

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



PAULO HENRIQUE CARDOSO CANGUSSU

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DINÂMICO DE
FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Belo Horizonte
2020

PAULO HENRIQUE CARDOSO CANGUSSU

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DINÂMICO DE FUNÇÕES NA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obter o título de Mestre.

Orientadora:

Erica Marlúcia Leite Pagani

Coorientador:

Pedro Henrique Pereira Daldegan

Banca examinadora:

Norma Suely Gomes Allevato

Jane Lage Bretas

Belo Horizonte
2020

C222a Cangussu, Paulo Henrique Cardoso
Uma abordagem para o ensino dinâmico de funções na Educação
Básica / Paulo Henrique Cardoso Cangussu. – 2020.
131 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Erica Marlúcia Leite Pagani.

Coorientador: Pedro Henrique Pereira Daldegan..

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Ensino médio – Teses.
3. Aprendizagem – Teses. 4. Funções (matemática) – Teses. 5. Professores
de matemática – Formação – Teses. I. Pagani, Erica Marlúcia Leite.
II. Daldegan, Pedro Henrique Pereira. III. Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 510.07

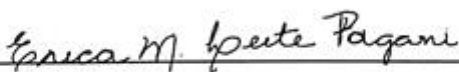
PAULO HENRIQUE CARDOSO CANGUSSU

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DINÂMICO DE FUNÇÕES NA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 30 de novembro de 2020.


Paulo Henrique Cardoso Cangussu
(Autor)


Erica Marlúcia Leite Pagani
(Orientadora)

Belo Horizonte
2020

AGRADECIMENTOS

Ao longo de três anos, muitos foram os empecilhos encontrados na busca de mais este sonho que agora eu estou realizando, o título de mestre. Esta conquista possui um significado muito especial em minha vida, pois representa a superação de vários obstáculos e a aquisição de novos conhecimentos que me motivam a querer ir ainda mais longe.

Agradeço primeiramente a Deus, o dom da vida, saúde e força que me proporcionou chegar até aqui.

À minha família, obrigado por sempre estar do meu lado e apoiar incondicionalmente meus projetos. Sou grato, em especial, à minha mãe Terezinha, a meu pai Paulo e a meus irmãos, Daniel e Meryelle. Como não agradecer à minha namorada, Andria, as dicas de escrita, paciência e companheirismo nos momentos em que mais precisei, também pelo meu maior e melhor presente de Deus, minha linda filha Ísis.

Sou eternamente grato aos meus orientadores. Agradeço à minha orientadora, Erica Pagani, pela paciência, competência e, acima de tudo, acreditar na minha evolução, foram inúmeras as correções e, a cada encontro, em sua maioria virtual às terças, sentia-me mais confiante e motivado com o nosso trabalho.

Agradeço também ao meu coorientador, Pedro Daldegan. A sua inclusão na minha orientação teve um papel fundamental, pois não só me orientava como também me ajudava a me tornar um profissional melhor. O seu empenho em tornar mais objetivos e dinâmicos os encontros foi de vital importância.

Aos professores membros da banca, prof. Dra. Norma Suely Gomes Allevato, prof. Dra. Jane Lage Bretas, prof. Dra. Valéria Guimarães Moreira e ao prof. Dr. Márcio Pironel pelas excelentes contribuições ao nosso trabalho.

Agradeço aos meus colegas de mestrado e, porque não dizer amigos que fiz, por tornar nossas aulas das sextas mais prazerosas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -- Brasil (CAPES) -- Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente trabalho teve início nas inquietações do professor pesquisador em suas atuações como professor de Cálculo e professor do Ensino Médio. Incomodado com os altos índices de reprovação e evasão em turmas de Cálculo, passou a refletir sobre o que poderia ser feito no Ensino Básico e que pudesse minimizar essas dificuldades. A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio, e o objetivo foi analisar o desenvolvimento do ensino de funções reais de uma variável real por meio de uma sequência didática, em que se destaca o caráter variacional das funções em contrapartida à abordagem estática atual no campo da teoria de conjuntos. É uma pesquisa de natureza qualitativa e os procedimentos metodológicos utilizados foram a observação participante, questionários e análise documental. O desenvolvimento das atividades foi alicerçado pelo *software* GeoGebra e verificou-se que essa ferramenta favoreceu a visualização dos gráficos das funções e ajudou o aluno a desenvolver uma intuição do caráter variacional das funções, possibilitando uma abordagem dinâmica desse conteúdo que, muitas vezes, é esquecida. Destacamos aqui a importância da continuidade de pesquisas com tal tema, visto a sua relevância na Educação Básica, a fim de estabelecermos um diálogo com a etapa de Ensino Superior, minimizando os impactos da transição entre os níveis de ensino, e de promovermos uma melhor interpretação do mundo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino-Aprendizagem. Função. Sequência Didática.

ABSTRACT

The present work made a start on the restless concerns of the researcher professor with his activities as a Calculus teacher as well as a High School teacher. Bothered by the high failure and dropout rates in Calculus classes, he started to reflect what could be done in Basic Education and what could minimize these difficulties. The research was developed with High School freshmen and the objective was to analyse the development of teaching real functions of a real variable through a didactic sequence where the variational character of the functions stands out in contrast to the current static approach in the field of set theory. It is a qualitative research and the methodological procedures used were participant observation, questionnaires and documentary analysis. The development of the activities was supported by the GeoGebra software and it was found that this tool favored the visualization of the function graphs and helped the student develop an intuition of the variational character of the functions, enabling a dynamic approach to this content that is often overlooked. We must highlight here the importance of continuing research on this topic, given its relevance in Basic Education, in order to establish a dialogue with the Higher Education stage, minimizing the impacts of the transition between levels of education and promoting a better interpretation of the world.

Keywords: Mathematics Education. Teaching-Learning. Function. Didactic sequence

LISTA DE ABREVIATURAS

UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina

UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UFC – Universidade Federal do Ceará

UFCA – Universidade Federal do Cariri

UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso

UFPA – Universidade Federal do Pará

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

UFPI – Universidade Federal do Piauí

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFS – Universidade Federal do Sergipe

UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul

UnB – Universidade de Brasília

UNESP – Universidade Estadual Paulista

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

UNIFAP – Universidade Federal do Amapá

UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

USP – Universidade de São Paulo

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação geométrica dos números inteiros.....	38
Figura 2 - Representação geométrica dos números racionais	39
Figura 3 - Quadrado $PQRS$	40
Figura 4 - Representação geométrica de números irracionais.....	41
Figura 5 - Representação geométrica dos números reais	42
Figura 6- Densidade dos números reais	43
Figura 7 - Exemplo de uma função	45
Figura 8 - Não representa uma função	45
Figura 9 - Não representa uma função	46
Figura 10 - Exemplos de gráficos de funções	48
Figura 11 - Reta Tangente a Uma Circunferência no Ponto T.....	57
Figura 12 - Exemplo de Reta Tangente a Uma Curva no Ponto T.....	58
Figura 13 - Inclinação da reta secante	58
Figura 14 - Reta secante	59
Figura 15 - Reta tangente	59
Figura 16 - Exemplo de função descontínua em um ponto.....	62
Figura 17 - Exemplo de função descontínua no ponto $x = 0$	62
Figura 18 - Exemplo de função contínua no ponto $x = a$	62
Figura 19 - Teorema de Rolle	64
Figura 20 - Teorema do Valor Médio	65
Figura 21 - Teste crescente/decrescente – Gráfico de f	67
Figura 22 - Resposta de um aluno à questão 6 do Questionário	75
Figura 23 - Resposta de um aluno à questão 7 do Questionário	75
Figura 24 - Resposta de um aluno à questão 8 do Questionário	76
Figura 25 - Resposta do aluno A à questão 9 do Questionário	76
Figura 26 - Resposta dada pelo Aluno B na questão 2 da Atividade I.....	77
Figura 27 - Resposta dada pelo Aluno D na questão 2 da Atividade I.	78
Figura 28 - Resposta dada pelo Aluno E na questão 2 da Atividade I.....	79
Figura 29 - Resposta dada pelo Aluno D na segunda parte da questão 2 da Atividade I....	80
Figura 30 - Resposta dada pelo Aluno A na segunda parte da questão 2 da Atividade I....	80

Figura 31 - Questão 3 da Atividade I	81
Figura 32 - Resposta dada pelo Aluno I a questão 3 da Atividade I	82
Figura 33 - Resposta dada pelo Aluno F na questão 4 da Atividade I	82
Figura 34 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 7 da Atividade I	83
Figura 35 - Resposta dada pelo Aluno I nas questões 8 e 9 da Atividade I	83
Figura 36 - Problema proposto na primeira parte da Atividade II	84
Figura 37 - Resposta dada pelo Aluno F na questão 1 da Atividade II.....	85
Figura 38 - Resposta do Aluno A na questão 1 da Atividade II.....	85
Figura 39 - Resposta dada pelo Aluno H na questão 1 da Atividade II	86
Figura 40 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 1 da Atividade II.....	86
Figura 41 - Resposta dada pelo Aluno C na questão 1 da Atividade II.	87
Figura 42 - Resposta dada pelo Aluno J na questão 1 da Atividade II.	87
Figura 43 - Resposta dada pelo Aluno A na questão 2 da Atividade II.	87
Figura 44 - Resposta dada pelo Aluno J na questão 3 da Atividade II.....	88
Figura 45 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 3 da Atividade II.	88
Figura 46 - Resposta dada pelo Aluno A na questão 3 da Atividade II.	89
Figura 47 - Resposta dada pelo Aluno H na questão 3 da Atividade II.	89
Figura 48 - Resposta dada pelo Aluno K na questão 4 da Atividade II.	90
Figura 49 - Problema proposto na segunda parte da Atividade II.....	90
Figura 50 - Resposta correta dada pelo Aluno A, ao preencher o Quadro III da segunda parte da Atividade II.....	91
Figura 51 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 8 da Atividade II.	92
Figura 52 - Resposta dada pelo Aluno I, na questão 8 da Atividade II.....	92
Figura 53 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 8 da Atividade II.	93
Figura 54 - Enunciado do problema proposto na primeira parte da Atividade III.....	93
Figura 55 - Resposta dada pelo Aluno F, na questão 5 da Atividade III.	94
Figura 56 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 5 da Atividade III.....	94
Figura 57 - Problema apresentado na Atividade IV	95
Figura 58 - Resposta do Aluno E na questão 1 da Atividade IV	96
Figura 59 - Resposta do Aluno B na questão 2 da Atividade IV.	96
Figura 60 - Resposta dada pelo Aluno C na questão 4 da Atividade IV.....	97
Figura 61 - Resposta dada pelo Aluno E, na questão 8 da Atividade IV.	97
Figura 62 - Tela inicial do GeoGebra.....	98
Figura 63 - Gráfico construído pelo Aluno A solicitado na questão 9 da Atividade IV.....	98

Figura 64 - Gráfico construído pelo Aluno K na questão 9 da Atividade IV.	99
Figura 65 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 11 da Atividade IV.....	100
Figura 66 - Resposta dada pelo Aluno K nas questões 12 e 13 da Atividade IV.....	100
Figura 67 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 1 da Atividade V.....	101
Figura 68 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 1 da Atividade V.....	102
Figura 69 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 2 da Atividade V.	102
Figura 70 - Gráfico construído pelo Aluno J na questão 4 da Atividade V.	102
Figura 71 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 2 da Atividade V.	103
Figura 72 - Resposta dada pelo Aluno A, nas questões 5, 6 e 7 da Atividade V.....	104
Figura 73 - Questão 1 da Atividade VI.	105
Figura 74 - Questão 2 da Atividade VI.	105
Figura 75 - Questões 3 e 4 da Atividade VI.....	106

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Obstáculos epistemológicos apontados por Sierpinska (1992).....	34
Quadro 2- Intervalos reais	42
Quadro 3 - Média dos estudantes em Matemática e suas Tecnologias	49
Quadro 4 - Velocidade média do corpo em $[t, 3]$	51
Quadro 5 - Velocidade média do corpo em $[3,t]$	51
Quadro 6 - Valor a ser pago em um deslocamento de x quilômetros em ônibus urbano	54
Quadro 7 - Valor a ser pago na feira semanal de dona Terezinha em uma compra de x kg de frutas e verduras mais os produtos de limpeza.....	55
Quadro 8 - Receita da empresa em função da quantidade de amigos que irão viajar	56
Quadro 9 - Teste da derivada primeira.....	67
Quadro 10 - Data, duração e quantidade de alunos presentes em cada um dos encontros ..	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Ano de publicação das dissertações analisadas.....	20
Tabela 2 - Origem das dissertações do PROFMAT que abordam derivada até outubro de 2019	21
Tabela 3 - Tipo de Pesquisa: Teórica ou Teórica Empírica	21

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÁLCULO E FUNÇÕES REAIS: UMA BREVE REVISÃO TEÓRICA	17
2.1 AS DIFICULDADES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÁLCULO: UM PANORAMA.....	17
2.2 UM BREVE RELATO DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO	28
2.3 O ENSINO DE FUNÇÕES.....	32
3 UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES	37
3.1 CONJUNTOS - NOÇÕES BÁSICAS	37
3.2 CONJUNTOS NUMÉRICOS	38
3.3 ESTUDO DE FUNÇÕES	44
3.4 ALGUNS CONCEITOS DO CÁLCULO	48
3.5 FUNÇÕES DEFINIDAS POR SEU CARÁTER VARIACIONAL	54
3.6 A RETA TANGENTE	57
4 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA	69
5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES	73
5.1 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA ATIVIDADE I.....	77
5.2 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA ATIVIDADE II – PRIMEIRA PARTE	84
5.3 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE II – SEGUNDA PARTE.....	90
5.4 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE III	93
5.5 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE IV	95
5.6 ANÁLISE DOS PROTOCOLOS DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE V	101
5.7 SUGESTÃO DE ATIVIDADE VI - NÃO REALIZADA.....	104
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	107
REFERÊNCIAS.....	110
APÊNDICE 1 - Primeira atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.....	113
APÊNDICE 2 - Segunda atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.....	116
APÊNDICE 3 - Terceira atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos	119
APÊNDICE 4 - Quarta atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.....	121
APÊNDICE 5 - Quinta atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.....	124
APÊNDICE 6 - Sexta atividade - não desenvolvida em sala de aula	126
APÊNDICE 7 - Questionário respondido pelos alunos	128
APÊNDICE 8 - Termo de assentimento	130
APÊNDICE 9 - Termo de consentimento	131

1 INTRODUÇÃO

A Matemática tem se mostrado um grande desafio para os estudantes, motivando intensos debates e estudos. Na maioria das vezes, os conceitos matemáticos são ensinados de forma abstrata, e a sua ligação com o mundo real é omitida ou, até mesmo, excluída. Como consequência, os alunos não conseguem identificar a Matemática como um conhecimento fundamental na compreensão do mundo, o que possivelmente causa um desinteresse por tal disciplina.

Atualmente, sou professor da rede privada de Ensino em Montes Claros – MG, onde atuo como professor, no Ensino Médio e Pré-Vestibular. Graduei-me em Matemática-Licenciatura, em 2006, na Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES. Desde então, venho atuando principalmente no Ensino Médio, mas trabalhei também como professor do Ensino Fundamental e Superior. No Ensino Superior, fui tutor presencial dos cursos de Química-Licenciatura e Matemática-Licenciatura na modalidade ensino a distância - EAD, da Universidade Federal de Minas Gerais no campus de Montes Claros de 2008 a 2010. Atuei também nos cursos de Engenharias como professor de Fundamentos de Cálculo e Cálculo I, na Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros - FACIT, no período de 2012 a 2013.

Em minha atuação como professor de Cálculo¹, percebi uma alta taxa de reprovação nessa disciplina e comecei a fazer algumas indagações sobre a origem de tal problema. Estaria o problema no Ensino Básico? É uma característica do ensino de Cálculo apenas no nosso país? O que tem sido feito para minimizar tal situação?

O baixo rendimento dos estudantes em Matemática não é uma característica apenas da Educação Básica e se estende por todos os níveis de Ensino, visto que a compreensão de conceitos básicos é um pré-requisito para que se possa entender conceitos mais complexos.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)² é um dos maiores estudos realizados através de uma avaliação em larga escala sobre educação no mundo³. Ao realizarmos uma busca no site do INEP⁴, a fim de entendermos um pouco mais sobre esse

¹ Salvo exceções, estaremos nos referindo a disciplina Cálculo Diferencial e Integral de funções reais.

² Tradução de *Programme for International Student Assessment*.

³ Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206. Acesso em: 15 fev. 2020.

⁴ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

estudo, notamos que ele é desenvolvido a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e faz um estudo internacional e comparativo sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos quinze anos, avaliando os conhecimentos e habilidades de modo comparativo com estudantes de outros países em três domínios: Matemática, Ciências e Leitura⁵. Além disso, avalia domínios chamados inovadores, que são: Resolução de Problemas, Letramento Financeiro, Competência Global. (BRASIL, 2020).

Em 2018, o Pisa mostrou que os alunos do Brasil possuem uma baixa proficiência em leitura, Matemática e Ciências quando comparados com os demais 78 países que participaram dessa edição da avaliação. Ademais, podemos destacar que os estudantes brasileiros estão entre os 10 piores avaliados em Matemática em tal estudo, sendo que dois terços deles sabem menos que o básico em Matemática.

Poderíamos então inferir que esse desempenho ruim se refletiria em uma alta taxa de reprovação em inúmeros cursos e disciplinas no Ensino Superior em uma mesma proporção. Contudo, percebemos que a magnitude do número de reprovações em Cálculo é mais expressiva se comparada com a maioria das demais disciplinas.

Diante do alto índice de reprovação em turmas de Cálculo, disciplina presente em diversos cursos superiores como Matemática, Engenharias, Física, Química, Biologia, Economia, entre outros, constatamos uma produção crescente de trabalhos cuja finalidade é discutir o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo, apresentando estratégias e ferramentas para minimizar tal problema. E, nesse contexto, um dos grandes entraves verificados é o ensino de funções. Apresentamos nesta pesquisa uma sequência didática que possui como tema principal o ensino de funções reais e, mais especificamente, as taxas de variação de funções reais. Entendemos estar proporcionando o ensino de funções de uma forma dinâmica, em contrapartida à maneira estática que geralmente é ensinada nas escolas, na tentativa de fornecer aos alunos da Educação Básica importantes ferramentas muitas vezes, abandonadas em sua formação básica.

Buscamos, com a nossa pesquisa, atender às demandas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996, no seu artigo 22 (BRASIL, 1996), quando diz ser dever da Educação Básica subsidiar, em todos os aspectos, a entrada dos estudantes na vida adulta e ajudá-los a escolher o rumo que quiserem de forma digna. Apresentaremos aos alunos conceitos que consideramos essenciais para a continuidade dos estudos e, até mesmo, para uma melhor compreensão do mundo em que vivemos.

⁵Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206. Acesso em: 15 fev. 2020.

Cabral (1998) *apud* Rezende (2003a) revela a grande dificuldade por parte dos estudantes em resolver problemas de taxas relacionadas e de otimização por não compreenderem as quantidades variáveis que estão envolvidas ou a relação funcional entre elas. Ainda cita uma resposta frequente dos alunos: “O difícil mesmo é encontrar a função!” (p. 153-154). Nesse sentido, percebemos a dificuldade em lidar com situações do dia a dia por parte dos estudantes e associá-las a modelos matemáticos, como as funções que, na maioria das vezes, não passam de um emaranhado de letras e números na cabeça dos alunos.

Rezende (2003b) faz um mapeamento de cinco macro espaços das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica a partir do entrelaçamento de fatos históricos e pedagógicos tendo como pano de fundo as “[...] dualidades essenciais e os mapas conceituais do Cálculo” (p. 401) que, segundo ele, são: discreto/contínuo, finito/infinito, permanência/variabilidade, local/global e sistematização/construção.

Entendemos que esta dissertação se enquadra no macro espaço da permanência/variabilidade, pois aborda o ensino e aprendizagem de funções reais através das taxas de variação, enfatizando o caráter dinâmico de funções. Caraça (1989) *apud* Bortolossi *et al.* (2011) destaca a importância de entendermos o conceito de função, saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra, o que é incompleto se não compreendermos como ela ocorre, para podermos, então, quantificar esse processo.

Assim, este trabalho tem por objetivo geral analisar o desenvolvimento do ensino de funções reais de uma variável real por meio de uma sequência didática onde destaca em que se destaca o caráter variacional das funções.

Destacaremos algumas funções, especificamente as funções constantes, polinomiais (com ênfase em quadráticas e afins) e as funções dadas por mais de uma sentença, através do seu caráter variacional, em contrapartida à maneira estática usual e presente na maioria dos livros didáticos atuais. Esperamos também contribuir para um entendimento, ainda que de forma intuitiva e inicial, dos conceitos de continuidade, limites laterais, associação da monotonia à inclinação da reta tangente ao gráfico de funções reais de variável real, pontos de máximo e mínimo, densidade dos números racionais e irracionais nos reais, dentre outros.

Esperamos, assim, contribuir para a continuidade dos estudos ao apresentarmos conceitos pouco abordados ou, até mesmo, ignorados na Educação Básica, associados ao ensino de função, mas presentes no Ensino Superior, como é o caso do caráter variacional das funções. Dessa forma, pretendemos favorecer o entendimento de função dos alunos, diminuindo a divergência entre sua abordagem na Educação Básica e no Ensino Superior.

Para orientarmos os leitores na compreensão deste trabalho, o texto foi organizado em 06 capítulos, dentre eles esta introdução.

No capítulo seguinte, Capítulo 2, trazemos as discussões relacionadas ao alto índice de reprovações em Cálculo, destacando os trabalhos de Rezende (2003b) e Bortolossi *et al.* (2011), que propõem uma abordagem na Educação Básica para minimizar a alta taxa de reprovação e evasão em Cálculo, tendo como foco o ensino dinâmico de funções. Encerramos o capítulo apresentando um breve relato do desenvolvimento histórico do conceito de função. Nesse percurso, encontramos o trabalho de Pagani (2016) que investiga o ensino de conteúdos de Cálculo na Educação Profissional Técnica de Nível Médio.

São apresentados, no Capítulo 3, os conceitos matemáticos sobre funções que julgamos essenciais para a compreensão deste trabalho em um sentido mais amplo, e o contexto de nossa pesquisa, bem como a metodologia utilizada, aparecem no Capítulo 4. As análises das respostas dos alunos às atividades propostas na sequência didática e ao questionário são relatadas no Capítulo 5. No Capítulo 6, encerramos com as Considerações Finais, que trazem uma reflexão do trabalho realizado e perspectivas para futuras pesquisas.

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÁLCULO E FUNÇÕES REAIS: UMA BREVE REVISÃO TEÓRICA

Neste Capítulo, iremos apresentar os fundamentos teóricos para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Eles servirão como direcionamento para nossa interpretação e análise dos dados. Iniciaremos com as dificuldades de ensino-aprendizagem do Cálculo e relacionaremos com o ensino de funções reais. Na sequência, iremos apresentar um breve relato da história do conceito de função e encerraremos o capítulo com o ensino-aprendizagem de funções reais na Educação Básica.

2.1 As Dificuldades no Ensino-Aprendizagem de Cálculo: um panorama

Muitos são os trabalhos que debatem os altos índices de reprovação nas turmas de Cálculo. Nesse âmbito, podemos destacar os trabalhos de Rezende (2003a), Barufi (1999) e Pereira (2009). Rezende (2003a) relata que o alto índice de não aprovação em Cálculo na Universidade Federal Fluminense (UFF), instituição em que lecionou entre os anos de 1996 e 2000, variava, nesse período, entre 45% e 95%. Em seu trabalho, Barufi (1999) verificou que, em 1995, a taxa de não aprovação na disciplina de Cálculo no Instituto Militar de Engenharia (IME) variou entre 43,8% e 66,9%, e Pereira (2009) expõe a situação dos alunos da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) no ano de 2005, onde, no primeiro semestre, o índice de não aprovação nos cursos de Cálculo I⁶ foi de 42% e, no segundo semestre desse mesmo ano, o índice subiu para 48%.

Oliveira e Raad (2012) concluem que

Apesar da existência de bons livros didáticos, de boas práticas pedagógicas, de diferentes iniciativas no sentido de diminuir o insucesso dos estudantes em Cálculo: oferecimento de monitorias, revisão de conteúdos de Matemática básica, diminuição do rigor e valorização de aspectos intuitivos e aplicativos, ainda assim a reprovação persiste, permanece como um problema crônico, uma verdadeira tradição (OLIVEIRA; RAAD, 2012, p. 11).

Quais seriam as causas de tamanho insucesso no Ensino de Cálculo? Seria um problema de falta de base dos alunos ou estratégias de ensino inadequadas? Ou deveríamos

⁶ Geralmente, o ensino de Cálculo é dividido em três partes, Cálculo I, II e III.

entender como algo aceitável e característico do próprio Cálculo? Atualmente os resultados mudaram? Seria uma tipicidade do Cálculo no Brasil?

Esses são questionamentos que sempre carreguei na minha atuação como professor de Matemática da Educação Básica e Superior. Na minha atuação como tutor presencial dos cursos de Matemática e Química na modalidade licenciatura – EAD da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) no período de 2008 a 2010, no polo de Montes Claros-MG, acompanhei os acadêmicos em disciplinas como Fundamentos de Matemática Elementar. A ementa dessa disciplina consistia de uma revisão de alguns conceitos estudados na Educação Básica e considerados essenciais na compreensão dos conteúdos do Cálculo, tais como o ensino de funções, trigonometria, produtos notáveis e fatoração, geometria analítica, entre outros. O Ensino de Cálculo era dividido em seis etapas, compreendendo os conteúdos: diferenciação e integração de funções de uma ou mais variáveis. Atuei também como professor das disciplinas de Cálculo I e Pré-Cálculo da Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros (FACIT) no período de 2012 a 2013, onde os conteúdos da disciplina de Pré-Cálculo incluíam noções de fatoração e produtos notáveis, funções e trigonometria. Já no curso de Cálculo I, eram abordados os conceitos de limite, derivada e integral de funções reais de uma variável real. Observei que o índice de não aprovação nas turmas de Cálculo I era considerável, próximo de 35%.

O Ensino de Cálculo é fracionado das mais diversas formas em instituições superiores no Brasil, de modo a adequar a carga horária e demandas exigidas no curso. Uma das maneiras em que essa divisão é feita é a sua separação em três módulos:

- Cálculo I, em que se estuda limites, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real;

- Cálculo II, podendo destacar o cálculo de integrais em intervalos ilimitados ou em funções descontínuas, representação de função através de séries, limite e derivadas de funções de duas ou mais variáveis, cálculo do comprimento de curvas parametrizadas, máximos e mínimos de funções reais de variáveis reais, integrais impróprias, sequências e séries, estudo de curvas no plano, dentre outros tópicos;

- Cálculo III, que geralmente aborda funções de várias variáveis com ênfase em teorias de integração, integrais múltiplas, dentre outros assuntos.

