Universidade Estadual de Londrina

TIAGO APARECIDO SHIGUEO UMEKI YAMAMOTO

ATIVIDADES CRIATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE E GEOMETRIA: O PARADOXO DE MONTY HALL, O PROBLEMA DO MACARRÃO E SUAS APLICAÇÕES.

Londrina
2020

TIAGO APARECIDO SHIGUEO UMEKI YAMAMOTO

ATIVIDADES CRIATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE E GEOMETRIA: O PARADOXO DE MONTY HALL, O PROBLEMA DO MACARRÃO E SUAS APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Lúcia da Silva

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Yamamoto, Tiago Aparecido Shigueo Umeki.
Atividades criativas para o ensino de probabilidade e geometria: : o paradoxo de Monty Hall, o problema do macarrão e suas aplicações / Tiago Aparecido Shigueo Umeki Yamamoto. - Londrina, 2020.
86 f.

Orientador: Ana Lúcia da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Tese. 2. Probabilidade - Tese. 3. Teorema de Bayes - Tese. 4. Probabilidade Geométrica - Tese. I. Silva, Ana Lúcia da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

TIAGO APARECIDO SHIGUEO UMEKI YAMAMOTO

ATIVIDADES CRIATIVAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE E GEOMETRIA: O PARADOXO DE MONTY HALL, O PROBLEMA DO MACARRÃO E SUAS APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profa. Dra. Ana Lúcia da Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____
Suplente: Profa. Dra. Gleici da Silva Castro Perdoná
Universidade de São Paulo - USP

Londrina, 28 de Agosto de 2020.

Dedico este trabalho a minha mãe que sempre me apoiou e acreditou em meu potencial.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por tudo o que me foi oportunizado até o momento.

À minha orientadora, professora doutora Ana Lúcia da Silva, por todas as orientações, ensinamentos, conselhos, paciência e por acreditar em meu potencial.

À minha mãe e irmão, por sempre acreditarem em meu potencial e me apoiarem nos momentos de maior dificuldade.

À minha irmã, ao seu marido e meus dois sobrinhos por todo carinho e incentivo.

A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Enfim, gratidão a todos que me apoiaram e continuam me apoiando.

“Pois quando a gente entende que não entende alguma coisa é que a gente está prestes a entender tudo.”

Jostein Gaarder

YAMAMOTO, Tiago Aparecido Shigueo Umeki. **Atividades criativas para o ensino de probabilidade e geometria: o paradoxo de Monty Hall, o Problema do macarrão e suas aplicações**. 2020. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Neste trabalho oportunizamos ao professor duas propostas didáticas sobre probabilidade e uma aplicação do Paradoxo de Monty Hall. A primeira proposta é Tiro ao alvo triangular e probabilidade geométrica, que foi elaborada durante as orientações deste trabalho. A segunda proposta é Abordagem lúdica do problema do macarrão – Desigualdade Triangular , que foi aplicada via oficinas em eventos relativos ao PROFMAT e OBMEP, e no II Encontro Paranaense do PROFMAT na UTFPR-Curitiba/PR. Em ambas propóstas, utilizamos como base o Problema do Macarrão, que faz uma ponte entre Probabilidade e Geometria. Estudamos o Paradoxo de Monty Hall e o demonstramos via Teorema de Bayes, em seguida o aplicamos na resolução de questões do vestibular da UEL.

Palavras-chave: Probabilidade, Probabilidade Geométrica, Monty Hall, Teorema de Bayes.

YAMAMOTO, Tiago Aparecido Shigueo Umeki. **Creative Activities for teaching Probability and Geometry: The Monty Hall Paradox, the Noodles Problem, and its applications**. 2020. 86 f. Dissertation (Professional Master in Mathematics in National Network) - State University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In this paper we provide the teacher two didactic proposals: on probability and an application of Monty Hall's Paradox. The first proposal is Shooting the Triangular Target and Geometric Probability, which was developed during the paper´s orientations. The second proposal is a playful approach to the Noodles problem - Triangular Inequality, which was applied via workshops at events related to PROFMAT and OBMEP, and at the II Paraná Meeting of PROFMAT at UTFPR-Curitiba / PR. In both proposals, we applied the Noodles Problem as a basis, which links Probability and Geometry. We studied the Monty Hall Paradox and presented it via Bayes' Theorem, then applied it to the resolution of UEL entrance exam questions.

Keywords: Probability, Geometric Probability, Monty Hall, Bayes' Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UEL	Universidade Estadual de Londrina
UEM	Universidade Estadual de Maringá
OBMEP	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
NBR	Norma Brasileira

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A probabilidade sempre foi um conteúdo atrativo e que despertou nosso interesse. Apesar de no início parecer confusa e complicada, após algum tempo de estudo nos habituamos com suas peculiaridades. A escolha específica do tema que abordaríamos nessa dissertação não foi fácil, pois há muitos, entretanto nossa prática como professor foi substancial.

Como docente, vemos nossos pupilos se indignarem com alguns resultados provenientes da probabilidade. Isso geralmente é motivador, pois faz com que ele, o aluno, elabore argumentos, conjecturas e realize debates com o professor ou colegas até nos convencer ou ser convencido sobre a validade ou não de seu raciocínio. Assim surgiram as ideias e assuntos deste trabalho.

Pesquisamos sobre quais poderiam ser os tópicos dentro da probabilidade, que estudaríamos nesta dissertação, para possível desenvolvimento posterior em sala de aula , optamos por estudar o Problema Monty Hall e Probabilidade Geométrica, via o Problema do Macarrão. Assim, abordamos probabilidade discreta e não discreta, sendo este último raramente discutido na Educação Básica e apresentando escassez de material teórico para pesquisa, embora traga consigo discussões, pelejas e conteúdos que podem ser bem atrativo aos alunos e professores.

O objetivo geral deste trabalho é oportunizar ao professor três propostas didáticas, sendo que uma delas já foi aplicada via oficinas em eventos relativos ao PROFMAT e OBMEP, e outra foi apresentada no II Encontro Paranaense do PROFMAT na UTFPR-Curitiba/PR. Não é nosso propósito nos aprofundarmos na parte teórica da probabilidade, pois julgamos que o professor, público alvo do trabalho, já o conheça. Desta forma, nos deteremos a algumas explicações e orientações de como analisar as situações por meio do raciocínio lógico, mantendo a devida formalidade.

Assim, no capítulo dois descrevemos alguns resultados preliminares que servirão de apoio e base para a leitura do trabalho. Demonstramos a condição de existência de um triângulo, pois geralmente este resultado não se encontra em livros didáticos do Ensino Básico. Deduzimos o Teorema de Bayes para o caso de n eventos a partir do teorema da probabilidade total e particularizamos para o caso de tres eventos A_1, A_2, A_3, onde os eventos A_i são mutualmente exclusivos e sua união é o espaço amostral S. Conceituamos probabilidade geométrica, com intuito de aplicá-la em atividades práticas.

No capítulo três apresentamos o Problema ou Paradoxo de Monty Hall, problema matemático que surgiu em um programa de TV chamado *Let's Make a Deal*, exibido nos EUA. O paradoxo é de fácil compreensão, resolvê-lo, entretanto, é contra intuitivo e usualmente causa equívocos. Consiste num jogo em que um participante precisa escolher uma entre três portas: atrás de uma delas está um carro, e nas outras, cabras. Suponha que ele escolha a número 1 e o apresentador - ciente do que há por trás de cada porta - abra a número 2, por exemplo, que tem uma cabra. O participante, então, tem a opção de continuar com a porta 1 ou mudar para número 3. A questão é: Ele deve mudar de porta? Abordaremos este clássico problema, além da versão estendida para 4 e 5 portas. Sempre suporemos $n-2$ portas serão abertas, onde n é a quantidade de portas do problema em questão. Inicialmente o resolveremos da maneira que consideramos mais didática para o aprendizado do aluno. Em seguida, mostraremos sua resolução via Teorema de Bayes.

Dedicamos o capítulo quatro à síntese da estrutura de avaliação objetiva, habitual em nosso Sistema de Educação, sendo utilizada no ENEM, vestibulares e concursos públicos. Notamos que, quando se discute as probabilidades de acerto numa questão objetiva, os estudantes ficam empolgados, elaboram conjecturas, argumentam, participam bastante da aula e ficam curiosos sobre os resultados obtidos. Com isso em mente, mensuramos quais são as chances de o estudante acertar uma questão, utilizando ou não Monty Hall. Assim sendo, neste capítulo, analisaremos a estrutura de questões objetivas, com 5 alternativas de resposta sendo 4 distratores e somente uma correta. Aplicaremos a solução do Problema de Monty Hall para cinco porta, em questões do vestibular da UEL, descrevendo passo a passo o processo.

No capítulo cinco, abordaremos Probabilidade Geométrica via o Problema do Macarrão de autoria do professor Eduardo Wagner. Fazemos uma generalização do caso e colocamos sob outra perspectiva. Apresentamos duas atividades/jogos exclusivas, ambas geradas durante o desenvolvimento desta dissertação, tiro ao alvo triangular e abordagem lúdica do Problema do Macarrão. Em seguida relatamos como foi a aplicação da oficina *Explorando a desigualdade triangular de forma lúdica*, em que é proposto aos alunos a seguinte questão: “Lançando-se três dados, qual é a probabilidade de construir um triângulo com os valores obtidos?”.

No capitulo seis, são apresentadas as considerações finais, as nossas expectativas para futuros estudos e trabalhos.

2 PRELIMINARES

Para estudarmos qualquer ramo da matemática, é necessário verificar as notações e termos que serão utilizados e posteriormente o conteúdo a ser estudado em si. Com base nisso, este capítulo tem como finalidade revisar termos que consideramos essenciais para a compreensão deste trabalho. Tentamos simplificar o máximo possível a linguagem utilizada, mas sem perder a formalidade necessária para o estudo.

2.1 Condição de existência de um triângulo[1]

Vamos demonstrar a condição de existência de um triângulo, e para isto utilizaremos de três proposições que podem ser encontradas no livro Geometria da coleção do PROFMAT.

Proposição 1: Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

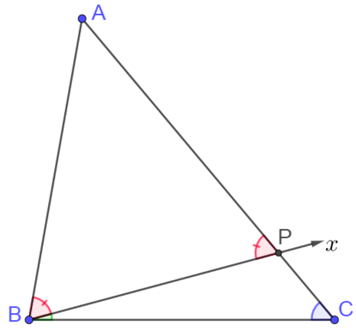
Demonstração.

Como $\hat{B} > \hat{C}$ podemos traçar (cf. Figura 1) a semirreta $\overrightarrow{BX}$, intersectando o interior de ABC e tal que$C\hat{B}X = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$. Sendo P o ponto de intersecção de $\overrightarrow{BX}$ com o lado AC, segue do teorema do ângulo externo que

$$A\hat{P}B = C\hat{B}P + B\hat{C}P = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) + \hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

[1] Demonstração da proposição pode ser encontrada em (NETO, 2013, p.3).

Figura 1 - Ordem dos lados e ângulos de um triângulo



Fonte: Próprio autor

Mas, como

$$A\hat{P}B = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}),$$

segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP. Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}.$$

C.Q.D.

Corolário 1: Se ABC é um triângulo tal que $\hat{A} \geq 90°$, então $\overline{BC}$ é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o seu maior lado.

Demonstração.

Basta observar que, se $\hat{A} \geq 90°$, então $\hat{A}$ é o maior ângulo de ABC, de modo que $\overline{BC}$ é, pela proposição anterior, o maior lado.

C.Q.D.

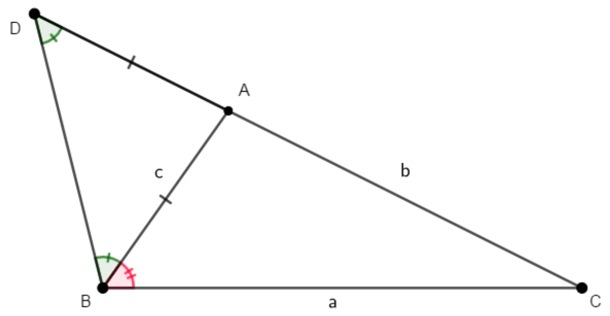
A proposição a seguir é conhecida como a desigualdade triangular.

Proposição 3: Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração.

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Mostremos que $a < b + c$, sendo a prova das demais desigualdades totalmente análoga. Marque (cf. Figura 2) o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Figura 2 - Desigualdade triangular



Fonte: próprio autor

Uma vez que

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c,$$

pela proposição 1 é suficiente mostrarmos que $B\hat{D}C < D\hat{B}C$. Mas, desde que $B\hat{D}A = D\hat{B}A$, basta observarmos que

$$B\hat{D}C = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C.$$

Sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad b + c > a.$$

Vamos analisar a inequação $b + c > a$. Isolando c no primeiro membro teremos

$$c > a - b. \tag{2.1}$$

De forma análoga, isolando c na inequação $a + c > b$, teremos

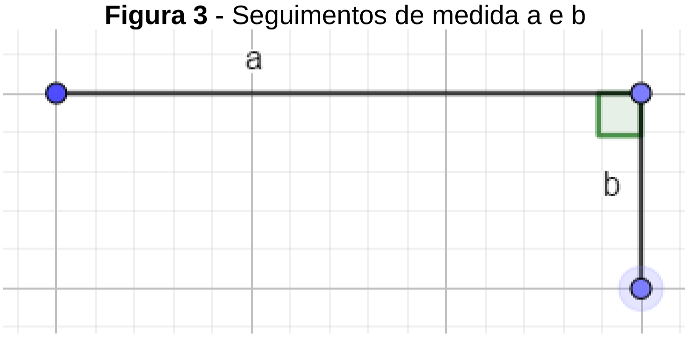
$$c > b - a. \tag{2.2}$$

Por (1.1) e (1.2) segue que $c > |a - b|$. Então sabemos que $a + b > c$ e que $c > |a - b|$, portanto

$$|a - b| < c < a + b. \tag{2.3}$$

Será que geometricamente é possível chegar nas mesmas conclusões apresentedas anteriormente com relação a medida do comprimento c? Considere dois seguimentos de comprimento a e b com $a > b$.

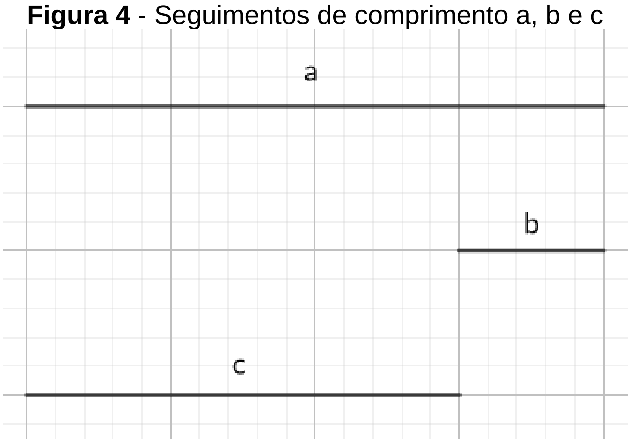
Figura 3 - Seguimentos de medida a e b



Fonte: próprio autor

Qual deve ser o comprimento do seguimento c para que possamos construir um triângulo com os lados medindo a, b e c? A menor medida do lado c deverá ser quando o ângulo entre os dois seguimentos for nulo.

