UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JAILSON PIMENTEL

O ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Vitória, ES

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Pimentel, Jailson, 1971-

P644e O ensino de geometria por meio de construções geométricas / Jailson Pimentel. – 2013.

129 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Construções geométricas. 2. Régua de cálculo. 3. Compasso. 4. GeoGebra (Software). I. Gonçalves Junior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

JAILSON PIMENTEL

O ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática, oferecido pela Universidade Federal do Espírito Santo como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior.

Vitória, ES

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"O Ensino de Geometria Por Meio de Construção Geométricas"

Jailson Pimentel

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 23/08/2013 por:

Etereldes Gonçalves Júnior - UFES
Orientador

Magda Soares Xavier
Magda Soares Xavier - UFES
Membro Interno

Marcelo Ferreira Farias – UFRRJ
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e pelas oportunidades de escolha que me concedeu. Aos meus pais, pois, apesar de todas as dificuldades, me incentivaram para que eu conseguisse chegar a esse nível de formação. Aos meus professores, por tudo que me ensinaram, principalmente aqueles que acreditaram na minha capacidade. Aos meus alunos, que me fazem buscar mais por meio de seus questionamentos. Aos meus irmãos e amigos, pela credibilidade, carinho e paciência. Em especial a minha irmã Sildete Pimentel, professora de Língua Portuguesa, pela minuciosa correção gramatical e ortográfica, ao meu amigo Flavio Corsini Lirio pela grande ajuda na formatação e ao meu orientador, o professor Dr. Etereldes Gonçalves Júnior pela análise cuidadosa e criteriosa deste trabalho, cujas orientações foram de grande relevância para a conclusão do mesmo.

RESUMO

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver uma alternativa metodológica para o ensino de Geometria a partir do nono ano do ensino fundamental, com o propósito de despertar no aluno motivação por meio de mecanismos dinamizadores do pensamento lógico dedutivo. Neste sentido, será considerado relevante o ensino de Geometria baseado em construções geométricas com régua e compasso, já que os livros didáticos, em geral, abandonaram esse método de ensino de Geometria no nono ano. Enfocaremos também algumas construções utilizando os recursos práticos do software GeoGebra. Este trabalho será composto e desenvolvido em duas etapas. A primeira será composta por um questionário, o qual contemplará uma revisão dos conteúdos considerados pré-requisitos para a segunda parte. A segunda será formada pelas construções geométricas com régua e compasso, objeto principal desse trabalho, além de construções utilizando os recursos práticos do software GeoGebra. Para isso, utilizaremos uma linguagem simples, detalhando passo a passo a construção de cada figura. Contudo, nos limitaremos a figuras planas. A proposta de continuidade do assunto contempla as construções através de planificações de uma figura em três dimensões. Em geral, a disciplina Desenho Geométrico não está contemplada na grade curricular das escolas públicas. Com isso, os alunos, principalmente do ensino fundamental, acreditam que o compasso serve apenas para traçar círculos, sendo que ele também pode ser utilizado como um instrumento de medida. Espera-se que este trabalho não só contribua para um entendimento teórico como também na melhoria das práticas pedagógicas nas aulas de Geometria, visto que os conteúdos e metodologias usadas aqui são destinados principalmente para auxílio dos professores de Matemática da educação básica.

Palavras-chave: Construções geométricas, régua, compasso, GeoGebra.

ABSTRACT

The purpose of this work is to develop an alternative methodology for teaching Geometry beginning in ninth grade level, with the purpose of awakening in student motivation through mechanisms that enhance deductive logical thinking. In this sense, geometry teaching based on geometric constructions with ruler and compass will be considered relevant, as textbooks generally abandoned this geometry teaching method in ninth grade. We will also focus some elaborations using the resources of practical software Geogebra. This work will be made and developed in two stages. The first one will consist of a questionnaire, which will include a review of the contents considered prerequisites for the second part. The second and main stage of this work is formed by geometric constructions with ruler and compass, and then elaborations using the practical features of the software Geogebra. For this, we will use a simple language, detailing step by step the construction of each geometric picture. However, we will limit ourselves to plane figures. The continuity proposal of the subject reaches the constructions through flat pattern of a picture in three dimensions. In general, the discipline “Geometric Drawing” is not present in the public schools curriculum. Thus, students, particularly the ones from elementary school, believe that the measure serves only to draw circles, and it can also be used as a measuring instrument. It is hoped that this work will not only contribute to an understanding of theoretical as well as the improvement of teaching practices in geometry classes, since the contents and methodologies used here are intended, primarily, to help mathematics teachers of basic education.

Keywords: Geometric constructions, ruler, compass, Geogebra

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática tem sofrido muitas modificações ao longo dos séculos devido às dificuldades, de um modo geral, no entendimento do seu vasto conteúdo. Esta disciplina sempre esteve presente em todos os trajetos traçados pela humanidade, uma vez que a matemática figura em praticamente tudo que se tem conhecimento. Seus conceitos proporcionam uma contribuição significativa e necessária para o avanço tecnológico e para o desenvolvimento da mente humana. Seu aprendizado se inicia nos primeiros anos de vida e muitas vezes a própria natureza nos proporciona intuitivamente o conhecimento matemático. "Só quem pode surgir com o novo é o novo. E o novo são as crianças. Com elas, poderão vir as respostas que não encontramos" (D’ AMBROSIO, Entrevista em 26/02/2009 à revista: Educar para crescer, Editora Abril).

> “Olhar, classificar, comparar são princípios da Matemática. Se alguém estender uma mão cheia de balas e outra com poucas para que uma criança escolha, ela reconhece a diferença de quantidades e vai optar pela mão cheia. Isso é uma aplicação cotidiana e prática da Matemática.” (D’ AMBROSIO, 2003).

Ensinar Matemática somente por meio de conceitos e propor uma extensa lista de exercícios não é suficiente para o aprendizado. É necessário contextualizar boa parte dos conteúdos e atividades diariamente. “Pensar em números é abstrato, diferente de pensar em balas. O ensino da Matemática assumiu a postura de se encaminhar para o abstrato e se libertar do espontâneo. É daí que vem o distanciamento entre as crianças e a Matemática.” (D’ AMBROSIO, 2003)

Quando nos referimos a atividades contextualizadas, entendemos que “contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada” (SILVA & SANTO, 2004, p.3).

Uma das principais mudanças se refere à necessidade de se contextualizar suas aplicações de modo que os problemas estejam relacionados com o cotidiano de cada um, respeitando as diversas realidades daqueles que estudam Matemática. Por ser tão abstrata, contextualizá-la é uma forma mais interessante e de melhor entendimento, facilitando a sua visualização e os resultados obtidos, sendo que em muitas ocasiões é relevante o uso de materiais concretos. Os jogos também são de grande importância na busca de um aprendizado e desenvolvimento da Matemática de um modo mais prazeroso. A utilização desses jogos torna a aula mais atrativa e desperta o interesse e a curiosidade acerca do conteúdo. Isso faz com que os alunos apreciem essa disciplina, principalmente aqueles que possuem um maior grau de dificuldade.

Alguns casos requerem a utilização de softwares que dispõem de mecanismos que possibilitam o manuseio e experimentos de objetos matemáticos, permitindo assim a visualização do comportamento de sequências, que favorecem o entendimento e as conclusões que, em muitos casos, requerem uma generalização. As planilhas eletrônicas, por exemplo, representam bem esses fatos, além da facilidade de manuseio. Outra ferramenta importante é o software GeoGebra, que oferece recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo em um mesmo programa. É claro que esses métodos somente funcionam à medida que os professores forem capacitados e as unidades escolares dispuserem de tal software, de modo que todos os membros da unidade tenham acesso a esse recurso tão interessante.

Dentre os assuntos abordados na Matemática, acreditamos que a Geometria seja, sem dúvida, o mais complicado de se ensinar e isso pode até gerar certa rejeição nos professores de contemplar seus conteúdos no plano de curso anual de Matemática do ensino fundamental. É preciso criar incentivos e cursos de capacitação para que os professores de Matemática estejam atualizados e tenham conhecimento de novas tecnologias aliadas ao ensino de Geometria.

As obras antigas de Matemática no Brasil introduziam os conteúdos de Geometria apenas em suas últimas páginas e de forma isolada das outras áreas. Já os livros atuais, ou pelo menos a maioria deles, já conseguem interagir e unificar os conteúdos das diversas áreas da Matemática, além de contemplar o estudo de Geometria nas páginas iniciais dos livros didáticos. Ainda assim, muitos professores continuam dando pouca importância à Geometria, tanto à plana quanto à espacial, deixando uma grande fragilidade na formação básica do estudante, sendo que em alguns casos o prejuízo é irreparável.

Em particular, o ensino de Geometria, apesar da sua grande relevância e utilidade no dia a dia, vem sendo abandonado até mesmo nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como mencionado por Passos, citado por Pereira (2001, p. 53).

No Ensino Médio, a aprendizagem dos conceitos novos de Geometria normalmente é comprometida em decorrência de um ensino precário ou ausente dessa disciplina no ensino fundamental, como citado acima. Assim, em muitos casos são necessárias demonstrações de fórmulas matemáticas e até teoremas. Também é importante proporcionarmos uma infinidade de atividades de revisão para então se iniciar os conteúdos de Geometria da série em andamento.

Para Filho & Brito (2006), a Geometria deverá estar contextualizada nestes acontecimentos diários.

Torna-se necessária a intensificação das pesquisas e desenvolvimentos de metodologias alternativas para o ensino de Geometria dando mais relevância a uma escola voltada para a aprendizagem mais dinâmica. Através de projetos incentivadores, é possível criar meios de motivação para os alunos que, em muitos casos, poderão aprender por si próprios certos conteúdos e, com grupos de estudos extraclasses, poderão, democraticamente, confraternizar suas ideias entre si para finalmente levar as dúvidas ou questionamentos para as aulas regulares. Dessa forma, o restante da turma, junto com o professor, manifesta sugestões e propõe soluções e discussões a respeito do assunto em questão.

De acordo com Fainguelernt (1999), o estudo da Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida.

A utilização de recursos computacionais pode se tornar um poderoso aliado para a necessária mudança de conceitos ultrapassados e abrir possibilidades para uma visão inovadora de ensino e aprendizagem baseada na perspectiva construtivista, mediante exploração intuitiva de conceitos matemáticos que estimule o gosto pelo aprender, desenvolver e construir o conhecimento matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - (1999, p.251) voltados para a Matemática definem que:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e

> enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.
> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Compreender a Matemática nos ajuda a enxergar o mundo de um modo mais crítico e suas práticas e aplicações cotidianas nos fornecem argumentações necessárias para entender melhor a realidade em que vivemos.

Quando o aluno tem um estudo adequado de Geometria este desenvolve “habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas” (PCN, 2002, p.257).

Comparar o mesmo conteúdo em tempos distintos ilustra significativamente a evolução tecnológica e as contribuições proporcionadas pela Matemática, resgatando e comparando os aspectos culturais e metodológicos no decorrer de seu desenvolvimento.

Ainda de acordo com o PCN (1999, p. 259), saber relacionar etapas da História da Matemática com a evolução da humanidade, além de utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas potencialidades e limitações são algumas das competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática.

Nossa experiência em sala de aula nos faz perceber que ensinar Matemática para o ensino fundamental é ainda mais complicado, visto que os alunos não têm maturidade para perceber a importância de se aprender Matemática.

De acordo com Lima (2007), o currículo de Matemática adotado no Ensino Médio brasileiro é essencialmente determinado pelos exames de ingresso nos cursos superiores.

Apesar de reconhecer que um dos principais objetivos dos professores é a preparação dos alunos da educação básica para ingressar na universidade, é importante ressaltar que um aprendizado de qualidade requer não só uma aprovação num concurso como também uma visão crítica e detalhada do que se aprende e do que se aplica no dia a dia. Seja no mercado de trabalho ou num curso de graduação, o que se aprendeu será, em muitas ocasiões, pré-requisito até mesmo para aplicações em situações comuns em seu convívio social.

Percebe-se, com o passar dos tempos, que a metodologia de ensino tradicional não consegue atrair as atenções dos estudantes, enquanto a tecnologia evolui e está mais presente na vida de todos. Seria uma concorrência desleal propor ao aluno que estude Matemática através de atividades comuns sabendo que em casa tem um aparelho de videogame e outros softwares de jogos nas mais variadas situações. A própria televisão, de modo crescente, traz programações que evidenciam a prostituição, a corrupção e a impunidade de forma banalizada, enquanto os programas educativos possuem um espaço cada vez menor e em horários que poucos têm disponibilidade de assistir. Os meios de comunicação procuram confundir a mente dos jovens e adolescentes com programação de baixa qualidade, afastando ainda mais o interesse dos nossos jovens por políticas sociais, econômicas, educacionais e outras. Nosso trabalho busca chamar a atenção desses personagens, mediante atividades prazerosas que contribuam para a um aprendizado de Geometria de forma simplificada e com recurso computacional que facilite o manuseio e visualização dos resultados obtidos. Devemos viabilizar as incontáveis aplicações da Matemática como na música, numa mesa de bar com os amigos, nas cantigas de roda e em várias práticas do nosso dia a dia, buscando enfatizar os acontecimentos de acordo com as necessidades do momento oportuno da aplicação.

> “A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas” (PCN, 1999, p. 256).

Alguns jogos matemáticos ajudam na compreensão dos conteúdos estudados e a entender os resultados obtidos. Além disso, materiais concretos como o tangram, o geoplano e outros dispositivos contribuem para um ensino mais eficaz e empolgante dessa disciplina tão necessária que é, sem dúvida, a que tem maior participação no desenvolvimento cognitivo e no despertar de pensamento crítico do mundo que nos cerca.

Um exemplo bem interessante é o software GeoGebra, que possui recursos relevantes para se trabalhar Álgebra, Geometria, Cálculo e gráficos de funções. Assim, procuraremos desenvolver um trabalho que permita, sempre que possível, promover atividades que podem ser desenvolvidas e analisadas com o auxílio do

GeoGebra. É importante lembrar que esse software é acessível a todos, já que ele é gratuito e está disponível na versão em português.

Sabemos que esses recursos computacionais por si só não vão resolver os problemas de falta de conhecimento dos alunos no que se refere à Matemática. Temos que estar sempre utilizando o livro didático, sem desprezar propostas de cálculos e desenvolvimentos de atividades diárias manualmente. Esses recursos são ferramentas complementares, ainda que intensifiquemos o seu uso nas aulas regulares. Segundo Mendes (2009, p. 10),

> ”Torna-se necessário, portanto, abordar a Matemática enquanto uma atividade referente à efetivação de um pensamento ativo que busca construir soluções para os processos lógico-interrogativos surgidos no dia a dia” [...] “Para que nossas finalidades sejam alcançadas nas atividades escolares é necessário abordarmos a transversalidade da Matemática e sua perspectiva transdisciplinar, pois o saber matemático é constituído de um emaranhado cognitivo no qual se evidenciam linhas e nós que configuram as diversas manifestações do pensamento humano acerca das possibilidades de investigação, compreensão e explicação da realidade”.

O presente trabalho foi organizado em três capítulos. O primeiro capítulo trata das questões teórico-metodológicas que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho proposto. O segundo capítulo tem o propósito de ensinar Geometria por meio de construções geométricas com régua e compasso. O terceiro capítulo proporciona algumas construções geométricas com os recursos didáticos do GeoGebra, além de sugerir uma continuidade no ensino de Geometria mediante planificações de sólidos geométricos com o uso de régua e compasso.

CAPÍTULO 1

VISÃO GERAL DO TRABALHO

1.1 Um breve histórico acerca do ensino de Geometria

A Geometria é certamente uma das mais antigas áreas do conhecimento. Surgiu das necessidades do dia a dia do homem em demarcar seus terrenos e até mesmo as marcações nas cavernas, feitas desde a idade da pedra. Documentos sobre as civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligado à astrologia. Alguns gregos como Arquimedes, Apolônio e Euclides desenvolveram trabalhos significativos, dos quais se pode destacar a obra "Os Elementos" de Euclides, datado do século V a.C., que serve de referência para os estudos de Geometria até os dias de hoje.

Os padrões geométricos tornaram-se necessários para medir comprimentos ou volumes de objetos, sendo que esses não apresentavam boa precisão, pois utilizavam partes do corpo e, em geral, as pessoas têm tamanhos diferenciados. Tal método de medição deu origem a unidades de medidas como o dedo, o pé e a mão. Os nomes de "vara", "braça" e "cúbito" recordam também este costume. Para a edificação de casas de madeira para agricultores indianos ou de habitantes europeus eram estabelecidas regras para a construção ser feita segundo linhas retas e ângulos retos.

Muitos desses padrões geométricos sempre foram levados a sério pela humanidade, como a cozedura e a pintura de cerâmica, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e têxteis. Mais tarde, a produção de metais contribuiu para a noção de plano e relações espaciais. As formas da dança devem ter desempenhado um papel importante. A maneira ou arte de dispor objetos num período da idade da pedra caracterizava-se pelo desenvolvimento da agricultura e a domesticação de animais. O uso da congruência, da simetria e da semelhança disponibilizou argumentos matemáticos de tal relevância a ponto de contribuir para o desenvolvimento da Geometria, da construção civil, da astronomia e de outras ciências.

Os povos antigos, mesmo aqueles cuja estrutura social era bem precária, tinham conhecimento dos movimentos da terra em torno do sol, das estrelas e da lua. O uso do calendário lunar tem origem muito antiga na história da humanidade e está ligado às variações de vegetação com as fases da lua. Alguns povos primitivos usavam as constelações para se guiarem na navegação. Dessa astronomia resultam alguns conhecimentos sobre as propriedades da esfera, das direções angulares, dos círculos e até mesmo de figuras mais complicadas.

Como mencionado no livro de STRUIK algumas aplicações exigiam resultados mais precisos em suas medidas. Com isso, criou-se o sistema internacional de medidas, no qual o metro é unidade padrão de comprimento. Os instrumentos de medidas de comprimento são bem variados e destinados a algumas áreas específicas, de acordo com a precisão desejada.

Na antiguidade já se observava o uso de construções geométricas como recursos para o desenvolvimento da Matemática. Muitos problemas, que até hoje são de grande complicação, podem ser solucionados por meio de construções geométricas, que nos fornece argumentações bem relevantes facilitando a compreensão durante as etapas de resolução.

A Geometria está presente na construção civil, nos esportes, na navegação, na informática, nos meios de comunicação e em diversas áreas do conhecimento que atuam em nossa vida.

1.2 Problema

Depois de mais de dezoito anos de experiência como professor de Matemática, ainda percebo o tamanho da dificuldade, tanto de minha parte para ensinar quanto para os alunos aprenderem Geometria, principalmente no ensino fundamental. Imaginamos que isso ocorra com boa parte dos professores dessa disciplina.

Diante de tal situação, surgiu a necessidade de uma reflexão sobre minhas práticas pedagógicas ao longo desses anos. Muitas vezes, durante as aulas, parecia que estava falando para mim mesmo, pois estava diante de uma turma na qual poucos alunos conseguiam compreender as explicações e até mesmo sentir prazer em estar ali atentos às aulas. Esse fato nos leva à seguinte reflexão: como ensinar Geometria de forma prazerosa e simplificada?

1.3 Justificativa

A grande aplicação da Matemática exerce uma pressão enorme no seu aprendizado. Por esse motivo este trabalho apresenta uma proposta pedagógica na busca da construção do conhecimento, sendo esta desenvolvida por meio de ferramentas simples como régua e compasso, que permitem a confecção de elementos geométricos de forma acessível. As construções também serão efetuadas com o software GeoGebra. Trata-se de uma metodologia que permite ao aluno uma maior interação dos conteúdos envolvidos, tendo claramente a ideia de que a realidade presente na vida social está sendo representada e interpretada durante o processo de ensino aprendizagem e que ele é o ator principal.

Para Vergnaud, citado por Pais (2001), o sentido de um conceito para o aluno está ligado à resolução de problemas adequados ao seu nível de conhecimento, pois através dela é lançada a base inicial para que a compreensão do conceito se estabeleça e assim possa passar para o estado mais abstrato, para o saber escolar até atingir o saber científico.

> “Entender o mundo que vemos e fazê-lo ter sentido é parte muito importante da nossa evolução. Em razão disso a percepção ou intuição espacial é uma ferramenta extraordinariamente poderosa e é isso que torna a geometria parte tão poderosa da Matemática – não apenas para aquilo que é obviamente geométrico, mas também para aquilo que não se apresenta dessa forma. Tentamos colocar essas coisas em forma geométrica porque isso permite o uso de nossa intuição”. (Leite, 2009).

Neste trabalho, estudaremos o Desenho Geométrico com ênfase em construções de figuras com o uso de régua e compasso e também com os recursos do GeoGebra.

Certas circunstâncias foram determinantes na escolha do tema a ser desenvolvido. O trabalho consiste em ensinar Geometria com o uso de régua e compasso, favorecendo assim a compreensão dos alunos e facilitando as práticas cotidianas em sala de aula. O GeoGebra fornece o apoio necessário para a verificação dos resultados obtidos, portanto o trabalho será feito com o uso desse software na construção de algumas figuras.

Nossa meta principal consiste na melhoria do ensino de Geometria nas escolas de ensino fundamental. Trata-se de uma proposta de ensino que valorize os conhecimentos preexistentes dos alunos, buscando aprimorá-los, com o intuito de fazer as devidas correções e promover aplicações contextualizadas de acordo com a realidade local desse grupo.

1.4 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo o aprendizado de Geometria para os alunos do nono ano do ensino fundamental. Ocorre que a proposta de se construir figuras planas com régua e compasso e também com os recursos práticos do GeoGebra são alternativas metodológicas de aplicarmos conceitos geométricos de um modo mais eficiente. Espera-se que, no decorrer das atividades, os alunos percebam que cada etapa de construção se dá por meio de um modelo matemático pelo qual utilizamos algumas propriedades da Geometria Euclidiana. O propósito é construir uma figura de forma sequencial, permitindo em cada etapa a visualização dos conceitos utilizados, garantindo assim uma maneira de criar certa autonomia no aluno. Assim, ele pode atingir um estágio do conhecimento que lhe permita construir, sem a ajuda do professor, outras figuras planas com propriedades semelhantes às utilizadas neste trabalho.

Geral

- Analisar a relação entre a comunicação e a execução das aplicações matemáticas em situações de problemas envolvendo Geometria.

Específicos

- Utilizar o GeoGebra para auxiliar na execução e interpretação de resultados;
- Relacionar algebricamente e geometricamente os resultados obtidos, inclusive em outras áreas do conhecimento;
- Utilizar corretamente instrumentos como régua e compasso;
- Reconhecer o compasso como um instrumento de medida;
- Perceber o compasso como o principal e mais eficiente instrumento manual de traçar segmentos de mesma medida;
- Reconhecer a circunferência como o lugar geométrico cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo que é o centro dela;
- Trabalhar adequadamente os comandos e procedimentos básicos do GeoGebra.

1.5 Público-alvo

Esse trabalho é destinado a professores da educação básica que lecionam a partir do sexto ano do ensino fundamental e pode ser aplicado também para os alunos do ensino médio, visto que se trata de uma metodologia diferenciada da convencional de se ensinar Geometria, utilizando seus conceitos básicos. Algumas atividades somente serão acessíveis a alunos que cursaram ou estão cursando o nono ano.

1.6 Pré-requisitos

É necessário que os alunos saibam resolver operações com frações, equações do 1º grau e do 2º grau, expressões algébricas, algumas definições de polígonos, teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo para entender algumas aplicações das atividades desenvolvidas.

As etapas de construção de figuras planas requerem a compreensão de alguns conceitos geométricos, pois não se trata de limitar o aluno a simplesmente produzir figuras mecanicamente, e sim aprender Geometria por meio de propriedades geométricas.

Nesse trabalho, construiremos algumas figuras planas, utilizando régua e compasso e outras com os comandos do software GeoGebra. Entretanto, é necessário que o leitor saiba responder à maioria das atividades propostas no primeiro questionário relacionado abaixo para entender melhor os procedimentos usados passo a passo para a confecção de todas as figuras planas feitas aqui.

Questionário 1:

a) Qual é a definição de polígono?
b) O que é um polígono convexo?
c) Defina paralelogramo.
d) O que é um retângulo?
e) O que é um quadrado?
f) O que é um losango?
g) O retângulo é um paralelogramo? E o paralelogramo é um retângulo? Justifique!

h) O que é circunferência?
i) O que é círculo?
j) Defina segmento de reta.
k) O que é uma mediatriz de um segmento de reta?
l) O que é bissetriz de um ângulo?
m) Qual a principal função da régua?
n) Pra que serve o compasso?
o) Dada uma reta e um ponto fora dela, quantas retas existem que sejam paralelas à reta dada e que passam por esse ponto dado? Quantas perpendiculares a essa reta passam por esse ponto?
p) O que é um triângulo equilátero?
q) O que é um polígono regular?
r) O quadrado é um polígono regular?
s) O losango é um polígono regular?
t) O retângulo é um polígono regular?
u) Quantas dimensões têm uma figura no plano?
v) Qual é a intersecção entre duas retas no plano?
w) Qual é a intersecção entre uma reta e uma circunferência no plano?

Neste caso, o professor tem um papel essencial de exercer um acompanhamento criterioso relativo às pesquisas e resultados encontrados de cada aluno, sendo também necessária a correção de todas as atividades e, se possível, exemplificar cada caso. Para isso, ele deverá dispor de aproximadamente quatro aulas, desde que os alunos realizem as pesquisas anteriormente. Esse questionário foi sugerido como apoio às atividades relacionadas nos capítulos 2 e 3, que definem o que se espera deste trabalho de dissertação.

1.7 Materiais utilizados

Régua, lápis, borracha, compasso e uma lixa de unha (para definir a ponta do grafite).

A régua é indicada simplesmente para traçar linhas retas e o compasso para o traçado de círculos que por sua vez, indica uma medida constante. No entanto, o uso de materiais de boa qualidade e um compasso bem aferido contribui para um resultado mais preciso. Em relação ao lápis não há exigências e sim uma ponta (grafite) bem definida.

Para as atividades do capítulo 3 são necessários computadores equipados com o software GeoGebra.

1.8 Método de abordagem

Os avanços tecnológicos se devem ao grande desenvolvimento da Matemática em toda a sua história. Ainda assim, essa disciplina essencial assusta a muitos e nos faz perceber, a cada dia, a necessidade de concretizar o ensino de Matemática. Nesse trabalho, com atividades individuais e em grupo, apresentaremos, em sua maioria, questões que serão baseadas principalmente na confecção de figuras planas. As atividades referentes às planificações de sólidos geométricos são propostas de um trabalho futuro. No capítulo 2 as atividades serão desenvolvidas mediante construções com régua e compasso, enquanto que no capítulo 3 as construções serão feitas por meio do software GeoGebra, que permite, de forma dinâmica, a visualização dos resultados dos problemas propostos. Segundo o PCN (1999, p.253),

> "O aluno deve perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la".

A compreensão da Geometria está ligada a uma gama de fatores de caráter metodológico. Segundo Eduardo Wagner (2009) as construções geométricas tiveram início na Grécia antiga e continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar.

> "Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de Geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender Geometria do que praticar as construções geométricas" (Wagner, 2009, p.1).

Os conceitos e definições de conteúdos de Geometria têm caráter teórico e apresentam grande importância na compreensão e execução das atividades existentes aqui. Contudo, são de extrema importância as aplicações práticas desses elementos na construção do conhecimento geométrico.

1.9 Recomendações metodológicas

As atividades podem ser desenvolvidas individualmente ou em dupla, de modo que todos possam participar da execução. Acreditamos que grupos com mais de dois alunos não favoreçam a participação efetiva de todos. Assim, pode ocorrer de um componente do grupo realizar as atividades e os demais, somente observarem como simples expectadores. O tempo necessário para planejamento das atividades do capítulo 2 é de oito aulas (extraclasse), incluindo a organização dos grupos, orientações, correção das atividades e plano de ação, podendo haver pequenas variações para mais ou para menos. Já para o capítulo 3, é necessário que os alunos tenham um contato inicial com o software de, no mínimo, três aulas sob orientação do professor através de tarefas simples, somente para conhecer o programa, além de aproximadamente quatro aulas (extraclasse) destinadas ao planejamento das construções geométricas. Para as construções das figuras com régua e compasso, sugerimos uma aula para cada figura para que todos os alunos tenham tempo suficiente para construir e tirar dúvidas sobre os procedimentos e instrumentos utilizados durante o decorrer das aulas. No Geogebra, para as figuras mais simples, poderemos construir duas por aula, enquanto que as mais complexas, apenas uma por aula.

Muitos livros didáticos de desenho geométrico trazem, de forma simplificada, passo a passo orientações dos procedimentos e materiais adequados para se trabalhar em sala de aula as construções geométricas, inclusive a partir do 6º ano do ensino fundamental. No caso da rede pública de ensino, a aquisição dos livros deve ser contemplada no Projeto Político Pedagógico (PPP), pois esse tipo de material não é distribuído pelo MEC por não ser uma disciplina obrigatória. É claro que essa realidade poderia ser diferente caso o plano de curso anual destinasse uma sequência de aulas de Matemática para construções geométricas. Ainda que essa proposta seja significativa, levaria algum tempo para ser colocada em prática, visto que grande parte dos professores ainda não está capacitada para trabalhar com esses recursos. Neste caso, necessitariam de cursos de capacitação ou formação continuada em construções geométricas que, é claro, gerará certo custo que não depende só dos professores.

1.10 Dificuldades previstas

Esperam-se grandes dificuldades no início da execução das atividades, que serão minimizadas no decorrer do processo. Sabemos claramente que algumas definições de polígonos não são de conhecimento dos alunos, que geralmente chegam ao nono ano com uma defasagem muito grande de conteúdos. Ocorre que muitas vezes temos que revisar os conteúdos dos anos anteriores para enfim trabalhar os destinados à série atual, causando um atraso no que foi planejado e provocando uma correria no final do ano letivo. Isso nos leva a diversos fatores que dificultam ainda mais o trabalho do professor e o aprendizado dos alunos. Esse problema é ainda maior quando se trata da Geometria, considerando que boa parte dos professores do ensino fundamental simplesmente ignora ou trabalha seus conceitos de forma inadequada. O uso do compasso também exigirá atividades específicas para facilitar o seu manuseio de forma correta. Para isso, o professor que aplicará a atividade deverá aferir o compasso de modo que a ponta seca e a ponta de grafite estejam sempre no mesmo nível, ou seja, de mesmo tamanho e que a ponta de grafite esteja lixada obliquamente a parte de fora.

A borracha deve ser macia e de tamanho médio. Sugerimos que seja de cor branca ou verde. A régua deve ser de preferência de plástico transparente e com bom acabamento em sua lâmina, permitindo assim o traçado de um segmento de reta uniforme.

1.11 Análises de livros didáticos

A Análise de Livros Didáticos de Matemática é um ponto de partida pra quem quer desenvolver um bom trabalho durante todo o ano letivo. Este tema é muito comum nos trabalhos direcionados à Educação Matemática. Consideramos o livro didático um dos mais importantes componentes do cotidiano escolar em todos os níveis de ensino. Sua análise, sem dúvida, é de grande contribuição para o entendimento de uma parte do processo educativo. O surgimento do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) possibilitou o acesso aos livros didáticos para todos os alunos das escolas públicas da educação básica no Brasil. Esses livros, em alguns casos, são a única fonte de ensino e pesquisa desses educandos que ainda não estão inseridos na inclusão digital.

Percebemos boa evolução na formação dos professores nas últimas décadas, entretanto a defasagem ainda é enorme, visto que a proporção dos profissionais na área específica de Matemática ainda é insuficiente. Em decorrência disso, os professores, na maioria das ocasiões, não utilizam adequadamente o livro didático. Diante desse quadro, torna-se necessária uma pesquisa com base na elaboração de um livro didático e suas correspondências pedagógicas. Para refletir acerca destes aspectos, analisamos duas coleções de livros didáticos de Matemática do oitavo e nono ano, a fim de visualizar os seus componentes, como eles são tratados, direcionados, construídos e trabalhados. É importante ressaltar que as duas obras de nossa análise estão de acordo com as condições adequadas segundo o PNLD (2010).

Quadro 1: Relação dos livros analisados

Coleção	Autores	Editora	Ano
1. Matemática na medida certa	Marília Ramos Centurión José Jakubovic Marcelo Lellis	Scipione	2010
2. Vontade de saber Matemática	Joamir Roberto de Souza Patricia Rosana Moreno Pataro	FTD	2009

A análise será feita com base nas seguintes atribuições:

A1 - Linguagem clara e de fácil compreensão.

A2 - São apresentadas possibilidades de discutir diferentes estratégias de cálculo, mediante o uso de calculadoras, cálculo mental e, em alguns casos, com uso de algoritmos.

A3 - Apresenta exemplificações e atividades contextualizadas.

A4 - Retrata em seus conteúdos aspectos algébricos e geométricos de forma homogênea.

A5 - Contempla construções geométricas com régua e compasso.

A6 - Utiliza demonstrações em boa parte dos conteúdos.

A7 - Há atividades que incentivam a experimentação, valorizam estratégias pessoais de resolução e possibilitam ao aluno desenvolver o pensamento lógico e autônomo.

Quadro 2: Análise dos livros didáticos

Atribuição	Coleção 1	Coleção 2
A1	A linguagem é clara, porém exige orientação para o seu entendimento.	A linguagem é clara e de fácil compreensão na maioria dos conteúdos.
A2	A obra propõe atividades que contemplam esses requisitos de forma gradativa.	A calculadora é utilizada para uma ou duas atividades na maioria das sessões e as atividades exigem, em alguns casos, o uso de algoritmo. Existe também um número razoável de atividades que visam ao cálculo mental.
A3	Contextualiza as atividades em número insuficiente.	Algumas unidades são bem contextualizadas, porém o número é bem reduzido em outras.
A4	Utiliza bastante a Geometria para enfatizar conceitos algébricos.	Utiliza de forma significativa a Geometria para tratar de conteúdos e conceitos algébricos.
A5	Utiliza construções geométricas com régua e compasso somente no oitavo ano, já no nono ano ele só problematiza uma situação cuja figura é dada.	Utiliza construções geométricas com régua e compasso no oitavo ano como também com transferidor. Apresenta construções de bissetriz, ponto médio, desigualdade triangular, dentre outros. No nono ano ele se limita a construir um exemplo de simetria rotacional.
A6	As demonstrações são limitadas a alguns casos.	As demonstrações são limitadas a alguns casos.
	Ao final de cada unidade são propostos desafios	As atividades oferecem, de forma gradativa, um grau de dificuldade

A7	que visam contemplar esse requisito.	previsto para a execução das tarefas, mas pouco valorizam as estratégias do aluno, além de oferecer pequena contribuição para o pensamento lógico e autônomo.