Essa preocupação e inquietação com a não compreensão das “ideias” do Cálculo, tendo como consequência uma alta taxa de reprovação, não é uma especificidade das universidades brasileiras, mas uma preocupação global. Rezende (2003a) cita os trabalhos na área das ciências cognitivas de David Tall, cuja linha de pesquisa aborda as dificuldades

na aprendizagem dos conceitos básicos de Cálculo, sendo um dos principais articuladores da área de pesquisa intitulada Pensamento Matemático Avançado. De acordo com Ferreira e Piermatei (2013), há mais de quatro décadas, David Orme Tall é professor emérito de Pensamento Matemático Avançado e investiga principalmente o processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior com destaque para o Cálculo Diferencial e Integral, focalizando sua pesquisa na psicologia cognitiva, adentrando na Educação Matemática. Podemos citar também os trabalhos de Anna Sierpinska, da Universidade Concórdia (Canadá), e James Robert Leitzel, da Universidade Duke (Estados Unidos), como autores estrangeiros com trabalhos frequentes sobre o ensino de Cálculo.

O fracasso do ensino de Cálculo, não somente no Brasil mas em todo mundo, fez surgir o *Calculus Reform*, movimento em prol do ensino de Cálculo, iniciado na década de 1980, cuja principal ideia propagada era o uso da tecnologia, isto é, *softwares* computacionais e calculadoras gráficas e o ensino via regra dos três, ou seja, todos os problemas deveriam ser abordados de forma numérica, geométrica e analítica, mostrando a aplicabilidade do Cálculo e uma baixa exigência algébrica dos alunos (REZENDE, 2003a).

Nos dias atuais, ainda se nota essa preocupação com o ensino de Cálculo. Nesse contexto, Masola *et al.* (2016) realizam um mapeamento das publicações do XI ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática, e ratificam essa informação citando os trabalhos de “[...] Pilato (2013), Rehfeldt, Giongo e Quartieri (2013), Breunig e Nehring (2013), Rosa Costa (2013), Lima (2013), Oliveira, Guimarães e Andrade (2013), Cury (2013), Almeida (2013), Luz e Santos (2013), Costa, Pergher e Cabrera (2013) e Dörr (2013)” (p. 4). Todos esses trabalhos foram apresentados no XI ENEM e têm como foco o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Pagani e Allevato (2014) apresentam um mapeamento de algumas dissertações e teses produzidas no Brasil e que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Elas verificaram que a alta taxa de reprovação nos cursos iniciais de Cálculo constituem a principal motivação para realização dos trabalhos analisados.

A fim de analisarmos como as pesquisas referentes ao ensino de taxas de variação de funções reais vêm sendo desenvolvidas no contexto do PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, e quais caminhos elas têm tomado, foi feita uma pesquisa das dissertações presentes no repositório do PROFMAT em outubro de 2019. Ao realizar a busca pela frase “Taxas de Variação de Funções Reais”, nenhum trabalho foi encontrado. Posteriormente, foi feita a pesquisa, ainda no repositório do PROFMAT, com título “Variação”, em que foram constatados cinco trabalhos. Pela leitura dos resumos, verificamos

nesses trabalhos uma proposta para o ensino de derivada na Educação Básica com um menor rigor se comparado ao Ensino Superior, aplicações na agropecuária de problemas de otimização, estudo das variações de preços de produtos negociados na bolsa, estudo de funções com o *software* GeoGebra e uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas associado às progressões aritméticas e geométricas no domínio discreto, mas nenhuma apresentando uma proposta para o ensino dinâmico de funções, ou seja, por meio de suas taxas de variação. Finalmente, com a busca pelo termo “derivada”, vinte e seis dissertações foram destacadas e, pela leitura dos resumos, percebemos que esses trabalhos propunham para os estudantes da Educação Básica o ensino de forma intuitiva de conceitos associados à derivada. Vale ressaltar que todos os trabalhos constituem dissertações de mestrado, que devem apresentar um produto para melhoria da Educação Básica como um todo, exigência do PROFMAT e de todos os mestrados profissionais.

Quando analisamos a Tabela 1, fica notório que a preocupação com tal tema ainda persiste e, ano a ano, vem motivando novos trabalhos no contexto do PROFMAT.

Tabela 1- Ano de publicação das dissertações analisadas

Ano	Número de Dissertações Publicadas
2013	6
2014	5
2015	2
2016	5
2017	1
2018	5
2019	2
Total	26

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Na Tabela 2, observamos que as dissertações de mestrado do PROFMAT, cuja temática aborda conceitos associados ao ensino de Cálculo com foco na Educação Básica, constituem-se uma preocupação em âmbito nacional, sendo assim motivadoras de inúmeros trabalhos e em diversas instituições de ensino do nosso país, representadas por suas siglas.

Tabela 2 - Origem das dissertações do PROFMAT que abordam derivada até outubro de 2019

Origem	Número de Dissertações Observadas
USP	1
UFMT	2
UDESC	1
UESB	1
UTFPR	2
UFCA	1
UFPI	2
UFJF	1
UFERSA	3
UnB	1
UFC	1
UERJ	1
UFS	1
UNIVASF	3
UFPB	1
UFPA	1
UNESP	1
UNIFAP	1
UNICAMP	1
Total	26

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Aproximadamente 88,5% desses trabalhos são de natureza teórica e não validados em sala de aula, como observaremos na Tabela 3. Talvez uma justificativa para tal concentração de trabalhos em que a parte empírica não se faz presente seja o tempo que os mestrados do PROFMAT dispõem para a construção de sua dissertação, uma vez que sua produção se intensifica somente após o exame de qualificação, que ocorre no penúltimo semestre do curso.

Tabela 3 - Tipo de Pesquisa: Teórica ou Teórica Empírica

Categoria	Número de Dissertações
De Natureza Teórica	23
De Natureza Teórica Empírica	3
Total	26

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Esses trabalhos pesquisados são voltados para a Educação Básica e fazem uso de estudos dirigidos, *softwares*, utilização do contexto histórico, sequências didáticas, dentre outras ferramentas pedagógicas.

Segundo Ávila (1991), o ensino de Cálculo já se fez presente na Educação Básica, mais precisamente na terceira série do antigo curso Científico. O antigo curso Científico foi

criado pelas Leis Orgânicas de Ensino em 1942, pelo então Ministro Gustavo Capanema, que regulamentou o Ensino Industrial⁷ e o Ensino Secundário⁸.

[...] o ensino ficou composto, neste período, por cinco anos de curso primário, quatro de curso ginásial e três de colegial, podendo ser na modalidade clássico ou científico. O ensino colegial perdeu o seu caráter propedêutico, de preparatório para o ensino superior, e passou a preocupar-se mais com a formação geral. (PILETTI, 1996, p. 90)

Desde 1943, o ensino de derivadas de funções reais e aplicações, problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos, como polinômios de Taylor, fazia parte do programa. No final da década de 1950 e começo da década de 1960, com o advento do movimento que se intitulava Movimento da Matemática Moderna, tópicos como Geometria e o próprio Cálculo perderam espaço no Ensino Básico. Esse movimento pregava uma grande ênfase na utilização de linguagens de conjuntos e uma apresentação extremamente formal das diferentes partes da Matemática. Com isso, o Cálculo demandava um maior tempo em sua apresentação, pois seria necessário fazer antes um estudo detalhado dos números reais.

De acordo com Leme (2006), o Movimento da Matemática Moderna teve seu início na década de 1960 no Brasil e também no exterior, e tentava aproximar a Matemática da Escola Básica com a Matemática produzida por pesquisadores.

Retomando algumas indagações, refletimos: estaria o problema do alto índice de reprovações em Cálculo na Educação Básica? Existe alguma relação com o ensino de funções?

Essas indagações nos conduziram ao tema dessa dissertação. Com o intuito de buscarmos respostas a esses questionamentos, fizemos uma retomada das ideias que ajudaram e motivaram o surgimento do conceito de função. Além disso, verificamos a importância de se compreender as taxas de variação entre duas grandezas e observamos a sua participação na construção do conceito de função. O caráter dinâmico das funções se estabelece como tema central desse trabalho em contrapartida à forma estática com x e y que as funções vêm sendo definidas atualmente.

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003b) afirma que algumas soluções “normais” (p. 33) aparecem do ponto de vista pedagógico, tais como as famosas listas de exercícios, o

⁷ Era o ramo de ensino, de grau secundário, destinado à preparação profissional dos trabalhadores da indústria e das atividades artesanais, e ainda dos trabalhadores dos transportes, das comunicações e da pesca.

⁸ Era composto um primeiro ciclo de quatro anos de duração, denominado Ginásial, e um segundo ciclo de três anos, atuais Ensino Fundamental II e Ensino Médio, respectivamente.

uso de computadores ou ainda a criação de cursos que antecedem o Cálculo I nas faculdades, com a missão de eliminar os problemas que não foram superados na Educação Básica. Já no âmbito da pesquisa, destacam-se os trabalhos relacionados à utilização do computador como uma ferramenta de mediação pedagógica e as pesquisas no âmbito das ciências cognitivas e ainda algumas poucas pesquisas que conduzem o ensino-aprendizagem de conteúdos do Cálculo no âmbito da Educação Básica. Nessa etapa de ensino, em sua tese de doutorado, Paganí (2016) investiga o ensino aprendizagem de derivada no Ensino Médio técnico através da resolução de problemas.

Cumprido salientar que vivemos em um mundo onde as tecnologias digitais estão presentes em quase todas as atividades de nossa sociedade, seja nas formas de se comunicar, na sistematização e organização dos dados, no comércio, na agricultura ou no que diz respeito à interação entre pessoas. Entende-se o momento em que vivemos como um momento de cultura digital:

[...] um ecossistema complexo onde reina a interdependência entre o macro-sistema tecnológico (a rede de máquinas interligadas) e o micro-sistema social (a dinâmica dos usuários), construindo-se pela disseminação de informação, pelo fluxo de dados e pelas relações sociais aí criadas (LEMOS, 2002 *apud* FLORES; LIMA; MULLER, 2018, p. 24).

Esse momento de cultura digital prevê relações distintas entre o sujeito e a informação bem como entre os sujeitos. O homem influenciando a tecnologia e a tecnologia influenciando o homem (FLORES; LIMA; MULLER, 2018). Ainda de acordo com eles, era de se esperar que a Educação não ficasse de fora dessa cultura digital, visto que é formada por pessoas pertencentes a uma sociedade caracterizada pela cultura digital. E o computador se posiciona como grande ferramenta nessa introdução das tecnologias também no ensino.

Paula *et al.* (2015), ao falarem sobre a utilização do computador no ensino de Cálculo, destacam o aspecto conservador do sistema escolar e a resistência do professor a mudanças:

[...] a área de ferramentas computacionais é promissora e vem sendo claramente explorada. Apesar de se tratar de uma vasta área de pesquisa com potencialidades em produções científicas, preliminarmente nota-se que a sociedade moderna está definida e estruturada pela tecnologia, mas o sistema escolar ainda se encontra tradicionalmente conservador, isto é, isentando essa influência. Ficou claro nas pesquisas outra limitação em que o professor ainda resiste a mudanças, adotar uma postura de orientador da construção do conhecimento em substituição à metodologia do doador da transmissão do saber (PAULA *et al.*, 2015, p. 9).

Nesse sentido, os computadores têm-se mostrado uma importante ferramenta de apoio ao ensino do Cálculo. Villareal (1999) destaca que

Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLAREAL, 1999, p. 43).

Diante dessa utilização cada vez maior do computador como aliado no ensino de Cálculo, Rezende (2003b) destaca o perigo de se “modernizar a ignorância” (p. 34), isto é, o erro de percepção quanto aos reais problemas no ensino de Cálculo. Para ele, é necessário primeiro definir o que se quer do Cálculo e qual será o seu papel para, então, definir a contribuição dos computadores.

Dessa maneira, enfatizamos as potencialidades do uso de computadores diante de uma infinidade de *softwares* gratuitos utilizados nas investigação e na construção de conceitos matemáticos em ambientes virtuais, mas também vale evidenciar a importância do professor como interlocutor do conhecimento.

Na minha experiência como professor de turmas de Pré-Cálculo e Cálculo, observei que a tentativa de se criar um curso antecessor ao Cálculo, que, em algumas instituições, é chamado Pré-Cálculo, Fundamentos de Matemática ou Cálculo Zero, tem demonstrado ser uma alternativa, mesmo que ainda não tenha apresentado resultados muito significativos. Nos cursos de Pré-Cálculo, como dito anteriormente, são apresentados alguns conceitos matemáticos básicos como fatoração, produtos notáveis, funções, trigonometria, entre outros. Rezende (2003b) nota que a alta taxa de reprovação em Cálculo I persiste mesmo após a criação da turma de Matemática Básica da UFF e destaca que “as noções de Cálculo têm muito mais a ver com noções de infinito, de infinitésimos, de variáveis, do que com fatoração de polinômios, relações trigonométricas, cálculos algébricos, etc” (p. 36).

De acordo com Barreto (1995), o fracasso do Cálculo está ligado à pessoa do aluno, com uma formação insuficiente na Educação Básica, sem hábitos de estudo e com pouca capacidade crítica. Ela também acredita estar ligado à pessoa do professor, sendo ele o responsável por conduzir o processo de aprendizagem com práticas pedagógicas inadequadas. Nesse sentido ela afirma que

[...] as causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, bastante inseguros (BARRETO, 1995, p. 4-5).

Contudo, concordamos com Rezende (2003a), no que tange à ideia de que grande parte das dificuldades, no ensino-aprendizagem de Cálculo, são de natureza epistemológica e não oriundas da pessoa do professor ou dos alunos. Nesse viés, ele afirma que

[...] grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de natureza epistemológica. Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo (REZENDE 2003a, p. 4)

Em seu trabalho, Rezende realiza um mapeamento e descreve os obstáculos epistemológicos encontrados no processo histórico de construção do Cálculo, a partir de um entrelaçamento de fatos pedagógicos e entraves encontrados na evolução histórica das ideias básicas e procedimentos do próprio Cálculo. Sua experiência profissional como professor da Educação Superior, e mais especificamente de Cálculo, ajudou-o a observar de perto as dificuldades dos estudantes em tal disciplina. A partir disso, ele dividiu as dificuldades de natureza epistemológica em cinco macro espaços que, de acordo com ele, são identificados pelas dualidades fundamentais do Cálculo: sistematização/construção; discreto/contínuo; permanência/variabilidade; finito/infinito; local/global. Ele ainda destaca que

[...] pôde-se perceber, em essência, um único lugar matriz das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do Ensino de Cálculo: o da omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no Ensino de Matemática em sentido amplo (REZENDE, 2003b, p. 10).

No entanto, o que são obstáculos epistemológicos? Qual a sua origem? De acordo com Rocha, obstáculos epistemológicos são entraves ou barreiras encontradas no processo do conhecimento científico. Ele ainda relata que

O conceito de obstáculo epistemológico é justificado por Bachelard ao dizer que “quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado”. Conforme aponta Bachelard, tais obstáculos, não são decorrentes da complexidade ou fugacidade dos fenômenos, nem das limitações de nossos sentidos. Eles se encontram no próprio ato de conhecer, fundamentado na ideia pré-concebida. (ROCHA, 2013, p. 4).

Tendo como base o mapeamento das dificuldades de natureza epistemológica no ensino do Cálculo realizado por Rezende, verifica-se que elas possuem, em sua origem, a “omissão/evitação” (Rezende, 2003a, p. 12) das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.

Ressaltamos que o nosso objetivo aqui terá como foco o ensino de funções reais de uma variável real, através das taxas de variação, privilegiando sempre o seu caráter dinâmico e, dessa forma, entendemos que nosso trabalho se insere no macro espaço da permanência/variabilidade.

Em Matemática, destacamos a grande importância das ideias de função para uma compreensão do mundo em que vivemos, por exemplo, entender como duas grandezas se relacionam e como variam, uma em termos da outra.

A apresentação do conceito de função, em algumas situações, realça um obstáculo epistemológico, pois, quando desenvolvida de forma estática e sem ligação com o mundo real, impede a “[...] noção de interdependência entre quantidades variáveis, tão essencial para o desenvolvimento do Cálculo” (REZENDE, 2003a, p. 6). Segundo Bortolossi *et al.* (2011), o conceito de função tem se mostrado, em pesquisas na área, um dos principais obstáculos epistemológicos no ensino de Cálculo e afirmam que o conceito de função é trabalhado, na maioria das vezes, de forma estática, ou seja, por sua regra em contraposição à forma dinâmica pela qual deve ser apresentada tal tema, a variabilidade de uma grandeza y em termos de outra x .

Rezende (2006) *apud* Bortolossi *et al.* (2011) diz que

[...] ao realizar um mapeamento de como os tópicos de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, são desenvolvidos em alguns dos principais livros didáticos nacionais do ensino básico de Matemática, constata a predominância de uma abordagem **algébrica** e **estática** do conceito de função. Fala-se, por exemplo, em injetividade ou sobrejetividade, mas não em crescimento ou decrescimento da função, ou melhor, em quanto e como cresce/decresce o valor de uma função em relação à sua variável (REZENDE, 2006 *apud* BORTOLOSSI *et al.*, 2011, p. 2, grifos nossos).

Podemos dizer, então, concordando com as ideias apresentadas por Rezende (2003a) e Bortolossi *et al.* (2011), que essa maneira estática em que é apresentado o conceito de função na Educação Básica distancia os alunos da representação dinâmica de função, a qual teve um papel fundamental na construção do conceito de derivada a partir da taxa média de variação de função.

Esperamos, com este trabalho, vislumbrar forma de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das variáveis do problema, “o que varia e em função de que varia” (REZENDE, 2003a, p. 6) e ainda como ocorre essa variação. Desse modo, atendemos as orientações dos PCNs:

[...] cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento (BRASIL, 2000, p. 41).

Exibiremos uma sequência didática que terá como objetivo principal apresentar e analisar um estudo do conceito de função, privilegiando seu caráter dinâmico e as suas taxas de variação, tendo com aliado o *software* GeoGebra.

Nessa sequência didática que será voltada para a Educação Básica, mais precisamente para o primeiro ano do Ensino Médio, exploraremos funções e as suas características quanto à variabilidade, problemas de máximos e mínimos, relação entre a inclinação da reta tangente e a monotonia de funções, aplicações na Física, noções intuitivas de continuidade, densidade dos números racionais e irracionais nos reais, proporcionalidade, limites e derivadas de algumas funções reais; alguns desses conceitos apenas de forma intuitiva.

Podemos destacar *softwares* utilizados na prática docente pelos professores da Educação Básica e Superior, tais como GeoGebra, Matlab, C.a.R (régua e compasso), Geoplan, Cinderella e Winplot. A nossa escolha pelo GeoGebra se deve à sua interface dinâmica que relaciona os aspectos algébricos e geométricos. Além disso, o

GeoGebra é um *software* gratuito, com premiações internacionais pela sua contribuição no estudo da Matemática. Criado pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University, em 2001, o GeoGebra é um *software* de Matemática **dinâmica** para ser utilizado em escolas de Educação Básica e no Ensino Superior, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo (COMETTI, 2016, p. 6 – grifo do autor).

O GeoGebra se apresenta, nesse contexto, como uma ferramenta didática que visa melhorar o ensino e aprendizagem em Matemática. Bortolossi *et al.* (2011) destaca que, no GeoGebra, podemos criar pontos sobre o gráfico de funções e, ainda mais, movê-los de modo que ainda permaneçam sobre o gráfico da função. As coordenadas desses pontos podem ser recuperadas e ainda utilizadas para criação de outros elementos geométricos e permite que as funções sejam estudadas de forma algébrica, gráfica e numérica, possibilitando o estudo de características locais da função, como taxas de variação média e instantânea. Podemos definir as funções por parâmetros que podem receber um caráter dinâmico com a utilização de controles deslizantes (ferramenta que permite causar variações em objetos de forma manual ou automática, podendo assumir também a função de uma variável) e, desse modo, visualizarmos o crescimento, concavidade, extremos e outras características da função.

Em seguida, apresentaremos um breve relato histórico do desenvolvimento dos conceitos matemáticos que motivaram o estudo das funções. Destacaremos o surgimento da ideia de função no campo das variações entre grandezas e o que motivou a definição atual no contexto conjuntista, como vemos nos livros didáticos atuais.

2.2 Um Breve Relato do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função

Os esforços de rigorização e formalização na Matemática Moderna foram, em grande parte, motivados pelo surgimento do Cálculo Infinitesimal e as grandes discussões que envolviam a autenticidade de seus procedimentos nos séculos XVII e XVIII, quando tais temas passaram a fazer parte do campo da Análise Matemática (ROQUE, 2012).

Podemos entender que a história da Análise ou Cálculo Infinitesimal contribuiu, de forma significativa, para transformações que culminaram na Matemática tal como a que temos nos dias atuais, construída principalmente nos séculos XIX e nos primeiros anos do século XX. Abordaremos, ainda que de forma breve, por não ser o objetivo principal de nosso trabalho, como o conceito de função surge nesse período, por entender ser uma boa contribuição, e destacaremos como sua motivação está intimamente ligada ao Cálculo infinitesimal e às suas transformações na formulação do rigor matemático.

A maneira como o conceito de função é apresentado atualmente nos remete, quase que instantaneamente, à curva que a representa e à sua expressão analítica. Podemos imaginar, também, uma correspondência ou uma tabela entre elementos do domínio e as suas respectivas imagens.

Considerando essa última forma de visualizar as funções, seria possível dizer que os babilônicos e os egípcios já faziam uso da ideia de função, por apresentarem, em suas tabelas, uma correspondência entre um número e o resultado de operações que continham esse número, fato que conduz a algumas afirmações de que as noções de função possuem sua origem na Matemática antiga.

Do ponto de vista histórico, não existe vantagem alguma em considerar o surgimento do conceito de função na matemática antiga com os babilônicos e egípcios e ainda destacamos que um componente fundamental do conceito de função era ausente até então, a **variação** (ROQUE, 2012).

Para representarmos uma função por meio de uma expressão, fazemos uso de variáveis, cujo conceito só veio a ser formalizado no século XIX, motivado pela Física-Matemática e a representação simbólica de quantidades desconhecidas, proposta inicialmente por Viète, e que veio a ser desenvolvida no século XVII.

Durante o século XVII, notamos algumas transformações ocorridas na Matemática. Em particular, o surgimento e o aprimoramento de linguagens simbólicas e a forma de lidar com as curvas. Pierre de Fermat e René Descartes estão no coração dessa mudança, propondo algumas transformações que ajudaram a dar origem a nossa atual Geometria Analítica. Esses métodos analíticos propostos permitiram a representação de quantidades desconhecidas por símbolos e, portanto, manipularmos esse com as mesmas regras que usamos ao operar com as quantidades conhecidas.

Esse programa analítico transformou a Análise em um sinônimo de Álgebra simbólica, entendida como uma teoria de equações. Leibniz, a fim de incorporar seu Cálculo nessa nova concepção, passou a nomeá-lo de Análise dos indivisíveis e infinitos, dessa forma seu objetivo era mostrar que novos métodos se faziam necessários para estudar as relações entre as grandezas que não eram passíveis de serem abordadas com a Álgebra ordinária, por exemplo, a relação entre uma curva e a sua reta normal ou a sua reta tangente em cada ponto. Dessa forma, Roque afirma que

Entrava-se, portanto, em um novo domínio da relação entre quantidades, o que, como veremos, contribuirá para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades. Na verdade, nesse contexto, a equação deixava de ser algo que devia expressar uma relação algébrica dada entre quantidades e passava a ser um modo de invenção (*modus inveniendi*). Em outras palavras, passava a ser um meio para encontrar uma quantidade a partir de outras, incluindo-se aí as novas relações transcendentais que interessavam não somente à Matemática, mas também à física, uma vez que o infinito está presente na natureza (ROQUE, 2012, p. 331).

Com isso, a equação perdia seu papel de relação algébrica entre quantidades e passava a representar um modo de encontrar quantidades a partir de outras. Essas novas técnicas de solução e curvas, propostas por Leibniz, também tinham como objetivo abordar problemas físicos na análise.

Em 1684, Leibniz faz uso da palavra “função” em um artigo para apontar a relação de uma grandeza com respeito a uma figura, no caso a tangente.

A Física pós-Galileu foi, em grande parte, responsável pelo estudo das variações por meio de leis matemáticas. O conceito de variação de uma função foi evidente em seus trabalhos e se fez presente a ideia de função como uma relação entre duas grandezas que variam.

Nas obras de Leibniz e Newton, não temos uma definição para função, mesmo sabendo que ambos pesquisaram diversas relações funcionais. Diante dessa ausência de uma definição para tal tema, surge, pela primeira vez, uma definição para função, presente em uma correspondência de Leibniz para Johann Bernoulli, que, no fim do século XVII, já empregava tal palavra.

O século XIX é conhecido como “a idade do rigor” e podemos dizer que a Matemática adquiriu o formato como o que conhecemos nos dias atuais. Um dos entraves encontrados para tal desenvolvimento foi encontrado na concepção de número como quantidade e sua superação resultou na transformação da Matemática em “Matemática pura”. Agora, ela passava a se desvincular da Física.

Impera, no início do século XX, uma abordagem conjuntista, o que motiva a redefinição dos conceitos centrais em Matemática à luz dessa nova ótica. Podemos evidenciar que Dirichlet⁹, Riemann¹⁰ e Dedekind¹¹ contribuíram para a difusão do conceito de função e apresentaram as primeiras ideias de que função pode ser relacionada à ótica dos conjuntos.

Nos trabalhos de Dirichlet sobre séries de Fourier, mais precisamente em seu primeiro artigo de 1829, ele aborda problemas associados à continuidade das funções estudadas por Cauchy e Fourier, ainda que não se tenha definido o conceito de função. Em uma nova versão do mesmo texto que veio a ser publicada em 1837, aparece a definição:

⁹ Dirichlet nasceu em Duren, cidade alemã no ano de 1805. Foi o sucessor de Gauss, mestre a quem admirava. É considerado o pai do conceito de função. Seu trabalho mais celebrado está associado a séries de Fourier, que o motivou a generalizar o conceito de função (EVES, 1995).

¹⁰ Riemann nasceu em 1826, em uma aldeia Hanover, na Alemanha. Exerceu uma influência profunda em vários ramos da Matemática, como Geometria e teoria das funções (EVES, 1995).

¹¹ Dedekind nasceu em 1831, na cidade de Braunschweig na Alemanha. Contribuiu de forma significativa na investigação sobre a natureza do número e da função (BOYER, 1974).

Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b . Se a cada x corresponde um único y , finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b , $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações Matemáticas (DIRICHLET, 1837, p. 135-136 *apud* ROQUE, 2012, p. 426).