Figura 4 - Seguimentos de comprimento a, b e c



Fonte: próprio autor

Pela figura 4, notamos que o comprimento c deverá ser

$$c > a - b \tag{2.4}$$

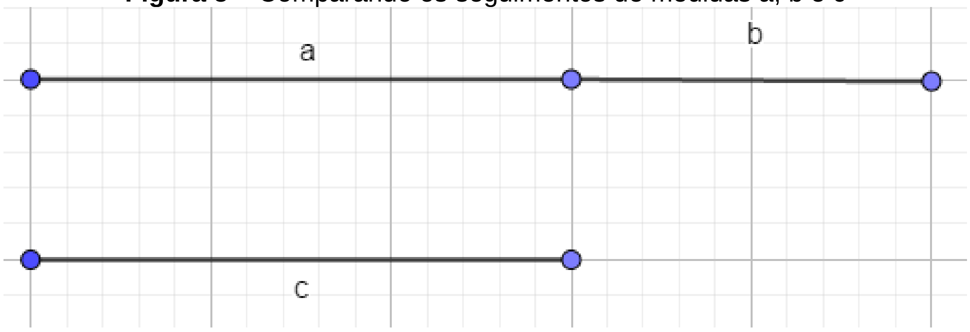
Se no estudo anterior, considerarmos $a < b$, chegaremos em

$$c > b - a \tag{2.5}$$

Por (1.4) e (1.5) temos que $c > |a - b|$.

E por último, precisamos analisar qual é o comprimento máximo do seguimento que tem medida c. Veja a figura a seguir.

Figura 5 – Comparando os seguimentos de medidas a, b e c



Fonte: próprio autor

Para que seja possível formar um triângulo com os lados medindo a, b e c, o comprimento de c deve ser

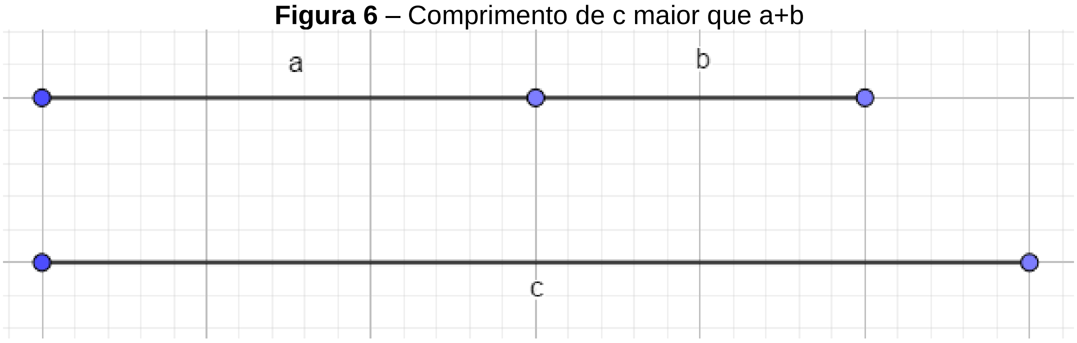
$$c < a + b.$$

Caso contrário, não conseguiriamos construir o triângulo. Logo, pelos estudos feitos com base na geometria, temos

$$|a - b| < c < a + b.$$

Chegamos à mesma conclusão de quando trabalhamos apenas com as inequações.

Figura 6 – Comprimento de c maior que a+b



Fonte: próprio autor

De forma análoga, podemos fazer a mesma análise que foi realizada anteriormente, tomando como base outro comprimento. E neste caso teríamos as seguintes inequações

$$|b - c| < a < b + c \quad (2.6)$$

$$|a - c| < b < a + c \quad (2.7)$$

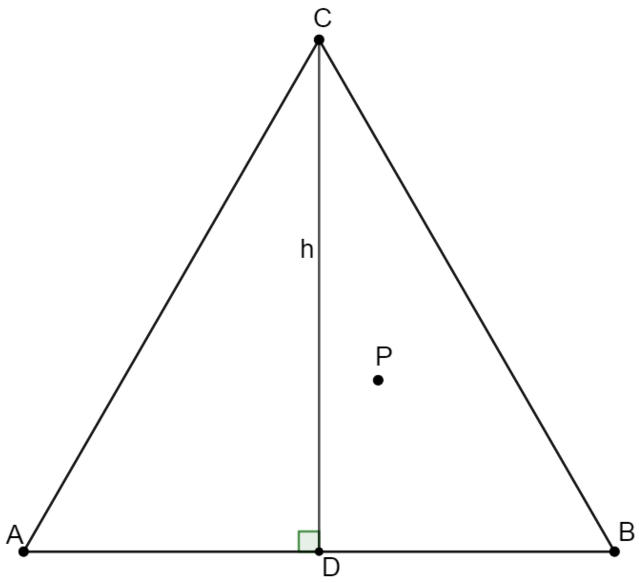
2.2 Teorema de Viviani

Teorema 1: Em um triângulo equilátero ΔABC, a soma das distâncias de um ponto arbitrário P no interior do triângulo aos três lados do mesmo é sempre igual a altura do triângulo equilátero.

Demonstração.

Seja um ABC um triângulo equilátero e P um ponto arbitrário em seu interior (cf. figura7).

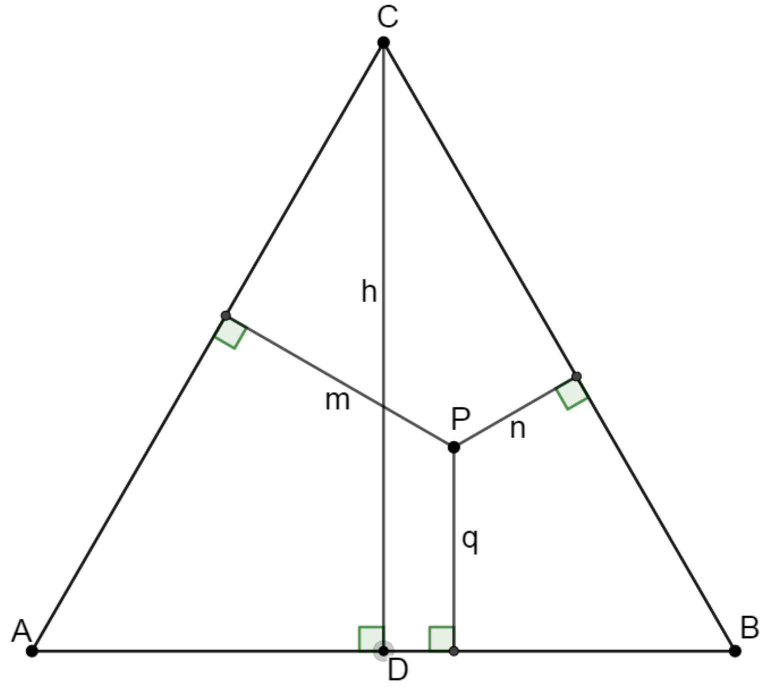
Figura 7 - Triângulo ABC com um ponto P no interior



Fonte: Próprio autor

Considere m, n e q as distâncias do ponto P a cada um dos lados do triângulo ABC (cf. figura 8).

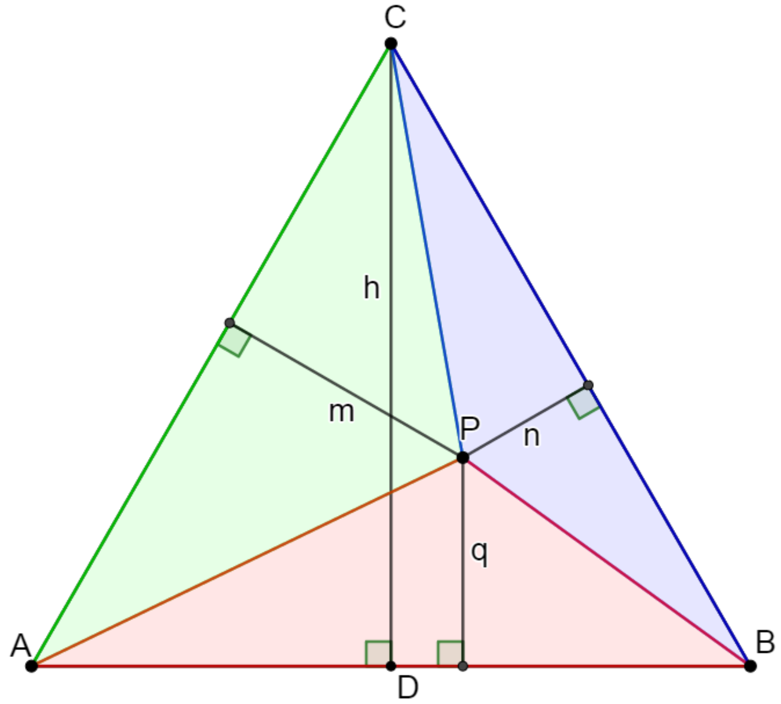
Figura 8 - Distâncias do ponto P aos lados do triângulo ABC



Fonte: Próprio autor

A área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos APC, BPC e APB (cf. figura 9).

Figura 9 - Área triângulo ABC fragmentada



Fonte: Próprio autor

Logo,

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} + S_{APB}$$

$$\frac{l.h}{2} = \frac{l.m}{2} + \frac{l.n}{2} + \frac{l.q}{2}.$$

Portanto,

$$h = m + n + q.$$

C.Q.D.

2.3 Princípio multiplicativo[2]

Definição 1: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$.

Extensão do princípio multiplicativo: Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ maneiras diferentes.

2.4 Combinação Simples

Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}.$$

[2] (MORGADO, 2007, p.40)

2.5 Espaço amostral[3]

Definição 2: É o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S. Os subconjuntos de S serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao espaço amostral. Caso contrário o evento é considerado impossível. (MORGADO, 2015, p.136)

Neste trabalho a expressão $\#(S)$ deve ser interpretada como o número de elementos do conjunto S. Os elementos do espaço amostral são chamados de eventos elementares.

2.6 Conceitos Básicos de Probabilidade

Definição 3: Suponha que os experimentos aleatórios tem as seguintes características:

a) Há um número finito (digamos n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral S.

b) Os eventos elementares são igualmente prováveis.

c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde $m \leq n$.

Definimos então

---

[3] (MORGADO, 2015, p.136)

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{m}{n}. \quad (2.8)$$

Consequências da definição: Temos as seguintes propriedades:

1) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

2) $P(S) = 1$;

3) $P(\emptyset) = 0$ (porque $\#(\emptyset) = 0$);

4) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Apresentaremos a noção geral da probabilidade e demonstraremos algumas propriedades.

Definição 4: Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:

I. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
II. $P(S) = 1$;
III. Se A e B são eventos mutualmente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente (isto é, $A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Proposições: De acordo com Morgado (2015) se A e B são eventos, então:

I. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
II. $P(\emptyset) = 0$.
III. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.
IV. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
V. Se $A \supset B\ então\ P(A) \geq P(B)$.

Demonstração.

I. Pela definição de probabilidade, temos que $1 = P(S)$. Observe que dado um conjunto A tal que $A \subset S$, temos $P(S) = P(A \cup \bar{A})$ em que $\bar{A} = S - A$. E como A e $\bar{A}$ são mutualmente excludentes, segue da definição que $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ e, portanto $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Portanto $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

II. $P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$, pois S e $\emptyset$ são mutuamente excludentes. Como $P(S) = 1$ temos que $1 = 1 + P(\emptyset)$, logo $P(\emptyset) = 0$.

III. $P(A) = P[(A \backslash B) \cup (A \cap B)] = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ pois $A \backslash B$ e $A \cap B$ são mutualmente excludentes. Segue que, $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

IV. $P(A \cup B) = P[(A \backslash B) \cup B] = P(A \backslash B) + P(B)$ pois $A \backslash B$ e B são mutualmente excludentes. Como $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

V. Como $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $A \subset B$ resulta $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A \backslash B) \geq 0$, temos $P(A) \geq P(B)$.

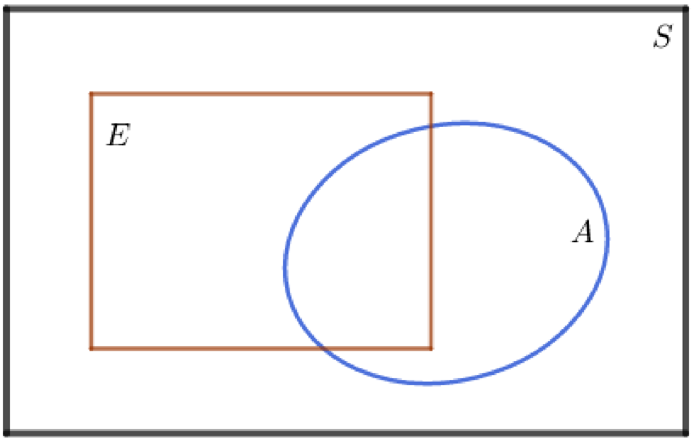
C.Q.D.

2.7 Probabilidade Condicional[4]

Definição 5: Seja E um evento arbitrário em um espaço amostral S, com $P(E) > 0$. A probabilidade de um evento A ocorrer, uma vez que E tenha ocorrido ou, em outras palavras, a probabilidade condicional de A dado E, pode ser calculado por

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}. \tag{2.9}$$

Figura 10 - Diagrama de Venn



Fonte: próprio autor

Como vemos no diagrama de Venn (cf. figura 7), $P(A|E)$, em um certo sentido, mede a probabilidade relativa de A com respeito ao espaço reduzido E.

Em particular, se S é um espaço finito equiprovável e $\#(A)$ representa o número de elementos em um evento A, então

$$P(A \cap E) = \frac{\#(A \cap E)}{\#(S)}, P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

e deduz-se que

[4] (LIPSCHUTZ, 1972, p.76)

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\#(A \cap E)}{\#(E)}.$$

2.8 Teorema da Multiplicação[5]

Se multiplicarmos em cruz a equação

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)},$$

que define a probabilidade condicional, e usarmos o fato de $A \cap E = E \cap A$, obteremos a seguinte fórmula usual.

Teorema 1: $P(E \cap A) = P(E).P(A|E)$

Este teorema pode ser estendido por indução como segue:

Corolário 2: Para quaisquer eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1})$$

A partir dos subcapítulos 2.6 e 2.7 deduzimos um teorema importante e muito utilizado em Probabilidade, o Teorema de Bayes, próximo resultado a ser abordado. Thomas Bayes[6](1702 – 1761) foi um teólogo e matemático inglês. Era membro do Royal Society of London, uma sociedade científica de prestígio do Reino Unido e fez bastante contribuições para a teoria das probabilidades.

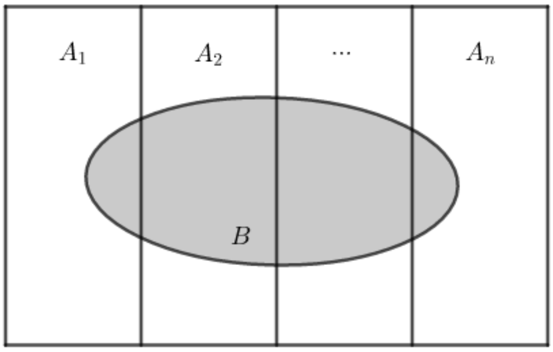
2.9 Teorema de Bayes e Partições[7]

Suponha que os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma partição de um espaço amostral S; ou seja, os eventos A_i são mutualmente exclusivos e sua união é S. Seja B outro evento qualquer.

---

[5] (LIPSCHUTZ, 1972, p.78)
[6] Retirado de https://maestrovirtuale.com/thomas-bayes-biografia-e-contribuicoes. Acesso: 07/08/2020 às 12:46.
[7] (LIPSCHUTZ, 1972, p.81)

Figura 11 - Partições de S e evento B



Fonte: próprio autor

Então

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

onde os $A_i \cap B$ são também mutualmente exclusivos. Consequentemente,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Assim, pelo teorema da multiplicação,

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) \qquad (2.10)$$

Por outro lado, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, a probabilidade condicional de A_i dado B é definida como

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \qquad (2.11)$$

na equação (2.11), usamos (2.10) para substituir $P(B)$ e $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ para substituir $P(A_i \cap B)$, obtendo assim o teorema de Bayes.

