a) $8n = 5n + 3$;

b)$8n - 3 = 5n + 3 - 3.$

Em caso afirmativo, aplique operações em ambos os lados das equações mostrando como pode-se transformar a equação a) em b), e a equação b) em a).

4- Decida se as duas equações a seguir são equivalentes (possuem a mesma solução):

a) $4\,n + 2 = \frac{3n}{4} + 5;$

b) $16n + 8 = 3n + 20.$

Em caso afirmativo, mostre o que deve ser feito (quais operações devem ser aplicadas) para transformar a equação a) em b), e a equação b) em a).

Portanto, através desta atividade os estudantes compreenderão que uma equação é simplificada através de operações aplicadas igualmente em seus membros. Oportunizando-os a deduzir que é possível aplicar convenientemente operações inversas para que se encontre uma solução, que na verdade é uma equação simplificada. A partir da compreensão e memorização destes conceitos, os estudantes poderão com mais facilidade simplificar diversas expressões algébricas, com igualdade, através de operações inversas.

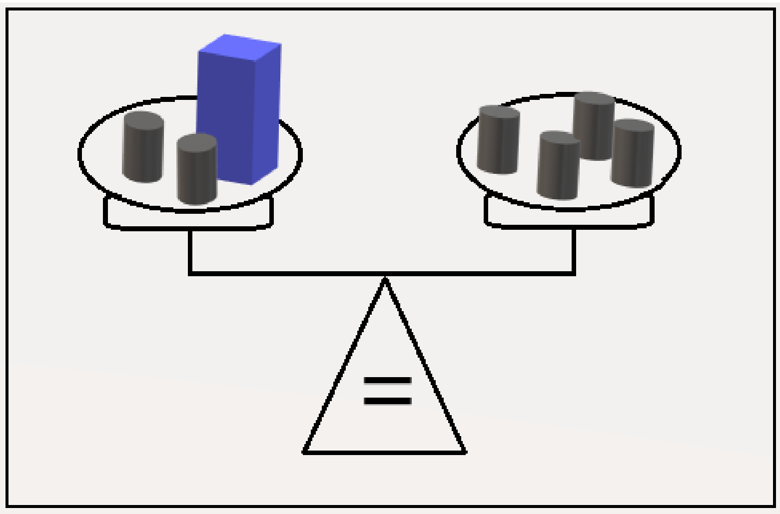
5.2.8.3 A igualdade e a balança

Esta atividade tem o objetivo de apresentar o conceito de igualdade a partir da ideia de equivalência, que é muito importante para os estudantes compreenderem a resolução de equações, bem como suas simplificações. Dessa forma esta atividade ajudará a minimizar as dificuldades que os estudantes possuem com a noção de igualdade (Ig) e as dificuldades subjacentes com as simplificações de expressões algébricas (SExpA). Este tipo de atividade se fundamenta nas conceções de Educação Algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), e letrista facilitadora de Lins e Gimenez (2001), as quais utilizam materiais concretos, como balanças e gangorras para descrever situações algébricas. Entretanto, ressaltamos a limitação do uso da balança quando tratamos de equações que possuem como soluções valores negativos, como por exemplo em $2x + 100 = 20$, tendo em vista que as balanças não operam com valores negativos. No entanto, o professor poderá trabalhar muitos exemplos de equações, utilizando-as em sala de aula.

Esta atividade pode ser trabalhada desde o 7º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, visto que muitos estudantes desta etapa de ensino têm dificuldades em resolver equações simples, e ainda insistem nos mesmos erros ao usar a transposição como método de resolução. As questões podem ser adaptadas para níveis mais avançados, se for necessário. A sequência de etapas para essa atividade é proposta como segue abaixo.

1) Igualdade como equilíbrio: A balança deve ser apresentada aos estudantes como metáfora do sinal de igualdade, como ilustra a Figura 30.

Figura 30 - Balança representando a ideia de equivalência



Fonte: produção do próprio autor

Após isso, propor aos estudantes alguns questionamentos:

a) O que é uma balança?

b) Quando uma balança está em equilíbrio?

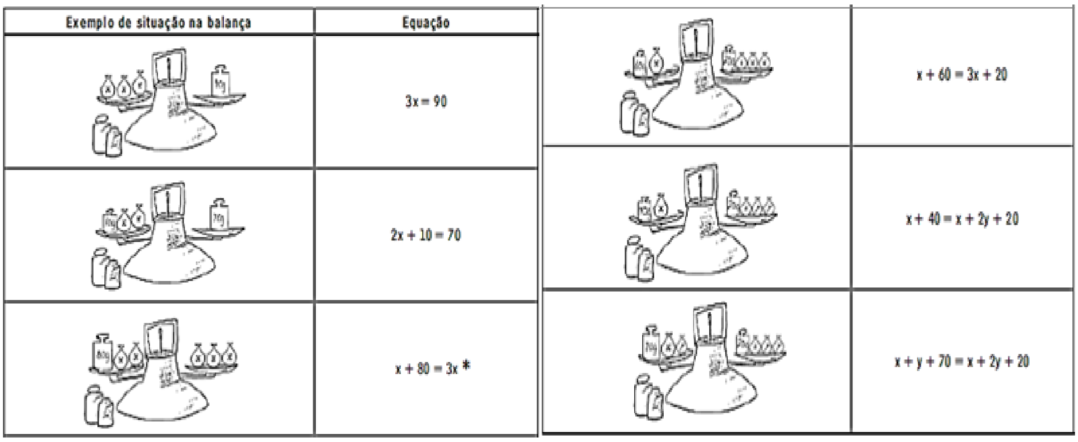
c) Na sua opinião, como podemos definir uma igualdade?

d) Sabendo que a balança da Figura 29 está em equilíbrio, podemos então definir uma igualdade? Consegue escrever isso matematicamente?

2) Confecção da Balança: O próximo passo é os próprios estudantes juntamente com o professor, confeccionarem a balança, de maneira que eles participem no processo de construção do conhecimento. O professor deve propor várias situações, como por exemplo, mostrar que se algo for retirado de um lado e não for igualmente retirado do outro, o equilíbrio não permanece. Também mostrar que se for colocado ou retirado igualmente nos dois lados da balança o equilíbrio ainda se mantém. Essa ideia da balança como equivalência, ficará fácil de ser transmitida para as equações e o sinal de igualdade, fazendo com que seja natural para o estudante ao resolver as equações aplicar as mesmas operações em ambos os lados dela. Deve também ser proposto aos estudantes que eles mesmos criem situações de equilíbrio através da balança, dando a eles vários objetos de pesos e formatos diferentes para que sejam experimentados. Em cada situação criada, os estudantes deverão anotar suas experiências em linguagem algébrica, fazendo a ligação do real para o simbólico.

3) Escrevendo as equações: Para iniciar a atividade o professor disponibilizará para cada estudante vários modelos de balanças descrevendo diferentes equações. Os estudantes terão que decifrar as equações que descrevem cada situação apresentada pela balança, escrevendo-as assim ao lado, conforme ilustra a Figura 31.

Figura 31 - Equações representadas por balanças



Fonte: Adaptada de Meira (2003. p. 24)

* A equação correta referente ao terceiro exemplo de situação na balança é $2x + 80 = 3x$.

4) Trabalhando com igualdades e desigualdades: Após discutir e comparar objetos e pesos, o professor poderá desafiá-los a resolver problemas envolvendo os sinais de igualdade e desigualdade, como exemplificado no Quadro 29.

Quadro 29 - Estabelecendo relações

X	$>$	Y
$X + A$	$???$	Y
X	$=$	Y
$X - A$	$???$	$Y - A$

Fonte: produzido pelo próprio autor

Durante as questões propostas nesta atividade, os estudantes talvez resolvam algumas equações e relações testando hipóteses para os valores das incógnitas, o que pode ser positivo por dar-lhes familiaridade com a balança. Contudo, o professor deve incentivar os estudantes a sempre que possível também escrever as equações que representem as situações na balança, aliando estratégias aritméticas com a modelagem algébrica.