Logo, podemos dizer que as expressões analíticas do século XVIII, compostas por operações aritméticas simples, foram, por muitos anos, o foco de estudo da Análise Matemática, mas, no decorrer do tempo, outras propriedades se destacaram e surgiram classes de funções a partir de novos problemas. É possível destacar as funções contínuas, descontínuas em pontos isolados unívocas, diferenciáveis, dentre outras. Essas propriedades não dependiam da existência de uma forma analítica para representação da função, que foi a grande diferença entre a concepção característica da Análise do século XVIII e a teoria de funções que teve início no século XIX.

Dirichlet foi um dos precursores do ponto de vista conceitual que se tornou um grande estímulo para a abordagem conjuntista da Matemática, reforçada por outros matemáticos como Riemann e Dedekind. Essa nova visão que começava a ser empregada propagava que os novos objetos matemáticos deviam ser definidos por suas características internas, sendo essas o princípio da teoria e, assim, não dependendo mais de representações externas, abrindo espaço para a Matemática pura.

Com a publicação do livro *Éléments des mathématiques: les structures fondamentales de l'analyse* (Elementos de Matemática: as estruturas fundamentais da análise) por Nicolas Bourbaki, a imagem da Matemática como um saber axiomatizado e tendo como base as noções de conjunto passa a ser popularizada, com o objetivo de elaborar livros de Matemática atualizados e que pudessem servir como referência para pesquisas de estudantes. Bourbaki (pseudônimo de um grupo de matemáticos franceses dos anos de 1930) propõe a seguinte definição para função:

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E , existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x . Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E , o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x ; y será dito o valor da função no elemento x (ROQUE, 2012, p. 439).

Essa definição inicial ainda foi reformulada e função passou a ser definida como um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos, eliminando todas as ligações com as ideias originais de função associadas à variação, ou seja, à noção de variável. As ideias iniciais de função, associadas à variação, e essa nova definição conjuntista passam a ser inconciliáveis.

Na escola, na maioria das vezes, aprendemos e ensinamos a definição formal de função que foi proposta por Bourbaki, uma abordagem conjuntista e estática que em nada favorece uma associação à ideia dinâmica de função, amplamente presente em situações do nosso cotidiano e nos problemas que abordam situações contextualizadas. Essa divergência entre o ensino estático e o ensino dinâmico de funções é uma das motivações do nosso trabalho.

2.3 O Ensino de Funções

Segundo Barreto (2008), o conceito de função pode ser considerado um dos mais importantes da Matemática. Rezende (2003b) ressalta que o conceito de função é uma das principais invenções que desabrocharam a partir do desenvolvimento do Cálculo e o seu surgimento está intimamente ligado à ideia de variabilidade, ou seja, surge de forma implícita de uma relação funcional entre quantidades variáveis de grandezas.

De modo a compreendermos as orientações atuais no ensino de funções, recorreremos à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento orientador que apresenta as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos em cada etapa da Educação Básica, de modo que sejam garantida as aprendizagens básicas e seu desenvolvimento de acordo com o Plano Nacional de Educação (PNE). Logo, em sua competência 1 (um), encontramos a habilidade

(EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das **taxas de variação** com ou sem apoio de **tecnologias digitais** (BRASIL, 2018, p. 525, grifos nossos).

Dessa forma, pela indicação das análises das taxas de variação e uso de tecnologias digitais no ensino de funções, encontramos na BNCC um grande incentivo para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Percebermos um distanciamento da abordagem dinâmica do estudo de funções, em que é deixado de lado o estudo das relações entre as variações entre grandezas. Notamos uma grande ênfase em expressões algébricas que exprimem as leis das funções, tomando-as como base para definição e demais estudos. Essa abordagem distancia o aluno de um posicionamento crítico e reflexivo, também distanciando-o de uma formação científica, pois essa prática impede uma melhor interpretação de situações das Ciências da Natureza e Humanas.

No início do século XX, como apresentamos na seção anterior, o conceito de função passou a ser definido no campo da Teoria de Conjuntos, tal como é apresentado nos livros didáticos e que foge à motivação histórica de seu surgimento no campo da variabilidade. Podemos então dizer que a noção de função, individualizada como objeto de estudo corrente, é mais recente. Nesse sentido, Bortolossi destaca que

[...] o conceito de função “evoluiu” no processo histórico de construção do conhecimento matemático: sai, gradativamente, do âmbito do Cálculo, enquanto relação entre quantidades variáveis, para o âmbito da Teoria dos Conjuntos. Tal definição apareceu tão somente no início do século XX e, historicamente, pouco contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento matemático em sentido amplo, principalmente se tomarmos como referência aquele usualmente ensinado na educação básica (BORTOLOSSI *et al.*, 2011, p. 77).

Ao estudar funções, o aluno passa a dominar uma linguagem amplamente utilizada nas ciências, podendo relacionar grandezas, modelar situações presentes no seu dia a dia e, de uma forma geral, entender melhor o mundo em que vive ao associar as funções com diversos fenômenos naturais presentes no cotidiano.

O estudo dos fenômenos naturais e as variações quantitativas presentes neles foi um dos grandes pilares para a construção do conceito de função (BORTOLOSSI *et al.*, 2011). Porém, notamos na Educação Básica um distanciamento dessa motivação histórica no surgimento do conceito de função no campo da variabilidade e uma aproximação de uma abordagem estática, restringindo a uma associação entre as variáveis x e y e os seus valores.

Nesse contexto, o ensino de função vem evidenciando obstáculos epistemológicos. Por exemplo, Rezende (2003b) destaca a abordagem estática de função como um dos incentivadores de obstáculos epistemológicos, e Sierpinska (1992) evidencia dezesseis obstáculos epistemológicos na construção das ideias de função.

Vamos enunciar, no Quadro 1, quatro obstáculos epistemológicos dentre os apontados por Sierpinska e que foram percebidos nas respostas dadas pelos alunos às perguntas

propostas nas atividades. Por não ser o objetivo principal do trabalho, não serão apresentados todos os obstáculos epistemológicos enunciados por Sierpinska, ainda que fosse possível destacar outros na análise das respostas dos alunos às atividades propostas na sequência didática.

Quadro 1- Obstáculos epistemológicos apontados por Sierpinska (1992).

Obstáculos	Tradução dos Autores	Versão Original
Obstáculo 1	A Matemática não se preocupa com problemas práticos.	Mathematics is not concerned with practical problems.
Obstáculo 6	Uma concepção heterogênea de número.	A heterogeneous conception of number.
Obstáculo 9	Proporção é um tipo privilegiado de relação.	Proportion is a privileged kind of relationship.
Obstáculo 10	Forte crença no poder das operações em expressões algébricas.	Strong belief in the power of formal operations on algebraic expressions.

Fonte: Sierpinska, 1992 (adaptado).

Na contemporaneidade, o ensino de função, caracterizado pelo amplo destaque de modelos algébricos, está no caminho inverso do surgimento histórico das ideias do Cálculo. Bortolossi *et al.* (2011) afirma que esse modelo estático de apresentar as funções em nada contribuiu para a solução do problema histórico da variabilidade no Cálculo. Ele ainda contribui efetivamente para um dos maiores obstáculos epistemológicos, a noção de interdependência entre as quantidades variáveis, essencial ao Cálculo.

Se considerarmos a Matemática no contexto escolar, tendo em vista as aplicações, o conceito de “função” pode ser compreendida como o estudo de problemas que retratam a quantificação e a variação de fenômenos. Ainda nesse contexto, uma variável passa a representar os valores do domínio de uma função, o que leva ao surgimento da noção de variável dependente e variável independente (BARRETO, 2008).

Reafirmamos aqui a importância de trazermos à tona o caráter dinâmico do estudo de funções, uma vez que a abordagem conjuntista e estática, com amplo destaque às expressões algébricas que representam as funções, dificultam ao aluno relacionar ou aplicar o que se aprende em outras ciências ou na própria Matemática. Percebemos, além disso, que essa abordagem vem sendo apresentada pela maioria dos livros didáticos e professores, conforme

destaca Bortolossi *et al.* (2011). Nesse prisma, a utilização de tecnologias busca minimizar tal problema, em especial o uso de *softwares* de Matemática dinâmica, como o GeoGebra, se mostra uma boa escolha.

No próximo capítulo, destacaremos conceitos matemáticos importantes para a compreensão deste trabalho e que, de forma direta ou indireta, surgem na execução da sequência didática apresentada.

3 UM ESTUDO SOBRE FUNÇÕES

Iniciaremos, neste capítulo, o estudo de conjuntos, dentre eles alguns numéricos clássicos, tais como os naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Vamos definir alguns tipos especiais de funções e conceitos do Cálculo que surgem na execução desse trabalho.

3.1 Conjuntos - Noções Básicas

A Matemática como conhecemos possui muitos dos seus conceitos formalizados na linguagem de conjuntos. Intuitivamente, **conjunto** é uma coleção de objetos não ordenados que possuem uma característica comum. Por exemplo, quando mencionamos a palavra “professores”, podemos entender como um conjunto de pessoas que trabalham ministrando aulas, e cada professor é um **elemento** desse conjunto. Quando todos os elementos de um conjunto A qualquer pertencem a um outro conjunto B , diz-se, então, que A é um **subconjunto** de B , $A \subset B$. Poderíamos dizer, desse modo, que o conjunto dos professores de Matemática formam um subconjunto do conjunto formado por todos os professores. Na próxima seção, trataremos conjuntos numéricos que são coleções de “números” com certas características.

A aparição dos números pode ser associada ao surgimento da ideia de conjuntos. Nesse sentido,

O surgimento dos números naturais – uma das criações mais úteis do pensamento humano e um dos alicerces da Matemática – pode ser visto como consequência da noção de conjuntos. Dizem alguns historiadores que, há muitos séculos atrás, antes de existir a contagem, os pastores usavam um saquinho de pedras para não perderem as ovelhas. Quando levavam as ovelhas para pastar, para cada ovelha que passava guardavam uma pedrinha. Na hora de recolher as ovelhas, para cada ovelha que voltava ao curral, retiravam uma pedrinha. Se, no final, não sobrasse nenhuma pedra no saquinho, eles podiam se assegurar de que nenhuma ovelha se perdeu (FAJARDO, 2017, p. 5).

Assim, os pastores faziam uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos, pedras no saquinho e ovelhas, de modo que cada pedra era associada a uma ovelha e vice-versa, e, dessa forma, os dois conjuntos possuíam a mesma quantidade de elementos.

Com o passar dos anos, notaram que não havia necessidade de se usar pedras e surgiu o conceito abstrato de número, mais especificamente os números naturais.

3.2 Conjuntos Numéricos

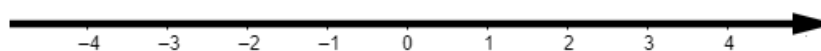
Não conseguimos imaginar viver em uma sociedade sem fazermos uso da ideia de contagem. Esse problema foi solucionado com a utilização dos números naturais. Segundo Caraça (1998), os números naturais se formaram lentamente pela prática diária de contagens. O **conjunto dos números naturais** é denotado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

A criação do zero é bem recente e data dos primeiros séculos da era cristã. A motivação do seu surgimento está ligada às exigências da numeração escrita.

Domingues (1991) esclarece que a introdução na Matemática dos números negativos foi motivada pelo comércio para indicar débitos, e os primeiros registros aparecem nos trabalhos do matemático e astrônomo hindu Brahmagupta. Essa manifestação do conjunto dos números naturais, incluindo também os números negativos, forma o **conjunto dos números inteiros**, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

A existência de números negativos foi de difícil aceitação e sua origem está ligada às necessidades da Matemática, mais especificamente às manipulações algébricas, por exemplo, na resolução de equações do segundo grau.

Figura 1 - Representação geométrica dos números inteiros



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A noção de medir está intimamente ligada à ideia de comparar, estabelecer uma unidade de medida fixa e dizer quantas unidades dessas são suficientes para encontrarmos o total da grandeza que estamos medindo. Na maioria das vezes, não conseguimos obter quantidades inteiras da unidade e fazemos uso de partes da unidade para representar a quantidade procurada. Dessa forma, surge uma necessidade de se buscar números que representem a quantidade de uma grandeza a partir de uma unidade fixada.

A ideia de medir era trabalhada pelos matemáticos gregos, fazendo-se uso do conceito de **grandezas comensuráveis**, que podem ser entendidas como grandezas “medidas simultaneamente”, usando-se uma mesma unidade. Na prática, dados segmentos \overline{PQ} e \overline{RS}

com comprimentos PQ e RS , se conseguirmos inteiros a e b e um segmento de medida CD tais que $PQ = aCD$ e $RS = bCD$, os segmentos PQ e RS serão denominados **comensuráveis**.

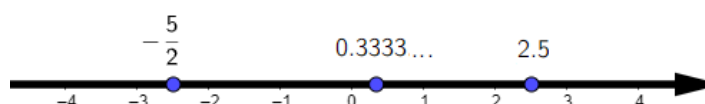
Note que podemos representar a razão entre as medidas dos segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} como um quociente da forma

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{aCD}{bCD} = \frac{a}{b}.$$

Ao conjunto formado por todas as frações de inteiros damos o nome de **conjunto dos números racionais** (\mathbb{Q}), cuja representação é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Figura 2 - Representação geométrica dos números racionais



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

As dízimas periódicas, apesar de terem uma representação decimal infinita, podem ser representadas como frações de inteiros e, portanto, pertencem ao conjunto dos números racionais. Esse aspecto pode gerar grande confusão nos alunos do Ensino Básico, haja vista que as dízimas quebram a falsa ideia de que os números, ao apresentarem infinitos dígitos na representação decimal, não pertencem aos racionais.

Numa colônia grega localizada ao sul da Itália, chamada Crotona, Pitágoras, que nasceu em torno de 572 antes de Cristo, criou a Escola Pitagórica, que tinha como objeto de estudo a Filosofia, a Matemática e as ciências naturais. Até então, parecia razoável intuir que, para quaisquer segmentos, sempre seria possível obter a , b e CD como na situação apresentada anteriormente. Contudo, acredita-se que os gregos, mais precisamente os pitagóricos, descobriram algo perturbador, a existência de **grandezas incomensuráveis**, ou seja, não existiam a , b e CD como na situação apresentada anteriormente e, conseqüentemente, essas grandezas não podiam ser expressas por frações de números inteiros.

Vamos mostrar a existência de números incomensuráveis. Para isso, precisaremos do seguinte resultado que envolve a paridade de números inteiros:

Lema 1: Sejam a e par, então, a^2 é par. De forma análoga, sendo $b \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então, b^2 é ímpar.

Demonstração: Se a é um número par e b é um número ímpar, então existem inteiros k_1 e k_2 de modo que

$$a = 2k_1 \text{ e } b = 2k_2 + 1$$

Assim

$$a^2 = (2k_1)^2 \Rightarrow a^2 = 4k_1^2 = 2(2k_1^2)$$

e, portanto a^2 , um número par, pois $2k_1^2 \in \mathbb{Z}$. De forma análogo,

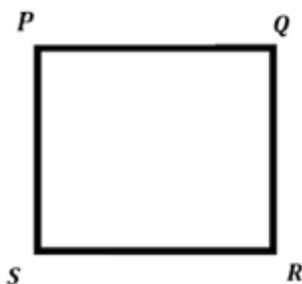
$$b^2 = (2k_2 + 1)^2 \Rightarrow b^2 = 4k_2^2 + 4k_2 + 1 = 2(2k_2^2 + 2k_2) + 1$$

e, portanto b^2 , um número ímpar pois $(2k_2^2 + 2k_2) \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema 1: A diagonal de um quadrado é um número incomensurável.

Demonstração: Vamos mostrar que a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado é incomensurável. Considere um quadrado $PQRS$, ilustrado na Figura 3. Pelo Teorema de Pitágoras, que $2(QR)^2 = (QS)^2$.

Figura 3 - Quadrado PQRS



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Suponha, por contradição¹², que esses segmentos sejam comensuráveis. Logo, existem $r, s \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que:

¹² A prova por contradição consiste em admitir como sendo verdadeira a negação de certa afirmação e, seguindo o processo de demonstração é observado, como consequência, uma contradição, o que faz a negação da hipótese inicial um absurdo.

$$\frac{QR}{QS} = \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{(QR)^2}{(QS)^2} = \frac{(QR)^2}{2(QR)^2} = \left(\frac{r}{s}\right)^2.$$

Então,

$$\frac{1}{2} = \frac{r^2}{s^2} \Rightarrow 2r^2 = s^2.$$

Logo s é um número par, digamos $s = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como

$$s^2 = 2r^2 \Rightarrow 4k^2 = 2r^2 \Rightarrow 2k^2 = r^2,$$

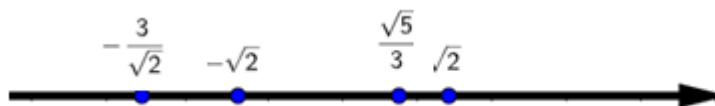
ou seja r é par.

Uma contradição, pois obtemos que r e s são pares, mas isso contradiz a hipótese de serem primos entre si. Portanto, isso mostra que a razão $\frac{QR}{QS}$ é incomensurável. ■

Chamamos de **conjunto dos números irracionais** (\mathbb{I}) o conjunto formado por todos os números incomensuráveis, ou seja, que não podem ser representados na forma de fração de inteiros.

Existe uma confusão por parte dos alunos, e até mesmo professores, quanto à definição de racionais. Alguns alunos entendem números racionais como todos aqueles que podem ser representados como frações. Essa forma de definir os números racionais leva à aceitação dos números $\sqrt{2}/3$ e $5/\sqrt[6]{3}$ como racionais, o que é um absurdo. Por isso, a importância de frisarmos que devemos ter uma fração de inteiros para que um número seja racional.

Figura 4 - Representação geométrica de números irracionais



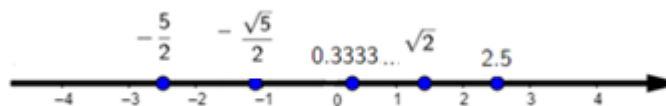
Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A união dos números comensuráveis com os números incomensuráveis consiste no conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Existe uma correspondência um a um entre os pontos de uma reta ordenada e os números reais, isto é, cada número real pode ser associado a um único ponto da reta e vice-versa. Podemos entender a representação geométrica dos números reais como sendo uma

reta. Associamos cada número real a um ponto P da reta, chamado **coordenada** de P , e a reta é denominada **eixo dos números reais**, ou simplesmente **eixo real**.

Figura 5 - Representação geométrica dos números reais



Fonte: Elaborado pelos autores 2020.

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos reais**, ocorrem frequentemente no estudo de funções e correspondem geometricamente a segmentos de reta, semirretas e reta. Podemos representar esses intervalos reais de forma algébrica, geométrica ou, ainda, por uma descrição ou sentença, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2- Intervalos reais

Representação Algébrica	Representação geométrica	Descrição
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou $[a, b]$		Intervalo fechado de extremos a e b .
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou (a, b)		Intervalo aberto de extremos a e b .
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $[a, b)$		Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b .
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $(a, b]$		Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda de extremos a e b .
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ou $[a, +\infty)$		Intervalo ilimitado fechado à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $(a, +\infty)$		Intervalo ilimitado aberto à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $(-\infty, a]$		Intervalo ilimitado fechado à direita.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $(-\infty, a)$		Intervalo ilimitado aberto à direita.
\mathbb{R} ou $(-\infty, +\infty)$		Intervalo ilimitado de $-\infty$ a $+\infty$.

Fonte: Elaborado pelos autores 2020.

No Ensino Básico, é comum utilizarmos o colchete para indicarmos também intervalos abertos ou fechados; para o aberto empregamos no sentido oposto ao que indicamos o intervalo fechado. Por exemplo, o intervalo (a, b) pode ser representado da forma $]a, b[$. Aqui, faremos uso da notação presente no Quadro 2.

Definição 1: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito **denso** nos reais, quando todo intervalo aberto (a, b) de \mathbb{R} contém algum ponto de X .

A reta não possui “buracos”. Os racionais e irracionais são densos na reta, ou seja, para quaisquer dois pontos distintos que pegarmos na reta, sempre teremos um número racional e também um irracional entre eles. Caso o leitor queira aprofundar no assunto, sugerimos o livro “Curso de Análise” vol. I de Elon Lages¹³ (LIMA, 1993)

Segundo Caraça (1998), a suposição de que ponto geométrico não possui dimensão nos leva a concluir que, entre dois pontos quaisquer A e B da reta, por mais próximos que estejam, existirão sempre infinitos pontos entre eles. A Figura 6 exemplifica bem essa afirmação, apesar dos pontos 1,4 e 1,5 serem “próximos” na reta, conseguimos encontrar entre eles números racionais e números irracionais.

Figura 6- Densidade dos números reais



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Faremos a seguir a demonstração da densidade dos números racionais na reta.

Teorema 2: O conjunto dos números racionais é denso nos reais.

Demonstração: Vamos mostrar que o conjunto dos números racionais é denso nos reais. Ou seja, queremos mostrar que qualquer intervalo aberto de números reais contém números racionais.

Sejam a e b números reais com $a < b$. Existem apenas duas possibilidades, $0 \in (a, b)$ ou $0 \notin (a, b)$.

Caso 1: $a < 0 < b$

¹³ Matemático brasileiro, Elon Lages Lima nasceu em 1929 em Maceió. Pesquisador emérito do IMPA, obteve os títulos de mestrado e doutorado na Universidade de Chicago. Elon é autor renomado de muitos livros sobre Matemática, nos diversos níveis de ensino e em diversas áreas. Disponível em: <https://impa.br/noticias/morre-no-rio-o-matematico-elon-lages-lima-ex-diretor-do-imp-a-aos-87-anos>. Acesso: 03 fev. 2020.

Como 0 é um número racional, não há o que provar, uma vez que ele é um racional entre a e b .

Caso 2: $0 \leq a < b$

Consideremos um racional s de modo que $s < b - a$.

A existência de s é garantida, pois basta tomarmos $s = 1/n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, de modo que $n > 1/(b - a)$.

Vamos agora definir o conjunto $D = \{d \in \mathbb{N} : ds > a\}$. Seja y o menor elemento de D (esse menor elemento existe, pois os naturais são limitados inferiormente por 0). Em particular, como $y \in D$, temos que $sy > a$. Afirmamos que $sy \in (a, b)$. De fato, caso não pertencesse, teríamos $sy \geq b$ e, assim,

$$(y - 1)s \leq a \Rightarrow -(y - 1)s \geq -a.$$

Somando as desigualdades $sy \geq b$ e $-(y - 1)s \geq -a$, temos que

$$sy - (y - 1)s \geq b - a.$$

Daí segue que $s \geq b - a$, o que contradiz a nossa hipótese inicial. Portanto, devemos ter $sy < b$ e assim $sy \in (a, b)$. Como $s \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{N}$, então sy é um racional entre a e b .

Caso 3: $a < b \leq 0$

Perceba que $a < b \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -b < -a$. Assim, do Caso 2, existe $t \in (-b, -a)$ com $t \in \mathbb{Q}$. Logo, $t \in (-b, -a) \Leftrightarrow -b < t < -a \Leftrightarrow a < -t < b \Leftrightarrow -t \in (a, b)$. Visto que $-t \in \mathbb{Q}$, provamos assim que os racionais são densos nos reais. ■

3.3 Estudo de Funções

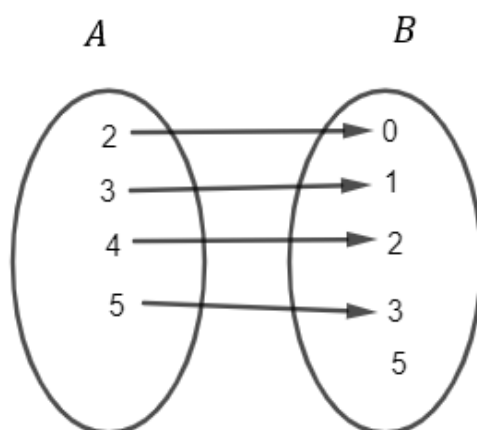
Iremos apresentar agora a definição de função, uma definição conjuntista e estática, mas que está presente na maioria dos livros didáticos atuais. Mais à frente, iremos definir algumas funções por seu caráter variacional.

Definição 2: Uma **função** f é uma lei entre dois conjuntos A e B , em que para cada elemento x em A faz corresponder exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em B . Escrevemos $f: A \rightarrow B$.

É usual nomearmos funções com letras do alfabeto latino e a mais usada é a letra f , provavelmente por ser a primeira letra da palavra função em diversos idiomas.

Para exemplificar essa definição de função, apresentamos abaixo alguns diagramas, chamados Diagramas de Venn. Eles são muito utilizados na representação de conjuntos e funções.

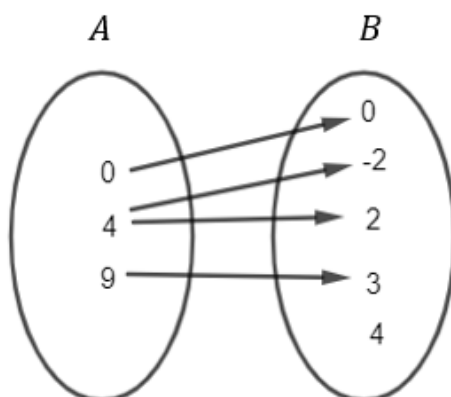
Figura 7 - Exemplo de uma função



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A Figura 7 exemplifica uma função atendendo a Definição; todo elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B .

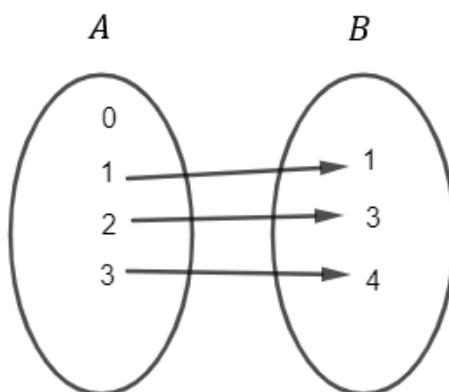
Figura 8 - Não representa uma função



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Ao observarmos a Figura 8, notamos que existe um elemento do conjunto A associado a dois elementos do conjunto B , não atendendo à Definição 2, de modo que esse diagrama não representa uma função.

Figura 9 - Não representa uma função



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Na Figura 9, temos um elemento do conjunto A que não está associado a nenhum elemento do conjunto B , portanto não temos uma função de acordo com a Definição 2.

Definição 3: Considere uma função $f: A \rightarrow B$ que relaciona dois conjuntos A e B .

- O conjunto de valores que o primeiro conjunto assume é denominado **domínio** da função, denotado por $D(f) = A$.

- O conjunto B é denominado **contradomínio**. Trata-se do conjunto que engloba todos os valores que a função pode assumir. Nem todos os seus elementos precisam estar relacionados ao domínio para que tenhamos uma função. Denotamos $CD(f) = B$.

- O conjunto dos elementos do conjunto B , que estão relacionados a algum elemento de A , recebe o nome de **imagem** da função, denotado por $Im(f) = \{f(a) | a \in A\}$ subconjunto de B .