Teorema 2 : (Teorema de Bayes) Suponha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ser uma partição de S e B um evento qualquer. Então, para qualquer i,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

Em particular, para $n = 3$, teremos $i = 1, 2{,}3$ e :

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)},$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)},$$

e

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

onde

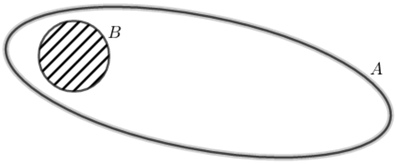
$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ e } B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap B.$$

2.10 Probabilidade Geométrica

Considere uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B é

$$P = \frac{área\ de\ B}{área\ de\ A}$$

Figura 12 - Região A e região B



Fonte: próprio autor

3 PARADOXO DE MONTY HALL

3.1 Um pouco de história

O problema de Monty Hall surgiu no programa norte americano “Let’s Make a Deal” apresentado por Monty Hall entre os anos de 1963 a 1976, porém, não foi por conta do programa de televisão que este problema ficou famoso.

Marilyn vos Savant em Setembro de 1990, era considerada uma das pessoas com o maior QI (quociente de inteligência) do planeta. Em sua coluna de jornal chamado de “Ask Marilyn” da revista Parade, ela recebia perguntas de seus leitores e respondia. Marilyn recebia todo tipo de pergunta. Até que em um determinado dia se deparou com a seguinte questão:

> Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: “Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?” Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha? (MLODINOW, 2008, p.43)

Inicialmente esta pergunta parece ser bem simples, já que temos duas portas e que portanto a probabilidade de ganhar o prêmio é de

$$P = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Este raciocínio está incorreto, e Marilyn respondeu que é vantajoso para o participante trocar de porta. Isso causou bastante revolta por parte de vários leitores. “Como uma pessoa com um QI tão elevado, pode errar uma questão tão elementar?” (MLODINOW, 2008). Entre os insatisfeitos com a resposta de Marilyn estavam inclusive alguns matemáticos.

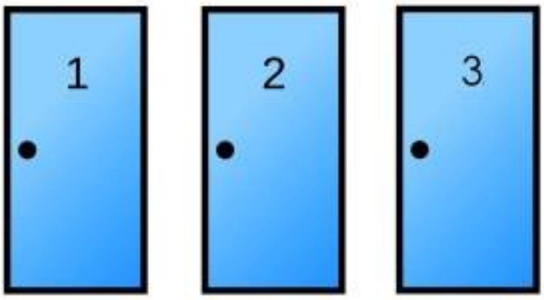
> Se mostrarmos que uma das portas não contém o prêmio, essa informação

> altera a probabilidade das duas escolhas remanescentes para $\frac{1}{2}$ – e nenhuma das duas apresenta motivos para ter uma probabilidade maior que outra. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confesando o seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro. (MLODINOW, 2008, p.44)

Como podemos perceber, este problema causou muita confusão, inclusive entre matemáticos (MLODINOW, 2008). Vamos analisar o problema de Monty Hall.

Neste programa temos três portas, atrás de uma existe um prêmio que é um carro e das outras duas temos dois bodes.

Figura 13 - Três portas



Fonte: Retirado do site thiscondensedlife[8]

O jogo é dividido em três etapas:

Primeira etapa: O apresentador pede para o participante escolher uma das portas.

Segunda etapa: O apresentador abre uma das outras duas portas que sobraram. E revela que o prêmio não está ali.

Terceira etapa: O apresentador te dá a chance de trocar de porta.

Vale a pena para o participante trocar de porta? Conforme estudaremos a seguir, é vantajoso ao participante trocar.

[8] Disponível em: < https://thiscondensedlife.wordpress.com/2017/04/29/the physicists-proof-ii-limits and-the-monty-hall-problem/> Acessado em 23/12/2019 às 21:45

A título de curiosidade o programa “Porta dos Desesperados” é uma versão brasileira do programa norte americano. Posteriormente, este princípio foi replicado por outros famosos, como Gugu Liberato, Celso Portiolli e etc.

Figura 14 - Porta dos desesperados

Fonte: Retirado do site omelete[9]

3.2 Compreendendo o Paradoxo de Monty Hall

Queremos saber, se vale a pena para o participante, trocar de porta. A experiência mostra que compreender e resolver este paradoxo não é simples, entretando uma forma mais acessível e elucidativa de analisá-lo e entendê-lo é por meio de tabelas. Assim, usaremos este artificio para justificar e responder a questão, primeiro para 3 portas, em seguida para 4 e 5.

3.2.1 Monty Hall para 3 portas via tabela

As tabelas 1, 2 e 3 ilustram todos os casos possíveis de ocorrer caso o participante escolha a porta 1, 2 ou 3.

[9] Disponível em: < HTTPS://www.omelete.com.br/festival-do-rio/lua-de-cristal-sergio-mallandro-celebra-com-orgulho-os-25-anos-do-filme> Acesso em 26/12/2019.

Tabela 1 - Monty Hall escolhendo porta 1

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Porta aberta pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
1	1	2 ou 3	Ganha	Perde
1	2	3	Perde	Ganha
1	3	2	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 2 - Monty hall escolhendo a porta 2

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Porta aberta pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
2	1	3	Perde	Ganha
2	2	1 ou 3	Ganha	Perde
2	3	1	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 3 - Monty hall escolhendo a porta 3

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Porta aberta pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
3	1	2	Perde	Ganha
3	2	1	Perde	Ganha
3	3	2 ou 3	Ganha	Perde

Fonte: próprio autor

Como podemos perceber pelas tabelas 1, 2 e 3, caso o participante não troque de porta, a probabilidade de ele ganhar o premio é de

$$P = \frac{1}{3}$$

mas caso ele troque, sempre que lhe for oferecido esta oportunidade, sua probabilidade de ganhar é de

$$P = \frac{2}{3}.$$

Analisando as possibilidades podemos responder a questão posta: Vale a pena para o participante trocar de porta?

Sim. É vantajoso ao participante sempre trocar de porta.

Será que o mesmo vale para 4 e 5 portas? Novamente iremos analisar todas as possibilidades.

3.2.2 Monty Hall para 4 portas via Tabela

Verificaremos todas as possibilidades do problema de Monty hall para quatro portas. Observe que nas tabelas 4, 5, 6 e 7, todas as vezes em que a porta escolhida contêm o prêmio, ou seja, quando a primeira coluna da tabela e a segunda coluna são idênticas, o apresentador deverá abrir duas entre as três portas restantes. A quantidade de formas diferentes de abrir as duas portas entre as três, pode ser calculada por

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3.$$

Na primeira linha da tabela 4, ilustramos as três possibilidades de casos possíveis, quando a porta escolhida inicialmente, contêm o prêmio. Independente de qual forma as duas portas forem abertas, a probabilidade do participante não se altera. De forma análoga, elaboramos as tabelas 5, 6 e 7.

Tabela 4 - Quatro portas escolhendo a porta 1

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
1	1	2 – 3 2 – 4 3 – 4	Ganha	Perde
1	2	3 – 4	Perde	Ganha
1	3	2 – 4	Perde	Ganha
1	4	2 – 3	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 5 - Quatro portas escolhendo a porta 2

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
2	1	3 – 4	Perde	Ganha
2	2	3 – 4 1 – 3 1 – 4	Ganha	Perde
2	3	1 – 4	Perde	Ganha
2	4	1 – 3	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 6 - Quatro portas escolhendo a porta 3

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
3	1	2 – 4	Perde	Ganha
3	2	1 – 4	Perde	Ganha
3	3	2 – 4 1 – 2 1 – 4	Ganha	Perde
3	4	1 – 2	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 7 - Quatro portas escolhendo a porta 4

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
4	1	2 – 3	Perde	Ganha
4	2	1 – 3	Perde	Ganha
4	3	1 – 2	Perde	Ganha
4	4	2 – 3 1 – 2 1 – 3	Ganha	Perde

Fonte: próprio autor

Logo, quando o participante não troca de porta, ele ganha somente em um caso num total de quatro, neste caso a probabilidade de ganhar é

$$P = \frac{1}{4}.$$

Trocando de porta, ele ganha três em quatro posssibilidades, logo a probabilidade de ganhar trocando de porta é

$$P = \frac{3}{4}.$$

Portanto, para quatro portas, é vantajoso ao participante trocar de porta.

3.2.3 Monty Hall para 5 portas via Tabela

Analisamos todas os casos possíveis de ocorrer com o participante.

Tabela 8 – Cinco portas escolhendo porta 1

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
1	1	2 – 3 – 4 2 – 3 – 5 2 – 4 – 5 3 – 4 – 5	Ganha	Perde
1	2	3 – 4 – 5	Perde	Ganha
1	3	2 – 4 – 5	Perde	Ganha
1	4	2 – 3 – 5	Perde	Ganha
1	5	2 – 3 – 4	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 9 - Cinco portas escolhendo porta 2

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
2	1	3 – 4 – 5	Perde	Ganha
2	2	1 – 3 – 4 1 – 3 – 5 1 – 4 – 5 3 – 4 – 5	Ganha	Perde
2	3	1 – 4 – 5	Perde	Ganha
2	4	1 – 3 – 5	Perde	Ganha
2	5	1 – 3 – 4	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 10 - Cinco portas escolhendo porta 3

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
3	1	2 – 3 – 4	Perde	Ganha
3	2	1 – 4 – 5	Perde	Ganha
3	3	1 – 2 – 4 1 – 2 – 5 1 – 4 – 5 2 – 4 – 5	Ganha	Perde
3	4	1 – 2 – 5	Perde	Ganha
3	5	1 – 2 – 4	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 11 - Cinco portas escolhendo porta 4

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
4	1	2 – 3 – 5	Perde	Ganha
4	2	1 – 3 – 5	Perde	Ganha
4	3	1 – 2 – 5	Perde	Ganha
4	4	1 – 2 – 3 1 – 2 – 5 1 – 3 – 5 2 – 3 – 5	Ganha	Perde
4	5	1 – 2 – 3	Perde	Ganha

Fonte: próprio autor

Tabela 12 - Cinco portas escolhendo porta 5

Porta escolhida	Porta com Prêmio	Portas abertas pelo apresentador	Não troca de porta	Troca de porta
5	1	2 – 3 – 4	Perde	Ganha
5	2	1 – 3 – 4	Perde	Ganha
5	3	1 – 2 – 4	Perde	Ganha
5	4	1 – 2 – 3	Perde	Ganha
5	5	1 – 2 – 3 1 – 2 – 4 1 – 3 – 4 2 – 3 – 4	Ganha	Perde

Fonte: próprio autor

Primeiramente, notemos que, todas as vezes que a porta escolhida pelo participante for a mesma do prêmio, o apresentador deverá abrir 3 dentre 4 portas. Portanto, a quantidade de formas possíveis é dada por uma combinação simples

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = 4.$$

Em cada tabela explicitamos todas essas 4 formas possiveis , nas quais o apresentador escolhe somente uma delas. Independente de sua escolha a probabilidade para o participante não se altera.

Analisando as tabelas 8, 9, 10, 11 e 12, temos que das cinco possibilidades de cada uma delas, se o participante não trocar de porta, ganha em apenas uma. Logo a probabilidade de ganhar sem trocar de porta é

$$P = \frac{1}{5}.$$

Dessas cinco possibilidades, se ele trocar de porta, ganha em quatro. Então a probabilidade de ganhar trocando de porta é

$$P = \frac{4}{5}.$$

Logo, para 5 portas, tambem é vantajoso ao participante trocar de porta.

3.3 Problema de Monty Hall e oTeorema de Bayes

Uma das formas de abordar o Problema de Monty Hall é por meio do Teorema de Bayes, fato que analisaremos a seguir considerando em cada caso a abertura de $n - 2$ portas. Além de estudarmos o caso clássico para três portas, faremos uma extensão do problema para quatro e cinco portas.

3.3.1 Problema de Monty Hall com Três portas

Sem perda de generalidade, suponha que o participante escolha a porta 1 e não aceite trocar de porta. Considere os seguintes eventos:

a) A_1: prêmio está atrás da porta 1.

b) A_2: prêmio está atrás da porta 2.

c) A_3: prêmio está atrás da porta 3.

d) B: apresentador abre a porta vazia 2.

Aplicaremos o teorema de Bayes com $i = 1,2,3$ para calcular a probabilidade do prêmio estar atrás da porta 1, sabendo que o apresentador abriu a porta 2, ou seja, queremos calcular $P(A_1|B)$, onde

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \tag{3.1}$$

Como temos três portas, cada

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Os condicionais são:

- $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$, pois o apresentador pode abrir a porta 2 ou 3.
- $P(B|A_2) = 0$, pois o apresentador nunca abrirá a porta com o prêmio.
- $P(B|A_3) = 1$, pois como o participante escolheu a porta 1 e o prêmio está atrás da porta 3, obrigatoriamente o apresentador abrirá a porta 2. Substituindo em (3.1) os valores calculados:

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{3} = \frac{1}{3}.$$

Logo a probabilidade de o participante ganhar o prêmio escolhendo a porta 1 e mantendo a escolha é de $\frac{1}{3}$, ou seja $33{,}33\%$.

Como $P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) = 1$ e $P(A_2|B) = 0$ temos que

$$\frac{1}{3} + 0 + P(A_3|B) = 1 \Rightarrow P(A_3|B) = \frac{2}{3}.$$

Portanto a probabilidade de o participante ganhar o prêmio trocando de porta é de $\frac{2}{3}$, ou aproximadamente $66{,}66\%$.

3.3.2 Problema de Monty Hall com Quatro portas

Sem perda de generalidade, suponha que o participante escolha a porta 1 e não aceite trocá-la. Considere os seguintes eventos:

a) A_1: prêmio está atrás da porta 1.

b) A_2: prêmio está atrás da porta 2.

c) A_3: prêmio está atrás da porta 3.

d) A_4: prêmio está atrás da porta 4.

e) B: apresentador abre as portas 2 e 3.

Aplicaremos o teorema de Bayes com $i = 1,2,3,4$ para calcular a probabilidade do prêmio estar atrás da porta 1, sabendo que o apresentador abriu as portas 2 e 3, ou seja, queremos calcular $P(A_1|B)$ dado que:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4)} \quad (3.2)$$

e

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}.$$

Os condicionais são:

- $P(B|A_1) = \frac{1}{3}$, pois a probabilidade de o apresentador abrir as portas 2 e 3 simultaneamente dado que o participante está na porta 1 e o prêmio também é $\frac{1}{3}$, uma vez que $S = \{(2,3), (2,4), (3,4)\}$. Note que $C_{3,2} = 3 = \#(S)$
- $P(B|A_2) = 0$, pois o apresentador nunca abrirá a porta com o prêmio.
- $P(B|A_3) = 0$, pois o apresentador nunca abrirá a porta com o prêmio.
- $P(B|A_4) = 1$, a probabilidade de o apresentador abrir a porta 2 e 3 sabendo que o prêmio está na porta 4 é de 100% pois, neste caso, as únicas possibilidades para ele são portas 2 e 3.

  Substituindo os dados obtidos em (3.2) temos:

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{4} = \frac{1}{4}.$$

Assim, a probabilidade de o participante ganhar o prêmio escolhendo a porta 1, e permanecendo nesta, é de 25%.

Analisaremos, agora, se é vantajoso, ou não, ao participante, trocar de porta.