5.2.9 Atividades relacionadas ao raciocínio

Estas atividades podem ser aplicadas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, visto que não precisam necessariamente de expressões algébricas para seu desenvolvimento. O professor pode utilizá-las para estimular o trabalho em grupo, de maneira que os estudantes compartilhem suas ideias de resolução, concordando e discordando de seus colegas, ao passo que juntos tentam encontrar uma linha de raciocínio que seja válida. Assim, o objetivo destas atividades é levar os estudantes a interpretar os dados do enunciado, de maneira que consigam exprimir seu pensamento de forma escrita e oral. Dessa forma ajudará a sanar as dificuldades em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), e as dificuldades em pensar (P), visto que irão desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo ao ler e analisar as afirmações apresentadas, e delas tirar conclusões significativas. Apresentaremos nesta seção duas atividades: A travessia do rio, e O problema dos Gêmeos e o juízo final.

5.2.9.1 A travessia do rio

Esta atividade é baseada em um problema conhecido como “Problema da Travessia do Rio”, que consiste em 8 pessoas precisarem atravessar um rio utilizando um pequeno barco. O desafio está justamente em atravessar essas pessoas para a outra margem do rio, visto que existe uma série de restrições que devem ser obedecidas para conseguir cumprir a missão. É uma atividade de lógica que necessita que o estudante raciocine sobre as diferentes formas de atravessar as pessoas, levando em conta cada uma das regras. Segue abaixo o enunciado do problema descrito no Quadro 30.

Quadro 30 - Enunciado do problema da travessia do rio

Na margem sul de um rio encontram-se oito pessoas: um médico e seu paciente com distúrbio mental, o senhor João e seus dois filhos, e a senhora Maria e suas duas filhas. Todos eles querem atravessar o rio para a margem norte, no entanto para efetuar a travessia é necessário seguir algumas regras: *I. Existe apenas um barco e esse barco pode transportar apenas duas pessoas de cada vez;* *II. Somente o senhor João, a senhora Maria e o médico sabem manobrar o barco;* *III. Os filhos do senhor João não podem ficar com a senhora Maria sem a presença do pai, em nenhuma das margens do rio;* *IV. As filhas da senhora Maria, não podem ficar com o senhor João sem a presença da mãe, em nenhuma das margens do rio;* *V. O paciente não pode ficar sozinho com os pais/e ou os filhos sem a presença do médico.* *Como então deverão proceder para atravessar o rio?*

Fonte: produção do próprio autor

Durante a resolução deste problema os estudantes podem se deparar com várias dificuldades, como:

- Não compreender que o problema propõe que o barco suporta apenas 2 pessoas de cada vez, e insistir em levar mais pessoas;
- Não enxergar uma estratégia para atravessar os filhos do senhor João de maneira que não fiquem com a senhora Maria, na ausência do pai; e da mesma forma para as filhas da senhora Maria;
- Não compreender que o paciente pode ficar sem o médico em uma das margens do rio, se não tiver mais ninguém com ele;
- Não compreender que os filhos podem ficar juntos com o médico e o paciente em uma das margens do rio na ausência do senhor João e também da senhora Maria;
- Não compreender que qualquer um dos filhos pode atravessar com o médico;
- Não verificar se seu plano de resolução satisfaz as condições.

Quando os estudantes se deparam com estas dificuldades, eles devem novamente verificar as condições do problema para ver se as estão atendendo ou não. O professor deve intervir instigando-os a ler novamente o enunciado do problema, ajudando-os a identificar os dados e restrições, a pergunta do problema e os possíveis caminhos para respondê-la.

Para representar a solução é necessário que o estudante faça um registro que pode ser através de uma tabela ou esquema. Abaixo apresentaremos uma sequência adequada de fazer essa travessia.

1º) O médico e o doente atravessam o rio, e somente o médico retorna;

2º) O médico atravessa com um dos filhos do senhor João e retorna com o doente;

3º) O senhor João atravessa com o outro filho e retorna sozinho, deixando os seus dois filhos na outra margem;

4º) O senhor João e a senhora Maria atravessam juntos, e somente a senhora Maria retorna;

5º) O médico atravessa com o doente, e o senhor João retorna sozinho;

6º) Novamente o senhor João e a senhora Maria atravessam juntos, e somente a senhora Maria retorna;

7º) A senhora Maria atravessa com uma das filhas, e o médico com o doente retornam juntos;

8º) O médico atravessa com a outra filha da senhora Maria, deixando o doente sozinho, e retorna;

9º) O médico e o doente atravessam o rio.

Não existe uma única forma de resolver este problema, oportunizando os estudantes a construírem e descontruírem ideias. Ao utilizar desenhos, a escrita, a oralidade e argumentação para esboçar sua resposta, o estudante busca expressar seu raciocínio através de algum tipo de linguagem, ajudando assim a desenvolver o pensamento algébrico.

5.2.9.2 O problema dos Gêmeos e o juízo final

Esta atividade se trata de um problema de lógica, no qual os estudantes deverão avaliar uma situação envolvendo um homem que é preso junto com dois gêmeos: um sempre fala a verdade e o outro sempre mente. Segue o enunciado do problema no Quadro 31.

Quadro 31 - Enunciado do problema dos Gêmeos e o Juízo Final

Um homem vai para a prisão e acaba partilhando a cela com gêmeos. Um dos gêmeos diz sempre a verdade e o outro mente sempre. A cela possui além da porta de entrada, duas portas, uma que vai para o céu e outra para o inferno. O homem quer ir para o céu e os gêmeos sabem qual é a porta que leva ao céu. O homem só tem direito de fazer uma pergunta e ele não sabe qual dos gêmeos diz sempre a verdade. Qual pergunta ele deve fazer para garantir a sua ida para o céu?

Fonte: produção do próprio autor

Os estudantes terão que lidar mentalmente com as informações disponíveis, encontrando relações de causalidade entre elas, tornando possível tomar decisões que solucionam a situação. Para resolver esta situação o estudante deve perceber que não é informado inicialmente qual dos gêmeos mente e qual diz a verdade. Se perguntar para os gêmeos qual é a porta que leva para o céu, ambos darão respostas diferentes. Para resolver então este problema, é necessário que a pergunta colocada aos gêmeos produza a mesma resposta, independentemente a quem a pergunta é feita. Portanto, a pergunta que o homem deve fazer para garantir sua ida ao céu é: **Se você fosse seu irmão, qual porta você indicaria como sendo a que leve ao céu?** Assim temos duas situações que podem ocorrer:

1º Situação: Se a pergunta é feita ao gêmeo mentiroso, este apontará para a porta que leva ao inferno, dado que seu irmão (que fala sempre a verdade) apontaria para a porta que leva ao céu;

2º Situação: Se a pergunta é feita ao gêmeo que sempre fala a verdade, este também apontará para porta que leva ao inferno, dado que seu irmão (que sempre mente) sempre apontaria a porta do inferno como sendo a do céu.

Assim a solução seria o homem escolher a porta contrária àquela que um dos gêmeos apontou, visto que os dois indicariam a porta que leva para o inferno como sendo a porta que o seu irmão gêmeo diria como sendo a do céu.

Através da análise que fizemos das dificuldades nessa seção, foi possível elaborarmos as atividades supramencionadas. Esperamos que fique claro ao leitor a preocupação destas atividades em ajudar os estudantes a verem sentido e significado no aprendizado da Álgebra. Elas também ajudarão outros professores que anseiam por soluções e sugestões para as barreiras que se impõem no ensino desta importante disciplina, contornando assim as dificuldades apresentadas nesta pesquisa. Interessante também salientarmos que as atividades que aqui foram desenvolvidas, podem ser adaptadas de acordo com as séries e contextos que os estudantes se inserem. Portanto, concluímos esta seção de nossa pesquisa com o sentimento de satisfação, por adquirir/produzir conhecimentos que possam contribuir com a Educação Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, procurou-se apresentar as principais dificuldades existentes no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, servindo de embasamento para propor mudanças no atual cenário de educação.