Coleção 1

O livro retrata as figuras planas e espaciais, comparando-as com objetos do nosso cotidiano. Utiliza aspectos históricos determinando as evoluções das aplicações dos conceitos matemáticos. Realiza construções geométricas apenas no livro do oitavo ano que são: construção de um triângulo conhecendo-se os lados, ponto médio de um segmento, mediatriz de um segmento e bissetriz de um ângulo. O problema é que não direciona o ensino de Geometria com base nas construções geométricas com régua e compasso para o nono ano, série em que poderia explorar a construção de polígonos regulares.

Coleção 2

O livro trata de aplicações de ângulos e polígonos nas práticas do dia a dia. Utiliza, em alguns casos, as construções geométricas com régua e compasso para o oitavo ano, dentre as quais, temos: a construção da bissetriz, a condição de existência de um triângulo (desigualdade triangular), o ponto médio de um segmento, a mediatriz de um segmento, o incentro, o ortocentro, o baricentro de um triângulo e uma circunferência circunscrita a um triângulo. As construções são providas de boa ilustração e uma sequência bem definida, passo a passo, proporcionando fácil compreensão. Contudo, o livro do nono ano não está contemplado com construções geométricas com régua e compasso e sim um exemplo de construção de uma figura por simetria rotacional.

Conclusão

Os livros analisados não abrangem a construção de polígonos. Estão limitados à construção do triângulo como único polígono. O aluno deve chegar ao ensino médio com alguns conhecimentos essenciais relacionados à Geometria. As construções geométricas com régua e compasso servem de grande contribuição para o entendimento e aprofundamento da Geometria com base nos seus conceitos, propriedades e aplicações.

Segundo o PCN (1999) o trabalho com conceitos geométricos propicia uma boa aprendizagem de números e medidas através do estímulo, observação de semelhanças e diferenças entre figuras e percepção de regularidades. Ainda, segundo o PCN (1999), o estudo do espaço e forma deve ser explorado por meio de construções geométricas com o uso de régua e compasso para visualizações e aplicações das propriedades das figuras, além de contribuir para o entendimento relacionado à posição, localização e deslocamentos no plano ou num sistema de eixos coordenados.

A necessidade de aquisição de métodos eficazes e atraentes para o ensino de Geometria nos faz refletir, a cada aula lecionada, se estamos no rumo certo. Propor atividades rotineiras só resulta num cansaço mental ao perceber a falta de entusiasmo por parte dos alunos. É claro que, num ano letivo em que chegamos a lecionar 200 aulas numa única turma, é inevitável que tenhamos aulas comuns. O que não pode ocorrer é deixar com que todas as aulas sejam sacrificantes na interpretação dos alunos.

O questionário desse capítulo destina-se a atualização de conhecimentos necessários para um bom acompanhamento das atividades a serem desenvolvidas nos capítulos 2 e 3 e a aplicação dele é muito importante.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÕES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS COM RÉGUA E COMPASSO

Inicialmente, faremos uma rápida descrição, propondo orientações por meio de uma sequência didática para as atividades a serem desenvolvidas ao longo desse capítulo. Descrevemos essas etapas com o intuito de preparar o leitor para que, com isso, possa fornecer informações prévias das construções geométricas com régua e compasso.

2 Construções com régua e compasso

O desenvolvimento das atividades será estabelecido de forma gradativa, de acordo com as dificuldades esperadas. Assim, descreveremos os principais conceitos e detalhamentos das etapas de construção de cada figura. Utilizaremos várias folhas de papel A4 ou ofício (folhas não pautadas), lápis comum, régua e compasso. As dicas a seguir facilitarão a compreensão das sequências de construções que faremos com régua e compasso nesse capítulo.

2.1 Descrição do processo

Com o propósito de melhorar a aplicabilidade das construções, não utilizaremos uma unidade de medida específica como o centímetro ou o decímetro. Vamos usar a letra ”u” para representar uma unidade de medida qualquer. Assim, quando queremos, por exemplo, uma medida 4 u, traçamos um segmento de reta e nele marcamos, com o uso de um compasso, 4 segmentos no qual cada um mede u.

2.1.1 Construção de segmentos congruentes

Disponha de uma folha de papel A4 ou ofício. Trace nela uma reta (pode ser horizontal) de uma margem à outra. Queremos traçar 4 segmentos de mesma medida. Cada segmento, conforme a construção existente aqui mede u. Neste caso, utilizaremos um compasso com abertura de medida u (à sua escolha).

2.1.2 Construção do ponto médio de um segmento

Dividir o segmento de reta AB ao meio parece ser tarefa fácil, mas com certa precisão exigem-se alguns cuidados. Quando centramos um compasso em A com abertura de qualquer medida estamos produzindo uma circunferência cujo raio é a própria abertura do compasso. Assim, quando centramos o compasso em B com a mesma abertura, teremos outra circunferência de mesmo raio que a anterior, ou seja, as medidas são constantes. O que nós queremos então é uma abertura do compasso em que hajam pontos comuns às duas circunferências. Logo, ajustando o compasso com abertura maior que a metade do segmento AB (condição para que haja interseção), teremos dois pontos de interseção entre essas circunferências. A reta que passa por esses dois pontos (mediatriz do segmento AB) intersectará o segmento AB no ponto médio.

2.1.3 Construção da mediatriz de um segmento

A reta já foi construída no item anterior.

Definição: mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio de um segmento de reta, perpendicularmente a ele. Em outras palavras, é o lugar geométrico no plano equidistante de dois pontos fixos, que são os pontos extremos de um segmento de reta.

2.1.4 Construção de um triângulo qualquer

A construção do triângulo requer três aberturas do compasso, sendo uma para cada lado a ser construído. Para isso, devemos sempre traçar um segmento de reta com tamanho maior que cada um dos lados. Esse segmento será suporte de um dos lados do triângulo. É importante lembrar que o comprimento do segmento de reta é a distância entre as duas pontas do compasso (abertura do compasso).

2.1.5 Construção de um triângulo equilátero

Basta seguirmos as mesmas ideias do item anterior. A diferença é que, neste caso, as aberturas do compasso devem ser iguais, já que o triângulo equilátero possui os três lados de mesma medida.

2.1.6 Construção de um quadrado

O processo é bem trabalhoso, portanto, é importante ficar atento a cada detalhe da construção. Para se iniciar a construção, sempre traçamos uma reta que será suporte de um dos lados do quadrado e nela marcamos um ponto (esse ponto deve estar a uma distância à direita da margem, pois iremos expandir a construção nos dois lados desse ponto). Como o quadrado é um retângulo, temos que traçar uma reta perpendicular à reta dada passando por um ponto (ponto de intersecção). A fim de agilizar a construção, consideraremos que esse ponto seja um dos vértices do quadrado. A reta procurada pode ser obtida repetindo o método usado para construir a mediatriz de um segmento de reta. Com isso já temos as duas retas perpendiculares passando por um dos vértices do quadrado.

2.1.7 Construção de um hexágono regular

O hexágono regular é construído de modo mais prático quando é inscrito numa circunferência, pois o lado do hexágono tem a mesma medida do raio dessa circunferência. Neste caso, basta usar o compasso com abertura igual ao raio da circunferência e a partir de um ponto qualquer da circunferência podemos centrar o compasso e marcar seguidamente os outros cinco pontos.

2.1.8 Construção de um retângulo de ouro

A razão entre os lados de um retângulo de ouro é constante, portanto todos eles são semelhantes. Para a construção do retângulo de ouro utilizaremos alguns procedimentos vistos anteriormente como ponto médio de um segmento e o traçado de um círculo intersectando uma reta num determinado ponto.

2.1.9 Construção de um pentágono regular

Construiremos o pentágono regular inscrito numa circunferência e novamente utilizaremos a mediatriz de um segmento de reta, assim como traçados de círculos. O pentágono será construído a partir de um decágono, pois consideramos a construção do decágono mais simples.

2.1.10 Construção de um pentagrama

O pentagrama era um símbolo muito utilizado pelos pitagóricos há mais de dois mil anos. Ele tem a forma de uma estrela, que disposta numa circunferência possui os mesmos vértices do pentágono regular. Para obtê-lo, basta traçar as diagonais do pentágono regular.

2.1.11 Construção de um quadrado circunscrito

As diagonais do quadrado se intersectam no ponto médio de ambas. Este ponto médio é o centro do quadrado e, consequentemente, o centro da circunferência circunscrita a ele. A circunferência é circunscrita a um polígono quando pertence ao interior do polígono e todos os seus lados são tangentes a ela.

2.1.12 Construção de um triângulo equilátero circunscrito

Num triângulo equilátero, a interseção das alturas, das medianas e das bissetrizes se dá no mesmo ponto. Esses pontos são, respectivamente, o ortocentro, o baricentro e o incentro desse triângulo. O ponto referido é o centro do círculo tangente aos lados do triângulo dado. Se o triângulo não fosse equilátero, o centro do círculo interior a ele seria o incentro.

Como o triângulo é equilátero, a mediatriz de um lado passará no vértice oposto a ele. Assim, poderemos novamente utilizar o mesmo procedimento para a construção da mediatriz de um segmento para cada lado (na verdade dois já são suficientes, pois queremos a interseção entre eles).

2.1.13 Construção de um hexágono regular circunscrito

Como o hexágono é regular, o círculo será tangente aos lados, passando pelos pontos médios deles. Logo, basta determinar o ponto médio de um dos lados e traçar o círculo. O centro desse círculo é facilmente obtido quando traçamos dois círculos de mesmo raio e centro em dois vértices do hexágono.

2.1.14 Construção de um círculo passando por três pontos não colineares do plano

Com dois pontos do plano temos um segmento de reta. Já sabemos que a mediatriz é o conjunto de todos os pontos do plano, equidistantes dos extremos desse segmento. Quando traçamos o outro segmento formado por um desses dois pontos com o terceiro ponto e fazemos o mesmo procedimento, encontramos um ponto equidistante desses três pontos que, pela definição de circunferência, é o seu centro. O raio será a distância do centro até um dos pontos dados inicialmente.

2.1.15 Construção dos ângulos de 30°, 45° e 60°

Apresentaremos aqui a construção de um triângulo retângulo que possui dois desses ângulos internos (30° e 60°). A trigonometria no triângulo retângulo nos fornece um bom argumento para esse cálculo. Temos que o seno de 30° é ½. Isso quer dizer que o cateto oposto tem a metade da medida da hipotenusa. Logo, basta construir um triângulo retângulo que tem um dos catetos medindo a metade da hipotenusa. O outro cateto é determinado preenchendo a figura (ligando os vértices). Já o ângulo de 45° é obtido quando traçamos a diagonal de um quadrado, gerando assim dois triângulos retângulos isósceles.

2.1.16 Construção da bissetriz de um ângulo

Definição: Bissetriz é uma reta que divide o ângulo ao meio (em duas regiões simétricas).

Quando traçamos um círculo de centro no vértice de um ângulo, obtemos dois pontos de intersecção entre o círculo e as semirretas que formam esse ângulo. Esses dois pontos são equidistantes do vértice, pois são pontos de uma circunferência de centro no vértice do ângulo dado. A bissetriz coincide com a mediatriz do segmento formado por esses dois pontos.

2.1.17 Construção de um octógono regular

Quando um polígono possui mais de quatro lados é conveniente construí-lo inscrito em uma circunferência. O octógono pode ser construído tendo como partida um quadrado que possui a metade do seu número de vértices. Se considerarmos um lado qualquer do quadrado inscrito numa circunferência, imagine o arco dessa circunferência que liga os dois extremos desse lado. Basta obter o ponto médio desse arco em relação a esses pontos extremos, que teremos mais um vértice do octógono regular. Repetindo o processo, encontraremos os demais vértices. É importante notar que, como o ponto obtido é o ponto médio de dois vértices que compõem um lado do quadrado, sua distância a cada vértice é a mesma, o que resulta num polígono regular.

2.1.18 Construção de um decágono regular

Construiremos inicialmente um lado do decágono para que, por meio dessa medida, possamos traçar os demais lados com abertura fixa do compasso.

2.1.19 Construção de um dodecágono regular

Utilizamos a mesma ideia da construção do octógono regular, partindo de um hexágono regular. Neste caso, o dodecágono tem o dobro do número de vértices que o hexágono.

2.1.20 Construção de um pentadecágono regular

Esta figura será desenvolvida de um modo simples, utilizando a relação entre os ângulos internos do triângulo equilátero e do decágono. Neste caso é importante estar atento às aplicações dos seguintes conceitos: traçados de círculos, ponto médio e mediatriz de um segmento e segmentos congruentes.

2.1.21 Construção de um heptadecágono regular

Esta figura é direcionada a pessoas que tenham um conhecimento razoável de conceitos geométricos e práticas de construção. É claro que o GeoGebra permite uma execução mais prática e mais simples quando comparamos com régua e compasso. Quando você conhece os principais comandos, o processo de construção é simplificado. Utilizaremos os conceitos de ponto médio, razão de segmentos, traçados de retas e círculos.

É importante ressaltar que todas as figuras existentes aqui neste trabalho foram construídas com o uso do software GeoGebra. Contudo, nesse capítulo, o uso do GeoGebra tem o mero intuito de ilustrar os procedimentos com praticidade, já que as construções são destinadas a trabalhos de confecções manuais com o uso de régua e compasso. Suas medidas não são necessariamente as indicadas, entretanto seguem um padrão de proporcionalidade. No capítulo 3 as construções foram feitas com os comandos e procedimentos do GeoGebra de forma simplificada, com etapas progressivas, permitindo passo a passo a visualização dos resultados e desenvolvimentos.

O GeoGebra possui muitos recursos, que permitem a construção das figuras propostas aqui de forma mais rápida e de fácil manuseio, porém estamos direcionando essas atividades em dois moldes, sendo um para todas as realidades locais, ou seja, inclusive aquelas escolas que não possuem um laboratório de informática, mas quadro, giz e instrumentos simples e de baixo custo como régua e compasso. O outro é direcionado para aquelas que dispõem um laboratório de informática e buscam resultados mais profundos.

Observação: Nesse capítulo, quando dizemos: trace um círculo de centro A (ou centrado em A) e raio de 5 u, é o mesmo que dizer: fixe a ponta seca do compasso na marca zero da régua e abra o compasso até a marca de medida u (medida que julgar adequada ao seu trabalho) e marque 5 vezes essa marca num segmento de reta para que o comprimento seja de 5 u, depois ajuste o compasso na referida medida e trace o círculo.

Em determinadas construções vamos utilizar a seguinte frase: “ocultando alguns detalhes”. Isso ocorre com o propósito de reduzir o número de linhas (figuras) feitas nas etapas anteriores. Com régua e compasso queremos dizer: “apague com uma borracha algumas figuras para melhor visualização das próximas etapas”.

2.2 Primeiras construções

2.2.1 Construção de segmentos congruentes

Inicialmente vamos imaginar a situação seguinte: Dada uma reta, traçar 4 segmentos de reta de mesma medida. Vamos supor que cada segmento meça u.

- Trace uma reta e nela marque o ponto B, alguns centímetros à direita da margem da folha, com medida maior que u (raio). Depois trace um círculo de raio u, com centro em B, obtendo os pontos A e C que são as interseções do círculo com a reta. Do mesmo modo, trace o círculo de raio u e centro C, obtendo o ponto D. Finalmente, trace o círculo de raio u e centro D, obtendo o ponto E.

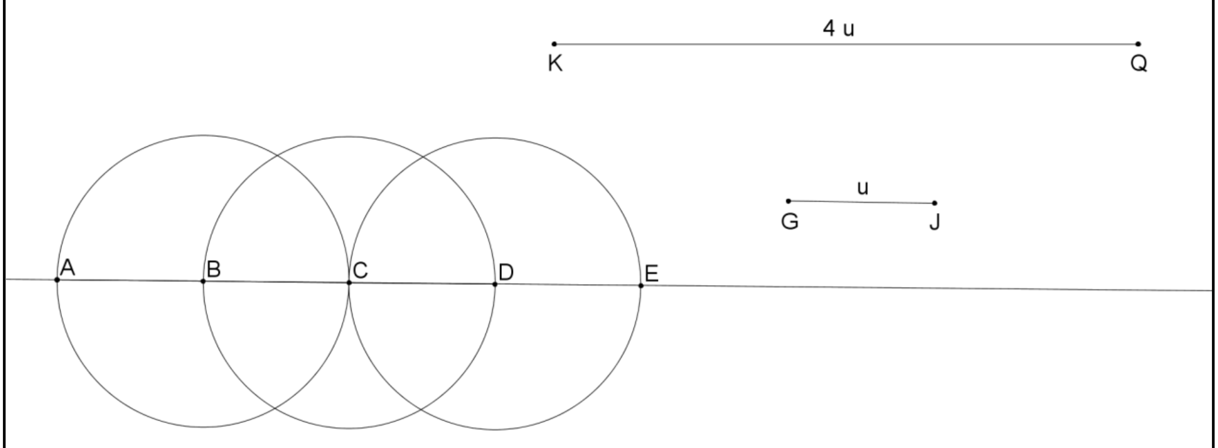


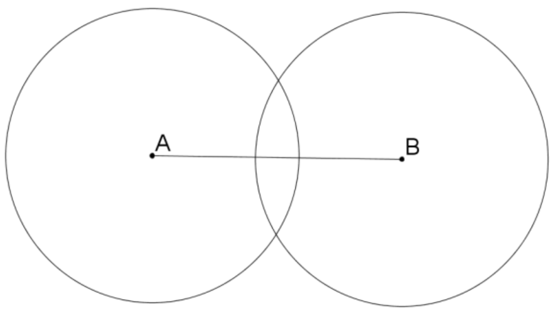
Figura 1: Segmentos congruentes

Nesse caso, os segmentos são constantes, pois representam o raio de cada círculo. Como os raios são iguais, temos que AB = BC = CD = DE.

O primeiro ponto (B) deve ser marcado na linha traçada com distância maior do que u de uma das margens e maior do que 3 u da outra (permitindo que o círculo a ser traçado caiba na folha). Quando centramos o compasso em B e traçamos um círculo, obtemos os pontos A e C, que são as interseções desse círculo com a reta dada. Como o compasso tem abertura u, concluímos que a distância que separa um ponto do outro ao seu lado é de u (tamanhos iguais). O processo se repete e as distâncias sempre serão iguais, já que a abertura do compasso é fixa (única).

2.2.2 Construção do ponto médio de um segmento de reta

- Trace um segmento de reta AB de qualquer tamanho e dois círculos de mesmo raio, um centrado em A e outro centrado em B, de modo que o raio seja maior que a metade de AB.



Construção da figura 2: Etapa 1

- Os círculos se intersectam nos pontos C e D. Trace o segmento CD, intersectando AB no ponto M, que é o ponto médio de AB.

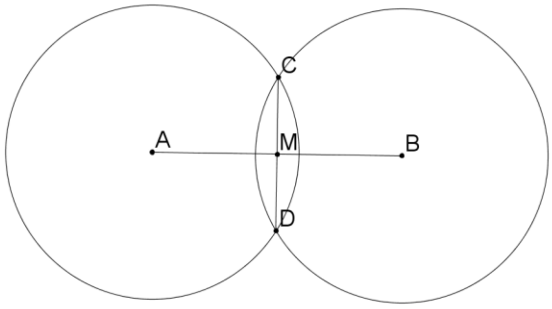
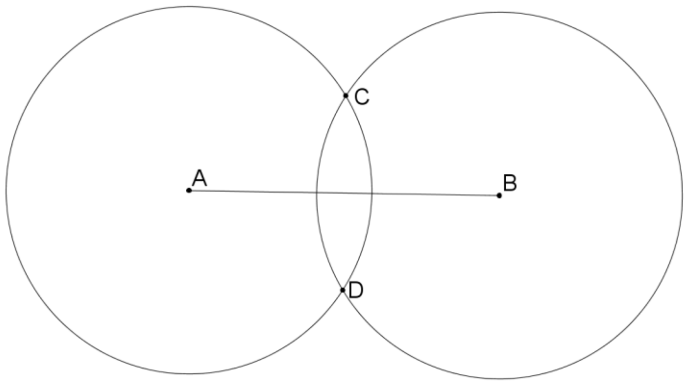


Figura 2: Ponto médio de um segmento

Temos que AC = BC, pois correspondem ao raio de cada círculo (que possuem a mesma medida). O mesmo ocorre com AD = BD. Assim, o quadrilátero ADBC é um losango. Logo, suas diagonais se intersectam perpendicularmente e no ponto médio. Portanto, AM = BM, ou seja, M é o ponto médio de AB.

2.2.3 Construção da mediatriz de um segmento de reta

- Trace um segmento de reta de extremos A e B e faça dois círculos de mesmo raio centrados em A e B, obtendo nas interseções os pontos C e D. Esse raio é maior que a metade do segmento AB.



Construção da figura 3: Etapa 1

- Trace a reta CD e teremos AB perpendicular a CD, sendo que CD passa por M, ponto médio de AB.

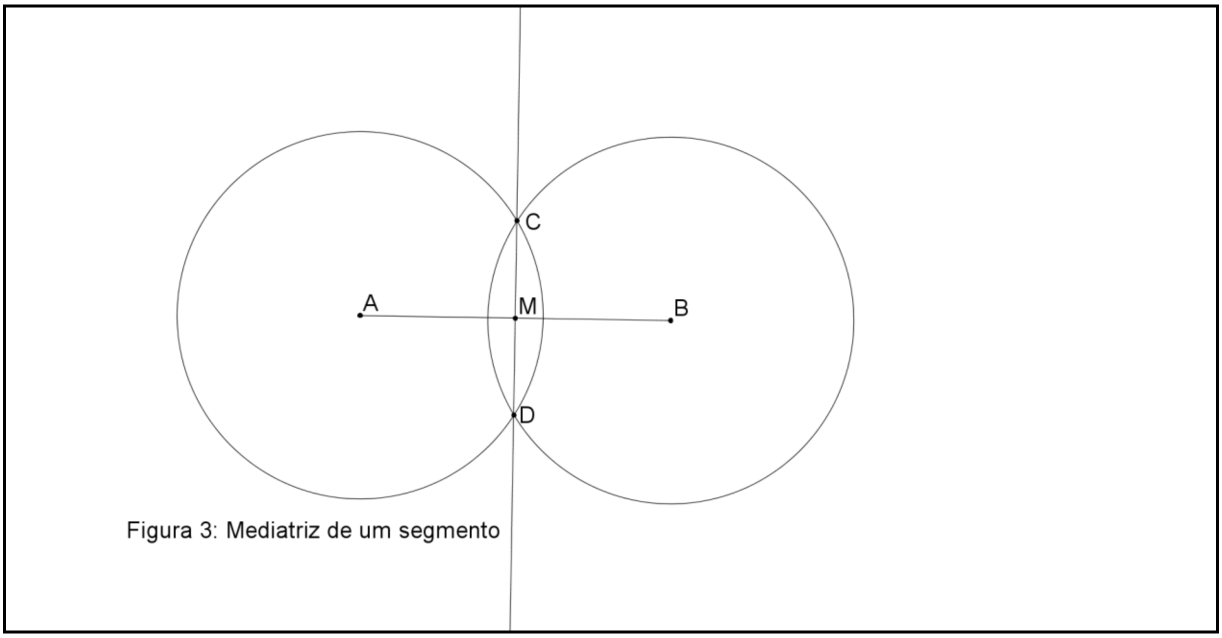


Figura 3: Mediatriz de um segmento

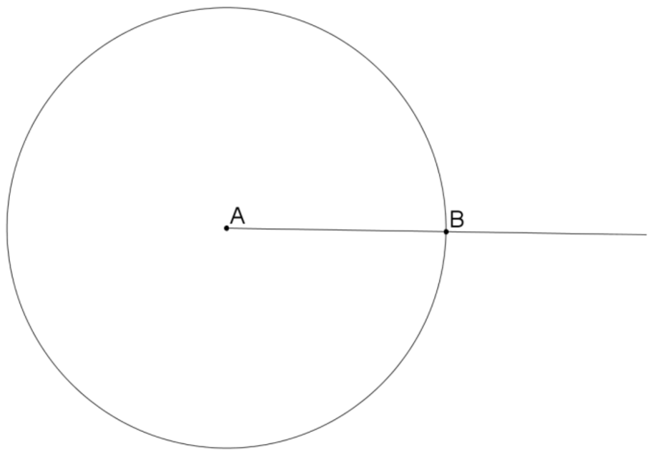
Observação: É de fundamental importância que o leitor perceba que o ponto médio de um segmento de reta poderia ser obtido de um modo impreciso se fosse utilizada apenas a régua. Poderíamos também construir um ângulo reto obtido diretamente com o uso de um esquadro cujo resultado seria um ângulo próximo de um reto. Isso torna o compasso um instrumento indispensável para esse tipo de aplicação.

2.3 Construções de polígonos

2.3.1 Construção de um triângulo qualquer

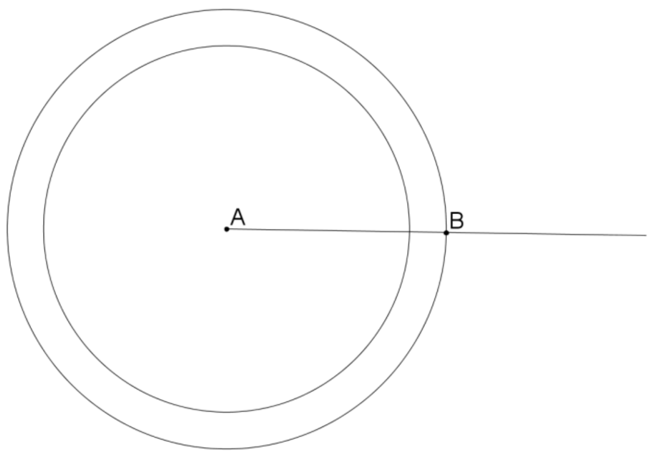
Vamos construir, com o auxílio de régua e compasso, um triângulo cujos lados medem: 4 u, 5 u e 6 u.

- Inicialmente traçamos um segmento de reta (pode ser horizontal) e nele marcamos o ponto A. Com o compasso centrado em A, marcamos o ponto B, sendo AB = 6 u.



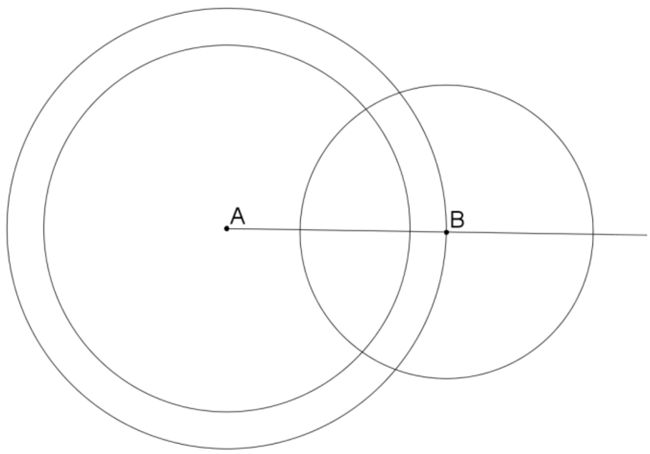
Construção da figura 4: Etapa 1

- Centramos novamente o compasso em A e traçamos um círculo de raio 5 u.



Construção da figura 4: Etapa 2

- Agora traçamos o círculo de raio 4 u, centrado em B.



Construção da figura 4: Etapa 3

- A interseção desses dois últimos círculos nos dá o ponto C. Assim, temos o triângulo ABC quando ligamos esses pontos.

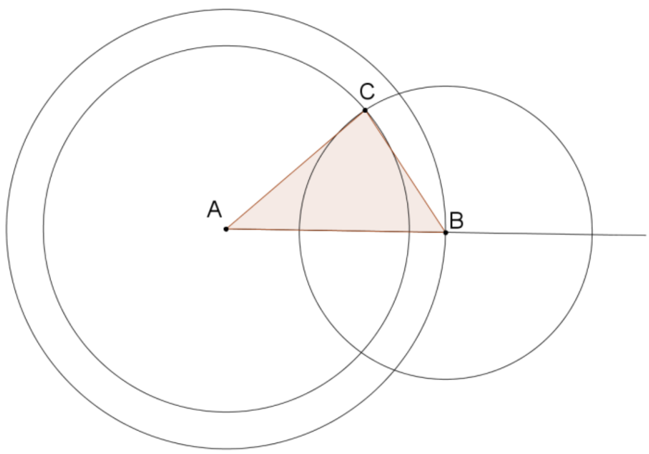


Figura 4: Triângulo qualquer

2.4 Construção de polígonos regulares construtíveis

Todos os polígonos regulares podem ser inscritos numa circunferência. Entretanto, nem todo polígono regular é construtível com régua e compasso.

Gauss relacionou o problema das construções de polígonos regulares com as raízes da equação $x^n - 1 = 0$. Essa equação possui n raízes complexas que podem ser representadas como pontos de uma circunferência. Nesse caso esses pontos são os vértices do polígono regular inscrito na circunferência de raio 1 centrada na origem. A verificação sobre a possibilidade de um polígono ser construtível ou não se deu com o desenvolvimento da Álgebra. Para o heptágono regular (n = 7) Gauss demonstrou, em 1796, que a construção é impossível.

Gauss mostrou que, quando p é primo, um p-ágono (polígono de p lados) regular é construtível se, e somente se, p é um primo de Fermat, ou seja, p = $2^{2^n}+1$.

Alguns exemplos de primos de Fermat são:

n = 0 $\Rightarrow$ $2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3 \Rightarrow$ p = 3.

n = 1 $\Rightarrow$ $2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5 \Rightarrow$ p = 5.

n = 2 $\Rightarrow$ $2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17 \Rightarrow$ p = 17.

O teorema a seguir é uma generalização do teorema de Gauss.

Teorema: Um polígono regular de k lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, k = 2^a ou k = $2^a\, p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_r$, onde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ são números primos distintos da forma p = $2^{2^b}+1$(primos de Fermat) e a e b são números inteiros não negativos.

Neste caso, temos que toda potência de base 2, maior ou igual a 4, gera o número de lados de um polígono construtível. Do mesmo modo, qualquer primo de Fermat ou o produto entre dois ou mais números distintos desse tipo, inclusive por uma potência de base 2, corresponde ao número de lados de um polígono construtível com régua e compasso.

Observe que na sequência de 3 a 17 não figura o heptágono regular, pois 7 não é um primo de Fermat. O mesmo ocorre com os polígonos regulares de 11 e 13 lados. O eneágono, que é um polígono de 9 lados, pode ser escrito por 3 . 3 = 9, porém os primos de Fermat usados não são distintos. O polígono regular de 14 lados também não é construtível, já que é o produto de um número de base 2 por 7, que não é um primo de Fermat.

Assim, os polígonos regulares construtíveis com régua e compasso possuem a seguinte sequência de número de lados: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20,...

Vamos a seguir construir alguns polígonos regulares com régua e compasso que serão desenvolvidos em etapas para facilitar o acompanhamento da construção.

Em certas etapas, ocultaremos alguns detalhes a fim de evitar um número excessivo de figuras sobrepostas. Nesse caso, apague esses detalhes com uma borracha.

Nesse trabalho faremos as construções com régua e compasso dos polígonos regulares relacionados abaixo de acordo com a seguinte ordem: Triângulo equilátero, quadrado, hexágono, octógono, decágono, pentágono, dodecágono, pentadecágono e heptadecágono. É importante ressaltar que o pentágono será construído tendo como ponto de partida o decágono, já que esse último se trata de uma construção mais simples que o pentágono. Para isso, utilizaremos a metade dos vértices (alternados) do decágono para construir o pentágono.

2.4.1 Construções de polígonos a partir de um polígono dado

Dado um polígono regular. Queremos, a partir dele, duplicar o número de lados desse polígono. Nesse caso, suponha que dispomos de um polígono regular de n lados. Quando traçamos a mediatriz de cada lado do polígono, obtemos o ponto médio do arco que liga dois vértices consecutivos (esse ponto será um dos vértices do novo polígono). Assim, dobraremos o número de lados do polígono e teremos então um polígono regular de 2 n lados.

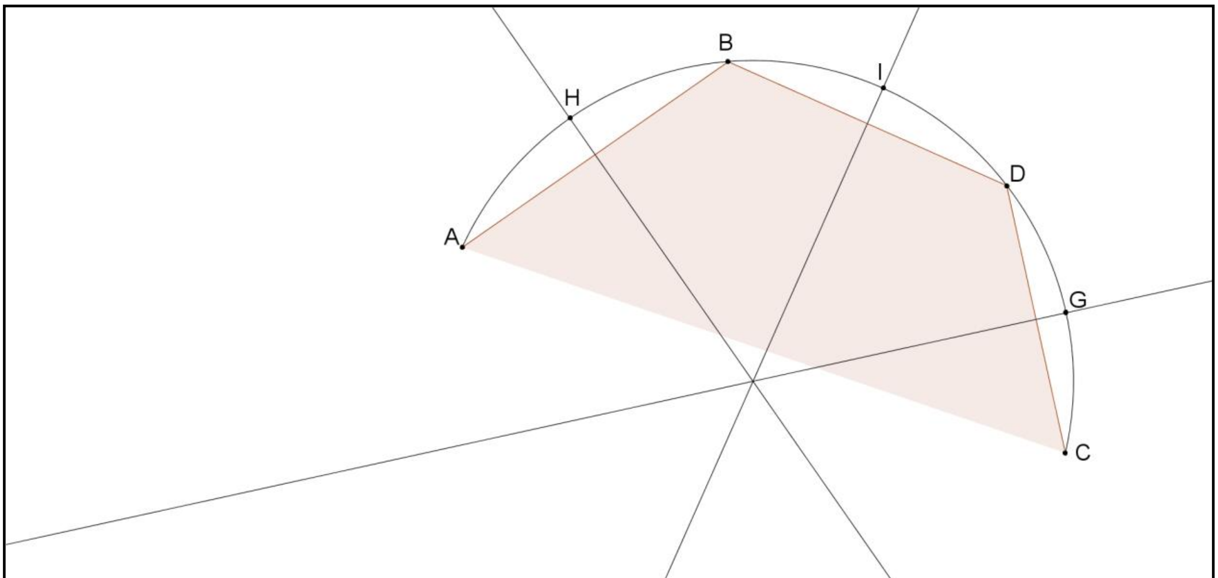


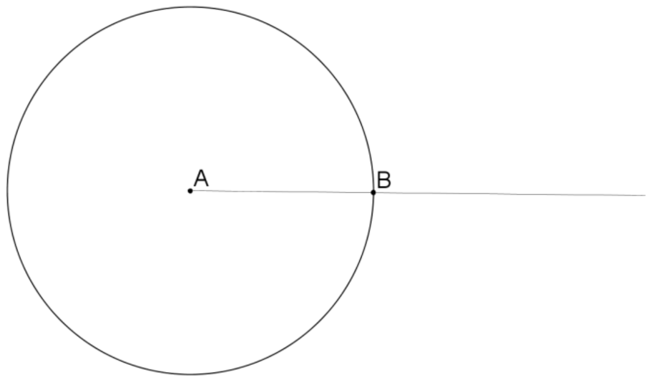
Figura 5: Duplicação do número de lados de um polígono

Na figura acima, H é ponto médio do arco AB, I é ponto médio do arco BD, G é ponto médio do arco DC e assim sucessivamente.