Sabemos que

$$P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + P(A_4|B) = 1$$

que

$$P(A_1|B) = \frac{1}{4}\,.$$

Além disso

$$P(A_2|B) = P(A_3|B) = 0,$$

pois, a probabilidade de, o prêmio estar na porta 2 sabendo que o apresentador abriu, também, a porta 2, é zero. Analogamente para a porta 3.

Assim,

$$P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + P(A_4|B) =$$

$$\frac{1}{4} + 0 + 0 + P(A_4|B) = 1 \Rightarrow P(A_4|B) = \frac{3}{4}$$

Logo, a probabilidade de o participante ganhar o prêmio trocando de porta é 75%.

Concluimos, então, que é vantajoso ao participante trocar de porta.

3.3.3 Problema de Monty Hall com Cinco portas

Sem perda de generalidade, suponha que o participante escolha a porta 1 e não aceite trocar de porta. Considere os seguintes eventos:

a) A_1: prêmio está atrás da porta 1.

b) A_2: prêmio está atrás da porta 2.

c) A_3: prêmio está atrás da porta 3.

d) A_4: prêmio está atrás da porta 4.

e) A_5: prêmio está atrás da porta 5.

f) B: apresentador abre as portas 3, 4 e 5.

Aplicaremos o teorema de Bayes com $i = 1,2,3,4,5$ para calcular a probabilidade do prêmio estar atrás da porta 1, sabendo que o apresentador abriu as portas 3,4, 5, ou seja, queremos calcular $P(A_1|B)$ dado que:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4) + P(B|A_5)P(A_5)}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{5}.$$

Os condicionais são:

- $P(B|A_1) = \frac{1}{4}$, pois a probabilidade de o apresentador abrir as portas 3, 4 e 5 simultaneamente dado que o participante escolheu a porta 1 e o prêmio também encontra-se lá, é de $\frac{1}{4}$, uma vez que $S = \{(2,3,4),(2,4,5),(3,4,5),(2,3,5)\}$. Note que $C_{4,3} = 4 = \#(S)$.
- $P(B|A_2) = 1$, pois as portas disponíveis são justamente 3, 4 e 5.
- $P(B|A_3) = 0$, pois o apresentador nunca abrirá a porta que contenha o prêmio.
- $P(B|A_4) = 0$, mesmo motivo do item anterior.
- $P(B|A_5) = 0$, pois o apresentador nunca abrirá a porta com prêmio.

Aplicando o teorema de Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{20}{5} = \frac{1}{5}.$$

A probabilidade de, o participante ganhar o prêmio escolhendo a porta 1, e recusando-se trocar de porta, é de 20%.

Analisaremos agora se é vantajoso, ou não, ao participante, trocar de porta.

Sabemos que

$$P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + P(A_4|B) + P(A_5|B) = 1$$

que

$$P(A_1|B) = \frac{1}{5}\,.$$

Além disso

$$P(A_3|B) = P(A_4|B) = P(A_5|B) = 0,$$

pois a probabilidade de o prêmio estar nas portas 3, 4 ou 5 sabendo que o apresentador as abriu , é zero.

Assim,

$P(A_1|B) + P(A_2|B) + P(A_3|B) + P(A_4|B) + P(A_5|B)$=

$$\frac{1}{5} + P(A_2|B) + 0 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow P(A_2|B) = \frac{4}{5}.$$

Concluímos , então, que é vantajoso a troca de portas, pois a probabilidade de o participante ganhar o prêmio efetuando a mudança é de 80%.

4 UMA ATIVIDADE HIPOTÉTICA SOBRE MONTY HALL E O VESTIBULAR DA UEL

Atualmente as questões objetivas estão presentes em provas de vestibulares, ENEM, provas da OBMEP, materiais didáticos, concursos públicos e etc.

Uma questão objetiva geralmente possui em sua estrutura a instrução, suporte, enunciado e alternativas.

Na instrução o estudante recebe orientações de como proceder para a resolução da questão. Em uma prova, a instrução não é obrigatório estar presente.

Sobre o enunciado, podemos afirmar que:

> O enunciado, base da questão, traz em si o estímulo que provoca a resposta. É uma situação problema expressa como afirmativa ou pergunta e explicita claramente a base da resposta – o quê se exige do avaliando – e como ele deve proceder – o comando da resposta. Ao enunciar o problema, deve-se apresentar todas as informações de que o aluno precisa para se situar sobre o quê o item aborda e que é objeto de análise. Essas informações devem também ser suficientes para que ele compreenda claramente qual é o problema proposto e de que forma deve resolvê-lo. (Guia de elaboração e revisão de questão e itens de múltipla escolha, Governo de Minas Gerais, p.8)

Nas alternativas temos a resposta correta e os distratores. Sobre os distratores:

> Os distratores, conforme o próprio nome indica, são respostas plausíveis que têm a função de atrair quem não sabe e escolhe sem fundamento a resposta que lhe parece certa ou que o impressiona. Para evitar acertos ao acaso, os distratores têm que ser plausíveis, vale dizer, devem ser aceitáveis como possibilidades de respostas para o problema apresentado, mas não correspondem satisfatoriamente ou em sentido completo ao que é solicitado em relação ao tópico de conteúdo e à habilidade avaliados. (Guia de elaboração e revisão de questão e itens de múltipla escolha, Governo de Minas Gerais, p.8)

Podemos perceber que apesar de a primeira vista parecer que uma questão objetiva pode ser resolvida de maneira mais fácil, os distratores dificultam a resolução por parte daqueles que não se prepararam muito.

Em relação ao vestibular da UEL, prova na qual é composta de 60 questões objetivas e dentre essas questões temos questões muito fáceis, fáceis, intermediárias, difíceis e muito difíceis. Esta classificação é feita com base na Teoria Clássica de Testes (TCT) (COPS, 2019,p.9).

> Nesta prova, quando a porcentagem de candidatos que responderam corretamente a determinado item for maior do que 80%, este item é considerado muito fácil; entre 60% e 80%, fácil; entre 40% e 60%, intermediário; entre 20% e 40%, difícil; abaixo de 20%, muito difícil. (Revista diálogos pedagógicos – UEL, 2019, p.9)

De acordo com a Revista Diálogos Pedagógicos da UEL, as questões que são consideradas difíceis ou muito difíceis acabam sendo resolvidas ao acaso, mesmo por bons estudantes. Isto nos leva a refletir sobre: é possível que o candidato consiga melhorar suas chances de resolver ao acaso uma questão.

> O acerto ao acaso representa as respostas dadas arbitrariamente, por “chute”. Isso ocorre principalmente com os itens que são mais difíceis, para os quais indivíduos de baixa aptidão não conhecem a resposta correta, mas arriscam qualquer uma. (RABELO, 2013, p.132)

Quando analisamos a estrutura de uma questão objetiva, observamos que ela é composta por quatro distratores e apenas uma resposta correta. A experiência como educador, nos mostra que, ao deparar-se com uma questão em que o candidato não sabe resolver, ele assinala a alternativa que supõe correta. Havendo oportunidade, retornam a mesma para uma leitura minusciosa das alternativas, eliminando assim, alguns distratores. Após este processo, resta ao estudante analisar duas, três ou quatro alternativas. Será que vale a pena trocar a alternativa marcada no início, por alguma das remanescentes?

Neste estudo, estamos considerando algumas hipóteses, que são:

- o estudante marcará inicialmente uma alternativa de maneira aleatória sem tentar resolver a questão, uma vez que durante a primeira leitura, pensou não saber resolve-lo

- após retornar ao problema, ele tentará eliminar alguns distratores com base no conhecimento que possui.
- A alternativa assinalada no início é um distrator, pois conforme vimos no problema de Monty Hall, só vale a pena trocar de porta, se a que foi inicialmente escolhida não contiver o prêmio.

O dilema do estudante é semelhante ao problema de Monty Hall, já que inicialmente uma alternativa foi escolhida ao acaso, e, posteriormente, alguns distratores foram eliminados. Desta forma, é vantajoso ao candidato permanecer com a escolha inicial ou trocá-la?

Pelos estudos que fizemos neste trabalho, quando as condições citadas forem satisfeitas, compensa ao estudante mudar de alternativa. Porém, quais são as suas chances? Ou melhor, quais são as probabilidades de sucesso? Listamos, a seguir, as situações possíveis.

Recordemos que a hipótese é de que o candidato não saiba resolver totalmente a questão e portanto escolha, inicialmente, ao acaso uma alternativa (“chute”), dentre as cinco do gabarito.

Para exemplificarmos o fato supracitado, utilizaremos uma questão da primeira fase do vestibular da UEL 2020 e sua resolução figura 15. Optamos por empregar a imagem para manter o formato da questão e sermos fidedignos ao processo. O intuito é aplicar um raciocínio análogo aos efetuados nas tabelas 8 a 12 só que ao inves de portas 1, 2, 3, 4 e 5, teremos alternativas a, b, c d e e.

Figura 15 - Questão 20 da primeira fase Vestibular UEL

20

Um estudante decide pôr à prova a frase "vida é código e combinação". Sabendo que os indivíduos de uma determinada espécie apresentam um DNA com exatos 150 milhões de bases nitrogenadas em cada cadeia, o estudante cria um programa para gerar, aleatoriamente, uma sequência de 150 milhões de letras que serão sorteadas honestamente dentre A, C, G e T.

Fixada uma cadeia do DNA de um determinado indivíduo desta espécie, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de esse programa gerar uma sequência que represente essa cadeia do DNA.

a) $2^{-3\times10^{7}}$

b) $2^{-3\times10^{8}}$

c) $4^{-3\times10^{8}}$

d) $60^{-1}\times10^{-7}$

e) $60^{-1}\times10^{-8}$

Alternativa correta: b

Conteúdo programático: Análise Combinatória: Princípios de contagem. Noções de Estatística e Probabilidade: Conceituação de probabilidade.

Justificativa

De acordo com o Princípio da Contagem, a quantidade possível de sequências geradas pelo computador é 4 elevado a 150 milhões ou, equivalentemente, $4^{150\times10^{6}}$. Utilizando as regras de potenciação, concluímos que existem $4^{15\times10^{7}} = (2^{2})^{15\times10^{7}} = 2^{30\times10^{7}} = 2^{3\times10^{8}}$ sequências possíveis. Consequentemente, a probabilidade de se gerar a cadeia de DNA fixada é de $\frac{1}{2^{3\times10^{8}}}$ ou, equivalentemente, $2^{-3\times10^{8}}$.

Fonte: retirado do site da COPS

Suponha que um aluno marque ao acaso a alternativa (a) da questão. Lendo atentamente o enunciado ele percebe que para resolver a questão será necessário calcular quantos elementos existem no espaço amostral. Como em cada DNA temos 150 milhões de bases nitrogenadas em cadeia e que são quatro possibilidades para cada base nitrogenada, temos

$$\underbrace{4\times4\times4\times\ldots\times4}_{150\ milhões} = 4^{150000000}.$$

Logo, em nosso espaço amostral temos $4^{150000000}$ elementos, ou seja, $\#(S) = 4^{150000000}$. O programa irá gerar aleatoriamente um caso entre $4^{150000000}$, logo $\#(A) = 1$. A probabilidade do programa gerar uma sequência que represente essa cadeia do DNA é

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ elementos\ possíveis} = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{1}{4^{150000000}}.$$

O candidato elimina dos distradores (d) e (e), pois a base obtida não é 60. Como em nenhuma alternativa este resultado se apresenta, o estudante continua a sua tentativa de resolução.

$$\frac{1}{4^{150000000}} = \frac{1}{(2^2)^{150000000}} = \frac{1}{2^{300000000}}$$

Uma vez que a base obtida agora é 2, ele identifica a alternativa (c) também é um distrator.

Qual a probabilidade do aluno acertar a questão trocando da alternativa inicial para a (b)?

Este caso é análogo ao problema de Monty Hall, porém ao invés de portas temos alternativas. No princípio, a sua probabilidade de acertar a questão é de 20%, pois $S = \{a, b, c, d, e\}$ e como todas são equiprováveis e somente uma é correta

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

Assinalando uma opção aleatoriamente e em seguida resolvendo parcialmente a questão, proporcionou ao estudante identificar três distratores, e aplicando o raciocínio de Monty Hall, a probabilidade de acertar a questão, caso mude de alternativa é

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{4}{5} = 80\%.$$

Portanto trocando de alternativa o aluno tem uma probabilidade maior de acertar a questão.

Ressaltamos que para aplicar o estudo feito acima, é essencial que as hipóteses sejam satisfeitas. Não pretendemos incentivar que o aluno não estude ou que resolva avaliações da forma que foi descrita acima. Nosso objetivo é puramente a aplicação do Problema de Monty Hall em uma situação do cotidiano do aluno.

4.1 Atividade proposta

A finalidade desta atividade é aplicar a ideia do problema de Monty Hall, para decidir se muda ou não de alternativa, em uma questão objetiva pertencente a primeira fase do vestibular da UEL, supondo que o candidato não saiba solucioná-la totalmente.

Figura 16 - Questão 10 da primeira fase UEL 2017

10

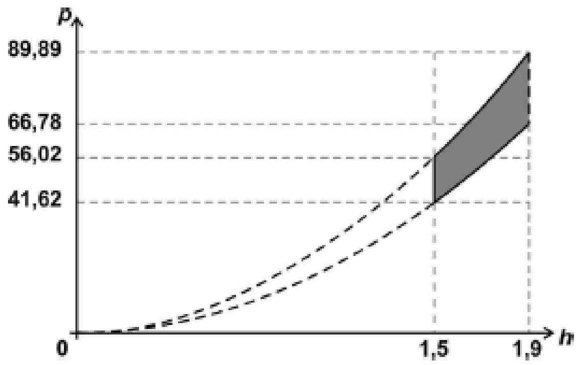
Existem critérios, cada qual com suas vantagens e limitações, para determinar se certo indivíduo é obeso. Um dos principais testes aplicados para esse fim é o cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC), definido pela equação

$$I = \frac{p}{h^2}$$

em que I representa o IMC (kg/m^2), h representa a altura (m) e p representa a massa (kg). De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), um indivíduo é classificado como tendo IMC normal se $18,5 \leq I \leq 24,9$. Considerando um universo composto por indivíduos adultos, cuja altura h seja tal que $1,5 \leq h < 1,9$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a região no plano cartesiano $h \times p$ definida por todas as combinações de altura e massa dos indivíduos com IMC normal, nesse universo.