Através desta pesquisa bibliográfica, constatamos que não há outra forma de melhorar o ensino de Álgebra, a não ser o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este pensamento, ao contrário do que muitas vezes é suposto, não se desenvolve apenas pelo simbolismo algébrico, mas está intimamente ligado com diversas formas de linguagens. Além disso, vimos a importância da linguagem e pensamento algébricos, onde o desenvolvimento de ambos deve ser enfatizado a partir de uma relação de subsistência e não de subordinação. Dessa forma, o pensamento algébrico se desenvolve à medida que se estimula o raciocínio e, em especial, busca-se generalizar situações, expressando-as através de alguma forma de linguagem.

Procurando mostrar como a Álgebra estava/está inserida nos currículos escolares, pesquisamos as diferentes conceções de Álgebra e Educação Algébrica que se firmaram ao longo do tempo, nos ajudando a compreender os aspectos históricos que influenciaram no desenvolvimento do ensino de Álgebra. Além disso, apresentamos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para as etapas de ensino Fundamental e Médio. Isso nos permitiu entender as mudanças que foram feitas mediante a implementação da BNCC, especialmente no que tange à introdução da Álgebra (pré-Álgebra), onde na BNCC acontece desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ao contrário dos PCN. Assim, a introdução dos símbolos na Álgebra deve ser feita de uma forma que os estudantes reconheçam a correspondência que há com a realidade. Acreditamos que o ensino de Álgebra deve primeiro buscar significados, estimular a capacidade da interpretação de problemas e raciocínio-lógico, procurando esclarecer o sentido dos símbolos.

Uma tentativa de descobrir as causas do mau desempenho dos estudantes no processo de aprendizagem de Álgebra, é identificar as dificuldades que surgem nesta matéria. Conhecer tais dificuldades é muito importante, ao passo que fornecem ao professor informações sobre a maneira que os estudantes interpretam e compreendem os conceitos algébricos, além de dar a possibilidade de diagnosticá-las, para que assim seja possível montar planos de ações para minimizá-las. Nesse sentido, o objetivo principal desta pesquisa possuía dois aspectos centrais:
i) descobrir quais são as dificuldades que os estudantes possuem no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra;
ii) propor atividades que possam ajudar a minimizar estas dificuldades.

Deste modo, esta pesquisa nos embasou teoricamente para poder analisar qualitativamente as dificuldades que encontramos. Assim, sintetizamos as dificuldades em 10 categorias e propomos 13 fatores dificultadores, os quais foram encontrados na literatura e/ou observados mediante a minha experiência profissional. Alcançamos, portanto, o primeiro aspecto do objetivo principal que era de identificar estas dificuldades. Posteriormente, mostramos como estes fatores dificultadores originam as dificuldades, e assim sendo possível relacioná-las de modo a verificar que certas dificuldades podem originar outras. Essa verificação foi muito importante, tendo em vista que o segundo aspecto do objetivo principal desta pesquisa foi o de produzir atividades para sanar as dificuldades encontradas. De tal modo que, uma mesma atividade pode ajudar a minimizar mais de uma dificuldade, levando em conta as várias relações existentes entre elas, conforme já explicado anteriormente. Nesse sentido, como uma certa dificuldade influi na origem de outras, foi possível elaborar atividades que evidenciam essa relação, enfatizando as dificuldades que mais se relacionam, alcançado assim em totalidade o objetivo principal supramencionado, que norteou toda esta pesquisa.

Como já apresentado na Seção 5, referente aos resultados deste trabalho, constatamos que a dificuldade em Memorizar (Mem) influi na origem de muitas dificuldades. Isso nos mostra a importância de se enfatizar atividades que instigam a capacidade de memorização, a partir da compreensão e significação de situações e conceitos. Foi possível constatar também que as dificuldades em traduzir da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa (LEvsLA) tinham fatores dificultadores em comum com as dificuldades em entender o que lê e exprimir o que pensa (EEP), dificuldade em interpretar as letras (IL) e as dificuldades em pensar (P).

Além disso, vimos que as dificuldades em utilizar fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP) têm fatores dificultadores em comum com as dificuldades em ver utilidade naquilo que é ensinado (Ut) e as dificuldades relativas à generalização (G). Outro resultado importante que encontramos nesta pesquisa, foi que a dificuldade em simplificar expressões algébricas (SExpA) e a dificuldade com a noção de igualdade (Ig) possuem muitos fatores originadores em comum, além disso elas podem influenciar diretamente na origem das dificuldades com fórmulas, propriedades e procedimentos (FPP).

Com certeza, este trabalho ajudará outros professores que também buscam melhorar o ensino de Álgebra, pois possibitar-lhes-á conhecer além das dificuldades, os erros mais frequentes cometidos neste processo. E desta forma, poder preveni-los através das sugestões que aqui foram apresentadas. Além disso, as atividades propostas neste trabalho permeiam desde as séries do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, permitindo o professor adaptá-las à sua realidade. Sem sombras de dúvidas, estas atividades servirão como subsídio didático, ajudando a desenvolver o pensamento e linguagem algébricos com o objetivo de sanar as dificuldades.

Peço licença ao leitor para falar-lhe em primeira pessoa, com o objetivo de expor como foi enriquecedor desenvolver este trabalho de dissertação. Ao olhar para trás e lembrar dos questionamentos que motivaram esta pesquisa, hoje vejo que não só foi possível propor soluções para tais, mas além disso, pude mudar minha visão sobre o ensino de Álgebra. Nesse sentido, aprendi que a Matemática deve levar significado à vida de nossos alunos, como uma forma de ler e dialogar com o mundo. No entanto, antes disso, tive que "olhar" o ensino de Álgebra sob novas lentes: aquelas que traduzem a matemática como uma ferramenta democrática e libertadora, pela qual o aluno é impulsionado a refletir criticamente sobre problemas e situações, sejam eles reais ou não, como sujeitos que participam ativamente do processo de ensino.

Muito mais que aprender a/para ensinar, eu aprendi a/para aprender, ou seja, percebi o que já dizia Freire (1996), que o aprender e o ensinar subsistem, não existindo docência sem discência, e deste modo nós educadores assumimos uma condição de eternos aprendizes. Como diz o próprio Paulo Freire, apesar da real diferença entre educador e educando, deve-se ter consciência desde o início do processo de ensino-aprendizagem que, "quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado" (FREIRE, 1996, p. 25). Para isso, por meio desta pesquisa, reconheci que devo ser mais que um mero transmissor de conhecimentos, mas criar as possibilidades para que tais conhecimentos possam ser construídos ou produzidos, e é através dessa nova postura que pretendo ajudar meus atuais/futuros alunos, a se situarem como sujeitos produtores do saber e artesãos do seu próprio conhecimento.

Este trabalho dá grande margens para pesquisas futuras, em especial de campo, onde será possível constatar quantitativamente a melhora no desempenho dos estudantes através das atividades que propomos, e também a existência das relações supramencionadas entre as dificuldades.

Portanto, cabe a nós professores, sempre refletirmos sobre os aspectos que envolvem o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, analisando as dificuldades existentes e suas respectivas causas, para assim a partir delas, traçar meios úteis de ajudar os estudantes a superá-las.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. As Lacunas do Ensino de Álgebra no Ensino Fundamental: uma análise a partir da transposição didática. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 12., 2016, São Paulo. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades.** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/naais/comunicacoes-cientificas-4.html. Acesso em: 21 abr. 2020.

