UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS TADEU DOS SANTOS PEREIRA DE BARROS

UM ROTEIRO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

BELÉM
2020

MARCOS TADEU DOS SANTOS PEREIRA DE BARROS

UM ROTEIRO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará (ICEN) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes.

BELÉM

2020

MARCOS TADEU DOS SANTOS PEREIRA DE BARROS

UM ROTEIRO DIDÁTICO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará (ICEN) como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes.

Data de Aprovação: 16/ 10/ 2020
Conceito: APROVADO

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Francisco Paulo Marques Lopes
Orientador - UFPA

Prof. Dr. Rúbia Gonçalves Nascimento (Membro Interno)
Examinadora Interna - UFPA

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Examinador Externo - UEPA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237r Santos Pereira de Barros, Marcos Tadeu dos.
Um Roteiro Didático para Resolução de Problemas de Análise Combinatória / Marcos Tadeu dos Santos Pereira de Barros. — 2020.
CXXXIV, 134 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2020.

1. Análise Combinatória. 2. Ensino. 3. Formação de professores. 4. Resolução de problemas. 5. Método. I. Título.

CDD 371.102

Dedico este trabalho a Jeová Deus, a minha querida Mãe, Benedita, a minha amada esposa, Danielle e, aos meus queridos e amados filhos, Marcos Danillo e Maria Júlia.

AGRADECIMENTOS

O desejo de fazer de fato um mestrado em matemática começou quase no final do ano de 2017 ao fazer o ENA – Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT. Como sempre na minha vida, Jeová, O Deus Todo Poderoso, me abençoou na realização da prova e a Ele devo tudo e sou eternamente grato. Afinal, veio dEle todo o propósito, pois não creio que as coisas acontecem sem propósitos, a força, paciência, sabedoria e esperança pra conseguir chegar até o final de mais uma etapa da minha vida. Em uma caminhada com inúmeras dificuldades que somente Ele e eu sabemos...

Agradeço a minha amada mãe, Maria Benedita dos Santos Pereira de Barros, por todo o amor, carinho, apoio, conselhos e porque não os puxões de orelha que me deu desde o meu 1º dia de vida até os dias atuais.

Meus sinceros agradecimentos a minha amada esposa, Danielle Almeida Brito, por sempre estar ao meu lado durante todos esses dias. Ela que me ouvia, aconselhava e cobrava nos meus estudos e trabalhos.

Aos meus filhos, Marcos Danillo Almeida Pereira de Barros e Maria Júlia Almeida Pereira de Barros, por serem a minha alegria, a minha satisfação, o meu impulso e a verdadeira motivação pra não desistir. Meus filhos são os verdadeiros presentes de Jeová Deus pra mim e a presença viva dEle na minha vida. São as luzes da minha abençoada família.

Aos meus amados irmãos, Paulo Cesar dos Santos Pereira de Barros, onde as suas visitas a minha casa sempre foram e continuam sendo muito especiais. E, Marinélio Menezes Pereira de Barros Junior, um irmão que sinto que tem mais orgulho de mim do que eu de mim mesmo.

A minha mãe-tia Deuzalina Coelho dos Santos meus agradecimentos por sempre se preocupar com meus estudos desde criancinha até agora.

Sou grato a todos os meus familiares, pois, sei que torceram, e continuam a torcer, pra que tudo de bom ocorra na minha vida e na vida da minha família.

Ao meu orientador Professor Dr. Paulo Francisco Marques Lopes por me mostrar que caminho seguir, estar sempre disponível pra me ajudar e ter sido paciente e confiado em mim mesmo quando parecia que nada estava sendo feito.

Aos todos os meus professores e coordenadores do PROFMAT por adicionarem ensinamentos dos mais variados tipos na minha vida e que me fizeram melhor ao final dessa etapa.

Para todos os meus colegas de curso que durante esses dois anos, direta ou indiretamente participaram da minha formação, o meu eterno agradecimento.

Para todos os idealizadores do PROFMAT e seus atuais coordenadores nacionais e regionais. Programa esse que tornou possível a possibilidade de fazer um curso de mestrado dentro da minha disponibilidade de trabalho como professor.

Ao Governo Federal e a UFPA por me possibilitar, com esta formação, oportunizar a expansão de meus horizontes.

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações criaram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo o que a elas se propõe."

Jean Piaget

(1896 – 1980)

RESUMO

Os problemas de contagem surgiram da necessidade de contar o total de possibilidades para os resultados de determinados jogos e a Análise Combinatória surge como consequência dessa necessidade. Esta trás e estuda os métodos aplicados que permitem a contagem dos elementos de um determinado conjunto, assim como o número de agrupamentos que podem ser formados, sob determinadas condições. Como a Contagem é um objeto de estudo da Matemática e compõe uma das unidades temáticas da Educação Básica estabelecida na BNCC, não é raro encontrar artigos, livros e periódico que tratam do assunto dando ênfase às dificuldades que professores e alunos possuem na resolução dos problemas e no processo de ensino-aprendizagem. Em geral, os problemas de Análise Combinatória requerem grande capacidade analítica e, por conta disso, sua resolução pode apresentar várias abordagens o que, em certa medida, dificulta a elaboração de um método de resolução capaz de atacar problemas que requerem raciocínios diferentes, de forma sistematizada. É justamente nesse contexto, que este trabalho foi elaborado, visando responder ao seguinte questionamento: É possível construir um roteiro didático para resolver problemas de Análise Combinatória que possa contribuir com o ensino desta disciplina? Como será demonstrado em nosso trabalho, a resposta para esta pergunta é positiva, pois, além de elaborarmos e estruturarmos um roteiro que sistematiza as resoluções, fizemos sua aplicação em um grande número de problemas de contagem de variados exames de processos seletivos existentes no País, assim como, do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Esperamos que esta ferramenta possa contribuir para melhoramento do ensino dessa disciplina.

Palavras–chave: Análise combinatória. Ensino de Análise Combinatória. Resolução de problemas de contagem. Método de resolução de problemas.

ABSTRACT

The counting problems arose from the need to count the total possibilities for the results of certain games and the combinatorial analysis arose as a consequence of this need and of the applied methods that allow counting, of a certain set, the number of elements when grouped under certain conditions. As counting is an object of study of mathematics throughout basic education and the resolution of counting problems presents several difficulties, it is not uncommon to find articles, books and periodicals that deal with the difficulties that teachers and students have with the subject and especially with the resolution of the problems and it is precisely in this context, that this work comes as a way to contribute to answer the following problem: is there a method to solve Combinatorial Analysis problems? For this, a method is presented and structured to solve these types of problems and the method is applied to dozens of counting problems of the most varied exams, entrance exams problems, ENEM, military schools, olympics, public competition, etc. These problems with various levels of difficulties and addressed in different situations and contexts. Everything to be another tool to improve the teaching-learning process.

Keywords: Combinatorial Analysis. Combinatorial Analysis Teaching. Resolution of counting problems. Problem solving method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEI	Colégio de Ensino Icoaraciense
EE	Escola Estadual
ENA	Exame Nacional de Acesso
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ENQ	Exame Nacional de Qualificação
FCC	Fundação Carlos Chagas
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IME	Instituto Militar de Engenharia
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional Em Matemática
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SAE	Sistema de Apoio ao Ensino
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No componente Matemática da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), além da mudança das termologias, os eixos passam a serem chamados de Unidades Temáticas, os conteúdos agora são Objetos de Conhecimentos e o que antes chamávamos de objetivos agora são as Habilidades. Temos também uma mudança de foco, pois se antes tínhamos uma preocupação para o mercado de trabalho, agora temos o desenvolvimento de competências além de que, o eixo Tratamento de Informação agora é a unidade temática Probabilidade e Estatística e é justamente nessa unidade que está inserida a Combinatória.

A BNCC não definiu uma forma ou método que será usado para desenvolver as habilidades, e de fato é melhor assim, pois não limitaria professores para criação de seus próprios métodos e didáticas a serem aplicados em suas salas de aula. A resolução de problemas tornou-se uma macro competência, sem deixar de citar que a base enfatiza também a investigação, o desenvolvimento de projetos e a modelagem que com certeza, exigirá dos professores mudanças principalmente na forma de ensinar. Como o letramento da matemática se dá pelo uso e na resolução de situações-problemas então, teremos que investir em atividades que irão desenvolver o raciocínio, a comunicação, a representação e a argumentação e para isso a resolução de problemas se mostra competente.

Em se tratando da Análise Combinatória, a BNCC diz que os problemas de contagem, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.

É justamente na resolução desses problemas que pude verificar que, a maioria dos estudantes das escolas, no qual trabalho ou mesmo já trabalhei ao longo desses mais de 25 anos como professor de matemática da educação básica, apresentam uma enorme dificuldade. Fato esse que pudemos constatar em nossas inúmeras conversas com vários colegas professores de matemática e nos comentários de nossos alunos. Além disso, os processos seletivos de entrada de alunos nas Instituições de Ensino Superior divulgam, em quase todos os anos, que as questões de combinatória quase sempre estão entre as mais difíceis das provas de Matemática, ou seja, são as questões com maior índice de erros por parte dos alunos. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um exemplo em que combinatória, quase todo ano, apresenta questões que estão no topo das dificuldades. Segundo alguns professores que ministram essa disciplina e são ou foram meus colegas de trabalho ao longo da minha carreira no magistério, essa falta de habilidade no tratamento das questões se dá, também, pelas dificuldades apresentadas pelos próprios professores. Ao perguntar como abordavam o conteúdo da disciplina em suas aulas, percebi que, na maioria das vezes, os professores tratam os problemas de combinatória como uma simples aplicação de fórmulas ao selecionarem questões que não valorizam o pensar matemático e, com isso, os alunos não desenvolvem os raciocínios lógicos de contagem elementares que possibilitará a resolução dos problemas.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um roteiro didático para resolução de problemas de Análise Combinatória, pois se trata de um assunto com uma variedade muito grande de questões que exigem interpretação, fórmulas, termos não padronizados e isso causa uma grande dificuldade para o professor ao ensinar e consequentemente para o aluno ao tentar aprender.

Adotamos como referencial teórico principal para esse trabalho o livro A arte de resolver problemas (*How to Solve It*, POLYA, 1995) de George Polya, Didática da Resolução de problemas de matemática de Luiz Roberto Dante (1998), Análise combinatória e Probabilidade de Augusto Cesar de Oliveira Morgado (2016) e Matemática do Ensino Médio Vol.2 de LIMA, Elon Lages, Eduardo Wagner, Paulo Cezar Carvalho e Augusto Cezar de Oliveira Morgado (2016). Além desses, na página 58 deste trabalho analisamos vários outros livros didáticos voltados para o ensino médio bem como várias dissertações, algumas inclusive do próprio ProfMat que tratam sobre o ensino de combinatória.

Baseados nas análises bibliográficas dos livros já referenciados, na leitura de artigos especializados, nos estudos de livros didáticos e em outros trabalhos que tratam desse tema, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos:

Inicialmente no capítulo 2, apresentamos as justificativas para a relevância do trabalho. Desde as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e da BNCC como esse objeto de estudo, a importância para o desenvolvimento do raciocínio logico matemático da criança e as dificuldades apresentada por alunos e professores no processo ensino-aprendizagem.

No capítulo 3, apresentamos um recorte histórico da Análise Combinatória mostrando os possíveis problemas que deram origem ao surgimento do assunto, bem como seus principais autores e suas contribuições no processo de formalização do conteúdo. Citamos também a importância da análise combinatória para a matemática e para as outras áreas de conhecimento e as problemáticas do objeto no processo de ensino-aprendizagem

No capítulo 4, apresentamos o que vem a ser a Análise Combinatória e seus principais conceitos e técnicas para resolução de problemas.

No capítulo 5, mostramos que a resolução de problemas é uma tendência no ensino da matemática e a qual usamos como peça fundamental para este trabalho.

No capítulo 6, fizemos uma breve análise em sete livros didáticos, em sua grande maioria do ensino médio, sobre como o assunto análise combinatória é apresentado, abordado e como são feitas as resoluções dos problemas.

No capítulo 7, apresentamos o roteiro para resolução de problemas de análise combinatória e aplicamos o roteiro na resolução de 35 questões, problemas estes que foram selecionados de vários exames nacionais (ENEM, OBMEP, OBM, ENA, ENQ) e processos seletivos (Concurso Público, Vestibulares, ITA, IME), com níveis de dificuldades variados e questões aplicadas em diversas situações e contextos, sendo que todos esses problemas são resolvidos passo a passo através da aplicação do roteiro.

Visamos com isso, contribuir para minimizar essas dificuldades tanto para os professores quanto para os alunos ou mesmo os admiradores da matemática e em específico da análise combinatória, afinal segundo Willian Douglas (2010, p.37) é possível estudar sozinho e alcançar bons resultados, é possível estabelecer técnicas as quais se adequem as necessidades de cada um. Por isso, apresentamos e estruturamos um roteiro para padronizar as etapas a serem realizadas na resolução dos mais variados problemas de análise combinatória.

2 JUSTIFICATIVA

“O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BNCC, 2018) e quando se fala de Educação Básica estamos falando da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), a Educação Básica se torna obrigatória a partir dos quatro anos de idade e é justamente na educação infantil que irão se trabalhar diversos aspectos dos pequenos, entre eles o cognitivo, físico, motor, psicológico, cultural e social, o processo se dará através de atividades lúdicas que favorecem a imaginação e a criatividade. Durante o ensino fundamental, o aluno será preparado para dominar a leitura, a escrita e o cálculo bem como entender o ambiente social que ele está inserido e no ensino médio veremos a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a pratica, no ensino de cada disciplina.

Observando os objetivos e as finalidades que um aluno do ensino médio deve adquirir, a análise combinatória e os seus problemas vêm, por meio do raciocínio combinatório, contribuir pra levantar um pensar em possibilidades e que sejam feitas combinações que vão ajudar na compreensão de habilidades matemáticas e também de outras áreas (PESSOA; BORBA, 2008, p. 72) além de desenvolver o raciocínio lógico que compõem uma competência específica da matemática para o ensino fundamental conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) e por esse motivo, temos a inclusão do raciocínio combinatório nos documentos oficiais educacionais do Brasil como sugestão desde as séries iniciais do ensino fundamental conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Em um de seus conteúdos conceituais e procedimentais para o 2º ciclo, o PCN coloca: “Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais” (PCN, 1997, p.62) e resolver situações-problemas que envolvam contagem faz parte de um de seus critérios para avaliação.

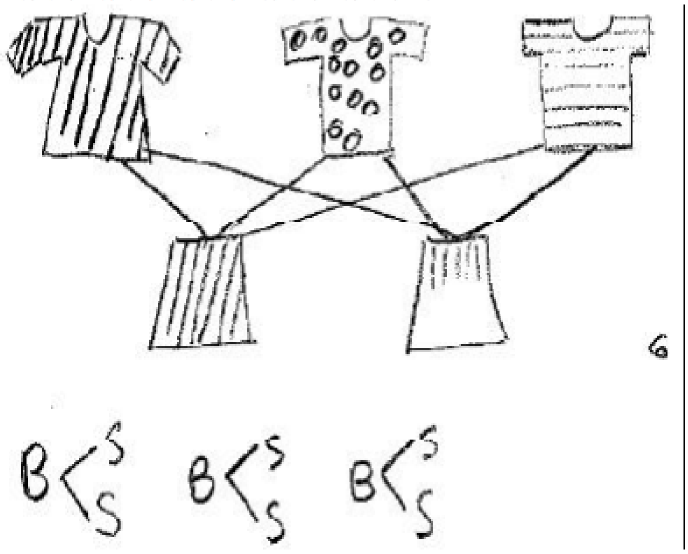
Na figura 1 abaixo se tem, como exemplo, um modelo de contexto proposto para a multiplicação:

Figura 1 – Raciocínio combinatório.

— Tendo duas saias — uma preta (P) e uma branca (B) — e três blusas — uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Analisando-se esses problemas, vê-se que a resposta à questão formulada depende das combinações possíveis; no segundo, por exemplo, os alunos podem obter a resposta, num primeiro momento, fazendo desenhos, diagramas de árvore, até esgotar as possibilidades:

(P, R), (P, A), (P, C), (B, R), (B, A), (B, C):



Esse resultado que se traduz pelo número de combinações possíveis entre os termos iniciais evidencia um conceito matemático importante, que é o de produto cartesiano.

Note-se que por essa interpretação não se diferenciam os termos iniciais, sendo compatível a interpretação da operação com sua representação escrita. Combinar saias com blusas é o mesmo que combinar blusas com saias e isso pode ser expresso por 2 x 3 = 3 x 2.

Fonte: PCN Matemática 1º e 2º ciclos, livro 3, 1997, p. 73.

A BNCC quando propõe a unidade temática Probabilidade e Estatística diz que:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo (probabilidade) deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (p.274).

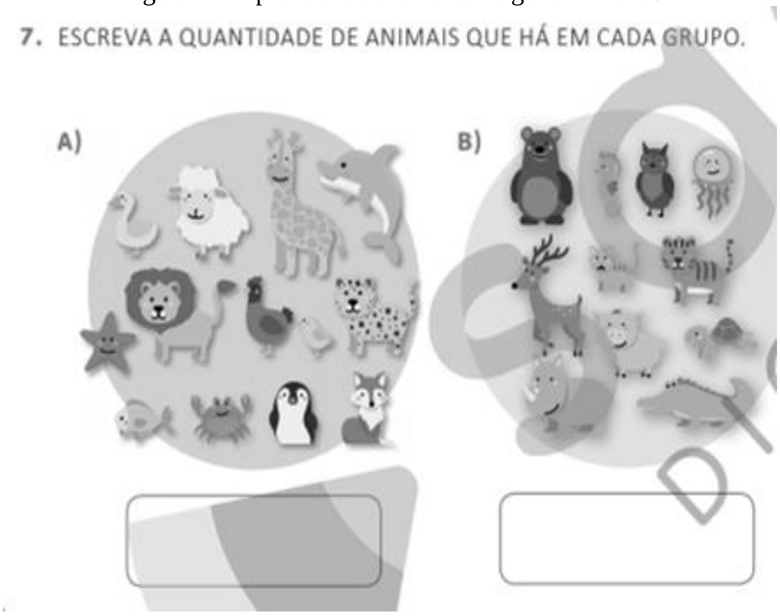
Quando cita a definição de habilidades, a BNCC coloca que:

> (...) a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àquelas cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BNCC, 2018, p.275).

É justamente por isso que podemos verificar a presença de problemas de análise combinatória em livros didáticos ao longo de todas as séries do ensino fundamental e para exemplificar essas abordagens nas series iniciais do ensino fundamental, escolhemos o material do sistema de ensino SAE, pois se trata do material que utilizo nas series finais do ensino fundamental no Colégio CEI onde, leciono do 6º ao 9º ano e por isso possuo o acesso a versão digital. Mostraremos e comentaremos apenas um problema de combinatória apresentado nos livros do 1º ao 4º ano como ilustração.

Na figura 2 abaixo verificamos um problema de contagem no livro do 1º ano do ensino fundamental:

Figura 2 – Aprendendo a fazer contagens – 1º ano.



Fonte: SAE DIGITAL S/A Matemática, 1º ano, Livro 1, Ensino Fundamental, 2020, p. 75.

Nessa questão sobre contagem observamos uma forma de investigação de números cujo objeto de conhecimento é contagem de rotina (BNCC, 2018, p. 278). Como disse Mariana de Gouvêa, professora do 1º ano da EE Brasilio Machado, na capital paulista:

“Quero que as crianças aprendam a investigar os números e as relações entre eles e não simplesmente que resolvam contas de forma mecânica e decorem a tabuada sem compreendê-la” e isso vai de acordo com o letramento matemático descrito na BNCC.

Na figura 3, temos o início do capítulo 3 de um livro do 2º ano do ensino fundamental. O capítulo inicia com uma ideia de agrupamento:

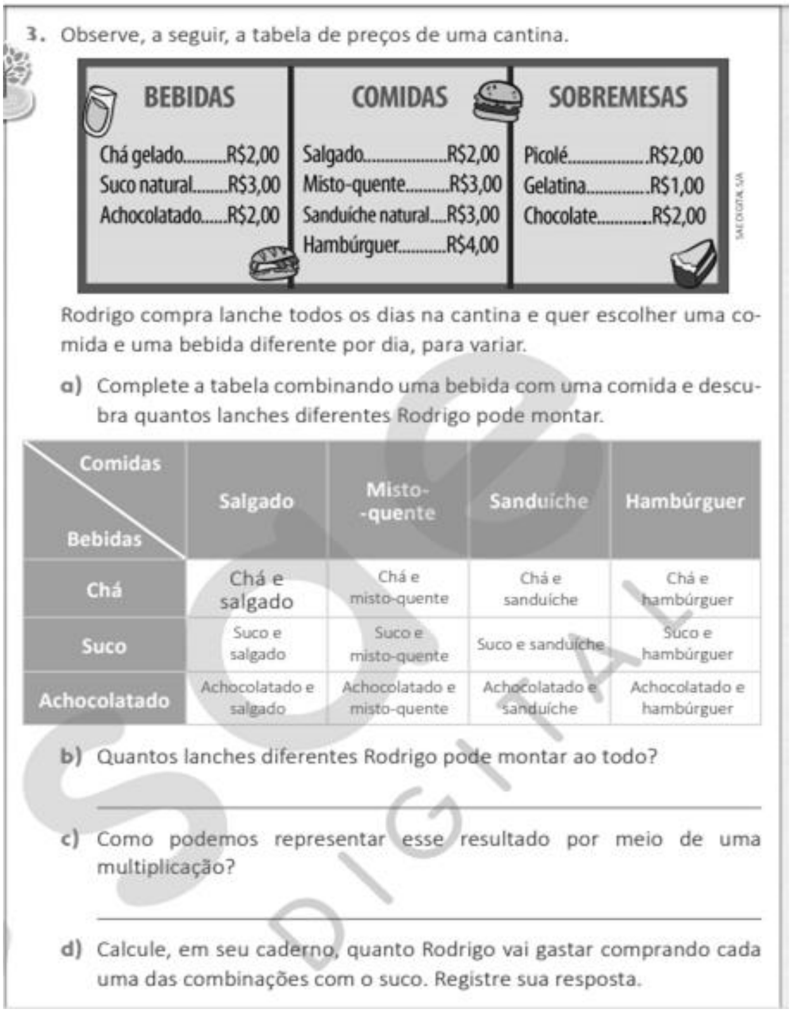
Figura 3 – Agrupamentos – 2º ano.

Fonte: SAE DIGITAL S/A Matemática, 2º ano, Livro 1, Ensino Fundamental, 2020, p. 94.

Nesse capítulo 3 do livro do 2º ano, o aluno vai ter a noção de Agrupamento ao perceber que podemos utilizar vários critérios para compor um grupo. Por exemplo: podemos agrupar por cor, por tipo de objetos, por tamanho, por quantidades etc.

Na figura 4 seguinte, vamos observar dois problemas de contagens retiradas do livro do 3º ano do ensino fundamental. Nele, podemos verificar que nessas questões temos a combinação como ideia associada à multiplicação (princípio multiplicativo) bem como a construção, por parte dos alunos, de todas as combinações possíveis para montagem do lanche (árvores de possibilidades).

Figura 4 – Combinações – 3º ano.



3. Observe, a seguir, a tabela de preços de uma cantina.

BEBIDAS	COMIDAS	SOBREMESAS
Chá gelado..........R$2,00	Salgado....................R$2,00	Picolé...................R$2,00
Suco natural........R$3,00	Misto-quente..........R$3,00	Gelatina..............R$1,00
Achocolatado......R$2,00	Sanduíche natural....R$3,00	Chocolate............R$2,00
	Hambúrguer...........R$4,00	

SAE DIGITAL S/A

Rodrigo compra lanche todos os dias na cantina e quer escolher uma comida e uma bebida diferente por dia, para variar.

a) Complete a tabela combinando uma bebida com uma comida e descubra quantos lanches diferentes Rodrigo pode montar.

Comidas / Bebidas	Salgado	Misto-quente	Sanduíche	Hambúrguer
Chá	Chá e salgado	Chá e misto-quente	Chá e sanduíche	Chá e hambúrguer
Suco	Suco e salgado	Suco e misto-quente	Suco e sanduíche	Suco e hambúrguer
Achocolatado	Achocolatado e salgado	Achocolatado e misto-quente	Achocolatado e sanduíche	Achocolatado e hambúrguer

b) Quantos lanches diferentes Rodrigo pode montar ao todo?