O processo pode ser feito de modo contrário, ou seja, dispomos de um polígono de 2 n lados e queremos gerar um novo polígono de n lados. Para isso, basta utilizarmos os vértices alternados. Assim, escolhemos um vértice qualquer do polígono e um sentido de giro na circunferência (horário ou anti-horário), marcamos um vértice e deixamos o próximo sem marcar até completar a volta na circunferência e o polígono estará pronto.

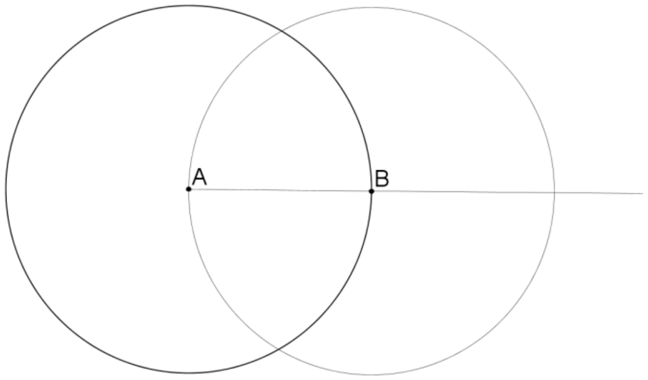
2.4.2 Construção de um triângulo equilátero de lados medindo 5 u

- Inicialmente, traçamos um segmento de reta (pode ser horizontal). Numa extremidade deste segmento marcamos o ponto A e traçamos o círculo de centro em A e raio de 5 u, obtendo assim o ponto B.



Construção da figura 6: Etapa 1

- Agora, com centro em B, traçamos um círculo de raio 5 u.



Construção da figura 6: Etapa 2

- A interseção dos dois círculos nos dá o ponto C e ligando os três pontos teremos o triângulo equilátero ABC, cujos lados medem 5 u.

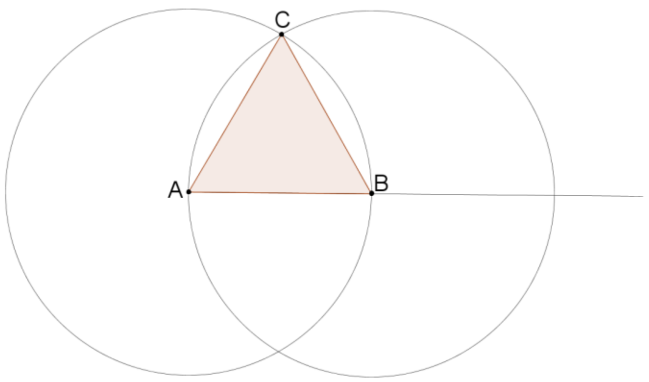


Figura 6: Triângulo equilátero

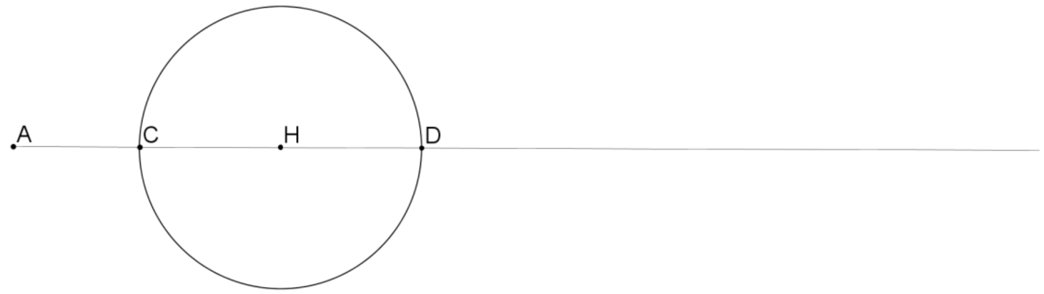
Observação: Essa construção deverá ser executada com mais facilidade por boa parte da turma, já que se trata de uma figura simples e com apenas uma abertura do compasso.

Rapidamente podemos observar que cada lado do triângulo equilátero corresponde ao raio de um círculo. Como esse raio representa a abertura de um compasso cuja medida é fixa, concluímos que os três lados do triângulo possuem a mesma medida.

2.4.3 Construção do quadrado

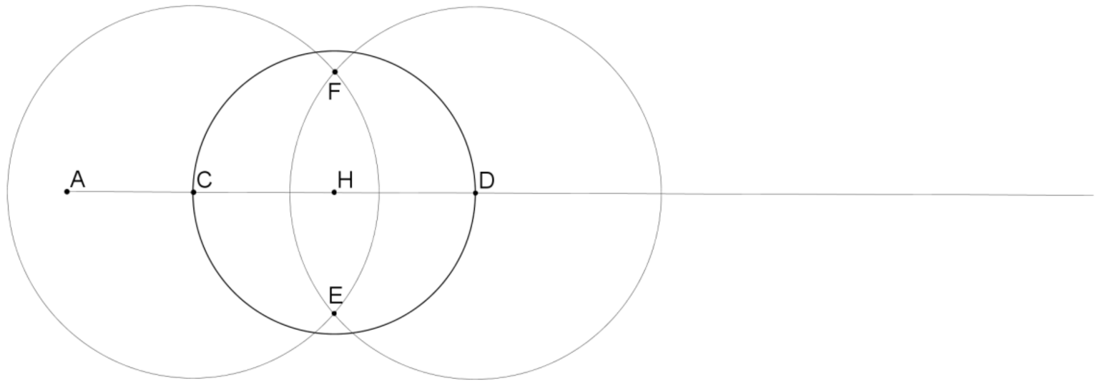
a) Construção do quadrado de lado 5 u

- Trace uma semirreta e nela marque o ponto H a alguns centímetros à direita da extremidade (de 3 cm a 5 cm). Em seguida, trace um círculo com centro em H, de raio de qualquer medida, cujas interseções com o segmento de reta são os pontos C e D.



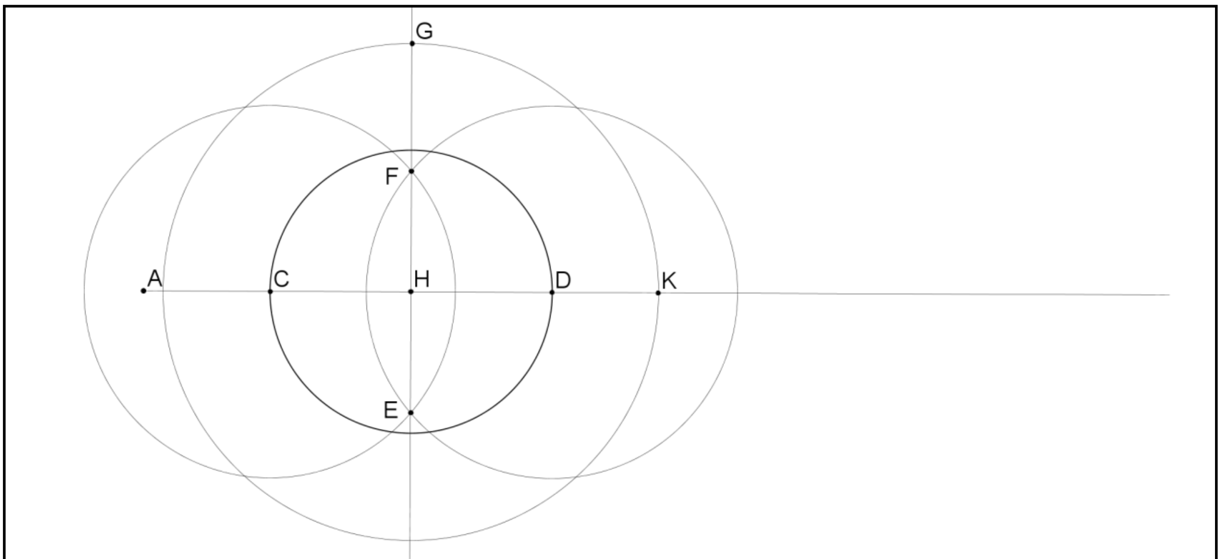
Construção da figura 7: Etapa 1

- Com centro em C e D, trace dois círculos de mesmo raio que seja maior que CH, cujas interseções são os pontos E e F.



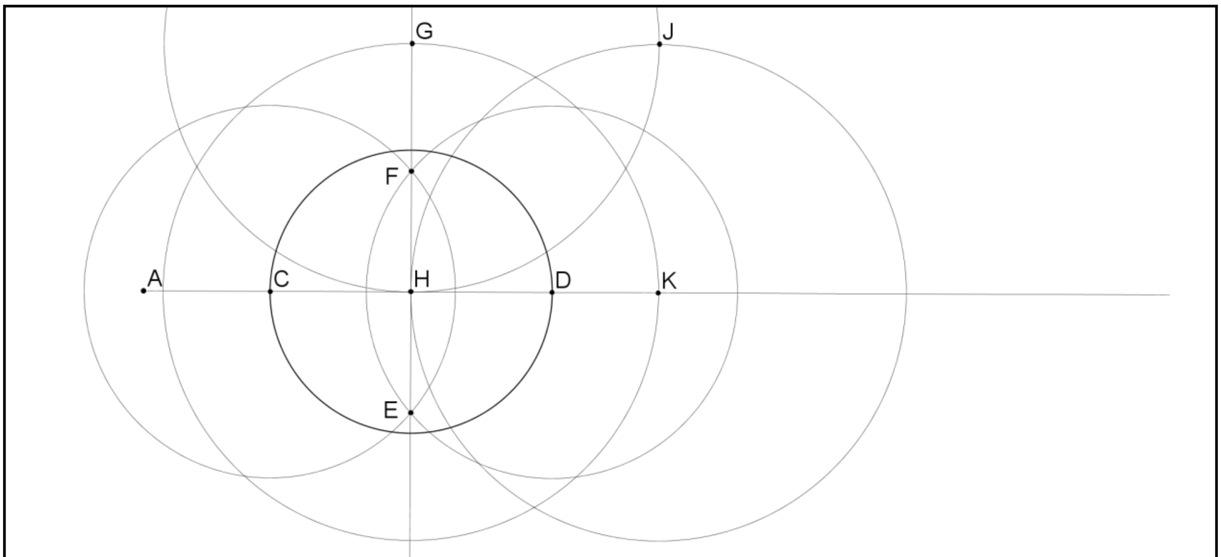
Construção da figura 7: Etapa 2

- Trace a semirreta FE e um círculo de raio igual a 5 u, centrado em H, para obter os pontos G e K, interseção entre esse círculo e as semirretas perpendiculares.



Construção da figura 7: Etapa 3

- Novamente, trace dois círculos de raio 5 u, um centrado em G e outro centrado em K, cuja interseção é o ponto J.



Construção da figura 7: Etapa 4

- Ligamos esses pontos e obtemos o quadrado HGJK.

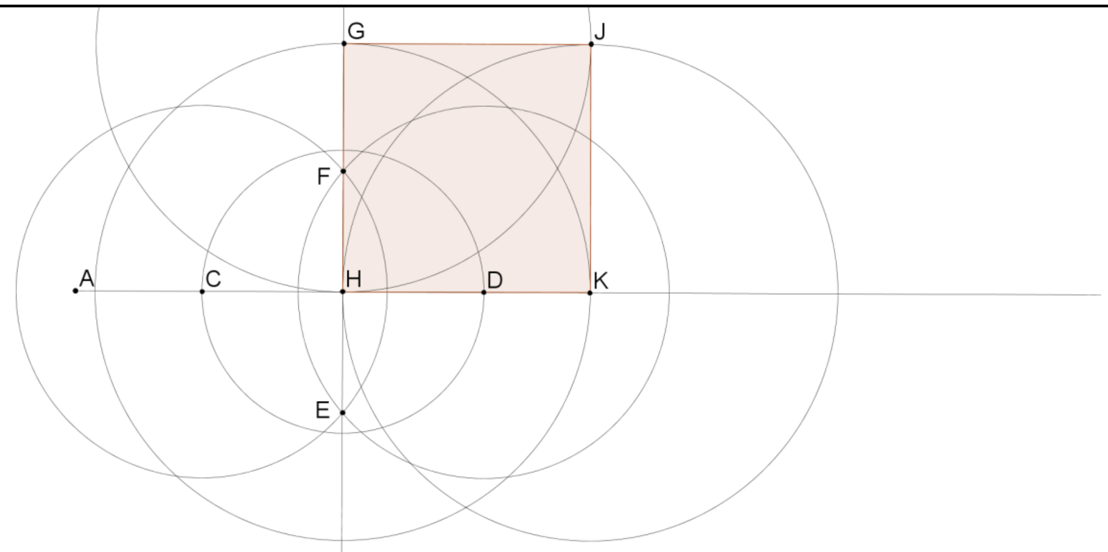


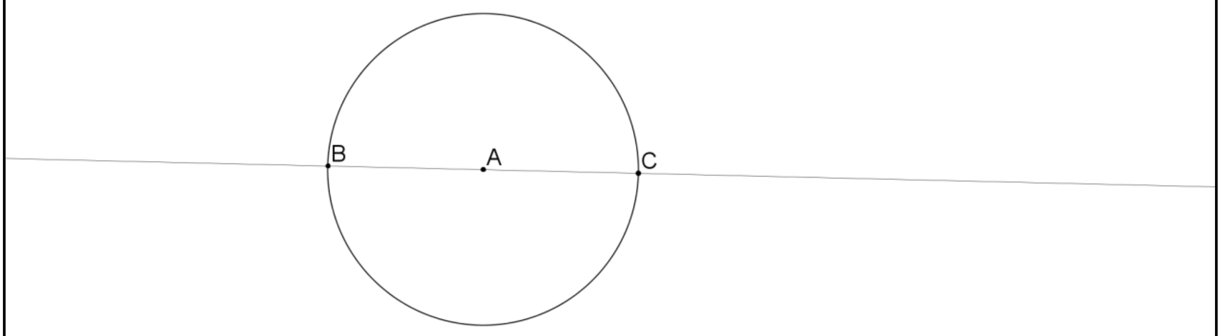
Figura 7: Quadrado

As retas HK e HG são perpendiculares, pois a reta HG é o lugar geométrico do plano cujos pontos equidistam dos pontos C e D. Sabemos então que H é um ângulo reto. Os lados são constituídos de mesma medida, pois representam uma única abertura do compasso. Como os quatro lados são iguais, os ângulos opostos H e J são de mesma medida. Portanto teremos os quatro ângulos retos e os quatro lados iguais. Logo temos um quadrado.

b) Construção do quadrado de lado 5 u por outro método

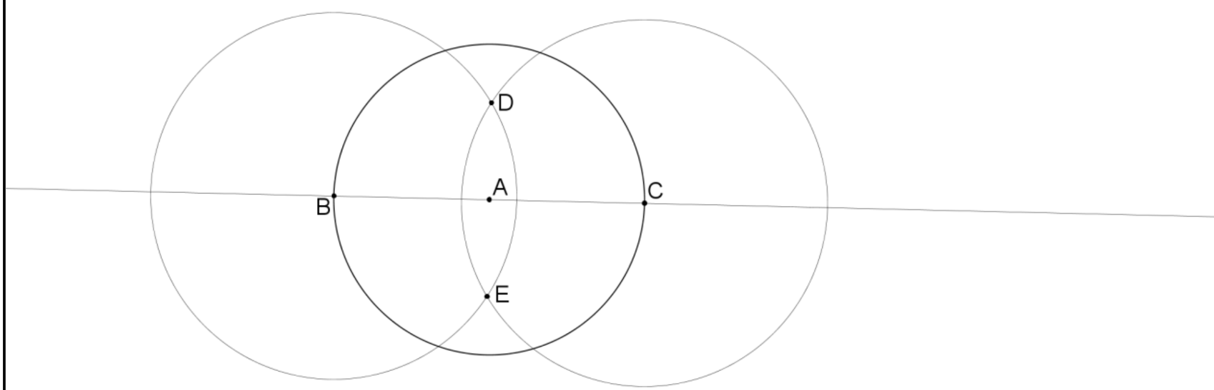
Outro modo de construir um quadrado é inscrevê-lo numa circunferência. Se quisermos, por exemplo, construir um quadrado de lado 6 u, teremos que sua diagonal (que é igual ao diâmetro da circunferência onde ele está inscrito) é $6\sqrt{2}$ u. Logo, o raio da circunferência mede $3\sqrt{2}$ u. Para viabilizar a execução, vamos considerar uma circunferência de raio 3 u.

- Trace uma circunferência de raio 3 u e centro no ponto A. Trace uma reta que passa por A intersectando a circunferência nos pontos B e C.



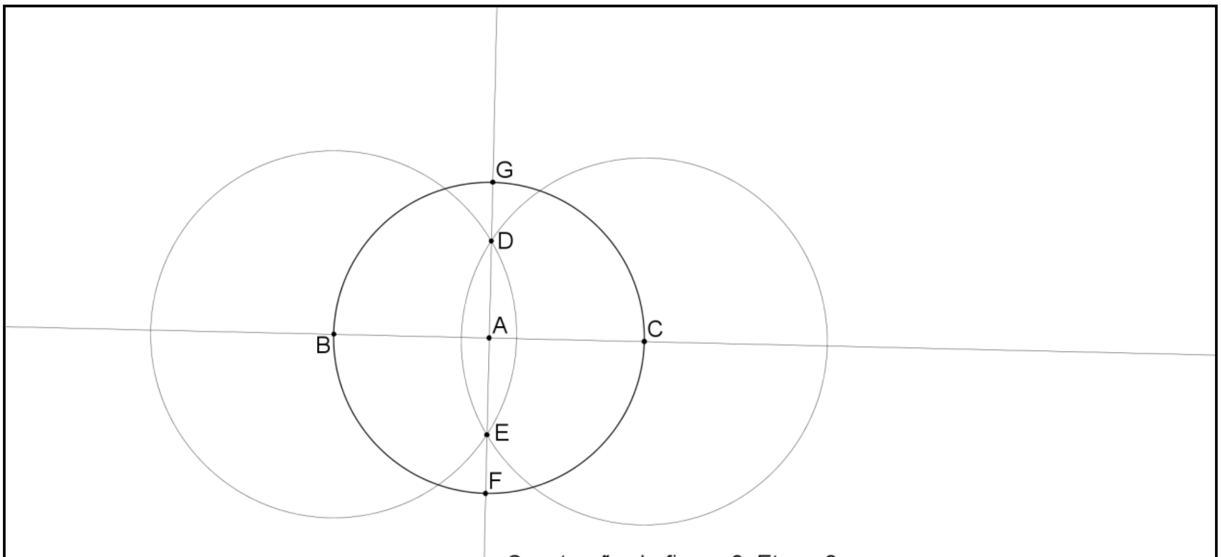
Construção da figura 8: Etapa 1

- Trace a mediatriz do segmento BC, que é a reta que passa por A (ponto médio de BC), perpendicularmente a BC. Para isso, centre dois círculos de mesmo raio em B e C cujo raio é maior que a metade de BC, obtendo os pontos D e E, que são as interseções entre os círculos.



Construção da figura 8: Etapa 2

- Trace uma reta que passa pelos pontos D e E (mediatriz de BC), obtendo os pontos F e G, que são as interseções entre a reta DE e a circunferência inicial.



Construção da figura 8: Etapa 3

- Finalmente, ligando os pontos das interseções dessas duas retas com a circunferência inicial, temos o quadrado BFCG.

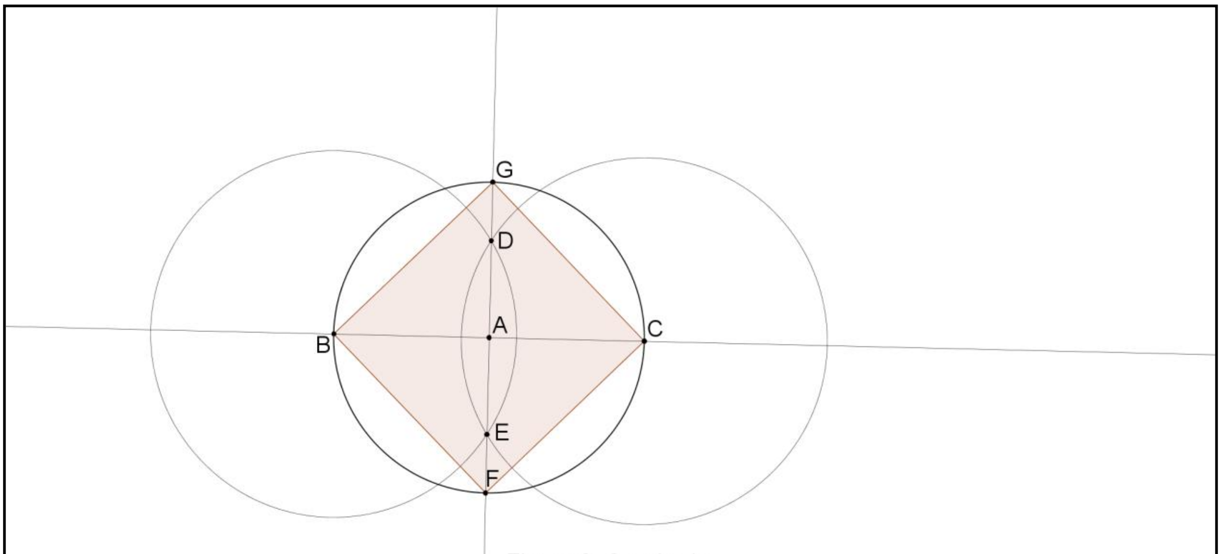


Figura 8: Quadrado

Os diâmetros BC e GF são perpendiculares e se intersectam no ponto médio (A) de ambos. Logo, teremos quatro triângulos retângulos isósceles. Assim, pelo caso LAL, os triângulos são congruentes, os segmentos correspondentes aos lados são de mesma medida e os vértices B, G, C e F são ângulos retos. Portanto, BGCF é um quadrado.

Observação: Tanto no primeiro método quanto no segundo é normal que surjam grandes dificuldades por parte dos alunos e, possivelmente, uma aula de 50 minutos não será suficiente pra que todos consigam produzir o quadrado de acordo com o primeiro método. O quadrado é, dentre as figuras relacionadas até aqui, uma que oferece grande dificuldade para a construção com régua e compasso seguindo o primeiro método, porém o resultado final será satisfatório. Pelo menos é o que se espera no final das atividades propostas.

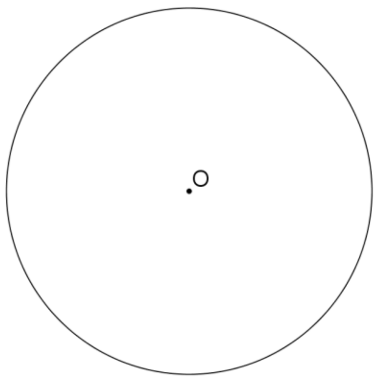
2.4.4 Construção do hexágono regular de lado medindo 5 u

Lembramos que, a partir do triângulo equilátero, obtemos um hexágono regular quando duplicamos o número de vértices desse triângulo, no entanto construiremos o hexágono com um valor do lado definido.

O hexágono regular será construído antes do pentágono regular simplesmente pela maior facilidade de entendimento de sua construção.

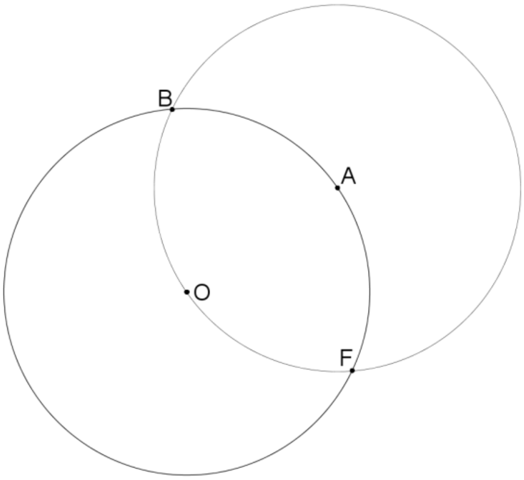
- Trace um círculo de centro O e raio igual a 5 u.

Observação: Quando inscrevemos um hexágono regular numa circunferência, o lado desse hexágono é igual ao raio da circunferência.



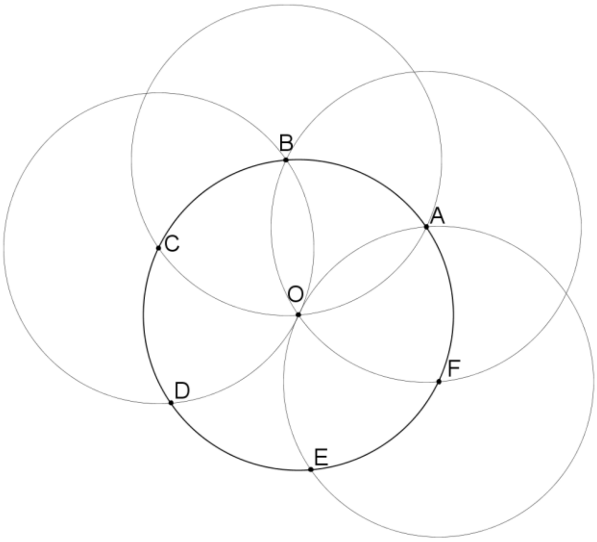
Construção da figura 9: Etapa 1

- Marcamos o ponto A em qualquer lugar nessa circunferência e traçamos um círculo de raio 5 u centrado nesse ponto, obtendo os pontos B e F, que são as duas interseções entre esse círculo e o círculo inicial.



Construção da figura 9: Etapa 2

- Repetimos o procedimento centrando círculos de raio 5 u nesses pontos obtidos, até encontrar os seis pontos no círculo inicial.



Construção da figura 9: Etapa 3

- Finalmente, ligamos os pontos e teremos o hexágono ABCDEF.

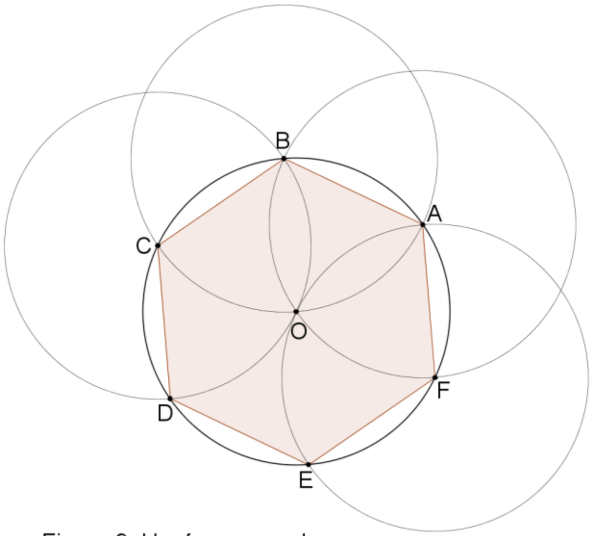


Figura 9: Hexágono regular

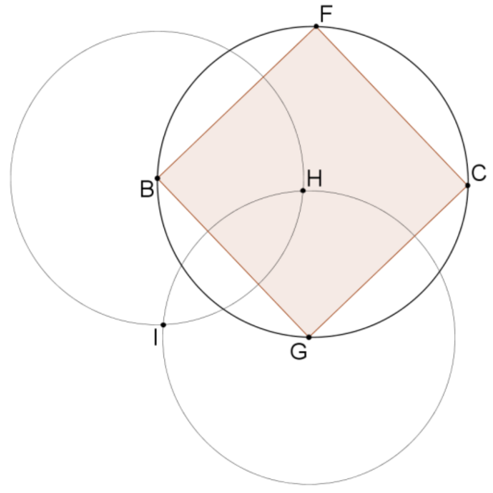
Observação: O hexágono regular é uma das mais simples figuras a serem construídas com régua e compasso devido às orientações anteriores e principalmente por usar uma única medida de comprimento, ou seja, todos os círculos têm o mesmo raio.

Já vimos e justificamos no início dessa unidade que não é possível construir com régua e compasso os polígonos regulares de 7 e 9 lados.

2.4.5 Construção do octógono regular

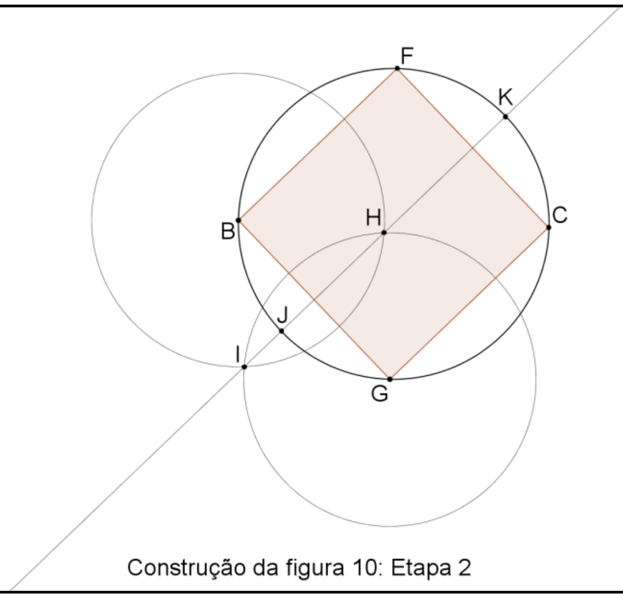
Para construirmos um octógono regular, utilizamos o quadrado e seguimos os passos citados para a duplicação do número de lados de um polígono.

- Considere o quadrado BGCF. Centre dois círculos de mesmo raio nos vértices B e G, obtendo as interseções H e I desses dois círculos.



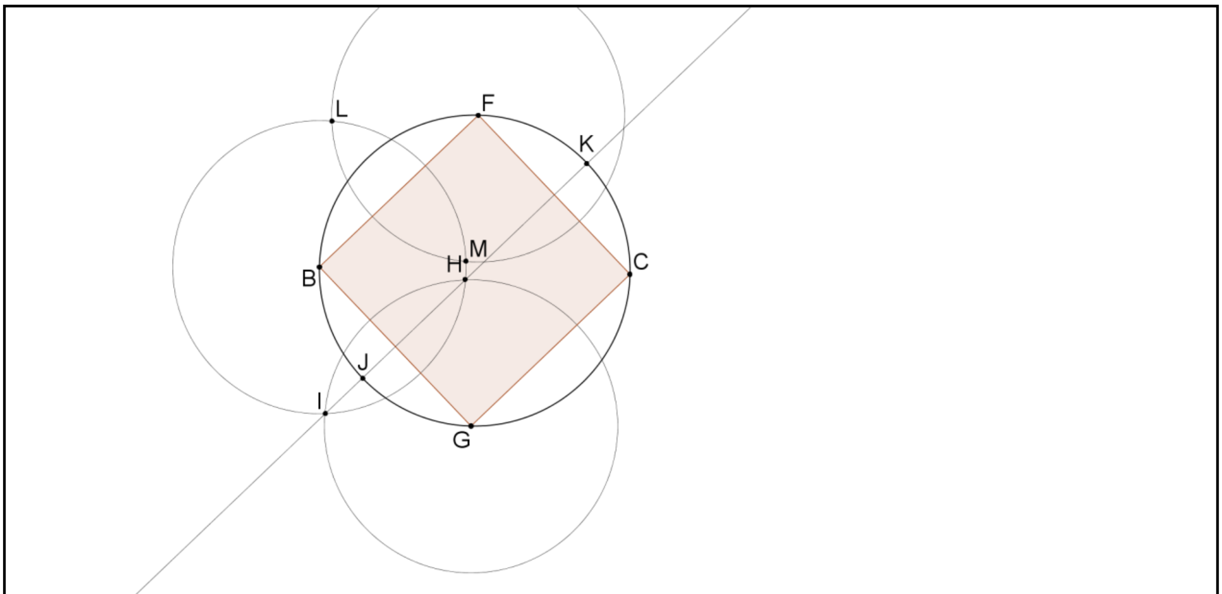
Construção da figura 10: Etapa 1

- Trace a reta HI, obtendo os pontos J e K, que são as interseções com o círculo inicial.



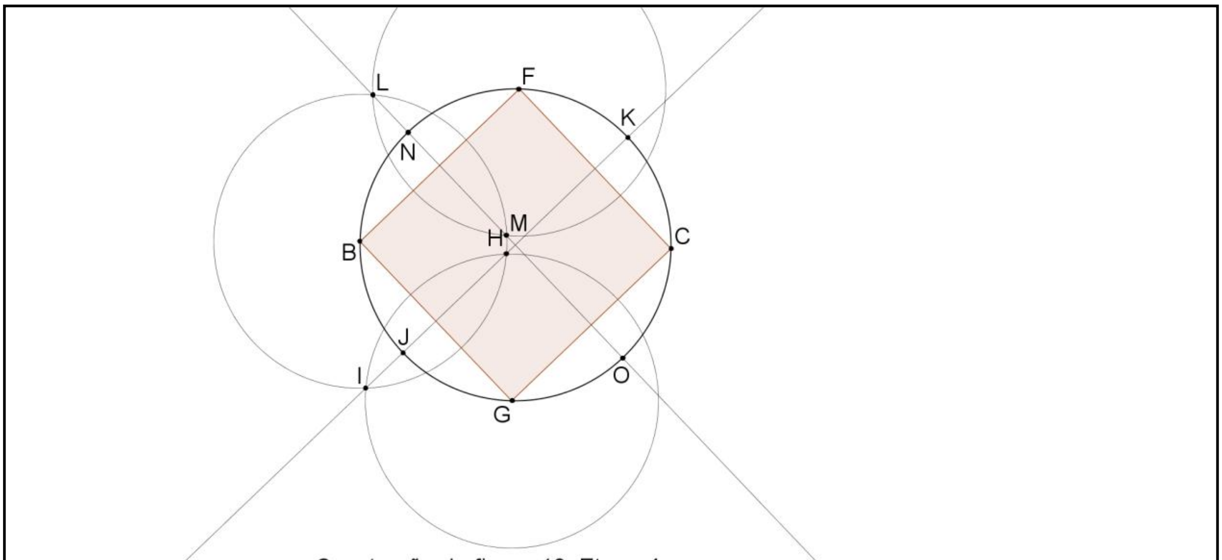
Construção da figura 10: Etapa 2

- Centre um círculo de mesmo raio que os dois últimos no vértice F do quadrado, obtendo nas interseções os pontos L e M com o círculo centrado em B.