ALVARENGA, D.; VALE, I. A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, Viana do Castelo, Portugal, v. 16, n. 1, p. 27-55, 30 jun. 2007.

ARAUJO, E. A. de. Ensino de Álgebra e Formação de Professores. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, s.l., v. 10, n. 2, mar. 2008.

ARCAVI, A. Reflexiones sobre el algebra escolar y su enseñanza. *In*: RICO, L. et al. (eds.) **Investigación en Didáctica de la Matemática**: homenaje a encarnación castro. Granada, Espanha: Editorial Comares, 2013. p. 13-22.

AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology**: a cognitive view. Nova York: Holt, Rinehart And Winston, 1968. 685 p. Disponível em: https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.112045/page/n3/mode/2up. Acesso em: 08 nov. 2020.

BARBOSA, A. C. C. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais**: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico. 2009. 484 f. Tese (Doutorado em Matemática Elementar) - Universidade do Minho, s.l., 2009.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para o Uso em Sala de Aula: Álgebra**. São Paulo: Atual, 1992.

BECHER, E. L.; GROENWALD, C. L. O. Erros Algébricos de Estudantes do 1º ano do Ensino Médio. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. s.l., SBEM, 2010. p. 1-10. Disponível em: http://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/?info_type=home&lang_user=. Acesso em: 29 abr. 2020.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da Álgebra**: uso da linguagem e do pensamento algebrico como ferramenta de aprendizagem na educacao basica. 2016. Dissertacao (Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional – PROFMAT) – polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. Traducao de: Hygino H. Domingues. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org). As **ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. *In*: VALE, I.; BARBOSA, A. (org.). **Patterns-Multiple perspectives and Contexts in Mathematics Education**. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões., 2009. p. 59-68.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Lisboa, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Primeiro e segundo ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. 58 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Educacionais (PCN+): Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2002. 141 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão Final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br /images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 jul 2020.

CARMO, P. F. do. Generalização de padrões nos livros didáticos do ensino fundamental - uma análise do desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: Encontro Nacional De Educação Matemática (ENEM), 11., 2013, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba, PR: SBEM, 2013. p. 1-10. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/265_ 1344_ID.pdf. Acesso em: 28 maio 2020.

CARMO, P. F. do. **Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental**. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

CARMO, P. F. do; BIANCHINI, B. L. A Introdução da linguagem nos Livros Didáticos através da Generalização de Padrões. *In*: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 6., 2013, Canoas. **Anais [...].** Canoas: Ulbra, 2013. p. 1-9. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1224/61. Acesso em: 12 mai. 2020.

CHARPENTIER, J. **Apprentissage de la lecture et développement de la pensée logique**. Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

CIVINSKI, D. D; BAIER, T. O sinal de igualdade: dificuldades encontradas por estudantes do ensino fundamental. *In*: Simpósio Nacional De Ensino de Ciência e Tecnologia, 6., 2014, Ponta Grossa. **Anais [...].** Ponta Grossa - PR: UTFPR, 2014. p. 1-11. Disponível em: http://www.sinect.com.br/anais2014/ensino-de-matematica.html. Acesso em: 11 nov. 2020.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da Álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n.94, p. 171-187, 2018.

CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - CONEDU, 7., 2020, Campina Grande. **Anais**. Disponível em: https://editorarealize.com.br/edicao/detalhes/anais-vii-conedu---edicao-online.

CUNNINGHAM, A. E.; STANOVICH, K. E. What reading does to the mind? **Journal of Direct Instruction**, [s. l.], v. 1, n. 2, p. 137-149, 2001.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. n 2. Brasilia. 1989, p. 15-19.

EGODAWATTE, G. Is algebra really difficult for all students? **Acta Didactica Napocensia**, Cluj-napoca, Romênia. v. 2, n. 4, p. 91-100, 31 dez. 2009.

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico 2010 – 2011. **Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.** Setúbal: PFCM-ESSE/IPS, 2008/2009.

FALCÃO, J. T. R. Alfabetização algébrica nas séries iniciais: como começar? *In*: **Boletim O Salto para o Futuro** – TV ESCOLA: MEC, Maio/2003. p. 9-18. Disponível em: https://cdnbi.tvescola.org.br/contents/document/publica tionsSeries/110456Educa caoAlgebricaResolucaoProblemas.pdf. Acesso em: 12 ag 2020.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pro-posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-brasileiro**: investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

FLÔRES, O. C.; CARDOSO, R. M. Leitura e memória. **Revista Investigações**, [s.l.], v. 27, n. 2, p. 1-37, jul. 2014. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/INV/article/viewFile /485/944. Acesso em: 23 jan. 2021.

FOLHA DE SÃO PAULO. **Ministério da Saúde alerta hospitais sobre pico do Coronavírus.** São Paulo, 11 fev. 2020. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/ equilibrioesaude/2020/03/casos-de-coronavirus-devem-comecar-a-crescer-exponencialmente-no-brasil.shtml. Acesso em: 31 ago. 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 20008.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GIL, K. H.; FELICETTI, V. L. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da Álgebra por Estudante da 7ª Série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju, v. 1, n. 1, p. 19-35, 17 ago. 2016.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

GOMES, M. L. M. **Álgebra e Funções na Educação Básica**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 72 p.

GONÇALVES, J. A. **Dificuldades dos Alunos que Iniciam o Estudo da Álgebra.** 2013. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) -Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas, 2013.

GRANELL, C.G. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. *In*: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (org.). **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 2003.

HANKE, T. A. F. **Padrões de regularidades**: uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. 2008. 212 f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

JACOMELLI, K. Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica**: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental. 2006. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis-SC, 2006.

KINTSCH, W.; GREENO, J. G. Understanding and solving arithmetic word problems. **Psychological Review**, [s. l.], v. 92, n. 1, p. 109-129, 1985.

KOPNIN, P.V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução de: Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização, 1978.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no ensino médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. 358 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, A. A.; SILVA, R. C. Um estudo significativo de expressões algébricas e equações. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, Cajazeiras, n. 2, p. 471-479, set. 2017. Suplementar.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001. 176 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MEIRA, L. Significados e modelagem na atividade algébrica. *In*: **Boletim O Salto para o Futuro** – TV ESCOLA: MEC, Maio/2003. p. 19-26. Disponível em: https://cdnbi.tvescola.org.br/contents/document/publicationsSeries/110456EducacaoAlgebricaResolucaoProblemas.pdf. Acesso em: 12 ag 2020.

NESHER, P.; KATRIEL, T. A semantic analysis of addition and aubtraction word problems. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 8, n. 3, p. 251-269, 1977.

OLIVEIRA, S. C; LAUDARES, J. B. Pensamento algébrico: uma relação entre Álgebra, aritmética e geometria. *In:* encontro mineiro de educação matemática, 7., 2015, São João Del-

Rei. **Comunicações científicas.** São João Del-Rei: SBEM-Mg, 2015. p. 1-10. Disponível em: https://www.ufjf.br/emem/programacao/comunicacoes-cientificas/cc-textos-completos/. Acesso em: 11 nov. 2020.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do Pensamento e da Linguagem Algébrica de estudantes**: indicadores para a organização do ensino. 2008. 179 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PEREIRA, C. A.; Dificuldades do ensino da Álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. **R. Eletr. Cient. Inov. Tecnol, Medianeira**, v. 8. n. 15, 2017. E – 5047. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/recit. Acesso em: 12 nov. 2020.

POLYA, G. **How to solve It**. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1957. 253 p. Disponível em: https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf. Acesso em: 20 jul 2020.

PONTE, J. P. **Álgebra no currículo escolar**. Educação e Matemática, n. 85, 2005.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. *In*: VALE, I. et al. (eds.) **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 5 – 27.

PONTE, J. P. at. al. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC, 2007.