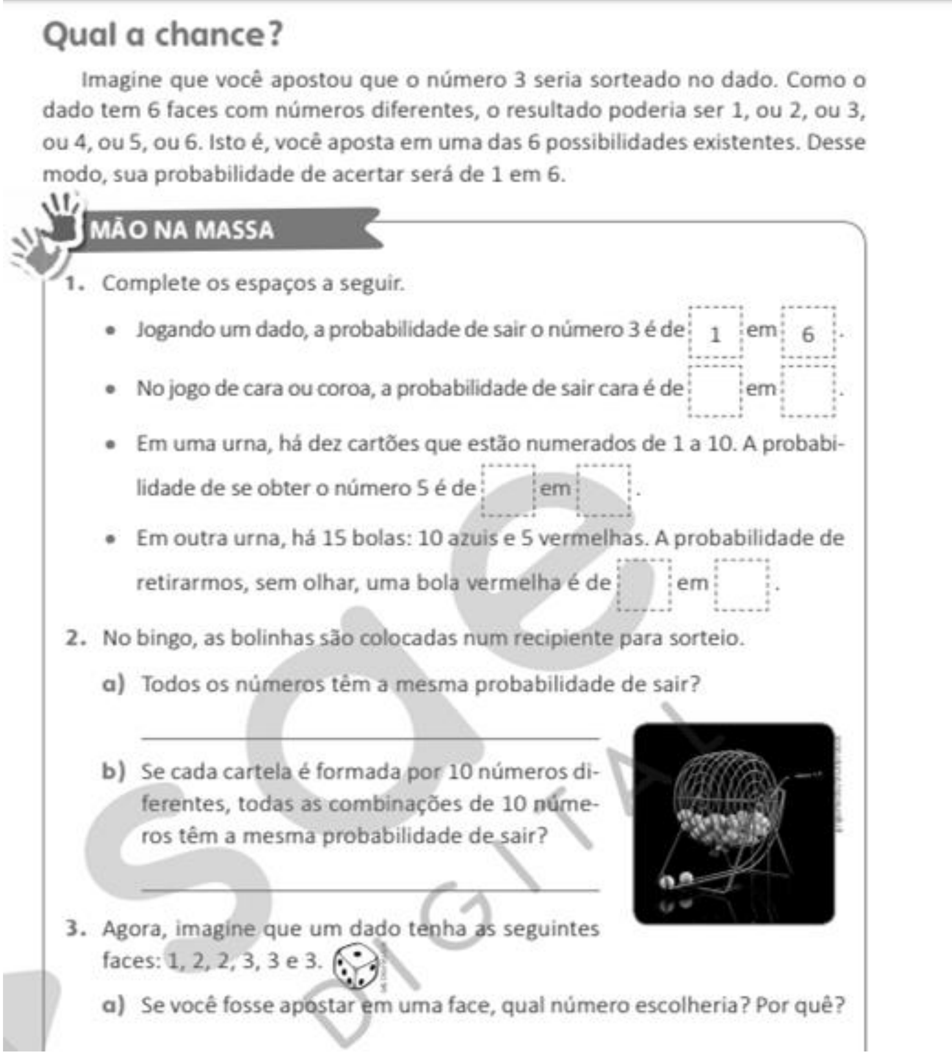
c) Como podemos representar esse resultado por meio de uma multiplicação?

d) Calcule, em seu caderno, quanto Rodrigo vai gastar comprando cada uma das combinações com o suco. Registre sua resposta.

Fonte: SAE DIGITAL S/A Matemática, 3º ano, Livro 3, Ensino Fundamental, 2020, p. 100.

A figura 5 foi tirada do livro do 4º ano do ensino fundamental. Nela, verificamos que o aluno no 4º ano começa a ter o contato com as primeiras ideias de probabilidade, objeto esse que historicamente tem relação com o surgimento da análise combinatória.

Figura 5 – Probabilidade - 4º ano.



Qual a chance?

Imagine que você apostou que o número 3 seria sorteado no dado. Como o dado tem 6 faces com números diferentes, o resultado poderia ser 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6. Isto é, você aposta em uma das 6 possibilidades existentes. Desse modo, sua probabilidade de acertar será de 1 em 6.

MÃO NA MASSA

1. Complete os espaços a seguir.
   - Jogando um dado, a probabilidade de sair o número 3 é de 1 em 6.
   - No jogo de cara ou coroa, a probabilidade de sair cara é de ___ em ___.
   - Em uma urna, há dez cartões que estão numerados de 1 a 10. A probabilidade de se obter o número 5 é de ___ em ___.
   - Em outra urna, há 15 bolas: 10 azuis e 5 vermelhas. A probabilidade de retirarmos, sem olhar, uma bola vermelha é de ___ em ___.
2. No bingo, as bolinhas são colocadas num recipiente para sorteio.
   a) Todos os números têm a mesma probabilidade de sair?

   b) Se cada cartela é formada por 10 números diferentes, todas as combinações de 10 números têm a mesma probabilidade de sair?

3. Agora, imagine que um dado tenha as seguintes faces: 1, 2, 2, 3, 3 e 3.
   a) Se você fosse apostar em uma face, qual número escolheria? Por quê?

Fonte: SAE DIGITAL S/A Matemática, 4º ano, Livro 1, Ensino Fundamental, 2020, p. 112.

A BNCC representa um documento normativo que vai definir as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver com base em conhecimentos, competências e habilidades ao longo das etapas e modalidades da educação básica. No que se refere ao ensino médio, temos que no capítulo 5.2.1 que trata da Matemática e suas tecnologias no ensino médio: competências específicas e habilidades, a base coloca como competência específica 3 o seguinte:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, 2018, p.527).

E uma de suas habilidades é fazer o aluno ser capaz de resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (BNCC, 2018, p.529).

Já os PCNs de matemática do ensino médio, indicam como competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática como forma de representação e comunicação o ato de: Ler e interpretar textos de Matemática; Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

E como investigação e compreensão o ato de: Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc); Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas; Interpretar e criticar resultados numa situação concreta; Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

E como forma de Contextualização sociocultural a capacidade de: Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento; Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade e diante disso o ensino da análise combinatória deve também está de acordo com essas diretrizes.

Os PCNs de matemática para o ensino médio fazem também a indicação da análise combinatória como um conhecimento matemática importante no processo ensino-aprendizagem conforme o texto seguinte:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (PCN, 1997, p. 44,45).

Diante disso, durante o processo ensino-aprendizagem no que diz respeito ao objeto análise combinatória tem surgido vários desafios que persistem até hoje. Como por exemplo, as questões de Análise combinatória quase sempre serem consideradas as mais difíceis em concursos e exames em grande escala como, por exemplo, o ENEM[1].

Não é raro encontrar questões de análise combinatória na lista entre as mais difíceis na prova de matemática do ENEM.

As questões com menor número de acertos exigiram capacidade de abstração do vestibulando. Uma das questões envolveu conhecimento em geometria plana (partes do círculo e área do retângulo), já as outras duas demandaram conhecimentos em análise combinatória[2].

Questões 143, 160, e 140 do caderno AZUL do Enem 2017[3]:

> "Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados. No setor de produção da empresa que fabrica este brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo de brinquedo. Com base nas informações dadas, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?" (Questão 143, prova caderno azul, 2017).

A pergunta acima é a 143ª questão da prova de cor azul do Enem 2017, e exige cálculos matemáticos relativamente simples, mas um raciocínio bastante complexo. Sua resolução consistia, em resumo, em analisar as probabilidades de combinação de cores, mas foi acertada por só 11% dos alunos; percentual baixo em meio a um total de 5 milhões de estudantes que prestaram o exame.[4]

A prova de Matemática seguiu o histórico das outras edições, mas os cálculos exigiram mais dos participantes, além da interpretação dos enunciados. Os temas mais difíceis

---

[1]ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

[2] Ambas as questões citadas de análise combinatória estão resolvidas no capítulo 8.

[3] Fonte: As questões que tiveram mais acertos e mais erros no Enem 2017. www.descomplica.com.br, 2018. Disponível em: <https://descomplica.com.br/tudo-sobre-enem/novidades/questoes-que-tiveram-mais-acertos-e-mais-erros-no-enem-2017/> Acesso em: 26 Jul. 2020

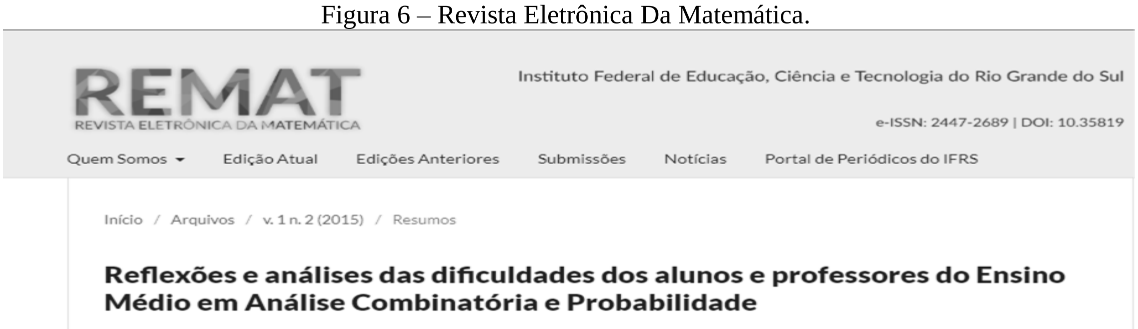
[4] Fonte: IDOETA, P. Enem: o que as questões de matemática 'mais difíceis' dizem sobre a educação no Brasil. www.bbc.com, 2018. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/brasil-44888935>. Acesso em: 26 Jul. 2020

de Matemática neste Enem foram: Probabilidade, Estatística, Análise combinatória, Logaritmos e Função Trigonométrica[5].

Por isso, é fácil encontrar relatos das dificuldades tanto de professores quanto de alunos no entendimento desse assunto bem como inúmeros artigos, livros, Trabalho de Conclusão de Curso, dissertações etc. que tratam dessa problemática. Esse tema já foi e ainda é debatido em inúmeros encontros, congresso, simpósios.

Na figura 6, temos um artigo publicado na Revista Eletrônica de Matemática que fala a respeito das dificuldades de alunos e professores com o ensino da análise combinatória:

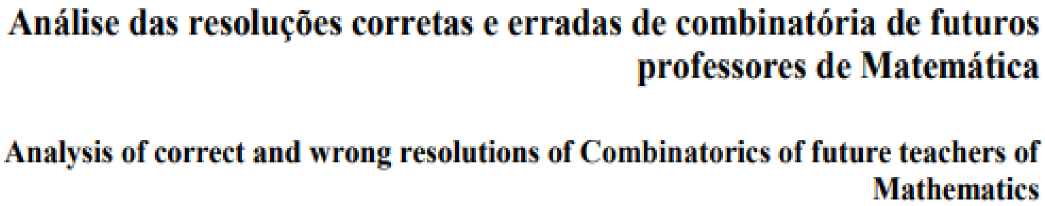
Figura 6 – Revista Eletrônica Da Matemática.



Fonte: CASTILHOS, 2016.

Na figura 7 abaixo temos o titulo de um artigo publicado na revista da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo que mostra algumas das problemáticas dos professores de matemática nas resoluções de combinatória:

Figura 7 – ARTIGO PUC – SP.



Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática

Analysis of correct and wrong resolutions of Combinatorics of future teachers of Mathematics

Fonte: SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013.

Tudo como uma tentativa de encontrar a “fórmula” ou um método que facilitaria para o professor lecionar o assunto, bem como para o aluno aprender a análise combinatória. Os vários relatos de alunos que são obtidos em questionários de trabalhos acadêmicos dos alunos

[5] Fonte: CAMPOS, L. Enem 2019: provas do segundo dia exigiram mais dos participantes. www.vestibular.brasilescola.uol.com.br, 2019. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/enem-2019-provas-segundo-dia-exigiram-mais-dos-participantes/346655.html> Acesso em: 26 Jul. 2020.

de licenciatura em matemática e as pesquisas individuais feitas por professores em sala de aula perpassam pela dificuldade em interpretar um enunciado, pelo ensino com o uso excessivo e muitas vezes único de fórmula para resolver problemas (CASTILHOS, 2016).

Abaixo, a figura 8 mostra que esse assunto já foi debatido no Encontro Nacional de Educação Matemática:

Figura 8 – Encontro Nacional de Educação Matemática.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades
São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016

COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA

ENEM
Encontro Nacional de Educação Matemátic

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANALISE COMBINATÓRIA: O DESEMPENHO DE ALUNOS DE BELÉM DO PARÁ.

Fonte: CONCEIÇÃO; PEREIRA; SANTOS, 2016.

Nas figuras 9 e 10 seguintes, vemos que o ensino da análise combinatória e seus desafios, é uma questão apresentadas em outras dissertações.

Figura 3 – Dissertação 1.

UFLA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

ELISÂNGELA RIBEIRO SILVA COSTA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Fonte: COSTA, 2014.

Figura 4 – Dissertação 2.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Fonte: GONÇALVES, 2014.

Portanto, ao verificar todos esses aspectos apresentados, pensamos em apresentar um roteiro didático que servirá para a resolução de questões de análise combinatória. Sabendo que não temos a pretensão que o roteiro apresentado satisfaça todos os problemas, mas que servirá para contribuir como um primeiro pensar rumo à solução de um problema.

3 UMA BREVE HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1 O Uso Da História Da Matemática

As dificuldades encontradas pelos alunos ao longo do meu exercício como professor no ensino da análise combinatória motivaram-me a estudar vários aspectos da história da combinatória. Como o que levou ao seu surgimento e as quais eram as suas motivações, os principais nomes envolvidos na construção desse saber e suas aplicações no cotidiano. Acredito que conhecer um pouco da história do assunto vem contribuir com o desenvolvimento do tema. Afinal, a história da matemática funciona como um instrumento de investigação não só das origens, mas também dos métodos desenvolvidos com o passar dos tempos e isso para o nosso trabalho é muito importante.

Diversos assuntos de matemática que vemos estudar hoje, como por exemplo, a própria Análise Combinatória, já sofreu e ainda sofre mudanças desde sociedades mais remotas até as mais atuais. Observar essas mudanças históricas possibilita entender não só a origem das ideias e teorias como também irá nos fazer "(...) observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência, bem como as circunstâncias que as desenvolveram." (OLIVEIRAS, 2014, p.459).

O estudo do caráter histórico da matemática possibilita também associar as ideias ao cotidiano do aluno e isso vai em conformidade ao que disse Ubiratan (1997, p.97) "Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas" e ao conhecermos a história do objeto matemático verificamos que quase todo ele se deu na tentativa do homem conhecer o mundo ao qual pertence.

Afinal, "a história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto de sua época." (D'AMBRÓSIO, 2012, p.27).

Os próprios PCNs ressaltam a importância disso quando colocar que "(...) A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática" (BRASIL, 1997, p.34).

Não podemos deixar de citar o professor nesse processo do conhecimento histórico da matemática do assunto que ele propõe, pois não basta para o professor compreender os aspectos conceituais, as regras e os processos relativos ao conteúdo, mas também é de fundamental importância para a sua prática docente que ele tenha uma compreensão substantiva e epistemológica dos mesmos, que pode ser favorecida pelos estudos da história da matemática, conforme indicam as pesquisas na área (BURSAL, 2010; FURINGUETTI, 2007).

No caso da prática em sala de aula pelo professor, Lopes & Ferreira (2013), apontam que a história da matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, que é possível mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos e que o professor pode construir um olhar crítico sobre o assunto em pauta.

Para Chaquiam (2016, p. 17) iniciar uma aula apresentando fatos do passado pode ser uma alternativa altamente produtiva para conduzir um determinado assunto matemático, uma vez que o aluno pode notar a matemática como uma construção humana que surgiu a partir da necessidade de solucionar problemas.

Segundo Baroni (1999, p. 32), a história do conteúdo não será apenas um elemento motivador para o ensino, pois engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional e essa interligação se fortalece quando o professor de matemática tem o domínio da história do conteúdo que ele irá trabalhar em sua sala de aula.

É claro que tudo deve se passar por um planejamento, afinal alguns professores podem justificar o não uso do contexto histórico com o algo que irá comprometer o desenvolvimento da sua aula bem como comprometer a programação dos conteúdos visto que possuem um tempo para se concluir determinados assuntos e a respeito disso D'Ambrósio (1996, p.13) diz:

> Esses professores estarão se perguntando: mas como lidar com isso na minha prática como professor de Matemática? E ele responde: sei que muitos estão pensando que não vai sobrar tempo para darmos conteúdo de Matemática se gastarmos tempo falando sobre Matemática. Pois eu digo que a solução é cortar conteúdos, retirando coisas chatas, obsoletas inúteis (...) procure, para cada tema do que sobrou nos programas atuais, uma justificativa autêntica de porque o tal tema deve ser ensinado e exigido a todos. E vocês chegarão à conclusão de que muito do que se ensina está lá por valor histórico. Por que então não assumirmos e darmos a Matemática que integra currículos sua verdadeira cara, fazendo um estudo crítico no seu contexto histórico? Sem dúvida pode ser mais atrativo.

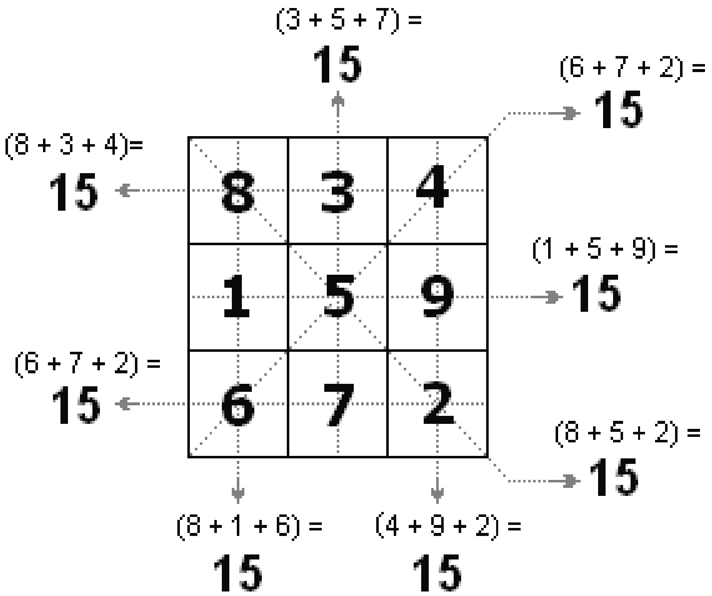
Os PCNs mostram para a prática do professor de matemática a importância do uso da história quando diz que "ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático".

3.2 Análise Combinatória: Como Tudo Começou?

A resposta para essa pergunta não é algo fácil de obter, pois, encontrar o momento exato de quando surgiram os primeiros problemas de contagem não é uma tarefa das mais simples e talvez nem seja possível, porém segundo Weleitner, historiador alemão da matemática, a formação dos quadrados mágicos seriam os primeiros problemas relacionados com a análise combinatória.

Os quadrados mágicos são arranjos de números naturais $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ agrupados em um quadrado formado por m linhas e m colunas onde a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal seja sempre a mesma. Essa soma é denominada de constante mágica ou número mágico. Na figura 9, abaixo temos um exemplo de um quadrado mágico de constante mágica igual a 15:

Figura 11 – Quadrado mágico 3 x 3.

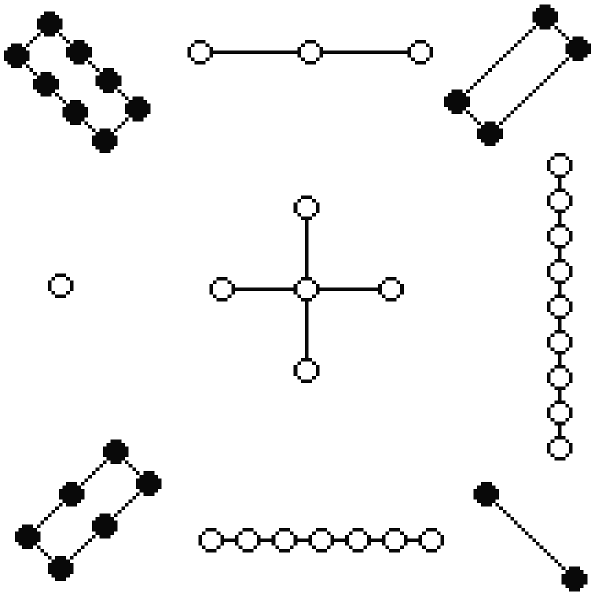


Fonte: SILVA, 2013.

No livro chinês *I-King*ou *livro das permutações* que se trata de um dos mais antigos livros da matemática chinesa, é possível encontrar um quadrado mágico chamado *Lo – Shu* que segundo Joseph Needhan (Cambridge, 1959) data do século I d.C, mas que poderia ser até mais antigo.

Na figura 12 seguinte, temos o que seria um quadrado mágico:

Figura 12 – Lo – Shu.



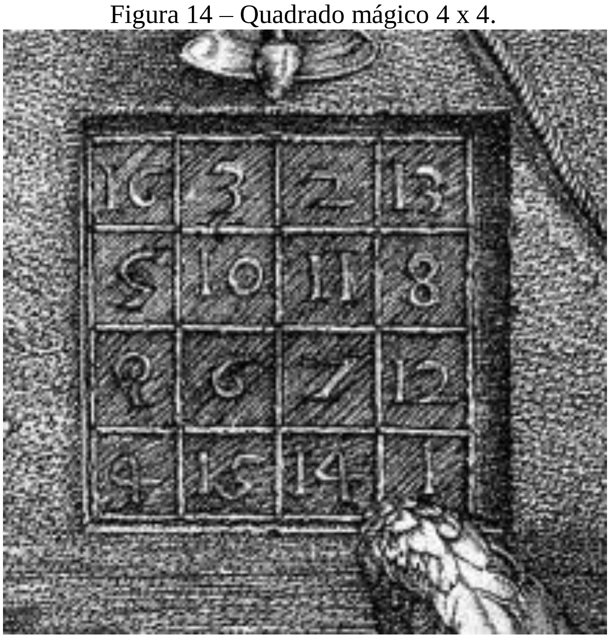
Fonte: SILVA, 2013.

Na obra “A MELANCOLIA” do artista renascentista alemão Albrecht Dürer (1471-1528) é possível ver a presença de um quadrado mágico no canto superior direito cuja constante mágica é igual a 34. Vide figura 13 e 14 abaixo. No quadrado mágico, a constante mágica fixa uma condição e devemos verificar o modo de como serão colocados os números (arranjos).

Figura 13 – A melancolia.

Fonte: Dürer, Albrecht. 1514. Melancolia I, 24,1 x 19,1 cm. Acervo IFSP. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/.

Figura 14 – Quadrado mágico 4 x 4.



Fonte: Dürer, Albrecht. 1514. Quadrado mágico. 24 x 18,8 cm. Acervo IFSP. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/>

No Papiro de Rhind[6] ou Ahmes, datado aproximadamente no ano 1650 a.C, são encontrados 85 problemas de matemática e entre eles o problema 79 nos chama atenção pela necessidade do processo de contagem: ***Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato***

[6]A. H. Rhind (1833 - 1863) - advogado e antiquário escocês.

mata sete ratos, cada rato comeu sete grãos de cevadas, cada grão teria produzido sete hekats*[7] *de cevada; quantas coisas têm ao todo? (GALVÃO, 2008, p.86).

Podemos resolver esse problema da seguinte maneira:

Total de casas: 7*;*

Total de gatos: $7 \cdot 7 = 49$*;*

Total de ratos: $49 \cdot 7 = 343$*;*

Total de grãos de cevada: $343 \cdot 7 = 2\,401$*;*

Total de Hekats: $2\,401 \cdot 7 = 16\,807$*;*

Total de coisas: $49 + 343 + 2\,401 + 16\,807 = 19\,607$.

É possível já verificar a presença dos princípios aditivo e multiplicativo na resolução do problema.

Um dado no mínimo curioso é que no livro Liber Abaci (o livro do Ábaco ou do Cálculo) escrito por Fibonacci (Leonardo de Pisa) em 1202 no seu capítulo 12 – Problemas diversos, o 4º problema da parte 9 mostra semelhança com o problema 79 contido no Papiro de Rhind.

Há sete velhas mulheres na estrada para Roma;
cada mulher tem sete mulas;
cada mula carrega sete sacos;
cada saco contém sete pães;
e com cada pão estavam sete facas;
e cada faca está colocada em sete bainhas;
Quantos há ao todo na estrada para Roma?