Construção da figura 10: Etapa 3

- Trace a reta LM, obtendo as interseções N e O com o círculo inicial.



Construção da figura 10: Etapa 4

- Ligando os pontos, teremos o octógono regular.

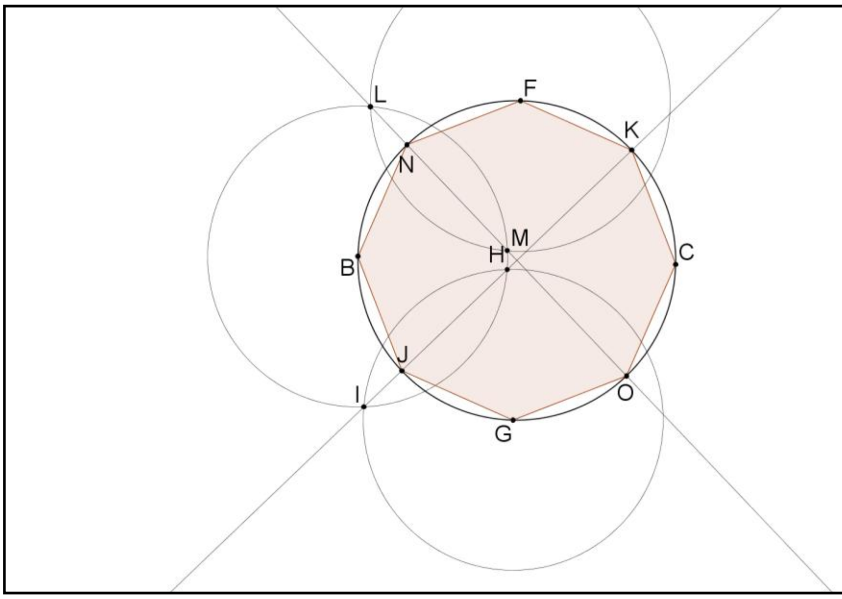


Figura 10: Octógono regular

2.4.6 Construção do decágono regular

Vamos considerar inicialmente um decágono regular de lado x, inscrito em uma circunferência de raio unitário. Como o polígono possui 10 vértices, temos 10 triângulos isósceles congruentes. O ângulo A vale 36° = $\frac{360°}{10}$. A figura abaixo ilustra bem esse fato. Os outros dois ângulos do triângulo ACD medem cada um, nesse caso, 72° e, portanto, a bissetriz do ângulo D divide o triângulo ACD em dois triângulos isósceles. Marcamos o ponto B no raio AC do círculo, dividindo-o em dois segmentos cujas medidas são x e 1 – x.

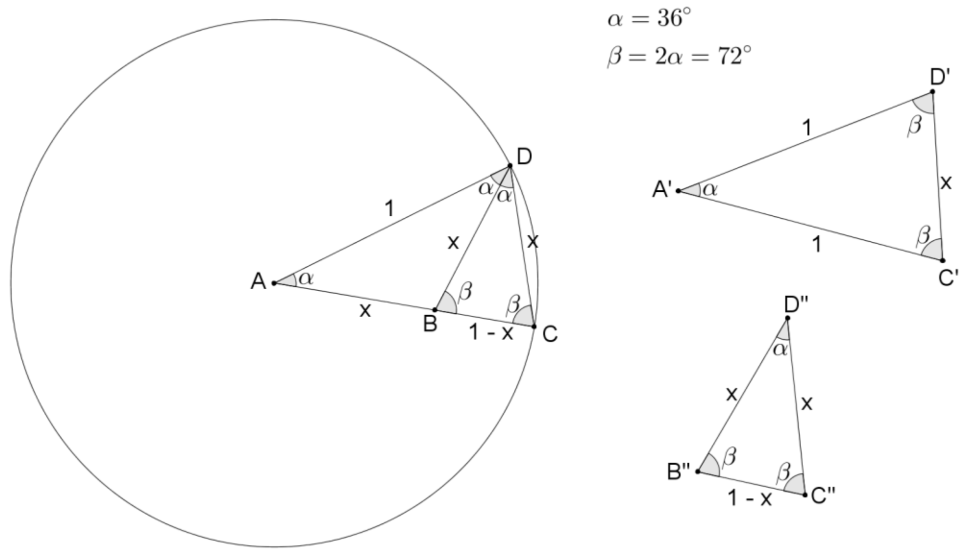


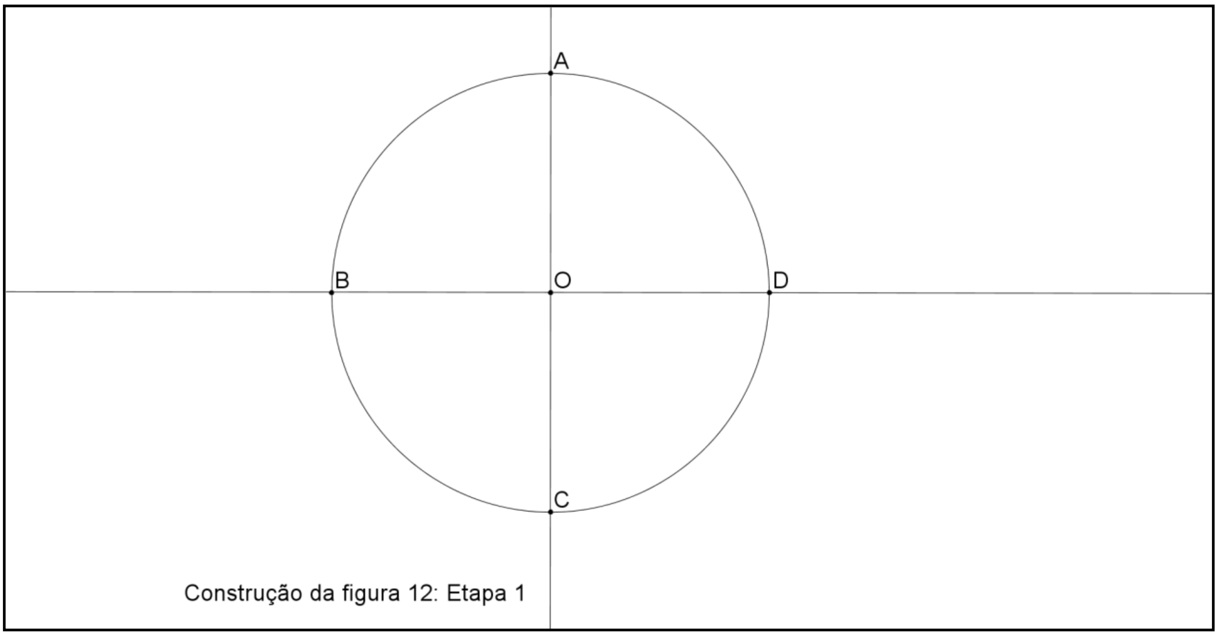
Figura 11: Construção do lado do decágono

Temos que os triângulos ACD e BCD são semelhantes (caso AAA), logo teremos a proporção $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$

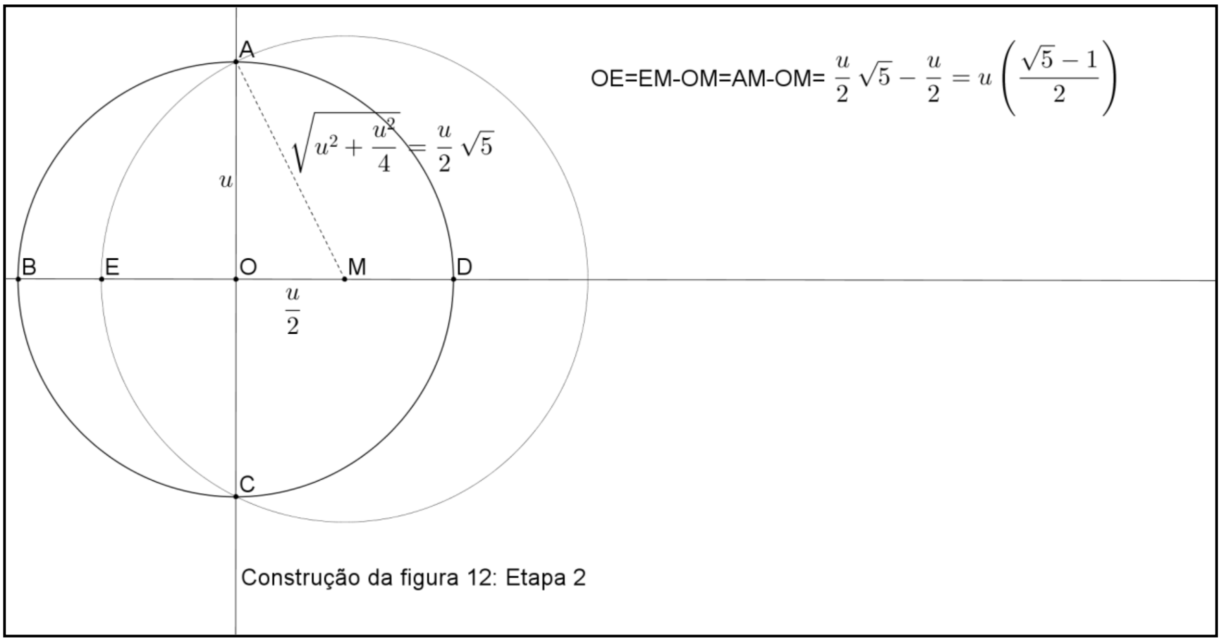
Dessa proporção temos a equação do 2º grau $x^2 = 1 – x$, ou seja, $x^2 + x – 1 = 0$ cujas raízes são x' = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e x'' = $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ onde essa última é negativa e por esse motivo será desconsiderada. Assim, é possível construir o decágono regular, transportando-se a corda de comprimento x para a circunferência. A primeira raiz, como já mostramos nesse trabalho, é o número de ouro, cuja construção com régua e compasso será feita sem muito trabalho.

A construção se dará do seguinte modo:

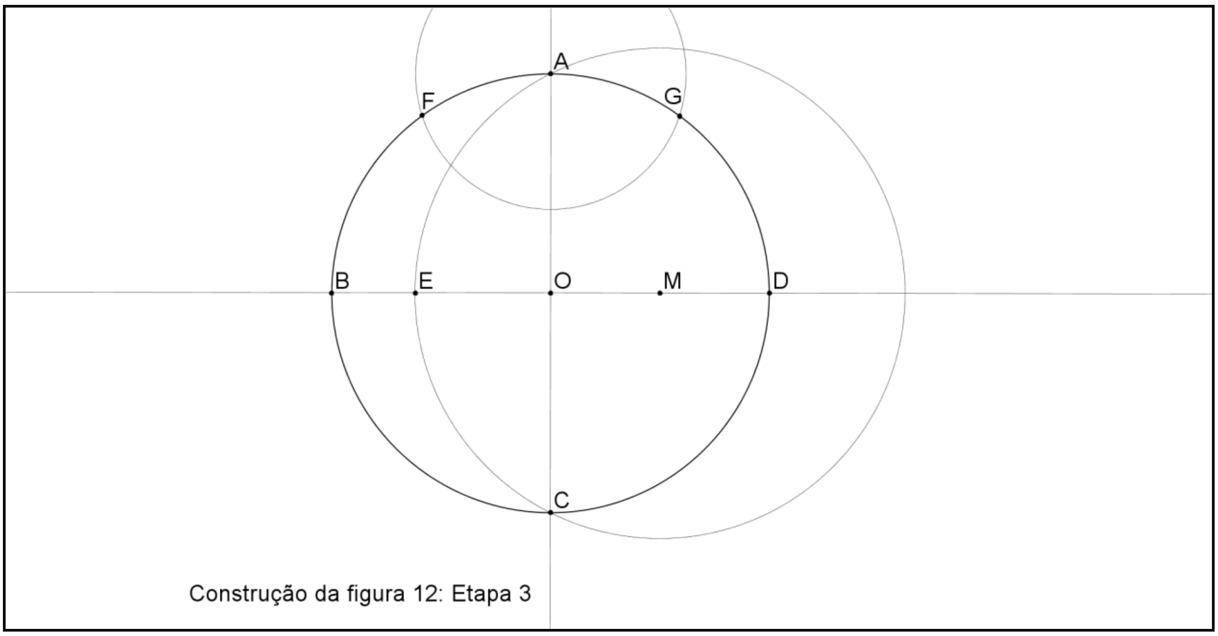
- Trace um círculo de centro O e diâmetros AC e BD, perpendiculares se intersectando no ponto O.



- Marque M, ponto médio de OD. Trace um círculo de raio AM centrado em M, obtendo o ponto E na interseção desse círculo com o segmento BO.

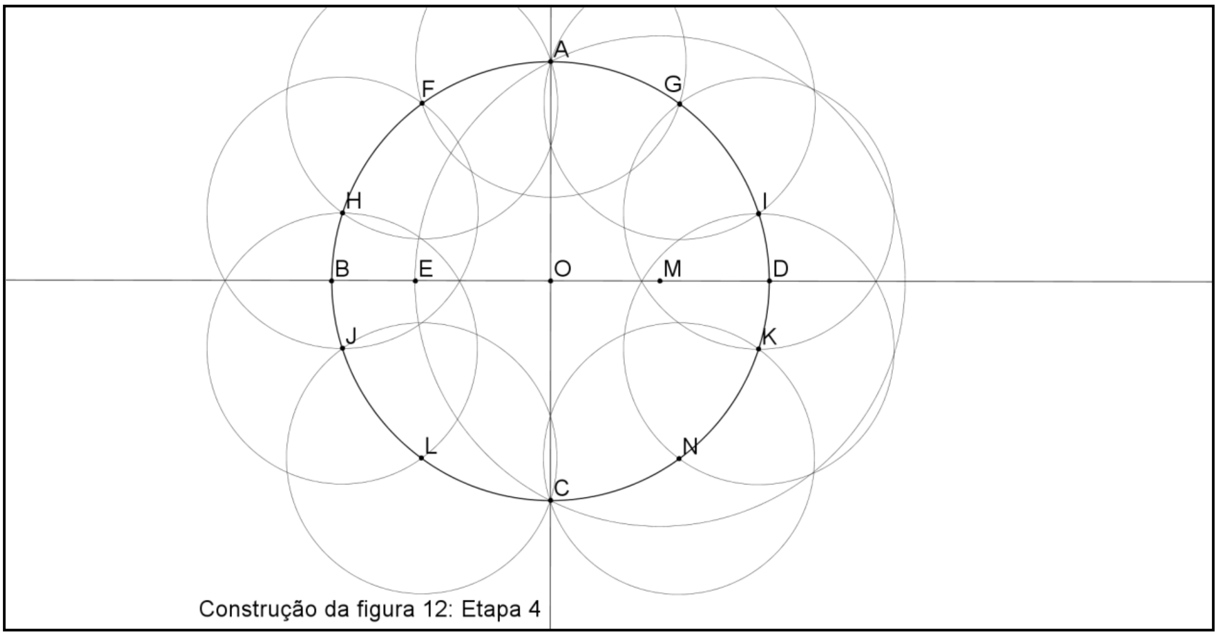


- O segmento OE corresponde à medida do lado do decágono. Portanto, trace um círculo de raio OE centrado em A, obtendo os pontos F e G nas interseções com o círculo inicial.



Construção da figura 12: Etapa 3

- Repita o processo para obter os demais lados do decágono traçando círculos de raio OE até contornar o círculo inicial.



Construção da figura 12: Etapa 4

- Ligando os pontos relativos aos centros desses círculos, teremos o decágono regular.

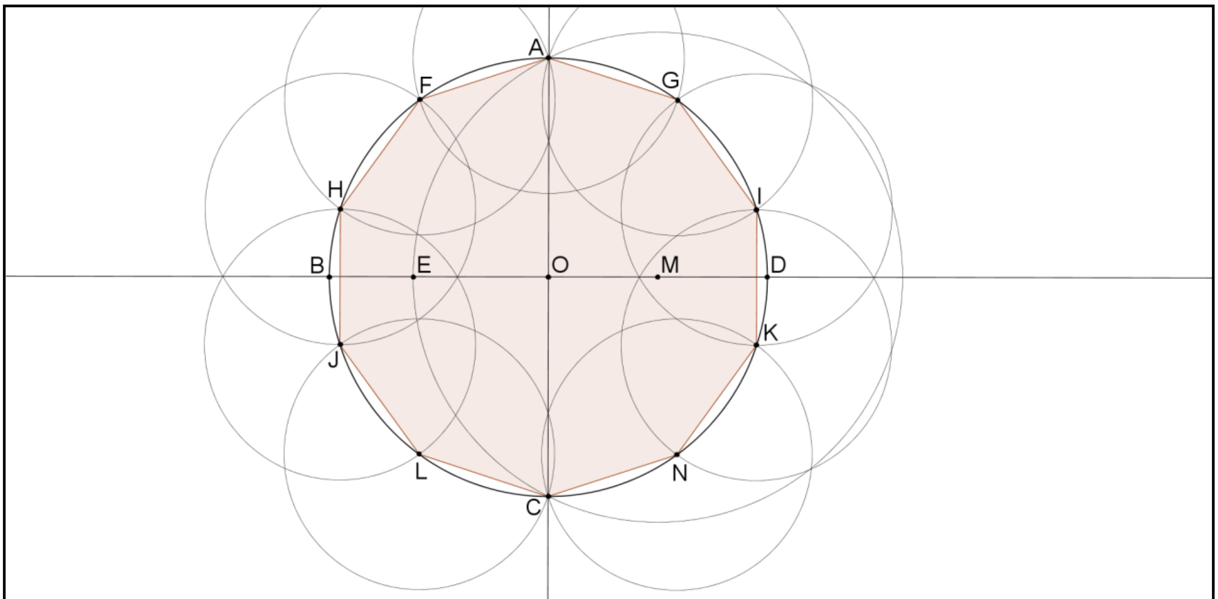


Figura 12: Decágono regular

É fácil notar que AM = EM, pois correspondem ao raio do círculo centrado em M. O triângulo AOM é retângulo em O. Na figura abaixo temos um círculo de raio 1 e centro na origem.

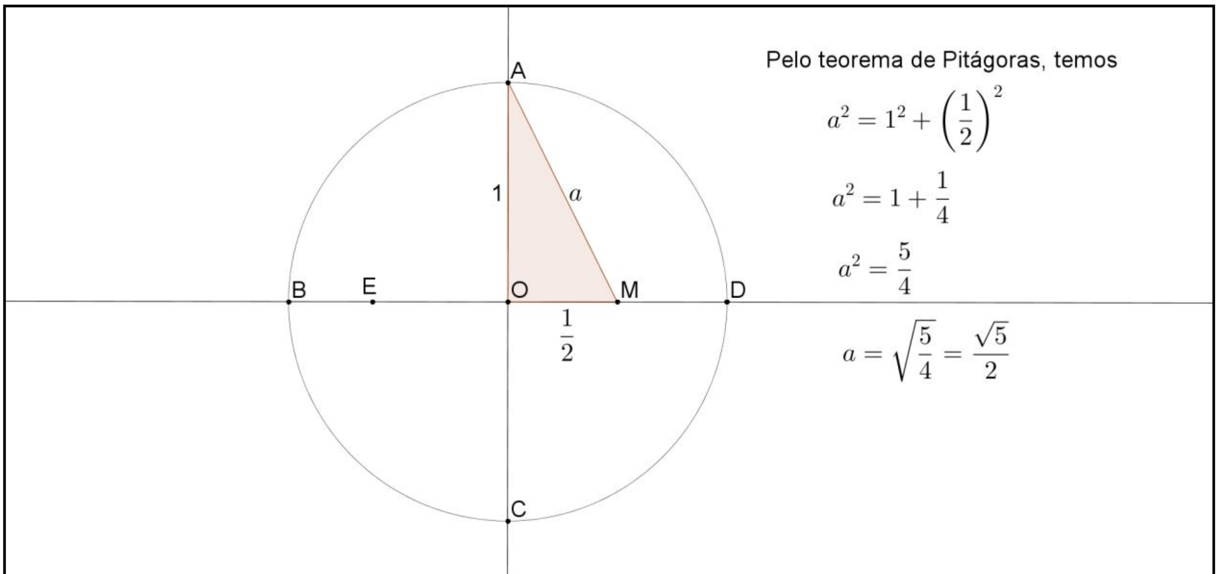


Figura 13: Construção do lado do decágono

Temos também que OE = EM – OM = AM – OM = $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que é a raiz positiva da equação $x^2 + x - 1 = 0$, ou seja, a medida do lado do decágono.

2.4.7 Construção do pentágono regular

Para construirmos o pentágono, utilizaremos o decágono como ponto de partida. Nesse caso o decágono é um polígono de 2 n lados e queremos obter um polígono de n lados.

- Considere os vértices de um decágono regular (etapa 4 da construção da figura 12). Para obtermos o pentágono, basta escolhermos um ponto inicial e ligarmos os pontos alternados a partir dele e teremos o pentágono regular.

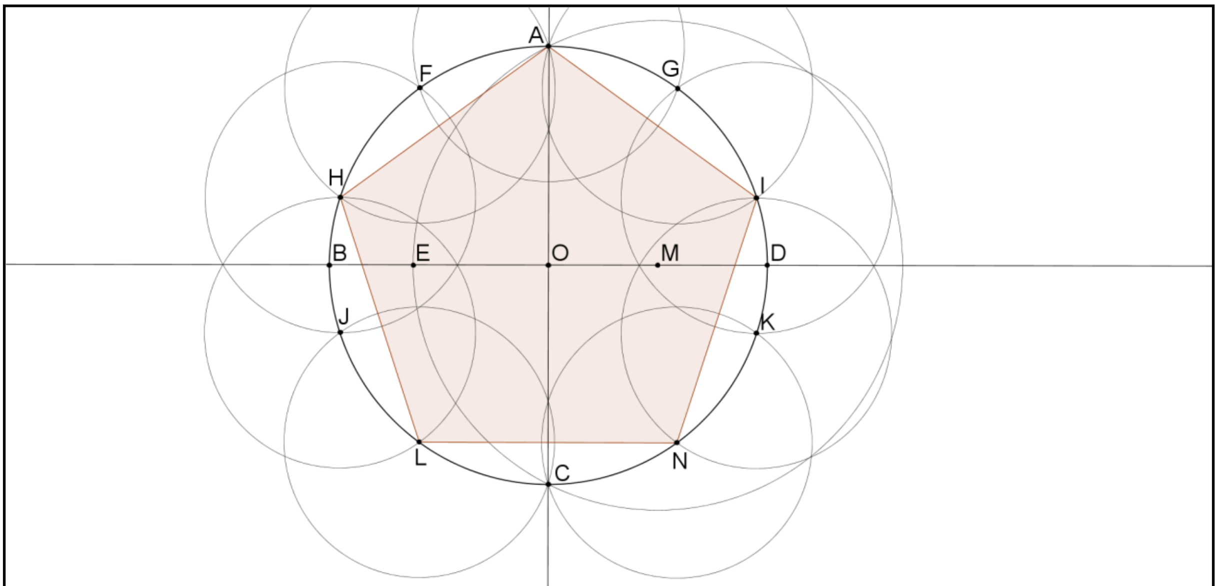


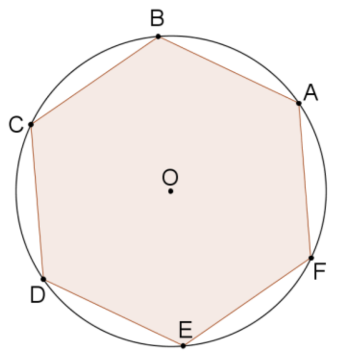
Figura 14: Pentágono regular

Já sabemos que o polígono regular de 11 lados não é construtível com régua e compasso. O mesmo ocorre com os polígonos regulares de 13 e 14 lados.

2.4.8 Construção do dodecágono regular (polígono de 12 lados)

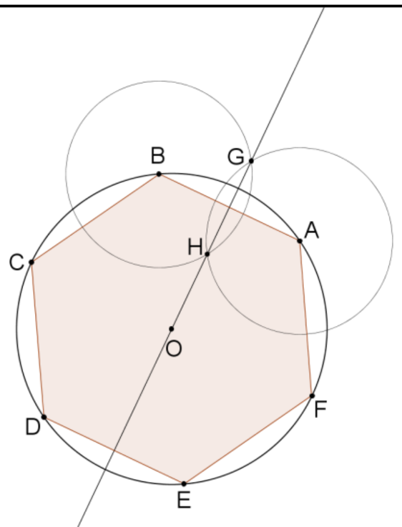
Essa construção se dá por meio da duplicação do número de lados do hexágono regular.

- Considere o hexágono regular (figura 9). Ocultaremos os círculos desnecessários para melhorar a visualização da figura.



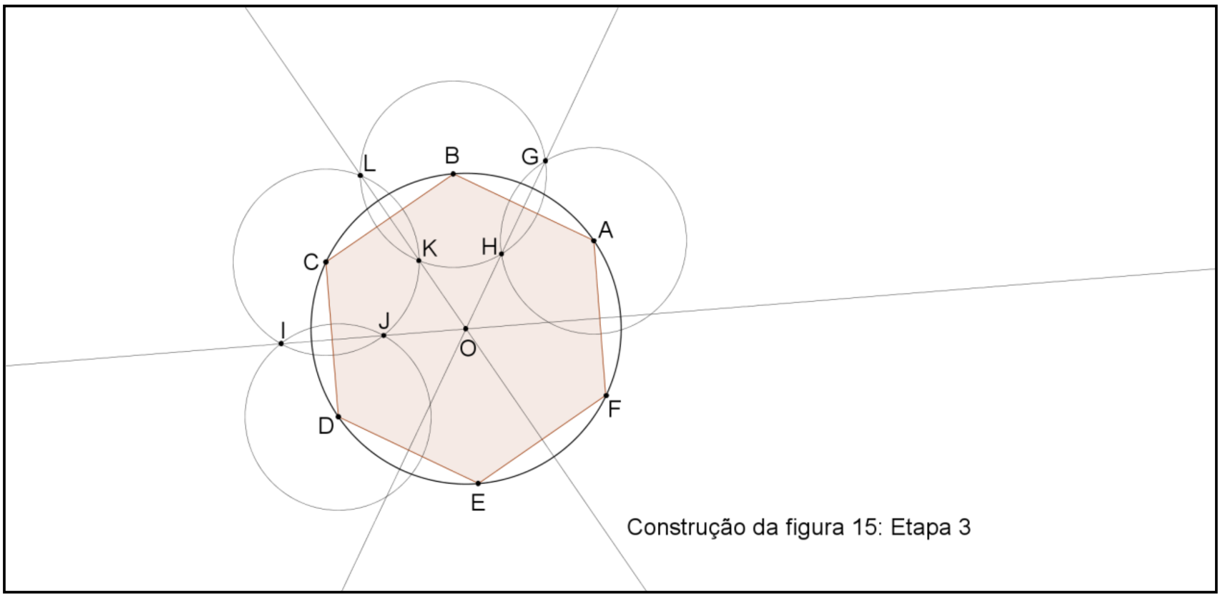
Construção da figura 15: Etapa1

- Temos três pares de lados paralelos. Nesse caso, obtemos as mediatrizes de três lados consecutivos. Para traçar a mediatriz do lado AB, centre o compasso em A e B traçando círculos de mesmo raio, sendo o raio maior que a metade de AB. Marque as interseções desses círculos nos pontos G e H. Trace a reta GH.



Construção da figura 15: Etapa 2

- Repita o processo para os lados BC e CD, traçando círculos de mesmo raio que os anteriores. Trace as retas das interseções desses pares de círculos.



Construção da figura 15: Etapa 3

- Marque os seis pontos de interseção entre essas três retas com o círculo inicial e teremos os outros seis vértices do dodecágono, sendo que os vértices do hexágono completam o polígono procurado. Para isso, basta ligarmos esses pontos.

Ocultaremos o hexágono permitindo uma melhor visualização do dodecágono.

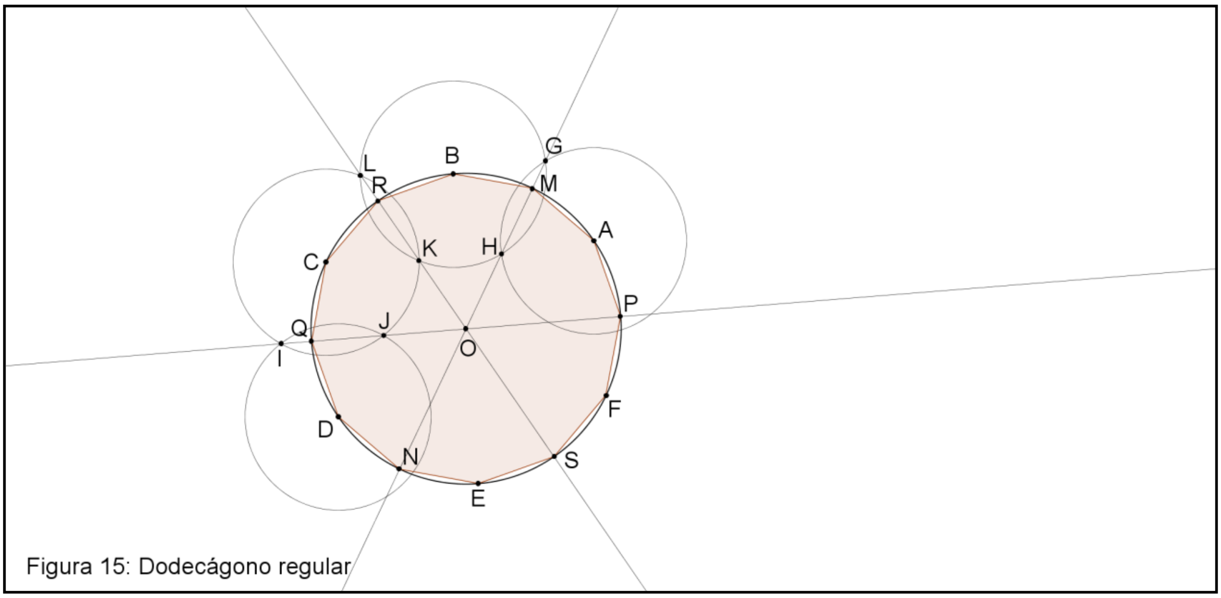
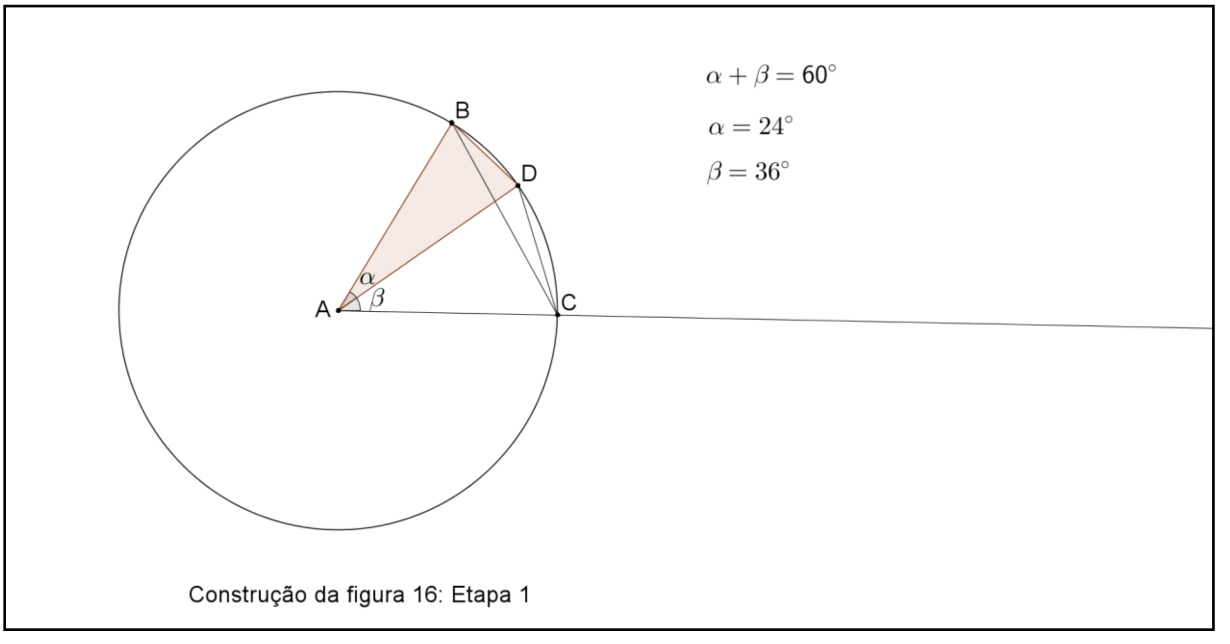


Figura 15: Dodecágono regular

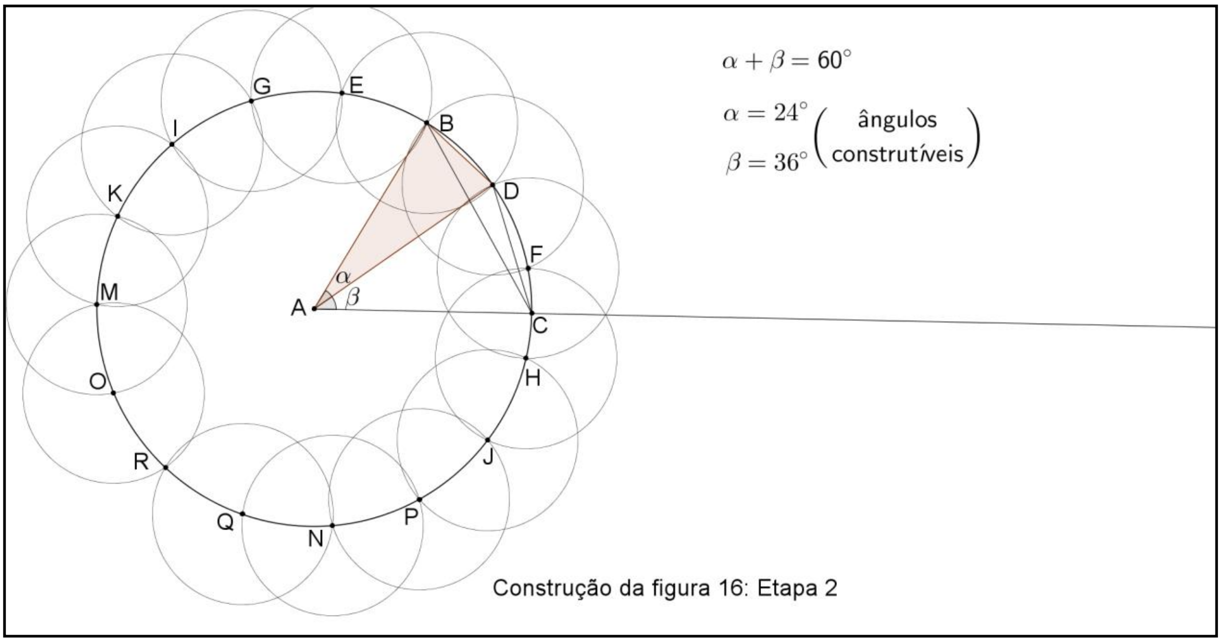
2.4.9 Construção do pentadecágono (polígono de 15 lados)

Considere uma circunferência de centro A e raio AC. O arco que liga dois vértices consecutivos mede $\frac{360°}{15} = 24°$. Podemos imaginar duas construções no mesmo círculo, utilizando um vértice comum para o triângulo equilátero e o decágono, que são figuras já construídas. Nesse caso, podemos utilizar a relação 24° = 60° – 36° para obter a medida do lado do pentadecágono. Assim, de acordo com a figura abaixo, um dos lados do pentadecágono (BD) já está construído, como queríamos mostrar.