- Um elemento genérico do domínio é denominado **variável independente**, enquanto um elemento genérico da imagem é denominado **variável dependente**.

Na Figura 7, temos o $D(f) = \{2,3,4,5\}$, $CD(f) = \{0,1,2,3,5\}$ e a $Im(f) = \{0,1,2,3\}$.

Apresentaremos agora algumas funções presentes nesse trabalho, ainda que de forma estática e, posteriormente, retomaremos o estudo de algumas delas, fazendo uso de uma abordagem mais dinâmica, enfatizando o seu caráter variacional. Iremos usar o livro Cálculo, volume 1, de James Stewart (2009) para definirmos essas funções e sugerimos a sua leitura para complementar o estudo sobre os temas apresentados nesta seção.

Definição 4: Vamos definir agora algumas funções clássicas que aparecem em nosso trabalho.

Uma função f , de domínio real, definida da forma $f(x) = k$ para cada $k \in \mathbb{R}$ é nomeada **função constante**.

Uma função $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0,$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e cada $a_i \in \mathbb{R}$ é denominada **função polinomial**. Se $a_n \neq 0$, em que n é o maior expoente da variável x , dizemos que o grau do polinômio é n . Dentre as funções polinomiais, duas se destacam no Ensino Básico, as funções polinomiais de graus um e dois.

- Função **polinomial de grau um**, ou **função afim**

$$P(x) = ax + b,$$

em que a, b , são coeficientes reais e $a \neq 0$.

- Função **polinomial de grau dois** ou **função quadrática**,

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

com a_2, a_1 e a_0 coeficientes reais e $a_2 \neq 0$.

Vamos destacar também as funções racionais e potência.

- Uma função da forma

$$f(x) = x^n,$$

na qual n é uma constante natural, com domínio real, é chamada função **potência**.

- Dizemos que uma função é **racional** se ela for a razão de dois polinômios, isto é, da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

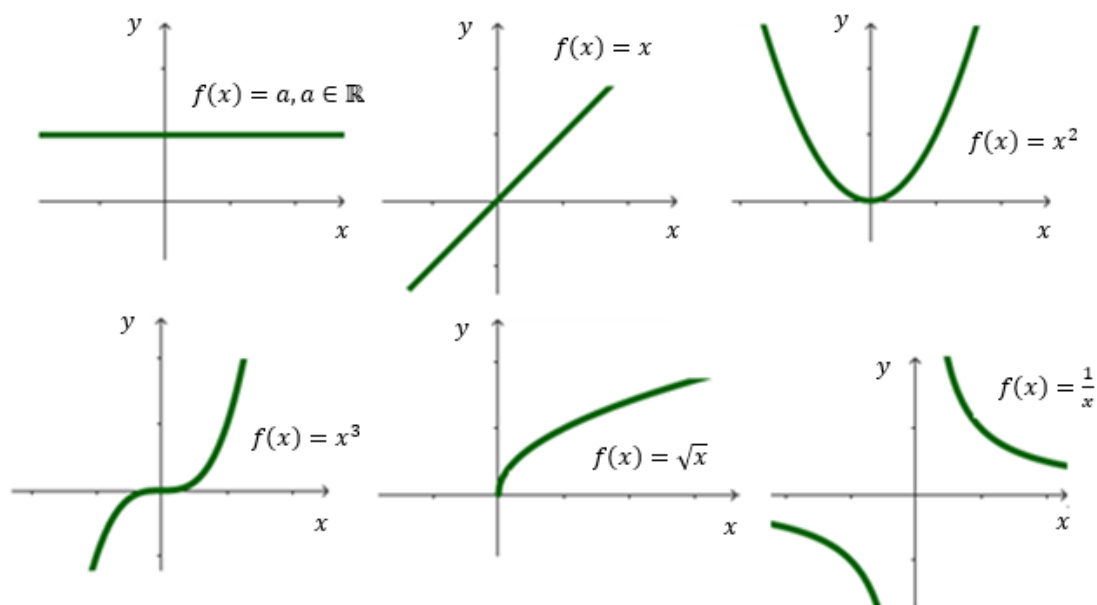
em que P e Q são polinômios. O domínio da função racional são todos os números reais tais que $Q(x) \neq 0$.

Podemos representar as funções no plano cartesiano por meio do seu gráfico, cuja definição é apresentada a seguir.

Definição 5: Seja f uma função com domínio A . O **gráfico** de f , denotado $G(f)$, será o conjunto de pares ordenados, $(x, f(x))$, onde $x \in A$.

A Figura 10 exemplifica os gráficos de funções polinomial, potência e racional, comuns no Ensino Superior e na Educação Básica.

Figura 10 - Exemplos de gráficos de funções



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

3.4 Alguns Conceitos do Cálculo

Nesta seção, iremos apresentar alguns conceitos do Cálculo que aparecem nas discussões de nosso trabalho, ainda que de forma intuitiva.

Varição e Taxa Média de Variação de uma Função

Em algumas situações em que precisamos de informações mais amplas a respeito de uma determinada função, analisamos subconjuntos do seu domínio, para entender, por exemplo, como cresce ou decresce a função.

O Quadro 3 apresenta as notas médias em Matemática dos alunos que prestaram a prova do ENEM em 2016, 2017, 2018 e 2019.

Quadro 3 - Média dos estudantes em Matemática e suas Tecnologias

Ano	2016	2017	2018	2019
Média em Matemática e suas Tecnologias	489,5	518,5	535,5	523,1

Fonte: Inep (2020)¹⁴.

Ao observarmos o Quadro 3, percebemos que a nota média dos alunos que fizeram a prova no ano 2016 foi de 489,5 pontos e, no ano 2019, subiu para 523,1 pontos. Percebemos uma variação de 33,6 pontos em um período de 3 anos.

Assim, através das informações desse quadro, podemos pensar erroneamente que a nota cresceu ano a ano em todo esse período. Porém, para termos uma informação mais detalhada de tal variação, podemos calcular também as variações ano a ano. Notamos, com tal observação, que apenas, no último ano (2019), foi registrada uma queda na nota dos estudantes quando comparada ao ano anterior. Esse exemplo simples demonstra a importância de se compreender bem o conceito de variação.

Definição 6: Seja $y = f(x)$ uma função real com domínio A . Se $a, b \in A$ e $a < b$, a **variação** de y correspondente à variação de x no intervalo $[a, b]$ é definida por:

$$\Delta y \text{ (lemos delta } y) = f(b) - f(a).$$

A unidade de medida de Δy é a mesma unidade de medida de y .

Exemplo 1: Utilizando o Quadro 3 para exemplificar variação, vamos observar as variações na nota média do ENEM pelos estudantes em diferentes intervalos. Para isso, consideremos que a função $f(x)$ represente a nota média dos alunos no ENEM no ano x .

- 2019 e 2018

$$\Delta y = f(2019) - f(2018) = 523,1 - 535,5 = -12,4.$$

- 2019 e 2017

$$\Delta y = f(2019) - f(2017) = 523,1 - 518,5 = 4,6.$$

¹⁴ Disponível em: <<http://www.enem.inep.gov.br>>. Acesso em 10 set. 2020.

- 2019 e 2016

$$\Delta y = f(2019) - f(2016) = 523,1 - 489,5 = 33,6.$$

Ao calcularmos as variações em intervalos menores de tempo (ano a ano), conseguimos analisar, de uma forma mais específica, o comportamento da nota média dos alunos em Matemática no ENEM. Saber que a nota média dos alunos cresceu em um intervalo de três anos em nada contribui para entendermos como se deram essas variações ano após ano. Se o nosso objetivo fosse entender como essa prova vem sendo percebida pelos estudantes, seria muito importante saber que a nota média decresceu no último ano para então buscarmos possíveis motivos para tal queda.

A partir das variações, podemos definir outras grandezas ao tomarmos quocientes entre elas chamadas taxas de variação. Esses quocientes dão uma "ideia" de como uma variação se comporta com relação a outra. Para entender isso, consideremos um exemplo.

Exemplo 2: Um corpo se desloca em linha reta e sua posição pode ser descrita pela função

$$P(t) = 2t^2 - 3t + 2,$$

em que $P(t)$ representa a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos).

Percebemos que, após 3 s, o corpo se encontra na posição $P(3) = 11$ m. Por outro lado, no tempo 5 s, o corpo se encontra na posição $P(5) = 37$ m. Portanto, em "média", o corpo percorreu

$$\frac{37 \text{ m} - 11 \text{ m}}{5 \text{ s} - 3 \text{ s}} = \frac{26 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 13 \text{ m/s}.$$

Contudo, se analisarmos a posição do corpo após 4 s, podemos ver que ele percorreu $P(4) = 22$ m. Ou seja, em 1 s, entre os tempos 3 s e 4 s, ele percorreu $22 - 11 = 11$ m, que é diferente da "média" de 13 m obtida acima.

Definição 7: Seja $y = f(x)$ uma função real como domínio A . Se $a, b \in A$, a **taxa média de variação** de y correspondente à variação de x no intervalo $[a, b]$ é definida por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

e a unidade de medida de $\Delta y/\Delta x$ é (unidade de medida de y)/(unidade de medida de x).

Assim, na situação tratada no Exemplo 2, quando $f(t)$ representa a posição de um corpo no instante t , a taxa média de variação da posição no tempo recebe o nome de **velocidade média**. No caso do exemplo, dizemos que a velocidade média do corpo no intervalo de tempo $[3,5]$ foi 13 m/s .

Visto que a taxa média de variação apenas dá uma "ideia" do comportamento das grandezas, gostaríamos de definir a taxa instantânea de variação. No caso apresentado no Exemplo 2, gostaríamos de saber a real velocidade do corpo no instante 3 s. O Quadro 4 apresenta a velocidade média do corpo em intervalos de tempo cada vez mais próximos do instante 3 s.

Quadro 4 - Velocidade média do corpo em $[t, 3]$.

Intervalo	$\frac{\Delta P}{\Delta t}$	Velocidade
$[2,3]$	$\frac{P(3) - P(2)}{3 - 2}$	$v_1 = 7 \text{ m/s}$
$[2,5; 3]$	$\frac{P(3) - P(2,5)}{3 - 2,5}$	$v_2 = 8 \text{ m/s}$
$[2,9; 3]$	$\frac{P(3) - P(2,9)}{3 - 2,9}$	$v_3 = 8,8 \text{ m/s}$
$[2,99; 3]$	$\frac{P(3) - P(2,99)}{3 - 2,99}$	$v_4 = 8,98 \text{ m/s}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Se considerarmos intervalos de tempo cada vez menores e que contêm o instante 3 s e calcularmos a velocidade média nesses intervalos, conseguiremos uma melhor aproximação para a velocidade no instante 3 s. Iremos aproximar do instante 3 s tomando intervalos reais cada vez mais próximos de 3, mas sempre menores que 3 s, e diremos que estamos fazendo uma **aproximação pela esquerda**, conforme observamos no Quadro 4.

Quadro 5 - Velocidade média do corpo em $[3,t]$.

Intervalo	$\frac{\Delta P}{\Delta t}$	Velocidade
$[3,4]$	$\frac{P(4) - P(3)}{4 - 3}$	$v_5 = 11 \text{ m/s}$
$[3; 3,5]$	$\frac{P(3,5) - P(3)}{3,5 - 3}$	$v_6 = 10 \text{ m/s}$
$[3; 3,1]$	$\frac{P(3,1) - P(3)}{3,1 - 3}$	$v_7 = 9,2 \text{ m/s}$
$[3; 3,01]$	$\frac{P(3,01) - P(3)}{3,01 - 3}$	$v_8 = 9,02 \text{ m/s}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

De forma análoga, também iremos aproximar de 3 por valores maiores e cada vez mais próximos de 3 e diremos que estamos fazendo uma **aproximação pela direita**, como podemos observar no Quadro 5.

Percebe-se que ao aproximar do instante 3 s, o limite inferior do intervalo, as velocidades médias parecem tender a 9 m/s.

À medida que o tamanho do intervalo vai se aproximando de zero, a velocidade média se estabiliza em torno de 9 m/s, e chamamos esse processo de **cálculo do limite**. Assim, de forma intuitiva, percebemos que podemos encontrar a velocidade média quão próximo de 9 quanto desejarmos, bastando simplesmente tomarmos o tamanho do intervalo cada vez mais próximo de zero.

Definição 8: Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos que “o **limite** de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficiente próximo de a (por ambos os lados de a) mas não igual a a .

Na situação anterior, diríamos que o instante pode ser tão próximo de 3 quanto quisermos, para isso basta tomarmos um incremento positivo h suficientemente próximo de zero. Assim, representamos esse processo da seguinte maneira:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(3+h) - v(3)}{h} = 9 \text{ m/s}$$

Isso nos leva a intuir que a velocidade no instante 3 segundos é 9 m/s.

Definição 9: A **velocidade instantânea** de um objeto no instante t é o limite das velocidades médias do objeto, calculadas em intervalos de tempo cada vez menores, contendo t .

$$\text{velocidade instantânea} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Podemos generalizar a definição anterior para qualquer função real, basta lembrarmos que velocidade média é um caso especial de taxa média de variação.

Definição 10: Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A **taxa instantânea de variação** de f em a é o limite das taxas médias de variação de f em

intervalos cada vez menores contendo a . E representamos da seguinte maneira a taxa de variação instantânea

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

e a unidade de medida da taxa instantânea de variação é (unidade de medida de y) / (unidade de medida de x).

Concluimos da definição que, tomando intervalos cada vez menores para x , os valores de f correspondem a uma aproximação para a taxa média de variação da função em a .

Vamos mostrar agora que o limite da função $P(t) = 2t^2 - 3t + 2$, quando t tende a 3, é 9. Devemos calcular o

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(3+h) - P(3)}{h}$$

Temos:

$$P(3+h) = 2(3+h)^2 - 3(3+h) + 2 = 2h^2 + 9h + 11 \text{ e } P(3) = 11$$

e, calculando o quociente do limite acima, obtemos

$$\frac{P(3+h) - P(3)}{h} = \frac{2h^2 + 9h + 11 - 11}{h} = \frac{2h^2 + 9h}{h} = 2h + 9$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(3+h) - P(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 9 = 2 \cdot 0 + 9 = 9$$

Por conseguinte, fica mostrado que realmente a velocidade instantânea do corpo no instante 3 s é, como intuimos, 9 m/s.

3.5 Funções definidas por seu caráter variacional

Nesta seção iremos apresentar uma outra maneira de definir algumas funções que fazem parte da sequência didática proposta neste trabalho, destacando seu caráter variacional. Essa forma de apresentarmos as funções favorece a compreensão e interpretação do mundo ao identificar padrões variacionais nas relações entre duas grandezas. Também obedece a ordem natural dos conceitos que motivaram o surgimento de tal tema, favorecendo a superação de alguns obstáculos epistemológicos, como os citados no Quadro 1 por Sierpiska.

Os exemplos apresentados a seguir estão presentes na sequência didática (Apêndice) e servirão aos propósitos desta seção. Iremos buscar padrões variacionais para, só então, construirmos as definições de algumas funções que apresentarem tais padrões.

Exemplo 3: Considere que Pedro se desloque x km de ônibus urbano, pagando uma passagem de R\$ 2,85 independentemente da quantidade de quilômetros que percorrer, ou seja:

Quadro 6 - Valor a ser pago em um deslocamento de x quilômetros em ônibus urbano

Deslocamento (km)	1	2	2,5	3
Preço a ser pago (R\$)	2,85	2,85	2,85	2,85

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Observando o Quadro 6, que o valor a ser pago em um deslocamento de ônibus urbano independe do número de quilômetros percorridos por Pedro, e podemos representar essa situação da seguinte forma:

$$P(x) = 2,85$$

em que P representa o valor a ser pago em reais e x o número de quilômetros.

A taxa média de variação, no Exemplo 1, independe da variação no deslocamento (Δx) considerada e será sempre nula.

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{2,85 - 2,85}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \text{ reais/km.}$$

A todas essas funções, cuja taxa média de variação é nula e possuem domínio real, denominamos **função constante** e são representadas da seguinte forma:

$$f(x) = k, k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4: Considere que dona Terezinha, em sua feira semanal, sempre aproveita a promoção das terças para comprar frutas e verduras, pagando R\$ 1,20 por kg. Suponha também que ela compre R\$ 80,00 em produtos de limpeza.

O Quadro 7 mostra o valor a ser pago por dona Terezinha, para diferentes quantidades de quilogramas comprados de frutas e verduras, adicionado do valor fixo dos produtos de limpeza.

Quadro 7 - Valor a ser pago na feira semanal de dona Terezinha em uma compra de x kg de frutas e verduras mais os produtos de limpeza

Compras (Kg)	1	2	2,5	3
Preço a ser pago pelas frutas e verduras(R\$)	1,20	2,40	3	3,60
Preço a ser pago pelas frutas e verduras mais os produtos de limpeza (R\$)	81,20	82,40	83	83,60

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Vamos calcular a taxa média de variação no preço (P) total para diferentes variações na quantidade de quilogramas (k) de frutas e verduras comprados por dona Terezinha:

- De 1 a 2 quilogramas

$$\frac{\Delta P}{\Delta k} = \frac{P(2) - P(1)}{2 - 1} = \frac{R\$ 82,40 - R\$ 81,20}{1Kg} = 1,2 \text{ reais/Kg.}$$

- De 1 a 3 quilogramas

$$\frac{\Delta P}{\Delta k} = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{R\$ 83,60 - R\$ 81,20}{2Kg} = \frac{2,40}{2} = 1,2 \text{ reais/Kg.}$$

- De 2,5 a 3 quilogramas

$$\frac{\Delta P}{\Delta k} = \frac{P(3) - P(2,5)}{3 - 2,5} = \frac{R\$ 83,60 - R\$83}{0,5 \text{ Kg}} = \frac{0,6}{0,5} = 1,2 \text{ reais/ Kg.}$$

- De uma forma geral, considerando duas quantidades x_1 e x_2 de quilogramas

$$\frac{\Delta P}{\Delta k} = \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1,20x_2 + 80 - (1,20x_1 + 80)}{x_2 - x_1} = \frac{1,20(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 1,20 \frac{\text{reais}}{\text{Kg}}$$

Todas essas funções de domínio real, cuja taxa média de variação “ a ” é constante e diferente de zero, chamamos **função afim**, ou seja, $y = ax + b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $a = \Delta y / \Delta x$.

Exemplo 5: Considere que um grupo de amigos fretou um ônibus para ir à praia. Ficou combinado que cada amigo iria pagar R\$ 600,00 e mais R\$ 10,00 por cada lugar vago no ônibus de dois andares, que possui 76 lugares. A receita da empresa será o valor pago por cada amigo multiplicado pelo número de pessoas que irão viajar.

Podemos interpretar a situação descrita no Exemplo 5 por meio do Quadro 8. Se variarmos o número de pessoas que irão viajar, teremos uma noção de como modelar tal problema. Iremos considerar x , como sendo o número de lugares vagos no ônibus.

Quadro 8 - Receita da empresa em função da quantidade de amigos que irão viajar

Número de pessoas que irão viajar	Preço da viagem por pessoa	Receita da empresa (R\$)
69	670	46230
68	680	46240
67	690	46230
$76 - x$	$600 + 10x$	$(76 - x)(600 + 10x)$

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Ao montarmos a função que representa a receita $R(x)$ da empresa em função da quantidade x de lugares vagos, percebemos que ela pode ser representada pela função:

$$R(x) = (76 - x)(600 + 10x)$$

ou ainda

$$R(x) = -10x^2 + 160x + 45600.$$

Vamos analisar o caráter variacional da função. Para isso, vamos determinar a taxa de variação instantânea da função assim como fizemos com velocidade instantânea anteriormente. Ao calcular o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h}$$

iremos encontrar a função afim $-20x + 160$.

As funções de domínio real cuja taxa de variação instantânea é descrita por meio de uma função afim são chamadas **funções quadráticas**. Essas funções podem ser representadas na forma $y = ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Note que a taxa de variação instantânea dessas funções é $2ax + b$.

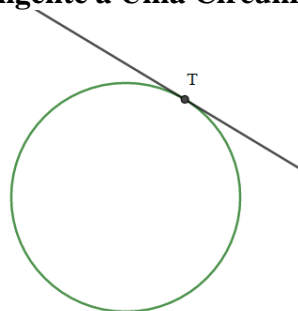
Poderíamos seguir dessa forma, respeitando o caráter histórico do surgimento do estudo de funções, caracterizando-as por seu caráter variacional.

Ao definirmos as progressões aritméticas e progressões geométricas, conseguiríamos mostrar os aspectos variacionais das funções exponenciais e logarítmicas como apresentado no trabalho de Bortolossi *et al.* (2011), ficando aqui uma sugestão ao leitor para complementar as ideias apresentadas.

3.6 A Reta Tangente

A palavra **tangente** vem do latim *tanges* e significa “tocando”. Desse modo, podemos considerar que uma reta tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Entretanto, essa reta deve possuir a mesma direção e sentido da curva no ponto de contato, chamado **ponto de tangência**.

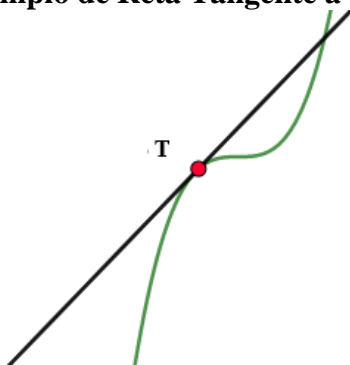
Figura 11 - Reta Tangente a Uma Circunferência no Ponto T



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Quando consideramos uma circunferência, percebemos que a reta tangente será aquela que a toca apenas uma vez, como pode ser visto na Figura 11. No entanto, essa maneira de definirmos retas tangentes não é aplicada a outros tipos de curvas como a da Figura 12, e precisaremos definir com mais precisão esse conceito.

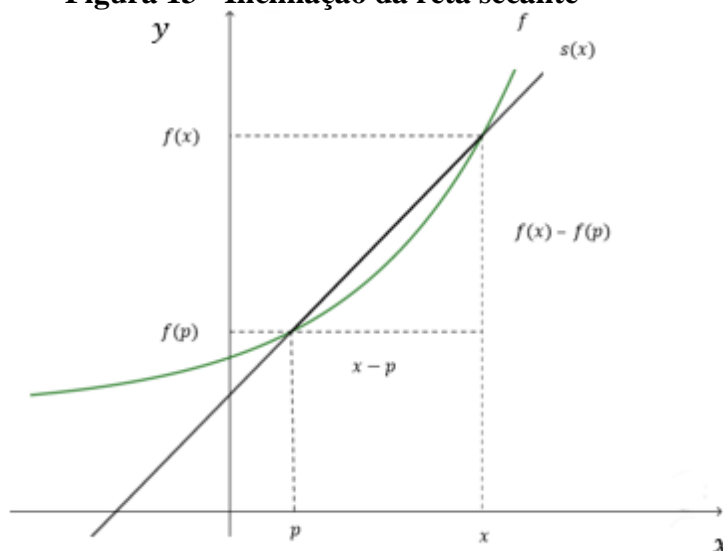
Figura 12 - Exemplo de Reta Tangente a Uma Curva no Ponto T



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Considere f uma função e p um ponto de seu domínio. É possível determinar a reta tangente ao gráfico de f no ponto arbitrário $(p, f(p))$ e encontrar a sua equação ao discriminar o seu coeficiente angular, ou seja, a tangente do ângulo formado pelo gráfico da função e a parte positiva do eixo das abscissas.

Figura 13 - Inclinação da reta secante



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

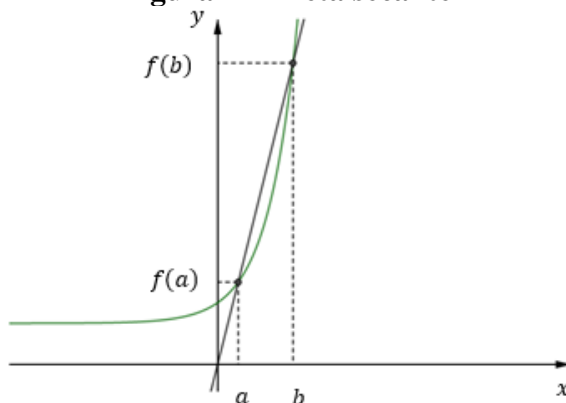
Pode-se inferir o coeficiente angular da reta tangente como o limite do coeficiente angular das retas secantes. Para isso, considere a reta secante que passa pelos pontos de

coordenadas $P = (p, f(p))$ e $Q = (x, f(x))$ representada na Figura 13. Sua inclinação ou coeficiente angular m_s pode ser calculado pela expressão

$$m_s = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

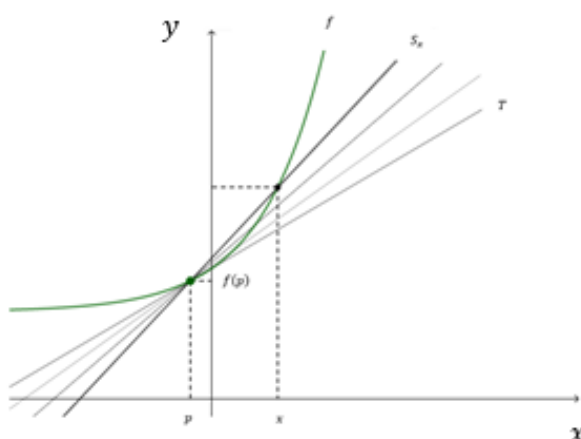
A interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função $y = f(x)$, quando x varia em $[a, b]$, pode ser entendida como a inclinação da reta que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 - Reta secante



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Figura 15 - Reta tangente



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

À medida que x se aproxima de p , a reta secante tende à reta tangente à função no ponto P , como pode ser observado na Figura 15.

O coeficiente angular da reta s_x , quando x aproxima do ponto p , irá tender ao coeficiente angular da reta tangente à função nesse ponto. Chamaremos essa **inclinação da**

reta tangente à função no ponto $P = (p, f(p))$ de $f'(p)$ (leia: f linha de p). Então, podemos representar a inclinação da reta tangente à função f no ponto P como

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Note que a igualdade acima é possível fazendo uso das propriedades dos limites e fica aqui a sugestão de leitura para aprofundamento das propriedades dos limites em Guidorizzi (2013). Perceba também que $f'(p)$ (leia: f linha de p) é apenas uma notação para indicarmos o valor do limite acima e, à medida que x se aproxima de p , a reta s_x vai tendendo à reta tangente.

Definição 11: A **reta tangente** à função f no ponto P , caso exista $f'(p)$, é dada pela equação

$$y - f(p) = f'(p) (x - p)$$

Exemplo 6: considere a função $y = x^2$ e determine:

- i) A inclinação da reta tangente em um ponto P pertencente ao gráfico da função;
- ii) A equação da reta tangente à função no ponto P de abscissa 2.