Outro problema semelhante a esses é o de uma poesia infantil que é datada por volta de 1730 e que também possui características com os problemas de contagem:

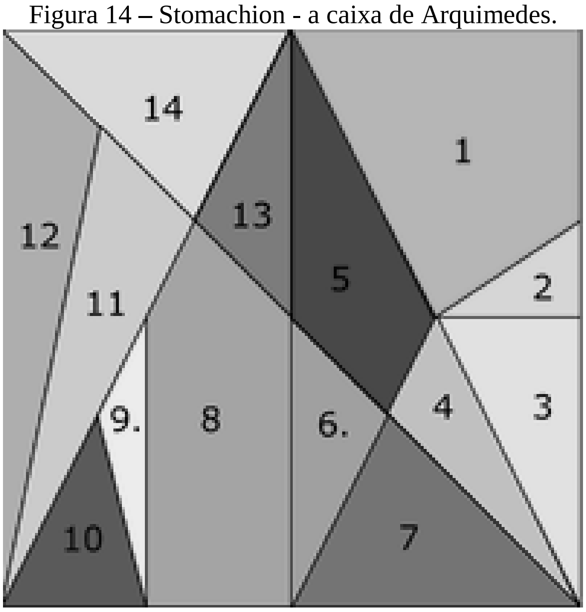
Quando eu estava indo para St.bv Ives,
encontrei um homem com sete mulheres,
cada mulher tem sete sacos,

[7]Hekat – medida de volume criada pelos antigos habitantes do Nilo e equivale a 4,8 litros.

cada saco tem sete gatos,
cada gato tem sete caixas,
caixas, gatos, sacos e mulheres.
Quantos estavam indo para St. Ives?

Um outro relato da presença de problemas de combinatória de bastante tempo diz respeito a existência de um problema geométrico muito antigo proposto por Arquimedes, um sábio grego que viveu em Siracusa na região da Sicília, no séc. III a.C. chamado de *Stomachion* (o real significado desta palavra é desconhecido porém, ela tem a mesma raiz da palavra grega para estômago) ou também chamado de A Caixa de Arquimedes, trata-se de um quebra cabeça formado por 14 peças com variados formatos poligonais, que consistia em determinar o número de maneiras com que todas essas 14 peças poderiam ser reunidas com o objetivo deformar um único quadrado ou outras figuras geométricas ou mesmo objetos em silhuetas (alguém lembrou do Tangram e de suas 7 peças!?). Um detalhe interessante é que a área de cada uma das 14 peças do quebra cabeça é comensurável[8] com a área do quadrado formado por todas elas, ou seja, o quociente entre as áreas representa um número racional. Isso pode ser provado usando o Teorema de Pick[9]. Vejamos na figura 13 abaixo a caixa de Arquimedes:

Figura 14 – Stomachion - a caixa de Arquimedes.



Fonte: SALVARANI, 2016.

[8] Comensurável é aquilo que podemos medir.
[9]Georg Alexander Pick (1859-1942) - matemático austríaco.

Após diversas análises nos manuscritos, os especialistas chegaram à conclusão de que Arquimedes teria escrito um tratado para tentar solucionar o seguinte problema: **De quantas maneiras as peças podem ser arranjadas para formar um quadrado**? Atualmente esse tipo de problema é direcionado para especialistas em análise combinatória resolverem ou tentarem pelo menos. Netz[10] propôs esse problema para os matemáticos atuais da área de combinatória. E eles, após seis semanas e com a ajuda de computadores, concluíram que a resposta é 17152 maneiras.

Foi a partir do século XVII que a análise combinatória tomou forma realmente com os trabalhos do francês Blaise Pascal e de outros matemáticos como Fermat, Leibniz e Wallis. A necessidade de entender e calcular probabilidades nos jogos de azar vai alavancar o estudo nessa área e isso permitiu desenvolver métodos para calcular, de maneira indireta, o número de elementos de um determinado conjunto quando existe o agrupamento desses elementos sob determinadas condições (WIELEITNER, 1932). Para entendermos um pouco desse contexto histórico, vamos recorrer ao sonho de milhões de brasileiros: Ganhar na Mega Sena.

Usando Análise combinatória, vamos responder a seguinte pergunta:

Qual a probabilidade de eu acertar, com um jogo simples, todos os seis números da Mega Sena?

Na Mega Sena é sorteado 6 números distintos de um total de 60 e graças aos trabalhos desses e de outros matemáticos, hoje sabem que esse problema de probabilidade será resolvido fazendo uso de uma combinação de 60 números tomados 6 a 6, pois os jogos $10, 23, 45, 46, 52, 60$ e $23, 10, 45, 60, 52, 46$ são iguais, ou seja, a ordem dos números marcados não é importante.

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6! \cdot 54!} = 50\ 063\ 860$$

Logo, a probabilidade de uma pessoa ganhar com um jogo simples a Mega Sena será de $^1/_{50\ 063\ 860} = 0{,}000002\%$.

E se fosse feito um jogo com 8 números, qual seria a probabilidade de ganhar a Mega Sena?

Agora teríamos uma combinação de 8 números tomados 6 a 6:

$$C_{8,6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

Portanto, a probabilidade seria de $^{28}/_{50\ 063\ 860} = {}^1/_{1\ 787\ 995}$ o que significa que as chances são de 1 em 1 787 995.

---

[10] RevielNetz (1968), historiador de matemática da Universidade de Stanford, na Califórnia.

Na figura 15 abaixo, temos um bilhete de loteria da Mega-Sena:

Figura 15 – Bilhete Mega Sena.

Fonte: PIZARRO, 2019.

Isso desperta outras perguntas, como por exemplo: Qual é a melhor opção, fazer um jogo com 8 números ou fazer 28 jogos com 6 números em cada? pois é, foram basicamente questionamentos como esse que deram origem a análise combinatória e ao estudo das probabilidades de fato.

Segundo Wieleitner em seu livro Historia de la Matematica (1932), vão surgir no final do século XVII três livros importantes para o desenvolvimento da teoria combinatória:

1) *Traité Du triangle arithmétique* – Blaise Pascal[11] (1965);

Abaixo temos, na figura 15, a capa do livro de Blaise Pascal:

[11] Blaise Pascal (1623 - 1662) matemático, escritor, físico, inventor, filósofo e teólogo católico francês.

Figura 16 – Traité Du Triangle Arithmétique.


TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, rue saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Fonte:<https://archive.org/> Acesso em: 25 Jul. 2020.

2) *Dissertatio de arte combinatoria* – Gottfried Leibniz[12] (1966);

3) *Ars magna scien disive combinatoria* – Athanasius Kircher[13] (1669).

Além dos trabalhos de outros matemáticos como Wallis (1673), Bessy (1693), Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Vimos anteriormente que, historicamente a combinatória tem raízes no desenvolvimento das probabilidades porém, hoje apresenta aplicações em vários campos da matemática como na teoria dos números, nos determinantes e na topologia. Nas últimas décadas a análise Combinatória vem tendo uma importância muito grande, pois se torna uma ferramenta importantíssima para a teoria dos grafos que por sua vez será importante para a ciência da computação. Um detalhe importante é que os próprios PCNs orientam os professores sobre o currículo para o ensino médio e sugerem o estudo dos grafos:

> No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler (BRASIL, 2006, p. 94).

---

[12]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) polímata e filósofo alemão e figura central na história da matemática e na história da filosofia. Sua realização mais notável foi conceber as ideias de cálculo diferencial e integral.

[13]Athanasius Kircher (1601 - 1680) jesuíta, matemático, físico, e inventor alemão.

A combinatória ganhou também importância para o desenvolvimento dos algoritmos que são realizados para solucionar problemas de armazenamentos de informações em bancos de dados dos computadores

3.2.1 Cinco matemáticos notáveis para a Análise Combinatória

Abaixo listamos os nomes dos cinco principais matemáticos, bem como um resumo de suas contribuições, para o desenvolvimento propriamente dito da teoria combinatória:

a) Niccolo Fontana Tartaglia (1499 – 1557): Triângulo de Tartaglia;

b) Girolamo Cardano (1501 – 1576): Primeiro que utilizou técnicas de combinatória para poder determinar as quantidades de casos favoráveis em um determinado evento aleatório para que assim pudesse calcular a probabilidade de ocorrência;

c) Pierre de Fermat (1601 – 1665): Foi a troca de correspondências com Pascal sobre o problema dos pontos que fez surgir as bases da Teoria matemática das probabilidades;

d) Blaise Pascal (1623 – 1662): contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória aperfeiçoando o triangulo de Tartaglia, atualmente conhecido como Triângulo de Pascal;

Uma parte muito interessante da história do surgimento da análise combinatória e da teoria das probabilidades que envolvem esses matemáticos foi de que Cardano escreveu um breve manual do jogador que envolvia alguns aspectos da probabilidade matemática. Mas em geral, se concorda que a questão a qual está ligada a origem da ciência da probabilidade é o “problema dos pontos”. Esta questão enunciava o seguinte: suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir uma determinada quantidade de pontos. Porém, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? (BOYER, 1974; EVES 2004).

O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, 1654, o Chavalier de Meré, um hábil e experiente jogador o propôs à Pascal. Pascal ficou intrigado com as questões e começou a se corresponder com Fermat para que os dois chegassem a uma solução. Para alguns matemáticos foi essa correspondência entre os dois que realmente deu início à teoria da probabilidade. Nas correspondências ficou evidente que tanto Fermat quanto Pascal resolveram corretamente as questões, porém de maneiras diferentes. Fermat aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético, que hoje é conhecido como o triangulo de Pascal. O triangulo aritmético já existia há mais de 600 anos, mas recebeu esse nome porque Pascal descobriu novas propriedades para ele (BOYER, 1974, p. 71).

A partir daí, Pascal e Fermat foram os primeiros a resolverem os problemas da teoria das probabilidades de forma mais genérica, e não numérica, como era feita por Cardano. É sabido que a resolução de muitos problemas de probabilidade depende do cálculo do número de combinações de n elementos tomados p de cada vez (ou p a p). Pascal expressava verbalmente e corretamente afirmava como obter. Hoje, o que Pascaldizia é expresso por meio da seguinte expressão:

$$\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

E aí nota-se a presença do símbolo $\boldsymbol{n}!$ (n fatorial) introduzido pela primeira vez em 1808, pelo professor Cristian Kramp (1760 – 1820) de Estrasburgo, França, cuja expressão era simplificar a escrita (Bastos, 2016).

e) Leonhard Euler (1707 – 1783): Foi um dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos e não é exagero dizer que, quase toda a linguagem e notação usada hoje na matemática, principalmente a nível universitário, se deve a ele (Bastos, 2016). Um exemplo é a notação dos coeficientes binomiais que usamos hoje $\binom{n}{p}$ (leia: n sobre p) para representar o quociente:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot (n+p-1)}{n.(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

4 AFINAL, O QUE É ANÁLISE COMBINATÓRIA?

Em 1666, Leibniz em seu *Dissertatio de Arte Combinatoria* (Dissertação sobre Artes Combinacionais) define a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” e em 1818, Peter Nicholson em sua obra *Essaysonthe Combinatorial Analysis* (Ensaios sobre a análise combinatória), definiu-a como sendo “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre sí” (Anais eletrônicos do 15º Seminário de História da Ciência e da Tecnologia, SC, 2016).

Para a maioria dos alunos do ensino médio a análise combinatória é definida como sendo o estudo das combinações, arranjos e permutações, porém, os problemas de combinatória vão além desses tipos de problemas. Os princípios da Inclusão-exclusão e das gavetas de Dirichlet[14], Permutações caóticas, os lemas de Kaplansky[15], as funções geradoras e a teoria de Ramsey são algumas das técnicas utilizadas para resolver outros tipos de problemas, problemas estes que satisfazem certas condições específicas[16]. Diante disso, Morgado (1991, p. 33) definiu a combinatória como sendo a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas.

A combinatória tem importância no ensino da matemática por diversos motivos, um deles é que ela nos permite escolher, arrumar e contar a quantidade de elementos de certo conjunto sem ser necessário enumerá-los. Os seus problemas por exigir flexibilidade do pensamento, afinal é necessário parar, concentrar, discutir e pensar pra poder resolver vão se tornar um desafio para os alunos de maneira geral.

É importante que os alunos tenham, desde as series iniciais da educação básica, contato com problemas de contagem, pois eles, entre outras noções, vão desenvolver o cognitivo. As crianças aprendem as primeiras operações aritméticas com aplicações de problemas de contagem, pois a ação de contar será a primeira técnica matemática que ela irá desenvolver quando quer determinar o número de elementos de um conjunto. Isso ocorre mesmo sem ela perceber e pode muito bem ser feito de maneira lúdica, o que tornaria desde cedo o aprender matemática mais prazeroso.

---

[14]Johann Peter Gustav LejeuneDirichlet (1805 - 1859) matemático alemão, a quem se atribui a moderna definição formal de função.
[15]Irving Kaplansky (1917 - 2006) matemático canadense.
[16]Não serão abordados esses tipos de problemas nesse trabalho.

Afinal, em muitas das minhas conversas com professoras da educação infantil pelas escolas nas quais já trabalhei, existe a aversão ao estudo da matemática desde as séries iniciais. Mesmo sabendo que a maioria dos professores que atuam nessa faixa etária de ensino não possuem a formação específica em matemática, mas todos tiveram aulas com professores formados em matemática. Cabe aqui no mínimo uma reflexão a respeito.

4.1 Principais Conceitos

4.1.1 Fatorial

Dado um número natural n, o produto de todos os naturais de 1 até n é chamado de$n$ fatorial ou fatorial de n e é representado por $\boldsymbol{n}$!

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

ou

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para exemplificar, veremos o cálculo do fatorial dos seis primeiros números naturais:

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Com isso podemos verificar que, para $n \geq 1$, existe uma relação entre $n!$ e o $(n-1)!$. De fato, pois:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{e}$$

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Substituindo $(n-1)!$ em $n!$ teremos que $n! = n \cdot (n-1)!$

Com isso podemos calcular fatoriais tendo respostas de outros fatoriais, por exemplo:

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$$

e assim por diante.

Uma pergunta curiosa seria:

Qual o valor de 0!?

Para responder essa pergunta faremos uma extensão do conceito de fatorial:

Já sabemos que $n! = n \cdot (n-1)!$ então, para $n = 1$ teremos que:

$$1! = 1 \cdot (1-1)!$$
$$1! = 1 \cdot 0!$$
$$1! = 0! = 1$$

Portanto, $0! = 1$

Vários matemáticos adotaram simbologias diferentes ao longo do desenvolvimento da análise combinatória. Gauss[17] para representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n) usou o símbolo $\pi(n)$. O nome fatorial foi proposto por Arbogast (Strasburgo, 1800) e a notação $n!$ foi usada por Cristian Kramp (Colônia, 1808) em seu *Elements d'arithmétique universelle*.

4.1.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

A operação de adição sempre tem conexão com um problema sobre contagem: João possui 3 jogos do X Box One enquanto seu amigo Renato tem 8 jogos do Playstation. Renato irá levar o seu Playstation e todos seus jogos para casa de João pra juntos brincarem. Quantos jogos os amigos terão disponíveis para brincar?

Abaixo, nas figuras 17 e 18 temos os jogos de João e os de Renato respectivamente:

[17]Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência.

Figura 17 – Jogos do João De X Box One.

Fonte: Site da Amazon. Disponível em: <https://www.amazon.com.br/Kit-Game-Jogos-Xbox-One/dp/B083QVWHJG> Acesso em: 27 Jul. 2020.

Figura 18 – Jogos Do Renato De Playstation 4.

Fonte: Site OLX. Disponível em: <https://pi.olx.com.br/regiao-de-teresina-e-parnaiba/videogames/vendo-jogos-playstation-4-novos-6x-sem-juros-todos-cartoes-711222597>. Acesso em: 27 Jul. 2020.

A solução do problema vem através de um princípio básico de contagem que chamamos de “Princípio de Adição” que podemos enunciar da seguinte maneira: “Se A e B são dois conjuntos disjuntos, ou seja, sem elementos em comum, com respectivamente m e n elementos, então a reunião de A com B terá $(m + n)$ elementos”.

O conjunto A possui 3 elementos, pois é composto pelos jogos de João e o conjunto B, 8 elementos pois trata-se dos jogos de Renato. O número total de jogos que os amigos terão disponíveis para jogar será dado pela soma $3 + 8$, portanto, igual a 11.

Outro princípio que junto com o princípio da adição constituem as ferramentas básicas para resolvermos os problemas de contagem é o "Principio Fundamental da Contagem (PFC)" também chamado de "Princípio Multiplicativo (ou da multiplicação)".

Para fazer uma viagem Belém – Barcarena – Belém, posso usar como transporte o barco, o ônibus ou uma van. De quantas modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Vamos enumerar todas as possibilidades conforme a condição do problema:

IDA: Barco VOLTA: Ônibus ou VAN → B, O ou B, V (2 possibilidades)

IDA: Ônibus VOLTA: Barco ou Van → O, B ou O, V (2 possibilidades)

IDA: Van Volta: Barco ou Ônibus → V, B ou V, O (2 possibilidades)

usando B para representar Barco, O para Ônibus e V para Van.

Adicionado as possibilidades teríamos $2 + 2 + 2 = 6$ possibiliades

Esse mesmo problema poderia ser resolvido multiplicando-se o número de maneira que teríamos para ir pelo número de maneira que teríamos para voltar que seria justamente o *PFC.*

Podemos enunciar o "Princípio Fundamental da Contagem" da seguinte maneira:

"Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada à decisão D_1, a decisão D_2 puder ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 será o produto $\mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$".

Então teríamos a seguinte resolução para o mesmo problema:

IDA: Barco, ônibus e Van (3 maneiras para tomada da D_1)

VOLTA: 2 maneiras (D_2), afinal não poderíamos voltar utilizando o mesmo meio de transporte que usamos para ir.

Logo, o total de modos (ou maneiras) será dado pela multiplicação $3 \cdot 2 = 6$

O princípio da adição e o princípio fundamental da contagem nos fornecem instrumentos básicos para a resolução de problemas de combinatória, porém, a aplicação direta desses princípios muitas das vezes pode se tornar bem trabalhosa. Pensando nisso, veremos alguns modos de agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduziremos fórmulas que permitirão a contagem deles, analisaremos cada caso em particular:

4.1.3 Arranjos Simples

No início do século XIX não existia um significado preciso para o emprego dos termos “Arranjo” e “Permutação”. Leibniz designava as permutações por variações, que é a palavra utilizada por alguns autores da atualidade para indicar arranjos (WIELEITNER, 1932).

Desta forma, para entendermos o que vem a serem Arranjos, permutações e combinações teremos que entender o que vem a ser um agrupamento. Podemos dizer que um agrupamento é todo e qualquer subconjunto não vazio de um determinado conjunto, ou seja, um grupo. Se na escolha desse subconjunto tivermos elementos repetidos dizemos que o agrupamento é com repetição, caso contrário chamamos de agrupamento simples.

Arranjos são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento.

Um exemplo bem simples que nos mostra esse tipo de agrupamento é quando pretendemos formar números naturais de 3 algarismos distintos escolhendo-os entre os algarismos $2, 4, 6, 7$ e 8. Note que nesse caso escolher 246 é diferente de escolher 642, pois, ao mudarmos a ordem dos algarismos teremos números diferentes. Portanto, estaríamos fazendo um arranjo de 5 elementos e tomando eles 3 a 3 e trata-se de um arranjo simples porque não termos elementos repetidos.

Vamos generalizar arranjos simples:

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ um conjunto com n elementos e p um número natural não nulo com $p \leq n$.

Queremos calcular o número total de arranjos desses n elementos tomados p a p que indicaremos por $A(n, p)$. Podemos fazer isso utilizando o PFC, pois temos que:

Para a escolha do 1º elemento teremos n possibilidades

Para a escolha do 2º elemento teremos $(n-1)$ possibilidades

Para a escolha do 3º elemento teremos $(n-2)$ possibilidades

e seguimos assim até a escolha do último elemento no qual teremos $[n-(p-1)]$ possibilidades.

Então, pelo PFC teremos que o número total de arranjos será dado seguinte produto:

$$A(n, p) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot [n-(p-1)]$$

$$A(n, p) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1)$$

Ao multiplicarmos ambos os lados da igualdade por $(n-p)!$,teremos

$$A(n,p)\cdot(n-p)! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \cdots\ \cdot(n-p+1)\cdot(n-p)!$$

Desenvolvendo o último fator teremos

$$A(n,p)\cdot(n-p)! \\ = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \cdots\ \cdot(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1) \\ \cdot(n-p-2)\cdot\ \cdots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

O segundo membro da equação nada mais é do que $n!$.portanto, temos que

$$A(n,p)\cdot(n-p)! = n!$$

$$A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4.1.3.1 Permutação Simples

A permutação[18] é um caso particular de arranjo. Ocorre quando $n=p$

Nesse caso teremos:

$$P_n = A(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Então podemos dizer que a permutação de n elementos distintos é todo arranjo simples desses n elementos tomados n a n.

Vejamos uns exemplos para melhor entendermos como funcionam essas equações obtidas:

Exemplo $\mathbf{4.1.1}$: Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9?

Conforme o exemplo mostrado para entendermos o que venha a ser arranjos, aqui a ordem vai ser importante mesmo quando escolhemos os mesmos algarismos afinal, 135 é diferente de 531. Nesse caso estamos diante de um problema de arranjo de 5 algarismos tomados 3 a 3 e podemos fazer uso da equação conforme abaixo:

$$A(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = 5\cdot4\cdot3 = 60$$

Logo, podemos formar 60 números de três algarismos distintos:

Exemplo $\mathbf{4.1.2}$: Com a palavra MESTRADO, quantos anagramas[19] podemos formar?

[18] A palavra “Permutar” significa “trocar reciprocamente’.

Nesse caso temos um arranjo, pois a mudança de ordem de uma das letras irá gerar um novo anagrama, porém iremos utilizar todas as letras da palavra mestrado, ou seja, teremos um arranjo de 8 elementos tomados 8 a 8, e isso chamamos de permutação e indicamos por P_8

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\ 320$$

Logo, podemos formar um total de 40 320 anagramas

e se a pergunta fosse feita com a palavra TESE?

Nesse caso teríamos elementos repetidos, por isso vamos considerar agora esse tipo de situação.

4.1.3.2 Permutação com elementos repetidos

Vamos diferenciar os "Es" na palavra TESE: TE_1SE_2.

Fazendo todos os anagramas teremos:

a) começando pela letra T:

TE_1SE_2, TE_1E_2S, TE_2SE_1, TE_2E_1S, TSE_1E_2, TSE_2E_1.

b) começando por E_1:

E_1TSE_2, E_1TE_2S, E_1STE_2, E_1SE_2T, E_1E_2TS, E_1E_2ST

c) começando por E_2:

E_2TSE_1, E_2TE_1S, E_2STE_1, E_2SE_1T, E_2E_1TS, E_2E_1ST

d) começando pela letra S:

STE_1E_2, STE_2E_1, SE_1TE_2, SE_1E_2T, SE_2TE_1, SE_2E_1T

Teríamos um total de $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ anagramas, porém alguns anagramas são iguais forma contados nesse total:

TE_1SE_2 e TE_2SE_1, TE_1E_2S e TE_2E_1S, TSE_1E_2 e TSE_2E_1 começando por T

Os anagramas obtidos nos itens b) e c) são iguais e seguiriam o mesmo procedimento.

STE_1E_2 e STE_2E_1, SE_1TE_2 e SE_2TE_1, SE_1E_2T e SE_2E_1T representam o mesmo anagrama que começam com a letra S.

[19]Anagrama de uma palavra é a própria palavra ou qualquer agrupamento que se obtém quando se troca a ordem de suas letras.

Em cada caso teríamos apenas 3 anagramas, pois a letra E repete 2 vezes em cada por isso deveríamos do total de 6, dividir por 2 em cada caso, assim a soma ficaria da seguinte forma:

$$\frac{6}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6}{2}=\frac{6+6+6+6}{2}=\frac{24}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2}=12$$

Nós obteríamos o mesmo resultado se calculássemos a permutação simples entre as 4 letras e dividíssemos o resultado por 2 que corresponderia ao número de vezes que letra E se repete:

$$\frac{P_4}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2}=\frac{24}{2}=12$$

De um modo geral, o número de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc. é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots}=\frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdot\ \cdots}$$

Exemplo 4.1.3: Quantos são os anagramas da palavra DISSERTAÇÃO?

Do total de onze letras da palavra temos que a letra S é repetida duas vezes e a letra A também duas vezes

Logo, teremos:

$$P_{11}^{2,2}=\frac{11!}{2!\cdot 2!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\frac{39\ 916\ 800}{4}=9\ 979\ 200$$

A palavra DISSERTAÇÃO possui um total de 9 979 200 anagramas

Com certeza bem mais prático!!!