PROGRAMA DE AVALIAÇÃO INTERNACIONAL DE ESTUDANTES DA OCDE-**PISA**: Itens liberados de Matemática. Instituto Nacional de Estatísticas Educacionais – INEP, Brasília, 2012. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/acoesinternacionais/pisa /provas. Acesso em: 26 jul 2020.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. *In*: RICO, L. et al. (eds.) **Investigación en Didáctica de la Matemática**: homenaje a encarnación castro. Granada, Espanha: Editorial Comares, 2013. p. 3-12.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

RODRIGUES, L. L. **A Matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano**. Brasília: UCB, 2005.

SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. 231 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

SANTOS, L. M. **Conceções do professor de matemática sobre o ensino de Álgebra.** 2005. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SBRANA, M. F. C. et al. A Álgebra da educação básica vista por alunos concluintes do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,12º, 2016, São Paulo. **Anais [...].** [S.I.]: SBEM, 2016. p. 1-13. Disponível em: http://www.

sbembrasil.org.br/enem2016/anais/comunicacoes-cientificas-1.html. Acesso em: 14 abr. 2020.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SCHNEIDER, A. **A aprendizagem da Álgebra nos anos finais do ensino** fundamental. 2013. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
SESSA, C. **Iniciación al estúdio didáctico del Álgebra**: orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005. 128 p. (Formación docente – Matemática).

SILBERSCHATZ, C. **Equatons in Groups**. Medford, MA, 15 fev. 2010. Disponível em:https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Equations+in+Groups. Acesso em:18 ag 2020.

SILVA, J. T. et al. As conceções de Álgebra e de educação algébrica: uma análise de livros didáticos do 8º ano. **Revista Profissão Docente**, Uberaba, v. 15, n. 33, p. 127-145, ago. - Dez. 2015. Disponível em: http://www.revistas.uniube.br/index.php/rpd /article/view/1014/1197. Acesso em: 14 jun. 2020.

SILVA, V. A. Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. **Revista Brasileira de Educação**, [s.l.], v. 13, n. 37, p.150-161, abr. 2008.

SOCAS, M. M.; CAMACHO M.; HERNANDEZ J. Analisis Didactico Del Lenguage Algebraico En La Enseñanza Secundaria**. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado: didácticas de las matemáticas para los profesores de educación secundaria**, n. 32, p.73-86, mai. 1998.

SOISTAK, M. M.; PINHEIRO, N. A. M. Memorização: atual ou ultrapassada no ensino-aprendizagem da matemática? *In*: Simpósio nacional de ensino de ciência e tecnologia, 1., 2009, Ponta Grossa. **Anais [...].** Ponta Grossa-PR: UTFPR, 2009. p. 971-983. Disponível em: http://www.sinect.com.br/ anais2009/. Acesso em: 12 nov. 2020.

SORTISSO, A. F. Considerações iniciais de uma professora em formação sobre o ensino da Álgebra. **Revista da Graduação**, Porto Alegre, RS, p.1-11,2011.

SOUZA, M. C. **O ensino de Álgebra numa perspectiva logico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 285 f. Tese (Doutorado em Educação matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas,SP, 2004.

STOCCO, A. C. A Álgebra e suas dificuldades no ensino médio. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014**. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE).

THOMAS, D. A. Reading and Reasoning skills for math problem solvers. **Journal of Reading**, [s. l.], v. 32, n. 3, p. 244-249, 1988.

TRUJILLO, E. S. G. **Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico:** El significado de la variable.: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas. 2012. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Nacional de Colômbia, Bogotá, 2012.

USISKIN, Z. Conceções sobre a Álgebra da Escola Média e utilização de variáveis. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, I. P. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 64-81, 16 dez. 2013. Semestral. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2013v8n2p64. Acesso em: 12 nov. 2020.

VELOSO, D. S.; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra. *In*: X Semana da Matemática e II Semana da Estatística, 10., 2010, Ouro Preto. **Revista da Educação Matemática da UFOP.** Ouro Preto: Editora da UFOP, 2010. p.59-65.

VELOSO, D. S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental**: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. 2012. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

VOISIN, Y. S. Introdução à aprendizagem da Álgebra e suas conseqüências no ensino. **SAPIENS**, Caracas, v. 12, n. 1, p. 122-142, jun. 2011.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

APÊNDICE A – ARTIGO REFERENTE A DISSERTAÇÃO PUBLICADO

Conedu VII Congresso Nacional de Educação
ISSN 2358-8829
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA MINIMIZAR AS DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Eduardo José de Oliveira Estevão[1]
Tânia Maria Nunes Gonçalves[2]

RESUMO

Este artigo é resultado de uma pesquisa de dissertação, que objetiva descobrir as principais dificuldades que os estudantes possuem no processo de ensino e aprendizagem de álgebra, em especial encontrar soluções para as mesmas, nas perspectivas do desenvolvimento do pensamento algébrico e nas conceções de álgebra e educação algébrica, através da elaboração de atividades. Para determinar estas dificuldades realizou-se uma pesquisa bibliográfica de caráter descritivo e exploratório, objetivando caracterizar e explicar a origem de tais erros recorrentes no ensino de álgebra. Seguindo uma abordagem qualitativa, esta pesquisa também se preocupou em estabelecer relações entre as dificuldades, no sentido de estruturar atividades que possam minimizá-las. A partir disso, desenvolveram-se atividades das quais apresentam-se duas neste artigo, envolvendo a construção do círculo trigonométrico e padrões de sequências numéricas, com o intuito principal de desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes.

Palavras-chave: Dificuldades. Conceções de Álgebra. Pensamento Algébrico. Círculo Trigonométrico. Sequências numéricas.

INTRODUÇÃO

É evidente as dificuldades que os estudantes trazem desde o Ensino Fundamental, relacionadas ao ensino de matemática, que ficam ainda mais percetíveis quando se trata de álgebra. A álgebra na maioria das vezes é encarada apenas como um ramo da Matemática que se preocupa em encontrar o *x* da questão. Isso remete à conceção que estudantes e até mesmo professores possuem, de que ensinar álgebra significa apenas manipulações matemáticas e simplificações de expressões. O ensino de álgebra envolve outros aspectos, nomeadamente, o desenvolvimento do pensamento algébrico. Portanto, o objetivo principal da pesquisa aqui apresentada foi a criação de atividades simples que resolvem dificuldades que os estudantes possuem na aprendizagem de álgebra, em particular a dificuldade em raciocinar.

Na seção *Metodologia* será explicado o procedimento empregue para determinar as dificuldades que estudantes têm relativamente à álgebra, de modo a possibilitar a criação de atividades focadas em solucioná-las. Na seção *Referencial Teórico* serão expostas as conceções da álgebra e da educação algébrica nas quais essas jazem. Na seção *Resultados e*

---
[1]Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de Catalão – UFCAT, eduestevao@hotmail.com.
[2]Professora orientadora: Doutora em Matemática Aplicada, University of Kent – Reino Unido, t.m.n.goncalves@ufg.br.

Discussão serão apresentadas duas atividades desenvolvidas para sanar algumas dificuldades apresentadas, em especial para estimular o pensamento algébrico. Conclui-se o artigo com considerações finais sobre o desenvolvimento de atividades voltadas à eliminação das dificuldades encontradas pelos estudantes no estudo de álgebra.

METODOLOGIA

Para fazer a pesquisa, de foro descritivo, apresentada neste artigo, procedeu-se a um levantamento bibliográfico sobre estudos que tratam dos temas *Dificuldades no Ensino e Aprendizagem de Álgebra*, *Conceções de Álgebra* e *Pensamento Algébrico*. Em seguida, fazendo uma pesquisa exploratória do material colhido, foi possível elaborar atividades que ajudam a resolver as dificuldades encontradas, das quais duas são apresentadas aqui.