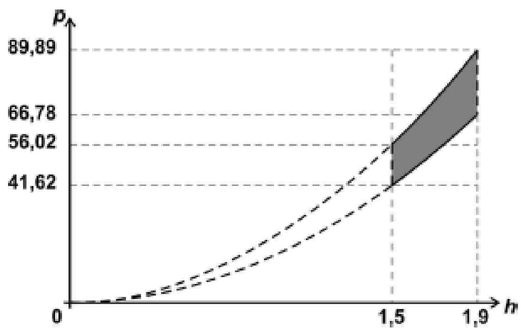
Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Figura 17 - Alternativa a) da questão 10



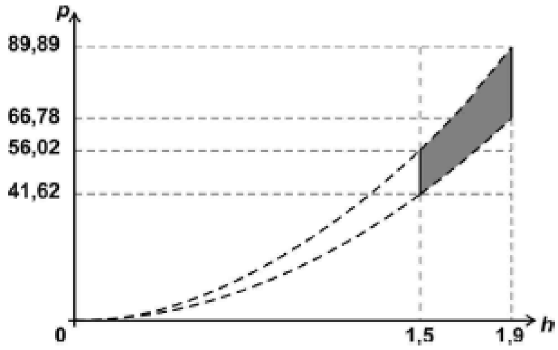
Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Figura 18 - Alternativa b) da questão 10



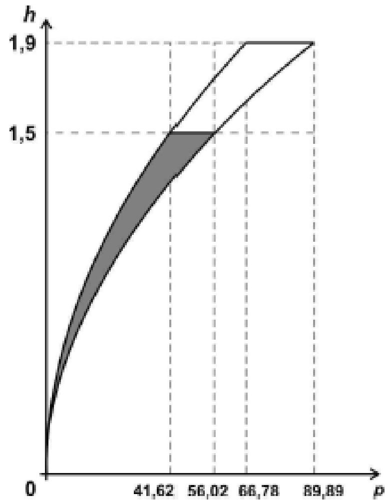
Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Figura 19 - Alternativa c) da questão 10



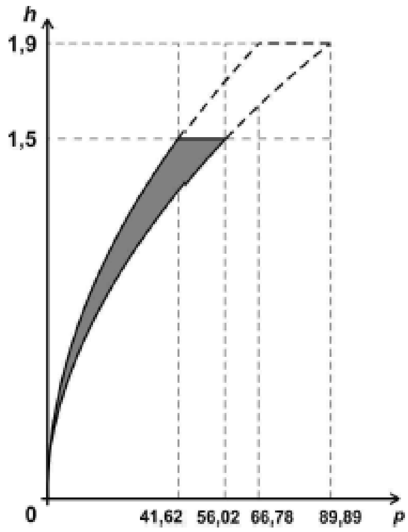
Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Figura 20 - Alternativa d) da questão 10



Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Figura 21 - Alternativa e) da questão 10



Fonte: Vestibular da UEL 1º fase

Considere que o candidato assinalou aleatoriamente a opção (b) na questão da figura 16. Durante a releitura da questão, percebeu que

$$18{,}5 \leq \frac{p}{h^2} \leq 24{,}9.$$

Multiplicou todos os membros desta inequação por h^2 e obteve

$$18{,}5h^2 \leq p \leq 24{,}9h^2.$$

Concluiu que $18{,}5h^2$ e $24{,}9h^2$ refere-se a parábolas com concavidade voltada para cima, pois $a > 0$, nos eixos $h \times p$ e que a desigualdade é inclusiva. E ainda que

$$1{,}5 \leq h < 1{,}9.$$

Então identifica os distratores (c), (d) e (e) que são representados pelas figuras 19, 20 e 21, respectivamente.

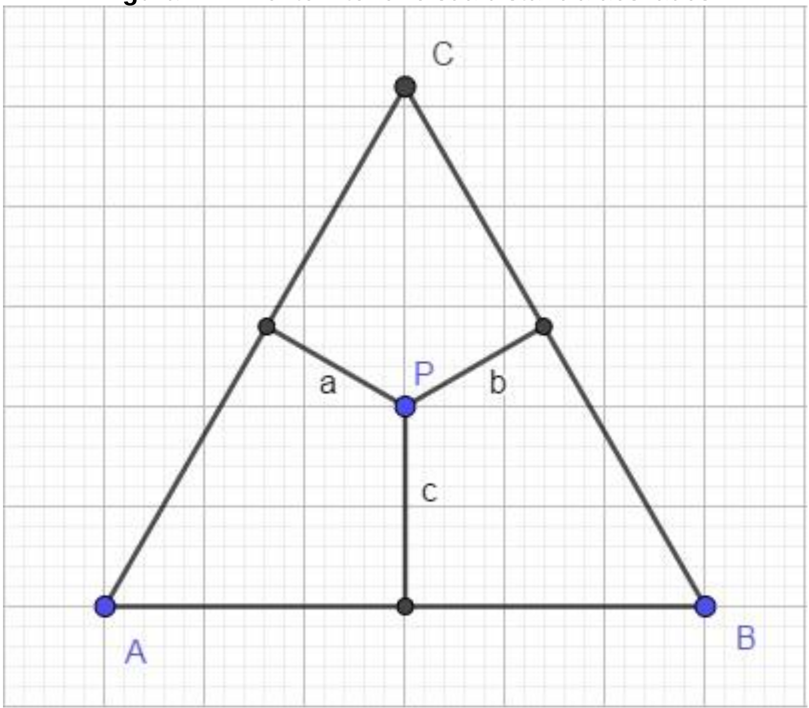
Utilizando o método do problema de Monty Hall, se o candidato trocar da alternativa (b) (cf. figura 18) para (a) (cf. figura 17), qual a probabilidade dele acertar a questão?

A resolução desta questão encontra-se no apêndice, pois nosso objetivo neste momento é apenas ilustrar uma possibilidade de questão sobre o Problema de Monty Hall.

5 PROBLEMA DO MACARRÃO

Considere um triângulo equilátero ABC e seja P um ponto aleatório no interior deste triângulo. Trace a distância de P a cada um dos lados do triângulo, teremos os segmentos de comprimentos a, b e c (cf. figura 22).

Figura 22 – Ponto interior e sua distância aos lados



Fonte: próprio autor

Qual é a probabilidade dos segmentos a, b e c formarem um triângulo?

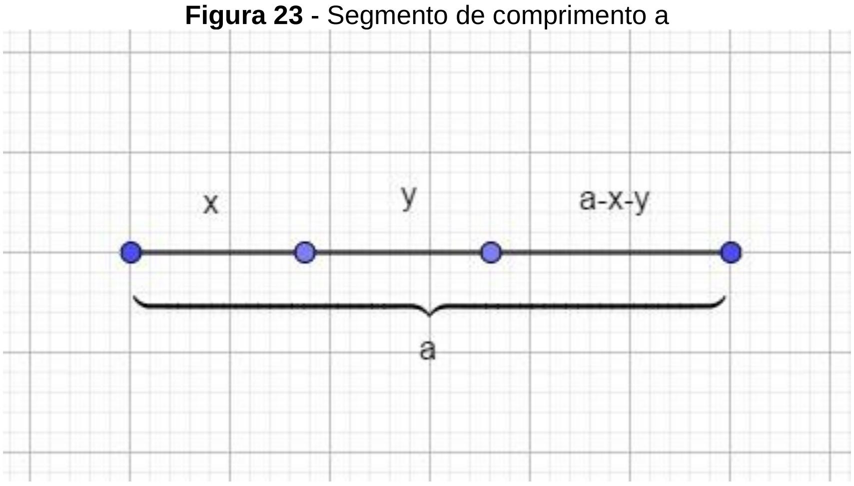
O problema do macarrão foi trabalhado em 1994 num curso de aperfeiçoamento para professores secundários no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) pelo professor Eduardo Wagner. A generalização deste problema foi realizada com base no artigo *O PROBLEMA DO MACARRÃO E UM PARADOXO FAMOSO* do professor Eduardo Wagner. O problema consistia em quebrar um macarrão em três partes, de maneira aleatória, e determinar qual a probabilidade de formar um triângulo com os três pedaços.

Neste problema, o espaço amostral é infinito, pois podemos dividir o segmento em três partes de infinitas maneiras.

Será que o evento desejado é finito ou infinito? Conforme estudaremos a seguir, é infinito também.

Considere um segmento de medida h. Seja x, y e $h-x-y$ os comprimentos do primeiro, segundo e terceiro pedaço, respectivamente.

Figura 23 - Segmento de comprimento a

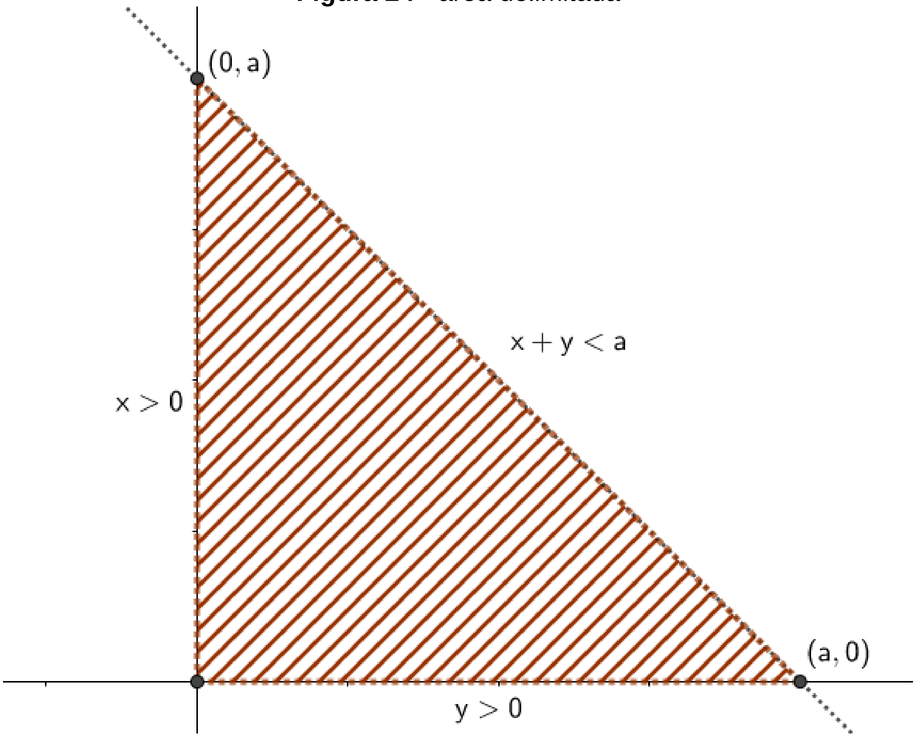


Fonte: próprio autor

Dessa forma, cada parte do segmento representado na figura 23 está associado a um par ordenado (x,y) com as condições $h>x>0$, $h>y>0$ e $0<\mathrm{x}+\mathrm{y}<h$.

Podemos representar tais condições num plano cartesiano para melhor compreensão (cf. figura 24).

Figura 24 - área delimitada



Fonte: próprio autor

Como nem sempre as três partes obtidas formam triângulos, analisaremos sob quais condições isso ocorrerá. De acordo com a condição de existência de um triângulo, a soma de dois lados deve ser maior que o terceiro lado. Neste caso temos um lado medindo x, outro y e o terceiro $\mathrm{a} - \mathrm{x} - \mathrm{y}$. Aplicando a condição de existência de um triângulo temos:

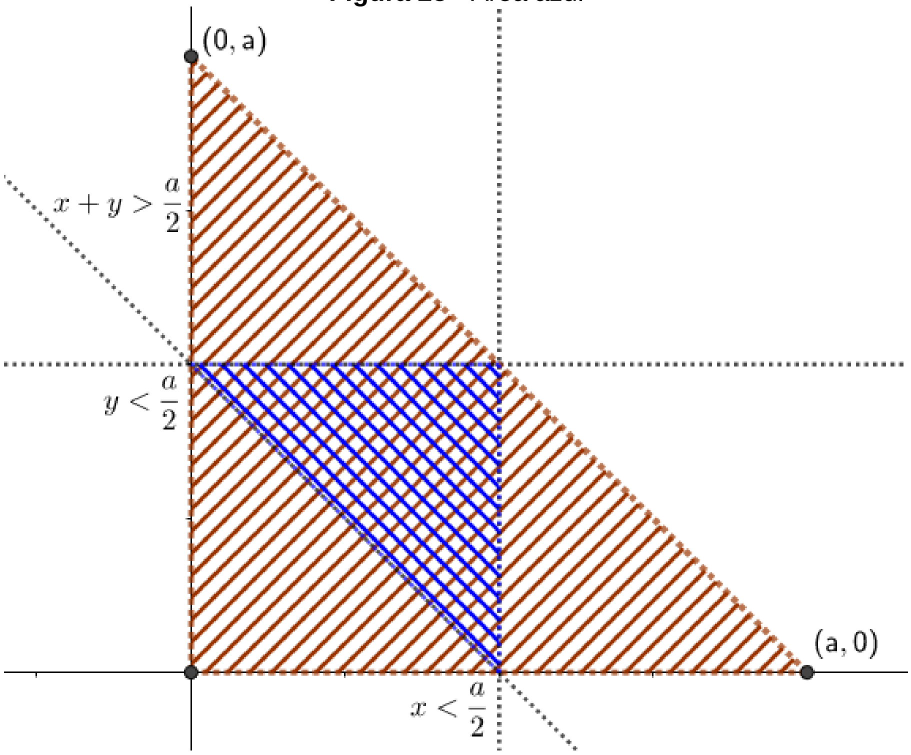
I. $\mathrm{x} + \mathrm{a} - \mathrm{x} - \mathrm{y} > \mathrm{y} \Rightarrow \mathrm{y} < \frac{\mathrm{h}}{2}$

II. $\mathrm{y} + \mathrm{a} - \mathrm{x} - \mathrm{y} > \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} < \frac{\mathrm{h}}{2}$

III. $\mathrm{x} + \mathrm{y} > \mathrm{a} - \mathrm{x} - \mathrm{y} \Rightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} > \frac{h}{2}$

Logo, as três condições acima devem ser satisfeitas por x e y para que se construa um triângulo com os três segmentos (cf. figura 25).

Figura 25 - Área azul



Fonte: próprio autor

Para calcularmos a probabilidade desejada $\mathrm{P(A)}$, basta calcular a área favorável que denominamos de S_1 (região azul da figura 22) e dividirmos pela área da total (região vermelha da figura 22) que representaremos pela letra S_2. A área S_1 é formada pelas retas $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ e $x + y = \frac{h}{2}$. A região S_1 é um triângulo é um triângulo e podemos calcular a sua área por:

$$S_1 = \frac{\frac{h}{2} \times \frac{h}{2}}{2} = \frac{\frac{h^2}{4}}{2} = \frac{h^2}{8}$$

E de forma análoga podemos calcular a área da região S_2 que é determinada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = h$.

$$S_2 = \frac{h \times h}{2} = \frac{a^2}{2}$$

A probabilidade de formar um triângulo com os três segmentos é

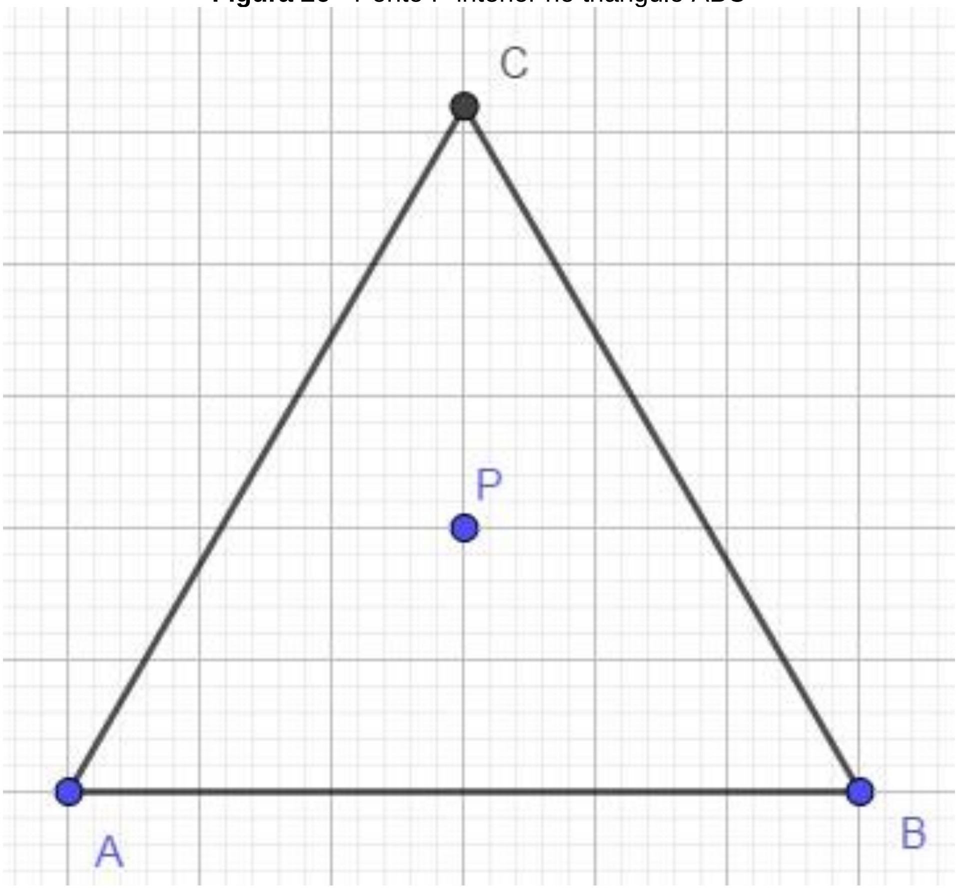
$$P(A) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{h^2}{8}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{h^2}{8} \times \frac{2}{h^2} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de formarmos um triângulo, partindo um macarrão em três partes de maneira aleatória é de 25%.