Na figura acima, temos os seguintes ângulos: CAB = 60°, CAD = 36° e DAB = 24°.

- Concluímos que BD é a medida do lado do pentadecágono. Assim, basta traçarmos círculos de raio BD centrados nos pontos B e D para obtermos mais dois lados. Repetindo o processo até completar o círculo inicial, teremos todos os vértices do polígono.



Construção da figura 16: Etapa 2

- Ligando esses vértices, teremos o pentadecágono regular.

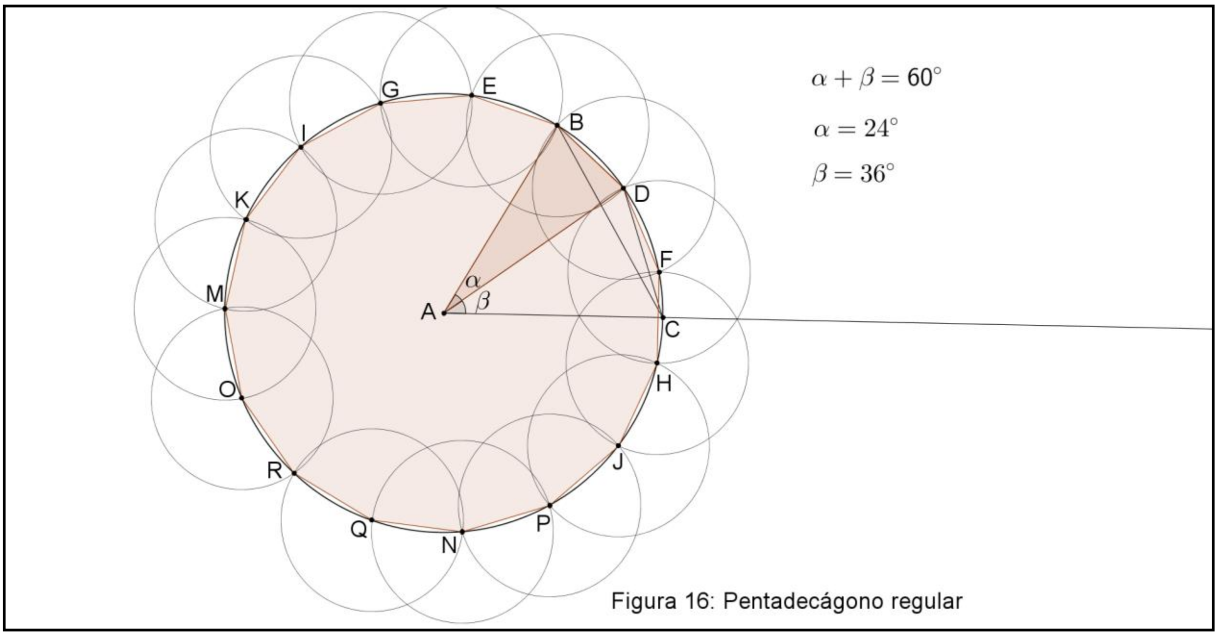
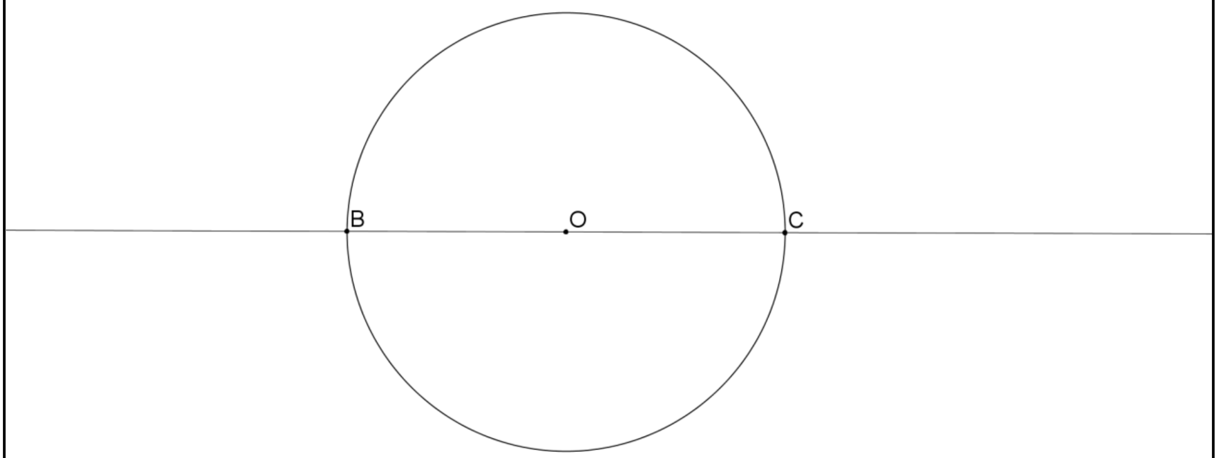


Figura 16: Pentadecágono regular

2.4.10 Construção do heptadecágono (polígono de 17 lados)

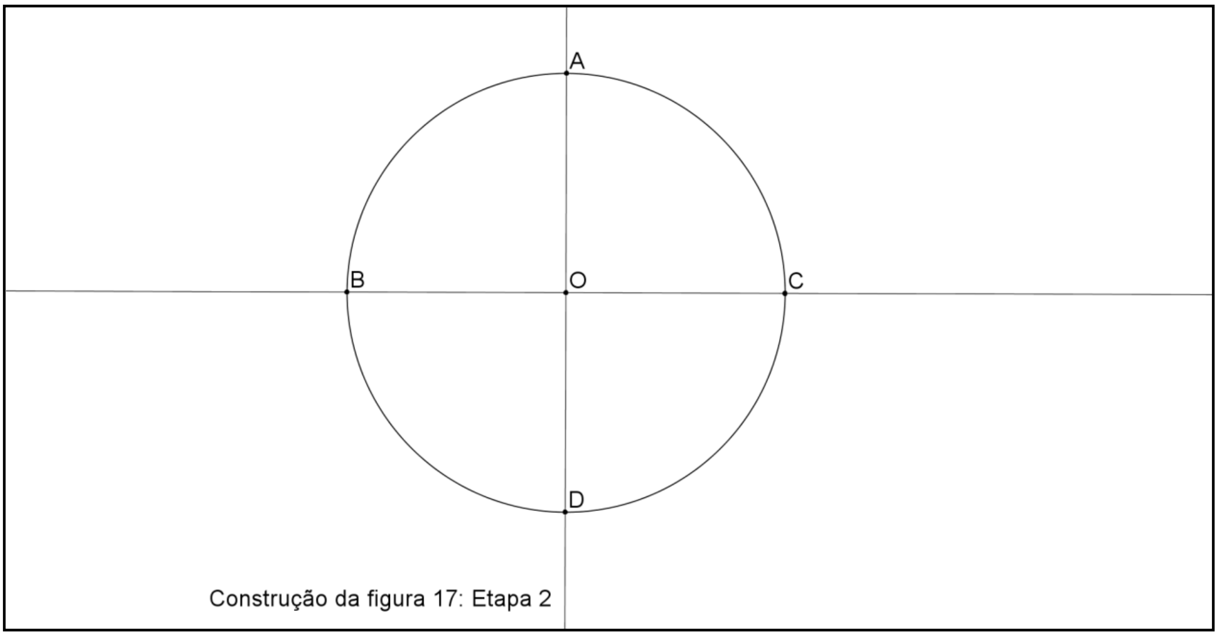
Essa figura é destinada exclusivamente a professores, pois se trata de uma sequência extremamente trabalhosa que construiremos no GeoGebra, mas pode ser construída com régua e compasso. O processo terá uma quantidade muito grande de figuras parciais e, em algumas etapas, ocultaremos os detalhes do item anterior para evitar o número excessivo de linhas, que comprometeria a visualização da construção. Apesar de usar os recursos práticos do GeoGebra, a linguagem será a mesma para construções com régua e compasso.

- Trace um círculo de centro O e raio de qualquer medida. Trace uma reta que passa por O, intersectando o círculo nos pontos B e C.

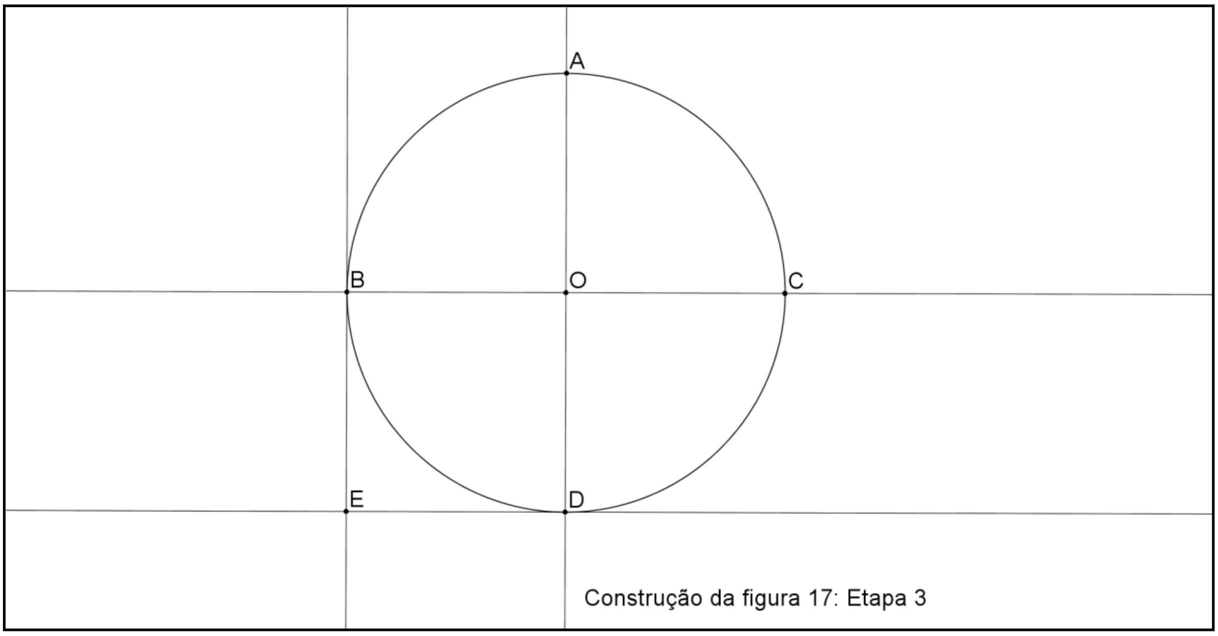


Construção da figura 17: Etapa 1

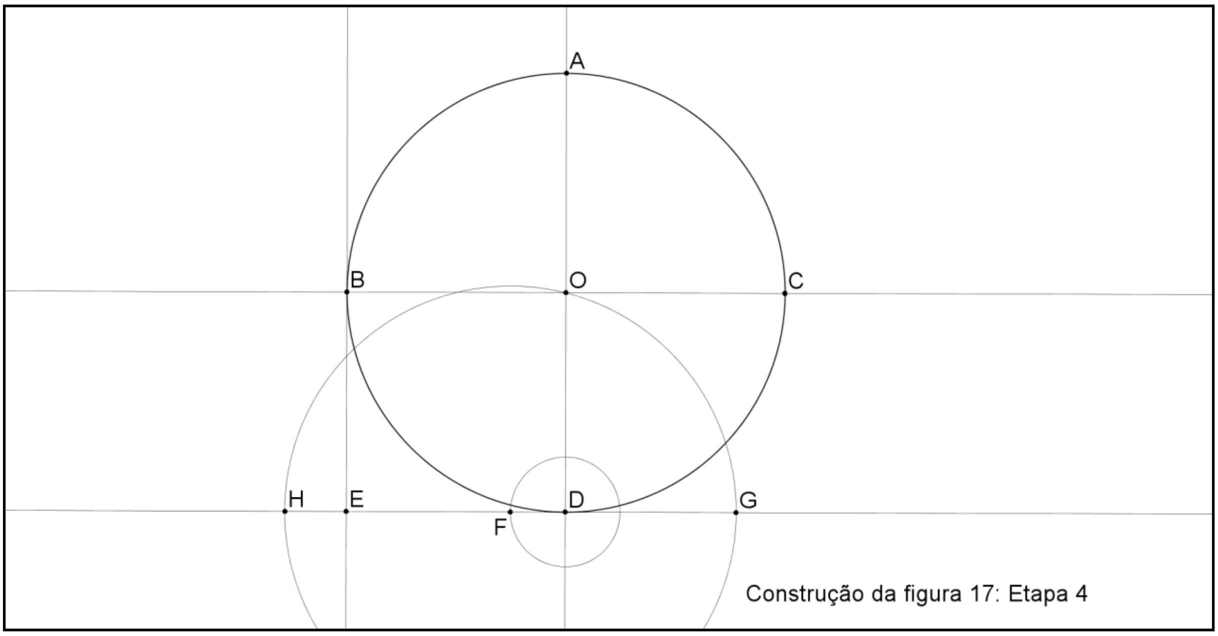
- Trace, passando por O, a reta perpendicular a BC. Marque os pontos A e D na interseção desta reta com o círculo.



- Trace duas retas tangentes ao círculo, passando pelos pontos B e D, se intersectando no ponto E.

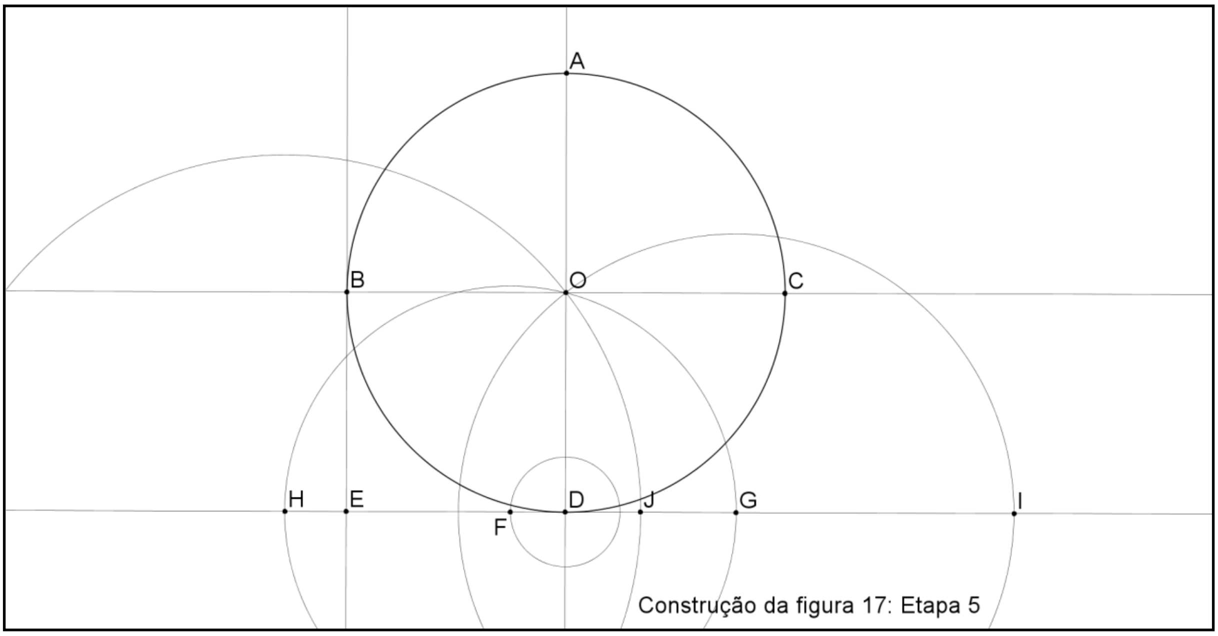


- Marque o ponto F em ED, tal que FD = ED/4. Com régua e compasso, trace o ponto médio do ponto médio. No GeoGebra basta habilitar a opção “círculo dados centro e raio”, clicar em D e digitar ED/4. Trace um círculo de raio OF centrado em F obtendo os pontos G e H na interseção desse círculo com a reta ED.



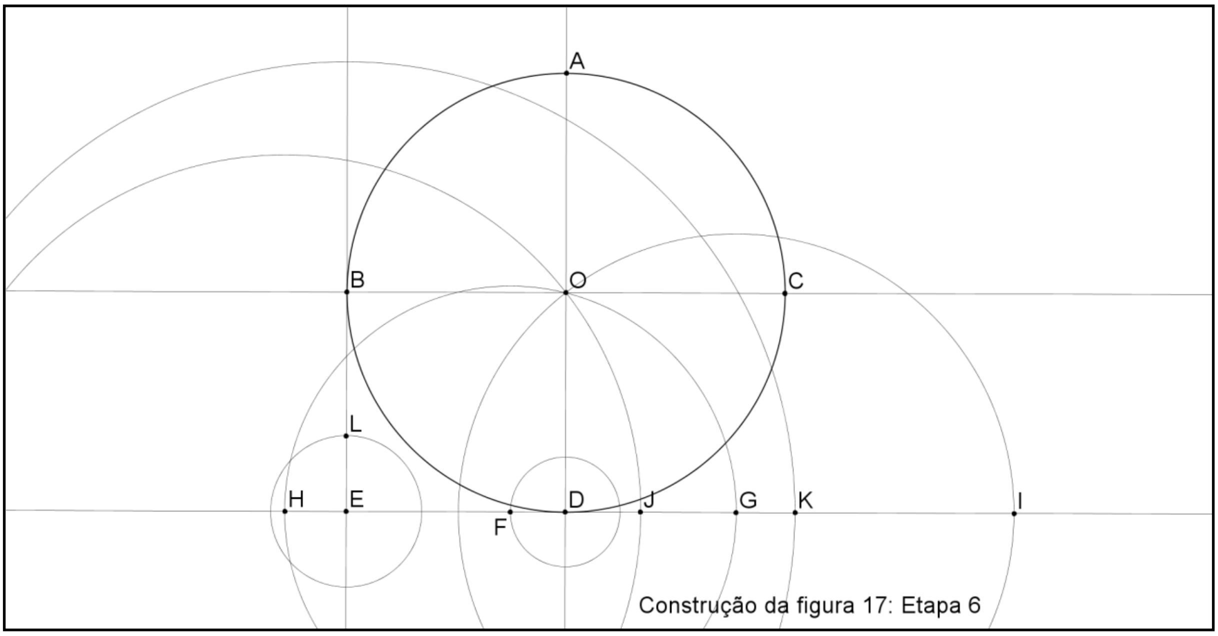
Construção da figura 17: Etapa 4

- Trace o círculo centrado em G de raio OG, obtendo na interseção com a reta ED o ponto I (à direita de G). Trace o círculo de raio OH centrado em H e marque o ponto J (à direita de H) de interseção com a reta ED.



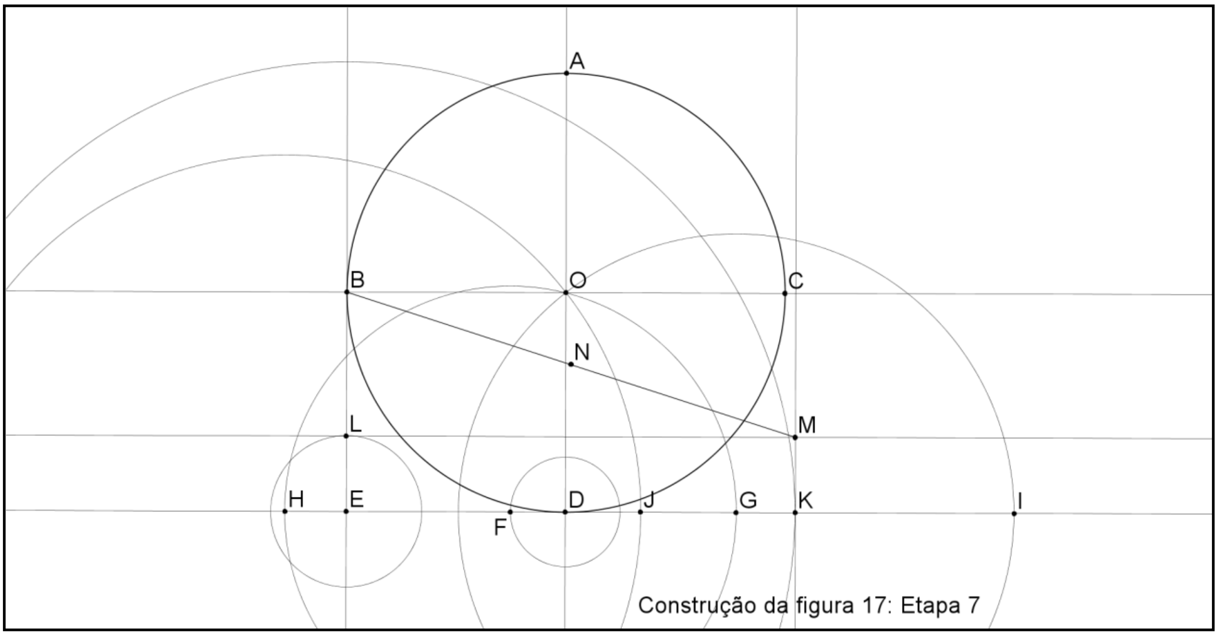
Construção da figura 17: Etapa 5

- Trace um círculo de raio DI centrado em E, intersectando a reta ED no ponto K (à direita de E) e outro círculo de raio DJ centrado em E, intersectando a reta BE no ponto L (acima de E).



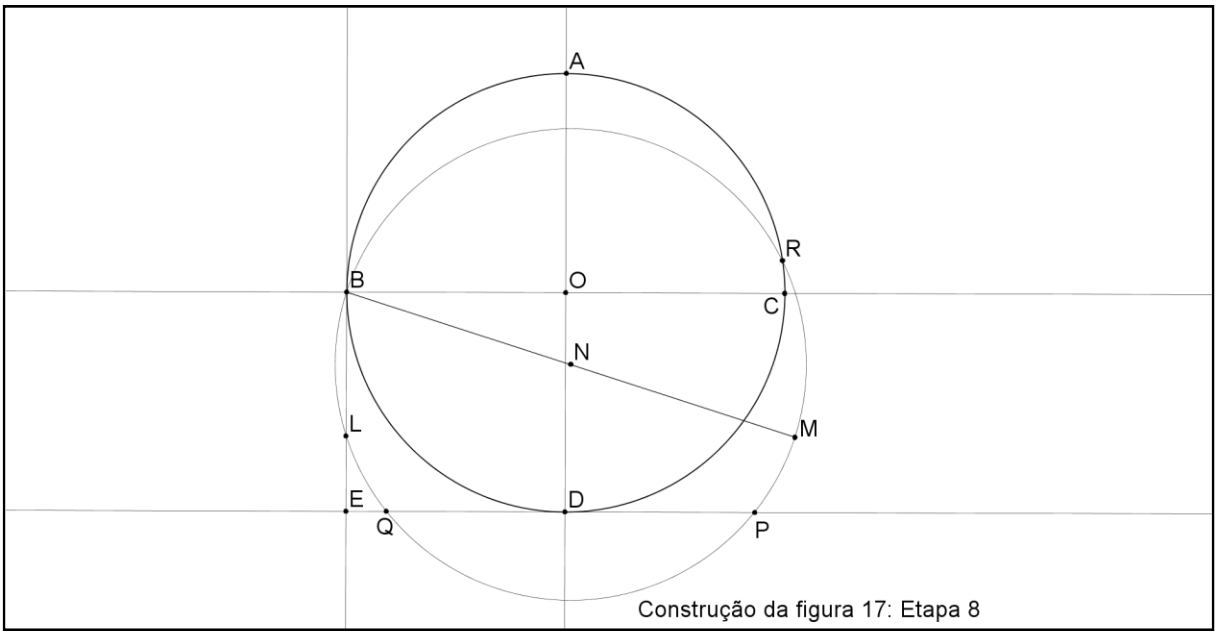
Construção da figura 17: Etapa 6

- Trace uma reta perpendicular à reta ED, passando por K e outra perpendicular a BE, passando por L, cuja interseção é o ponto M. Trace o segmento BM e marque o ponto N, ponto médio de BM.

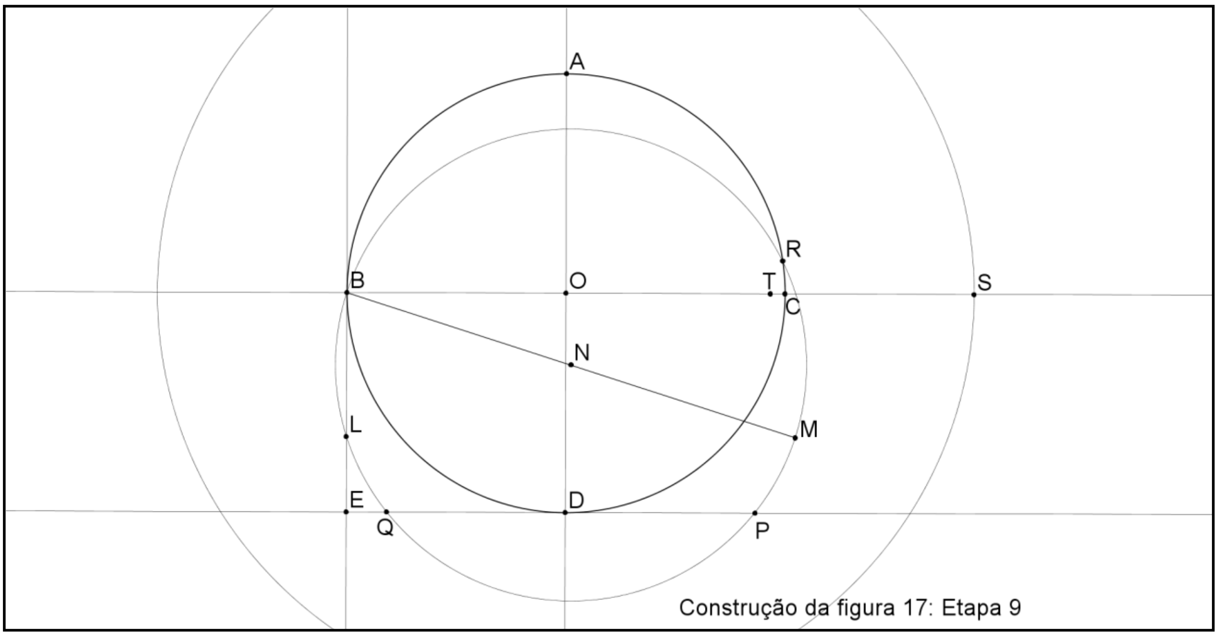


Construção da figura 17: Etapa 7

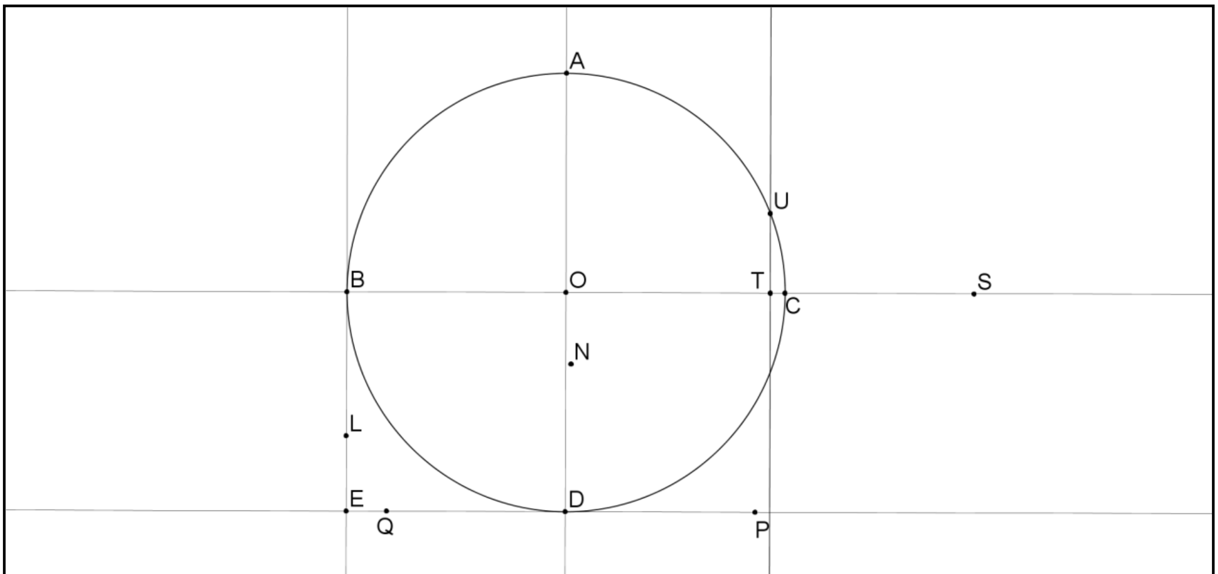
- Trace um círculo de raio MN centrado em N, intersectando a reta ED nos pontos P e Q e o círculo inicial nos pontos B e R. Antes disso, vamos ocultar alguns detalhes permitindo uma melhor visualização da figura.



- Trace um círculo de raio EP centrado em O, intersectando a reta OC no ponto S (à direita de O). Marque T, ponto médio de OS.

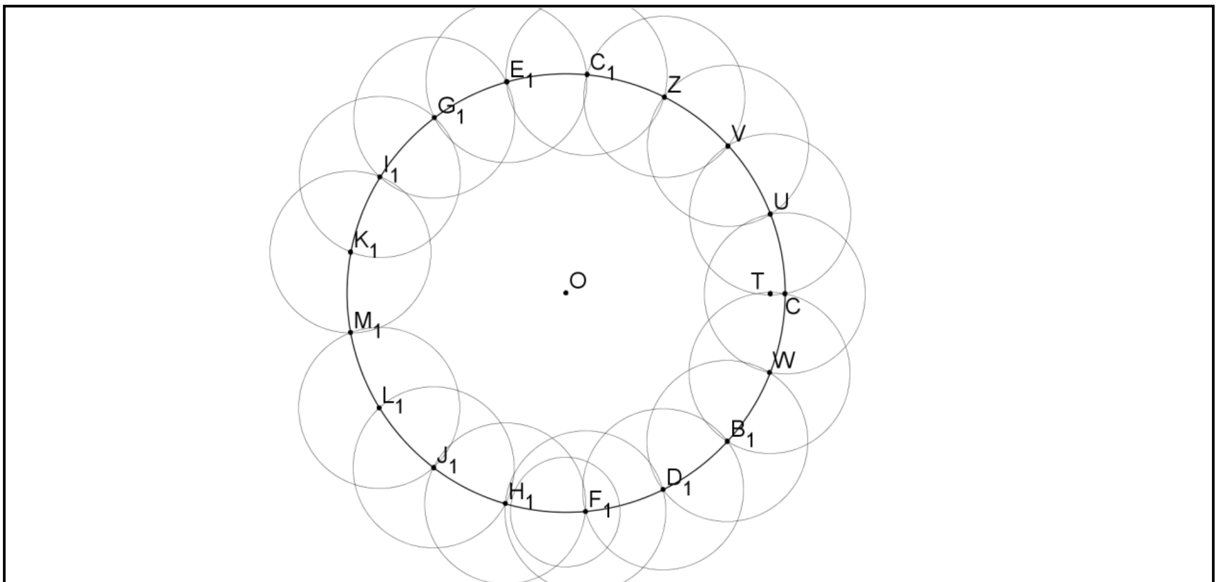


- Trace uma reta perpendicular à reta OS, passando por T, intersectando o círculo inicial no ponto U. Assim, CU é a medida de um dos lados do heptadecágono. Vamos ocultar alguns detalhes para melhorar a visualização da figura.



Construção da figura 17: Etapa 10

- Como CU é a medida de cada lado do heptadecágono, basta traçarmos círculos de raio CU centrados em U e C. Repetimos o processo até contornarmos o círculo. Vamos ocultar alguns detalhes para melhorar a visualização da etapa.



Construção da figura 17: Etapa 11

- Finalmente, ligando os vértices encontrados, teremos o heptadecágono regular, ou seja, um polígono regular de 17 lados inscrito numa circunferência.

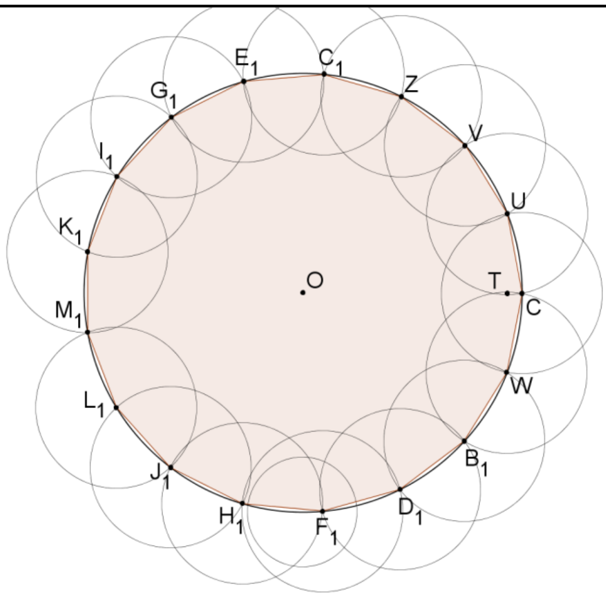


Figura 17: Heptadecágono regular

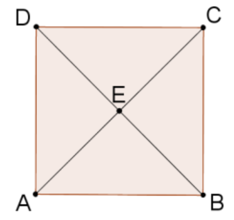
Essa figura foi desenvolvida tendo como referência o trabalho: “O problema da construção de polígonos regulares de Euclides a Gauss”, produzido pelo Professor Assistente Hermes Antônio Pedroso e pela Professora Doutora Juliana Conceição Precioso do Departamento de Matemática - Campus de São José do Rio Preto – UNESP – IBILCE

A demonstração de que essa construção dá um heptadecágono se encontra disponível no trabalho citado acima.