REFERENCIAL TEÓRICO

A álgebra é um importante ramo da matemática que relaciona muitos conceitos, fórmulas e propriedades, úteis para as mais diversas atividades humanas e científicas. Para entender-se melhor como a álgebra é/foi encarada durante toda sua evolução, é necessário estudar suas diferentes conceções.

Usiskin (1995) define quatro conceções da álgebra segundo o papel atribuído à variável e a importância dada aos seus diversos usos: a álgebra como aritmética generalizada, a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a álgebra como estudo de relações entre grandezas e a álgebra como estudo de estruturas. Na primeira conceção, *álgebra como aritmética generalizada*, a variável é encarada como generalizadora de padrões. Na segunda conceção, *álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, ao contrário da primeira conceção, as variáveis são encaradas como incógnitas, ou seja, um termo desconhecido que se pretende determinar. Na terceira conceção, *álgebra como estudo de relações entre grandezas*, as letras assumem diversos valores, expressando relações entre elas, como é o caso das funções. Na quarta e última conceção, *álgebra como estudo de estruturas*, as letras são encaradas como símbolos abstratos, como por exemplo quando lidamos com as operações entre polinômios.

Três períodos da história do ensino de álgebra – antes, durante e depois da matemática moderna, deram origem às conceções de educação algébrica propostas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993), que dividem o desenvolvimento do ensino de álgebra em três

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

conceções principais: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica. A primeira conceção, *linguístico-pragmática,* referente ao período antes da matemática moderna, define a álgebra como um instrumento técnico e mecânico para resolver problemas, para a qual basta o estudante apropriar-se do transformismo algébrico para conseguir resolver problemas. Com o movimento da matemática moderna vem a segunda conceção, *fundamentalista-estrutural*, onde o objetivo é de fundamentar a matemática escolar, justificando cada passagem do transformismo algébrico através de propriedades. Após esse movimento, vem a terceira conceção de educação algébrica, *fundamentalista-analógica*, que pretende sintetizar as duas conceções anteriores, de forma a recuperar o valor instrumental da álgebra na resolução de problemas ao mesmo tempo que se preocupa em justificar o cálculo algébrico através de recursos geométrico-visuais.

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) concluem que todas estas conceções possuem algo negativo em comum: "[...] a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica". Portanto, os estudos dessas conceções de álgebra e educação algébrica sinalizam a necessidade de desenvolver um pensamento que independentemente da linguagem algébrica pode ser manifestado: o pensamento algébrico.

De acordo com Coelho e Aguiar (2018, p. 178), o pensamento algébrico precisa de ser estimulado para crescer e na opinião deles a álgebra oferece um ambiente propício se, no seu ensino, o foco dela for "[...] desenvolver no estudante um pensamento que o auxilie na busca de padrões e analogias quando enfrentar problemas cotidianos." Deve-se portanto, elaborar atividades que estimulem ou incentivem o desenvolvimento deste pensamento, criando um ambiente favorável para que ele se manifeste. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o pensamento algébrico pode ser caracterizado pelos seguintes aspectos: estabelecer relações ou comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos; compreender e tentar exprimir aritmeticamente uma situação-problema; tentar construir vários modelos aritméticos para uma situação-problema; descobrir os vários significados de uma mesma expressão numérica; entender a igualdade como uma equivalência entre duas grandezas ou duas expressões numéricas; simplificar uma expressão aritmética; desenvolver processos de generalização; compreender e tentar exprimir regularidades ou invariâncias; propor formas mais sucintas para expressar situações-problema.

Com base nas conceções de álgebra e educação algébrica aqui apresentadas, conclui-se que o pensamento algébrico vai além da tarefa de calcular, ele dá sentido aos símbolos e às formas como os objetos se relacionam, podendo ser estimulado através da generalização de regularidades e padrões. À medida que este pensamento se desenvolve, o estudante também

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

evolui sua capacidade de exprimir matematicamente situações e problemas, descrevendo assim uma relação de subsistência entre linguagem e pensamento, e não de subordinação (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993). Portanto, o enfoque deste trabalho foi a criação de atividades que estimulam o raciocínio.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através da pesquisa feita em diversas fontes, sintetizam-se no Quadro 1 as principais dificuldades dos estudantes no processo de aprendizagem de álgebra (ARAÚJO, 2008; BEZERRA, 2016; BOOTH, 1995; GIL, 2008; ESTEVÃO, 2020, no prelo; GIL; FELICETTI, 2016; GIRALDO, 2012; GONÇALVES, 2013; PONTE, 2005; SCARLASSARI, 2007; SOCAS; CAMACHO; HERNANDEZ, 1998; STOCCO, 2016; TRUJILLO, 2012; VELOSO; FERREIRA, 2010).

Quadro 1 – Principais dificuldades na aprendizagem da álgebra

Dificuldades dos estudantes
Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa
Dificuldade em interpretar as letras
Dificuldade em pensar
Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa
Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado
Dificuldade com simplificação de expressões algébricas
Dificuldade com a noção de igualdade
Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos
Dificuldade em generalizar
Dificuldade em memorizar

Fonte: Autoria própria

Ao analisar essas dificuldades, levando em conta os fatores dificultadores – estabelecidos mediante os contextos e atividades em que essas dificuldades surgiram, observou-se que existem muitas interseções entre elas e que algumas delas possuem a mesma origem.

Com o objetivo de ajudar a minimizar as dificuldades supramencionadas, estruturam-se algumas atividades, levando em conta aspectos didáticos que podem levar ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Apresentam-se abaixo duas atividades:

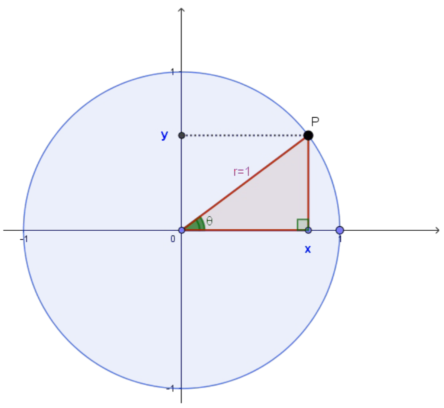
- Construindo o círculo trigonométrico;
- Sequência de números.

Conedu VII Congresso Nacional de Educação
ISSN 2358-8829
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

Na primeira atividade os estudantes construirão, com a ajuda do professor, um círculo de cartolina ou outro material, com raio de 1 decímetro, e alguns triângulos retângulos todos iguais, cuja hipotenusa seja do mesmo tamanho que o raio do círculo (as medidas e materiais utilizados podem ser modificados e adaptados de acordo com o professor). O objetivo desta atividade é que os estudantes construam relações e fórmulas trigonométricas (as quais são expressões algébricas), assim entendendo os seus significados e proveniências, em vez de apenas memorizá-las. A memorização é importante, pois facilita na resolução de problemas. No entanto, às vezes a memória falha e é nesse momento que é crucial saber a origem das fórmulas, pois permite determiná-las e assim usá-las. Ao contrário do que comumente é feito nas salas de aula, apenas apresentar a fórmula e dar exemplos, os estudantes nesta atividade irão compreender como surgem matematicamente estas relações: ao posicionar os triângulos retângulos no círculo trigonométrico, fazendo rotações em torno da origem e reflexões em torno dos eixos cartesianos os estudantes serão capazes de criar hipóteses e compartilhar suas descobertas com toda a classe.

O professor pedirá que os estudantes posicionem os triângulos retângulos, conforme ilustrado no Quadro 2.