Solução:

- i) Primeiro calcularemos

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} = \frac{p^2 + 2ph + h^2 - p^2}{h} = \frac{2ph + h^2}{h} = 2p + h.$$

Vamos agora calcular o limite

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} 2p + h = 2p.$$

Desse modo, a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ será $f'(p) = 2p$.

ii) A equação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto $p = 2$, será dada pela Definição 11:

$$y - f(p) = f'(p) (x - p) \Rightarrow y - f(2) = f'(2) (x - 2),$$

que podemos reescrever como

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

ou ainda,

$$y = 4x - 4.$$

Definição 12: A **derivada** de uma função f em um número p denotada por $f'(p)$, é

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

se o limite existe.

Podemos dizer agora que a inclinação do gráfico de uma função f em um ponto $P = (p, f(p))$, em que p pertence ao domínio de f será igual à inclinação da reta tangente ao gráfico de f em p que, por sua vez, é igual à derivada de f em p .

Dizemos que uma função f é **diferenciável (ou derivável)** em um p do seu domínio se $f'(p)$ existir. Uma função f é diferenciável (ou derivável) em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada ponto desse intervalo.

O conceito de derivada pontual pode ser expandido de forma a definirmos uma nova função a partir da derivada em cada ponto.

Definição 13: Seja $y = f(x)$ uma função com domínio A . A **função derivada** de f é a taxa instantânea de variação de f em x , para cada ponto $x \in A$ no qual é possível calcular essa taxa.

Por questões históricas, existe mais de uma maneira para denotarmos essa função. Seja $y = f(x)$ uma função com domínio A , existem duas maneiras principais para representarmos a função derivada de f :

i) Notação de Newton: $f'(x)$;

ii) Notação de Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$.

Para algumas funções, ao aproximarmos por ambos os lados de um ponto do domínio, temos como limite a própria imagem desse ponto. Tais funções são denominadas **funções contínuas**.

Definição 14: Uma função f é **contínua** em um ponto a se

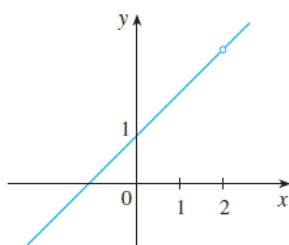
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Note que a Definição 14, implicitamente, necessita que sejam satisfeitas três condições para a continuidade da função em a :

- i) a está no domínio de f ;
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

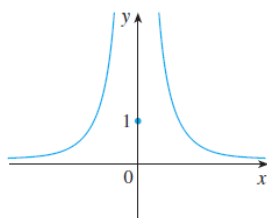
Podemos observar, na Figura 16, um exemplo de função descontínua no ponto $x = 2$, não satisfazendo o item i). A Figura 17 exemplifica uma função que não atende o item ii) para $x = 0$ e a Figura 18 exemplifica uma função contínua em a .

Figura 16 - Exemplo de função descontínua em um ponto



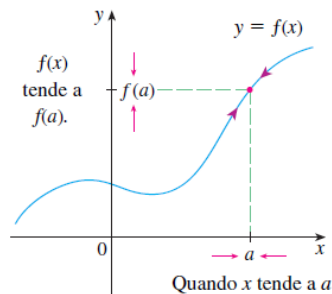
Fonte: Stewart (2006, p. 110).

Figura 17 - Exemplo de função descontínua no ponto $x = 0$



Fonte: Stewart (2006, p. 110).

Figura 18 - Exemplo de função contínua no ponto $x = a$



Fonte: Stewart (2006, p. 109).

Definição 15:

i) Dizemos que uma função f é **crescente** em um intervalo I se, para quaisquer a, b neste intervalo obtiver-se:

Se $a < b$ então $f(a) < f(b)$.

ii) Dizemos que uma função f é **decrecente** em um intervalo I se, para quaisquer a, b neste intervalo obtiver-se:

Se $a < b$ então $f(a) > f(b)$.

As funções $f(x) = 5x$ e $g(x) = x^3$ são exemplos de funções crescentes em \mathbb{R} , enquanto $h(x) = -x$ e $s(x) = -x^3$ exemplificam funções decrescentes em \mathbb{R} .

Se uma função f é crescente ou decrescente em um intervalo I , dizemos que ela é **monótona** nesse intervalo.

Vamos apresentar agora uma relação entre a taxa média de variação de uma função e o seu crescimento ou decrescimento. Teremos como pano de fundo, para fazermos essa relação, as definições e proposições presentes em Fusaro (2008).

Proposição 1: Seja $y = f(x)$ uma função com domínio A e $a, b \in A$.

i) Se f é crescente em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é positiva.

ii) Se f é decrescente em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é negativa.

iii) Se f é constante em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é nula.

Demonstração: Iremos demonstrar o item i)

Assumimos que f é crescente no intervalo $[a, b]$. Vamos mostrar que a taxa de variação de f em $[a, b]$ é positiva.

Sabemos que a taxa média de variação de f em $[a, b]$ é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Temos $a < b$, por hipótese e que f é crescente em $[a, b]$. Logo da Definição 15, temos que $f(a) < f(b)$.

Portanto,

$$\Delta y = f(b) - f(a) > 0 \text{ e } \Delta x = b - a > 0.$$

Assim, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, ou seja, a taxa de variação de f em $[a, b]$ é positiva. ■

Muitos dos resultados que iremos apresentar dependem do Teorema do Valor Médio e, para sua apresentação, devemos primeiro mostrar o seguinte Teorema:

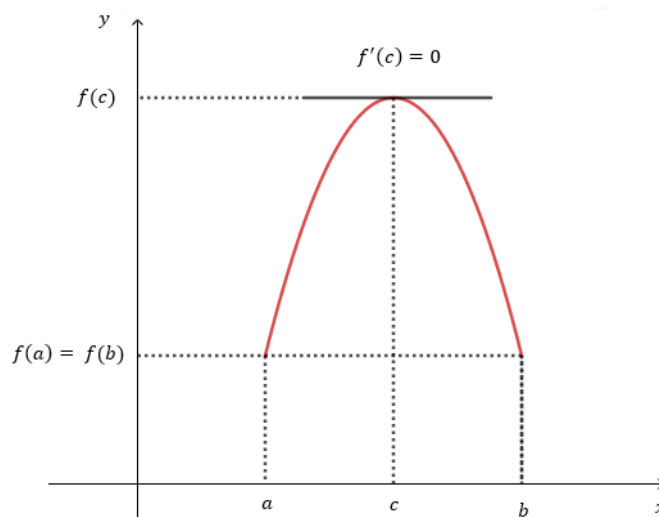
Teorema 3 (Teorema de Rolle): Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- i) f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.
- ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) .
- iii) $f(a) = f(b)$.

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

A Figura 19 exemplifica o Teorema de Rolle.

Figura 19 - Teorema de Rolle



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Teorema 4 (Teorema do Valor Médio): Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- i) f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.
- ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) .

Então, existe um número c em (a, b) tal que

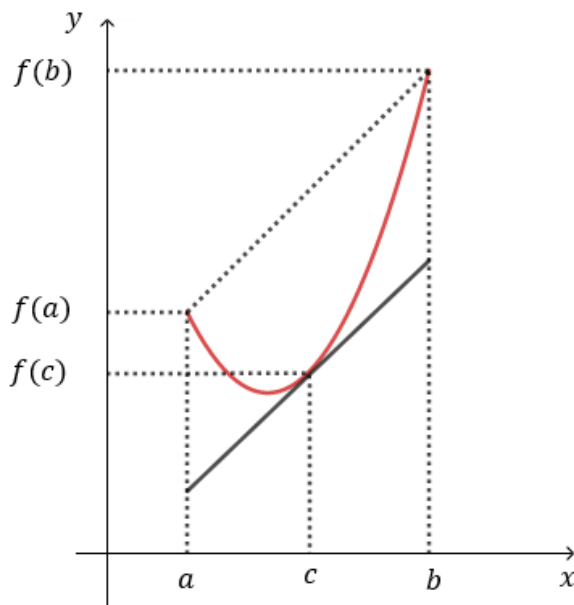
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

O Teorema do Valor Médio pode ser interpretado geometricamente pela Figura 20.

Figura 20 - Teorema do Valor Médio



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Vamos utilizar agora o Teorema do Valor Médio para provar:

Teorema 5: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b) , então f é constante em (a, b) .

Demonstração: Considere x_1 e x_2 dois números quaisquer pertencentes ao intervalo (a, b) , sendo $x_1 < x_2$. Sendo diferenciável em (a, b) , f deve ser diferenciável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$.

Pelo Teorema do Valor Médio aplicado à f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo x , em particular $f'(c) = 0$. Consequentemente, temos que $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$. Logo, f admite o mesmo valor em quaisquer dois pontos do intervalo (a, b) , sendo constante nesse intervalo. ■

Apresentaremos agora um modo de determinar se uma função é crescente ou decrescente em um intervalo, para isso, faremos uso da derivada da função e do seu estudo do sinal. Com esse teste, será possível determinar, dentre outras possibilidades, em que a

função cresce ou decresce, pontos de mínimo locais e globais, máximos locais e globais e assíntotas.

Teorema 6 (Teste do Crescente/Decrescente) Seja f uma função diferenciável no intervalo I .

- i)* Se $f'(x) > 0$ sobre I , então f é crescente em I .
- ii)* Se $f'(x) < 0$ sobre I , então f é decrescente em I .

Demonstração: *i)* Consideremos x_1 e x_2 dois números quaisquer pertencentes a I tais que $(x_1, x_2) \subset I$. Como $f'(x) > 0$ e f é diferenciável em I , pelo Teorema do Valor Médio, temos existe c em (x_1, x_2) tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Temos $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, portanto o lado direito da equação é positivo:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

o que nos mostra que a função f é crescente. ■

O item *ii)* demonstra-se de forma análoga.

Iremos apresentar agora, uma relação entre a monotonia das funções e a sua derivada a partir dos pontos críticos.

Definição 16: Um número **crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde $f'(c)$ não existe ou $f'(c) = 0$.

Teorema 7 (Teste da Derivada Primeira): Sejam f uma função diferenciável em um intervalo I e $c \in I$ um número crítico de f .

- i)* Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c , então f tem um máximo local em c .
- ii)* Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c .
- iii)* Se o sinal de f' não mudar de sinal em c , então f não tem máximo ou mínimo local em c .

Essas demonstrações estão presentes em Stewart (2006) caso o leitor queira aprofundar essas discussões.

Exemplo 7: Determine o intervalo em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde é decrescente.

Temos que $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$. Fazendo o teste crescente/decrescente, obtemos os dados expressos no Quadro 9.

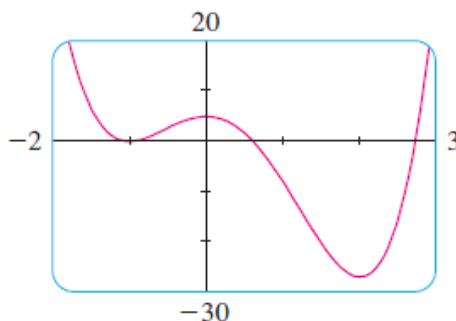
Quadro 9 - Teste da derivada primeira

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	-	-	-	-	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	-	-	+	+	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	-	+	-	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	crescente em $(2, \infty)$

Fonte: Stewart (2006, p. 297).

Esses dados estão de acordo com o gráfico da função f , apresentado na Figura 21.

Figura 21 - Teste crescente/decrescente – Gráfico de f



Fonte: Stewart (2006, p. 297).

No próximo capítulo, apresentamos a metodologia desta pesquisa e, em seguida, analisamos os dados coletados por meio da implementação da sequência didática. Nossas análises e discussões estão fundamentadas nos capítulos dois e três.

4 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

Uma pesquisa científica surge, em geral, das inquietações do pesquisador e orienta a busca por respostas a essas inquietações. Pesquisa é a

[...] construção de conhecimento original, de acordo com certas exigências científicas. É um trabalho de produção de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo mas produtivo, que faz avançar a área do conhecimento a qual se dedica (GOLDENBERG, 1997, p. 107).

A pesquisa relatada nesta dissertação apresenta uma abordagem qualitativa, pois entendemos que essa abordagem foi a mais adequada para trilharmos os caminhos que favorecem a busca pela resposta ao nosso objetivo, que foi analisar o desenvolvimento do ensino de funções reais de uma variável real por meio de uma sequência didática, na qual se destaca o caráter variacional das funções em contrapartida à abordagem estática atual no campo da teoria de conjuntos.

Destacamos o caráter dinâmico das funções e as suas taxas de variação, tendo com aliado o *software* GeoGebra. Dessa forma, entendemos que isso ajudará o aluno a superar alguns obstáculos epistemológicos associados à aprendizagem de funções.

As pesquisas qualitativas diferem quanto ao método, à sua forma e aos objetivos, mas podemos enumerar algumas características comuns essenciais a todas: ambiente natural como fonte direta de dados, e o pesquisador como instrumento fundamental, caráter descritivo, os significados que as pessoas dão às coisas e à sua vida como preocupação do investigador (GODOY, 1995).

Com relação à pesquisa qualitativa, Pagani (2016) destaca que o seu principal objetivo é buscar a compreensão dos fenômenos que se observa de modo a favorecer a sua interpretação e acredita que o conhecimento se (re)constrói constantemente nas relações que são estabelecidas entre os sujeitos da pesquisa, sem se preocupar com a representatividade numérica dos dados, instrumentos estatísticos e regras.

Quando realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo, a principal fonte de dados é o ambiente natural, no qual o investigador é o principal instrumento (BOGDAN; BIKLEN, 1991). Mesmo que sejam utilizados equipamentos de áudio e vídeos, cabe salientar a

relevância das observações e interpretações realizadas pelo pesquisador de modo a interpretar coerentemente esses dados.

A fim de responder à pergunta dessa pesquisa, no seu desenvolvimento, utilizamos vídeos (gravação das aulas), questionários, notas de campo e a observação do professor pesquisador.

De acordo com Bogdan e Biklen

A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 48).

Na nossa pesquisa, podemos destacar os seguintes métodos de coleta de dados utilizados: vídeos (gravação das aulas), questionários, diário de bordo e a observação.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram aplicadas cinco (5) atividades que constituíram uma sequência didática.

Teixeira define sequência didática como “uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas” (TEIXEIRA, 2013, p. 162). Já Zabala, define sequência didática como

[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

A pesquisa aqui apresentada foi desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola privada na cidade de Montes Claros, MG. Esses estudantes não eram alunos do professor pesquisador no início do ano letivo de 2019, mas, a partir do segundo semestre do mesmo ano, o pesquisador assumiu carga horária de 2 horas/aula semanais com esses estudantes. Vale salientar que eles já haviam estudado a definição de função, funções constantes, afim, quadrática, injetora, sobrejetora, bijetora, inversa, composta, par e ímpar no primeiro semestre deste ano.

Os alunos foram convidados pelo professor pesquisador, e que a participação de tais discentes foi autorizada por meio da assinatura do termo de consentimento (Apêndice). A sequência didática foi desenvolvida em quatro encontros que ocorreram no contraturno escolar. Cada aluno ou dupla tinha acesso a um computador com *software* GeoGebra instalado. Assim, em cada encontro, a atividade impressa era apresentada aos alunos.

No próximo capítulo, apresentaremos as atividades da sequência didática bem como suas análises, que nos permitiram construir os dados que respondessem à questão aqui investigada.

5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Apresentamos neste trabalho uma sequência didática associada ao ensino de funções reais de uma variável real, em que destacamos as suas taxas de variação, média e instantânea, relação entre a reta tangente e a monotonia de funções, bem como a associação entre a reta tangente e a taxa de variação instantânea, problemas de otimização, limites laterais, continuidade e derivadas de funções reais. Entretanto, vale ressaltar que alguns desses conceitos são tratados de forma intuitiva.

Uma vez que as ideias iniciais de função surgem no campo da variabilidade (REZENDE, 2003b), destacaremos o caráter variacional das funções e temos por finalidade apresentar seu estudo de forma dinâmica com o auxílio do *software* GeoGebra.

Buscamos analisar as possibilidades de proporcionar aos alunos aprendizagens essenciais para a continuidade do conhecimento, trabalho, práticas sociais e principalmente assegurar o desenvolvimento do conhecimento. Nesse panorama, este trabalho atende às orientações da BNCC, como as de interpretar o mundo em que vivemos através das variações entre duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções e das taxas de variação, com ou sem o apoio das tecnologias digitais (BRASIL, 2018).

A sequência didática apresentada nesse trabalho é composta por seis atividades e foi realizada em uma escola da rede privada de ensino, na cidade de Montes Claros, Minas Gerais. Ela foi desenvolvida no contraturno na própria escola, em dias previamente agendados e solicitados, com duração média de 60 minutos cada. Cada atividade continha um ou dois problemas, e perguntas relativas a esses problemas que aqui chamamos de questões.

O Quadro 10 apresenta as atividades e alguns detalhes sobre cada uma delas, a saber a data, o número de alunos participantes e a respectiva duração. Destacamos, conforme pode ser verificado, que, no primeiro dia, foram desenvolvidas duas atividades, e que, nos demais dias, apenas uma atividade foi realizada.

Quadro 10 - Data, duração e quantidade de alunos presentes em cada um dos encontros

Atividade	Data da realização	Número de alunos participantes	Duração da Atividade
Atividade I	27/11/2019	11	60 min
Atividade II	27/11/2019	11	60 min
Atividade III	28/11/2019	9	60 min
Atividade IV	09/12/2019	8	60 min
Atividade V	12/12/2019	8	60 min
Atividade VI	Não realizada	-	-

Fonte: Dados do pesquisador.

Os encontros tiveram início no fim do mês de novembro de 2019 e se estenderam até o início do mês de dezembro. Por coincidir com o fim do ano letivo e com as provas de recuperações trimestrais e finais, tivemos alguns problemas com as datas dos encontros de maneira a permitir que os alunos participantes da pesquisa pudessem estudar para suas respectivas recuperações caso necessitassem. Por esse motivo, houve uma variação no número de alunos presentes nas atividades.

Os alunos que participaram dessa etapa da pesquisa foram convidados pelo professor pesquisador em sala de aula. Após a apresentação do pesquisador e da pesquisa, um total de 11 (onze) alunos se disponibilizaram a participar do estudo. Foram convidados os alunos das três turmas do primeiro ano no Ensino Médio, do Colégio HG6, série na qual o autor dessa pesquisa lecionou apenas nos meses de agosto a novembro no ano de 2019. Antes de iniciar os encontros, os pais ou responsáveis e os alunos assinaram o termo de consentimento/assentimento. Questionados de forma oral e informalmente sobre o motivo para tal interesse, foram constatadas respostas como aprender um pouco mais sobre função, conhecer novos conceitos ou simplesmente ter curiosidade pelo tema apresentado. Todos os estudantes que participaram da pesquisa já haviam tido contato com os conceitos de função ao longo do primeiro semestre de 2019. Estudaram funções polinomiais de grau um e dois, funções constantes, logarítmicas, exponenciais, modulares, compostas, inversas, dentre outras. Ao longo do segundo semestre, o autor dessa pesquisa trabalhou conteúdos como trigonometria no triângulo retângulo, geometria plana e aritmética, não tendo participação no ensino de funções.

Em sua maioria, os alunos participantes são oriundos da rede privada e apenas dois concluíram o ensino fundamental (sexto ao nono ano) na rede pública de ensino. Vale ressaltar também que quatro alunos participantes da pesquisa relataram não ter estudado função ao longo do Ensino Fundamental, todos eles provenientes da rede privada de ensino.

Para manter o anonimato, os estudantes que participaram da pesquisa, foram nomeados de forma aleatória com as letras do alfabeto de A até K, e suas respostas são indicadas pela mesma letra nas análises. Os alunos foram separados em duplas para realização das atividades, sendo que, nos dias em que tivemos quantidades ímpares de alunos, um trio era formado, e cada uma dessas duplas ou trios teria de contar com no mínimo um *notebook*, que deveriam trazer de casa para execução das atividades que demandavam sua utilização.

Antes do início das atividades propostas na sequência didática, os alunos responderam a um questionário, de forma anônima, que se encontra no Apêndice 7. Ele serviu como um ponto de partida para as primeiras discussões.

Figura 22 - Resposta de um aluno à questão 6 do Questionário

6) Quais funções você conhece?

constant, afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, injetiva

Fonte: Dados do pesquisador.

A Figura 22 exemplifica as respostas predominantes dos alunos ao serem questionados sobre as funções que conheciam. Inferimos, por meio dessas respostas, a ênfase do professor em trabalhar e dar destaque a alguns tipos particulares de funções na Educação Básica, enquanto funções definidas por mais uma sentença, polinomiais de grau maior que dois, racionais e funções potência, dentre outras, são esquecidas ou abordadas de forma superficial na maioria das vezes. Percebemos, também, que os alunos só conseguem caracterizar as funções por sua expressão algébrica e por seu gráfico, como mostra a Figura 23 a seguir.

Figura 23 - Resposta de um aluno à questão 7 do Questionário

7) Escreva o nome do gráfico ou as características das funções que você conhece?

linha horizontal (autoexplicativa), reta (uma linha reta), parábola (ou com o eixo decendo e terminando curvando ou o contrário), exponencial (crescimento grande).

Fonte: Dados do pesquisador.

Nessa figura percebemos a associação que o aluno consegue fazer entre os gráficos e as funções que conhece, mas a linguagem utilizada destaca a sua dificuldade em apresentar

as características das funções e de seus respectivos gráficos ao dizer que a parábola “começa descendo e termina subindo ou o contrário”.

Os primeiros conceitos de função surgem em termos das variações entre as grandezas e, buscando compreender o entendimento que os alunos possuem de tal conceito, foram indagados, na questão oito do questionário, sobre o que entendem por variação. Quatro alunos responderam “não sei”, e acreditamos que realmente não consigam, até esse ponto, em nada relacionar funções com as variações, algo contraditório pela origem histórica e compreensível pela abordagem conjuntista atual de funções. As demais respostas observadas remetem às palavras como “mudanças e variar”, como podemos notar na Figura 24.

Figura 24 - Resposta de um aluno à questão 8 do Questionário

8) O que você entende por variação?

Mudança de valores em "x" e "y".

Fonte: Dados do pesquisador.

A pergunta de número nove indagou os alunos quanto à variação das funções destacadas. Oito alunos disseram não saber a variação de tais funções, e outros apresentaram afirmações que julgamos pertinentes com a etapa de ensino que se encontram, como podemos notar na Figura 25.

Figura 25 - Resposta do aluno A à questão 9 do Questionário

9) Qual a taxa de variação das funções:

a) Constante

nula

b) Afim

o valor do Δ constante

c) Quadrática

inconstante

d) Exponencial

alta variação no começo e baixa no final ou o contrário

Fonte: Dados do pesquisador.

Ainda na análise das respostas presentes nos questionários, podemos destacar que os alunos, em sua grande maioria (exceção de um aluno), não foram capazes de exemplificar

funções, associadas a situações presentes no mundo real, cujas taxas de variação são nulas, constantes ou não constantes. Isso nos mostra o distanciamento de tal abordagem no ensino de funções e justifica o nosso trabalho.

Após a aplicação do Questionário, demos início à realização das atividades, sem nenhuma conversa ou aula prévia sobre o tema abordado. Apesar disso, é importante frisar que a temática abordada foi objeto de estudo ao longo da série corrente desses alunos. Somente após a entrega por todos alunos da atividade, era feita a correção e discussão dela. Nas atividades que contavam com a utilização do GeoGebra, eram apresentados aos alunos os comandos e ferramentas necessários à sua execução por meio de um projetor, contando sempre com o suporte e apoio por parte do professor.

As atividades estão nos apêndices deste texto. Como já dissemos anteriormente, cada uma delas apresenta um ou dois problemas e suas questões. Faremos, agora, uma análise de algumas respostas dos alunos às questões propostas.

5.1 Análise dos protocolos da Atividade I

Nosso primeiro encontro ocorreu em 27 de novembro de 2019 e contou com a participação de 11 (onze) alunos que se organizaram em duplas e um trio, formados por livre escolha.

O problema apresentado, na primeira atividade, consiste em um deslocamento realizado em ônibus urbano, feito por qualquer pessoa rotineiramente em uma cidade que dispõe de tal serviço.

Os alunos que responderam a essa atividade moram em Montes Claros-MG, onde a passagem de ônibus urbano, na data da aplicação dessa atividade, era de R\$ 2,85. São alunos da rede privada e não possuem muita familiaridade com o transporte público.

Figura 26 - Resposta dada pelo Aluno B na questão 2 da Atividade I.

2) Complete o QUADRO I abaixo, com o valor a ser pago, em reais, por uma pessoa que se deslocar x km em Montes Claros utilizando um ônibus urbano.

DESLOCAMENTO DE X KM	PREÇO A SER PAGO: Y REAIS
0	0
1	2,85
2	2,85
3	2,85
4	2,85
5	2,85

QUADRO I

O que você percebe ao preencher o quadro acima?

Que o meio de transporte da cidade é bem econômico

Fonte: Dados do pesquisador.

Ao responderem à questão 2, com o valor a ser pago em função do número de quilômetros percorridos no ônibus, com exceção de quatro alunos, todos preencheram o quadro corretamente. Notamos que os erros (Figura 26) desses quatro alunos foram os mesmos e mencionaram que, para um deslocamento de zero quilômetro, o valor a ser pago também seria zero.

Essa resposta é, até certo ponto, bem aceitável, tendo em vista que não fica claro no enunciado que todo passageiro, ao entrar no ônibus, deve pagar sua passagem de imediato. Questionamentos como esse surgem ao trazermos a Matemática para o dia a dia. Logo, é importante que o aluno matematize as situações cotidianas e entenda que o conceito de função se faz presente, até mesmo, nas situações mais simples por ele vivenciadas, sendo uma poderosa aliada na compreensão do mundo. Por conseguinte, o aluno tende a superar o obstáculo epistemológico 1 citado por Sierpinski (1992) e presente no Quadro 1, “a matemática não se preocupa com problemas práticos”.

Quando perguntados, ainda na questão 2 da Atividade I, sobre o que perceberam, a maioria dos alunos deram respostas coerentes, interpretando a situação descrita por meio de uma função constante, conforme apresentamos na Definição 4. “O valor a ser pago é constante em relação ao deslocamento”, “trata-se de uma função constante”, “o valor de a é zero”. Essa última resposta mostra que o aluno associou a situação descrita na atividade com uma função afim, da forma $y = ax + b$, em que o valor de a é zero. Durante a correção, as discussões nos levaram à definição de função afim (Definição 4), e foi esclarecido que em funções desse tipo, o a deve ser diferente de zero, não sendo a função constante um caso particular dela.

O aluno D, único a tentar interpretar a situação por seu caráter variacional, diz não haver variação e, quando questionado sobre o seu entendimento de variação, ele diz se referir ao valor a ser pago (Figura 27).

Figura 27 - Resposta dada pelo Aluno D na questão 2 da Atividade I.

O que você percebe ao preencher o quadro acima?

Que não há variação

Fonte: Dados do pesquisador.