Outra forma de verificar este mesmo resultado é por meio da geometria plana.

Considere um triângulo equilátero ABC e seja P um ponto interior (cf. figura 26).

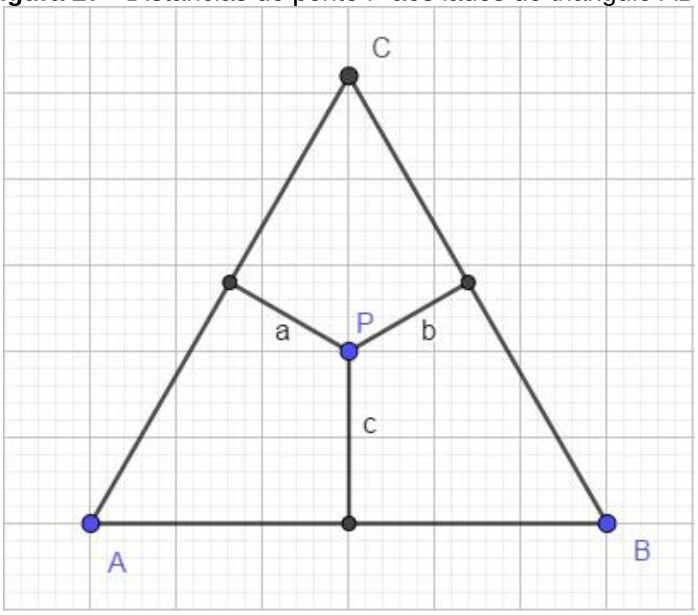
Figura 26 - Ponto P interior no triângulo ABC



Fonte: próprio autor

Traçamos as distâncias do ponto P a cada um dos lados do triângulo ABC (cf. figura 27).

Figura 27 - Distâncias do ponto P aos lados do triângulo ABC

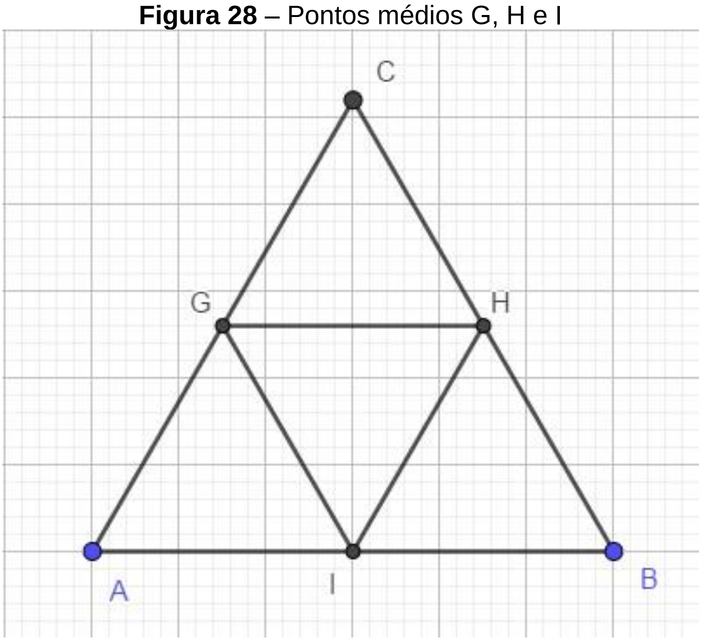


Fonte: próprio autor

Será que para qualquer ponto interior P do triângulo ABC é possível formar um outro triângulo utilizando os segmentos de comprimento a, b e c?

A resposta para a pergunta acima é não, pois nem todo ponto satisfaz a condição de existência de um triângulo.

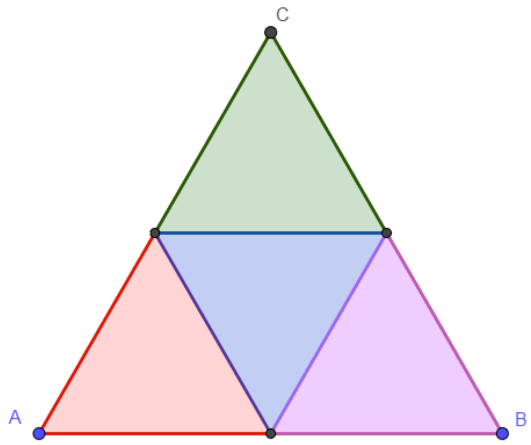
Figura 28 – Pontos médios G, H e I



Fonte: próprio autor

Sejam G, H e I pontos médios dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente (cf. figura 25). Com isto temos quatro regiões que destacamos como mostraremos a seguir (cf. figura 26).

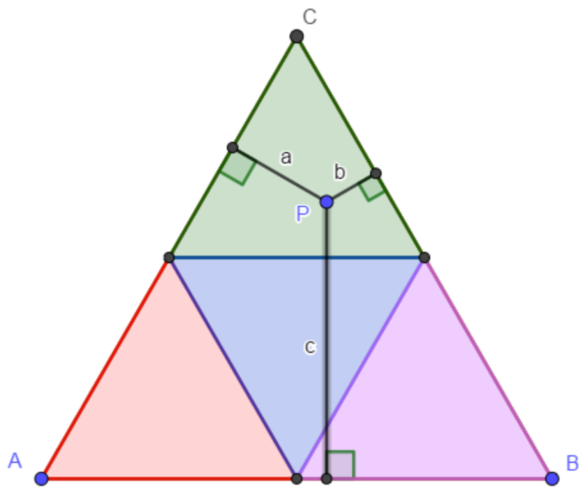
Figura 29 - Triângulo ABC dividido em quatro partes



Fonte: próprio autor

Note que para qualquer ponto interior do triângulo verde, que é equilátero, as três distâncias do ponto aos lados do triângulo ABC não formam um triângulo, pois a soma de dois lados não é maior que o terceiro lado, ou seja, $a + b < c$ (cf. figura 27). E por simetria, obtemos resultado idêntico com relação aos triângulos vermelho e roxo.

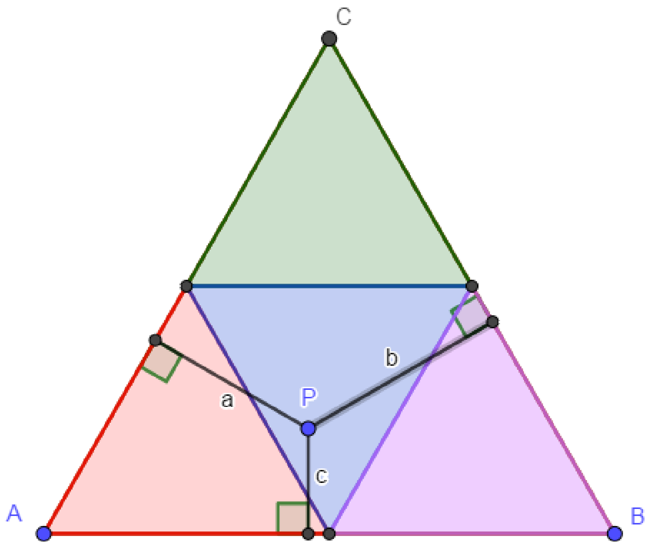
Figura 30 – Exemplo de ponto interior fora da região azul



Fonte: próprio autor

Para o triângulo azul, qualquer que seja o ponto P interior, temos que a condição de existência de um triângulo formado pelos segmentos de comprimento a, b e c é satisfeita (cf. figura 28).

Figura 31 – Exemplo com ponto P dentro da região azul



Fonte: próprio autor

Vamos verificar a afirmação anterior, aplicando a condição de existência de um triângulo temos

$$a + b > c, \tag{5.1}$$

$$a + c > b, \tag{5.2}$$

$$b + c > a. \tag{5.3}$$

E do Teorema de Viviani temos

$$a + b + c = h,$$

$$a + b = h - c. \tag{5.4}$$

Substituindo (5.4) em (5.1) teremos

$$h - c > c$$

$$h > 2c$$

$$\frac{h}{2} > c. \tag{5.5}$$

E de forma análoga, obtemos

$$\frac{h}{2} > b, \tag{5.6}$$

$$\frac{h}{2} > a. \tag{5.7}$$

As desigualdades (5.5), (5.6) e (5.7) são representadas pela região interior do triângulo azul (cf. figura 31).

Portanto a probabilidade de formar um triângulo com os seguimentos a, b e c definidos pelo ponto P é de

$$P = \frac{1}{4} = 25\%.$$

5.1 Problema do encontro[10]

Duas pessoas A e B, combinaram de se encontrar entre 12h e 13h. Quem chegasse primeiro no local de encontro, esperaria por até 20 minutos pelo outro. Qual é a probabilidade das duas pessoas se encontrarem?

Denote o horário de chegada de A por x e de B por y. Em que x e y é a quantidade de minutos após às 12h. Pelo enunciado do problema

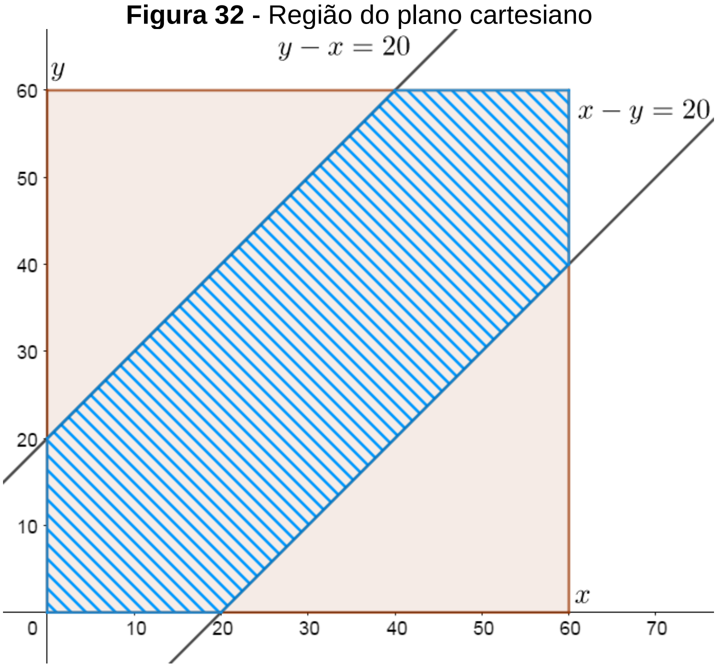
$$0 \leq x \leq 60 \text{ e } 0 \leq y \leq 60.$$

O encontro acontecerá somente se

$$\begin{cases} x - y \leq 20 \\ y - x \leq 20 \end{cases} \tag{5.1}$$

Representamos o sistema (5.1) no plano cartesiano.

Figura 32 - Região do plano cartesiano



Fonte: próprio autor

Dentro do quadrado vermelho cada par ordenado (x, y) representa uma possibilidade

[10] Problema retirado de (GNEDENKO, 1978, p.33).

de como poderá ocorrer o encontro. Por exemplo, $(10, 50)$ significa que a pessoa A chegou às 12:10 e B chegou às 12:50, logo eles não se encontraram. O encontro só ocorrerá se o ponto (x, y) pertencer a região azul que é a solução de (5.1). Assim a probabilidade de se encontrarem é determinado por

$$P = \frac{\acute{a}rea\ da\ regi\tilde{a}o\ azul}{\acute{a}rea\ da\ regi\tilde{a}o\ vermelha} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

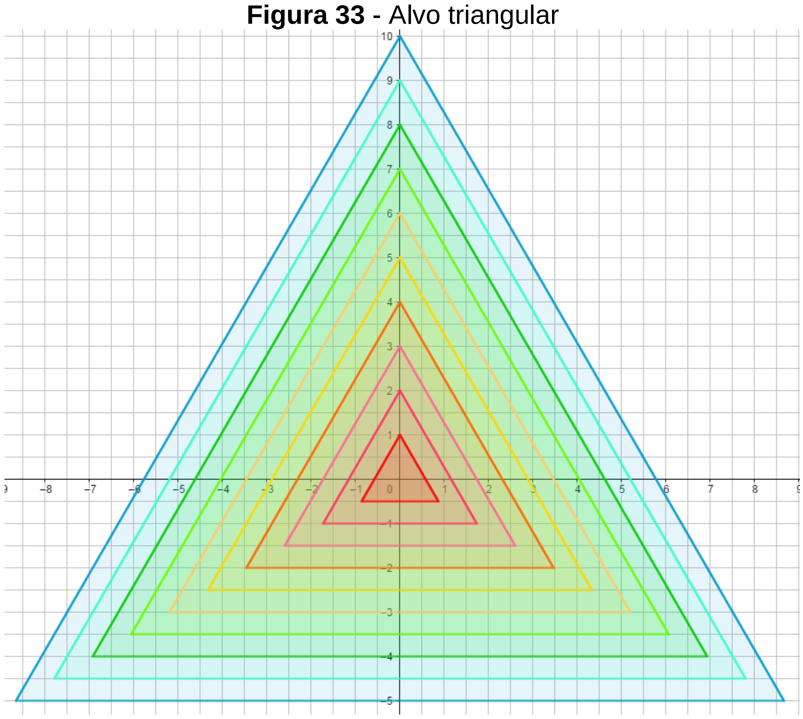
Portanto a probabilidade das duas pessoas se encontrarem é de aproximadamente 56%.

5.2 Oficina: tiro ao alvo triangular e probabilidade geométrica

A Oficina/jogo *tiro ao alvo triangular* foi criada durante as orientações desta dissertação. Tem como objetivo introduzir probabilidade geométrica de forma lúdica, e levar o público alvo a deduzir alguns conceitos. De acordo com Smole, Diniz, Pessoa e Ishiraha (2008), utilizar jogos nas aulas de matemática torna o processo de ensino e aprendizagem muito mais significativo. O estudante deixa de apenas assistir a aula, ao mesmo tempo em que aprende e se diverte.

Considere o alvo triangular da figura 30.

Figura 33 - Alvo triangular

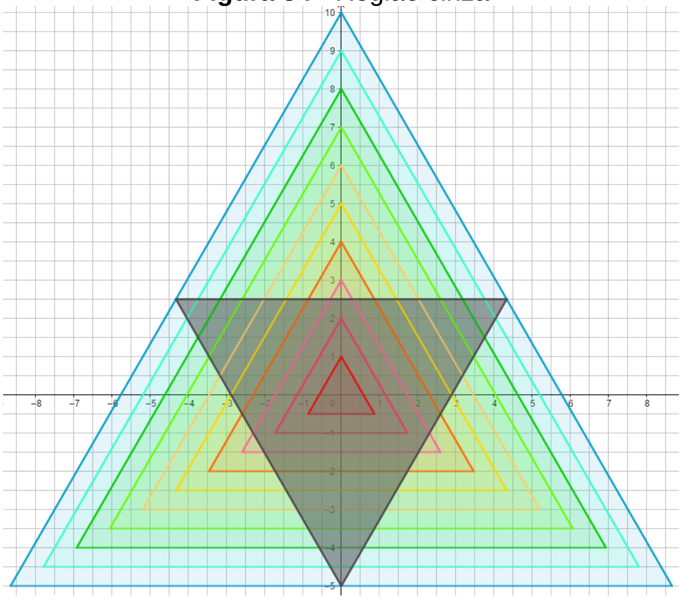


Fonte: próprio autor

Lançando-se um dardo no alvo triangular de maneira aleatória, ou seja, sem mirar especialmente em determinado ponto do alvo, qual é a probabilidade de que as distâncias do ponto em que se encontra o dardo, aos lados do triângulo maior formem um triângulo?