Quadro 2 – Círculo trigonométrico com raio igual à hipotenusa do triângulo retângulo



Da imagem os estudantes concluem que:
$\sin\theta=\dfrac{cateto\,oposto}{hipotenusa}$ $\sin\theta=\dfrac{y}{1}=y$
$\cos\theta=\dfrac{cateto\,adjacente}{hipotenusa}$ $\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$
$x^2+y^2=1\Leftrightarrow\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

Fonte: Autoria própria

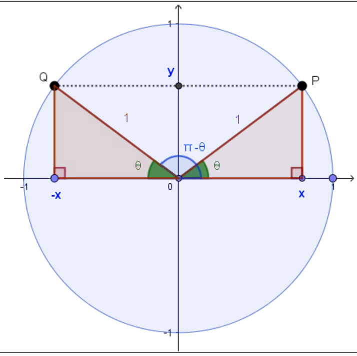
Usando as definições de cosseno e seno, anteriormente aprendidas, os estudantes chegarão à conclusão que à medida que o ponto P se desloca no círculo trigonométrico (sentido horário ou anti-horário), os valores do cosseno e seno de um ângulo θ são lidos, respectivamente, nos eixos do x e do y. Além disso, usando o Teorema de Pitágoras,

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

eles conseguem obter a *Fórmula Fundamental da Trigonometria* e a *equação cartesiana de um círculo centrado na origem de raio 1*.

A partir dessa atividade o professor poderá ir formalizando outros conceitos, já que os estudantes estarão mais familiarizados com a ideia de que cada ponto da circunferência está associado ao cosseno e seno de um dado ângulo θ. Por exemplo, um dado ponto P possui como projeções nos eixos das abscissas e ordenadas, os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$, respectivamente. Ainda através dessa atividade, pode-se também introduzir os conceitos de redução de ângulos dos segundo, terceiro e quarto quadrantes ao primeiro quadrante, usando rotações e reflexões do triângulo retângulo. Os Quadros 3, 4 e 5 ilustram essas ideias.

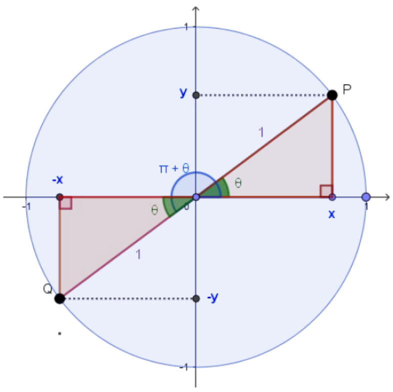
Quadro 3 – Redução de ângulo do segundo quadrante ao primeiro

	Os estudantes posicionarão os triângulos retângulos de forma que o triângulo do segundo quadrante‡ seja uma reflexão do triângulo do primeiro quadrante em torno do eixo das ordenadas, ou seja, a abcissa do ponto P é simétrica à abcissa do ponto Q e as suas ordenadas são iguais, concluindo assim, que: $\sin(\pi-\theta)=y=\sin(\theta)$; $\cos(\pi-\theta)=-x=-\cos(\theta)$.

Fonte: Autoria própria

‡ Existe outra redução de ângulo do segundo quadrante ao primeiro, fazendo uma rotação de π/2.

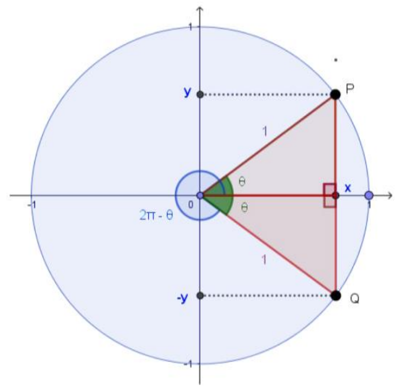
Quadro 4 – Redução de ângulo do terceiro quadrante ao primeiro

	Nesta etapa da construção, os estudantes posicionarão o segundo triângulo retângulo no terceiro quadrante de modo que o ponto P seja simétrico do ponto Q, ou seja, um giro de 180º no sentido anti-horário. Concluindo assim, que: $\sin(\pi+\theta)=-y=-\sin(\theta)$; $\cos(\pi+\theta)=-x=-\cos(\theta)$.

Fonte: Autoria própria

Conedu VII Congresso Nacional de Educação
ISSN 2358-8829
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

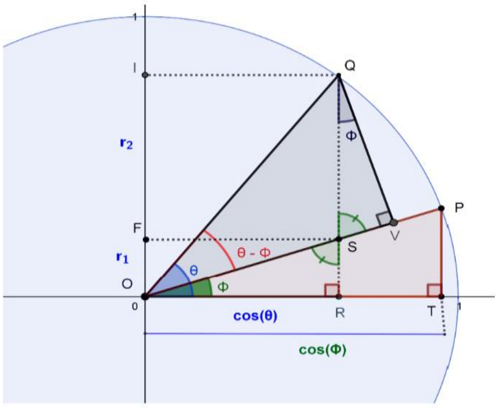
Quadro 5 – Redução de ângulo do quarto quadrante ao primeiro

	Para esta redução, os estudantes posicionarão o segundo triângulo retângulo no quarto quadrante, de modo que este seja uma reflexão do primeiro triângulo em torno do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que: $\sin(-\theta)=-y=-\sin(\theta)$; $\cos(-\theta)=x=\cos(\theta)$.

Fonte: Autoria própria

Pode-se também pedir aos estudantes que descubram as fórmulas do cosseno e seno da diferença entre dois ângulos, usando a imagem ilustrada na Figura 1. Para que eles descubram e não se sintam desanimados, devem-se dar dicas. Existem várias formas de determinar essas fórmulas, não necessariamente usando a Figura 1; devem-se incentivar os estudantes a achar várias.

Figura 1 – Diferença entre dois ângulos



Fonte: Autoria própria

Por exemplo, pode-se achar a fórmula do seno da diferença entre dois ângulos como segue. Considere os triângulos *OSR* e *QSV*: estes são semelhantes visto que $O\hat{S}R=Q\hat{S}V$ (ângulos opostos pelo vértice) e $S\hat{R}O=S\hat{V}Q$ (ângulos retos). Portanto, $S\hat{O}R=\phi=S\hat{Q}V$. Da definição de seno temos que $\sin(\theta-\phi)=\overline{QV}$, mas $\overline{QV}$ por sua vez é igual a

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

$$\overline{QS}\cos(\phi)=r_2\cos(\phi). \quad (1)$$

Também temos que

$$\sin\theta=r_1+r_2 \Leftrightarrow r_2=\sin\theta-r_1, \quad (2)$$

onde r_1 é obtido pela semelhança dos triângulos *OSR* e *OPT*,

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{OT}}{\overline{RO}} \Leftrightarrow \frac{\sin\phi}{r_1}=\frac{\cos\phi}{\cos\theta} \Leftrightarrow r_1=\cos\theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}. \quad (3)$$

Substituindo r_1 em (2) por (3) e depois substituindo r_2 em (1), obtemos a fórmula para o seno da diferença entre dois ângulos,

$$\sin(\theta-\phi)=\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)\cos\phi=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi.$$

A partir desta fórmula, os estudantes poderão deduzir várias fórmulas, como por exemplo, o seno da soma de dois ângulos, para isso considerando $\sin(\theta+\phi)=\sin(\theta-(-\phi))$ e as fórmulas do Quadro 5.

A segunda atividade trata da sequências de números, que proporciona aos estudantes a oportunidade de encontrarem a fórmula do *n*-ésimo termo da sequência, válida para todos os termos da sequência. A atividade seria então proposta conforme enunciada no Quadro 6.