Agora, consideremos a seguinte situação:

De uma equipe composta por 4 alunos do PROFMAT 2018 da UFPA deverão ser escolhidos 3 para apresentar um trabalho em sala de aula da disciplina Matemática Discreta. Quantas serão as possibilidades de escolha desses três alunos?

Consideremos A sendo o conjunto formado pelos cinco alunos da equipe: $A=\{a,b,c,d\}$.

Note que um grupo pode ser formado pelo trio $a,b\ ,c$ e outro c,b,a porém esses dois grupos são iguais e nesse caso a **ordem não é importante**. Problemas como esse serão tratados como outra forma de agrupamento que chamamos de COMBINAÇÃO SIMPLES.

4.1.4 Combinação Simples

No problema citado anteriormente, podemos pensar da seguinte maneira pra tentar resolver:

Observe que escolher os alunos a, b, c é o mesmo que escolher os alunos c, b, a, ou seja, a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.

Assim, podemos obter as possibilidades de grupos que podem ser formados construindo os subconjuntos ou agrupamentos não ordenados de três elementos do conjunto de alunos disponíveis, ou seja, $A = \{a, b, c, d\}$. Construindo os agrupamentos, temos:

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ e $\{b, c, d\}$

Note que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza de seus elementos e não pela ordem deles. Cada uma dessas possibilidades corresponde a uma combinação de 4 alunos tomados 3 a 3 que será representada por $C_{4,3}$ ou mesmo por $\binom{4}{3}$. Como no total são 4 combinações então temos que a $C_{4,3} = 4$. Se permutarmos de todas as maneiras possíveis os 3 elementos cada um desses grupos de alunos teríamos 6 arranjos em cada ou 3! Arranjos.

Por exemplo, no grupo formado pelos alunos $\{a, b, c\}$ teríamos:

a, b, c; a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b e c, b, a

Podemos afirmar, então, que multiplicando por 3! O número de combinações de 4 elementos tomados 3 a 3, obteremos o número de arranjos de 4 elementos tomados 3 a 3, ou seja,

$$C_{4,3} \cdot 3! = A(4,3)$$

Vamos então generalizar:

$$C_{n,p} \cdot p! = A(n,p)$$

$$C_{n,p} = \frac{A(n,p)}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

Portanto,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Resolvendo o mesmo problema utilizando a equação obtida teremos:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$$

É importante ressaltar que faremos uso das relações obtidas na resolução de alguns problemas que serão feitos por meio do roteiro que será apresentado neste trabalho. Existem trabalhos sobre análise combinatória que mostram as resoluções de questões utilizando somente os princípios aditivos e multiplicativos o que não é a proposta deste.

Vejamos agora o seguinte problema:

Quantos são os anagramas da palavra PAR. Nos quais nenhuma das letras está na sua posição inicial?

Esse tipo de problema é um exemplo do que chamamos de PERMUTAÇÃO CAÓTICA ou DESARRANJO.

4.1.5 Permutação Caótica

Dados n elementos colocados em certa ordem definindo a seguinte sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$.

Uma permutação dos elementos dessa sequência é dita uma "Permutação Caótica" ou um "Desarranjo" quando nenhum dos elementos a_i está na sua posição original. Denotaremos por D_n o número de permutações caóticas de n elementos.

Vamos responder o problema proposto anteriormente:

Da palavra PAR, a permutação RPA é uma permutação caótica, pois nenhuma letra está na sua posição inicial.

Vamos determinar todas as permutações caótica da palavra PAR:

A letra P não pode estar no início logo, teremos duas possibilidades: começaremos pela letra A ou pela letra R.

1º) Começando pela letra A: nesse caso a letra R não pode ficar no final portanto, temos ARP;

2º) Começando pela letra R: nesse caso a letra A não pode ficar no meio portanto, temos RPA;

Logo, da palavra PAR teremos duas permutações caóticas.

Parece ser bem tranquilo achar todas as permutações caóticas de uma sequência, pois é, só parece. As coisas ficam complicadas para uma sequência muito grande de elementos. Aliás, a partir de 4 elementos já requer uma atenção maior. Apesar da maioria dos livros de ensino médio não abordarem esse tipo de permutação, o assunto vem caindo em provas de vários concursos que exigem o ensino médio como, por exemplo[20]:

Exemplo $4.1.4$: (FCC 2019/Prefeitura do Recife – Assistente de Gestão Pública) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Exemplo $4.1.5$: (FUVEST/2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). O nome de cada um é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna. Em seguida, cada participante da brincadeira retira da urna um dos pedaços de papel, ao acaso. Qual a probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome?

a) $1/4$

b) $7/24$

c) $1/3$

d) $3/8$

e) $5/12$

O cálculo das permutações caóticas de uma dada sequência pode ser calculado por pelo menos duas fórmulas:

1ª) **Fórmula do Desarranjo**:

$$D_n = n! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

[20] As duas questões apresentadas como exemplos estão resolvidas no capítulo 8.

Exemplo $4.1.6$: Quantos são os anagramas da palavra PROFMAT, nos quais nenhuma letra está na sua posição inicial?

Nesse caso o $n = 7$, então teremos:

$$D_7 = 7! \cdot \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right]$$

$$D_7 = \left[\frac{7!}{0!} - \frac{7!}{1!} + \frac{7!}{2!} - \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{4!} - \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{6!} - \frac{7!}{7!}\right]$$

$$D_7 = \left[7! - 7! + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!} - \frac{7\cdot6\cdot5!}{5!} + \frac{7\cdot6!}{6!} - 1\right]$$

$$D_7 = [7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 - 7\cdot6\cdot5\cdot4 + 7\cdot6\cdot5 - 7\cdot6 + 7 - 1]$$

$$D_7 = [2\,520 - 840 + 210 - 42 + 7 - 1]$$

$$D_7 = 1\,854$$

Tentar encontrar cada uma das permutações caótica é tarefa quase impossível

2ª) Relação com o número de Euler:

$$D_n = \left[\frac{n!}{e}\right]$$

Onde $[x]$ representa o inteiro mais próximo e $e = 2{,}7182\ \cdots$ (constante de Euler)

$$D_7 = \left[\frac{7!}{e}\right] = \left[\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2{,}7182\cdots}\right] = \left[\frac{5\,040}{2{,}7182\cdots}\right] = [1854{,}1123\cdots] = 1\,854$$

4.1.6 Permutação Circular

Considere a seguinte situação:

Ana, Beatriz, Camila e Danielle sentam-se em uma mesa circular para conversar. De quantas maneiras distintas as quatro amigas podem se sentar?

Talvez você pensasse assim:

Fixamos o lugar onde uma primeira amiga irá sentar-se na mesa, este lugar poderá ser ocupado por qualquer uma das quatro amigas.

Já o próximo lugar poderá ser ocupado por apenas três das quatro amigas; pois uma delas já estaria sentada.

O terceiro lugar poderá ser ocupado por duas das quatro amigas, afinal, duas amigas já possuem os seus lugares.

O quarto e último lugar deverá ser ocupado pela amiga que ainda não está sentada.

Pelo PFC teríamos então:

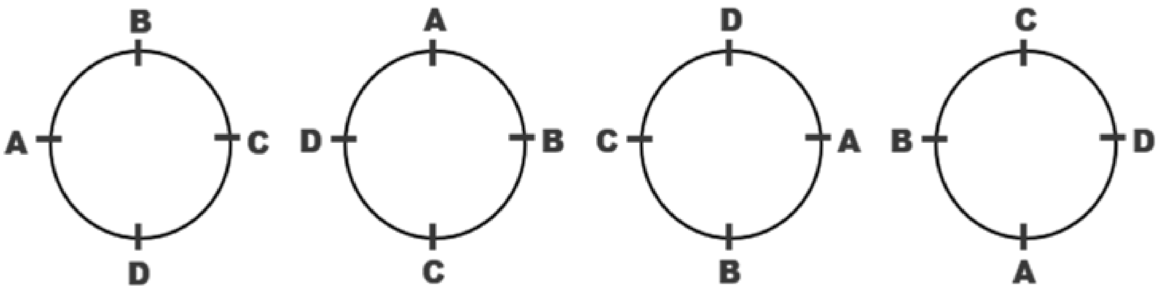
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras.

Entretanto esse raciocínio não está correto. Vejamos:

Indicaremos Ana, Beatriz, Camila e Danielle pelas letras A, B, C e D respectivamente

Abaixo, na figura 19, temos um esquema para a situação:

Figura 19 – Permutação Circular.



Fonte: Probleminha: Moderadores do blog. Divertindo-se na roda gigantes. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-divertindo-se-na-roda-gigante/> Acesso em: 30 Jul. 2020.

As posições das amigas na figura representam a mesma formação:

$$\boldsymbol{A, B, C, D};\ \boldsymbol{D, A, B, C};\ \boldsymbol{C, D, A, B};\ \boldsymbol{B, C, D, A}$$

O que representa **uma** solução e não quatro

Se considerarmos a sequência $\boldsymbol{A, B, C, D}$ teremos Ana e Danielle tendo uma amiga apenas como vizinha

Considerando a sequência $\boldsymbol{D, A, B, C}$ teremos Danielle e Camila tendo uma amiga apenas como vizinha

Na sequência $\boldsymbol{C, D, A, B}$ teremos Camila e Beatriz tendo uma amiga apenas como vizinha

E por fim, na sequência $\boldsymbol{B, C, D, A}$ teremos Beatriz e Ana tendo uma amiga apenas como vizinha

Logo, poderíamos determinar o número total de maneiras fazendo

$$\frac{P_4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{24}{4} = 6 = 3! = (4-1)!$$

De modo geral, o número de permutações circulares (PC) de n elementos é dado por:

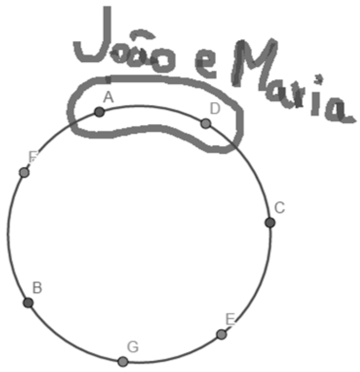
$$(PC)_n = (n-1)!$$

Veja agora a seguinte situação:

De quantos modos 7 crianças podem brincar de rodas, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?

Vamos considerar João e Maria como um elemento, visto que elas ficarão sempre juntas, conforme Figura 20:

Figura 20 – Representação Gráfica Do Exercício.



Fonte: Arquivo próprio do autor (2020).

Como elas ficarão sempre juntas, teremos 5 outras posições para colocarmos as outras 5 crianças numa disposição circular. Faremos então a permutação circular de 6 elementos: as 5 crianças e o elemento João e Maria nessa ordem:

$$(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Como eu posso ter também Maria e João alternando os lugares, ou seja, temos uma permutação de dois elementos: João e Maria

Portanto, o número de maneiras será dado por $2! \cdot 120 = 2 \cdot 1 \cdot 120 = 240$

Deixando claro que essa é uma maneira de resolver e não única.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA TENDÊNCIA

A Educação Matemática apresenta como tendências metodológicas atuais a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, a História no Ensino da Matemática, a Leitura e Escrita na Matemática e a Educação Matemática Crítica. De acordo com o título deste trabalho que é “Um Roteiro Para Resolução de Problemas de Análise Combinatória”, a tendência voltada para a Resolução de problemas será a mais importante para nós.

Mas afinal, o que vem a ser um problema?

Podemos pensar um problema como sendo uma determinada questão ou um determinado assunto que necessita de uma solução. É por isso que um problema surge geralmente por meio de uma pergunta, o que faz praticar o ato de pensar.

Abaixo, a figura 20 mostra uma charge em que um aluno indica uma solução para o problema proposto pela professora:

Figura 21 – Charge.

Fonte: CLARISSA; RAFAEL, 2020. Disponível em: <https://sites.google.com/site/profclarissamat/charges-matematicas> Acesso em: 27 Jul. 2020.

Para Pereira (1980, p. 17) "problema é toda situação na qual o indivíduo necessita obter novas informações e estabelecer relações entre elementos conhecidos e os contidos num objetivo a que se propõe a realizar para atingi-lo”.

Para Dante (2000, p. 9-10), um problema é qualquer situação que exija do indivíduo o pensar para solucioná-la. Já um problema de matemática é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.

No processo de resolução de um problema matemático é importante que o aluno desenvolva estratégias e/ou crie ideias na busca da solução é claro que, o que pode ser um problema para um aluno não seja para outro.

Existe diferença entre um exercício matemático e um problema matemático. Segundo Silveira (2001) o exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de um algoritmo ‘conhecido’, de uma fórmula ‘conhecida’ etc. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa. Para exemplificar temos um:

a) Exercício: Calcule □(6,3).

Nesse caso vamos supor que o aluno conheça a fórmula para calcular arranjos

b) Problema: Uma senha de computador é formada por duas letras distintas (de *26* disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de *10* disponíveis). Quantas senhas diferentes são possíveis de formar?

Nesse caso não basta só saber a fórmula para calcular arranjos. O aluno terá que pensar e criar estratégias para tentar resolver.

Para Dante (1998) um bom problema deve ser: a) desafiador para o aluno; b) ser real; c) ser interessante; d) ser o elemento de um problema realmente desconhecido; e) não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas; f) ter um nível adequado de dificuldade.

Um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver seu pensamento e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado.

Para Dante (1998, p. 21) os objetivos da resolução de problemas são: a) Fazer o aluno pensar produtivamente; b) Desenvolver o raciocínio do aluno; c) Ensinar o aluno a enfrentar situações novas; d) Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática; e) Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras; f) Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas; g) Dar uma boa base matemática às pessoas.

A partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível o envolvimento do aluno na busca por estratégias de resolução, na persistência em encontrar uma solução, na ampliação e na ressignificação de conceitos e ideias que ele já conhece. Por este motivo, vários autores evidenciaram a importância do uso desta metodologia nas aulas.

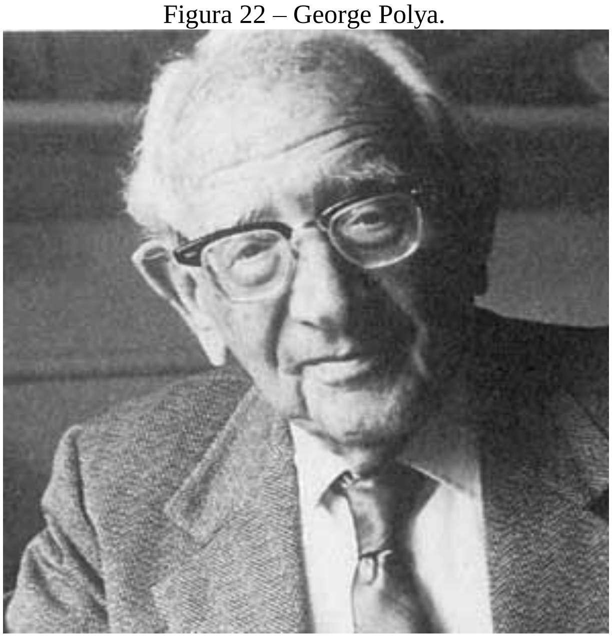
Segundo Dante (1998), ensinar a resolver problema é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. O professor deve fazer perguntas para que os alunos possam compreender o problema. Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos e nesse processo, qual deve ser o papel do professor?

Segundo Soares & Bertony Pinto (2001), o professor deve ser um incentivador, facilitador e mediador das ideias apresentadas pelos alunos, de tal forma que essas ideias sejam produtivas, levando os alunos a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Souza & Nunes (2004) confirmam que, ao utilizar a metodologia de resolução de problemas, o papel do professor muda de "comunicador de conhecimento" para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador da aprendizagem. Portanto, o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos (RODRIGUES, 1992, apud SOUZA & NUNES).

Segundo os PCN's de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Um dos autores pioneiros na pesquisa de resoluções de problemas foi George Polya (vide figura 22).

Figura 22 – George Polya.



Fonte: OBMEP, 2020. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/?s=George+Polya. Acesso em: 27 jul. 2020.

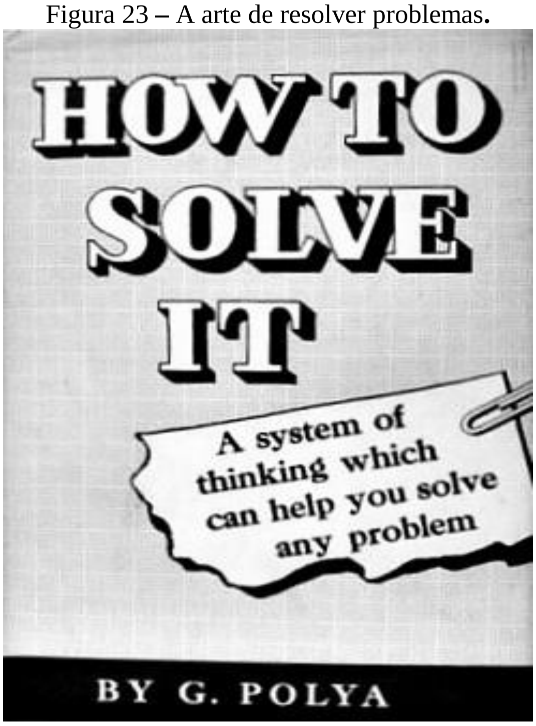
George Polya foi um matemático húngaro que viveu de 1887 a 1985 e fez contribuições fundamentais em Análise Combinatória, Teoria dos Números, Análise Numérica e Teoria da Probabilidade. O seu destaque ocorreu quando teve interesse pelas questões voltadas para o Ensino e, especialmente, por resolução de problemas, buscava identificar métodos sistemáticos no processo de resolução e, mais geralmente, de invenção em Matemática.

Segundo Polya (1995), devemos buscar exemplos concretos e tentar identificar padrões para resolver um problema. Se o problema for muito difícil, então temos que correr atrás de resolver uma versão mais simplificada do mesmo problema e então observar como foi feita a sua resolução.

Para Polya o processo de solução era muito mais importante que a solução em sí. Para ele a resolução dos problemas despertava as descobertas por parte dos alunos. Considerava ser muito melhor resolver um problema de cinco formas diferentes do que resolver cinco problemas diferentes.

Na sua obra "A arte de resolver problemas" (*Howto Solve It*, POLYA, 1995), Polya se propõe a estudar os inúmeros métodos de resolução de problemas, esse estudo é conhecido como heurística, e as suas inúmeras implicações para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Figura 23 – A arte de resolver problemas.



Fonte: POLYA, 1945. Disponível em: <http://www.rodadematematica.com.br/blog/2016/9/14/a-arte-de-resolver-problemas> Acesso em: 27 Jul. 2020.

Polya organizou o processo de resolução de problemas em 4 etapas:

1º) Entenda o problema;

2º) Construa uma estratégia de resolução;

3º) Execute a estratégia;

4º) Revise.

> “Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto, porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta” (POLYA, 1995).

Para cada etapa proposta, Polya sugere uma série de perguntas que devem ser consideradas:

1º) **Entenda o problema**

Quais são os dados do problema?

Quais são as incógnitas?

Quais são as condições ou restrições?

É possível satisfazer as condições pedidas?

Elas são suficientes para determinar à incógnita?

São não redundantes?

Não são contraditórias?

2º) **Construa uma estratégia de resolução**

Você se lembra de algum problema semelhante?

Você consegue adaptar métodos usados em problemas semelhantes para este problema?

Você conhece resultados ou fórmulas que possam ajudar?

Você pode enunciar o problema de forma diferente?

Você consegue resolver parte do problema?

3º) **Execute a estratégia**

Você percebe claramente que cada passo está correto?

Você pode dar uma prova de que cada passo está correto?

4º) **Revise**

Você pode checar o resultado, ele parece razoável?

Você pode checar os argumentos usados, eles são mesmo convincentes?

Você pode encontrar uma maneira alternativa de resolver o problema?

Você pode usar o mesmo método em outro problema?

A BNCC destaca a importância da resolução de problemas como fator importante para o chamado letramento matemático:

> A resolução de problemas, a formação do leitor e do escritor em Matemática, o desenvolvimento da capacidade de argumentar e justificar os raciocínios são alguns dos aspectos diretamente relacionados ao letramento matemático que fazem com que a Matemática tenha realmente valor à vida toda. Merece uma atenção especial ainda a ênfase na investigação, no desenvolvimento de projetos e na modelagem matemática, bem como as atividades associadas à resolução de problemas, todas elas voltadas ao letramento matemático e ao desenvolvimento integral do aluno. (BRASIL, 2017).

A valorização do letramento matemático e dos processos matemáticos, vão trazer a primeira implicação para o ensino que o professor terá de desenvolver em suas aulas, ainda que a BNCC não mostre como isso deve ser feito pois, ela não trata das metodologias.

Agora, se o professor quer que os seus alunos resolvam problemas, argumentem, aprendam a ler, escrever e falar Matemática, então às aulas devem estar pautadas por atividades que sejam desafiadoras, problematizadoras, que favoreçam o trabalho em grupo, a articulação de pontos de vista e, também, ações de ler, escrever, representar pensamentos e conclusões.

Desta forma, esse é o ponto que merece toda a nossa atenção como mediador do processo, uma vez que desenvolver as competências ou as habilidades não se faz pelo conteúdo, mas sim pelas metodologias que iremos aplicar.

6 UM OLHAR NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático surgiu no Brasil no século XIX e mesmo com tantas novas fontes de informação que fazem parte da vida dos professores e dos alunos, como por exemplo, o Rádio, a TV e a Internet, o livro didático continua sendo o material pedagógico mais utilizado na história da Educação. Apesar de hoje a internet ser uma ótima fonte de informações, o livro impresso tem papel democrático e qualitativo (MICHEL, 2015).

Além de ser uma fonte de informações embasadas e corretas, o livro didático pode chegar a lugares nos quais a internet ainda não chega. Como por exemplo, nas comunidades ribeirinhas e Quilombolas. Portanto, é um material bem viável para as escolas de países tão diversos como o Brasil. Além de ser um objeto usado pelos estudantes, e muitas das vezes no Brasil sendo o único material que eles têm realmente acesso, o livro didático serve ao professor como uma fonte de informação para o planejamento de suas aulas entre outras coisas.

Todo livro didático carrega um conjunto de valores culturais e ideológicos e desse modo o professor terá um papel fundamental, pois será ele o mediador dos conteúdos ideológicos veiculados nesses livros didáticos. Um detalhe importante é que o fato de uma determinada disciplina estar consolidada em um livro didático, não significa que ela será ministrada tal qual se imaginou.

Os professores como mediadores no processo, devem fazer adequações em suas às aulas de acordo com a realidade e cultura no qual está inserido. Isso fará com que selecionem, preparem e organizem os conteúdos do ensino para as aulas, reforçando o livro didático como um dos elementos importantes dentro da cultura escolar (SACRISTÁN, 2000, p. 32).

> Para ser utilizados nas escolas públicas do Brasil, qualquer livro didático precisa responder por alguns critérios, entre os quais, apresentar um conteúdo acessível para a faixa etária destinada, estimular e valorizar no texto a participação do aluno, combater atitudes e comportamentos passivos. O livro deve também, promover uma integração entre os temas discutidos valorizando o conhecimento do aluno e conter ilustrações atualizadas e corretas (ARRUDA; MORETTI, 2002, p. 9).

Um fator importantíssimo a se comentar sobre os livros didáticos que a grande maioria dos alunos brasileiros recebe, é o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que atende escolas públicas de educação básica. O objetivo desse programa é disponibilizar livros e materiais didáticos de qualidade gratuitamente para as instituições de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Os órgãos responsáveis pelo PNLD são o Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). São eles que irão avaliar, comprar e distribuir em parceria com os Correios, as obras didáticas às escolas públicas. A existência do PNLD é justificada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), elaborada em 1996, que garante a distribuição de material didático como parte do dever do Estado com a educação escolar pública (Art. 4º): “atendimento ao educando, em todas as etapas da educação básica, por meio de programas suplementares de material didático-escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde”.

No caso específico da Matemática, Dante (1996) destaca a importância do livro didático que, quando bem utilizado, tem um papel fundamental no processo ensino-aprendizagem por várias razões:

a) Em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático;

b) O professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem ajuda do livro didático;

c) A matemática apresenta entre seus conteúdos, alguns que são sequenciais, por exemplo:

Não devo ensinar números racionais sem antes ter ensinado números inteiros.

Não devo ensinar potenciação sem antes ter ensinado multiplicação.

Muitas das vezes um assunto vai depender do outro. e por isso, em geral o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem por apresentar uma sequência didática.

d) Para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência;

e) Muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor;

f) A aprendizagem da matemática depende do domínio de conceitos e habilidades. O aluno pode melhorar esse domínio resolvendo os problemas, executando as atividades e os exercícios sugeridos pelo livro didático;

g) O livro didático de matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor.