2.5 Polígonos circunscritos

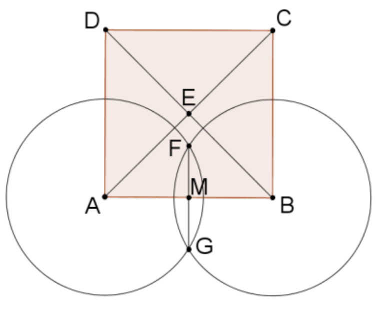
2.5.1 Construção do quadrado circunscrito

- Dado o quadrado ABCD, trace as diagonais cuja interseção é o ponto E.



Construção da figura 18: Etapa 1

- Obtenha o ponto médio M de um dos lados, digamos AB. Para isso, trace dois círculos de mesmo raio e centrados em A e B, sendo o raio maior que a metade de AB. Os dois círculos se intersectam nos pontos F e G. Trace o segmento FG, intersectando AB no ponto M.



Construção da figura 18: Etapa 2

- Trace o círculo de centro em E e raio EM.

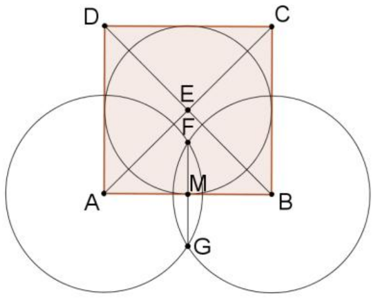
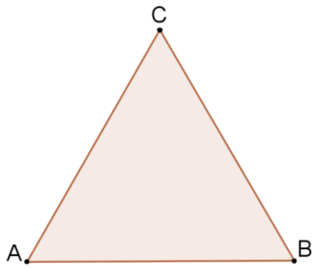


Figura 18: Quadrado circunscrito

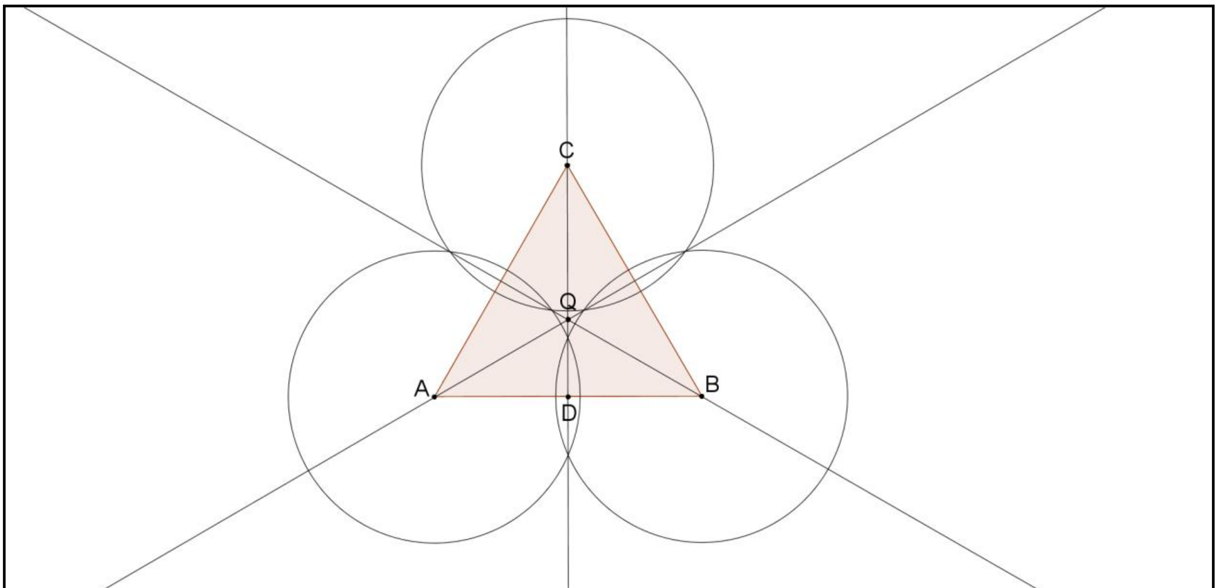
2.5.2 Construção do triângulo equilátero circunscrito

- Dado o triângulo equilátero ABC.



Construção da figura 19: Etapa 1

- Trace as mediatrizes dos três lados cuja interseção é o ponto Q. Para isso, traçamos três círculos de mesmo raio, centrados nos vértices, sendo que o raio é maior que a metade da medida do lado. Os pares de interseções desses círculos são pontos de cada mediatriz.



Construção da figura 19: Etapa 2

- Trace o círculo centrado em Q e raio QD, onde D é o ponto médio de AB.

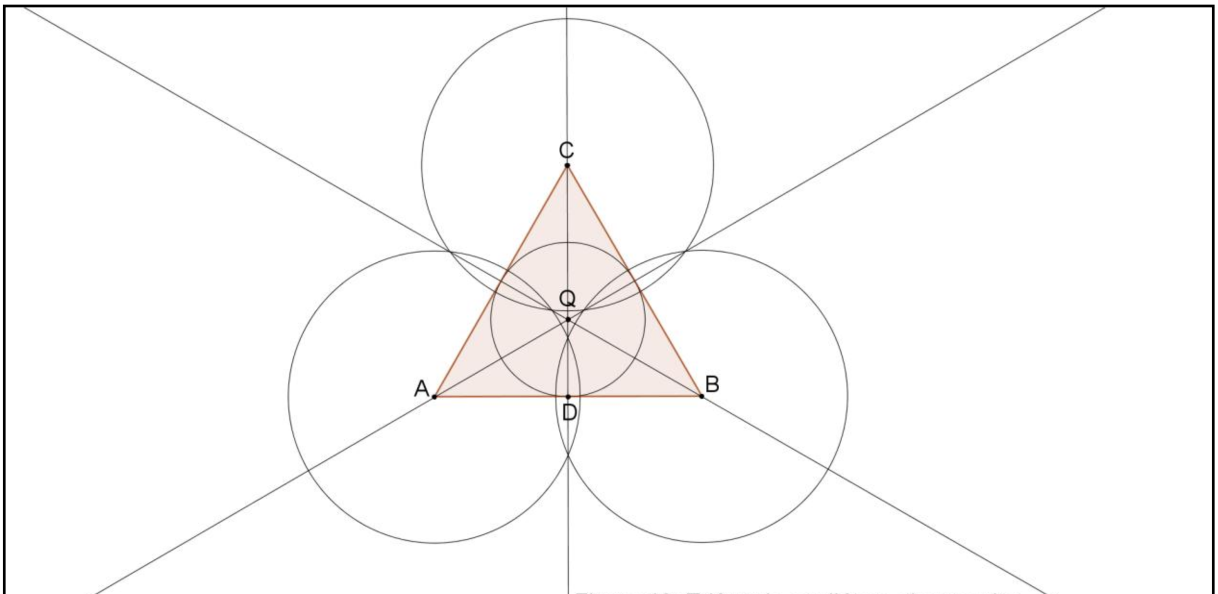
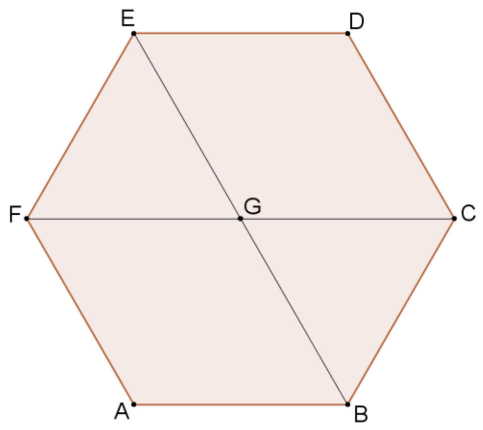


Figura 19: Triângulo equilátero circunscrito

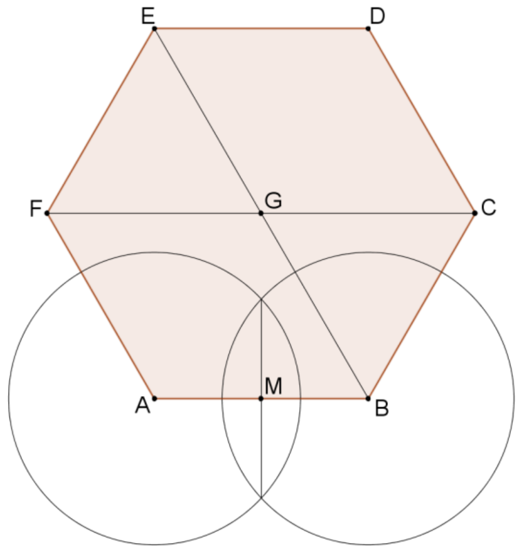
2.5.3 Construção do hexágono regular circunscrito

- Dado o hexágono regular ABCDEF, trace duas diagonais de vértices opostos (linhas de simetria), digamos BE e FC, cuja interseção é o ponto G.



Construção da figura 20: Etapa 1

- Obtenha o ponto médio M de um dos lados, digamos de AB.



Construção da figura 20: Etapa 2

- Trace o círculo de centro G e raio GM.

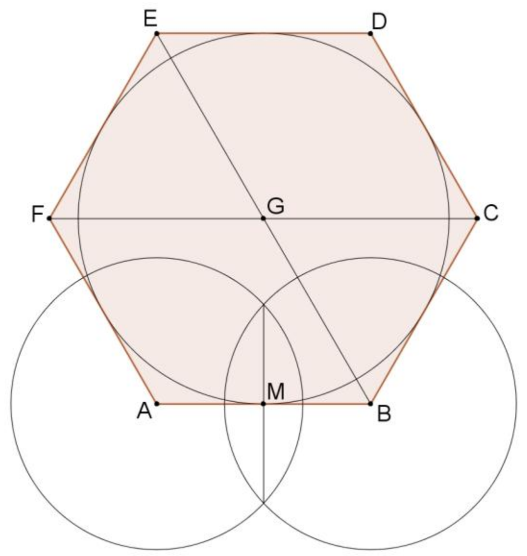


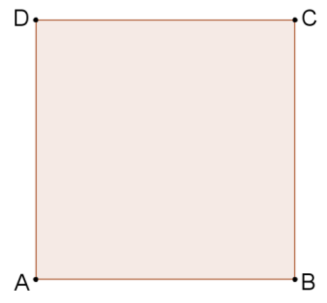
Figura 20: Hexágono regular circunscrito

2.6 Construção de outras figuras planas

2.6.1 Construção do retângulo de ouro

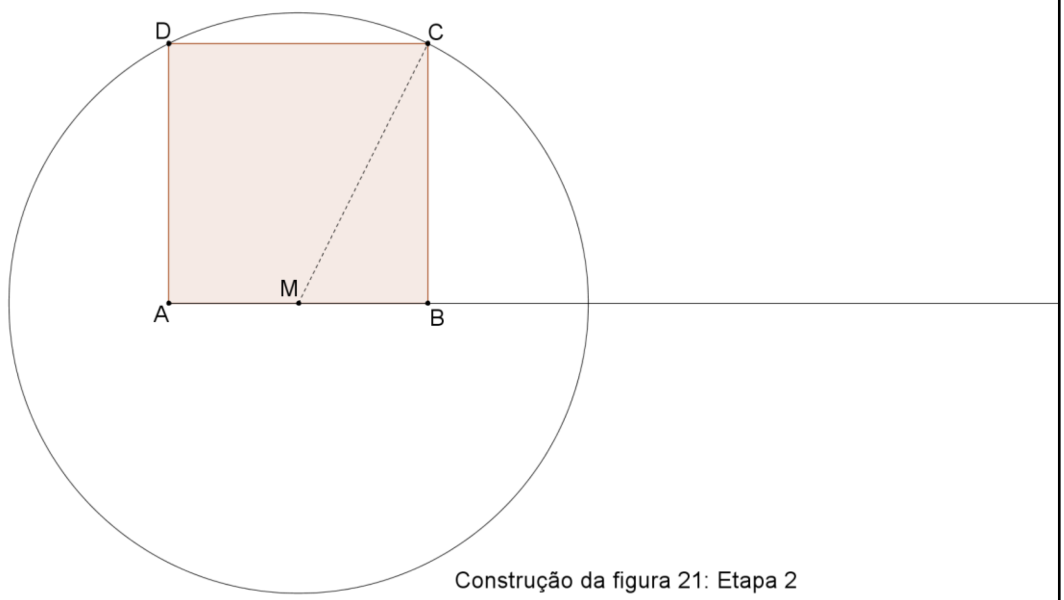
O retângulo de ouro é conhecido como aquele cujas proporções são as mais belas. Foi muito utilizado pelos arquitetos, escultores e pintores renascentistas em suas esculturas e obras clássicas, nas quais as proporções da regra de ouro estavam presentes.

- Considere o quadrado ABCD.



Construção da figura 21: Etapa 1

- Prolongue o lado AB (semirreta AB) e trace o círculo de raio MC centrado em M, sendo M o ponto médio de AB;



Construção da figura 21: Etapa 2

- A interseção entre o círculo e a semirreta AB se dá no ponto E e, portanto, AE é a base do retângulo AEFD, que é o retângulo de ouro.

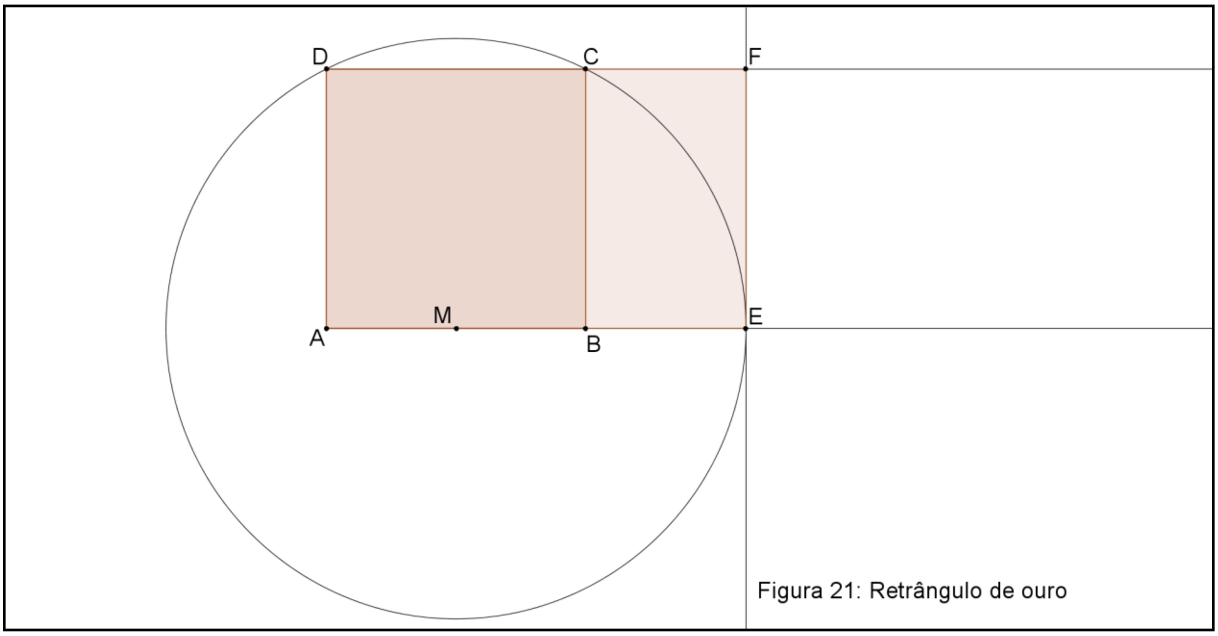


Figura 21: Retrângulo de ouro

Observação: O ponto F foi obtido pela interseção do prolongamento do lado DC (semirreta DC) com a reta perpendicular a AE que passa por E.

As proporções desse retângulo são definidas pelas raízes da equação x² – x – 1 = 0.

As raízes são: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ onde somente a primeira raiz tem sentido, pois se trata da razão entre as medidas dos lados do retângulo, enquanto a outra representa um número negativo. Considere a figura acima.

Seja m a medida do lado do quadrado ABCD e r = MC. O triângulo MBC é retângulo em B. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$$r^2 = m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{m^2}{4} = \frac{5m^2}{4} \Rightarrow r = \frac{m\sqrt{5}}{2}.$$

A base do retângulo é AE = AM + ME = $\dfrac{m}{2} + r = \dfrac{m}{2} + \dfrac{m\sqrt{5}}{2} = \dfrac{m + m\sqrt{5}}{2} = \dfrac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

Sua altura é m e a razão entre a base e a altura é de:

AE : EF = $\dfrac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} : m = \dfrac{m\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \cdot \dfrac{1}{m} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = x_1 \cong 1{,}618$.

Analogamente, a equação x² + x – 1 = 0 tem como raízes os números $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, onde $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Nesse caso, x_1 = EF : AE $\cong$ 0,618.

2.6.2 Construção do pentagrama

Para a construção do pentagrama, utilizamos os mesmos procedimentos do pentágono regular, ou seja, obtemos os cinco pontos correspondentes aos vértices do pentagrama, que são os mesmos do pentágono. Finalmente, traçamos todos os segmentos de reta, não consecutivos, formados por esses pontos.

Já sabemos como construir um pentágono regular. Se quisermos aproveitar os pontos da circunferência (vértices do pentágono) já feitos anteriormente, basta traçarmos as diagonais desse pentágono e está pronto o pentagrama.

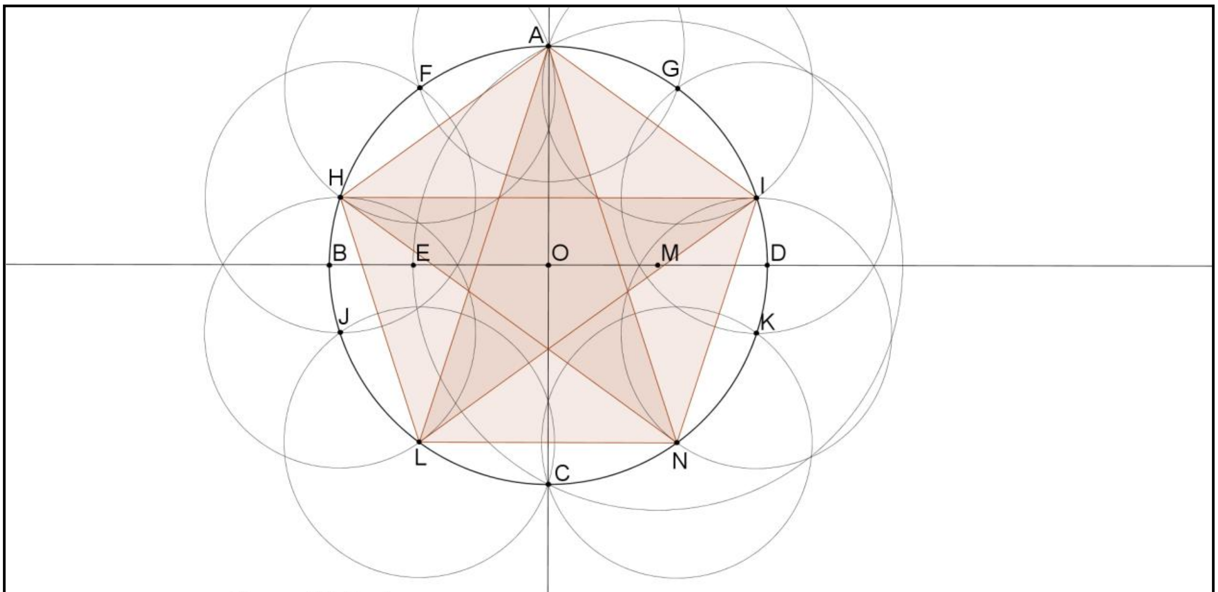


Figura 22: Pentagrama

Ocultando alguns detalhes, o pentagrama fica mais visível.

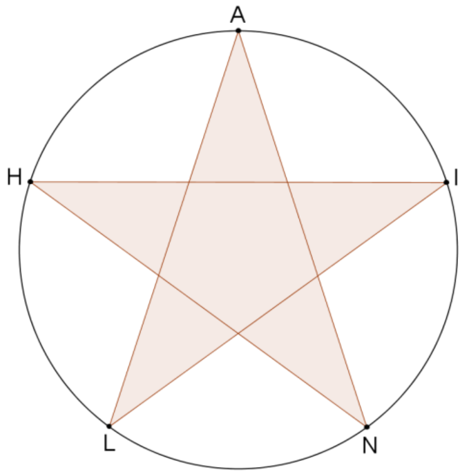


Figura 22.1: Pentagrama

Podemos inserir um novo pentagrama no interior do pentágono MSRQP e o processo pode ser repetido uma quantidade indeterminada de vezes, mas é claro que só é possível enxergarmos um número finito de vezes, até porque as linhas traçadas aqui têm largura significativa e nosso campo de visão tem alcance limitado.

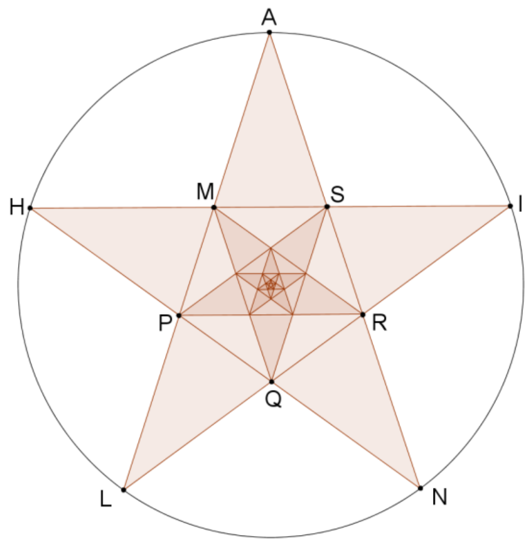
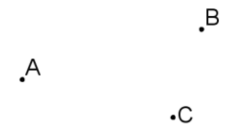


Figura 22.2: Sequência de Pentagramas

2.6.3 Círculo que passa por três pontos não colineares do plano

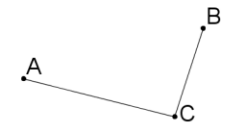
Agora vejamos a seguinte situação: Dados três pontos não colineares no plano, obtenha o círculo que passa por esses pontos.

- Dados os pontos A, B e C no plano.



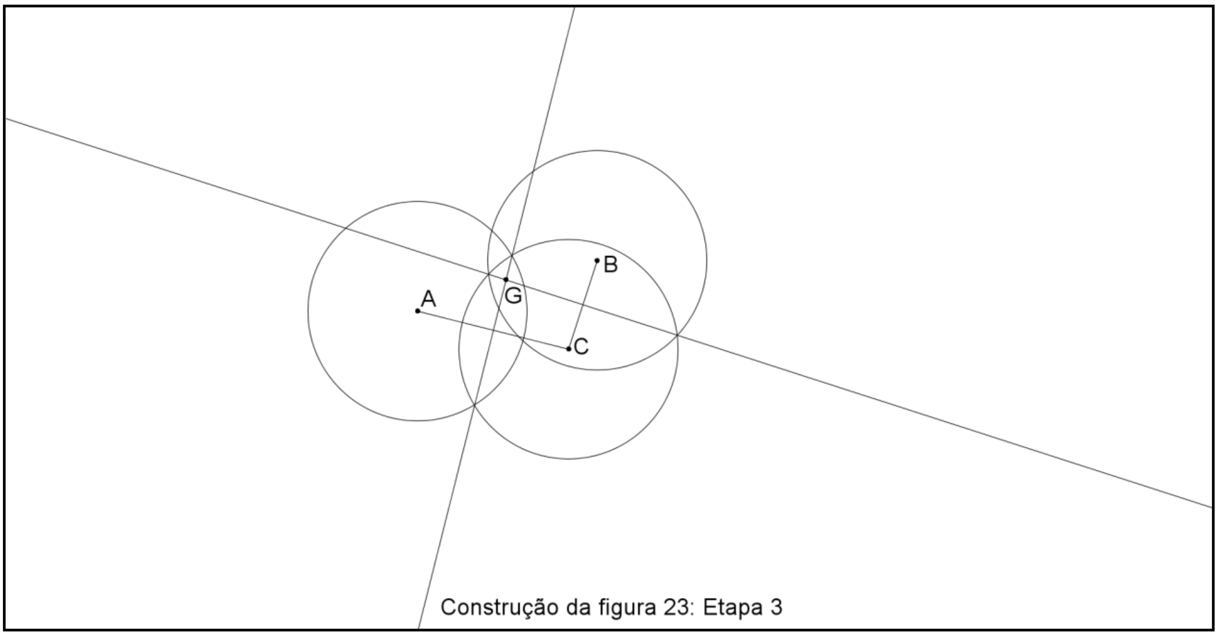
Construção da figura 23: Etapa 1

- Trace os segmentos de reta AC e BC.



Construção da figura 23: Etapa 2

- Trace as mediatrizes de AC e BC que se intersectam no ponto G. Para isso, trace três círculos de mesmo raio, com raio maior que a metade de cada segmento. As mediatrizes passam pelos pares de interseções entre esses círculos.



Construção da figura 23: Etapa 3

- Trace o círculo de centro G e raio GA.

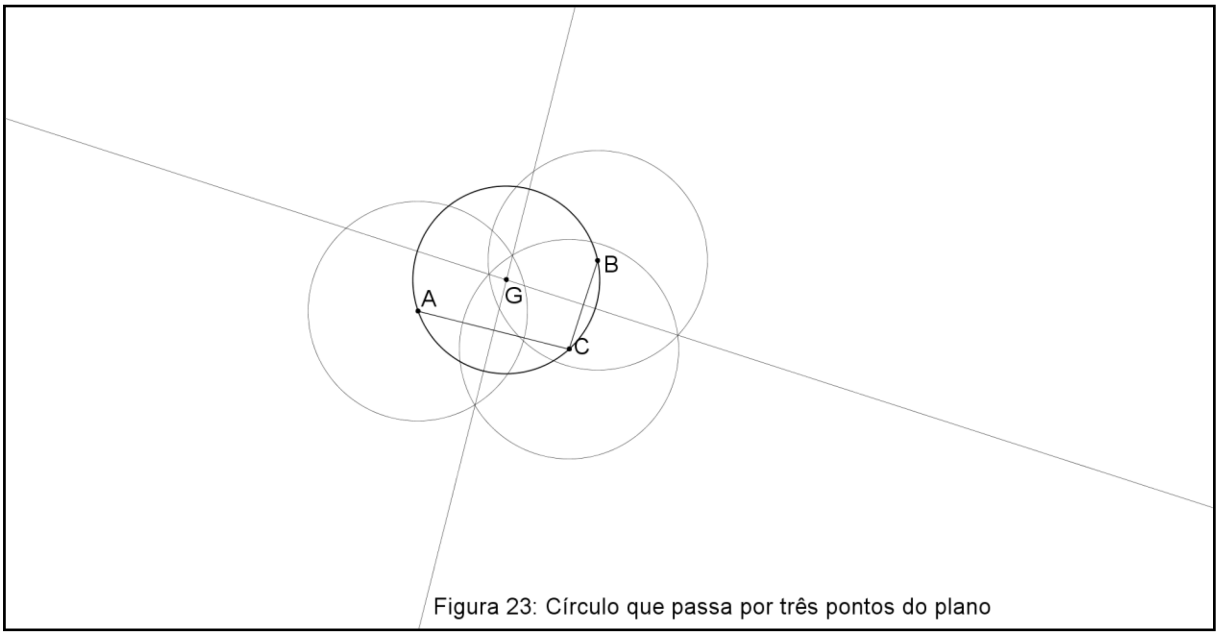


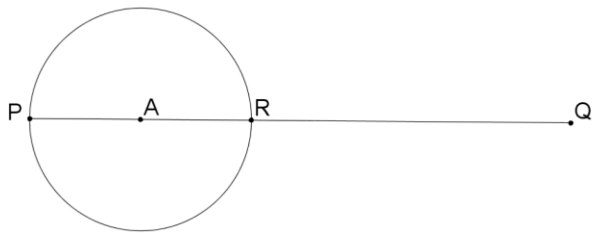
Figura 23: Círculo que passa por três pontos do plano

Observação: Note que, como A, B e C pertencem à mesma circunferência, então a distância do centro a qualquer um desses pontos deve ser a mesma, ou seja, GA = GB = GC = raio da circunferência.

2.6.4 Construção dos ângulos de 30° e 60°.

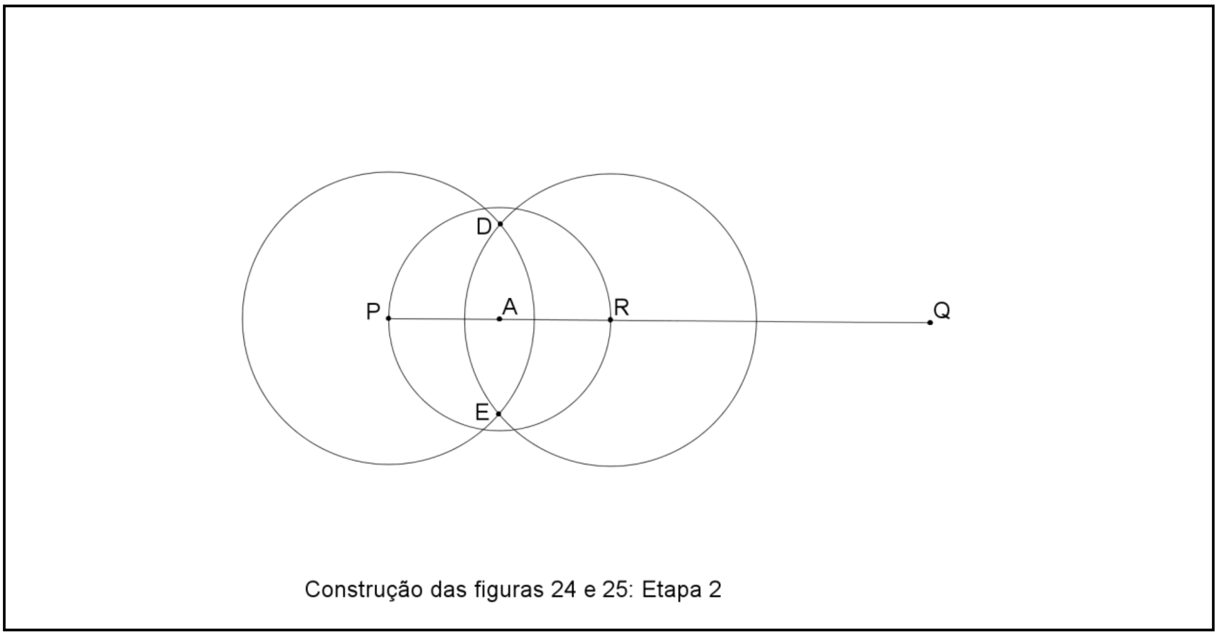
Podemos construir os ângulos de 30° e 60° imaginando a seguinte situação: Sabemos que o $sen\,30° = \frac{1}{2}$. Como o triângulo é retângulo, o outro ângulo é de 60°. Sendo o seno o quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa, basta construir um triângulo cujo cateto oposto mede a metade da hipotenusa e o outro cateto é obtido consequentemente.

- Trace o segmento PQ e marque o ponto A à direita de P. Depois, trace um círculo de centro em A e raio AP, obtendo o ponto R, que é a interseção desse círculo com o segmento PQ.

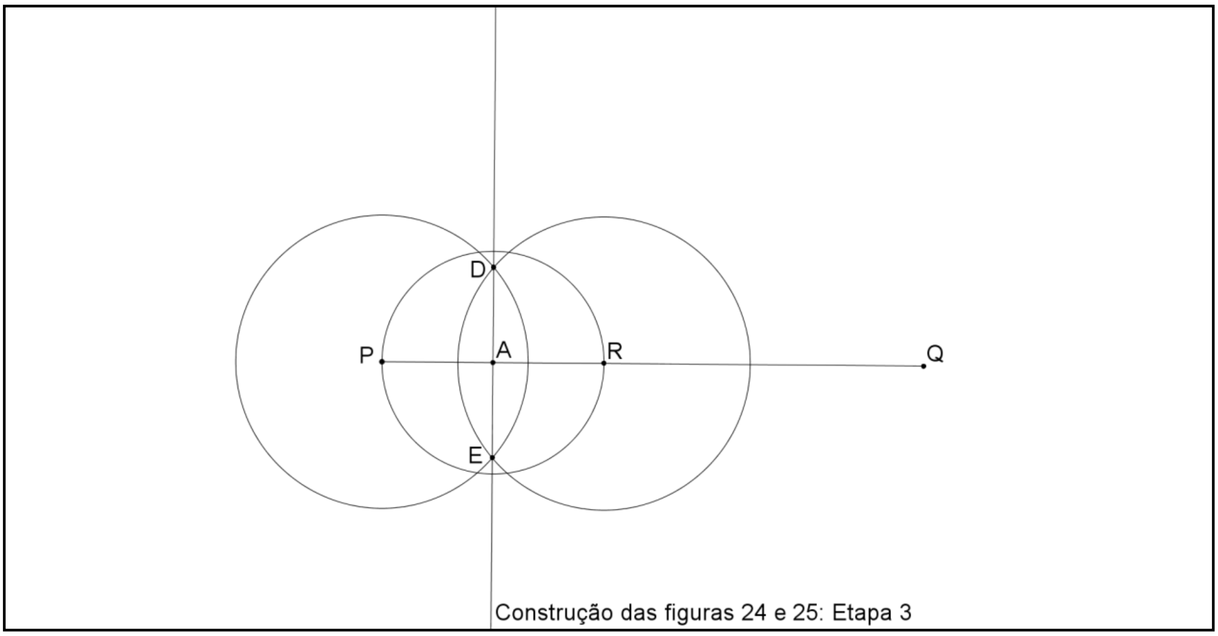


Construção das figuras 24 e 25: Etapa 1

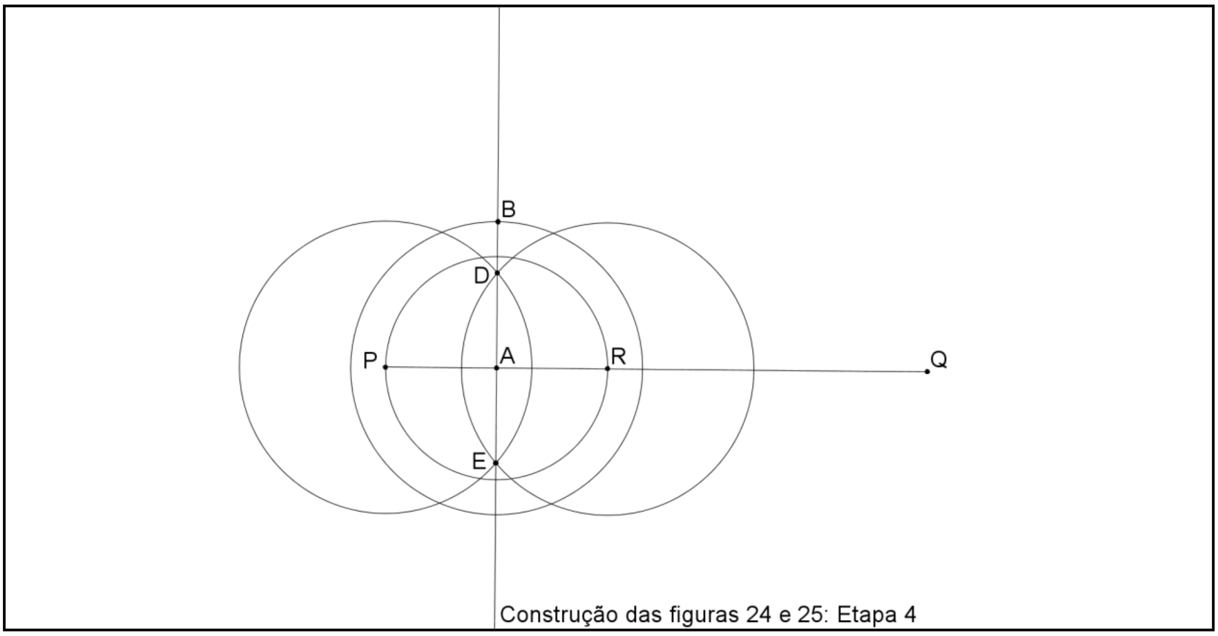
- Trace dois círculos de mesmo raio, um centrado em P e outro centrado em R, cujo raio é maior que a metade de PR. As interseções desses círculos são os pontos D e E.