Quadro 6 – Atividade sobre a generalização de números em uma sequência

Considere a seguinte sequência de números 1, 3, 6, 10, ... i) Quais são os próximos 2 números da sequência? ii) Mostre que o *n*-ésimo termo da sequência é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. (4)

Fonte: Autoria própria

Para resolver o primeiro item, os estudantes deveriam começar por ver qual é a relação entre números consecutivos. Brincando um pouco com os números, logo percebem que a diferença entre 1 e 3 é 2, entre 3 e 6 é 3, e entre 6 e 10 é 4. Então o próximo será 10+5=15 e a seguir a 15, tem-se 15+6=21. Depois de responder a esta pergunta, é possível que os estudantes percebam que o *n*-ésimo termo é a soma dos *n* primeiros números naturais. Como o segundo item pede para mostrar que o *n*-ésimo termo da sequência é igual a (4), é importante dar umas dicas. Tem várias formas de responder ao segundo item:

a) usando o método de indução sobre $1+2+...+n=n(n+1)/2$;

b) usando uma fórmula de recorrência;

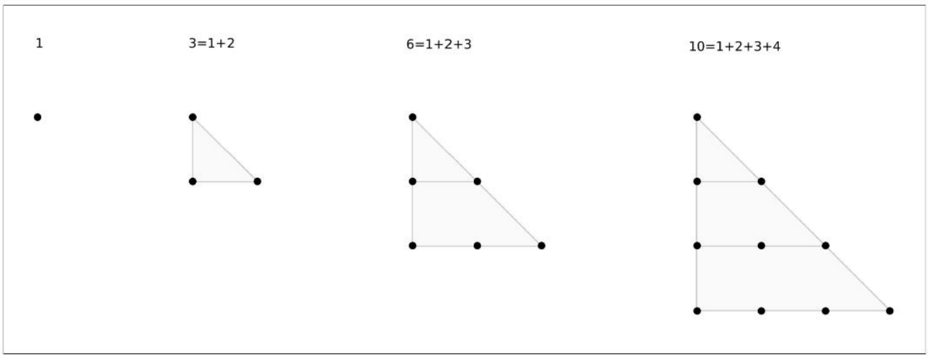
ISSN 2358-8829
VII Congresso Nacional de Educação – Conedu
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

c) usando o fato que a soma dos números naturais é uma progressão aritmética;

d) usando representações geométricas dos números da sequência.

A melhor forma para determinar o *n*-ésimo termo neste caso é usando as representações geométricas dos números da sequência, visto que este método apenas implica conhecimentos de geometria básica: área de polígonos. Assim, deve-se apresentar aos estudantes as representações geométricas dos números da sequência, conforme ilustrado na Figura 2 e dizer-lhes que eles deveriam usar esta informação para determinar o *n*-ésimo termo da sequência.

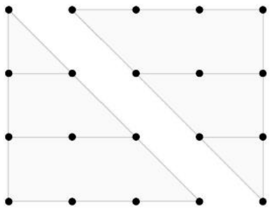
Figura 2 – Representação geométrica dos números da sequência



Fonte: Autoria própria

Olhando para as representações geométricas, os estudantes poderão ficar tentados em usar a fórmula da área de um triângulo para achar o *n*-ésimo termo. Por exemplo, a área do triângulo isósceles com 4 pontos de cada lado dá $(4 \cdot 4)/2=8$, que é diferente de 10. Este resultado não é surpreendente: estão faltando dois pontos que correspondem às quatro metades de pontos que ficam para fora do triângulo. Considere o retângulo na Figura 3.

Figura 3 – Retângulo



Fonte: Autoria própria

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

Esse retângulo é composto por 20 pontos, ou seja, 4 vezes 5 pontos. Ao dividir a área do retângulo por 2, obtém-se 10, que corresponde exatamente ao número de pontos presentes no triângulo com 4 pontos de cada lado. Portanto, o triângulo com *n* pontos de cada lado tem metade dos pontos do retângulo *n* por *(n+1)*, ou seja, o *n*-ésimo termo da sequência é

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Estas duas atividades permitiram: desenvolver o pensamento algébrico; por em prática a passagem da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa; treinar a interpretação das letras, simplificação de expressões algébricas, e generalização de padrões e regularidades; familiarizar-se com a noção de igualdade, fórmulas, procedimentos e propriedades; ajudar a memorização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na tentativa de resolver as diversas dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra, sugeriram-se aqui duas atividades que desenvolvem o pensamento algébrico, apoiando-se nas conceções de álgebra e educação algébrica. É possível encontrar na dissertação de Estevão (2020, no prelo), outras atividades que desenvolvem o raciocínio e que sanam outras dificuldades do Quadro 1. Nessa obra, ao analisar os fatores dificultadores, verificou-se que existem várias interligações entre as dificuldades, o que poderá ajudar os professores a direcionar seu trabalho de acordo com as barreiras que enfrentam em seu dia a dia profissional. Aqui também foi visto, que com uma mesma atividade pode-se minimizar várias dificuldades.

A construção do círculo trigonométrico permite aos estudantes descobrir como se originam algumas fórmulas trigonométricas. Em virtude disso, possibilita-lhes dar sentido aos conceitos apresentados de forma que consigam memorizá-los, por terem sido compreendidos. Tendo isso em vista, essa atividade ajuda a minimizar as dificuldades em usar fórmulas, propriedades e procedimentos, e em memorizar. Nesta atividade, o pensamento algébrico desenvolve-se à medida que os estudantes estabelecem relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, que são explorados mediante os giros e/ou reflexões que ocorrem nos triângulos. Para a formulação desta atividade levamos em conta a conceção de álgebra de Usiskin (1995), na qual a variável é encarada como argumento, e a conceção de educação algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), onde a geometria é usada para justificar os cálculos e procedimentos algébricos.

ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

Na segunda atividade, o pensamento algébrico desenvolve-se à medida que os estudantes estabelecem relações e comparações entre expressões algébricas e padrões geométricos, e desenvolvem processos de generalizações, escrevendo suas observações em linguagem algébrica. Assim, este tipo de atividade ajuda a combater as dificuldades em generalizar e em pensar, dado que instigam os estudantes a encontrar relações entre os termos, observando as mudanças. Nesta atividade aliaram-se as conceções de álgebra como aritmética generalizada proposta por Usiskin (1995), e a conceção de educação algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Com a apresentação destas atividades, enfatizou-se a importância em elaborar atividades que não sejam apenas técnicas e mecânicas, mas que dêem aos estudantes a oportunidade de vivenciar as várias conceções de álgebra, de maneira que desenvolvam o pensamento algébrico à medida que dão sentido ao que é ensinado, e consequentemente as dificuldades são superadas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. A. de. Ensino de Álgebra e Formação de Professores. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, s.l., v. 10, n. 2, mar. 2008.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da álgebra**: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

ESTEVÃO, E. J. de O. **Dificuldades encontradas no estudo de álgebra no ensino médio**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Catalão, Catalão, 2020. No prelo.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das

ISSN 2358-8829
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO: investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GIL, K. H.; FELICETTI, V. L. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da Álgebra por Estudante da 7ª Série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju, v. 1, n. 1, p. 19-35, ago. 2016.

GIRALDO, V.; CAETANO P.; MATOS F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GONÇALVES, J. A. **Dificuldades dos alunos que iniciam o estudo da álgebra**. 2013. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas, 2013.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. *In*: VALE, I. et al. (eds.) **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa:SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SOCAS, M. M.; CAMACHO, M.; HERNANDEZ J. Analisis didactico del lenguage algebraico en la enseñanza secundaria. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado: didácticas de las matemáticas para los profesores de educación secundaria**, n. 32, p.73-86, mai. 1998.

STOCCO, A. C. A álgebra e suas dificuldades no ensino médio. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**. Curitiba: SEED/PR., 2014. v. 1. (Cadernos PDE).

TRUJILLO, E. S. G. **Del lenguaje natural al lenguaje algebraico**: el significado de la variable: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas. 2012. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Nacional de Colômbia, Bogotá, 2012.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da Escola Média e utilização de variáveis. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VELOSO, D. S.; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra. *In*: X SEMANA DE MATEMÁTICA e II SEMANA DA ESTATÍSTICA, 10., 2010, Ouro Preto. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto: Editora da UFOP, 2010. p. 59-65.