Esse fato nos revela que é possível apresentar aos alunos as funções também por seu caráter variacional e, conforme mencionado anteriormente, a abordagem estática é a mais

frequente nos livros didáticos, como percebido por Bortolossi *et al.* (2011) ao fazer seu mapeamento.

Os alunos demonstraram familiaridade com a função constante ao citar as características observadas ao responderem à questão 2 (Figura 27), pois já estudaram tal conceito, ainda que de forma estática por meio de sua lei e sem que fossem exploradas as características variacionais de tal função.

Pela análise das respostas dos alunos, ao serem questionados sobre a possibilidade de deslocamento negativo e deslocamento irracional na quantidade de quilômetros, os resultados foram um tanto curiosos, merecendo uma análise mais criteriosa.

Já vimos, na Seção 3.2, a existência de números incomensuráveis, mas a sua existência ainda parece ser questionada pelos alunos no mundo real, como podemos perceber na Figura 28 ao ser feita uma associação de um número irracional a um número racional, de certa forma “próximo” a ele, para garantir a sua existência.

Figura 28 - Resposta dada pelo Aluno E na questão 2 da Atividade I.

2) Seria possível considerar $x = -1$ km? E $x = \sqrt{2}$ km?
 $x = -1$ km não existe, pois não existe quilômetros negativo.
 $x = \sqrt{2}$ km sim, pois se deslocado o $\sqrt{2} = 1,4$ km

Fonte: Dados do pesquisador.

Aqui se percebe que este aluno não possui uma concepção heterogênea de número, o obstáculo epistemológico 6 mencionado por Sierpinska (1992) e apresentado no Quadro 1. Eles não diferenciam racionais de irracionais e dizem, assim como ocorreu no processo histórico dos conhecimentos matemáticos e que vimos aqui nesse texto, que alguns números são inexistentes.

Ainda na Figura 28, é possível perceber que o aluno E concluiu que não existe distância negativa, o que é correto considerando o contexto apresentado pelo problema, mas justifica erroneamente o fato de ser possível considerar a distância percorrida igual a raiz quadrada de dois quilômetros. É muito provável que, em alguma situação de sua vivência escolar, ele tenha empregado uma aproximação para raiz quadrada de 2 e, desde então, tenha tomado a aproximação como o seu valor, transformando um número irracional em racional.

O Aluno D, na Figura 29, diz não ser possível considerar um deslocamento de raiz quadrada de dois quilômetros por esse não ser um “valor certo”.

Figura 29 - Resposta dada pelo Aluno D na segunda parte da questão 2 da Atividade I.

2) Seria possível considerar $x = -1$ km? E $x = \sqrt{2}$ km?

*Não, pois não existem distâncias negativas. Não, pois não
~~há~~ não há, pois existe um valor específico para $\sqrt{2}$.
 Não, pois $\sqrt{2}$ não é um valor certo.*

Fonte: Dados do pesquisador.

Fica evidenciada uma falha na sua compreensão de número incomensurável ou irracional, sendo realizada, durante as discussões, uma retomada do conceito de conjuntos numéricos, com um enfoque na sua existência em nosso cotidiano. Conforme relatado anteriormente, houve certa surpresa e “tristeza” dos Pitagóricos ao descobrir que os números irracionais pertencem ao mundo real, e essa surpresa ainda persiste nos dias atuais.

Em ambos os casos, percebemos uma predominância do discreto na compreensão dos alunos, em contrapartida a um mundo repleto de quantidades contínuas em que vivemos. O conceito de função é explorado por meio de suas expressões algébricas, que em nada remetem à motivação histórica de tal tema.

A distância raiz quadrada de dois é dita pelo aluno A, na Figura 30, como uma “distância sem fim” e, dessa forma, para ele, não podemos considerar esse deslocamento possível.

Figura 30 - Resposta dada pelo Aluno A na segunda parte da questão 2 da Atividade I.

2) Seria possível considerar $x = -1$ km? E $x = \sqrt{2}$ km?

*Não para ambos, visto que não considero-se uma dis-
 tância negativa, e não considero-se uma distân-
 cia sem fim.*

Fonte: Dados do pesquisador.

Novamente o deslocamento “-1 km” foi interpretado como não sendo possível, pois não existe deslocamento negativo, o que é uma percepção razoável dentro do contexto do problema.

Ao observar as Figuras 28, 29 e 30, notamos que, para alguns alunos, os números irracionais não se fazem presentes no mundo físico e foram considerados “inexistentes”, “números sem fim” e também números que “não são certos”, evidenciado assim a existência de um obstáculo epistemológico, em particular o Obstáculo 6 citado Sierpinska (1992) e

presente no Quadro 1. Poderíamos citar a diagonal de um quadrado de lado de medida inteira como exemplo de um número irracional presente no nosso cotidiano.

No início das correções, logo após a entrega das atividades respondidas pelos alunos, a questão 2 se tornou foco de boas discussões, que foram mediadas pelo professor pesquisador desta dissertação. Dessa maneira, percebi bons questionamentos ali apresentados e decidi fazer uma pergunta sobre o movimento do ônibus: o ônibus ia percorrendo distâncias reais dando “saltos” de números em números racionais ou ia percorrendo as distâncias de forma contínua? Como a resposta de todos os alunos foi que o ônibus não vai dando “pulinhos” para os deslocamentos, chegaram à conclusão de que ele deveria passar também pelos números irracionais. Sendo assim, o gráfico que descreve tal situação deveria ser contínuo, o que provocou uma grande inquietação na sala.

A questão 3, da Atividade I, refere-se à razão entre as variações, do preço e do deslocamento, no problema que considera o deslocamento em um ônibus urbano (Figura 31).

Figura 31 - Questão 3 da Atividade I.

- 3) Determine a razão entre a variação no preço da passagem e a variação no deslocamento para os dados no QUADRO II abaixo.

Fonte: Dados do pesquisador.

Um total de cinco alunos tiveram dificuldades em compreender e responder corretamente à questão três (Figura 31), não conseguindo determinar a razão pedida. Durante as discussões posteriores à entrega das atividades, notando a falta de familiaridade da maioria dos estudantes com o conceito de **variação**, julguei ser esta uma boa hora para apresentá-lo.

Um aluno disse que a taxa de variação não existia na situação descrita na Atividade I, por ser nula. Percebe-se que os alunos conhecem os gráficos das principais funções, sabem encontrar raízes, calcular imagens de um elemento do domínio, mas não compreendem a forma como a função varia. Sobre tal problema, Rezende destaca que

[...] desde cedo no ensino básico de Matemática, é introduzido um viés algébrico em seu processo de significação. No estudo das funções reais a variável “x” é assumida tacitamente como a “variável independente universal”. Cabe, entretanto, ressaltar que a ideia de função é estabelecida aqui, não no contexto da “variabilidade”, mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y” (REZENDE, 2003b, p. 5).

Ainda na questão três, pela resposta de um aluno, nota-se um avanço na compreensão do caráter variacional das funções, que, independente da variação de deslocamento, a taxa de variação do preço em função do deslocamento é nula (Figura 32), uma característica variacional da função constante e que, até então, não havíamos percebido fazer parte dos conceitos por eles adquiridos. Na sua resposta, o Aluno I demonstra compreender a situação descrita no problema pela taxa de variação, ainda que não tenha dito ser nula.

Figura 32 - Resposta dada pelo Aluno I a questão 3 da Atividade I.

Deslocamento	Varição no preço da passagem por km (em média)
x = 0 km a x = 3 km	0
x = 0 km a x = 2 km	0
x = 0 km a x = 1 km	0
x = 0 km a x = 0,5 km	0
x = 0 km a x = 0,01 km	0

QUADRO II

O que você percebe em relação a ⁰variação no preço da passagem por km, calculado no QUADRO II, para diferentes deslocamentos? E quando reduzimos cada vez mais o deslocamento, aproximando-o de zero? -

A variação de preço não depende da aproximação de zero.

Fonte: Dados do pesquisador.

A função que descreve a situação da Atividade I na questão 4 foi entendida erroneamente por 4 alunos como sendo a função $y = 2,85x$, como observamos na Figura 33.

Figura 33 - Resposta dada pelo Aluno F na questão 4 da Atividade I.

- 4) Determine, por escrito, um modo de calcular o preço a ser pago em um deslocamento de x km em um ônibus da cidade de Montes Claros.

$$f(x) = 2,85x$$

Fonte: Dados do pesquisador.

Ao serem questionados sobre o valor a ser pago para diferentes valores de quilômetros x percorridos, perceberam que o valor a ser pago mudava ao variar a quantidade de quilômetros, notando, portanto, o erro cometido.

Esse erro evidencia a dificuldade dos alunos em relacionar problemas do mundo real por meio de funções. Tal tema é apresentado na escola inicialmente como um emaranhado

de regras e expressões algébricas, para, só então, o professor apresentar algumas aplicações de tal conceito, invertendo a ordem histórica de seu surgimento, como vimos na Seção 2.2.

A maioria dos alunos concluiu corretamente que a taxa de variação média no preço da função é zero na questão 7 (Figura 34).

Figura 34 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 7 da Atividade I.

- 7) Qual seria a taxa de variação média no preço ao aproximarmos cada vez mais o deslocamento de 2 km, mas por distâncias maiores que 2 km? E menores que 2 km?

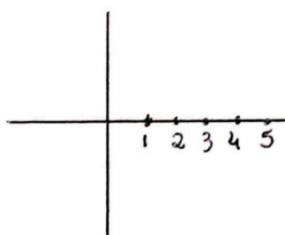
taxa de variação = 0

Fonte: Dados do pesquisador.

Apenas dois alunos conseguiram responder corretamente às questões de número 8 e 9 que tratavam das taxas de variação. Apesar de relacionarem bem a taxa média de variação ao nos aproximarmos cada vez mais da distância de dois quilômetros, a maioria não conseguiu generalizar e fazer a mesma associação com os deslocamentos 0, 1, 2,3 4 quilômetros, o que não permitiu o acerto dessas questões.

Figura 35 - Resposta dada pelo Aluno I nas questões 8 e 9 da Atividade I.

- 8) Represente, em um plano cartesiano, os pontos da forma (x, y) , em que x represente o deslocamento e y a taxa média de variação no preço ao aproximarmos cada vez mais dos deslocamentos: 0, 1, 2, 3 e 4 km.



- 9) Qual seria uma lei para a função acima?

$f(x) = 0$

Fonte: Dados do pesquisador.

O Aluno I conseguiu perceber que a taxa de variação da função é nula em qualquer intervalo; conseguiu associar a função solicitada na questão 9 a $f(x) = 0$ e, ainda, relacionar com o seu gráfico (Figura 35).

Como a atividade foi realizada sem nenhuma revisão ou explicação, acreditamos que as respostas do Aluno I indicam que a atividade cumpriu com seus objetivos.

Ao encerrarmos a Atividade I e tendo realizado todas as discussões, verificamos que os alunos foram capazes de:

- notar que o preço da passagem de ônibus é invariável qualquer que seja o deslocamento;
- a existência de números incomensuráveis no cotidiano, bem como a continuidade dos números reais;
- perceber que as taxas média e instantânea de variação são nulas em qualquer que seja o intervalo na situação descrita;
- relacionar a situação descrita com a função constante em seu domínio;
- perceber que o gráfico formado pelos pontos da forma $(x, \text{taxa de variação de } x)$ corresponde ao gráfico $f(x) = 0$ em seu domínio.

Durante a correção da atividade, logo após a entrega por parte dos alunos, as discussões em sala de aula conduziram à caracterização da função constante por meio de seu caráter variacional. A função que pode ser associada à Atividade I foi reconhecida por possuir uma taxa de variação nula e ser constante em seu domínio. Todavia, vale observar o domínio da função apresentada nessa atividade. De acordo com a Definição 4, ela não pode ser a função constante, pois seu domínio não é todo o conjunto dos números reais.

A seguir, analisaremos respostas que se referem à Atividade II.

5.2 Análise dos protocolos da Atividade II – primeira parte

Ao iniciarmos as análises da Atividade II, vale apontar novamente que os alunos pertencem à rede privada de ensino, oriundos da classe média ou classe média alta e, raramente, acompanham seus familiares em feiras ou em idas ao supermercado. A atividade é composta por duas partes e, na Figura 36, apresentaremos o primeiro problema proposto na Atividade II.

Figura 36 - Problema proposto na primeira parte da Atividade II.

FEIRA SEMANAL DE DONA TEREZINHA

Considere que dona Terezinha, em sua feira semanal, sempre aproveita a promoção das terças para comprar frutas e verduras pagando R\$ 1,20 por kg.

Fonte: Dados do pesquisador.

Notamos que os alunos demonstram uma boa compreensão dessa realidade, como observamos na Figura 37, associando corretamente o valor a ser pago em função da quantidade de quilogramas comprados, possivelmente por ser uma situação real e bem compreensível. As respostas corretas dos alunos mostram um avanço no que tange ao conceito de variação e taxa de variação como apresentamos nas figuras que seguem.

Figura 37 - Resposta dada pelo Aluno F na questão 1 da Atividade II.

Complete o QUADRO I a seguir, com o valor a ser pago y em função da quantidade x de kg de frutas e verduras comprados por Dona Terezinha.

Quantidade de kg de frutas e verduras comprados por dona Terezinha	Valor a ser pago(em reais)
0	R\$0,0
1	R\$1,20
2	R\$2,40
3	R\$3,60
4	R\$4,80
5	R\$6,00
6	R\$7,20
7	R\$8,40

QUADRO I

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

Que a variação do valor é de 1,20 por Kg adicionado

Fonte: Dados do pesquisador.

A questão 1 buscou investigar a percepção dos alunos quanto à situação apresentada no problema e registrada por eles no QUADRO I. As Figuras 38, 39, 40 e 41 retratam essas percepções.

A Figura 38 exemplifica uma das grandes dificuldades no ensino de funções, enxergar as quantidades variáveis.

Figura 38 - Resposta do Aluno A na questão 1 da Atividade II.

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

Ondas o seu preço varia de acordo com a quantidade da compra

Fonte: Dados do pesquisador.

O Aluno A percebe que uma variação na quantidade de quilogramas comprados de frutas e verduras acarreta uma variação no preço a ser pago, mas, novamente, notamos pouca ênfase em quantificar essa variação.

Nas Figuras 39 e 40, percebemos que os alunos notam que uma variação na quantidade de frutas e verduras compradas irá acarretar em uma variação no preço a ser pago.

Figura 39 - Resposta dada pelo Aluno H na questão 1 da Atividade II.

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

É uma função crescente

Fonte: Dados do pesquisador.

Figura 40 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 1 da Atividade II.

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

que o valor aumenta

Fonte: Dados do pesquisador.

Ainda assim, não existe nenhuma preocupação em quantificar essa variação, devido ao enorme destaque dado às expressões algébricas que remetem às funções e destacam a sua interpretação estática. Nesse contexto, Rezende (2003b) questiona essa abordagem estática e algébrica no ensino de funções e diz que

[...] no mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto está crescendo/decrescendo. “A gente não quer só comida, a gente quer comida, diversão e arte. Isso mesmo, com o desenvolvimento das relações econômicas e sociais, tornando-se estas cada vez mais complexas, faz-se necessário e urgente uma revisão e ampliação das metas de ‘formação básica para o exercício pleno da cidadania’. (REZENDE, 2003b, p. 33)

O fato do aluno classificar a função como crescente ou dizer que o valor aumenta, como mostrado nas Figuras 39 e 40, não permite identificarmos que tipo de função estamos caracterizando nem investigarmos como se dá esse crescimento, o que nos leva a refletir mais uma vez sobre a abordagem atual do ensino de funções.

Na Figura 41, percebemos que o Aluno C não apresenta uma boa distinção entre os conceitos de variável e variação.

Figura 41 - Resposta dada pelo Aluno C na questão 1 da Atividade II.

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

A variável é constante

Fonte: Dados do pesquisador.

O protocolo mostra uma confusão sobre tais significados, visto que a resposta correta seria dizer que a taxa de variação é constante. Quando questionado, durante as correções, ele disse que estava se referindo à variação, momento em que este conceito foi apresentado.

Outras respostas, como a dada pelo Aluno J, e expressa na Figura 42, ainda na questão 1, mostra um amadurecimento em relação ao conceito de função e variação.

Figura 42 - Resposta dada pelo Aluno J na questão 1 da Atividade II.

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

Que o valor a ser pago depende dos kg de frutas e verduras e permanece constante com um aumento de R\$1,20

Fonte: Dados do pesquisador.

Ele notou as quantidades variáveis ao dizer que o valor a ser pago depende da quantidade de frutas e verduras comprados, notou que a taxa média de variação é constante e, ainda mais, quantificou essa variação. Ainda que não tenha sido a percepção da maioria, nota-se um avanço na forma como os alunos começam a perceber as funções.

Durante as discussões dessa atividade, os alunos concluíram, de forma conjunta, que o problema, expresso, nessa primeira parte, é de uma função crescente, cujo valor a ser pago varia de acordo com a quantidade de quilogramas comprados, que a variação no preço a ser pago é de R\$ 1,20 por quilograma e, sendo assim, constante para cada quilograma adicionado. Esse resultado é expressivo, pois o professor pesquisador apenas mediou essas discussões.

Ao responderem à questão dois, nota-se um grande amadurecimento dos alunos quanto ao conceito de grandezas contínuas.

Figura 43 - Resposta dada pelo Aluno A na questão 2 da Atividade II.

- 2) Nesse contexto, seria possível considerar $x = -1$? E $x = \sqrt{2}$?

Nesse contexto não seria possível considerar o mesmo igual a -1, mas seria possível um mesmo de 1,2 Kg por, seria possível um mesmo de 2 Kg

Fonte: Dados do pesquisador.

Percebe-se, pelas respostas dadas, a compreensão da ideia de continuidade dos números reais, conceito que já havia sido discutido na Atividade I. Na Figura 43, percebemos, na resposta do Aluno A, ele se referir à continuidade dos números da reta real. Sendo assim, não existem “furos” ao variar uma quantidade de 0 quilogramas comprados a 2 quilogramas, então a possibilidade de se comprar dois quilogramas permite inferir que faz sentido considerar $\sqrt{2}$ quilogramas.

Entendemos que a Atividade I foi facilitadora no entendimento do conceito de taxa média de variação, amplamente abordada em suas questões. Esse fato foi notado pelo preenchimento correto por quase todos alunos do QUADRO II da Atividade II, como vemos na Figura 44, tendo ocorrido apenas alguns erros associados à parte operatória quando envolvia números decimais, o que motivou, durante a correção, uma revisão de operações com números racionais.

Figura 44 - Resposta dada pelo Aluno J na questão 3 da Atividade II.

Quilogramas	Taxa Média de Variação (Variação do preço/ variação dos quilogramas)
x = 0 kg a x = 1 kg	1,2
x = 0 kg a x = 2 kg	1,2
x = 0 kg a x = 3 kg	1,2
x = 1 kg a x = 5 kg	1,2
x = 0 kg a x = 0,01 kg	0,12
x = 0 kg a x = 0,001 kg	0,012

QUADRO II

Fonte: Dados do pesquisador.

Os alunos, quando perguntados sobre o que foi observado ao preencherem o Quadro II da Atividade II (Figura 44), demonstraram compreensão do conceito de taxa média de variação, outrora distante.

Na Figura 45, o Aluno I percebe que os números ali presentes possuem uma taxa média de variação constante, e notamos que o Aluno I já começa a interpretar as funções por seu caráter variacional, ainda que representada em um quadro.

Figura 45 - Resposta dada pelo Aluno I na questão 3 da Atividade II.

O que você observa, através dos dados que você preencheu, no QUADRO II acima?

que a taxa média de variação no preço é constante

Fonte: Dados do pesquisador.

À medida que avançamos nas atividades da sequência didática, notamos uma evolução dos alunos na compreensão dos conceitos de função, seja ao enxergar as quantidades variáveis ou até mesmo ao quantificar as variações. Se pensarmos novamente nas respostas obtidas através dos questionários, e que a aplicação da Atividade II ocorreu sem nenhuma discussão prévia sobre os temas abordados, já é considerável a diferença entre as respostas dadas pelos alunos, indicando que os discentes já começam a perceber as quantidades variáveis a fim de quantificar as variações.

Na Figura 46, notamos que o Aluno A, após preencher corretamente o Quadro II, percebe as duas quantidades variáveis, nota que a taxa média de variação é constante, mas não quantifica essa variação.

Figura 46 - Resposta dada pelo Aluno A na questão 3 da Atividade II.

O que você observa, através dos dados que você preencheu, no QUADRO II acima?

O prop. média de vendas com o mesmo adquiredo, porém a taxa de variação permanece a mesma.

Fonte: Dados do pesquisador.

O Aluno H, por sua vez, percebe a função formada pelas taxas médias de variação em cada alteração de quilograma de frutas e verduras comprados, identificando que é uma função constante (Figura 47).

Figura 47 - Resposta dada pelo Aluno H na questão 3 da Atividade II.

O que você observa, através dos dados que você preencheu, no QUADRO II acima?

Função constante

Fonte: Dados do pesquisador.

Notamos, por sua resposta, que o caráter variacional da função foi o principal condutor do aluno em sua solução. Podemos pensar na função constante, mencionada por ele, como sendo a função derivada. Sabemos que a derivada de uma função afim é uma função constante.

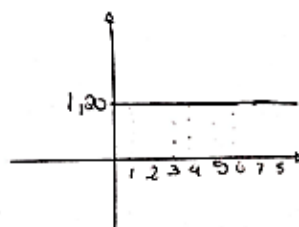
Perguntados, na questão 4, sobre o gráfico que representa os pares ordenados da forma $(x, \text{taxa média de variação de } x)$; as respostas indicam uma boa compreensão dos conceitos que buscamos na atividade. A associação dos dados do Quadro II da Atividade II (Figura 44) a uma função constante, como observamos na Figura 48, e a sua caracterização

por meio do caráter variacional, foram consideradas por nós aspectos bem positivos. Ainda mais, perceberam o que varia e como varia.

Figura 48 - Resposta dada pelo Aluno K na questão 4 da Atividade II.

4) Faça um esboço dos pontos $(x, \text{ taxa média de variação})$ obtidos na questão anterior com o auxílio do geogebra. Quais as características desse gráfico? Qual função representa esse gráfico?

É um gráfico constante, sendo que independente de x a taxa média de variação que é sempre



Fonte: Dados do pesquisador.

Indagados, na questão 5, sobre o comportamento da taxa média de variação ao nos aproximarmos cada vez mais de zero, oito dos alunos foram corretos em suas respostas, dizendo que essa é igual a 1,2 e que ela independe da variação na quantidade de quilogramas. A primeira parte da Atividade II foi finalizada com a questão de número 6, solicitando que os alunos representassem uma função que descrevesse tal problema. Seis alunos responderam corretamente se tratar da função $P(x) = 1,2x$.

5.3 Análise dos protocolos da resolução da Atividade II – segunda parte

A Atividade II foi dividida em duas partes. Na Figura 49, apresentamos o enunciado do problema que foi proposto na segunda parte dessa atividade e que motivam os questionamentos que seguem.

Figura 49 - Problema proposto na segunda parte da Atividade II.

7) Suponha agora que dona Terezinha tenha comprado também itens de limpeza, totalizando R\$ 80,00. Preencha o QUADRO III abaixo com o valor a ser pago y para cada quantidade x de kg de frutas e verduras.

Fonte: Dados do pesquisador.

Os alunos demonstraram um bom entendimento ao preencherem o Quadro III dessa atividade (Figura 50), que solicitava ao aluno calcular o valor a ser pago para diferentes quantidades de quilogramas de frutas e verduras comprados. Podemos destacar a grande dificuldade dos alunos, de uma forma geral, em compreender e operar com números racionais. Apesar dos números decimais aparecerem, geralmente, no sexto ano do Ensino Fundamental, as respostas dos alunos indicam que as dificuldades ainda persistem no Ensino Médio.

Figura 50 - Resposta correta dada pelo Aluno A, ao preencher o Quadro III da segunda parte da Atividade II.

Quantidade de kg comprados de frutas e verduras	Preço a ser pago em reais
0	80,00
1	81,20
2	82,40
3	83,60
0,1	$0,1 \cdot 1,20 + 80,00$
0,01	$0,01 \cdot 1,20 + 80,00$
0,001	$0,001 \cdot 1,20 + 80,00$

QUADRO III

Fonte: Dados do pesquisador.

A Figura 50 nos mostra que o Aluno A entendeu bem o problema expresso nessa questão, conseguiu organizar suas ideias a fim de perceber uma variável dependente e outra independente, mas pareceu sentir-se inseguro para realizar os cálculos, uma vez que não resolveu as operações aritméticas apontadas em sua resolução. Isso sugere, mais uma vez, uma dificuldade relacionada ao conjunto numérico citado anteriormente (racionais). Diante dessas observações, foi feita uma revisão de operações envolvendo números decimais e fracionários.

A maioria dos alunos conseguiu associar a situação abordada no problema à função afim, cuja representação algébrica é da forma $y = ax + b$. Também, notamos que os alunos realizaram uma associação da situação apresentada na primeira parte da atividade e dessa nova abordagem, como notamos na resposta do Aluno C na Figura 51.

Figura 51 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 8 da Atividade II.
 O que você observou ao preencher o QUADRO III ?

há uma taxa fixa = 80 reais somada ao valor de x referente à variável = $1,20x$.

Fonte: Dados do pesquisador.

Percebemos, ainda observando a Figura 51, que o Aluno C denomina o monômio $1,20x$ de variável, sendo que sua intenção era mostrar que esse novo problema era o mesmo apresentado na primeira parte dessa atividade adicionado um valor constante de R\$ 80,00. A correção foi um momento oportuno para desfazermos essa confusão e revisarmos o conceito de variável.

Ainda indagados sobre o que observaram ao preencherem o Quadro III dessa atividade (Figura 50), notamos, pela observação das respostadas dadas, uma evolução dos alunos em relação à compreensão do conceito de taxa de variação de uma função, que era almejado pelo professor pesquisador desta dissertação. Esse amadurecimento pode ser constatado ao analisarmos as Figuras 52 e 53, que correspondem às respostas dadas pelos Alunos I e C, respectivamente. Eles perceberam que as taxas de variação das funções $y = ax$ e $y = ax + b$ são constantes e iguais.

Figura 52 - Resposta dada pelo Aluno I, na questão 8 da Atividade II.
 O que você observou ao preencher o QUADRO III ?

que a variação é constante

Fonte: Dados do pesquisador.

A Figura 53 exemplifica a compreensão correta dos alunos sobre a função que modela a situação apresentada no problema. Reconheceram ser uma função afim, com a taxa média de variação constante e, ainda mais, que sua taxa de variação independe do valor de b . Observando as respostas dos demais alunos, foi notória a compreensão do conceito de taxa de variação e a percepção de que, para o problema apresentado na atividade, a taxa de variação é constante.