Poderíamos destacar inúmeras questões a respeito dos livros didáticos da matemática como:

Quais devem ser os critérios para a escolha de um livro didático?

O que é um livro didático de qualidade?

O planejamento anual do professor deve ser baseado em um livro didático?

Enfim, mas não é esse o propósito desse capítulo e nem desse trabalho. Faremos, isso sim, uma breve análise de como o ensino de análise combinatória é realizado em alguns livros didáticos.

Escolhemos sete livros, em geral voltados para o ensino médio e no qual já trabalhamos ao longo dos anos como professor do ensino médio, só para termos uma base que como combinatória é abordada. É claro que não vamos generalizar essa análise afinal, não tem como observar todos os livros didáticos e vale a pena lembrar que não é esse o foco nesse trabalho.

Buscamos verificar de que forma é realizada a sequência didática que cada livro faz ao longo do assunto Análise Combinatória.

Os sete livros escolhidos, com seus respectivos autores e editores, analisados foram:

Livro 1: Análise Combinatória E Probabilidade.

Autor (es): Augusto César Morgado, João Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto de Carvalho e Pedro Fernandez.

Editora: Coleção Professor de Matemática – SBM.

Livro 2: Coleção Novo Olhar Matemática – Vol. 2.

Autor (es): Joamir Souza.

Editora: FTD.

Livro 3: Matemática – Vol. 2.

Autor (es): Solano G. Linden.

Editora: POSITIVO.

Livro 4: Aprender E Aplicar Matemática – Vol. 2.

Autor (es): Antônio dos Santos Machado.
Editora: ATUAL EDITORA.

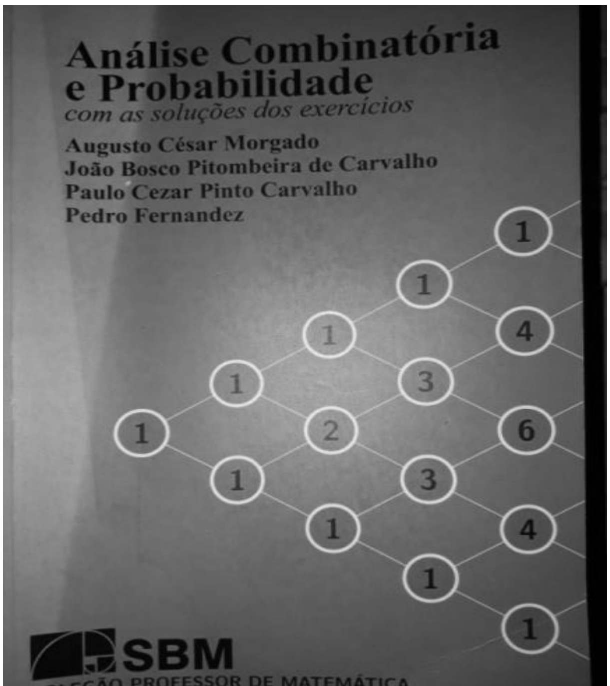
Livro 5: Matemática Ensino Médio – Vol. 2.
Autor (es): Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz.
Editora: SARAIVA.

Livro 6: Matemática Paiva – Vol. 2.
Autor (es): Manoel Paiva.
Editora: MODERNA.

Livro 7: Fundamentos De Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade – Vol. 5.
Autor(es): Samuel Hazzan.
Editora: ATUAL EDITORA.

Livro 1: Análise Combinatória e Probabilidade.

Figura 24 – Coleção Do Professor De Matemática.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: É um livro destinado para a formação de professores de Matemática e é a base do capítulo 6 de Análise Combinatória do livro da Coleção PROFMAT de Matemática Discreta. Cada novo agrupamento é apresentado no livro por meio de um problema motivador que servirá para a construção que será feita. Logo em seguida são apresentados alguns exemplos resolvidos sendo que algumas resoluções recebem os comentários dos autores. Muitas das vezes é para alertar para possíveis erros na interpretação/resolução assim como sugerem determinadas algumas posturas de como iniciar a resolução de determinados problemas.

Um exemplo de um problema motivador é o que foi utilizado no tópico sobre Permutações Simples que segue abaixo:

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de quantos modos é possível ordená-los?

Uma recomendação dada pelos autores para a resolução de problemas de combinatória é a de que: “pequenas dificuldades adiadas costumam transforma-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.”

O livro trabalha os vários tipos de permutações e combinações tornando-se um ótimo material para o estudo particular do professor, pois ele é bem completo, além de mostrar as demonstrações das fórmulas que serão utilizadas nas resoluções dos exemplos. Mas, em geral, segue o processo básico que é, após as definições, apresentar alguns exemplos resolvidos e propor em seguida numerosos exercícios. No capítulo 8, destinado as soluções dos exercícios, são apresentadas as resoluções de todos os exercícios e alguns com mais de uma forma de resolver. Esse capítulo, considero importantíssimo, pois, possibilita ao professor fazer a auto correção.

Livro 2: Coleção Novo Olhar Matemática – Vol. 2

Figura 25 – Novo Olhar Matemática.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: Nesse livro, o assunto Análise Combinatória representa o capítulo *8* com início na página *216*. É apresentado uma situação problema para mostrar a importância do assunto e segue para o Princípio Fundamental Da Contagem. O autor resolve algumas situações mostrando o diagrama de árvore ou árvores de possibilidades para poder realizar as contagens dos elementos e logo depois apresenta o princípio multiplicativo. Utiliza problemas muito bem contextualizados e bem ilustrado, o que desperta o interesse do aluno para a questão.

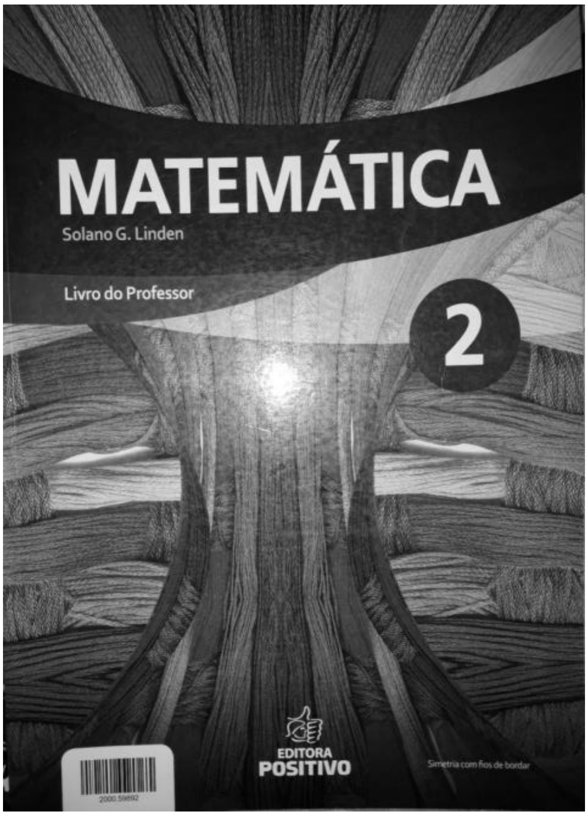
A sequência seguida pelo autor no livro é: (1) Princípio Fundamental da Contagem; (2) Fatorial; (3) Arranjos Simples; (4) Permutação Simples; (5) Combinação Simples; (6)

Permutação com repetição. Quase todos os exemplos resolvidos são feitos com o uso das fórmulas.

O livro não apresenta nenhum tipo de roteiro para as resoluções das questões e nem faz qualquer tipo de recomendação, algo como um passo a passo. O autor, a partir das suas ideias e interpretações, parte direto para a resolução e o faz quase sempre com o uso das fórmulas que no livro são demonstradas. Outro ponto que devemos citar é o fato de que não são apresentadas outras formas de resolver uma mesma questão e vejo isso como ponto negativo, pois, acredito que isso fará com que os alunos acreditem que as resoluções das questões de análise combinatória se dão apenas de uma única maneira, o que não é verdade.

Livro 3: MATEMÁTICA – Vol. 2

Figura 26 – MATEMÁTICA Vol. 2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: A Análise combinatória está fragmentada em capítulos. Ela abrange os capítulos: 20, que inicia na página 240, 21 e 22. O autor faz um breve histórico e indica a importância do assunto na atualidade.

A sequência seguida no livro é:

Capítulo 20: Princípio Fundamental Da Contagem.

Nesse capítulo o autor mostra os princípios aditivos e multiplicativos aplicados em situações problemas. Logo em seguida defini o que vem a ser FATORIAL. Finaliza o capítulo com vários exercícios propostos e com a adição de questões de vestibulares.

Capítulo 21: Permutação.

Inicia o capítulo com uma situação problema e afirma que em combinatória existem dois processos fundamentais: escolher e misturar, onde permutar é o de misturar.

Mostra a Permutação Simples, a Permutação com Repetição, Permutação Circular todos a partir de um problema. Segue o padrão com exemplos resolvidos e exercícios propostos.

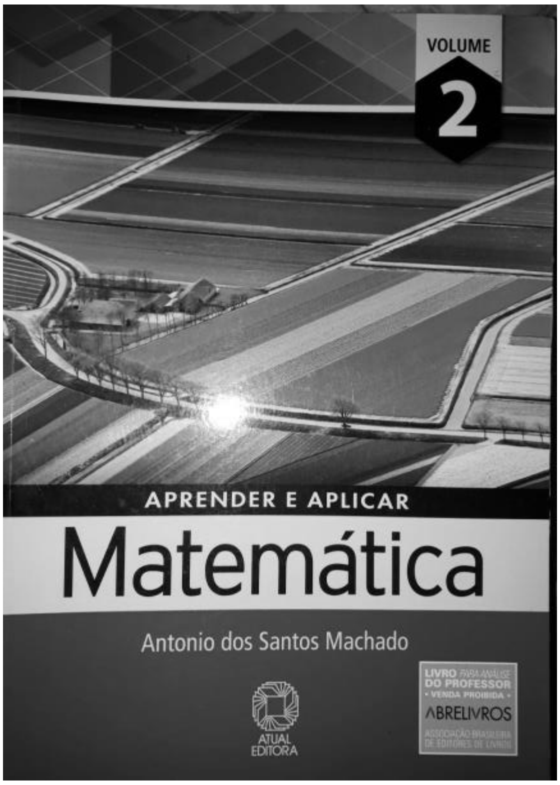
Capítulo 22: Combinação Simples.

Assim como nos capítulos anteriores, parte de uma situação problema e defini a Combinação Simples onde aqui é se encontra o processo de escolher e finaliza com os Arranjos Simples.

Novamente temos aqui um livro no qual sempre é apresentado uma única forma de resolução para os problemas de combinatória e pra piorar, nem todas as atividades possuem respostas para que o aluno faça a auto correção.

Livro 4: APRENDER E APLICAR MATEMÁTICA – Vol. 2

Figura 27 – Aprender e Aplicar.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: O autor faz a seguinte divisão do assunto:

Capítulo *11*: princípios da contagem. fatoriais

Capítulo *12*: Análise combinatória

No Capítulo *11* apresenta o Princípio Fundamental Da Contagem através do problema de determinar o número de maneiras de realizar os trajetos entre cidades. Constrói a **árvore de possibilidades** para logo em seguida enunciar o Princípio Multiplicativo, seguido do Princípio Aditivo e dos Fatorias.

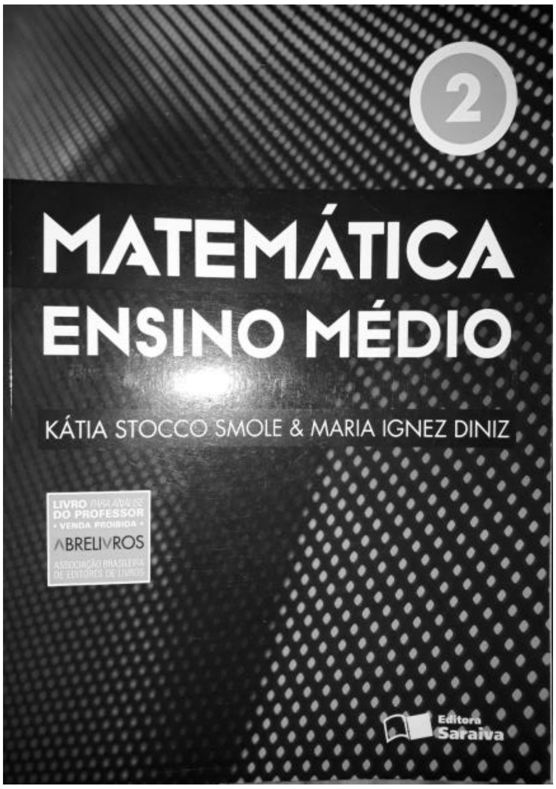
É somente no Capítulo *12* que o autor vai definir a análise combinatória. Para o autor, análise combinatória é a parte da matemática em que estudamos as técnicas de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um dado conjunto.

Em seguida vemos as Permutações tanto com elementos distintos como com elementos repetidos. Finaliza apresentando as Combinações e os Arranjos

Assim como os dois últimos livros analisados, parte de situações problemas e só apresenta uma única forma de resolver cada questão, ou seja, não apresenta nada de diferenciado em relação aos últimos livros analisados.

Livro 5: MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO – Vol. 2

Figura 28 – Matemática Ensino Médio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: O livro apresenta Contagem na unidade 5 a partir da página 113 e dedica toda essa unidade para esse assunto.

A divisão dos tópicos foi feita da seguinte maneira: (1) Problemas De Contagem; (2) Princípio Fundamental Da Contagem; (3) Permutações E Arranjos Simples; (4) Fatorial; (5) Combinação Simples; (6) Permutação Com Repetição.

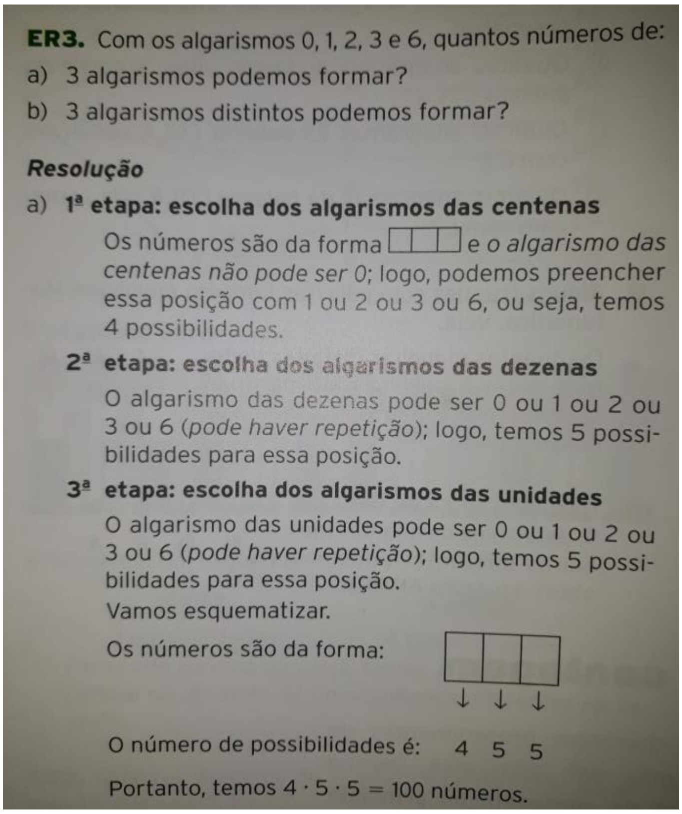
Um diferencial desse livro para os analisados é que logo no primeiro exemplo resolvido, as autoras mostram seis maneiras diferentes de se resolver o problema e no segundo exemplo, quatro formas distintas de resolução. Interessante que nos exercícios propostos segue a seguinte instrução:

“Em todos os problemas a seguir, procure utilizar dois ou mais recursos para a resolução. Não despreze nenhum: use desenho, tabela, diagrama ou faça uma lista dos elementos ou dos possíveis resultados.”

Essa maneira torna-se ótima em sala de aula pra interação com os alunos, pois com certeza teremos formas diferentes de resolução por parte deles, porém isso se torna possível quando você “abre a mente” para o aluno pensar a respeito.

Outro detalhe importante é que na resolução de alguns exercícios, as autoras mostram etapas a serem seguidas (vide figura 29).

Figura 29 – Exercício com descrição de etapas.



ER3. Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 6, quantos números de:

a) 3 algarismos podemos formar?

b) 3 algarismos distintos podemos formar?

Resolução

a) **1ª etapa: escolha dos algarismos das centenas**

Os números são da forma ☐☐☐ e *o algarismo das centenas não pode ser 0*; logo, podemos preencher essa posição com 1 ou 2 ou 3 ou 6, ou seja, temos 4 possibilidades.

2ª etapa: escolha dos algarismos das dezenas

O algarismo das dezenas pode ser 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 6 (*pode haver repetição*); logo, temos 5 possibilidades para essa posição.

3ª etapa: escolha dos algarismos das unidades

O algarismo das unidades pode ser 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 6 (*pode haver repetição*); logo, temos 5 possibilidades para essa posição.

Vamos esquematizar.

Os números são da forma: ☐☐☐

↓ ↓ ↓

O número de possibilidades é: 4 5 5

Portanto, temos $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números.

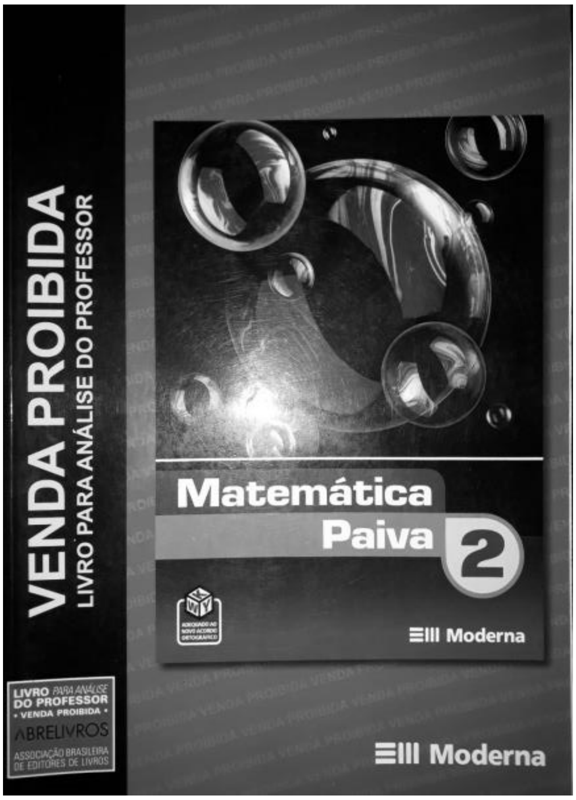
Fonte: SMOLE; DINIZ, 2013, p. 116.

Esse é o primeiro livro voltado para alunos do ensino médio, entre os analisados, que mostra etapas para serem seguidas na resolução de um problema de contagem.

A autora Kátia Stocco Smole já foi Secretária de Educação Básica no MEC e membro do Conselho Nacional de Educação.

Livro 6: MATEMÁTICA – Vol. 2

Figura 30 - MATEMÁTICA PAIVA.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: Na página 261 o capítulo 8 é destinado para Análise Combinatória.

O livro segue a seguinte sequência:

(1) O Que É Análise Combinatória;

(2) Princípio Fundamental Da Contagem;

(3) Princípio Aditivo Da Contagem;

(4) Fatorial;

(5) Classificação Dos Agrupamentos

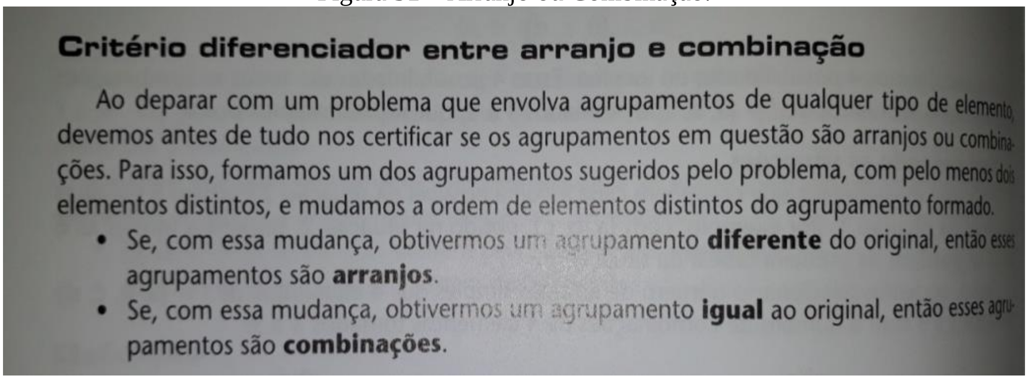
Nesse tópico o autor classifica os agrupamentos como arranjos e combinações

Arranjos

Permutações: simples e com elementos repetidos

A figura 30 mostra o autor explicando um critério para diferenciar um problema de arranjo de um problema de combinação. E pensar que a combinação é uma forma de arranjo.

Figura 31 – Arranjo ou Combinação.



Critério diferenciador entre arranjo e combinação

Ao deparar com um problema que envolva agrupamentos de qualquer tipo de elemento, devemos antes de tudo nos certificar se os agrupamentos em questão são arranjos ou combinações. Para isso, formamos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos, e mudamos a ordem de elementos distintos do agrupamento formado.

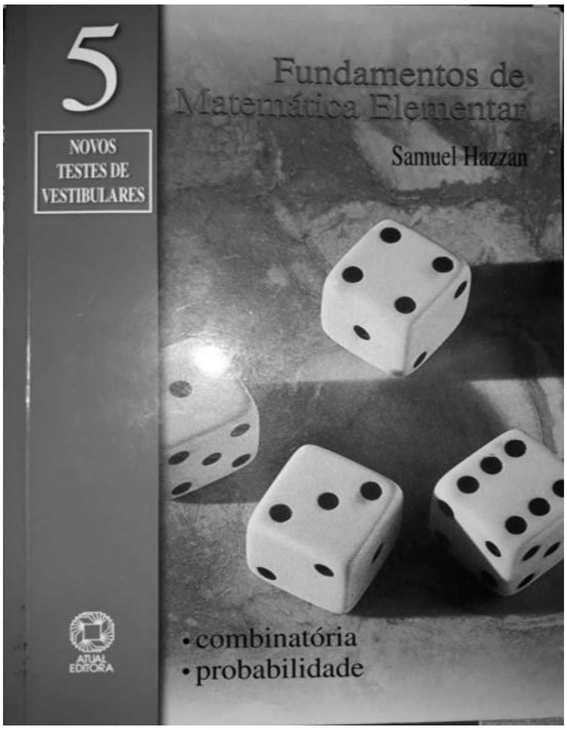
- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esses agrupamentos são **arranjos**.
- Se, com essa mudança, obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esses agrupamentos são **combinações**.

Fonte: PAIVA, 2010, p.288.

A metodologia usada é comum a utilizada pela maioria dos livros: exemplo resolvidos e exercícios propostos. Novamente vemos que cada um dos problemas é feito de uma única forma. O destaque fica para a grande variedade de exercícios propostos.

Livro 7: Fundamentos De Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade – Vol. 5.

Figura 32 – Fundamentos De Matemática Elementar.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Análise: Volume 5 de uma conceituada coleção que pretende atender alunos do ensino médio que pruram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e, para universitários que necessitam rever a Matemática Elementar. Não raro vemos alunos de licenciatura plena em Matemática consultando livros dessa coleção.

A análise combinatória compõe todo o capítulo 1 do livro e segue a seguinte sequência de apresentação: (1) Introdução; (2) Princípio Fundamental Da Contagem; (3) Consequência Do Princípio Fundamental Da Contagem; (4) Arranjo Com Repetição; (5) Arranjos; (6) Permutações; (7) Fatorial; (8) Combinações; (9) Permutações Com Elementos Repetidos; (10) Complementos.

Nesse complemento está como determinar o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear

O livro faz um aprofundamento considerável na teoria tanto que utiliza o “princípio da indução finita” para mostrar a validade do princípio fundamental da contagem. Realmente trata-se de um livro para o aluno que quer aprofundar o seu conhecimento, afinal, requer que esse mesmo aluno já tenha uma boa base em matemática para acompanhar os exercícios propostos.

Após analisar esses sete livros e suas metodologias, vejo como tão relevante é esse trabalho para o ensino de análise combinatória tanto para alunos como professores.

7 UM ROTEIRO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A BNCC (BRASIL, 2018, p.275) no que diz respeito ao ensino da análise combinatória diz que:

> Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.

Como a base sugere algumas atitudes iniciais pra resolução dos problemas de contagem. Ela não mostra de que forma o professor deve apresentar as resoluções desses problemas. Pensando nisso, apresentaremos uma proposta metodológica para resolver problemas de análise combinatória.