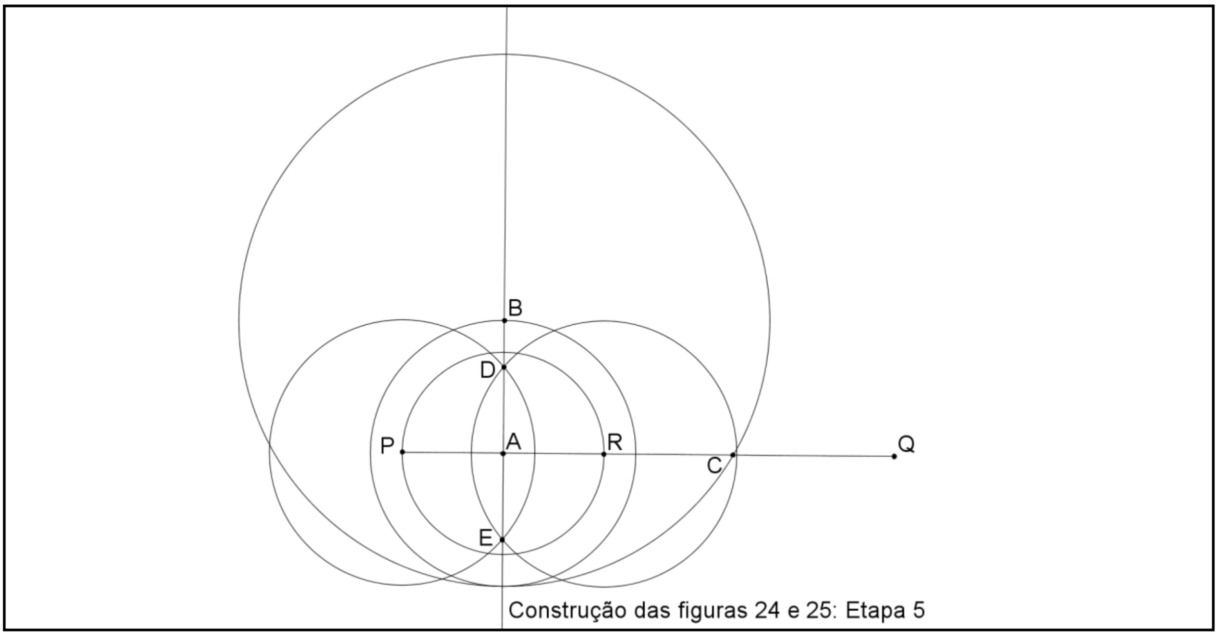
- Agora, trace a reta que passa por D e E. Note que o ângulo A é reto.



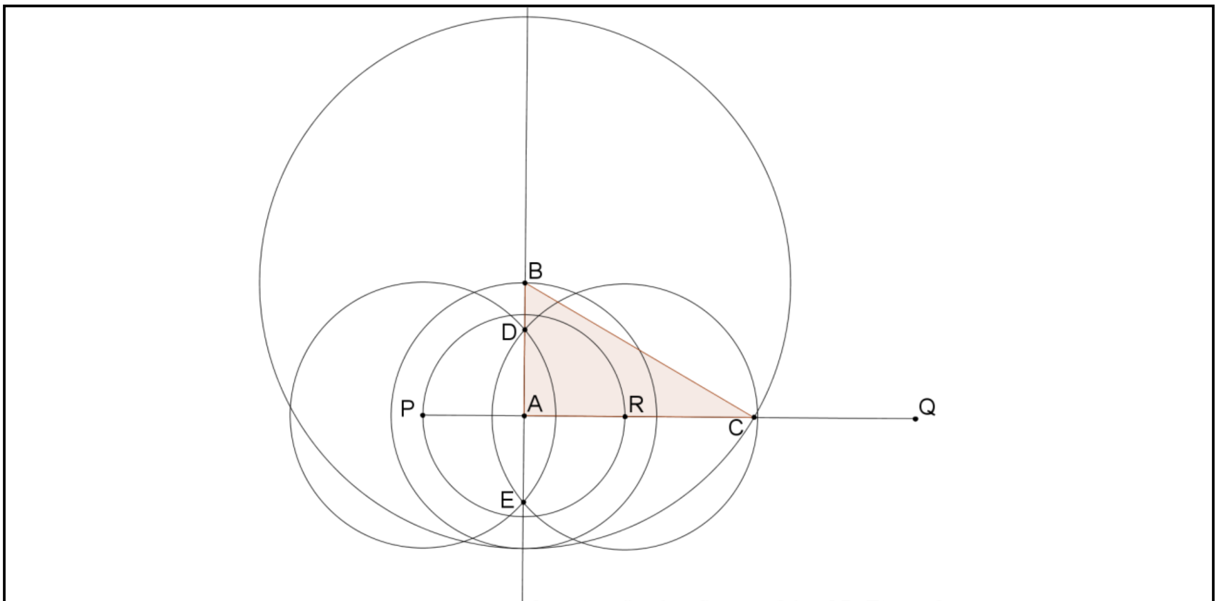
- Trace agora um círculo de raio 4 u centrado em A, obtendo o ponto B, que é a interseção desse círculo com a reta que passa por D e E (determinamos o cateto AB de valor 4 u).



- Trace um círculo de raio 8 u, centrado em B, intersectando o segmento PQ no ponto C (obtemos a hipotenusa BC de valor 8 u).

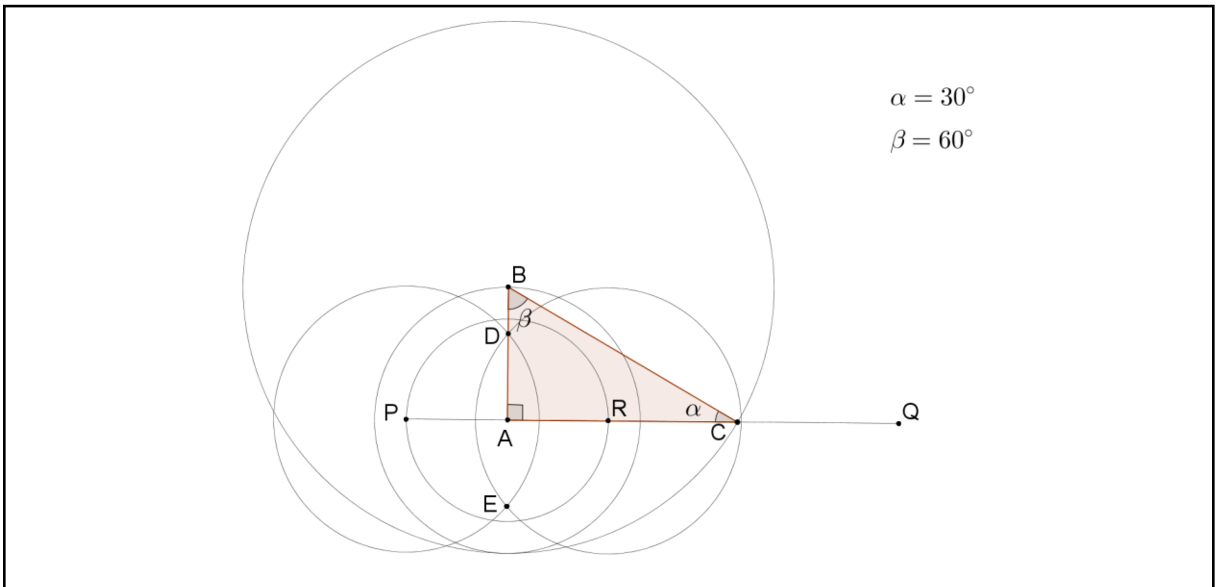


- Agora é só ligar os pontos A, B e C que teremos o triângulo ABC.



Construção das figuras 24 e 25: Etapa 6

- Assim, temos que o ângulo A mede 90°, B mede 60° e C mede 30°.



Construção das figuras 24 e 25: Etapa 7

Ocultando alguns detalhes, teremos mais explicitamente os ângulos de 30° e 60°.

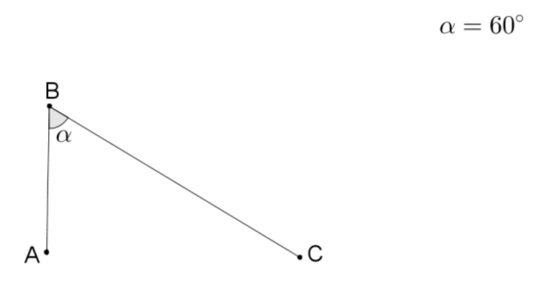


Figura 24: Ângulo de 60°

Observação: A posição da figura acima é a mesma em que se encontrava no triângulo (etapa 7). O mesmo ocorre com a figura abaixo. Isso não interfere no resultado obtido.

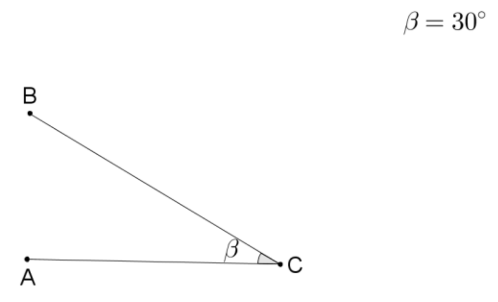
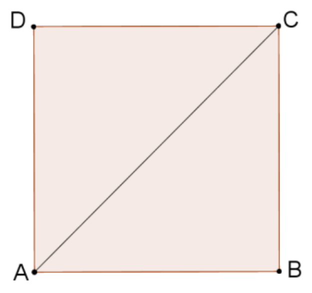


Figura 25: Ângulo de 30°

2.6.5 Construção do ângulo de 45°

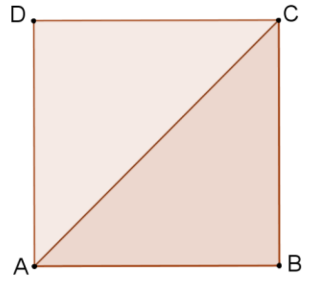
Para construir o ângulo de 45°, o processo é mais direto.

- Considere o quadrado ABCD. Trace uma de suas diagonais, digamos AC.



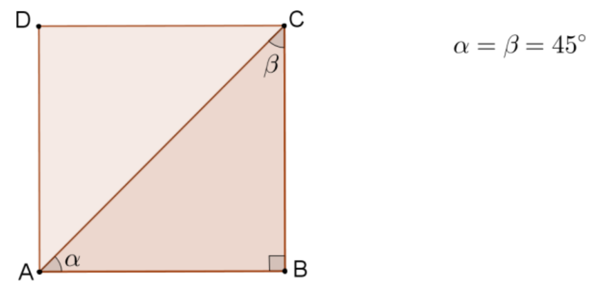
Construção da figura 26: Etapa 1

- Teremos o triângulo retângulo isósceles ABC, retângulo em B.



Construção da figura 26: Etapa 2

- Como a diagonal do quadrado está contida na bissetriz de cada ângulo formado pelo vértice do quadrado, os ângulos internos do triângulo medem 90°, 45° e 45°.



Construção da figura 26: Etapa 3

Ocultando alguns detalhes, teremos mais explicitamente o ângulo de 45°.

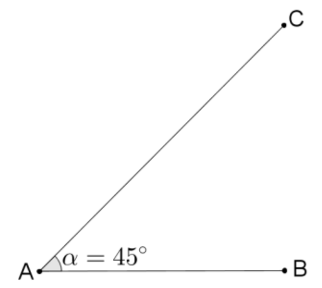
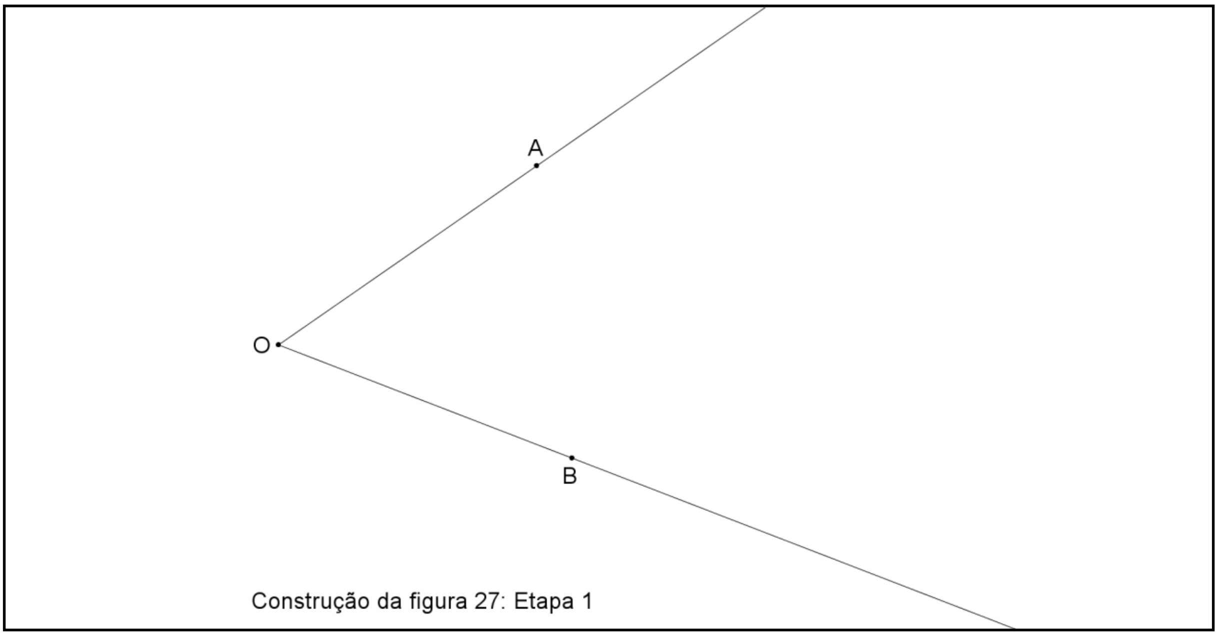


Figura 26: Ângulo de 45°

2.6.6 Construção da bissetriz de um ângulo

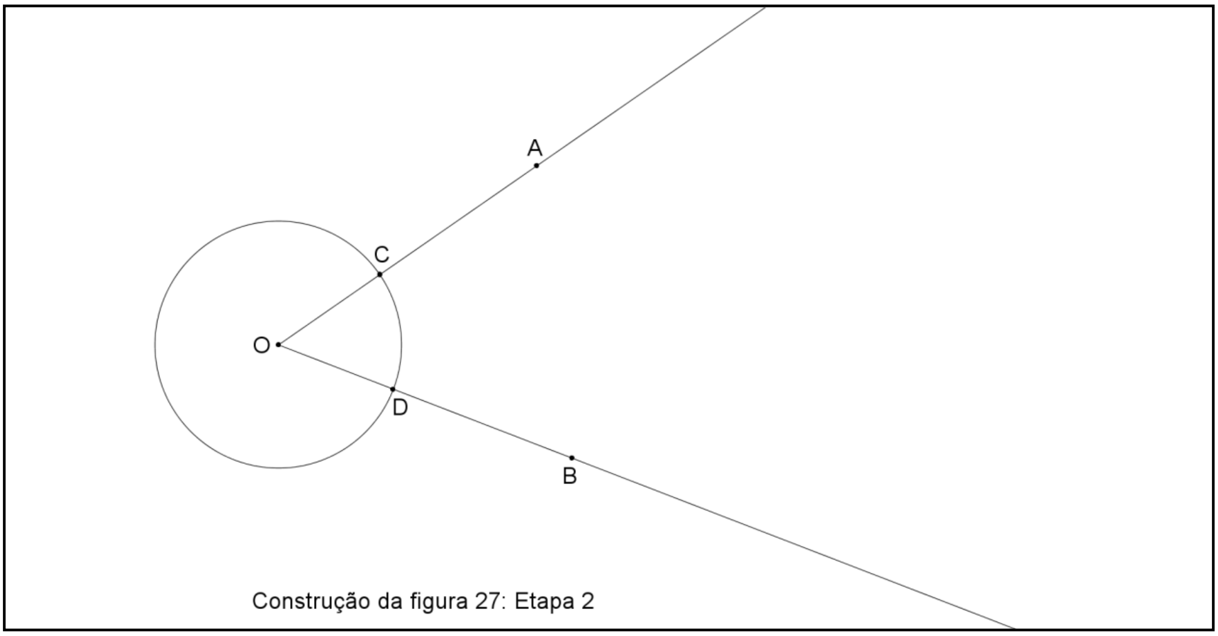
Vamos supor que tenhamos o ângulo AOB com vértice no ponto O e queremos obter a bissetriz desse ângulo.

- Dados os pontos A, O e B no plano, aleatoriamente, trace as semirretas OA e OB.



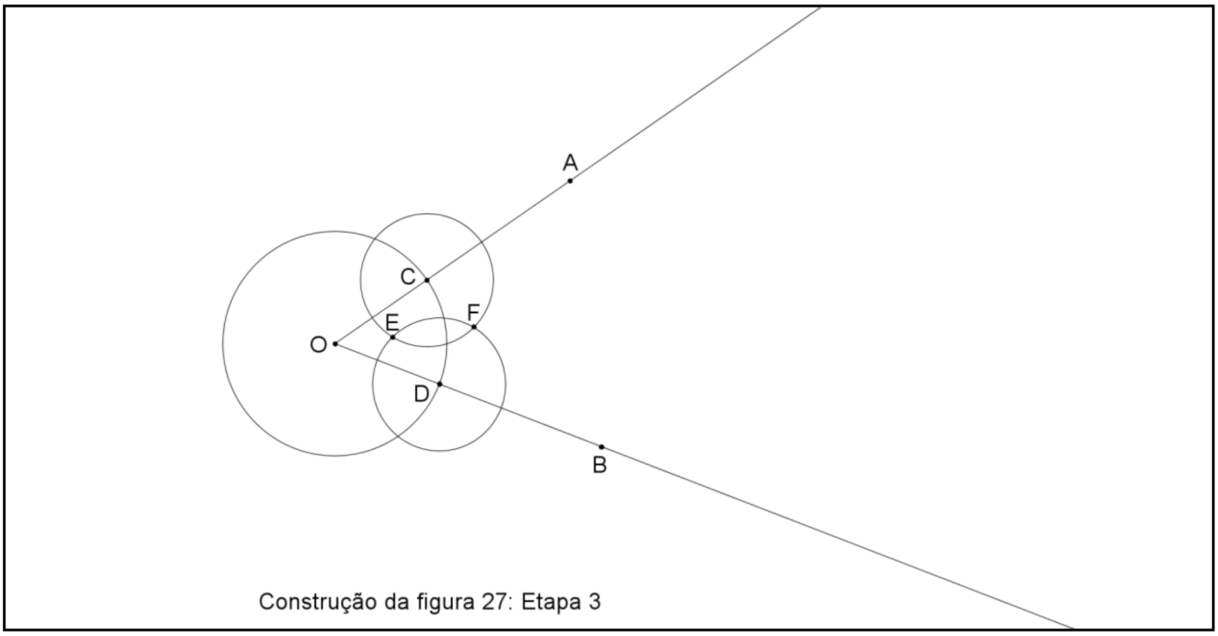
Construção da figura 27: Etapa 1

- Marquemos o ponto C em qualquer lugar de um dos segmentos, digamos que em AO. Trace um círculo de centro O e raio CO obtendo o ponto D, que é a interseção do círculo com o segmento BO.



Construção da figura 27: Etapa 2

- Trace dois círculos de mesmo raio (cuja medida é maior que a metade de CD), um com centro em C e outro com centro em D, obtendo os pontos E e F, que são as interseções desses círculos.



Construção da figura 27: Etapa 3

- Escolha um dos pontos, digamos o ponto E, e trace a reta OE, que é a bissetriz do ângulo AOB.

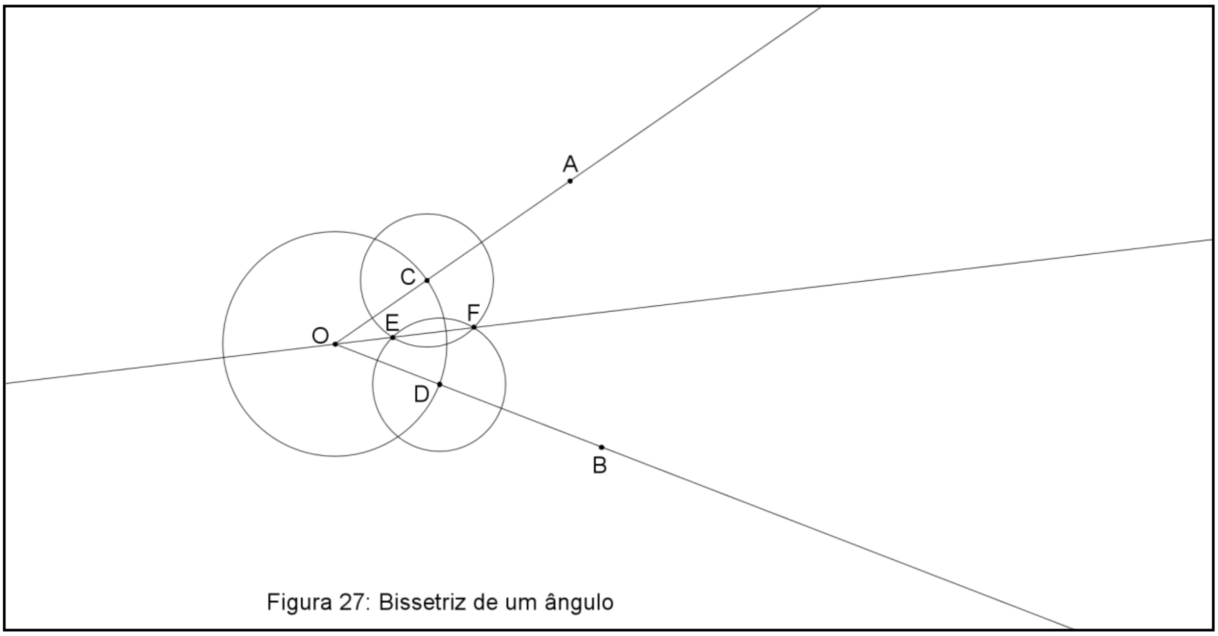


Figura 27: Bissetriz de um ângulo

Observação: É claro que, se a escolha fosse o ponto F, a reta seria a mesma. Isso pode ser verificado facilmente, já que a reta OE (bissetriz) contém os pontos O, E e F, ou seja, os três pontos são colineares.

CAPÍTULO 3

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS UTILIZANDO OS RECURSOS PRÁTICOS DO GEOGEBRA

Inicialmente, faremos uma rápida descrição, propondo orientações por meio de uma sequência didática para as atividades a serem desenvolvidas ao longo desse capítulo. Descrevemos essas etapas com o intuito de preparar o leitor para que, com isso, possamos fornecer informações prévias das construções geométricas utilizando os recursos operacionais do software GeoGebra.

3 Construções utilizando os recursos práticos do GeoGebra

3.1 Descrição do processo

3.1.1 Segmentos congruentes

É uma construção bem simples. O GeoGebra possui um comando que determina um segmento de comprimento fixo. Basta clicar na área de trabalho e digitar a medida desejada do segmento. O segmento será horizontal, da esquerda para a direita.

3.1.2 Triângulo equilátero

Esta construção é de simples execução e se enquadra no mesmo processo utilizado com régua e compasso. A única diferença é que com o GeoGebra podemos iniciá-la com um lado do triângulo já no primeiro passo, quando habilitamos a opção “segmento com comprimento fixo”.

3.1.3 Quadrado

A construção do quadrado no GeoGebra é rápida quando habilitamos o comando “reta perpendicular”, pois, ela também é mediatriz do segmento que compõe o diâmetro.

3.1.4 Pentágono regular

Para construir o pentágono, partiremos de um decágono regular inscrito numa circunferência. Neste caso, os procedimentos serão os mesmos usados para construção com régua e compasso.

3.1.5 Hexágono regular

Mesmo procedimento usado para construção com régua e compasso. Consiste apenas em traçar círculos de mesmo raio, já que o lado do hexágono regular é igual ao raio da circunferência circunscrita nele.

3.1.6 Octógono regular

Assim como nas construções com régua e compasso, partiremos de um quadrado para construir o octógono regular. O que diferencia é a rapidez com que o GeoGebra executa as etapas de construção. Quando queremos traçar o ponto médio de um lado, por exemplo, temos que traçar dois círculos de mesmo raio (sendo esse raio maior que a metade da medida do lado) e o segmento que liga as interseções. E, finalmente, obter o ponto de interseção do segmento com o lado, que é o ponto médio procurado. Com o GeoGebra, basta habilitar a opção “ponto médio ou centro”, clicar nos dois pontos e o ponto médio é gerado.

3.1.7 Decágono regular

A mesma ideia usada para a construção com régua e compasso.

3.1.8 pentadecágono regular

A mesma ideia usada para a construção com régua e compasso.

3.1.9 Heptadecágono regular

A mesma ideia usada para a construção com régua e compasso.

Sugestões

Essas atividades podem ser aplicadas a uma turma de nono ano mediante uma explicação prévia sobre algumas definições de polígonos e manuseio de régua e compasso. Os alunos construirão, com o auxílio do professor, as figuras geométricas sugeridas aqui neste trabalho. Sempre vale lembrar que o conhecimento pré-existente dos alunos do ensino fundamental é muito pequeno, por isso, em muitos casos, torna-se necessária uma atenção individual em várias etapas do desenvolver das tarefas. A previsão é de que devemos dispor de duas aulas para trabalhar as definições das figuras aqui presentes e pelo menos uma aula para se instruir o uso do software GeoGebra.

Sugerimos que sejam destinadas pelo menos 25 aulas anuais para se trabalhar construções geométricas com alunos de nono ano do ensino fundamental, com o propósito de despertar no aluno uma motivação maior para estudar Geometria e também melhorar o seu aprendizado, pois se trata de um método gostoso de estudar e bem eficiente quanto aos resultados obtidos.

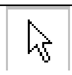
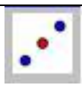
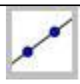
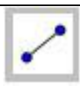
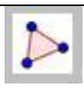
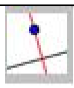
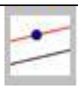
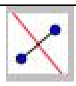
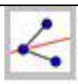
Caso o professor queira construir todas as figuras produzidas aqui, tanto com régua e compasso quanto com o GeoGebra, ele necessitará de aulas adicionais para as construções das figuras e 6 aulas para preparação e orientação aos alunos, além de aproximadamente 12 aulas de planejamento.

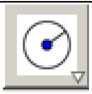
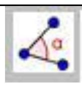
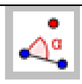
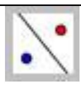
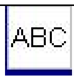
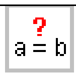
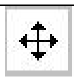
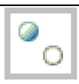
As construções com os recursos didáticos do GeoGebra requerem pelo menos 10 aulas, permitindo um contato maior dos alunos com o software.

Construir uma figura no GeoGebra garante maior agilidade e precisão nos resultados obtidos. Isso se dá por meio de ferramentas que possibilitam construções e verificações dos passos efetuados. Algumas figuras requerem uma sequência de construções com muitas etapas quando se usa régua e compasso. Já no GeoGebra, além das construções necessitarem de um número menor de etapas, é possível ocultar alguns detalhes feitos em fases anteriores, melhorando a visualização da etapa atual. Neste caso, construiremos nesta unidade figuras com o uso das principais ferramentas do GeoGebra, com o intuito de tornar pública e acessível mais uma opção para os professores da educação básica trabalharem em sala de aula ou simplesmente conhecerem os recursos e aplicações desse software tão prático e completo. Nossa meta é, não só despertar no professor de Matemática maior interesse ou curiosidade num estudo mais detalhado do GeoGebra, como também explorar outros recursos mais avançados que ele oferece.

Para que você conheça um pouco do funcionamento do GeoGebra, listamos no quadro abaixo algumas figuras (ícones) com seus respectivos comandos e procedimentos. Estas informações estão presentes no software, basta passar a seta com o mouse sobre as figuras e os comandos e seus procedimentos estarão visíveis.

Quadro 3: Ferramentas do GeoGebra

COMANDOS	FIGURAS	PROCEDIMENTOS
Mover		Clique sobre o objeto construído e o movimente na área de trabalho
Novo Ponto		Clique na área de trabalho e o ponto fica determinado
Ponto médio ou centro		Clique sobre dois pontos e o ponto médio deles fica determinado
Reta definida por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e a reta é traçada na direção dos pontos
Segmento definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o segmento é traçado ligando esses pontos
Segmento com comprimento fixo		Clique em um ponto da área de trabalho e dê a medida do segmento
Polígono		Clique em três ou mais pontos fazendo do primeiro também o último ponto. Fica determinado o polígono
Retas perpendiculares		Clique numa reta e num ponto e a reta perpendicular fica determinada
Retas paralelas		Clique numa reta e num ponto e a reta paralela fica determinada
Mediatriz		Selecione um segmento ou dois pontos e a mediatriz fica determinada
Bissetriz		Clique em três pontos, o segundo ponto determina a bissetriz
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos		Clique em um ponto e arraste o mouse para determinar o raio e o círculo

Círculo dados centro e raio		Clique em um ponto e informe a medida do raio para determinar o círculo
Ângulo		Clique em três pontos e o ângulo fica determinado
Ângulo com amplitude fixa		Clique em dois pontos e informe a abertura do ângulo
Reflexão com relação a uma reta		Clique no ponto a ser refletido e na reta que servirá de base para reflexão
Inserir texto		Clique na área de trabalho e insira o texto
Relação entre dois objetos		Clique em dois objetos e verifique a igualdade, ou não, desses objetos
Deslocar eixos		Arraste a figura completa na área de trabalho com o mouse
Exibir/esconder objeto		Clique sobre o objeto que se deseja esconder/exibir
Apagar objetos		Clique sobre o objeto que se deseja apagar

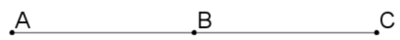
3.2 Segmentos congruentes

- Habilitar a opção “segmento com comprimento fixo”. Clicar na área de trabalho e digitar a medida desejada.

  Obs.: Os pontos são obtidos automaticamente e na ordem alfabética, sendo que o segmento é horizontal. Neste caso, serão os pontos A e B. Caso queira atribuir outra letra para representar um ponto, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto e escolha a opção renomear. Em seguida, digite a letra escolhida.

Construção da figura 28: Etapa 1

- Habilitar a opção “segmento com comprimento fixo”. Clicar no ponto B e digitar a mesma medida anterior (encontrando o ponto C).



Construção da figura 28: Etapa 2

- Habilitar a opção “segmento com comprimento fixo”. Clicar em C e digitar a mesma medida anterior (encontrando o ponto D). Habilitar a opção “segmento com comprimento fixo”. Clicar em D e indicar a mesma medida anterior (obtendo o ponto E). Teremos então os segmentos AB, BC, CD e DE, de medidas iguais, e assim por diante.

O processo continua seguindo os mesmos procedimentos. Essa construção é de fácil execução, já que utilizamos apenas um comando.

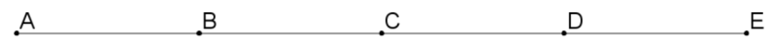


Figura 28: Segmentos congruentes

3.3 Polígonos regulares

Caso a medida não seja importante, você pode “habilitar a opção Polígono” e escolher polígono regular. Basta clicar em dois pontos na área de trabalho, os quais serão dois dos seus vértices, e digitar o número de lados do polígono.

Vamos então definir a medida do lado ou do raio da circunferência onde o polígono será inscrito e construir alguns polígonos regulares.

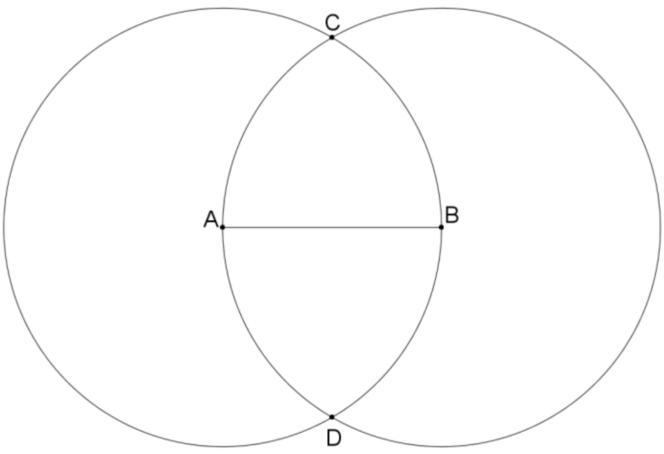
Quando habilitamos uma opção que necessite de usar um ponto, esse é gerado automaticamente e representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Normalmente essas letras estão ordenadas alfabeticamente. Caso você queira mudar a letra de determinado ponto, basta clicar no ponto referido com o botão direito do mouse e clicar em renomear. A partir daí poderá escolher a letra desejada. Já vimos no capítulo anterior que o heptágono não pode ser construído com régua e compasso, mas com os recursos do Geogebra isso é possível. Ainda assim, construiremos apenas os polígonos construtíveis nesse capítulo.

3.3.1 Construção do triângulo equilátero

- Habilitar a opção “segmento com comprimento fixo”. Clicar na área de trabalho e escolher a medida do lado do triângulo.

Construção da figura 29: Etapa 1

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto A e digitar AB. Clicar no ponto B e digitar AB. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nos dois círculos.