Figura 53 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 8 da Atividade II.
Complete o QUADRO IV abaixo com a taxa média de variação para compras variando segundo a tabela abaixo:

Varição de kg	Taxa média de variação
X=0 a x= 1	3,20
X=0 a x=2	3,20
X=0 a x=2	3,20
X=1 a x=3	3,20
X=1 a x= 1,5	3,20
X=1 a x = 1,1	3,20
X =1 a x = 1,01	3,20

QUADRO IV

O que você observa ao preencher o QUADRO IV acima?

A taxa de variação é constante independente do valor de "b."

Fonte: Dados do pesquisador.

Vale destacar uma grata surpresa que tive no ano seguinte, 2020, à realização desse trabalho. Fui procurado por um aluno do segundo ano do Ensino Médio e que havia participado, no ano anterior, dessas atividades. Ele queria me mostrar um problema de Física, mais precisamente de escalas termométricas. Percebeu que as taxas de variação eram constantes e diferentes de zero e, sendo assim, perguntou-me se a função afim que ele havia encontrado, por meio da taxa média de variação, estava correta. Foi uma grata surpresa ele ter percebido o caráter variacional da função e reconhecido ali uma função afim.

5.4 Análise dos protocolos da resolução da Atividade III

Seguimos com a análise do desenvolvimento da Atividade III, cujo problema é apresentado na Figura 54.

Figura 54 - Enunciado do problema proposto na primeira parte da Atividade III

Considere que um bem sofre uma desvalorização linear chegando a zero em 10 anos. Suponha ainda que seu preço seja R\$ 42.000,00 após 7 anos. Responda os itens abaixo.

Fonte: Dados do pesquisador.

Nessa atividade, foi feita uma junção das ideias de taxa de variação, porcentagem, proporcionalidade e função afim, que se relacionam. Essa atividade contou com a

participação de nove alunos que formaram duplas e um trio. Dois alunos do grupo inicial não participaram porque tinham de estudar para a recuperação trimestral. Lembremos que os alunos que participaram dessa atividade já estudaram função afim e porcentagem, mas de forma independente.

Portanto, percebe-se que os alunos possuem uma boa compreensão das ideias de porcentagem. Talvez, por serem consideradas fáceis, as questões que envolvem porcentagem em sua resolução sejam bem aceitas pelos alunos. Os alunos, muitas vezes, recorrem às proporcionalidades, momento em que obtemos a resposta tão comum observada em sala de aula pelos professores: “fiz por regra de três”. Aqui, devemos nos atentar a um obstáculo epistemológico mencionado por Sierpiska (1992), o obstáculo 9: tratar proporção como um tipo privilegiado de relação. Os alunos buscam proporção em “qualquer” problema que envolva função.

Quando solicitada a construção de uma função que representasse a situação indicada na atividade, percebemos, nas respostas dos alunos, uma dificuldade em assimilar a variação negativa e relacioná-la com a função afim, como podemos observar as respostas dos Alunos F e G nas Figuras 55 e 56, respectivamente.

Figura 55 - Resposta dada pelo Aluno F, na questão 5 da Atividade III.

5) Construa uma função que represente essa situação.

$$f(x) = 14000x + 140.000$$

Fonte: Dados do pesquisador.

Notamos, ao observar a Figura 55, que ele consegue apontar o termo independente e a taxa média de variação da função, mas não percebeu que a variação é negativa e deveria ser expressa na função. Entretanto, o Aluno G, destacou que existe uma desvalorização e ela deve ser expressa na função, mas erra ao representá-la algebricamente, como mostra a Figura 56 a seguir.

Figura 56 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 5 da Atividade III.

5) Construa uma função que represente essa situação.

$$f(x) = 14.000x - 140.000$$

Fonte: Dados do pesquisador.

Ainda notamos não ser um erro isolado, uma dúvida que promoveu discussões em termos da taxa média de variação ser negativa e a construção da função afim associada a tal problema.

Podemos entender esses erros ao representar por meio de funções as situações do mundo real a partir do obstáculo epistemológico 1, citado por Sierpínska (1992) no Quadro 1 dessa dissertação. A falta de problemas em sala de aula, a serem modeladas através de funções e oriundas de situações presentes no dia a dia dos alunos, talvez justifique tais erros.

As questões 6, 7 e 8 da Atividade III validaram as discussões feitas anteriormente. Ainda destacamos o alto índice de acertos nas questões que buscavam a variação anual do bem e o preço do bem novo; mas, em contrapartida, um alto índice de erros na modelagem das situações apresentadas que recaem em funções afins. Verificamos que o aluno compreende bem a situação, entende que ela pode ser expressa por meio de uma função afim, mas ainda não consegue definir de forma clara a sua lei.

Assim, acreditamos que as taxas de variação de funções reais e as leis das funções devem ser trabalhadas de forma concomitante, a fim de que esse distanciamento verificado na atividade seja minimizado.

5.5 Análise dos protocolos da resolução da Atividade IV

Dando continuidade às análises, apresentamos na Figura 57 o problema da Atividade IV.

Figura 57 - Problema apresentado na Atividade IV

EXCURSÃO PARA PRAIA

Considere que um grupo de amigos fretou um ônibus para ir à praia. Ficou combinado que cada amigo iria pagar R\$600,00 e mais R\$10,00 por cada lugar vago no ônibus dois andares, que possui 76 lugares. A receita da empresa será o valor pago por cada amigo multiplicado pelo número de pessoas que irão viajar.

Fonte: Dados do pesquisador.

A função receita foi construída corretamente por 6 alunos, como notamos na resposta do Aluno E (Figura 58).

Figura 58 - Resposta do Aluno E na questão 1 da Atividade IV

- 1) Considere x o número de lugares vagos e construa a função receita. $y(x) = (600 - 10x)(126 - x)$
 Objetivo: Modelar a situação problema por meio de uma função quadrática.

Fonte: Dados do pesquisador.

Notamos, mais uma vez, a dificuldade em modelar situações por meio de funções. Em uma próxima aplicação, sugerimos que a correção dos dados representados no Quadro I dessa atividade (Figura 59), bem como a modelagem de tal problema ocorra já no início da atividade, a fim de evitarmos que os alunos não errem toda a atividade em função de um equívoco inicial.

Figura 59 - Resposta do Aluno B na questão 2 da Atividade IV.

- 2) Determine a função receita da empresa, para x lugares vagos, dados no QUADRO abaixo:

Lugares vagos (x)	Receita (Y)
0 $0^2 + 10 \cdot 0 + 600 =$	600
2 $2^2 + 10 \cdot 2 + 600 =$	624
4 $4^2 + 10 \cdot 4 + 600 =$	656
6 $6^2 + 10 \cdot 6 + 600 =$	696
8 $8^2 + 10 \cdot 8 + 600 =$	744
10 $10^2 + 10 \cdot 10 + 600 =$	800
12 $12^2 + 10 \cdot 12 + 600 =$	864

QUADRO I

Fonte: Dados do pesquisador.

O Quadro I dessa atividade, expresso na Figura 59, mostrou-se eficaz em apresentar o comportamento da função apenas para os alunos que o preencheram corretamente. Uma sugestão, para uma próxima aplicação, seria desvincular o Quadro I da função que modela tal problema. Provavelmente, essa mudança permitirá ao aluno, ainda que de forma intuitiva e sem que se construa a função, realizar uma melhor avaliação de seu comportamento durante o processo de resolução do problema.

Notamos, nesse ponto, um obstáculo epistemológico citado por Sierpinska (1992), o obstáculo 10: a crença no poder das operações em expressões algébricas. A questão poderia ser respondida pela simples interpretação do problema e um número finito de operações aritméticas. Porém, os alunos que erraram tentaram primeiro expressar a situação por meio de uma expressão algébrica da função, para só então calcular a receita, como percebemos na resposta do Aluno B (Figura 59).

A percepção de um valor máximo da função, bem como do número de pessoas e preço para tal situação, foi respondida de forma apropriada por todos os alunos que preencheram

corretamente o Quadro I dessa atividade (Figura 59) , como esperávamos. Essa percepção pode ser notada na Figura 60, ao interpretarmos a resposta do Aluno C na questão dois.

Figura 60 - Resposta dada pelo Aluno C na questão 4 da Atividade IV.

O que você observou à medida que aumenta o número de lugares vagos? A receita aumenta até o máximo e depois diminui.

Fonte: Dados do pesquisador.

Problemas como os que apresentamos nessa Atividade IV aparecem com frequência em processos seletivos nas questões que abordam a função polinomial do 2º grau, e, talvez por isso, sejam os mais explorados pelos professores da Educação Básica. Provavelmente, esse motivo, aliado ao Quadro I, seja o responsável por todos os 6 alunos citados anteriormente terem também acertado o número de pessoas e o valor pago por pessoa para termos a receita máxima.

Para uma melhor compreensão das questões 6 e 7, seria interessante adicionar um quadro em cada um desses questionamentos, induzindo o aluno a realizar de forma intuitiva aproximações, por ambos os lados (por números maiores e também por números menores). Provavelmente, devido a uma falta de direcionamento nesse sentido aos alunos, apenas uma dupla chegou à conclusão correta, dizendo que a taxa de variação instantânea para a abscissa do vértice é zero, conforme perguntado na questão 8. Na Figura 61, notamos a resposta correta dada pelo Aluno E, quando questionado sobre a taxa de variação instantânea no vértice do gráfico que descreve o problema apresentado.

Figura 61 - Resposta dada pelo Aluno E, na questão 8 da Atividade IV.

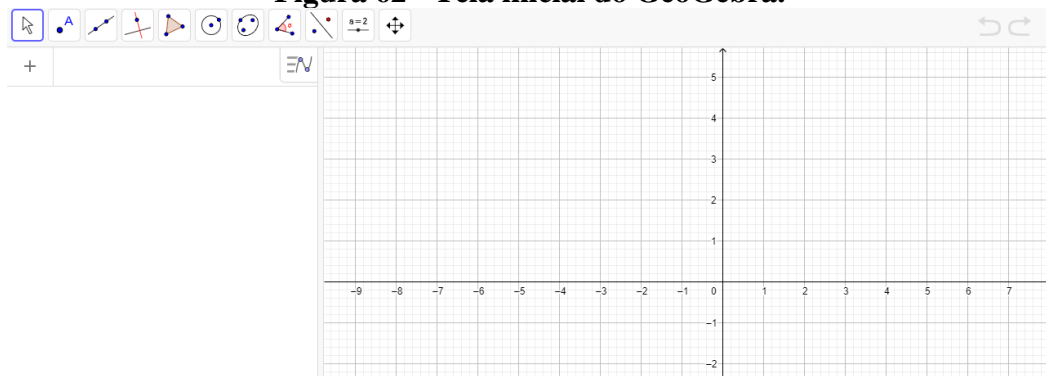
8) O que você conclui sobre a taxa de variação instantânea no x_v ? ? = 0.

Fonte: Dados do pesquisador.

As questões que seguem fazem uso do *software* GeoGebra e os alunos tiveram a ajuda do professor na compreensão dos comandos básicos e passos a serem seguidos em cada questão.

Inicialmente, os alunos foram apresentados à interface do GeoGebra como mostramos na Figura 62. Foi bem perceptível a influência positiva do *software* nesta atividade.

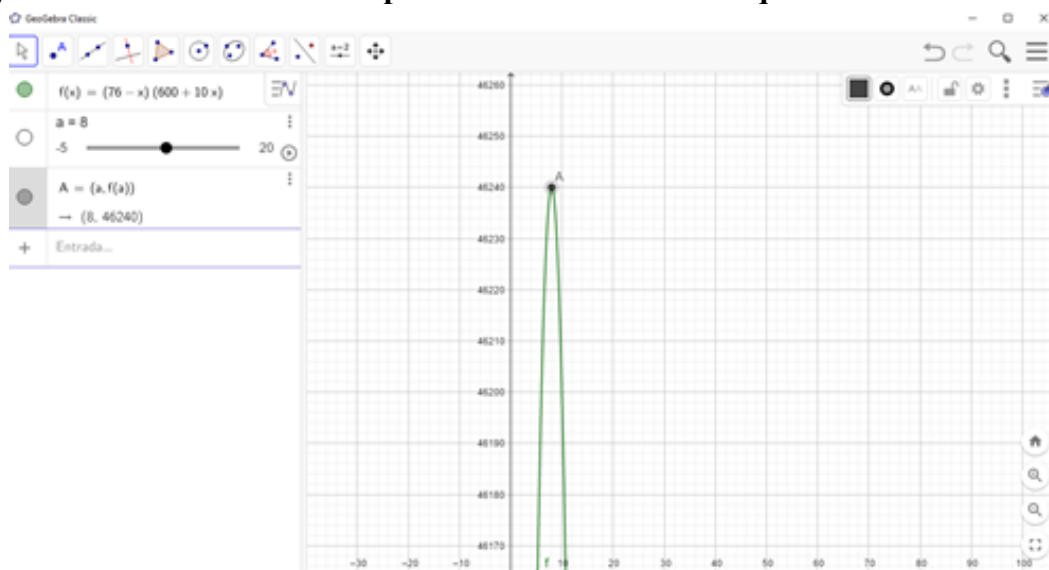
Figura 62 - Tela inicial do GeoGebra.



Fonte: Dados do pesquisador.

Ao representarem a função com o auxílio do GeoGebra, os alunos puderam observar seu gráfico, criar um ponto pertencente à função e, após isso, deslocá-lo com a utilização de um controle deslizante até que ocupasse a posição do vértice, de abscissa 9, como podemos observar através da Figura 63 o gráfico construído pelo Aluno A.

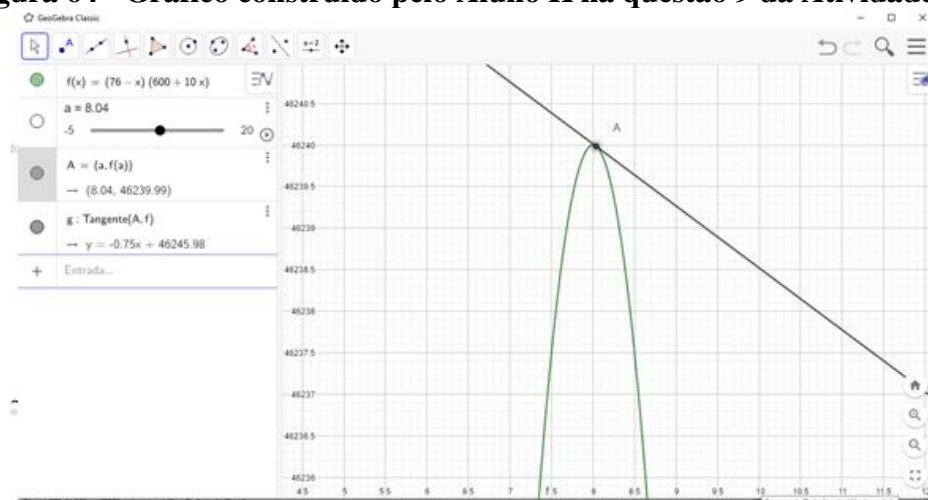
Figura 63 - Gráfico construído pelo Aluno A solicitado na questão 9 da Atividade IV.



Fonte: Dados do pesquisador.

Com auxílio do professor, que fez uso de um projetor, os comandos necessários, para a execução da atividade, eram apresentados. A utilização do GeoGebra permitiu aos alunos determinarem uma reta tangente ao gráfico da função construída, deslizá-la pela curva construída de modo a tangenciar os seus pontos e, ainda mais, determinar a função que representa a reta tangente em qualquer ponto do mesmo, como observamos na Figura 64.

Figura 64 - Gráfico construído pelo Aluno K na questão 9 da Atividade IV.



Fonte: Dados do pesquisador.

O *software* permitiu “dar vida à função”, ao criarmos pontos que se moviam pelo gráfico sem sair dele. Sem dúvida, é uma excelente alternativa para trabalharmos função de uma forma dinâmica, variando os parâmetros das funções ou, até mesmo, deslocando pontos e retas tangentes no gráfico de funções.

Após a construção do gráfico da função descrita na Atividade IV, os alunos foram questionados quanto ao sinal do coeficiente angular da reta tangente à função em diversos pontos do gráfico. Com auxílio do GeoGebra, os alunos modelaram a função e responderam, de forma acertada, à questão.

Outra sugestão em uma segunda aplicação dessas atividades, é a sua separação em duas partes e, só após a correção e discussão da primeira parte, os alunos realizarem a segunda, que faz uso do GeoGebra. Acreditamos que, assim, haverá um maior aproveitamento.

Os alunos conseguiram perceber a relação entre monotonia da função e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função, como podemos verificar na resposta dada pelo Aluno G, apresentada na Figura 65. Ele diz que a monotonia e o coeficiente angular possuem o mesmo padrão. As discussões promovidas pela correção da atividade permitiram ao Aluno G esclarecer que o “padrão” por ele notado nos sinais dos coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico da função obedeciam à seguinte regra: no intervalo que a função era crescente, os coeficientes angulares eram positivos; no intervalo em que a função era decrescente, os coeficientes angulares eram negativos. Dessa forma, observamos que ele foi capaz de relacionar a monotonia com o coeficiente angular da reta tangente.

Figura 65 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 11 da Atividade IV.

- 11) Existe alguma relação entre a monotonia de uma função e o coeficiente angular da reta tangente? Sim e "a" possui o mesmo padrão que a monotonia.

Fonte: Dados do pesquisador.

Ao completarem o Quadro II, os alunos preencheram acertadamente com o auxílio do GeoGebra, sendo esse *software* um grande facilitador na compreensão dos conceitos matemáticos propostos.

Observamos também, de acordo com a Figura 66, que os alunos, e em especial o Aluno K, foram capazes de concluir corretamente que os dados apresentados, no Quadro II dessa atividade, pertencem a uma função afim decrescente.

Figura 66 - Resposta dada pelo Aluno K nas questões 12 e 13 da Atividade IV.

- 12) Utilizando o geogebra, determine a inclinação da reta tangente ao gráfico nos pontos:

X	Inclinação da reta tangente
0	760
1	750
2	740
3	730
4	720
5	710
6	700

QUADRO II

- 13) Com auxílio do geogebra, construa o gráfico com os pontos (x, inclinação da reta tangente). Quais as características desse gráfico?

É uma função afim decrescente de 1º grau.

Fonte: Dados do pesquisador.

A justificativa para tal conclusão foi dada durante os debates em sala e motivada, segundo ele, pelo fato de a taxa média de variação ser constante. Se pensarmos na derivada da função polinomial de grau dois, notamos a coerência de sua resposta, visto que a derivada de um polinômio de grau dois é um polinômio de grau um.

Ainda de acordo com essa atividade, percebemos a necessidade de darmos ênfase a situações reais ao apresentarmos o conceito de função aos alunos. Notamos que eles dominam algumas “regras”, como as utilizadas para encontrar raízes, coordenadas do vértice,

concavidade, formato do gráfico da função, dentre outras, mas sentem dificuldade em modelar o problema, mesmo que a situação proposta seja comum entre as associadas à função quadrática.

Esperávamos reaplicar essa atividade, com as mudanças aqui mencionadas, no ano de 2020, mas a pandemia (de proporções mundiais) impediu qualquer tentativa nossa nesse sentido.

5.6 Análise dos protocolos da resolução da Atividade V

Os alunos que responderam a essa atividade já trabalharam, em Física, o movimento uniformemente variado, conceito relacionado à atividade proposta, determinando a posição correta do móvel em cada instante sem dificuldade.

Em minha experiência profissional, percebo que encontrar a imagem de um certo elemento do domínio de uma função, o famoso “só colocar no lugar de x ”, seja uma das principais interpretações de função construídas pelos alunos da Educação Básica, calcular o “ $f(x)$ ”.

Figura 67 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 1 da Atividade V.

Considere que um ponto material se mova com movimento uniformemente variado. A função horária que descreve sua posição no espaço em função do tempo é $S(t) = 12 + 5t + 4t^2$ para $t > 0$, S dado em metros e t em segundos. A partir da situação abaixo, faça o que se pede.

1) Preencha a tabela a seguir com a posição do móvel em cada instante.

T	0	1	2	3	4	5
S	12	21	38	63	96	137

Fonte: Dados do pesquisador.

Como podemos perceber pela Figura 67, os alunos não encontraram dificuldades ao calcular a velocidade média. A exceção foi o cálculo da velocidade média quando essa envolvia operações com números decimais.

Ainda que de forma parcial, mais uma vez notamos a compreensão dos alunos quanto aos conceitos de crescimento e de decrescimento das funções, visto que eles associam corretamente a monotonia ao sinal do coeficiente angular da reta tangente. Entretanto, conforme podemos notar na Figura 68 não foi possível avaliar se os alunos compreendem ou não como ocorre essa variação, se ela é nula, constante ou não constante. Respostas como essas nos levam a conjecturar que na Educação Básica essas discussões em torno do comportamento variacional de uma função são pouco exploradas.

Figura 68 - Resposta dada pelo Aluno G, na questão 1 da Atividade V.

- 3) Como você interpreta a velocidade média ao tomarmos intervalos de tempo cada vez mais próximos de

5? A velocidade média aumenta

Fonte: Dados do pesquisador.

O objetivo proposto na questão dois não foi atingido de forma integral por nenhum aluno. Eles perceberam que a velocidade média estava aumentando, até perceberam uma variação constante da velocidade nos três primeiros intervalos, mas nenhum mencionou em sua resposta o fato da velocidade média “parecer se aproximar” de um certo valor, como notamos na Figura 69.

Figura 69 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 2 da Atividade V.

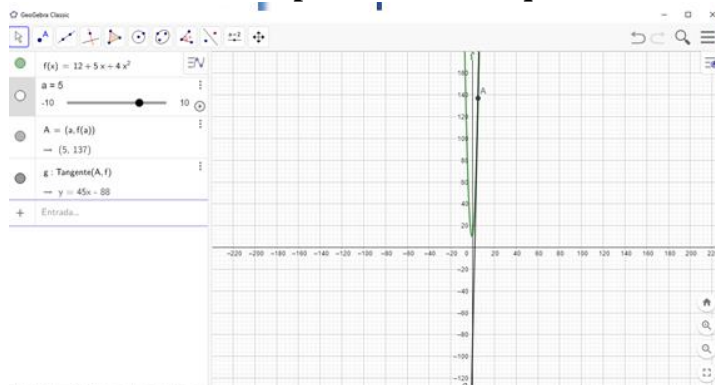
- 2) Determine a velocidade média do móvel nos instantes:

Tempo inicial e tempo final	$t=0$ a $t=5$	$T=2$ a $t=5$	$T=4$ a $t=5$	$T=4,5$ a $t=5$	$T=4,9$ a $t=5$
Velocidade média	25	33	41	43,5	44,6

Fonte: Dados do pesquisador.

O GeoGebra mostrou ser, mais vez, uma ferramenta eficaz no estudo das funções. Esse fato foi notado pela facilidade dos alunos em alcançar os objetivos propostos quando estavam utilizando-o, aumentando ainda a percepção dos detalhes almeçados nessa atividade. Por exemplo, foi possível determinar a equação de uma reta tangente em um dado ponto do gráfico, como solicitado na questão 4 (Figura 70). Essa determinação, sem o auxílio do *software*, seria quase inimaginável para um aluno do primeiro ano que ainda não estudou formalmente esses conceitos que, em geral, são objetos de estudo de cursos de graduação.

Figura 70 - Gráfico construído pelo Aluno J na questão 4 da Atividade V.



Fonte: Dados do pesquisador.

A Figura 71 retrata como a maioria dos alunos conseguiu determinar corretamente a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa cinco.

Figura 71 - Resposta dada pelo Aluno C, na questão 2 da Atividade V.

- 4) Com auxílio do geogebra, determine a equação da reta tangente a função posição $S(t)$, no ponto 5. O que você percebe em relação ao coeficiente angular da reta tangente no ponto 5? $45x - 88$ / *Aumenta + 8.*

Fonte: Dados do pesquisador.

No entanto, foi somente após as discussões que os alunos conseguiram relacionar a taxa de variação instantânea com a inclinação da reta tangente, momento em que surgiu naturalmente a associação com a velocidade instantânea. Já na Atividade I, introduzimos indagações que conduzem a uma taxa de variação instantânea ao questionarmos variações em intervalos cada vez menores. Mas somente durante as correções, os alunos conseguiram relacionar a taxa de variação da função posição em intervalos cada vez menores com a velocidade instantânea.

Quando perguntados sobre o significado do gráfico formado pelos pontos da forma $(x, \text{coeficiente angular da reta tangente à função no ponto de abscissa } x)$, não tivemos a indicação por parte dos alunos de que tal gráfico representasse a velocidade instantânea do móvel em cada instante, mas apontaram que tal função possui taxa média de variação constante e se tratava de uma função afim. Durante as discussões desta atividade, após a interpretação da velocidade instantânea como a taxa de variação instantânea da função posição, chegaram à conclusão de que a taxa de variação instantânea da função velocidade seria uma função constante que representava a aceleração instantânea, como observamos na Figura 72.

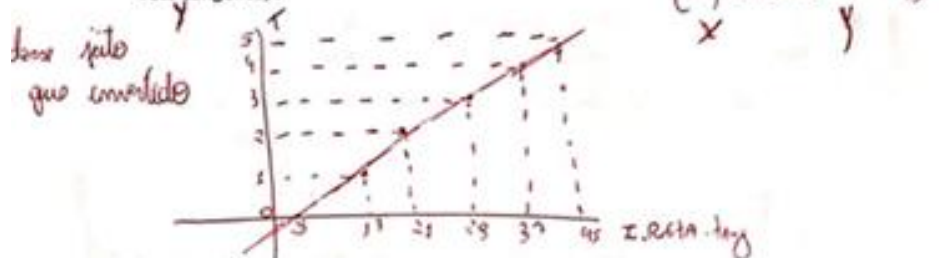
Ao finalizar essa atividade, os alunos concluíram, durante as discussões, que a taxa de variação instantânea da função “posição” (que era quadrática) gerava uma função afim que representava a velocidade instantânea, e que a taxa de variação instantânea da velocidade seria uma função constante que representaria a aceleração instantânea em um dado instante. Esses fatos reafirmam a importância de se trabalhar a Matemática de uma forma contextualizada, explorando a investigação e a modelagem de situações cotidianas, sem esquecer de sua importância em outras ciências.

Figura 72 - Resposta dada pelo Aluno A, nas questões 5, 6 e 7 da Atividade V.

T	0	1	2	3	4	5
Inclinação da reta tangente	5	13	21	29	37	45

O que você observa? A inclinação da reta tangente tem taxa de variação constante.

6) Represente em um mesmo plano cartesiano os pontos da forma (tempo, inclinação da reta tangente).



7) O que o gráfico da função anterior representa? representa uma função crescente.

8) No gráfico descrito na questão anterior, o que a taxa média de variação representa? taxa média de variação representa a relação entre a variação de y em relação a variação de x representando a taxa média de variação constante.

Fonte: Dados do pesquisador.

5.7 Sugestão de Atividade VI - não realizada

A Atividade VI, como mencionado anteriormente, não foi aplicada.