7.1 Descrição do Roteiro

Num problema de Análise combinatória há pelo menos uma questão a ser solucionada e entre essas questões podemos destacar uma questão central, por exemplo:

Exemplo $7.1.1$: Quantos números, com dois algarismos distintos, são possíveis formar, utilizando os algarismos $1, 2, 3$?

Nesse problema, a questão central é determinar a quantidade de números, com dois algarismos distintos, que são possíveis formar, utilizando os algarismos $1, 2, 3$

Chamaremos de questão principal que indicaremos por (Q), ao conjunto de todas as possibilidades da questão central a ser solucionada então, o número de possibilidades de Q ocorrer será dado pelo número de elementos de Q denotado por $n(Q)$.

Nesse caso, o conjunto das possibilidades são os seguintes:

Começando pelo algarismo 1 os números: $12, 13$

Começando pelo algarismo 2 os números: $21, 23$

E começando pelo algarismo 3 os números: $31, 32$

Logo, o número de possibilidades para Q ocorrer é igual a 6, ou seja, Q possui 6 elementos, isto é, $n(Q) = 6$

Em uma grande quantidade de problemas de contagem a determinação do número de elementos da questão principal não será tão simples de determinar e às vezes inviável enumerar. Nesse caso, decompomos a questão principal em n questões auxiliares que denotaremos por (q_n).

Chamaremos de questões auxiliares a todo problema que após solucionado auxiliarão ou determinarão a resolução da questão principal (Q)

No caso de decompormos a questão principal (Q) em n questões auxiliares (q_n), devemos calcular primeiro o número de possibilidades de cada questão auxiliar ocorrer, e esse cálculo será feito utilizando todas as técnicas de contagem que conhecemos até então:

Princípios Aditivo, Princípio Multiplicativo, Arranjos Simples, Permutações simples, Permutação com repetições, Combinações simples, Permutações Caóticas e Permutação Circular. Após o cálculo das questões auxiliares realizados, partiremos para o cálculo do $n(Q)$.

Vejamos alguns exemplos onde a questão principal deve ser decomposta em questões auxiliares:

Exemplo $7.1.2$: Quantas peças têm um jogo de dominó?

Questão Principal (Q): determinar o número de peças de um jogo de dominó

Questões Auxiliares (q_n):

$q_{1:}$ pecas com o número 0 (zero)

$$00, 01, 02, 03, 04, 05, 06$$

Logo, $n(q_1) = 7$

$q_{2:}$ pecas com o número 1

$$11, 12, 13, 14, 15, 16$$

Logo, $n(q_2) = 6$

$q_{3:}$ pecas com o número 2

$$22, 23, 24, 25, 26$$

Logo, $n(q_3) = 5$

$q_{4:}$ pecas com o número 3

$$33, 34, 35, 36$$

Logo, $n(q_4) = 4$

$q_{5:}$ pecas com o número 4

$$44, 45, 46$$

Logo, $n(q_5) = 3$

$q_{6:}$ pecas com o número 5

$$55, 56$$

Logo, $n(q_6) = 2$

$q_{7:}$ pecas com o número 6

$$66$$

Logo, $n(q_7) = 1$

Então, como as questões auxiliares não possuem elementos em comum podemos calcular o $n(Q)$ pelo PRINCÍPIO ADITIVO.

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2) + n(q_3) + n(q_4) + n(q_5) + n(q_6) + n(q_7) + n(q_8)$$

$$n(Q) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

Portanto, o jogo de dominó possui 28 peças

Exemplo $7.1.3$: Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados?

Questão Principal (Q): determinar o número de diagonais de um polígono convexo de n lados

Questões Auxiliares (q_n):

q_1: Número de segmentos determinado pelos n vértices

Nesse caso trata-se de uma combinação dos n vértices tomados 2 a 2

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$$

Logo, $n(q_1) = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$

q_2: O número de lados do polígono

Logo, $n(q_2) = n$

O número de diagonais será dado pela diferença entre o número total de segmentos determinado pelo número de lados, ou seja, $n(Q) = n(q_1) - n(q_2)$

$$n(Q) = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - n$$

$$n(Q) = \frac{n! - n \cdot 2! \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!}$$

$$n(Q) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! - n \cdot 2! \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!}$$

$$n(Q) = \frac{n \cdot (n-1) - n \cdot 2}{2}$$

$$n(Q) = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$\therefore n(Q) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Portanto, o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$

Diante disso, estabelecemos o seguinte roteiro para resolver questões de análise combinatória:

1º) **Identificar a questão principal.**

Basicamente representa reconhecer qual é o problema principal da questão.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Verificar, se existir, quais são as outras questões que devem ser resolvidas para solucionar a questão principal.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para isso devem ser utilizados as técnicas de contagens.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Para isso devemos usar as técnicas de contagens bem como as soluções das questões auxiliares se for o caso.

O roteiro segue os passos do método de POLYA para resolução de problemas, onde:

a) Identificar a questão principal é de certa forma entender o que o problema propõe;
b) Fixar as questões auxiliares tem a mesma ideia de traçar as metas a serem seguidas;
c) Calcular o número de possibilidades de cada questão e da questão principal é executar;
d) A resposta obtida pode ser verificada construindo-se a arvore de possibilidades e enumerando seus elementos ou mesmo resolvendo o problema de outra maneira.

Um detalhe que é muito importante notar é o fato de esse roteiro não tira o brilho dos problemas de contagem que é o pensar, porém, faz com que organizemos o processo desta forma de pensar.

Aplicaremos agora esse roteiro em diversas questões que foram selecionadas de várias provas seja de concursos público. Provas em grande escala como, por exemplo, OBMEP e o ENEM, Escolas Militares entre outros e com dificuldades distintas. Sobre essas dificuldades, sabemos que a dificuldade é relativa de cada um. Uma questão que demora ser solucionada por uma pessoa pode ser solucionada rapidamente por outra. Mas, no caso das questões do ENEM consideramos aquelas que tiveram o maior número de erros pelos candidatos como difíceis de acordo com as estatísticas do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Consideremos difícil também, as questões nos quais são necessárias técnicas menos usuais por um aluno do ensino médio como permutação caótica, princípio da casa dos pombos etc. bem como aquelas que necessitam as vezes resolver várias questões auxiliares para se chegar na solução da questão principal. Buscamos diferenciar bem as questões principais dos problemas para mostrar como podemos aplicar o roteiro didático.

7.2 Aplicando o Roteiro Didático

Nessa seção apresentaremos várias questões resolvidas utilizando o roteiro proposto:

7.2.1 Aplicando o Roteiro Em Problemas Diversos

Questão $\mathbf{7.2.1}$ Quantos são os números pares formado por três algarismos distintos?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a quantidade de números pares formado por três algarismos distintos.

Fazendo um paralelo com as etapas para resolver problemas proposto por Polya, essa seria o entender o problema.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Números pares terminados por 0 (zero).

q_2: Números pares não terminado por 0 (zero).

Aqui podemos verificar a 2ª etapa de Polya para resolver um problema, pois temos aqui um planejamento para resolver o problema ao identificarmos as questões auxiliares.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Considerando q_1 teremos que verificar as possibilidades para os dois primeiros algarismos:

1º algarismo: 9 possibilidades, pois, poderá ser qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2º algarismo: 8 possibilidades afinal, escolhido o 1º e o 3º restam 8 algarismos para escolha.

Então, pelo PFC teremos $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$. Portanto, $n(q_1) = 72$.

Consideremos agora q_2.

Sendo o 3º algarismo diferente de 0 (zero) teremos para ele então, 4 possibilidades de escolha: $2, 4, 6, 8$.

O 1º algarismo pode ser qualquer algarismo **menos** o que foi utilizado pelo 3º e o 0 (zero), logo, teremos 8 possibilidades.

O 2º algarismo possui 8 possibilidades de escolha, afinal não poderá ser os escolhidos como 1º e nem como 3º, porém o 0 (zero) pode ser uma opção.

Logo, pelo PFC teremos $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$. Portanto, $n(q_2) = 256$

Já aqui na 3ª e na 4ª etapa estamos executando o que foi planejado:

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2)$$

$$n(Q) = 72 + 256 = 328$$

Logo, temos 328 números pares formado por três algarismos distintos.

Finalmente resolvemos o problema. Como na maioria das questões de combinatória o quantitativo da resposta é muito alto. Não se torna viável enumerar. Porém, para uma quantidade pequena podemos fazer a verificação por enumeração ou mesmo apresentando uma outra forma de resolver para ver se a resposta confere caso não seja possível.

Questão $\mathbf{7.2.2}$ Quantos são os anagramas da palavra CALOR? Quantos começam com consoantes?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de anagramas da palavra CALOR.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

É um caso clássico de permutação. A questão auxiliar é equivalente à questão principal.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

$$n(q) = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como $n(Q) = n(q)$ teremos então 120 anagramas para a palavra CALOR.

Para a outra pergunta:

Quantos começam com consoantes?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de anagramas da palavra CALOR que começam por consoantes.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Possibilidades de escolha para a primeira letra do anagrama;

q_2: Possibilidades de escolha para a segunda letra do anagrama;

q_3: Possibilidades de escolha para a terceira letra do anagrama;

q_4: Possibilidades de escolha para a quarta letra do anagrama;

q_5: Possibilidades de escolha para a quinta letra do anagrama;

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como deve ser uma consoante teremos três possibilidades: C, L, R. Portanto, $n(q_1) = 3$;

Podemos escolher qualquer letra com exceção da escolhida para iniciar, logo teremos quatro possibilidades. Portanto, $n(q_2) = 4$;

Podemos escolher qualquer letra com exceção da duas anteriores escolhidas, logo teremos três possibilidades. Portanto, $n(q_3) = 3$;

Podemos escolher qualquer letra com exceção da três anteriores escolhidas, logo teremos duas possibilidades. Portanto, $n(q_4) = 2$;

Como já foram escolhidas quatro letras, só nos resta uma possibilidade. Portanto, $n(q_5) = 1$.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Nesse caso pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot n(q_3) \cdot n(q_4) \cdot n(q_5)$$

$$n(Q) = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$$

Portanto, teremos 72 anagramas da palavra CALOR que começam com consoante.

Outra forma de resolução seria:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de anagramas da palavra CALOR que começam por consoantes.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1; Possibilidades de escolha da primeira letra (Opção mais restritiva).

q_2: Possibilidades de escolhas de letras para as outras quatro posições.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Começaremos pelo q_1,

Como deve ser uma consoante teremos três possibilidades: C, L, R. Portanto, $n(q_1) = 3$.

Como a única restrição para as demais é não utilizar a letra que iniciará o anagrama, podemos **permutar** todas as outras quatro letras.

Logo, $n(q_2) = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2)$$
$$n(Q) = 3 \cdot 24 = 72$$

Portanto, teremos 72 anagramas da palavra CALOR que começam com consoante.

Questão $7.2.3$ Quantos são os números inteiros positivos menores que 1000 e que tem algarismos distintos?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a quantidade de números inteiros positivos menores que 1000 e que tem algarismos distintos.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Como devem ser menores que 1000, então, no máximo devem ser formados por 3 algarismos, então, teremos:

q_1: Total de números inteiros positivos formado por apenas 1 algarismo;

q_2: Total de números inteiros positivos formado por 2 algarismos;

q_3: Total de números inteiros positivos formado por 3 algarismos;

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

$n(q_1) = 9$ pois teremos os seguintes números inteiros positivos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$;

Para o cálculo da q_2 teremos um arranjo dos 10 algarismos tomados 2 a 2 menos os que começam por 0 (zero) então, $n(q_2) = A(10{,}2) - 9 = 90 - 9 = 81$;

O raciocínio se repete para o cálculo da q_3. Vamos calcular um arranjo dos 10 algarismos tomados 3 a 3 menos os que começam por 0 (zero) então, $n(q_3) = A(10{,}3) - 9 \cdot 8 = 720 - 72 = 648$.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q) + n(q_2) + n(q_3)$$
$$n(Q) = 9 + 81 + 648 = 738$$

Portanto, são 738 números inteiros positivos menores que 1000 e que tem algarismos distintos;

Questão $\mathbf{7.2.4}$ Formando e dispondo em ordem crescente todos os números que se obtém permutando os algarismos $1, 2, 3$ e 4. Qual é a posição ocupada pelo número 4 213?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a posição ocupada pelo número $4\,213$ quando dispondo em ordem crescente todos os números que se obtém permutando os algarismos $1, 2, 3$ e 4.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Total de permutações que começam pelo algarismo 1, pois, seguiremos a ordem crescente;

q_2:Total de permutações que começam pelo algarismo 2;

q_3:Total de permutações que começam pelo algarismo 3;

q_4: Total de permutações que começam pelo algarismo 4 até o número $4\,213$.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Nesse caso teremos $n(q_1) = n(q_2) = n(q_3) = P_3 = 3! = 6$ pois nas três situações o primeiro algarismo é fixo

A atenção fica com a q_4:

No caso dos números que começam com 41 teremos que permutar os dois últimos algarismo. Assim teremos $P_2 = 2! = 2$ que são os números 4123 e 4132. Sendo assim, o **próximo** número já será o $4\,213$.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2) + n(q_3) + n(q_4)$$
$$n(Q) = 6 + 6 + 6 + 2 = 20$$

Portanto, a posição do número $4\,213$ será a $21^{\underline{a}}$ já que ele será o próximo na sequência.

Questão $\mathbf{7.2.5}$ De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número total de modos que 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de forma que as pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

O problema é de permutação circular.

q_1: Total de permutações circulares com as meninas.

q_2: Total de modos que podemos posicionar os meninos.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para $q_1$teremos que $n(q_1) = (PC)_5 = (5-1)! = 4! = 24$.

Para q_2, temos que colocar os meninos **entre** as meninas, afinal pessoas do mesmo sexo **não** podem ficar juntas e isso pode ser feito através da permutação dos 5 meninos. Portanto, $n(q_2) = 5! = 120$.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2)$$
$$n(Q) = 24 \cdot 120 = 2\,880$$

Portanto, o número total de modos que 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de forma que as pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas é de $2\,880$.

7.2.2 Aplicando o Roteiro em Questões de Concurso Público

Questão $7.2.6$ (CFO-DF/ Técnico Administrativo – QUADRIX 2020):

Julgue:

Suponha-se que, na solenidade de abertura do Congresso da Associação Brasileira de Odontologia, 5 autoridades devam compor a mesa e o presidente da Associação ocupe o assento do meio da mesa. Nesse caso, se não existirem prioridades entre as demais autoridades, então há 24 possibilidades para elas ocuparem os 4 assentos restantes.

a) CERTO

B) ERRADO

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras que 4 autoridades devem ocupar os 4 lugares restantes de uma mesa com um total de 5 lugares, sendo que o presidente da Associação irá ocupar o assento do meio da mesa e não existem prioridades entre as demais autoridades.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Nessa situação a q_1 é equivalente a Q, pois, não existe prioridade entre os 4 membros restantes.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como não existe prioridade, basta fazermos a permutação com as 4 autoridades destantes

$$n(q_1) = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

$$n(Q) = n(q_1) = 24$$

Portanto, a assertiva está CERTA.

Questão $7.2.7$ (Polícia Militar-BA/ Soldado – IBFC 2019):

Em uma prateleira de uma biblioteca, deseja-se dispor 4 livros de maneiras distintas. Sabendo que a prateleira possui 10 espaços em que os livros podem ser colocados, assinale a alternativa que apresenta corretamente a quantidade de maneira que esses livros podem ser dispostos nessa prateleira.

a) $3\ 628\ 800$

b) $5\ 040$

c) $151\ 200$

d) 720

e) 24

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneira que podemos dispor 4 livros de maneiras distintas tendo 10 espaços disponíveis em uma prateleira

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Nessa situação a q_1 é equivalente a Q, pois se trata de um problema de arranjo simples de 10 livros tomados 4 a 4. Afinal a **ordem** com que os livros ficaram dispostos é importante

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

$$n(q) = A(10{,}4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\ 040$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

$$n(Q) = n(q_1) = 5\ 040$$

Portanto, alternativa letra B.

Questão $7.2.8$ (<u>BAHIAGÁS/ Técnico de Processos Organizacionais - Administrativo</u> - FCC 2010):

Um programa de televisão convida o telespectador a participar de um jogo por telefone em que a pessoa tem que responder SIM ou NÃO em 10 perguntas sobre ortografia. O número máximo de respostas diferentes ao teste que o programa pode receber é

a)2 048

b) 1 024

c) 512

d) 200

e) 20

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de respostas diferentes que um teste de 10 perguntas pode ter sendo SIM ou NÃO as opções de reposta em cada pergunta

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Para essa situação teremos 10 questões auxiliares e todos elas equivalentes, pois cada pergunta é respondida sempre se tendo duas opções apenas: SIM ou NÃO

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = q_9 = q_{10}$: Número de possibilidades de resposta para cada pergunta

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como são apenas duas opções de resposta, temos que $n(q_1) = 2! = 2$

Todos as 10 questões auxiliares são equivalentes

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos então

$$n(Q) = n(q_1)\,.\,n(q_2)\cdot n(q_3)\cdot\ n(q_4)\cdot\ n(q_5)\cdot\ n(q_6)\cdot\ n(q_7)\cdot\ n(q_8)\cdot\ n(q_9)\cdot\ n(q_{10})$$

$$n(Q) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{10} = 1\ 024$$

Portanto, alternativa letra B.

Questão $7.2.9$ (Prefeitura do Recife – Assistente de Gestão Pública/ FCC 2019):

Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

a) de 4 maneiras diferentes.

b) de 24 maneiras diferentes.

c) de 9 maneiras diferentes.

d) de 6 maneiras diferentes.

e) de 12 maneiras diferentes.

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneira que os quatro funcionários podem ser realocados na sala em que trabalham, cada um com uma mesa, de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Nesse caso temos uma questão direta de permutação caótica. Logo, a questão auxiliar é equivalente a questão principal, ou seja, $q_1 = Q$

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

$$n(q_1) = D_4 = 4!\cdot\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$$

$$n(q_1) = \left(\frac{4!}{0!} - \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!}\right)$$

$$n(q_1) = \left(4! - 4! + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} - \frac{4 \cdot 3!}{3!} + 1\right)$$
$$n(q_1) = 4 \cdot 3 - 4 + 1 = 9$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como $q_1 = Q$, então $n(Q) = n(q) = 9$

Portanto, alternativa letra C.

Questão $7.2.10$ (DETRAN-PA/ Agente de Fiscalização de Trânsito – FADESP 2019):

Em um fictício país K, a identificação das placas dos veículos é constituída por duas das 26 letras do alfabeto e quatro algarismos de zero a nove, sendo que as duas letras devem sempre estar juntas, como nos exemplos abaixo.

A quantidade máxima de placas do país K que não possuem letras repetidas nem algarismos repetidos é igual a

a) $33\ 800\ 000$.

b) $16\ 380\ 000$

c) $10\ 280\ 000$

d) $6\ 760\ 000$

e) $3\ 276\ 000$.

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a quantidade de placas do país K que não possuem letras repetidas nem algarismos repetidos

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de possibilidades para a escolha das duas letras

q_2: Número de possibilidades para a escolha dos quatro algarismos

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para a q_1 teremos um arranjo simples das 26 letras tomadas 2 a 2 sendo que, elas juntas, podem ocupar 5 posições. Portanto,

$$n(q_1) = 5 \cdot A(26{,}2) = 5 \cdot \frac{26!}{(26-2)!} = 5 \cdot \frac{26!}{24!} = 5 \cdot \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!} = 5 \cdot 26 \cdot 25 = 3\ 250$$

Para a $q_2$teremos outro arranjo simples de 10 algarismos tomados 4 a 4.

Portanto, $n(q_2) = A(10{,}4) = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\ 040.$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC temos que $n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) = 3\ 250 \cdot 5\ 040 = 16\ 380\ 000$

Portanto, alternativa letra B.

7.2.3 Aplicando o Roteiro em Questões De Vestibulares

Questão $7.2.11$ (FUVEST/2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo-secreto (ou amigo-oculto). O nome de cada um é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna. Em seguida, cada participante da brincadeira retira da urna um dos pedaços de papel, ao acaso. Qual a probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome?

a) $^1/_4$
b) $^7/_{24}$
c) $^1/_3$
d) $^3/_8$
e) $^5/_{12}$

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Calcular a probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número total de possibilidades de um amigo tirar um nome seja o seu ou não

q_2: Número de possibilidades de que nenhum amigo retire seu próprio nome

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para a $q_1$temos uma permutação entre os quatro amigos.

Logo, $n(q_1) = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Já para q_2 termos uma Permutação Caótica ou Desarranjo de 4 elementos.

Logo, $D_4 = 4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = \frac{4!}{0!} - \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 1 - 1 + 4 \cdot 3 - 4 + 1 = 9$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como a questão principal se trata de uma probabilidade teremos: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

Portanto, letra D.

Questão $7.2.12$ (UFPel – RS) Sendo 15 pontos distintos pertencentes a uma circunferência, o número de retas, distintas, determinadas por esses pontos, é:

a) 14

b) 91

c) 105

d) 210

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de retas que podemos formar com 15 pontos distintos pertencentes a uma circunferência

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Nessa situação a q_1 é equivalente a Q, pois se trata de um problema de combinação simples de 15 pontos tomados 2 a 2. Afinal a **ordem** com que os pontos são escolhidos não altera a reta que os contém: A reta $\overleftrightarrow{AB}$é a mesma reta $\overleftrightarrow{BA}$

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

$$n(e_1) = C_{15,2} = \frac{15!}{2! \cdot (15-2)!} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 13!} = 15 \cdot 7 = 105$$

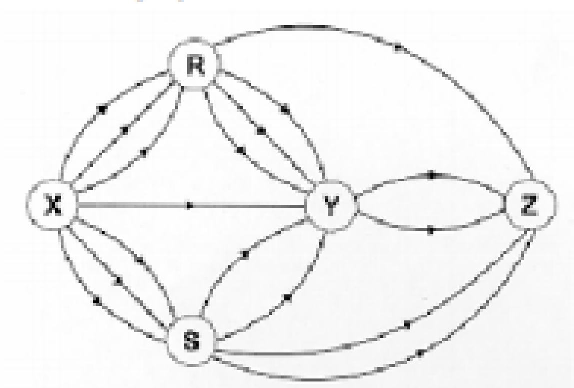
4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

$$n(Q) = n(q) = 105$$

Poderemos então formar 105 retas

Portanto, alternativa letra C.

Questão 7.2.13 (UFMG) Observe o diagrama:



O número de ligações distintas entre X e Z é:

a) 39

b) 41

c) 35

d) 45

e) 60

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de ligações distintas entre X e Z

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de ligações que partem de X e passam apenas por R

q_2: Número de ligações que partem de X e passam por R e depois por Y

q_3: Número de ligações que partem de X e passam apenas por Y

q_4: Número de ligações que partem de X e passam apenas por S

q_5: Número de ligações que partem de X e passam por S e depois por Y

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

A q_1 se dará por duas etapas: de X para R (três possibilidades) e de R para Z (uma possibilidade)

Logo, teremos pelo PFC que $n(q_1) = 3 \cdot 1 = 3$

A q_2 se dará por três etapas: de X para R (três possibilidades) e de R para Y (três possibilidade) e de Y para Z (duas possibilidades)

Logo, teremos pelo PFC que $n(q_2) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

A q_3 se dará por duas etapas: de X para Y (uma possibilidade) e de Y para Z (duas possibilidades)

Logo, teremos pelo PFC que $n(q_3) = 1 \cdot 2 = 2$

A q_4 se dará por duas etapas: de X para S (três possibilidades) e de S para Z (duas possibilidades)

Logo, teremos pelo PFC que $n(q_4) = 3 \cdot 2 = 6$

A q_5 se dará por três etapas: de X para S (três possibilidades) e de S para Y (duas possibilidades) e de Y para Z (duas possibilidades)

Logo, teremos pelo PFC que $n(q_5) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

4º) **Calcular o número de possibilidades do evento principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2) + n(q_3) + n(q_4) + n(q_5)$$

$$n(Q) = 3 + 18 + 2 + 6 + 12 = 41$$

Teremos 41 caminhos distintos entre X e Z

Portanto, Alternativa letra B.