O problema é análogo ao que foi apresentado no início do capítulo. Desta forma o dardo lançado tem que atingir a região triangular que é formada pelos pontos médios dos lados do triângulo maior (cf. figura 31).

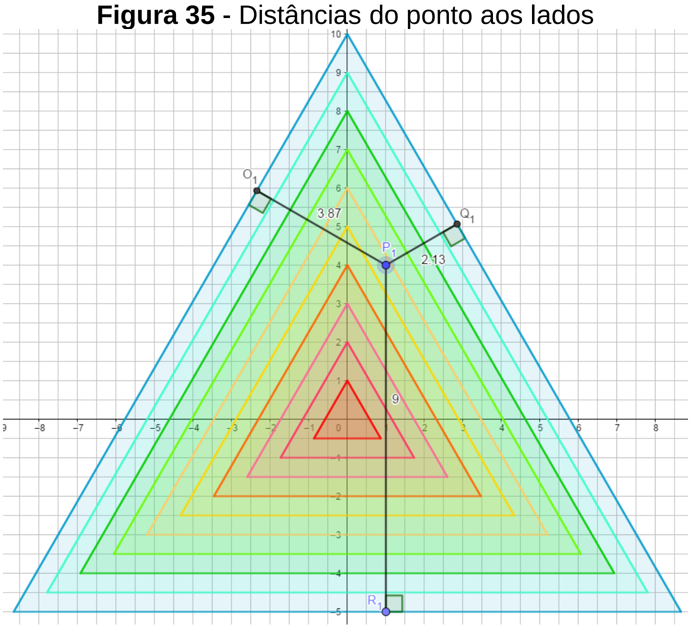
Figura 34 - Região cinza



Fonte: próprio autor

Recomenda-se que o professor deixe os alunos descobrirem a região escura por meio de tentativas e discussões. E que alerte aos alunos que, para calcular a distância do dardo até os lados do triângulo, devemos assegurar que o segmento, cujo o comprimento determina a distância, forme um ângulo reto com o lado desejado.

Figura 35 - Distâncias do ponto aos lados



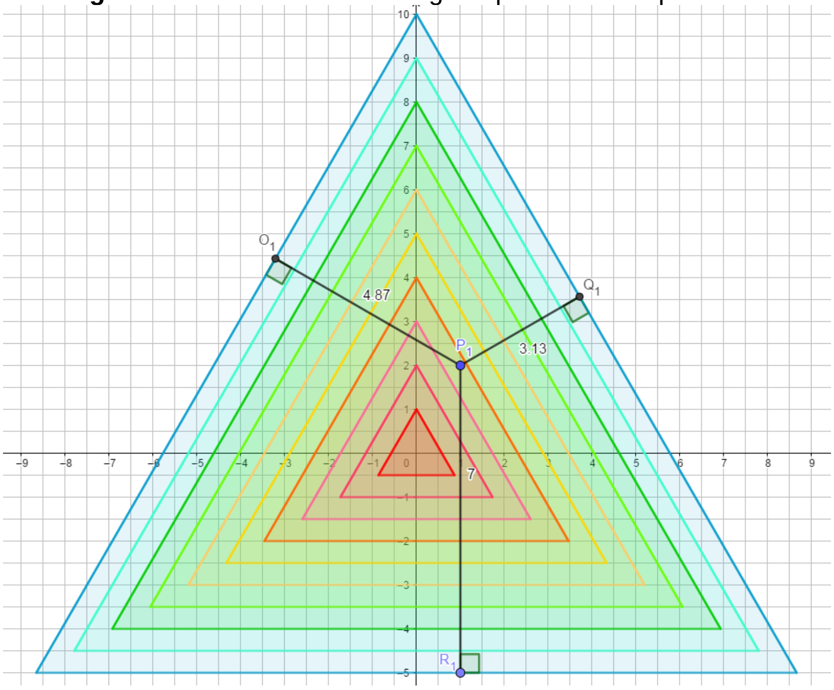
Fonte: próprio autor

Na figura 32, depois de mensurar as distâncias, verificamos se elas formam um triângulo. Temos

$$3{,}87 + 2{,}13 < 9.$$

Logo, estas distâncias não formam um triângulo, uma vez que o ponto está fora da região escura (cf. figura 31).

Figura 36 - Ponto dentro da região que satisfaz o problema



Fonte: próprio autor

No exemplo da figura 33, temos um dardo que foi lançado no ponto P_1 e verificando as distâncias pela desigualdade triangular

$$4{,}87 + 3{,}13 > 7.$$

Então neste exemplo, temos que estas distâncias formam um triângulo.

Qual é a probabilidade de que as distâncias do dardo aos lados do triângulo maior formem um triângulo? A resposta é 25%. Percebam que a forma de se calcular a probabilidade é análoga à apresentada no início do capítulo.

Nesta oficina, recomenda-se que o professor divida a sala em grupos de até quatro alunos. Cada grupo receberá um esquadro, um alvo triangular, três dardos e um pedaço de isopor do tamanho de um A4. O tempo estimado para esta atividade é de duas aulas de 50 minutos. Os materiais necessários serão entregues pelo professor para cada grupo. Esta atividade será dividida em duas etapas de 50 minutos.

Na primeira etapa os alunos irão recortar o molde do alvo triangular do papel A4 e depois colar no isopor. Cada grupo irá pendurar o seu alvo na parede, e depois lançarão os dardos em direção ao alvo triangular.

Já na segunda etapa, o professor irá propor para a turma o seguinte problema:

Lançando-se um dardo no alvo triangular, qual é a probabilidade de que as distâncias do ponto atingido pelo dardo aos lados do triângulo maior formem um triângulo?

Os alunos escolherão um ponto, e o grupo irá medir as distâncias deste ponto até as laterais do triângulo, conforme ilustrado na figura 32 e 33. Depois disso aplicarão a desigualdade triangular e analisarão se as distâncias correspondem aos lados de um triângulo.

No final da aula o professor pode ir ao quadro negro e resolver com os alunos o problema, discutindo os pontos que achar conveniente e reforçar conceitos importantes que passaram despercebidos pelos estudantes. E finalmente, sistematizando os conceitos e ideias discutidos na oficina.

5.3 Oficina: Abordagem lúdica do problema do macarrão – Desigualdade Triangular

A ideia desta oficina surgiu em um dos encontros de orientação da dissertação. Estavamos conversando sobre a possibilidade de criar um jogo que envolvesse probabilidade ou atividade e elaboramos esta oficina.

O objetivo da oficina é explicar os conceitos de probabilidade com materias manipuláveis, estimular o raciocínio lógico, desenvolver a capacidade de argumentação e investigação.

Esta oficina foi aplicada em três momentos:

1) Encontro PIC/OBMEP-ONE/UEL-UEM na UEM em 24-08-2019 com o título Explorando a Desigualdade Triangular de Forma Lúdica;
2) II ENCONTRO PARANAENSE DO PROFMAT que ocorreu em Curitiba (vide resumo e aceite da atividade nos anexos) com o título Reflexões sobre estimativa e Probabilidade Geométrica;
3) III Encontro Regional PIC/ONE OBMEP UEL/UEM -PR01-Edição 2019 em 23 de novembro de 2019 na UEM-Maringá.

Nesta oficina, cada grupo precisará de três dados de seis faces, três tiras de papel e uma tabela. Cada tira deve medir pelo menos 30 centímetros, não é necessário que seja exatamente 30cm. A seguir apresentaremos um modelo da tabela mencionada (cf. tabela 6).

Tabela 13 - exemplo de tabela preenchida

				Forma triângulo?	
	Dado1	Dado 2	Dado 3	Sim	Não
1	3	4	5	x	
2	2	3	6		x
3	2	3	4	x	
4	5	1	3		x
5	4	6	1		x
6	2	5	1		x
7	3	3	3	x	
8	2	1	1		x
9	3	5	3	x	
10	6	5	4	x	

Fonte: próprio autor

Esta oficina será divida em cinco etapas:

Primeira etapa: Cada aluno irá recortar um pedaço de tira de 1 cm de comprimento, um de 2 cm, um de 3 cm, um de 4 cm, um de 5 cm e um de 6 cm. Feito isso os alunos se agruparão em trios.

Figura 37 - Alunos recortando os materiais

Fonte: oficina realizada em Maringá

Segunda etapa: O professor propõe para a turma o seguinte problema:

Lançando-se os três dados, qual é a probabilidade de que com os valores obtidos seja possível formar um triângulo?

O professor pedirá aos alunos que lançem os dados e depois tentem formar triângulos com os valores obtidos nos dados. Os alunos devem anotar as ternas que forem sorteadas para que depois possam analizar, comparar os resultados e elaborar conjecturas. Este momento é oportuno para discutir com os alunos sobre os termos desconhecidos, como por exemplo, terna e desigualdade triangular.

Figura 38 - Grupos lançando os dados

Fonte: oficina realizada em Maringá

O professor pode aproveitar o momento e questionar os alunos sobre quais as condições de existência do triângulo, tipos de triângulos, o que é probabilidade e o que é aleatório. Depois de discutir algumas respostas, e de conduzir os diálogos e descobertas, o professor pode, pouco a pouco, definir os conceitos desejados, de modo a instigar os alunos a pensarem sobre os conceitos discutidos e até mesmo fazer analogias com situações mais simples, como por exemplo o lançamento de uma moeda.

Durante esta oficina, tínhamos alunos e professores participando. A faixa de idade era de 10 até 15 anos para os alunos. Foi interessante observar que tinhamos alunos do 5º ano do ensino fundamental I participando da oficina, eles estavam acompanhados da sua professora de classe, apesar de desconhecerem termos como probabilidade e desigualdade triangular, conseguiram realizar as atividades propostas e compreenderam os conteúdos abordados na oficina. Acreditamos que isso foi possível por trabalharem com materiais manipuláveis.

Figura 39 - Alunos elaborando conjecturas

Fonte: oficina realizada em Maringá

Os alunos do ensino fundamental II, conseguiram acompanhar a oficina, realizaram as atividades de acordo com o esperado. Depois de testarem algumas ternas, os grupos foram formulando conjecturas e discutindo se era possível formar um triângulo conhecendo as três medidas dos segmentos. Todos os grupos chegaram a um resultado semelhante com a desigualdade triangular, porém, em alguns casos foi necessário chamar a atenção dos estudantes para a formalidade na escrita matemática.

Figura 40 - Alunos discutindo suas conjecturas

Fonte: oficina realizada em Maringá

Terceira etapa: Para resolvermos os problemas desta oficina não é possível recorrer a probabilidade geométrica, pois estamos trabalhando com números discretos. Após os alunos testaram as ternas que foram sorteadas, o professor pode ir ao quadro e anotar as ternas que foram encontradas pelos alunos, tomando cuidado para não repetir nenhuma. Para contar quantas ternas conseguimos obter, dividimos as ternas em três casos.

I. Todos os números iguais

Temos $(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(3,3,3)$, $(4,4,4)$, $(5,5,5)$ e $(6,6,6)$. Logo, são seis possibilidades.

II. Dois números iguais e um diferente

Ternos com dois números iguais:

$$(1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5), (1,1,6)$$

$$(2,2,1), (2,2,3), (2,2,4), (2,2,5), (2,2,6)$$

$$(3,3,1), (3,3,2), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6)$$

$$(4,4,1), (4,4,2), (4,4,3), (4,4,5), (4,4,6)$$

$$(5,5,1), (5,5,2), (5,5,3), (5,5,4), (5,5,6)$$

$$(6,6,1), (6,6,2), (6,6,3), (6,6,4), (6,6,5)$$

III. Os três números diferentes

Ternas com três números diferentes:

$$(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,2,6)$$

$$(1,3,4), (1,3,5), (1,3,6), (1,4,5)$$

$$(1,4,6), (1,5,6), (2,3,4), (2,3,5)$$

$$(2,3,6), (2,4,5), (2,4,6), (2,5,6)$$

$$(3,4,5), (3,4,6), (3,5,6), (4,5,6)$$

Pela contagem realizada, temos 56 possibilidades de ternas. Os alunos deverão encontrar todas as ternas ou pelo menos grande parte delas lançando os dados. Outra forma de calcular a quantidade total de ternas é por meio da análise combinatória. Seguiremos a mesma estratégia adotada anteriormente, ou seja, dividiremos em três casos.

I. Todos os números iguais

Basta aplicar o princípio fundamental da contagem. Temos 6 possibilidades de números, logo

$$6 \times 1 \times 1 = 6.$$

Temos seis termas com todos os números iguais.

II. Dois números iguais e um diferente

Temos seis possibilidades de escolha para o primeiro valor, uma para o segundo e cinco para o terceiro, logo

$$6 \times 1 \times 5 = 30.$$

III. Os três números diferentes

Há seis possibilidades para o primeiro valor, cinco para o segundo e quatro para o terceiro, logo

$$6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Note que na conta acima está incluido os casos $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2)$ e $(3,2,1)$. Cada terna foi contado seis vezes, e por conta disto, devemos dividir o resultado por seis.

$$120 \div 6 = 20.$$

Os alunos deverão chegar a conclusão de que a soma de dois lados tem que ser sempre maior que o terceiro lado, ou seja, a soma dos dois lados menores tem que ser maior que o maior lado.

Quarta etapa: Agora os alunos irão verificar nas ternas encontradas, quantas que satisfazem a desigualdade triangular. Uma sugestão é que o professor peça aos alunos que identifiquem quantos triângulos equiláteros é possível formar, quantos triângulos escalenos e etc. Note que nesta mesma oficina podemos trabalhar conceitos como perímetro, classificação dos triângulos, estatística, contagem, probabilidade, desigualdade e etc. Pela desigualde triangular, temos que 34 das ternas encontradas formam triângulos, respondendo o problema da oficina:

$$P = \frac{34}{56} \cong 0{,}6071$$

Portanto ao lançarmos três dados, a probabilidade de formarmos um triângulo com os valores obtidos é de aproximadamente $60{,}71\%$.

Nesta oficina podemos propor problemas como:

- Qual é a probabilidade de se construir um triângulo equilátero com a terna obtida nos dados?

Resolução: Para obtermos um triângulo equilátero, é necessário que $a = b = c$. Temos seis possíbilidades de resultados. Logo

$$P(A) = \frac{6}{56} \cong 10{,}71\%$$

- Qual é a probabilidade de se construir um triângulo escaleno com a terna obtida nos dados?

Resolução: Num triângulo escaleno, o comprimento dos lados são todos distintos, então consideraremos que sendo a, b e c os resultados obtidos nos dados

$$a < b < c \text{ e } a + b > c.$$

Para

$c = 3$, teremos $a + b > 3$. Neste caso nenhum valor de a e b satisfazem a desigualdade.

$c = 4$, teremos $a + b > 4$. A única possíbilidade é quando $a = 2\ e\ b = 3$.