Essa atividade fecharia o ciclo planejado pelo qual conseguiríamos avançar por temas pouco ou, até mesmo, não abordados durante o ensino de funções na Educação Básica, mas que consideramos importantes em estudos futuros que envolvem funções, seja na própria Matemática, em outras ciências ou problemas do cotidiano.

Muitos são os conceitos que seriam abordados de forma intuitiva ou direta nessa Atividade VI. Podemos destacar, dentre muitos temas que permeiam a atividade, os conceitos de funções dadas por mais de uma sentença, domínio de uma função, continuidade de funções reais de uma variável real, reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto do seu domínio, derivada de uma função polinomial de grau dois (ainda que intuitivamente), relação

entre a monotonia de uma função e a inclinação da reta tangente, pontos de máximo e mínimo de uma função, limites laterais.

A nossa intenção era começar a atividade explorando a construção do gráfico de uma função dada por mais de uma sentença (Figura 73) com auxílio do GeoGebra, por entender ser essa uma discussão importante e que favorece o ensino-aprendizagem de conteúdos de Cálculo desenvolvidos no Ensino Superior.

Figura 73 - Questão 1 da Atividade VI.

Dada a função abaixo, faça o que se pede.

$$f(x) \begin{cases} x^2, x > 1 \\ -x - 1, x \leq 1 \end{cases}$$

1) Com auxílio do geogebra , esboce o gráfico.

Fonte: Dados do pesquisador.

Como essa atividade seria aplicada a alunos que já haviam estudado o conceito de função, pretendíamos, a partir do gráfico e da questão 2 (Figura 74), incentivar indagações no que diz respeito à sua continuidade e, nesse momento, gerar uma inquietação onde as indagações surgissem.

Figura 74 - Questão 2 da Atividade VI.

2) Todos os números reais estão no domínio da função? Se não, qual ponto não pertence ao domínio da função? _____

Fonte: Dados do pesquisador.

Diferente do que foi proposto na Atividade IV, ao aproximarmos a reta tangente ao gráfico da função pela direita e pela esquerda em um mesmo ponto, esses valores não coincidiam e esperávamos que os alunos dissessem, ainda na questões 3 e 4 (Figura 75), não existir a inclinação em tal ponto ou que seriam dois valores distintos. Seria um momento para apresentar, ainda que de forma intuitiva, ideias como limites laterais e continuidade de funções reais de variáveis reais e mostrar que nem sempre temos a reta tangente num ponto dado. Esse tipo de atividade é relevante, pois traz à tona discussões importantes de conceitos formadores do Cálculo para a Educação Básica, em que os alunos deveriam ter o contato inicial com tais conceitos matemáticos.

Figura 75 - Questões 3 e 4 da Atividade VI

3) Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico nos pontos:

a)

x	-1	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,999
Inclinação da reta tangente							

QUADRO I

b)

x	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
Inclinação da reta tangente							

QUADRO II

4) Como seria a reta tangente ao gráfico no ponto $x=1$?

Fonte: Dados do pesquisador.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos esse trabalho com o questionamento sobre o alto índice de reprovação e evasão na disciplina de Cálculo. Ademais, verificamos que muitas são as pesquisas que tentam buscar possíveis caminhos para a solução de tal problema. Cumpre salientar que isso não é uma característica exclusivamente das universidades brasileiras, e que vem motivando diversas pesquisas em todo o mundo.

Na busca por respostas que viessem elucidar nossas dúvidas, encontramos, na tese de doutorado de Rezende (2003b), um possível direcionamento em que acreditamos. Por essa razão, adotamos seu trabalho como a principal referência ao elaborar esta dissertação. Rezende acredita que a origem de tal fracasso se verifica desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo, e que as dificuldades são de natureza epistemológica. Vale destacar que a partir de um entrelaçamento histórico e pedagógico, ele apontou cinco macro espaços de dificuldades de natureza epistemológica, em que destacamos o macro espaço da variabilidade/permanência.

Rezende evidencia o Ensino Básico como lugar-matriz das dificuldades ligadas às deficiências na aprendizagem de Cálculo. Diante dessa verificação, destacamos, em nosso trabalho, a questão da variabilidade de funções. Cabral (1998) *apud* Rezende (2003b) diz que alguns dos maiores obstáculos de aprendizagem enfrentados pelos estudantes no curso de Cálculo são os problemas de taxas relacionadas e otimização, destacando a dificuldade de enxergar as quantidades variáveis envolvidas e a relação funcional entre elas.

Nesse contexto, percebemos que a abordagem atual de função, baseada na linguagem de conjuntos, se desprende das origens de tal conceito no campo das variações entre grandezas, que é amplamente abordada em processos seletivos e situações cotidianas.

Desse modo, elaboramos uma proposta para o ensino de funções reais de variáveis reais, com o intuito de ser aplicada no Ensino Médio e, mais precisamente, na primeira série deste ciclo. Em seu desenvolvimento, os alunos fizeram uso do *software* GeoGebra, que se mostrou, no nosso entendimento, uma ótima ferramenta para o ensino dinâmico de funções reais de variáveis reais, pois o *software* favoreceu a visualização dos gráficos das funções e ajudou o aluno a desenvolver uma intuição do caráter variacional das funções.

Nesta pesquisa de abordagem qualitativa, foi elaborada uma sequência didática com

seis atividades, das quais só conseguimos aplicar cinco, por causa do fim do ano letivo de 2019 e da pandemia vivenciada no ano de 2020. As fontes de dados deste estudo foram questionários, análise da resolução das atividades, e a observação das aulas.

A validação de nossa pesquisa se deu com um grupo de onze alunos, de uma escola da rede privada de ensino, em Montes Claros – MG, e os encontros ocorreram no contraturno escolar. Vale dizer que os alunos se dividiam em duplas e um trio.

Podemos considerar o resultado satisfatório. Os estudantes, antes de iniciarmos a sequência didática, mostraram-se confusos quanto ao conceito de variabilidade e variabilidade de funções. Esse fato foi percebido por meio das respostas apresentadas inicialmente nos questionários. Notamos um avanço significativo na compreensão das funções propostas na sequência didática, proporcionada pelo trabalho fundamentado no seu caráter variacional em contrapartida à maneira estática e usual que a maioria dos livros e professores vêm trabalhando atualmente com um amplo destaque à sua definição no campo da teoria de conjuntos.

Outros conceitos, como continuidade, taxa de variação instantânea, reta tangente ao gráfico de uma função e proporcionalidade, foram favorecidos pela realização das atividades, ampliando, assim, os conceitos propostos. As respostas dos alunos também evidenciaram um predomínio da abordagem conjuntista no ensino de funções na Educação Básica e um distanciamento de seu caráter variacional.

Os estudantes se mostraram capazes de entender as funções propostas por meio de seu caráter variacional, tanto na execução das atividades quanto durante as correções. Além disso, foram adiante e começaram a perceber o caráter variacional das funções até mesmo nas aulas de Física. Uma das comprovações dessa percepção foi verificada no ano seguinte à aplicação da sequência didática. Já no início do ano letivo de 2020, uma aluna que participou do nosso projeto, ao se deparar com um problema de escalas termométricas na Física, percebeu que, ao calcular a taxa de variação das temperaturas, essa era constante e, assim sendo, deveria representar uma função afim. Essa aluna queria a confirmação de que seu raciocínio era coerente, o que me alegrou bastante. Isso me fez acreditar mais que as ideias apresentadas neste trabalho podem fazer parte da Educação Básica e que contribuirão para uma melhoria da compreensão de funções reais de variável real.

Destacamos aqui a importância em buscar aperfeiçoar sempre o nosso trabalho e, nesse sentido, a Atividade IV apresenta algumas sugestões, mencionadas no texto, para que em uma próxima aplicação possamos ter um resultado melhor.

Verificamos também, em trabalhos e pesquisas aqui relatados, críticas a respeito dos

cursos de Fundamentos de Cálculo ou Cálculo Zero, oferecidos em algumas instituições de Ensino Superior, que não estão se mostrando eficazes para minimizar o problema de evasão e reprovação em Cálculo.

Não poderia deixar de destacar o papel dos mestrados profissionais. Desde minha graduação, atuei na docência, e muitas indagações surgiram nessa caminhada, por exemplo, indagações a respeito da origem de determinadas dificuldades de aprendizagem dos alunos em conteúdos específicos, as metodologias e as estratégias de ensino mais adequadas, dentre outras. Nesse contexto, o PROFMAT possibilita que os professores que atuam na Educação Básica ampliem os seus conhecimentos matemáticos e educacionais, refletindo sobre suas práticas de ensino. Além disso, essa modalidade de mestrado permite aos alunos continuarem exercendo a docência concomitantemente à realização do curso.

Esperamos poder contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções reais de uma variável real.

Deixamos aqui uma sugestão de continuidade para este trabalho: aperfeiçoamento da utilização das múltiplas ferramentas que o GeoGebra oferece ou, até mesmo, que sejam exploradas as taxas de variação de outras funções, como exponenciais e logarítmicas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.18, p. 1-9, 1991.

BARRETO, A. O Ensino de Cálculo I nas universidades. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, (6), 4-5, 1995.

BARRETO, M. M. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. Artigo adaptado da dissertação de mestrado Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS, 2008.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, 1999.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1991.

BORTOLOSSI, H. J.; REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. In: 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra, 13-15.,2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: GEOGEBRA-LA, 2011.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 9394, de 20 de Dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Matemática e Suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de dezembro de 2019.

BRASIL, Pisa em Foco. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>. Acesso: 29 de out. 2020.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

COMETI, M. A. **Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: Contribuições do GeoGebra 3D para a Aprendizagem**. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós: Graduação em Educação Matemática, 12 a 14., 2016, Curitiba. **Anais...** Curitiba: EMBRAPEM, 2016.

- DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual Editora, 1991.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. D. Campinas: ed. UNICAMP, 1995.
- FAJARDO, R. A. dos S. **Teoria de Conjuntos**. jun 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2020.
- FERREIRA, J. C.; PIERMATEI F. **Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado: imagem de conceito e definição de conceito**. In: CIBEM, 7., 2013, Montivideo, Actas... Montevideo, 2013. p. 1874-1881. Disponível em: www.ufjf.br/mestradoedumat/files/.../Produto-educacional-Juliano-Cezar-Ferreira.pdf. Acesso em: 20 jan. 2020.
- FLORES, J. B.; LIMA, V. M. do R.; MULLER, T. J. **O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino de Cálculo Diferencial e Integral: reflexões a partir de uma metanálise**. fev. 2018. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/16238/13196>. Acesso em: 17 maio. 2020.
- GODOY, A. S. **Introdução a Pesquisa Qualitativa e Suas Possibilidades**. In Revista de Administração de Empresas, v.35, n.2, Mar./Abr.1995, p. 57-63.
- GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. Rio de Janeiro: Record, 1997.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo/ vol. 1**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.
- LEME, M.C. **Movimento da Matemática Moderna – Possíveis Leituras de uma Cronologia**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n.18, p.49-63, maio/ago. 2006.
- LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, vol. 1. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.
- MASOLA, Wilson de Jesus; VIEIRA, Gilberto; ALLEVATO, Norma. **Ingressantes na Educação superior e suas Dificuldades em Matemática: uma Análise das Pesquisas Publicadas nos Anais dos X e XI ENEMs**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, SÃO Paulo. Anais do XII ENEM: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM/SBEM-SP, 2016, p. 1-13.
- OLIVEIRA, M.C. A. de; RAAD, M. R. **A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo**. Boletim GEPEN, n. 61, p. 125-137, jul-dez. 2012.
- PAULA, S. C. R. de *et al.* **Uma Investigação sobre o Uso de Ferramentas Computacionais no Ensino de Cálculo Integral e Diferencial**. 2015. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61394>. Acesso em: 15 jan. 2020.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. **Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil**. VIDYA, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014.

PAGANI, E. M. L. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Derivadas no Curso Técnico Integrado ao Médio através da Resolução de Problemas**. Tese de doutorado. UNICSUL, São Paulo, 2016.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. Dissertação (mestrado em ensino de Matemática). UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

PILETTI, N. **História da educação no Brasil**. São Paulo: Editora Ática, 1996.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. **Anais do II SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-29** de novembro a 1º de dezembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM), 2003a.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). USP, São Paulo, 2003b.

ROCHA, T. U. A Epistemologia de Bachelard e Suas Potencialidades para o Ensino de Física e Na Educação Básica. In: Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade e Educação, 23 a 26., 2013. Curitiba. **Anais...** Curitiba: II SIRSSE, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SIERPINSKA, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), **The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy**. MMA notes 25 (pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1, 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

TEIXEIRA, P. J.; PASSOS, C.C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. jan./jun. 2013. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/download/8646602/13504/>. Acesso em: 10 jan. 2020.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ZABALA, A. **A Prática Educativa. Como ensinar**. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

APÊNDICE 1 - Primeira atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.

ATIVIDADE I

NOMES: _____

DATA: _____

PREÇO DA PASSAGEM DE ÔNIBUS EM FUNÇÃO DA QUANTIDADE DE QUILÔMETROS PERCORRIDOS

1) Qual o preço da passagem de ônibus urbano em Montes Claros?

_____.

Complete o QUADRO I abaixo, com o valor a ser pago, em reais, por uma pessoa que se deslocar x km em Montes Claros utilizando um ônibus urbano.

DESLOCAMENTO DE X KM	PREÇO A SER PAGO: Y REAIS
0	
1	
2	
3	
4	
5	

QUADRO I

O que você percebe ao preencher o quadro acima?

2) Seria possível considerar $x = -1$ km? E $x = \sqrt{2}$ km?

3) Determine a razão entre a variação no preço da passagem e a variação no deslocamento para os dados no QUADRO II abaixo.

Deslocamento	Variação no preço da passagem por km (em média)
$x = 0$ km a $x = 3$ km	
$x = 0$ km a $x = 2$ km	
$x = 0$ km a $x = 1$ km	
$x = 0$ km a $x = 0,5$ km	
$x = 0$ km a $x = 0,01$ km	

QUADRO II

O que você percebe em relação a variação no preço da passagem por km, calculado no QUADRO II, para diferentes deslocamentos? E quando reduzimos cada vez mais o deslocamento, aproximando-o de zero?

4) Determine, por escrito, um modo de calcular o preço a ser pago em um deslocamento de x km em um ônibus da cidade de Montes Claros.

5) Faça um esboço da situação descrita nessa atividade (valor pago em um ônibus urbano em função do deslocamento) através de um gráfico.

6) Qual o significado da Variação no preço da passagem por km calculada no quadro II?

7) Qual seria a taxa de variação média no preço ao aproximarmos cada vez mais o deslocamento de 2 km, mas por distâncias maiores que 2 km? E menores que 2 km?

8) Represente, em um plano cartesiano, os pontos da forma (x, y) , em que x represente o deslocamento e y a taxa média de variação no preço ao aproximarmos cada vez mais dos deslocamentos: 0, 1, 2, 3 e 4 km.

9) Qual seria uma lei para a função acima?

APÊNDICE 2 - Segunda atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos.

ATIVIDADE II

NOMES: _____

DATA: _____

FEIRA SEMANAL DE DONA TEREZINHA

Considere que dona Terezinha, em sua feira semanal, sempre aproveita a promoção das terças para comprar frutas e verduras pagando R\$ 1,20 por kg.

Responda aos itens abaixo com base na feira semanal de dona Terezinha.

Complete o QUADRO I a seguir, com o valor a ser pago y em função da quantidade x de kg de frutas e verduras comprados por Dona Terezinha.

Quantidade de kg de frutas e verduras comprados por dona Terezinha	Valor a ser pago (em reais)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

QUADRO I

- 1) O que você percebe ao observar no QUADRO I os dados que você preencheu?

- 2) Nesse contexto, seria possível considerar $x = -1$? E $x = \sqrt{2}$?

- 3) Determine a taxa média de variação no preço a ser pago por dona Terezinha para compras de:

Quilogramas	Taxa Média de Variação (Variação do preço/ variação dos quilogramas)
$x = 0 \text{ kg a } x = 1 \text{ kg}$	
$x = 0 \text{ kg a } x = 2 \text{ kg}$	
$x = 0 \text{ kg a } x = 3 \text{ kg}$	
$x = 1 \text{ kg a } x = 5 \text{ kg}$	
$x = 0 \text{ kg a } x = 0,01 \text{ kg}$	
$x = 0 \text{ kg a } x = 0,001 \text{ kg}$	

QUADRO II

O que você observa, através dos dados que você preencheu, no QUADRO II acima?

4) Faça um esboço dos pontos (x , taxa média de variação) obtidos na questão anterior com o auxílio do GeoGebra. Quais as características desse gráfico? Qual função representa esse gráfico?

5) Ao comprarmos quantidades de kg de frutas e verduras cada vez mais próximos de 0 kg, o que você percebe em relação a taxa média de variação no preço?

6) Determine um modo (função) de calcular o valor a ser pago (P) para uma compra de x kg?

7) Suponha agora que dona Terezinha tenha comprado também itens de limpeza, totalizando R\$ 80,00. Preencha o QUADRO III abaixo com o valor a ser pago y para cada quantidade x de kg de frutas e verduras.

Quantidade de kg comprados de frutas e verduras	Preço a ser pago em reais
0	
1	
2	
3	
0,1	
0,01	
0,001	

QUADRO III

8) Determine um modelo matemático (função) que represente a situação acima.

9) O que você observou ao preencher o QUADRO III?

Complete o QUADRO IV abaixo com a taxa média de variação para compras variando segundo a tabela abaixo:

Varição de kg	Taxa média de variação
$x = 0$ a $x = 1$	
$x = 0$ a $x = 2$	
$x = 0$ a $x = 3$	
$x = 1$ a $x = 3$	
$x = 1$ a $x = 1,5$	
$x = 1$ a $x = 1,1$	
$x = 1$ a $x = 1,01$	

QUADRO IV

10) O que você observa ao preencher o QUADRO IV acima?

APÊNDICE 3 - Terceira atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos

ATIVIDADE III

NOMES: _____

DATA: _____

DEPRECIACÃO DE UM BEM

Considere que um bem sofre uma desvalorização linear chegando a zero em 10 anos. Suponha ainda que seu preço seja R\$ 42.000,00 após 7 anos. Responda os itens abaixo.

1) Qual a desvalorização média ao ano em porcentagem?

2) Após 7 anos, qual o valor do bem em porcentagem se comparado ao seu preço inicial?

3) Qual a desvalorização média ao ano do bem?

4) Qual era o preço desse bem novo?

5) Construa uma função que represente essa situação.

Suponha agora, que um bem com 6 anos de uso tenha seu preço estimado em R\$ 72.000,00 e após 11 anos R\$ 65.000,00. Responda:

1) Qual a desvalorização média anual?

2) Qual seria o preço desse bem com 15 anos de uso? E novo?

3) Construa uma função que represente essa situação.

APÊNDICE 4 - Quarta atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos

ATIVIDADE IV

NOMES: _____

DATA: _____

EXCURSÃO PARA PRAIA

Considere que um grupo de amigos fretou um ônibus para ir à praia. Ficou combinado que cada amigo iria pagar R\$600,00 e mais R\$10,00 por cada lugar vago no ônibus dois andares, que possui 76 lugares. A receita da empresa será o valor pago por cada amigo multiplicado pelo número de pessoas que irão viajar.

- 1) Considere x o número de lugares vagos e construa a função receita.

- 2) Determine a função receita da empresa, para x lugares vagos, dados no QUADRO I:

Lugares vagos (x)	Receita (y)
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

QUADRO I

O que você observou à medida que aumenta o número de lugares vagos?

- 3) Determine o número de pessoas que devem viajar para que a empresa tenha receita máxima.

- 4) Qual o preço para receita máxima?

- 5) Qual a receita máxima?

- 6) Sendo x_v o número de lugares vagos para receita máxima, determine a taxa média de variação da função ao aproximarmos cada vez mais de x_v , mas por valores menores que x_v .

- 7) Sendo x_v o número de lugares vagos para receita máxima, determine a taxa média de variação da função ao aproximarmos cada vez mais de x_v , mas por valores maiores que x_v .

- 8) O que você conclui sobre a taxa de variação instantânea no x_v ?

- 9) Esboce o gráfico da função com auxílio do GeoGebra e diga em que intervalos a inclinação da reta tangente ao gráfico é positiva, negativa ou nula.

- 10) Diga em que intervalo a função é crescente, decrescente ou constante.

- 11) Existe alguma relação entre a monotonia (onde a função é crescente, decrescente e constante) de uma função e o coeficiente angular da reta tangente?

- 12) Utilizando o GeoGebra, determine a inclinação da reta tangente ao gráfico nos pontos dados no QUADRO II.

X	Inclinação da reta tangente
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

QUADRO II

- 13) Com auxílio do GeoGebra, construa o gráfico com os pontos (x , inclinação da reta tangente). Quais as características desse gráfico?

APÊNDICE 5 - Quinta atividade desenvolvida em sala de aula com os alunos

ATIVIDADE V

NOMES: _____

DATA: _____

Considere que um ponto material se mova com movimento uniformemente variado. A função horária que descreve sua posição no espaço em função do tempo é

$$S(t) = 12 + 5t + 4t^2$$

para $t > 0$, S dado em metros e t em segundos. A partir da situação abaixo, faça o que se pede.

- 1) Preencha a tabela a seguir com a posição do móvel em cada instante.

t	0	1	2	3	4	5
S						

- 2) Determine a velocidade média do móvel nos instantes:

Tempo inicial e tempo final	$t = 0$ a $t = 5$	$t = 2$ a $t = 5$	$t = 4$ a $t = 5$	$t = 4,5$ a $t = 5$	$t = 4,9$ a $t = 5$
Velocidade média					

O que você percebeu ao preencher a tabela acima?

- 3) Como você interpreta a velocidade média ao tomarmos intervalos de tempo cada vez mais próximos de 5?

4) Com auxílio do GeoGebra, determine a equação da reta tangente a função posição $S(t)$, no ponto 5. O que você percebe em relação ao coeficiente angular da reta tangente no ponto 5?

5) Utilizando o GeoGebra, complete a tabela abaixo com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função posição $S(t)$, nos pontos dados.

t	0	1	2	3	4	5
Inclinação da reta tangente						

O que você observa?

6) Represente em um mesmo plano cartesiano os pontos da forma (tempo, inclinação da reta tangente).

7) O que o gráfico da função anterior representa?

8) No gráfico descrito na questão anterior, o que a taxa média de variação representa?

APÊNDICE 6 - Sexta atividade - não desenvolvida em sala de aula

ATIVIDADE VI

NOMES: _____

DATA: _____

Dada a função abaixo, faça o que se pede.

$$f(x) \begin{cases} x^2, x > 1 \\ -x - 1, x \leq 1 \end{cases}$$

1) Com auxílio do GeoGebra, esboce o gráfico.

2) Todos os números reais estão no domínio da função? Se não, qual ponto não pertence ao domínio da função?

3) Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico nos pontos:

a)

x	-1	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,999
Inclinação da reta tangente							

QUADRO I

b)

x	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
Inclinação da reta tangente							

QUADRO II

4) Como seria a reta tangente ao gráfico no ponto $x = 1$?

Considere a função de domínio e contradomínio real $f(x) = x^2$, e responda os itens abaixo:

- 5) Complete a tabela abaixo com a inclinação da reta tangente a função f nos pontos:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
Inclinação da reta tangente						

QUADRO III

- 6) O que você percebe ao preencher a tabela?

- 7) Quando a inclinação da reta tangente ao gráfico muda de sinal, negativo para zero e posteriormente positivo, o que acontece no gráfico?

- 8) E se a inclinação da reta tangente ao gráfico mudar de positivo para negativo?

- 9) O que implica no gráfico a inclinação da reta tangente ser zero?

APÊNDICE 7 – Questionário respondido pelos alunos



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Caro(a) aluno(a),
Sua participação será muito importante para o desenvolvimento de minha
pesquisa de mestrado junto ao PROFMAT (Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional) do CEFET-MG.
No texto da dissertação e demais trabalhos você não será identificado.
Muito obrigado!
Pesquisador: Paulo Henrique

QUESTIONÁRIO

NOME: _____
SÉRIE ATUAL: _____

1) Você concluiu o ensino fundamental em uma escola:

pública privada federal

2) Você já estudou função?

sim não

em caso afirmativo, responda os itens abaixo:

3) Em que série?

4) Escreva com as suas palavras o que é função.

5) Quais tipos de função você conhece?

6) Dê exemplos de funções citadas no item anterior e esboce os seus gráficos.

7) Você conhece alguma situação do cotidiano que seja necessário conhecer a ~~sua~~ variação uma função?

sim

não

se conhece, dê exemplos.

Obrigado por sua atenção!

APÊNDICE 8 - Termo de assentimento



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa com objetivo de traçar o perfil dos estudantes matriculados na 1ª série do ensino médio, do COLÉGIO HG6, MONTES CLAROS-MG a fim de buscar estratégias para a melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática na Instituição e na educação matemática como um todo. Tal pesquisa está sob a responsabilidade dos professores do Departamento de Matemática do CEFET-MG, pertencentes ao corpo docente do PROFMAT. Solicitamos sua colaboração para responder às perguntas, como também sua autorização para apresentar os dados dessa pesquisa em eventos da área de Ensino e Educação Matemática, além de publicá-los em revistas científicas. Salientamos que para utilização dos dados disponibilizados com o questionário, seu nome será mantido em sigilo absoluto. Assim, considerando que fui informado(a) dos objetivos e da relevância do estudo proposto, de como será minha participação, dos procedimentos decorrentes deste estudo, declaro o meu consentimento em participar da pesquisa, como também concordo que os dados obtidos na investigação sejam utilizados para fins científicos (divulgação em eventos e publicações).

Assinatura do responsável legal

APÊNDICE 9 - Termo de consentimento



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



TERMO DE CONSENTIMENTO

O discente, sob sua responsabilidade, está sendo convidado a participar de uma pesquisa com objetivo de traçar o perfil dos estudantes matriculados na 1ª série do ensino médio, do COLÉGIO HG6, MONTES CLAROS-MG a fim de buscar estratégias para a melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática na Instituição e na educação matemática como um todo. Para a coleta desses dados, estamos utilizando o instrumento “questionário” que segue anexado e este Termo. A referida pesquisa está sob a responsabilidade dos professores do Departamento de Matemática do CEFET-MG, pertencentes ao corpo docente do PROFMAT e está sendo realizada nas dependências do COLÉGIO HG6, no contra-turno escolar. Solicitamos sua colaboração para autorizar que o discente sob sua responsabilidade possa responder as perguntas, como também sua autorização para que os dados dessa pesquisa possam ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas. A participação nessa pesquisa é voluntária e a desistência poderá ocorrer em qualquer momento. Salientamos ainda que os dados pessoais são confidenciais e, na publicação dos resultados, as informações pessoais não serão divulgadas.

- Autorizo a participação na pesquisa
- Não autorizo a participação na pesquisa

Assinatura