Questão $7.2.14$ (UFF-RJ) Um piano de brinquedo possui 7 teclas, que emitem sons distintos entre si, correspondentes as 7 notas da pauta abaixo. Se forem pressionadas, ao mesmo tempo, no mínimo 3 e no máximo 6 teclas, o total de sons diferentes que podem ser obtidos é:

a) 21

b) 28

c) 42

d) 63

e) 98

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de sons distintos obtidos ao se pressionar no mínimo 3 e no máximo 6 teclas em um total de 7

$2^{\underline{o}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

q: Número de sons obtidos ao pressionar 3 teclas

q_2: Número de sons obtidos ao pressionar 4 teclas

q_3: Número de sons obtidos ao pressionar 5 teclas

q_4: Número de sons obtidos ao pressionar 6 teclas

$3^{\underline{o}}$) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como o som será o mesmo ao pressionarmos certa quantidade de teclas juntas, então estamos diante de um problema de combinação simples, pois a ordem não terá importância.

Calcularemos pra 3 teclas, depois pra 4 até chegarmos nas 6:

$$n(q_1) = C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

$$n(q_2) = C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 35$$

$$n(q_3) = C_{7,5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

$$n(q_4) = C_{7,6} = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1} = 7$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2) + n(q_3) + n(q_4)$$

$$n(Q) = 35 + 35 + 21 + 7 = 98$$

Teremos 98 sons distintos ao pressionarmos no mínimo 3 e no máximo 6 teclas

Portanto, Alternativa letra E.

Questão $\mathbf{7.2.15}$ (UFMG) Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

a) $3 \cdot (5!)^3$

b)$(5!)^3$

c) $(3!) \cdot (5!)^3$

d) $\frac{15!}{3! \cdot 5!}$

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras distintas que 15 pessoas podem formar uma fila sendo que as três primeiras vistam cores diferentes e as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q: Número de maneiras para a escolha das cores das três primeiras pessoas

q_2: Número de maneiras com que cada escolha em e_1 se posicione ao longo da fila

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

As três primeiras pessoas devem ter cores diferentes, logo a primeira pessoa terá três possibilidades de escolha entre as cores visto que temos três cores apenas: Amarela (A), Verde (Vd) e Vermelha (Vm). A segunda terá duas possibilidades, afinal sua camisa deve ter uma cor diferente da que a primeira escolheu e restando para a terceira pessoa somente uma opção.

Logo, $n(q_1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$

Escolhida as cores das três primeiras pessoas e lembrando que essa sequência deve se repetir, então terá a seguinte situação:

Supondo que a escolha foi: A, Vd e Vm

Qualquer uma das cinco pessoas pode começar a fila com a cor amarela. lembrando que cada uma das três cores de camisa é usada por cinco pessoas exatamente.

A mesma coisa vai ocorrer com a escolha da segunda pessoa da fila e para escolha da terceira pessoa. Porém, na segunda sequência de três cores teremos agora quatro possibilidades de escolha para cada pessoa e o raciocínio segue até a quinta e última sequência de três cores:

1ª sequência: Amarela, Verde, Vermelha

Pelo PFC teremos $5 \cdot 5 \cdot 5$

2ª sequência: Amarela, Verde, Vermelha

Pelo PFC teremos $4 \cdot 4 \cdot 4$

3ª sequência: Amarela, Verde, Vermelha

Pelo PFC teremos $3 \cdot 3 \cdot 3$

4ª sequência: Amarela, Verde, Vermelha

Pelo PFC teremos $2 \cdot 2 \cdot 2$

5ª sequência: Amarela, Verde, Vermelha

Pelo PFC teremos $1 \cdot 1 \cdot 1$

Logo, pelo PFC teremos que $n(q_2) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

ou $n(q_2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$n(q_2) = 5! \cdot 5! \cdot 5! = (5!)^3$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2)$$

$$n(Q) = 3! \cdot (5!)^3$$

Teremos então $3! \cdot (5!)^3$maneiras distintas de compor a fila.

Portanto, alternativa letra C.

7.2.4 Aplicando o Roteiro em Questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)

Questão $\mathbf{7.2.16}$ Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de senhas distintas de tal forma que seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Cada opção será um evento auxiliar, porém nessa situação, a questão principal será equivalente a questão auxiliar que satisfaça a condição proposta pelo problema

q_1: Número de senhas da forma LDDDDD

q_2: Número de senhas da forma DDDDDD

q_3: Número de senhas da forma LLDDDD

q_4: Número de senhas da forma DDDDD

q_5: Número de senhas da forma LLLDD

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como a escolha de cada L ou D ocorre de forma independente, teremos pelo PFC que:

$$n(q_1) = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\ 600\ 000$$

$$n(q_2) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 000\ 000$$

$$n(q_3) = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\ 760\ 000$$

$$n(q_4) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\ 000$$

$$n(q) = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 757\ 600$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

O $n(q)$ satisfaz o que foi proposto, pois $1\ 000\ 000 < 1\ 757\ 000 < 2\ 000\ 000$

Logo, $n(Q) = n(q_5)$ e com isso a opção que mais se adéqua às condições da empresa é a V

Portanto, alternativa letra E.

Questão $\mathbf{7.2.17}$ Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a) 69

b) 70

c) 90

d) 104

e) 105

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneira que podem ser formadas quatro duplas sem que nenhuma dupla seja formada por dois jogadores canhotos

$2^{\underline{o}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de possibilidades para se formarem as quatro duplas

q_2: Número de possibilidades para se formarem duplas tendo os dois integrantes sendo canhotos

$3^{\underline{o}}$) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para formamos a primeira dupla teremos uma combinação de 8 jogadores tomados 2 a 2, ou seja, $C_{8,2}$ afinal, não importa a posição dos jogadores na dupla formada.

Para a segunda dupla teremos apenas seis jogadores disponíveis. Logo, $C_{6,2}$

Para a terceira dupla teremos apenas quatro jogadores disponíveis. Logo, $C_{4,2}$ e

Para a quarta e última dupla teremos apenas dois jogadores disponíveis. Logo, $C_{2,2}$

Pelo PFC teríamos então $C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}$

Como podemos ter outra formação para essa sequência afinal, essa posição pode ser permutada e com isso teríamos sequência repetidas. Devemos dividir no final pela permutação das quatro.

Por isso temos que:

$$n(q_1) = \frac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{4!}$$

$$n(q_1) = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2!\cdot 0!}}{4!}$$

$$n(q_1) = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!} \cdot \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!} \cdot \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2\cdot 1\cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2!\cdot 0!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$n(q_1) = \frac{\frac{8\cdot 7}{2} \cdot \frac{6\cdot 5}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$n(q_1) = \frac{28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{24} = 105$$

Logo, o número de possibilidades para se formarem as quatro duplas é 105

Para o cálculo do $n(q_2)$ teremos um raciocínio semelhante, porém com apenas seis jogadores disponíveis afinal, dois são canhotos.

Então, pelo PFC teríamos então $C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}$

Como podemos ter outra formação para essa sequência afinal, essa posição pode ser permutada também e com isso teríamos sequência repetidas. Devemos dividir no final pela permutação das três.

Por isso temos que:

$$n(q_2) = \frac{C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{3!}$$

$$n(q_2) = \frac{\frac{6!}{2!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2!\cdot 0!}}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$n(q_2) = \frac{\frac{6\cdot 5}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 1}{6} = \frac{15 \cdot 6}{6} = 15$$

Logo, teremos 15 possibilidades de formarmos quatro duplas sem uma formada por dois canhotos.

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

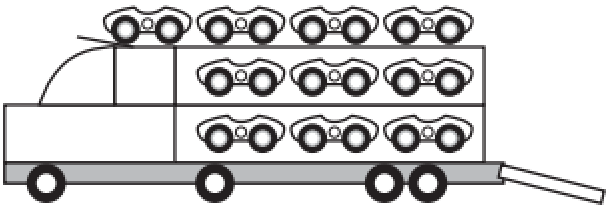
O $n(Q)$ será dado pela diferença $n(q_1) - n(q_2)$

Logo, $n(Q) = 105 - 15 = 90$

Existem 90 maneiras para se formar quatro duplas sem que nenhuma dupla seja formada por dois jogadores canhotos

Portanto, alternativa letra C.

Questão 7.2.18 Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$

b) $C_{9,3}$

c) $C_{10,4}$

d) 6^4

e) 4^6

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de modelos distintos do brinquedo que a empresa poderá produzir sendo que dos dez carrinhos que compõem o brinquedo, deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro corres disponíveis

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Como a mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo temos um problema de combinação.

A questão auxiliar é equivalente a questão principal

Portanto, $q_1 = Q$

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada evento auxiliar, priorizando os eventos com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como em cada caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho pintado de cada uma das quatro cores disponíveis. Teremos que pintar os outros seis carrinhos restantes e isso pode ser feito combinando nove carrinhos tomando seis a seis.

Logo, $n(q_1) = C_{9,6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = C_{9,3}$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como $q_1 = Q$ teremos $n(Q) = n(q_1)$

Logo, $n(Q) = C_{9,3}$

A empresa poderá produzir $C_{9,3}$ modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha

Portanto, alternativa letra B.

Questão 7.2.19 Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64

b) 56

c) 49

d) 36

e) 28

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de partidas que serão realizadas se tivermos 8 jogadores

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Como cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores, a ordem não será importante, afinal a partida do jogador A contra o jogador B é a mesma do jogador B contra o jogador A. Temos então, um problema de combinação simples com o evento auxiliar sendo equivalente ao evento principal

Portanto, $q_1 = Q$

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Sendo 8 jogadores e em cada partida participam 2, temos uma combinação de oito jogadores tomados dois a dois.

Logo, $n(q_1) = C_{8,2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{56}{2} = 28$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como $q_1 = Q$ teremos $n(Q) = n(q_1)$

Logo, $n(Q) = 28$

Com 8 jogadores serão realizadas 28 partidas

Portanto, alternativa letra E.

Questão $\mathbf{7.2.20}$ O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Fonte: Disponível em: <www.pt.fifa.com>. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15

b) 30

c) 108

d) 360

e) 972

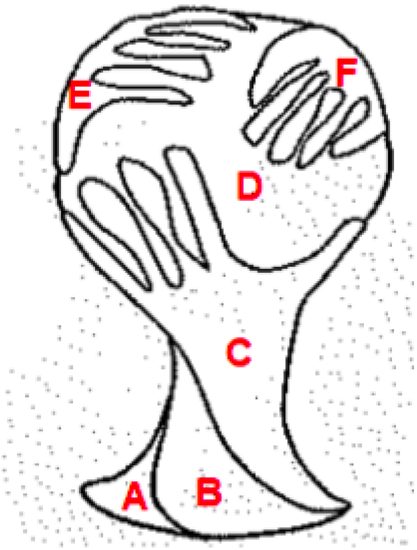
Resolução:

$1^{\text{º}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras diferentes com que o comitê organizador da Copa poderá pintar a logomarca com as cores citadas

$2^{\text{º}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

Devemos calcular o número de possibilidades de escolha de cores para cada uma das seis regiões da logomarca



q_1: Número de possibilidades para a escolha de cores da região A

q_2: Número de possibilidades para a escolha de cores da região B

q_3: Número de possibilidades para a escolha de cores da região C

q_4: Número de possibilidades para a escolha de cores da região D

q_5: Número de possibilidades para a escolha de cores da região E

q_6: Número de possibilidades para a escolha de cores da região F

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Iniciando pela região A teremos:

$$n(q_1) = 4$$

Todas as outras questões serão equivalentes, pois regiões vizinhas devem possuir cores distintas. Logo, $n(q_2) = n(q_3) = n(q_4) = n(q_5) = n(q_6) = 3$

4º) **Calcular o número de possibilidades do evento principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos:

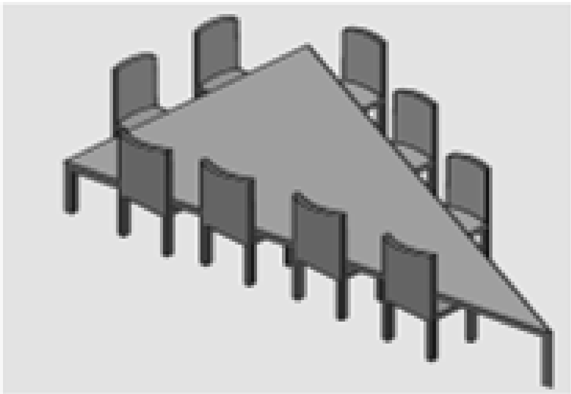
$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot n(q_3) \cdot n(q_4) \cdot n(q_5) \cdot n(q_6)$$

$$n(Q) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 972$$

Portanto, alternativa letra E.

7.2.5 Aplicando o Roteiro em Questões das Olimpíadas: OBM E OBMEP

Questão $7.2.21$ (OBMEP 2012 – Nível 3) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantarem uma mesa triangular, cujos lados têm $2, 3$ e 4 lugares, como na figura.



De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

a) 288

b) 6720

c) 1008

d) 15120

e) 60480

Resolução:

$1º$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras que esses seis amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa

$2º$) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de maneira que os outros amigos de Alice e Bernardo pode se sentar nas cadeiras restantes

q_2: Número de maneira que Alice e Bernardo podem se sentar do lado da mesa que tem apenas duas cadeiras

q_3: Número de maneira que Alice e Bernardo podem se sentar do lado da mesa que tem apenas três cadeiras

q_4: Número de maneira que Alice e Bernardo podem se sentar do lado da mesa que tem apenas quatro cadeiras

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como duas cadeiras serão ocupadas por Alice e Bernardo, teremos então, entre as nove cadeiras, apenas sete disponíveis para os outros quatro amigos

Logo, teremos um Arranjo (ou PFC) dos sete lugares tomados quatro a quatro:

$$n(q_1) = A(7{,}4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{31} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

No lado de duas cadeiras teremos duas possibilidades: Alice e Bernardo ou Bernardo e Alice

$$n(q_2) = 2$$

No lado de três lugares teremos duas possibilidades podendo ainda a permuta de posição entre Alice e Bernardo

$$n(q_3) = 2 \cdot 2 = 4$$

No lado de quatro lugares teremos três possibilidades podendo ainda a permuta de posição entre Alice e Bernardo

$$n(q_4) = 2 \cdot 3 = 6$$

Logo, teremos $n(q_2) + n(q_3) + n(q_4) = 2 + 4 + 6 = 12$ maneiras distintas para que Alice e Bernardo fiquem juntos dentro de uma formação entre as 840 possiveis

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot [n(q_2) + n(q_3) + n(q_4)]$$
$$n(Q) = 840 \cdot [2 + 4 + 6] = 840 \cdot 12 = 10080$$

Logo, teremos 10080 maneiras diferentes para que esses seis amigos podem se sentar à mesa com Alice e Bernardo estando juntos em um mesmo lado da mesa

Portanto, alternativa letra C.

Questão $7.2.22$ (OBMEP 2013 – Nível 3) Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às $9h, 10h$ e $11h$ e de segunda a sexta às $17h$ e $18h$. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

a) 96

b) 102

c) 126

d) 144

e) 180

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras distintas que Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos.

$2^{\underline{o}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de maneiras considerando que Ana tenha aula aos sábados

q_2: Número de maneiras considerando que Ana **não** tenha aula aos sábados

$3^{\underline{o}}$) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para a sua aula do sábado, Ana possui três possibilidades de horário e para sua aula de tarde duas possibilidades e para o outro dia da semana de segunda a quinta, quatro possibilidades.

Pelo PFC teremos que $n(q_1) = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Para o caso de não ter aula no sábado temos que Ana deve escolher dois dias não consecutivos da semana e para isso tem seis possibilidades:

Exemplo: segunda e quarta, segunda e quinta, segunda e sexta, terça e quinta, terça e sexta, quarta e sexta

Ao escolher um deles para ter aula pela manhã são duas possibilidades sendo que no outro dia ela fará aula a tarde.

Para a escolha do horário pela manhã são três possibilidades e a tarde são duas

Logo, pelo PFC teremos $n(q_2) = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2)$$
$$n(Q) = 24 + 72 = 96$$

Logo, Ana terá 96 possibilidades para escolher o seu horário semanal sem ter suas duas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos.

Portanto, alternativa letra A.

Questão $7.2.23$ (OBMEP 2014 – Nível 3) Gustavo possui certa quantidade de moedas de $1, 10, 25$ e 50 centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente 1 real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?

a) 86 centavos

b) 1 real e 14 centavos

c) 1 real e 19 centavos

d) 1 real e 24 centavos

e) 1 real e 79 centavos

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o maior valor possível que Gustavo pode ter para as suas moedas

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de moedas de 50 centavos

q_2: Número de moedas de 25 centavos

q_3: Número de moedas de 10 centavos

q_4: Número de moedas de 1 centavos

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Gustavo não pode ter duas moedas de 50 centavos, pois aí teria exato 1 real

Logo, $n(q_1) = 1$

Gustavo não poderá ter duas moedas de 25 centavos, pois se tivesse completaria 1 real com a moeda de 50 centavos

Logo, $n(q_2) = 1$

Gustavo não poderá ter cinco moedas de 10 centavos, pois completaria 1 real com a moeda de 50 centavos

Então, poderá ter no máximo quatro moedas de 10 centavos

Logo, $n(q_3) = 4$

Quanto às moedas de 1 centavo temos que ele não pode ter cinco moedas, pois com a de 50 centavos, a de 25 centavos e duas moedas de 10 centavos iria completar 1 real, então no máximo terá quatro moedas de 1 centavo

Logo, $n(q_4) = 4$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como se trata do valor máximo teremos que:

$$n(Q) = 1 \cdot n(q_1) + 1 \cdot n(q_2) + 4 \cdot n(q_3) + 4 \cdot n(q_4)$$

$$n(Q) = 1 \cdot 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}10 + 4 \cdot 0{,}01$$

$$n(Q) = 1{,}19$$

Logo, Gustavo poderá ter no máximo $R\$\ 1{,}19$

Portanto, alternativa letra C.

Questão $\mathbf{7.2.24}$ (OBM $\mathbf{2019}$ – Nível 2) Um número de oito dígitos é dito robusto se cumprir ambas as condições a seguir:

(i) Nenhum dos seus algarismos é 0.

(ii) A diferença entre dois algarismos consecutivos é 4 ou 5.

Responda às perguntas a seguir:

a) Quantos são os números robustos?

b) Um número robusto é dito super-robusto se todos os seus algarismos são distintos. Calcule a soma de todos os números super-robustos.

Resolução:

a)

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a quantidade de números robustos.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

A questão q_1 é equivalente a questão Q.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Podemos escolher o primeiro algarismo de 9 maneiras, pois, a única restrição é não poder ter o zero. A partir do segundo algarismo teremos duas possibilidades de escolha para cada algarismo (diferença entre dois algarismos consecutivos deve ser 4 ou 5).

Observação: No caso de o algarismo escolhido ser o 5, o próximo deve ser o 1 ou 9

Pelo PFC temos que

$$n(q_1) = 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1\,152$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como Q e q_1 são equivalentes teremos que $n(Q) = n(q_1) = 1\,152$

Portanto, são 1 152 números robustos

b)

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar asoma de todos os números super-robustos.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Determinar todos os números super-robustos

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando a questão com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para isso vamos determinar a quantidade de números super-robustos de tal forma que seja viável realizar a soma de todos eles

A escolha do primeiro algarismo pode ser feita de 9 maneiras

A escolha do segundo pode ser feita de duas maneiras apenas e os demais de uma única maneira afinal, todos os algarismos devem ser distintos

Logo, pelo PFC teremos $9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 18$ números super-robustos

São eles:

Começando por 1:15948372 e 16273849

Começando por 2: 26159483e 27384951

Começando por 3: 37261594 e 38495162

Começando por 4: 48372615 e49516273

Começando por 5: 51627384 e 59483726

Começando por 6: 62738495 e 61594837

Começando por 7: 73849516 e 72615948

Começando por 8: 84951627 e 83726159

Começando por 9: 94837261e 95162738

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

O $n(Q)$ será a soma de todos os números obtidos em q_1

Essa soma pode ser feita da seguinte forma:

Como cada algarismo aparece duas vezes em cada casa do número podemos fazer então

2(10^7+10^6+10^5+10^4+10^3+10^2+10^1+10^0)(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 999999990

Portanto, a soma de todos os números super-robustos é igual a 999999990

Questão $7.2.25$ (OBM 2014 – Segunda fase/Nível 2) No super bola, o mais novo jogo de futebol, o jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 ponto se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras diferentes de um jogador obter exatos 15 pontos em uma temporada de sete jogos.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Vamos primeiro determinar o número mínimo de vitórias que o jogador deve obter para conseguir os 15 pontos e a partir desse mínimo criar os nossos eventos auxiliares.

Podemos verificar que o jogador deve ter no mínimo 4 vitórias afinal, com 3 vitórias e 4 empates chegaria a no máximo13 pontos: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$.

q_1: Número de modos diferentes tendo 4 vitórias

q_1: Número de modos diferentes tendo 5 vitórias

Com 6 vitórias o jogador terá mais de 15 pontos

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q)$

Com exatas 4 vitórias, o jogador deve ter nas outras 3 partidas 3empates.

Logo, teremos uma combinação das 7 partidas tomadas 3 a 3, ou seja, $C(7,3)$ para o total de modos.

$$C(7,3) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$$

Então teremos que $n(q_1) = 35$

Com 5 vitórias, totalizando os 15 pontos, o jogador deve perder outros 2 jogos. Logo, teremos uma combinação das 7 partidas tomadas 2 a 2, ou seja, $C(7,2)$ para o total de modos.

$$C(7,2) = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 3 = 21$$

Então teremos que $n(q_2) = 21$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2)$$
$$n(Q) = 35 + 21 = 56$$

Portanto, o número de maneiras diferentes de um jogador obter exatos 15 pontos em uma temporada de sete jogos é igual a 56

7.2.6 Aplicando O Roteiro Em Questões Do Profmat: ENA e ENQ

Questão 7.2.26 (ENA 2019) Quantos números pares com quatro algarismos distintos existem?

a)1848

b) 2230

c) 2268

d) 2296

e) 2520

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a quantidade de números pares formado por quatro algarismos distintos.

$2^{\underline{o}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Números pares terminados por 0 (zero)

q_2: Números pares não terminado por 0 (zero)

$3^{\underline{o}}$) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Considerando q_1 teremos que verificar as possibilidades para os três primeiros algarismos:

$1^{\underline{o}}$ algarismo: 9 possibilidades, pois, poderá ser qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$2^{\underline{o}}$ algarismo: 8 possibilidades afinal, escolhido o $1^{\underline{o}}$ e o $4^{\underline{o}}$ restam 8 algarismos para escolha.

$3^{\underline{o}}$ algarismo: 7 possibilidades afinal, escolhido o $1^{\underline{o}}, 2^{\underline{o}}$ e o $4^{\underline{o}}$ restam 7 algarismos para escolha

Então, pelo PFC teremos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$. Portanto, $n(q_1) = 504$.

Consideremos agora q_2

Sendo o $4^{\underline{o}}$ algarismo diferente de 0 (zero) teremos para ele então, 4 possibilidades de escolha: $2, 4, 6, 8$

O $1^{\underline{o}}$ algarismo pode ser qualquer algarismo **menos** o que foi utilizado pelo $4^{\underline{o}}$ e o 0 (zero), logo teremos 8 possibilidades.

O $2^{\underline{o}}$ algarismo possui 8 possibilidades de escolha, afinal não poderá ser os escolhidos como $1^{\underline{o}}$ e nem como $4^{\underline{o}}$, porém o 0 (zero) pode ser uma opção.

O 3º algarismo possui 7 possibilidades de escolha, afinal não poderá ser os escolhidos como 1º, 2º e nem como 4º, porém o 0 (zero) pode ser uma opção.

Logo, pelo PFC teremos $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792$. Portanto, $n(q_2) = 1792$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2)$$

$$n(Q) = 504 + 1792 = 2296$$

Logo, temos 2296 números pares formado por quatro algarismos distintos

Portanto, alternativa letra D.

Questão $7.2.27$ (ENA 2019) Em um estacionamento há5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas é possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas?

a) 25.200

b) 50.400

c) 52.000

d) 100.800

e) 104.000

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de formas possíveis para estacionar, nessas vagas, 3 carros e 4 motos

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Números de possibilidades para estacionar os carros

q_2: Números de possibilidades para estacionar as motos

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Considerando q_1 teremos 5 possibilidades para estacionarmos o primeiro carro. Para o segundo restam 4 possibilidades e para o terceiro carro 3 possibilidades. Logo, pelo PFC teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Então, o $n(q_1) = 60$

Da mesma maneira faremos para q_2

Para a primeira moto temos 7 possibilidades. Para a segunda, 6 possibilidades; para a terceira, 5 possibilidades e por fim, para a quarta moto restam 4 possibilidades. Logo, pelo PFC teremos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Então, o $n(q_2) = 840$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2)$$

$$n(Q) = 60 \cdot 840 = 50\ 400$$

Logo, teremos 50 400 formas possíveis de estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas

Portanto, alternativa letra B.