$c = 5$, teremos $a + b > 5$. Temos duas possibilidades, para $a = 3\ e\ b = 4$. E $a = 2\ e\ b = 4$.

$c = 6$, teremos $a + b > 6$. Se fixarmos $b = 5$, os valores de a que satisfazem $a + b > 6$ são $2, 3$ e 4. Se fixarmos $b = 4$, o valor de a que satisfazem $a + b > 6$ é 3.

Portanto, a probabilidade de obtermos um triângulo escaleno é de

$$P = \frac{7}{56} = 12{,}5\%.$$

- Qual é a probabilidade de se construir um triângulo isósceles com a terna obtida nos dados?

Vamos dividir esta análise em dois casos:

1. Caso: $a = b$, $a > c$ e $a + c > b$.

Para

$c = 1 \Rightarrow a + 1 > b$, logo são cinco valores de a que satisfazem as condições.

$c = 2 \Rightarrow a + 2 > b$, logo são quatro valores de a que satisfazem as condições.

$c = 3 \Rightarrow a + 3 > b$, logo são três valores de a que satisfazem as condições.

$c = 4 \Rightarrow a + 4 > b$, logo são dois valores de a que satisfazem as condições.

$c = 5 \Rightarrow a + 5 > b$, logo é apenas um valor de a que satisfaz a condição.

2. Caso: $a = b$, $a < c$ e $a + b > c$.

$c = 2 \Rightarrow a + b > 2$, única possibilidade é que $a = b = 1$, porém não satisfaz as condições.

$c = 3 \Rightarrow a + b > 3$, uma possibilidade que satisfaz as condições que é quando $a = b = 2$.

$c = 4 \Rightarrow a + b > 4$, uma possibilidade que satisfaz as condições que é quando $a = b = 3$.

$c = 5 \Rightarrow a + b > 5$, duas possibilidades que satisfazem as condições que é quando $a = b = 3$ e $a = b = 4$.

$c = 6 \Rightarrow a + b > 6$, duas possibilidades que satisfazem as condições que é quando $a = b = 4$ e $a = b = 5$.

Somando os casos que satisfazem 1. e 2. obtemos

$$15 + 6 = 21.$$

Portanto a probabilidade de construir um triângulo isósceles com a terna obtida nos dados é de

$$P = \frac{21}{56} = 37{,}5\%$$

Para responder estas perguntas os alunos utilizarão da tabela totalmente preenchida. Abaixo segue um modelo da tabela totalmente preenchida.

Tabela 14 - Tabela com todas as possibilidades

				Forma triângulo?		TIPOS
Lançamento	Dado1	Dado2	Dado3	Sim	Não	
1	1	1	1	x		Equilátero
2	2	2	2	x		Equilátero
3	3	3	3	x		Equilátero
4	4	4	4	x		Equilátero
5	5	5	5	x		Equilátero
6	6	6	6	x		Equilátero
7	1	1	2		x	
8	1	1	3		x	
9	1	1	4		x	
10	1	1	5		x	
11	1	1	6		x	
12	2	2	1	x		Isósceles
13	2	2	3	x		Isósceles
14	2	2	4		x	
15	2	2	5		x	
16	2	2	6		x	
17	3	3	1	x		Isósceles
18	3	3	2	x		Isósceles
19	3	3	4	x		Isósceles
20	3	3	5	x		Isósceles
21	3	3	6		x	
22	4	4	1	x		Isósceles
23	4	4	2	x		Isósceles
24	4	4	3	x		Isósceles
25	4	4	5	x		Isósceles
26	4	4	6	x		Isósceles
27	5	5	1	x		Isósceles
28	5	5	2	x		Isósceles
29	5	5	3	x		Isósceles
30	5	5	4	x		Isósceles
31	5	5	6	x		Isósceles
32	6	6	1	x		Isósceles
33	6	6	2	x		Isósceles
34	6	6	3	x		Isósceles
35	6	6	4	x		Isósceles
36	6	6	5	x		Isósceles
37	1	2	3		x	
38	1	2	4		x	
39	1	2	5		x	
40	1	2	6		x	
41	1	3	4		x	
42	1	3	5		x	
43	1	3	6		x	
44	1	4	5		x	

45	1	4	6		x	
46	1	5	6		x	
47	2	3	4	x		Escaleno
48	2	3	5		x	
49	2	3	6		x	
50	2	4	5	x		Escaleno
51	2	4	6		x	
52	2	5	6	x		Escaleno
53	3	4	5	x		Escaleno
54	3	4	6	x		Escaleno
55	3	5	6	x		Escaleno
56	4	5	6	x		Escaleno

Fonte: próprio autor

Com os dados coletados pelos alunos, agora é possível que se responda os questionamentos feito anteriormente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho analisamos minusciosamente o problema de Monty Hall sob duas perspectivas. Na primeira, construímos a tabela de casos e listamos todas as possibilidades. No segundo, aplicamos o Teorema de Bayes. Por meio dos estudos realizados, determinamos a resposta correta para o problema de Monty Hall, verificamos que é vantajoso trocar de porta, além de extender a conclusão para os casos com quatro e cinco portas.

No que concerne ao Teorema de Bayes, o presente estudo proporcionou compreensão sólida sobre seus detalhes e aplicação, sobretudo por abordá-lo para casos em que $n = 3, 4\ e\ 5$. Verificamos que o problema de Monty Hall apesar de ser conhecido e divulgado em programas populares de auditório, sua resolução matemática rigorosa para 3 portas, em português, é relativamente explorada sempre com mesmas referências bibliográficas. Já para mais de 3 portas, não encontramos referências em português, o que pode ser um empecilho para professores da Educação Básica. Além disso, analisar um mesmo problema utilizando mais de um método, trouxe-nos riqueza de conteúdos, argumentos teóricos distintos, formas diferentes de pensar e de aprender, e além de apreender o conhecimento, enriquecendo o processo de ensino/aprendizagem.

A probabilidade geométrica possui uma vasta gama de aplicações, e por conta disto é possível trabalhar simultaneamente vários conteúdos matemáticos, proporcionando ao professor e ao aluno uma visão menos fragmentada da matemática. Por meio das pesquisas e investigações realizadas, constatamos que o tema é pouco estudado no ensino básico, induzindo os alunos a acreditarem que probabilidade e geometria são matérias sem relação uma com a outra. Na Oficina - *Explorando a Desigualdade Triangular de Forma Lúdica* - percebemos que quando se trabalha com o lúdico, os alunos se sentem motivados a participar, até mesmo os mais tímidos. Vários concluíram a condição de existência de um triângulo por meio das tentativas. Alguns estudantes do Ensino Fundamental II, participantes da Oficina, concluíram alguns resultados de probabilidade mesmo sem ter o conceito rigoroso do tema.

Esperamos que este trabalho: proporcione ao professor mais alternativas de atividades em sala de aula, agregue conhecimento e dê aporte as aulas de probabilidade na Educação Básica, e enriqueça o processo de ensino/aprendizagem. Pretendemos continuar com estudos e desenvolver oficinas sobre o Teorema de Bayes e probabilidade geométrica, pois como de acordo com o que foi relatado anteriormente, descobrimos uma imensidão de possibilidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

WAGNER, E. **O problema do macarrão é um paradoxo famoso**. RPM. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm>. Acesso em: 02/03/2019

MORGADO, A.C.; CARVALHO, P.C.P. **Matemática Discreta**. Segunda Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

LIPSCHUTZ, S. **Probabilidade**. Segunda Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

SMOLE, K., et al. **Jogos de matemática de 1º a 3º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SEEMG. **Guia de elaboração e Revisão de questões e itens de múltipla escolha**. Disponível em: <http://professor.ufop.br/sites/default/files/danielmatos/files/guia_de_elaboracao_e_revisao_de_questoes_e_itens_de_multipla_escolha.pdf>. Acesso em: 26/02/2020

COPS. **Revista diálogos pedagógicos**. Londrina: Cops, 2019. Disponível em: <http://www.cops.uel.br/v2/documento.php?id=16>. Acesso em: 18/01/2020

COPS. **Revista diálogos pedagógicos**. Londrina: Cops, 2017. Disponível em: < http://www.cops.uel.br/v2/documento.php?id=10>. Acesso em: 18/01/2020

COPS. **Vestibular UEL 2020**. Londrina: Cops, 2020. Disponível em: <http://www.cops.uel.br/v2/download.php?Acesso=NTc0NTQyMzZjZTU3Mzg2MDZkNzAwMjMyMmVmZjA2MjJiM2EzNjg5NDhlYTY1NGM5NGU3N2Q0NGNkYTM2NTUzZjcyZjdkYTIzY2Q5YzVhZWI5MjQ4OTBlNWY0ZTRiYTQ5MzU1NmUwYTU4ZTljOTJiZTBmN2U2NDY4ZGYxMDlhZTVlOGM2MmQxNzA3Y2ExOGVjYmQ1MDc5ZjU0Yjc4ZTk0Zg==>. Acesso em: 20/01/2020

MLODINOW, L. **The Drunkard’s walk:** how randomness rules our lives. New York: Pantheons Book, 2008.

GNEDENKO, B. V. **The theory of probability**. Moscou: Mir publishes, 1978. Tradução para o inglês de George Yankovsky.

MORGADO, A. C., et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Nona edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

RABELO, M. **Avaliação educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA 4.1

Figura 41 – resolução oficial

Alternativa correta: a)

Conteúdo programático: Conjuntos Numéricos: Noções elementares de números reais: operações e propriedades, ordem, desigualdades. Funções, Equações e Inequações: Produto cartesiano; Relações e funções: domínio, contradomínio, imagem e gráficos; Função quadrática; Inequações de 1° e 2° graus.

Justificativa

Note que $I = \frac{p}{h^2}$. Como $18,5 \leq I \leq 24,9$ representa os indivíduos com IMC normal, segue que

$18,5 \leq \frac{p}{h^2} \leq 24,9$

Consequentemente, $18,5 \cdot h^2 \leq p \leq 24,9 \cdot h^2$. Portanto, a região solicitada do plano cartesiano $h \times p$ é a intersecção da região delimitada pelas parábolas $p(h) = 18,5 \cdot h^2$ e $p(h) = 24,9 \cdot h^2$ (incluindo-se as parábolas) e pela região delimitada pelas retas $h = 1,5$ e $h = 1,9$, incluindo-se a primeira e excluindo-se a segunda, haja vista que, de acordo com o enunciado, o universo é composto por indivíduos cuja altura h é tal que $1,5 \leq h < 1,9$.

Fonte: Vestibular da UEL 2017

Suponha que o candidato não saiba resolver a questão e assinale aleatoriamente a alternativa (b) dentre 5 possibilidade. É vantajoso aplicar Monty Hall para decidir se troca de alternativa ou não.

Temos uma situação análoga ao problema de Monty hall para 5 portas em que o apresentador abre 3 portas.

Já vimos que o candidato marcou inicialmente a alternativa (b), após analisar a questão com mais afinco, eliminou 3 distratores quais sejam, (c) , (d) e (e).

Aplicando Monty Hall, temos

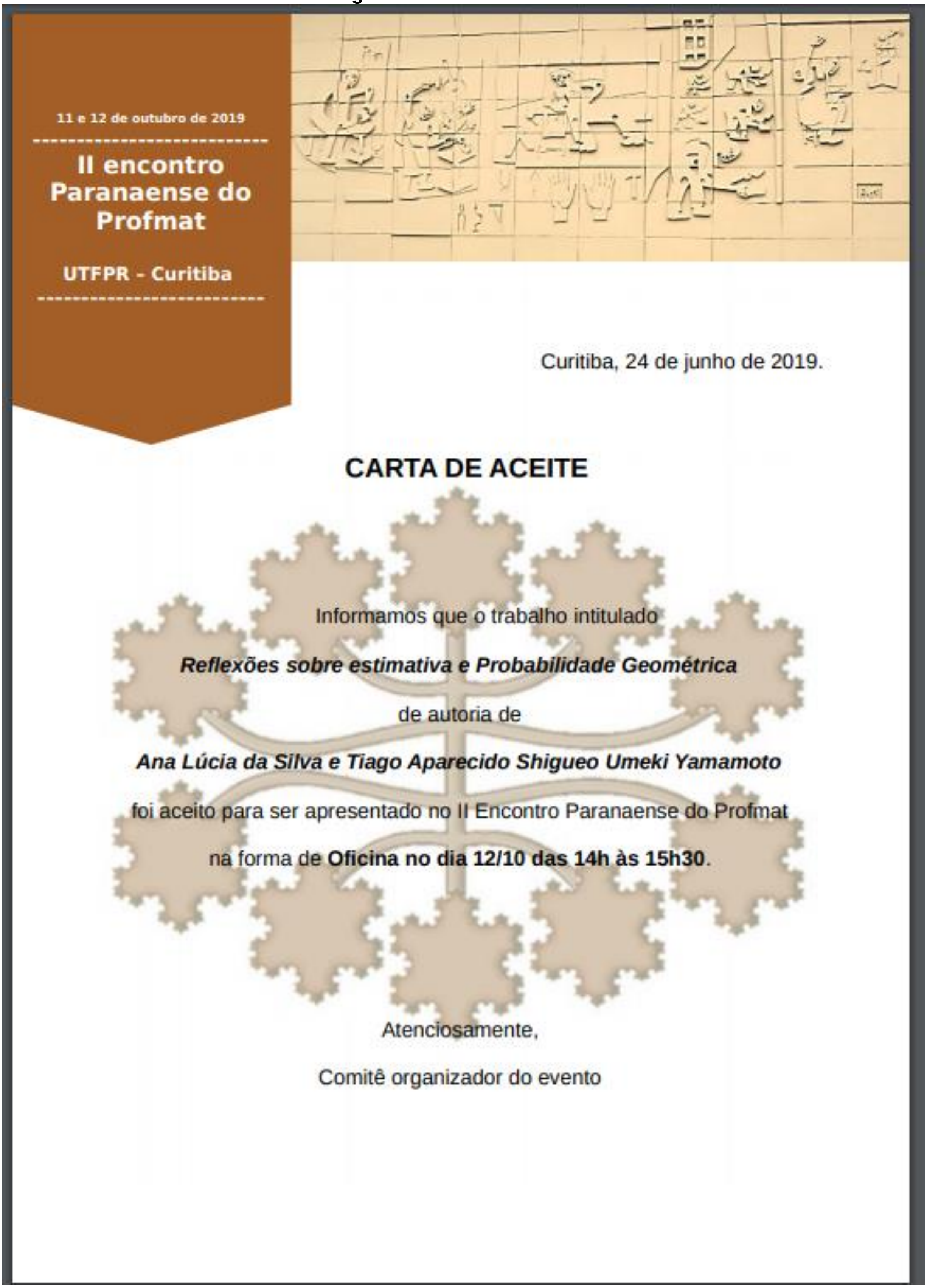
$$P = \frac{4}{5}$$

Portanto, segundo o método de Monty Hall a probabilidade de o candidato acertar a questão é de 80%.

OBS: Caso ele permanecesse na alternativa (b) a probabilidade de acerto seria $P = \frac{1}{5}$, isto é, 20%.

ANEXOS

Figura 42 - aceite da oficina



11 e 12 de outubro de 2019

II encontro Paranaense do Profmat

UTFPR - Curitiba

Curitiba, 24 de junho de 2019.

CARTA DE ACEITE

Informamos que o trabalho intitulado

Reflexões sobre estimativa e Probabilidade Geométrica

de autoria de

Ana Lúcia da Silva e Tiago Aparecido Shigueo Umeki Yamamoto

foi aceito para ser apresentado no II Encontro Paranaense do Profmat

na forma de **Oficina no dia 12/10 das 14h às 15h30**.

Atenciosamente,

Comitê organizador do evento