Questão $\mathbf{7.2.28}$ (ENA $\mathbf{2018}$) Quantos números distintos de 8 dígitos é possível formar usando dois algarismos 1 e seis algarismos 2?

a) 12

b) 24

c) 28

d) 32

e) 256

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinara quantidade de números distintos com 8 dígitos que é possível formar usando dois algarismos 1 e seis algarismos 2.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Podemos pensar esse número da mesma forma que fazemos para um anagrama com elementos repetidos. Com isso temos que a questão q_1 é equivalente ao evento Q.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Faremos uma permutação dos 8 digitos tendo repetição do algarismo 1 duas vezes e o do algarismo 2 seis vezes.

Logo, $n(q_1) = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!} = \frac{56}{2} = 28$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como Q e q_1 são equivalentes, então $n(Q) = n(q_1) = 28$

Então, temos um total de 28 números com 8 dígitos formados por dois algarismos 1 e seis algarismos 2.

Portanto, alternativa letra C.

Questão $7.2.29$ (ENQ2020.1) Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se:

a) Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de forma que uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Podemos organizar da seguinte maneira:

q_1: Número de possibilidades que a criança, ao entrar no ônibus, tem para escolha.

q_2: Número de possibilidades para a escolha do responsável que ficará ao lado da criança.

q_3: Número de possibilidades para o segundo responsável.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como ao entra no ônibus ele estará vazio, a criança terá 32 possibilidades para escolha de sua poltrona. Logo, $n(q_1) = 32$

Para a q_2 teremos duas possibilidades. Afinal, são dois responsáveis. Logo, $n(q_2) = 2$

E por fim, para a q_3 teremos duas possibilidades também, pois representam o número de poltronas vazias contidas na mesma fileira. Logo, $n(q_3) = 2$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot n(q_3)$$

$$n(Q) = 32 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

Portanto, o número de forma que uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor é igual a 128;

Questão $\mathbf{7.2.30}$ (ENQ $\mathbf{2019.1}$) Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios com, respectivamente, a e b elementos.

a) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função bijetiva de A em B? Nesta condição, quantas funções bijetivas existem?

Resolução:

A primeira parte do item a) resolvemos pela própria definição de função bijetiva.

Uma função de A em B é dita bijetora ou bijetiva se for injetora e sobrejetora simultaneamente. Pela injetividade, cada elemento de A deve estar associado a um elemento diferente de B, e, pela sobrejetividade, todo elemento de B deve estar associado à pelo menos um elemento de A. Logo, podemos dizer que A e B possuem o mesmo número de elementos, ou seja, $n(A) = n(B) = a = b$.

A segunda pergunta do item a) faremos por análise combinatória:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de funções bijetivas existentes.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Seja $f: A \to B$ bijetiva com $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e $B = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

q_1: Número de possibilidades para a escolha da imagem de x_1, ou seja, $f(x_1)$

q_2: Número de possibilidades para a escolha da imagem de x_2, ou seja, $f(x_2)$

q_n: Número de possibilidades para a escolha da imagem de x_n, ou seja, $f(x_n)$

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para a escolha de $f(x_1)$ temos que essa imagem pode ser qualquer uma entre os elementos do conjunto B. Logo, $n(q_1) = b$

Para a escolha de $f(x_2)$ teremos $b - 1$ opções visto que as imagens são exclusivas pela injetividade da função. Logo, $n(q_2) = b - 1$

Seguindo o mesmo raciocínio para os demais eventos auxiliares

Para a escolha de $f(x_n)$ teremos apenas uma opção. Logo, $n(q_n) = 1$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot \cdots \cdot n(q_n)$$
$$n(Q) = b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \cdot \cdots \cdot 1 = b!$$

Portanto, teremos $b!$ funções $f: A \to B$ bijetivas.

7.2.7 Aplicando o Roteiro em Questões de Escolas Militares

Questão $7.2.31$ (Instituto Tecnológico de Aeronáutica/2017) Com os elementos $1,2,\ldots,10$ são formadas todas as sequências$(a_1,\ a_2, \cdots, a_7)$. Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

a) $\frac{7!}{10^7 \cdot 3!}$

b)$\frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$

c)$\frac{3!}{10^7 \cdot 7!}$

d)$\frac{10!}{10^7 \cdot 7!}$

e)$\frac{10!}{10^7}$

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Como se trata de uma questão de probabilidade com elementos de contagem separamos as questões auxiliares da seguinte forma:

q_1: Número total de sequencias possíveis (Espaço amostral).

q_2: Número de sequencias sem elementos repetidos (Evento favorável).

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para a escolha do primeiro elemento da sequência temos 10 possibilidades, afinal podemos usar os elementos $1,2,\ldots,10$.

Para a escolha do segundo também temos 10 possibilidades.

Seguimos analogamente para os outros cinco elementos restantes da sequência.

Logo, pelo PFC teremos que $n(q_1) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$.

Agora, o número de sequências sem elementos repetidos pode ser calculado de maneira parecida:

Para a escolha do primeiro elemento da sequência sem repetição temos 10 possibilidades, afinal podemos usar os elementos $1,2,\ldots,10$.

Para a escolha do segundo teremos 9 possibilidades, pois o primeiro elemento escolhido não pode repetir.

Seguimos analogamente para os outros cinco elementos restantes da sequência.

Logo, pelo PFC teremos que $n(q_2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{3!}$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

A probabilidade será dada pela razão:

$$\frac{\frac{10!}{3!}}{10^7} = \frac{10!}{3! \cdot 10^7}$$

Portanto, alternativa letra B.

Questão $7.2.32$ (Instituto Tecnológico de Aeronáutica/2016) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a
a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o maior valor possível de N cubos iguais que se pode pintar utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de maneiras para pintarmos a face superior

q_2: Número de maneiras para pintarmos a face inferior

q_3: Número de maneiras para pintarmos as faces laterais

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Para pintarmos a fase superior temos 6 possibilidades, pois corresponde ao total de cores disponíveis. Logo, $n(q_1) = 6$

Para pintarmos a fase inferior teremos agora 5 possibilidades, pois uma cor já foi utilizada na pintura da fase superior. Logo, $n(q_2) = 5$

Para pintarmos as fases laterais teremos uma permutação circular com 4 elementos:

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Logo, $n(q_3) = 6$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Como qualquer fase pode ser a superior teremos que dividir por 6 o produto obtido pelo PFC. Logo,

$$n(Q) = \frac{n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot n(q_3)}{6}$$

$$n(Q) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 30$$

O maior valor possível para N será 30

Portanto, alternativa letra E.

Questão $7.2.33$ (Academia da força Aérea/2016) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração.

A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é:

a) $8 \cdot 7!$

b) $7!$

c) $5 \cdot 4!$

d) $10!$

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de maneiras distintas de se enfileirar as 10 bolas de modo que as bolas que possuem o mesmo número fiquem juntas.

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

q_1: Número de maneiras ao enfileirarmos as bolas com a mesma numeração e as outras sem numeração.

q_2: Número de maneiras de permutar os elementos dos grupos obtidos em q_1 com a mesma numeração.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Considerando como sendo um único elemento, o grupo de bolas com a mesma numeração, teremos:

$$A_1V_1A_2V_2A_3V_3\ b_1b_2b_3b_4$$

Então, teremos uma permutação de 7 elementos. Logo, $n(q_1) = 7!$

Como cada grupo de cores é formado por duas bolas de mesma numeração. Então, cada grupo permuta de duas maneiras:

Por exemplo:

$$A_1V_1A_2V_2A_3V_3\ b_1b_2b_3b_4$$

$$V_1A_1A_2V_2A_3V_3\ b_1b_2b_3b_4$$

Logo, $n(q_2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ maneiras de permutar o grupo obtido em q_1

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo PFC teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2)$$

$$n(Q) = 7! \cdot 8$$

Logo, teremos $7! \cdot 8$ maneiras distintas de se enfileirar as 10 bolas de modo que as bolas que possuem o mesmo número fiquem juntas.

Portanto, alternativa letra A.

Questão $7.2.34$ (Escola Preparatória de Cadetes do Exército/2019) Considere o conjunto de números naturais $\{1, 2, \ldots, 15\}$. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é:

a) 168.

b) 196.

c) 224.

d) 227.

e) 231.

Resolução:

1º) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o número de grupos de três números distintos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 15\}$em que a soma dos termos é ímpar

2º) **Fixar as questões auxiliares.**

Devemos inicialmente verificar quais as possibilidades de em uma adição com três números obtermos uma soma ímpar.

Teremos apenas duas possibilidades:

1ª) Os três números são ímpares.

ou

2ª) Dois números são pares e um é ímpar.

Então, nossas questões auxiliares serão:

q_1: Número de maneiras para obtermos uma soma ímpar sendo os três números também ímpares.

q_2: Número de maneiras para obtermos uma soma ímpar sendo dois números pares e um número sendo ímpar.

3º) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Como numa adição a ordem das parcelas não altera a soma, teremos uma combinação dos oito números ímpares que o conjunto possui $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ tomados três a três

$$n(q_1) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Para o segundo evento teremos uma combinação dos sete números pares que o conjunto possui $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ tomados dois a dois **e** um entre os oitos ímpares como possibilidades para compor o trio. Logo,

$$n(q_2) = \binom{7}{2} \cdot 8 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 8 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} \cdot 8 = 21 \cdot 8 = 168$$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Pelo Princípio Aditivo teremos que:

$$n(Q) = n(q_1) + n(q_2)$$

$$n(Q) = 56 + 168 = 224$$

Logo, temos 224 gruposde três números distintos do conjunto $\{1, 2, \dots, 15\}$ em que a soma dos termos é ímpar.

Portanto, alternativa letra C.

Questão $7.2.35$ (Instituto Militar de Engenharia/2014) Em uma festa de aniversário estão presentes $\boldsymbol{n}$ famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá duas pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de $\boldsymbol{n}$ deverá ser:

a) 17.

b) 18.

c) 19.

d) 20.

e) 21.

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) **Identificar a questão principal.**

Q: Determinar o valor de $\boldsymbol{n}$ para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira

$2^{\underline{o}}$) **Fixar as questões auxiliares.**

Vamos separar o problema em três questões auxiliares:

q_1:Número de pais que vão participar da disputa

q_2:Número de maneiras para escolher 2 pessoas de uma mesma família, entre as $\boldsymbol{n}$ famílias que tem dois filhos mais as maneiras de escolher 2 pessoas entre as outras duas famílias que só têm um filho

q_3: Número de cores disponíveis

$3^{\underline{o}}$) **Calcular o número de possibilidades de cada questão auxiliar, priorizando as questões com maior restrição se for o caso:** $n(q_n)$

Temos $n+2$ opções para escolha dos pais, afinal temos n famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Logo, $n(q_1) = n+2$

Para cada escolha desses $n+2$ pais teremos $n \cdot \binom{3}{2}$ maneiras de escolher duas pessoas de uma mesma família entre as n famílias que tem dois filhos e duas formas de escolher duas pessoas entre as outras duas famílias que têm apenas um filho. Logo, $n(q_2) = n \cdot \binom{3}{2} + 2$

E finalmente como temos apenas duas cores – azul e amarela – temos que $n(q_3) = 2$

4º) **Calcular o número de possibilidades da questão principal**: $n(Q)$

Nesse caso já temos o número de possibilidades do evento principal. $n(Q) = 2014$

Valor esse que obtemos pelo PFC, então temos a seguinte equação:

$$n(Q) = n(q_1) \cdot n(q_2) \cdot n(q_3)$$

$$2014 = (n+2) \cdot \left[n \cdot \binom{3}{2} + 2\right] \cdot 2$$

Do desenvolvimento do 2º membro dessa equação chegamos à seguinte equação do 2º grau:

$$3n^2 + 8n - 1003 = 0$$

A raiz positiva é a que satisfaz o problema, logo $n = 17$

Logo, teremos 17 famílias com pai, mãe e 2 filhos

Portanto, alternativa letra A.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho pode-se verificar que o raciocínio lógico-combinatório se encontra em todas as etapas da educação básica brasileira, desde os livros das séries iniciais do ensino fundamental até os para o ensino médio. Verificamos que existem inúmeros trabalhos que tratam da análise combinatória e das dificuldades apresentadas tanto por alunos quanto para professores. Foram justamente essas dificuldades que tornaram relevantes a realização desse trabalho.

Ao apresentarmos um roteiro para a resolução de problemas em análise combinatória, tomamos como base a resolução de problemas proposto por George Polya e como isso buscamos criar uma forma ordenada de partir para resolução de vários problemas de contagem. O roteiro em si, não se torna algo mecânico na resolução, afinal, o raciocínio, a análise, o pensar, o discutir, o interpretar, o questionar ainda estarão presente nesse tipo de questões, ou seja, o roteiro não tira do aluno e nem do professor um dos grandes objetivos da Matemática: Desenvolver o raciocínio lógico.

Escolhemos uma variedade de questões. Foram 35 no total dos mais variados exames e processos seletivos nos mais diferentes níveis de dificuldades e aplicamos o roteiro em todos eles. Ao analisar cada uma das questões resolvidas pelo roteiro, podemos verificar uma organização sistemática na resolução e esse talvez seja o principal objetivo do roteiro, servir como um primeiro passo para resolver o problema. A partir do momento que você está familiarizado com as etapas será mais fácil buscar as estratégias que serão utilizadas na resolução.

Sabemos que o roteiro não irá satisfazer a todos os problemas existentes em análise combinatória. Aliás, não tem como diante da diversidade de problemas existentes e nem foi esse o nosso objetivo com esse trabalho. Um exemplo no qual o roteiro didático não funciona é a seguinte questão da prova do ENEM de 2009:

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas por meio de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente;
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente;
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente;
d) duas combinações;
e) dois arranjos.

Nessa questão de análise combinatória não conseguimos identificar a questão principal e nem tão pouco as questões auxiliares pois, não se trata de calcular as possibilidades, mas sim, de uma questão teórica. Apesar disso, temos certeza que o roteiro didático servirá sim como consulta e como mais uma opção para minimizar as possíveis dificuldades existente no processo de ensino-aprendizagem e é, justamente isso, o que realmente esperamos.

9 REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BASTOS, Antonio Carlos. **Resolução de problemas:** uma discussão sobre o ensino de análise combinatória. 2016. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2016.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**, v. 6, p.109-136, 1979.

BLOG. **A Arte de Resolver Problemas**: aprendizado da matemática, grandes matemáticos. APRENDIZADO DA MATEMÁTICA, GRANDES MATEMÁTICOS. 2016. Disponível em: http://www.rodadematematica.com.br/blog/2016/9/14/a-arte-de-resolver-problemas. Acesso em: 27 jul. 2020.

BNCC, Brasil -. **Base Nacional Comum Curricular**. Fundação Carlos Alberto Vanzolini, 2018.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 1974.

BURSAL, Murat. TURKISH PRESERVICE ELEMENTARY TEACHERS' SELF-EFFICACY BELIEFS REGARDING MATHEMATICS AND SCIENCE TEACHING. **International Journal Of Science And Mathematics Education**, Taiwan, v. 8, n. 4, p. 649-666, 2010.

CASTILHOS, Thiago Barcelos. Reflexões e análises das dificuldades dos alunos e professores do Ensino Médio em Análise Combinatória e Probabilidade. **Remat**: Revista Eletrônica da Matemática, v. 1, n. 2, 5 jan. 2016.

CAMPOS, Lorraine Vilela. **Enem 2019**: provas do segundo dia exigiram mais dos participantes. provas do segundo dia exigiram mais dos participantes. 2019. Disponível em: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/enem-2019-provas-segundo-dia-exigiram-mais-dos-participantes/346655.html. Acesso em: 26 jul. 2020.

CHAQUIAM, Miguel. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. Editora Livraria da Física, 2014.

__________. Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula / Miguel Chaquiam. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

__________. Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática. XI SNHM. 2015.

CLARISSA; RAFAEL. **Charges matemáticas**. Disponível em: https://sites.google.com/site/profclarissamat/charges-matematicas. Acesso em: 27 jul. 2020.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho; PEREIRA, Ducival Carvalho; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. O Ensino-Aprendizagem de Analise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. **Educação Matemática na Contemporaneidade**: desafios e possibilidades, São Paulo, 2016.

COSTA, Elisângela Ribeiro Silva. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio**. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, 2013.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática**: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. São Paulo, 1999.

__________. História da Matemática e Educação. In: Cadernos CEDES 40. **História e Educação Matemática.** 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

__________. **O ensino de ciências e matemática na América Latina**. Campinas: Papirus, 1984.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. Editora Ática, 1998.

__________. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

__________. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2012. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html>. Acesso em: 10 ago. 2020.

DESCOMPLICA. **As Questões Que Tiveram Mais Acertos E Mais Erros No Enem 2017**. 2018. Disponível em: https://descomplica.com.br/tudo-sobre-enem/novidades/questoes-que-tiveram-mais-acertos-e-mais-erros-no-enem-2017/. Acesso em: 26 jul. 2020.

DÜRER, Albrecht. **Quadrado Mágico**. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/29952/mod_resource/content/1/Quadrado%20M%C3%A1gico.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

Dürer, Albrecht. 1514. **Melancolia I**, 24,1 x 19,1 cm. Acervo IFSP. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Dürer, Albrecht. 1514. **Quadrado mágico**. 24 x 18,8 cm. Acervo IFSP. Disponível em: <http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATTO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

GABARITE. **Teorema de Pitágoras: Exercícios Resolvidos e Exemplos.** Disponível em: <https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/426-teorema-de-pitagoras-exercicios-resolvidos-e-exemplos>. Acesso em: 12 ago. 2020.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008. 208 p.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO**: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica. 2014. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar - Volume 5**: combinatória e probabilidade. 8. ed. Saraiva Didáticos, 2019.

HUANCA, Roger Ruben Huaman. **A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e Além da Sala de Aula**. 2006. 247 f.

IDOETA, Paula Adamo. **Enem**: o que as questões de matemática 'mais difíceis' dizem sobre a educação no brasil. o que as questões de matemática 'mais difíceis' dizem sobre a educação no Brasil. 2018. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/brasil-44888935. Acesso em: 26 jul. 2020.

KIRCHER, Athanasius. ***Ars magna scien disive combinatória***. 1669.

KRAMP, Christian. **Clubes de Matemática na OBMEP**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_c-kramp/. Acesso em: 25 jul. 2020.

LEIBNIZ, Gottfried. ***Dissertatio de arte combinatória*.** 1966.

LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira.**A Matemática do Ensino Médio**. 3. Ed. SBM, 2016. 2 v.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Aprender e aplicar matemática - Volume 2**. Atual Didáticos, 2012.

MAGNUS, Maria Carolina Machado. **Professor e Tecnologia**: a postura do educador de matemática, no município de São João do Sul/SC, diante dos avanços tecnológicos.. 2010. 47 f. Monografia (Doutorado) - Curso de Especialização em Educação Matemática, Universidade do Sul de Santa Catarina, Araranguá, 2010.

MODERADORES DO BLOG. **Probleminha**: divertindo-se na roda gigante. Divertindo-se na roda gigante. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-divertindo-se-na-roda-gigante/. Acesso em: 30 jul. 2020.

MICHEL, Fernanda Vach. **A ORIGEM DO LIVRO DIDÁTICO**. 2015. Disponível em: https://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/pedagogia/a-origem-livro-didatico.htm. Acesso em: 30 jul. 2020.

MORGADO, Augusto César. **Análise Combinatória e Probabilidade**. SBM, 2016.

NICOLAU, Carlos. **Tendências em Educação Matemática – Resolução de Problemas:** Como resolver um problema envolvendo Função Exponencial. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/411-4.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.

NUNES, C.B & SOUZA, A.C.P. **A Resolução de problemas como metodologia de ensino aprendizagem-avaliação de Matemática em sala de aula**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e Seus Fundamentos Filosófico-Científicos, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

OBMEP. **Clubes de Matemática na OBMEP**: disseminando o estudo da matemática. Disseminando o Estudo da Matemática. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/?s=George+Polya. Acesso em: 27 jul. 2020.

OBMEP. **Clubes de Matemática na OBMEP**: disseminando o estudo da matemática. Permutação Caótica – Explorando o tema. Disponível em: < http://clubes.obmep.org.br/blog/permutacao-caotica-explorando-o-tema/#:~:text=Uma%20permuta%C3%A7%C3%A3o%20dos%20elementos%20dessa,permuta%C3%A7%C3%B5es%20ca%C3%B3ticas%20de%20n%20elementos>. Acesso em: 10 ago. 2020.

OBMEP. Clubes de Matemática da OBMEP. Disseminando o estudo da Matemática. **Probleminha da roda gigante.** Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-divertindo-se-na-roda-gigante/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

OBMEP. **Questões de matemática**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bpascal-2/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

OBMEP. **Questões de matemática**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b_c-kramp/>. Acesso em: 10 ago. 2020.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM**: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. 2014. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2020.

O VOLUME DAS JARRAS REDONDAS. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/o-volume-das-jarras-redondas/>. Acesso em: 12 ago. 2020.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática 1**. 2. ed. São Paulo: Moderna Plus, 2010.

PASCAL, Blaise**. TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.** Internet Archive. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ/page/n7/mode/2up>. Acesso em: 12 ago. 2020.

PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. **Ensino Médio**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 10 ago. 2020.

PEREIRA, Antonio. **Os 4 passos de Polya Seminário de resolução de problemas** - IMEUSP -2020. Instituto de Matemática e Estatística da USP- Brasil. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5229274/mod_resource/content/1/4passos_polya.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2020.

PEREIRA, W. C. de A. **Resolução de Problemas Criativos** - Ativação da Capacidade de Pensar. Brasília, EMBRAPA-DID, 1980.

PESSOA, C.; BORBA, R. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: **SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, II, 2003, Recife Anais... Recife – UFRPE: SIPEMAT, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PIZARRO, Ludmila. **Bolão vale a pena? Matemático dá dicas para ter mais chances na Mega-Sena**. 2019. Disponível em: https://economia.ig.com.br/Loterias/2019-09-17/bolao-vale-a-pena-mega-sena-acumula-e-matematico-da-dicas-para-ter-mais-chances.html. Acesso em: 25 jul. 2020.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. EUA: Interciência, 1978. 180 p.

PORTO, Mateus. **TENDÊNCIAS ATUAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**: resolução de problemas. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. 2011. Disponível em: http://comahistoriadamatematica.blogspot.com/2011/06/tendencias-atuais-no-ensino-da.html. Acesso em: 10 ago. 2020.

RODRIGUES, Adriano; MAGALHÃES, Shirley Cristina. **A resolução de problemas nas aulas de matemática: diagnosticando a prática pedagógica**. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.

SA, Lauro. História da Matemática no Ensino de Teoria de Grafos: Uma Experiência à Luz do Jogo de Vozes e Ecos. **VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** 15 a 19 de novembro de 2015, Pirenópolis - Goiás – Brasil. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20172/mpm5612/sa.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2020.

SAE- 1 ano. **Matemática. 1 ano.** Livro do Professor, 2020. 1 ed. Curitiba, PR, 2020. Disponível em: <https://dctpssvaoimfz.cloudfront.net/wordpress/wp-

content/uploads/2018/06/01085336/pg20lp211sdm0-miolo-ef20-1-mat-l1-lp.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2020.

SALVARANI, Giuliano. **STOMACHION – A CAIXA DE ARQUIMEDES**. 2016. Disponível em: http://mathematica.blog.br/2016/05/28/stomachion-a-caixa-de-arquimedes/. Acesso em: 23 jul. 2020.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 629-692, 2013.

SBHC, Sociedade Brasileira de História da Ciência. **15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia**. Universidade Federal de Santa Catarina. 2016. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/. Acesso em: 10 ago. 2020.

SILVA, José Eduardo Ferreira da. **Quadrados mágicos de 3x3**. 2013. Disponível em: http://www.projetozk.com/mais_um/24_quadrado_magico.htm. Acesso em: 22 jul. 2020.

SILVA, Monalisa. A Combinatória: abordagem em documentos oficiais, em pesquisas e em livros didáticos. **EBRAPEM**. 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd12_monalisa_silva.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2020.

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da Resolução de Problemas**. 2008. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf. Acesso em: 27 set. 2020.

SMOLE, Katia C. Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**: ensino médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. 2 v.

SÓ MATEMÁTICA. **Combinatória**: origem da palavra. Origem da palavra. 1998 - 2020. Virtuous Tecnologia da Informação. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/historia/palavra_combinatoria.php. Acesso em: 26 jul. 2020.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar Matemática 2**. FTD, 2010.

WIELEITNER, Prof. H.. **Historia de las Matemáticas**. Labor, 1932.