Construção da figura 29: Etapa 2

- Habilitar a opção “polígono”. Clicar nos três vértices do polígono e clicar novamente no primeiro vértice para fechar o polígono.

  Obs.: Devemos escolher um dos pontos obtidos (C ou D). Neste caso, escolhemos C.

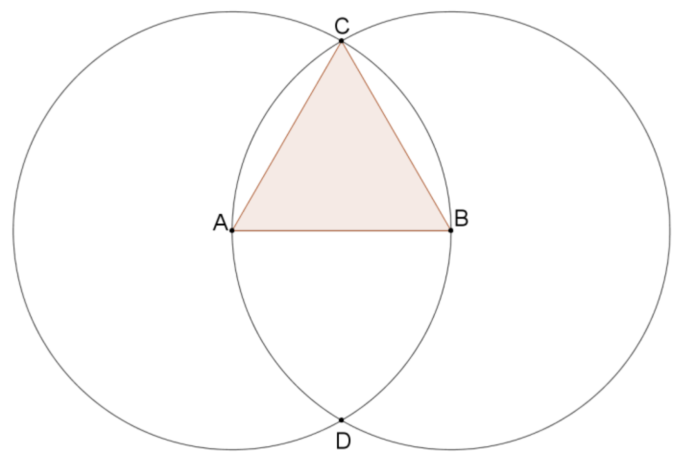
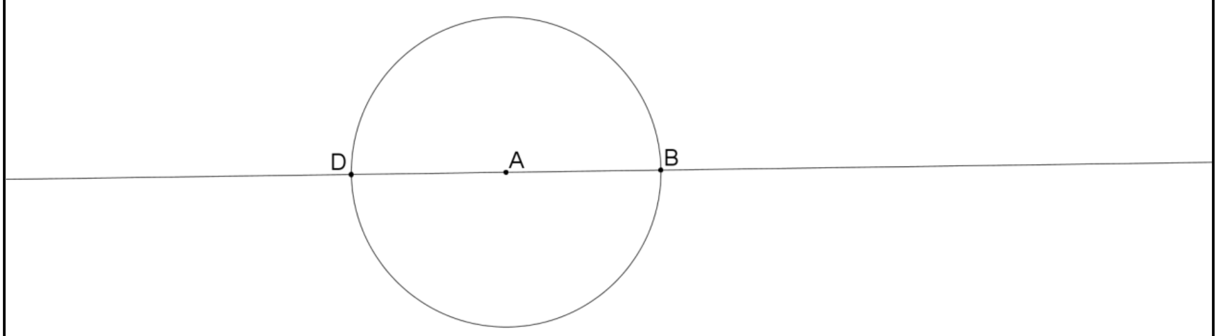


Figura 29: Triângulo equilátero

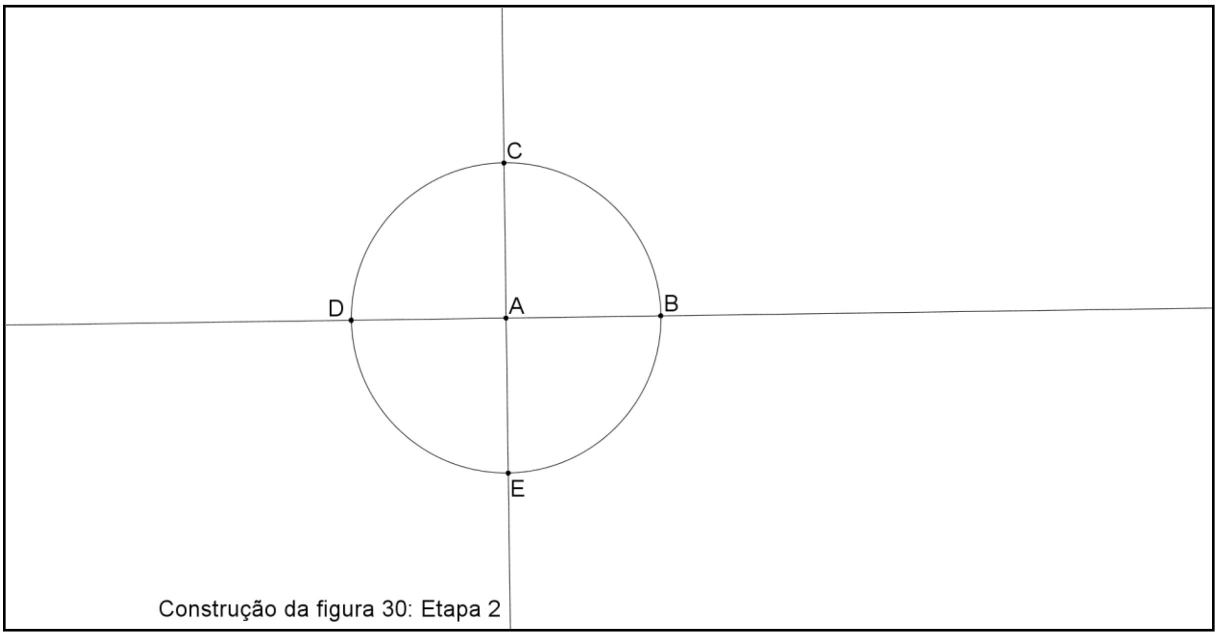
3.3.2 Construção do quadrado

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar na área de trabalho e indicar a medida do raio. Habilitar a opção “reta definida por dois pontos”, clicar no ponto A (centro do círculo) e num ponto fora do círculo. Habilitar a opção “interseção de dois objetos”. Clicar na reta e no círculo, obtendo os pontos B e D.



Construção da figura 30: Etapa 1

- Habilitar a opção “mediatriz” e clicar nos pontos B e D. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nessa reta e no círculo, obtendo os pontos C e E.



Construção da figura 30: Etapa 2

- Habilitar a opção “polígono” e clicar nos quatro pontos. Clicar novamente no primeiro ponto para fechar o polígono.

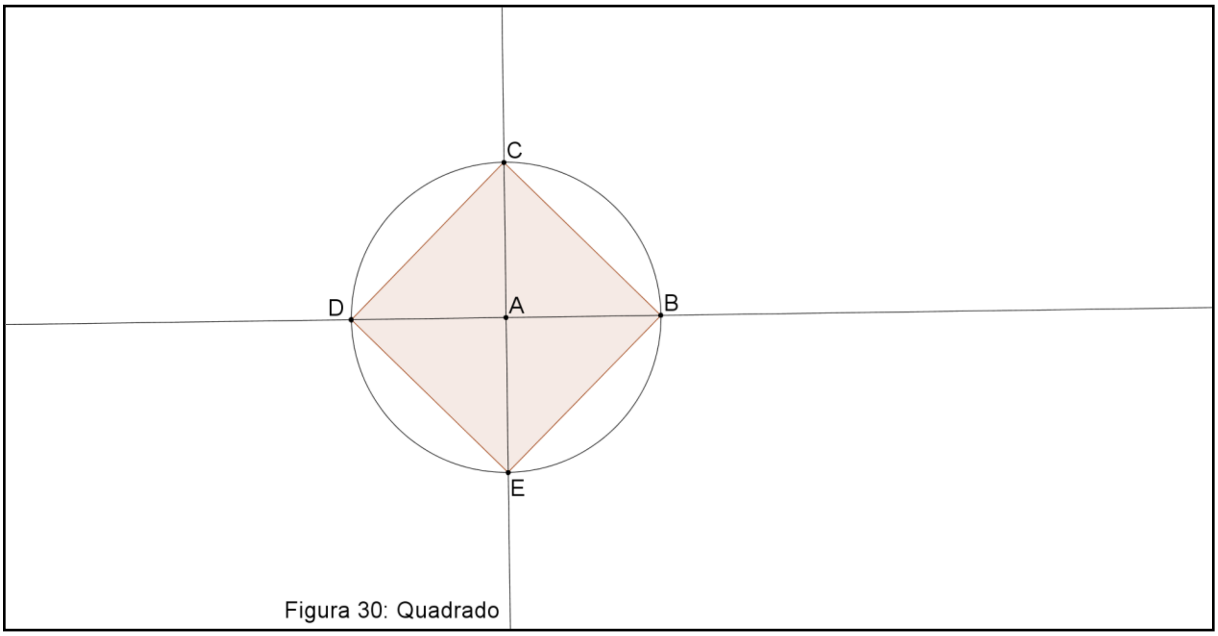
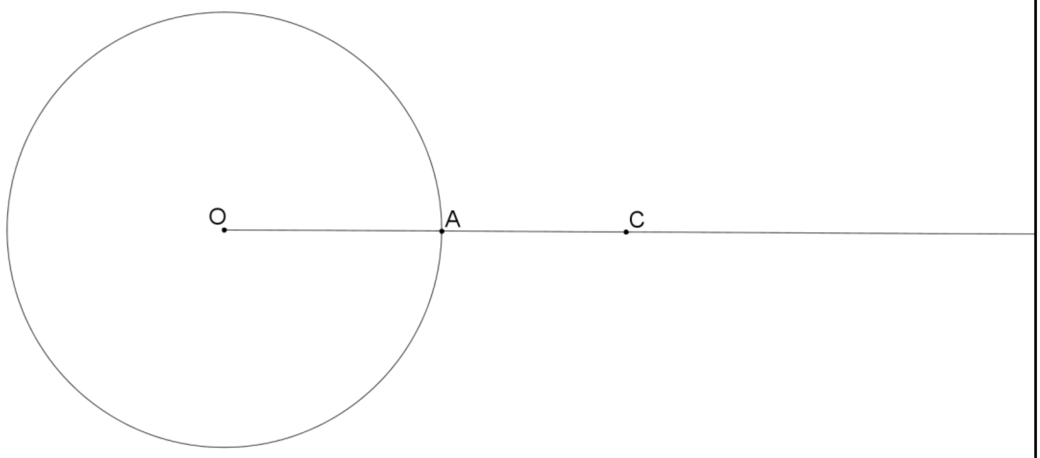


Figura 30: Quadrado

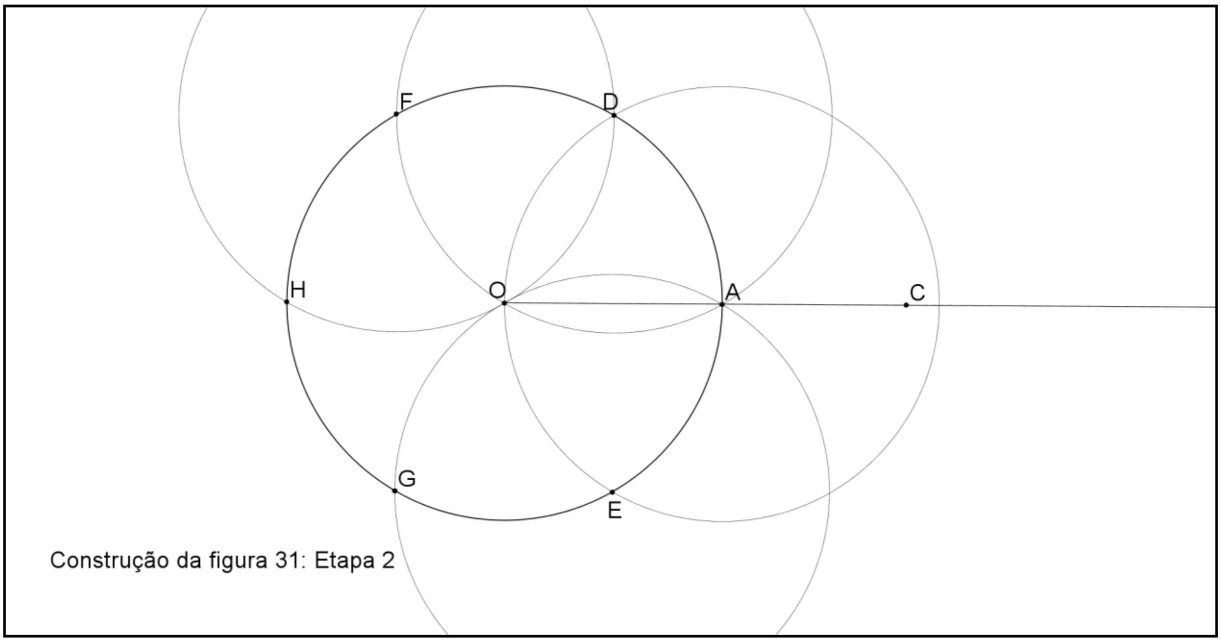
3.3.3 Construção do hexágono regular

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar na área de trabalho e digitar a medida do raio. Habilitar a opção “semirreta definida por dois pontos” e clicar em O e num ponto na área de trabalho (fora do círculo). Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na semirreta e no círculo.



Construção da figura 31: Etapa 1

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em A e digitar OA. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nos círculos de centros O e A. Renomear as interseções desses círculos por D e E. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em D e digitar a mesma medida. Clicar em E e digitar a mesma medida. Habilitar a opção “interseção de dois objetos”. Clicar nas interseções de cada um desses círculos com o círculo inicial. Repetir o procedimento até contornar o círculo inicial.



Construção da figura 31: Etapa 2

- Habilitar a opção “polígono” e clicar nos pontos A, D, F, H, G, E e A novamente.

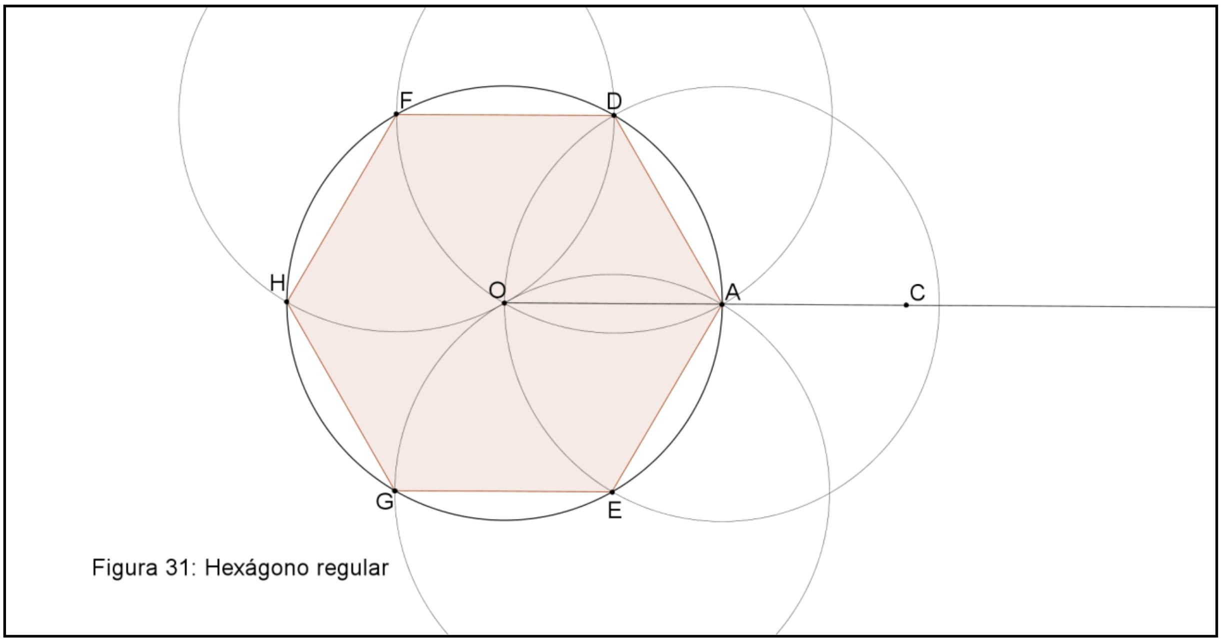
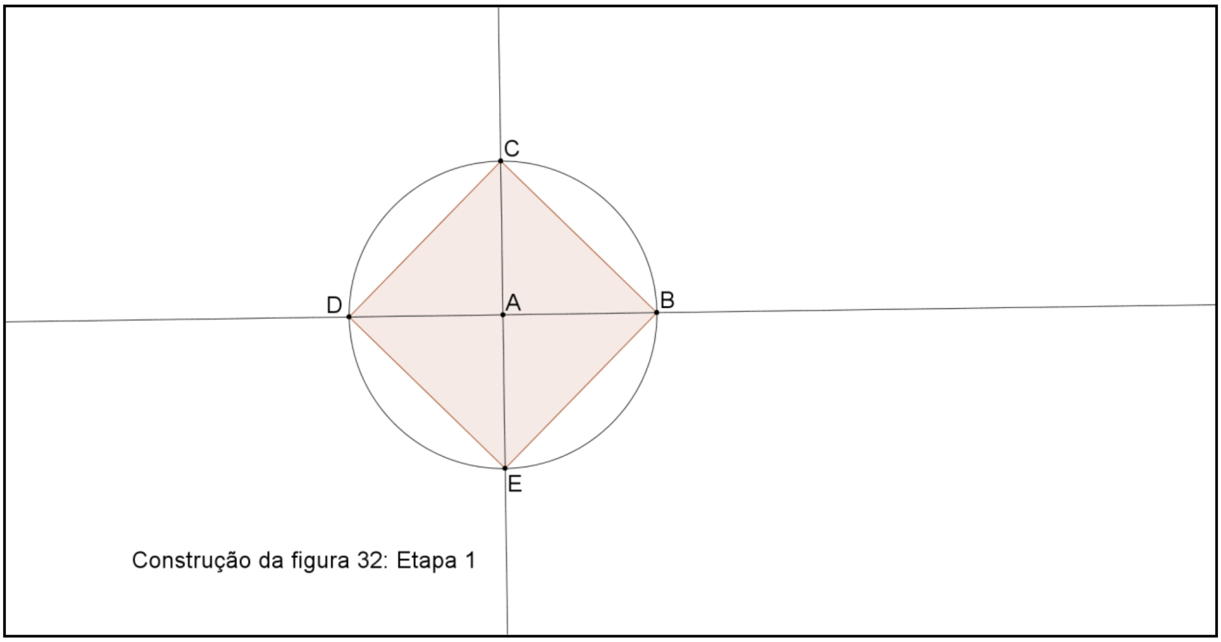


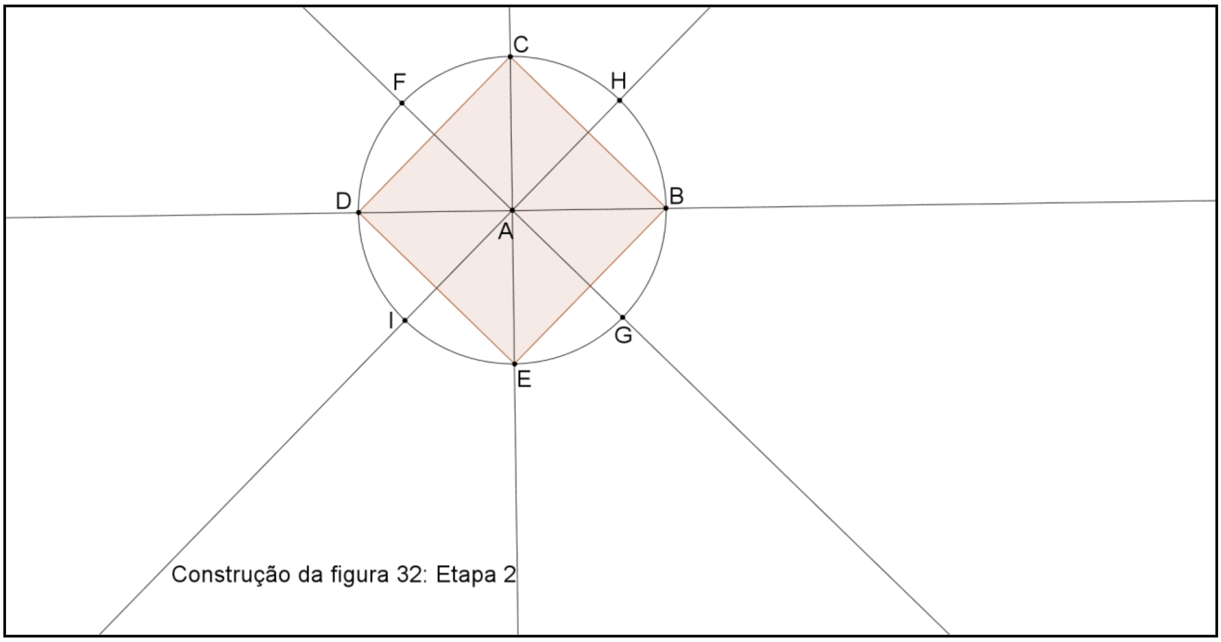
Figura 31: Hexágono regular

3.3.4 Construção do octógono regular

Construímos um octógono quando sucedemos a construção do quadrado. Neste caso, como o quadrado já foi construído aqui, daremos sequência à construção do octógono, partindo de um quadrado inscrito numa circunferência.



- Habilitar a opção "mediatriz" e clicar nos pontos C e D do lado CD. Clicar nos pontos D e E, do lado DE. Habilitar a opção "interseção de dois objetos". Clicar numa das retas e no círculo e depois clicar na outra reta e novamente no círculo.



- Habilitar a opção "polígono" e clicar nos oito pontos da circunferência e clicar novamente no ponto inicial.

Observação: Vamos ocultar o quadrado para visualizarmos melhor o octógono. Para isso, clicar com o botão direito do mouse e escolher a opção “exibir objeto”.

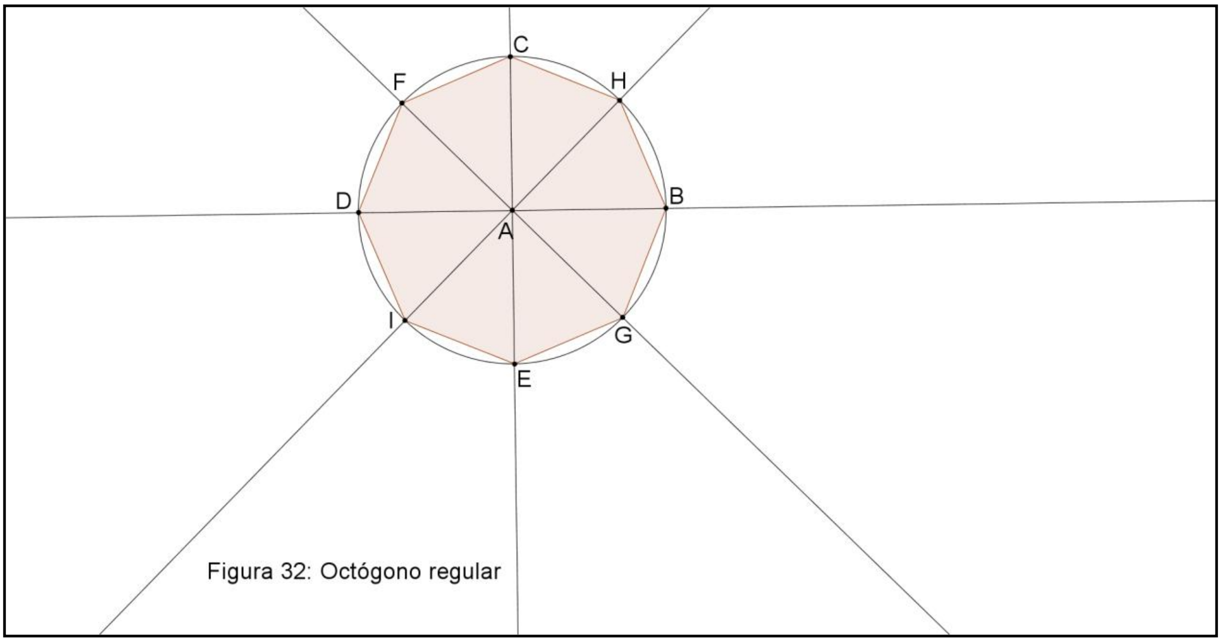
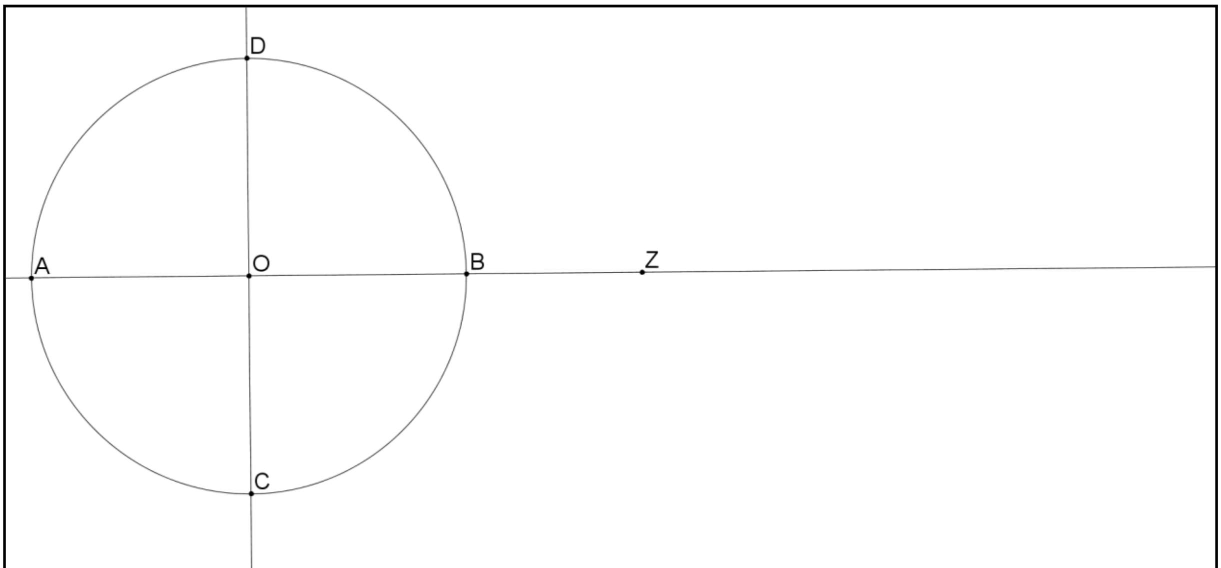


Figura 32: Octógono regular

3.3.5 Construção do decágono regular

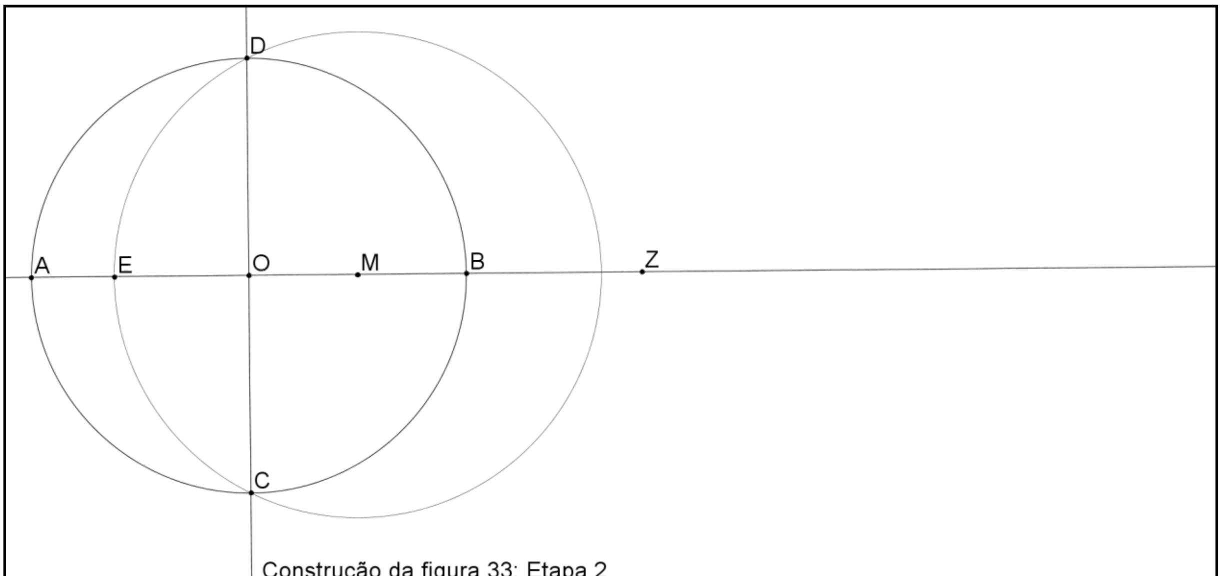
Utilizaremos os mesmos procedimentos adotados na construção com régua e compasso.

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”, clicar na área de trabalho e digitar a medida do raio. Renomear O como o centro do círculo. Habilitar a opção “reta definida por dois pontos”. Clicar no centro do círculo e num ponto na área de trabalho (fora do círculo). Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na reta e no círculo, obtendo os pontos A e B. Habilitar a opção “mediatriz” e clicar nos pontos A e B. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nessa última reta e no círculo, obtendo os pontos C e D.



Construção da figura 33: Etapa 1

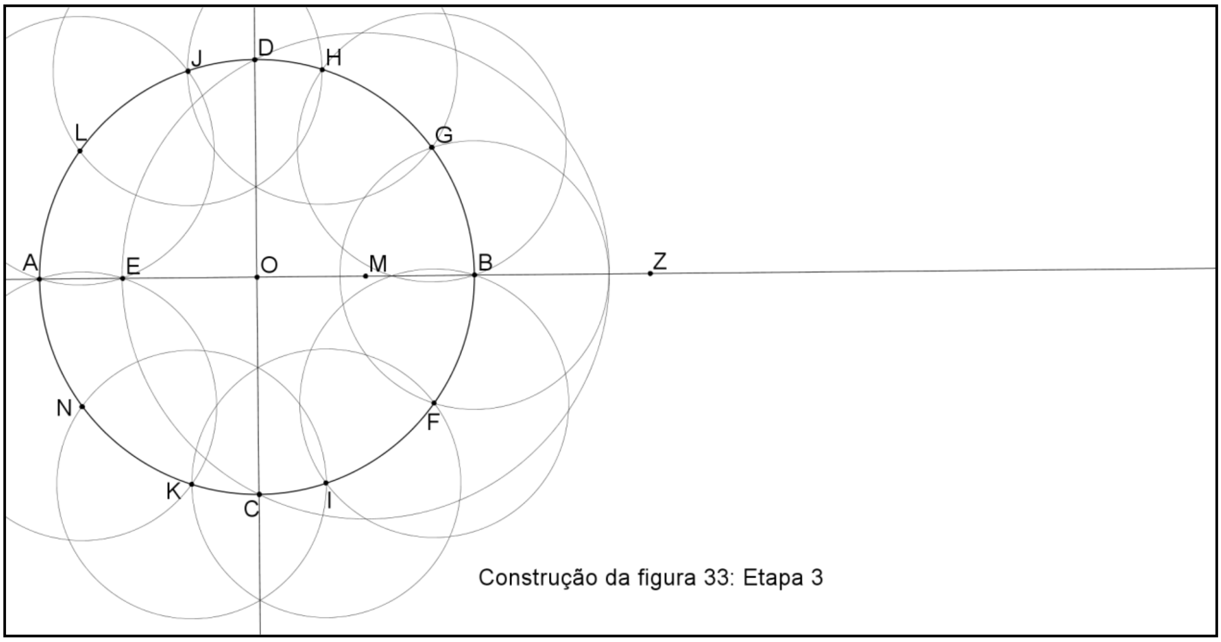
- Habilitar a opção “ponto médio ou centro” e clicar nos pontos O e B, obtendo M, ponto médio de OB. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”, clicar em M e digitar MD. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nesse último círculo e na reta AO, obtendo o ponto E.



Construção da figura 33: Etapa 2

- O segmento OE corresponde à medida do lado do decágono. Portanto, basta traçarmos círculos de raio OE a partir de um ponto qualquer na circunferência inicial até contorná-la. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”, clicar em

B e digitar OE. Repetir o procedimento para obter os dez vértices do decágono.



Construção da figura 33: Etapa 3

- Habilitar a opção “polígono”, clicar nos dez pontos obtidos sobre o círculo e novamente no ponto inicial.

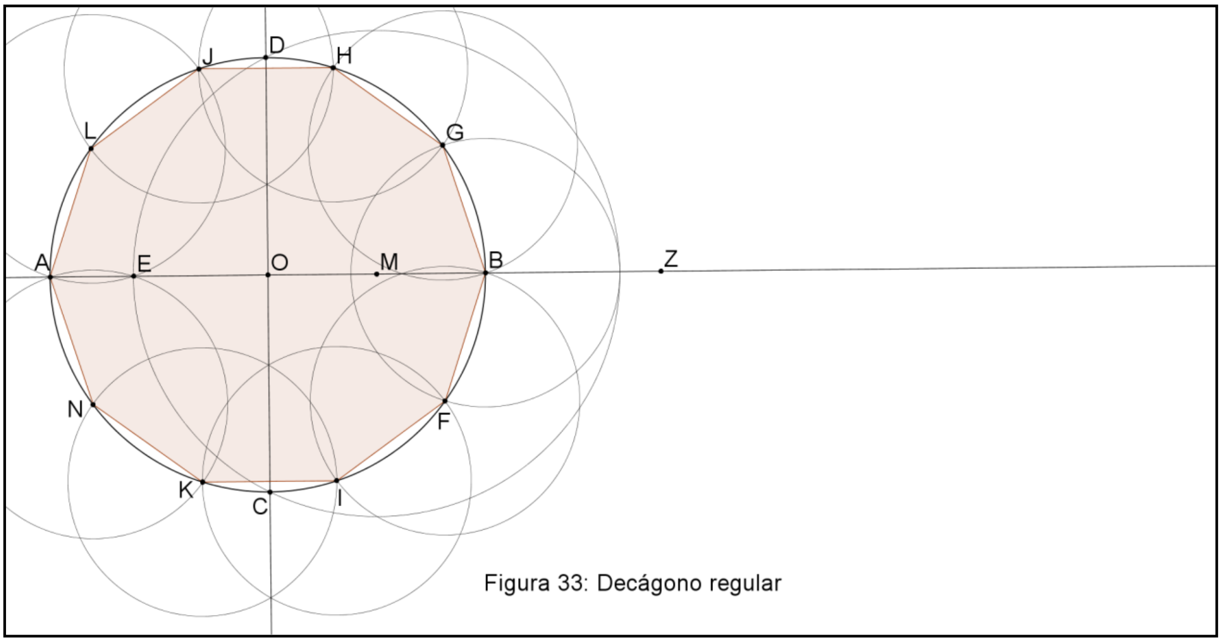


Figura 33: Decágono regular

3.3.6 Construção do pentágono regular

Para construirmos o pentágono, utilizaremos o decágono como ponto de partida. Neste caso o decágono é um polígono de 2 n lados e queremos obter um polígono de n lados.

- Considere os vértices de um decágono regular (etapa 3 da construção da figura 33). Para obtermos o pentágono, basta escolhermos um ponto inicial e ligarmos os pontos alternados a partir dele e teremos o pentágono regular.
- Habilitar a opção “polígono”, clicar em cinco pontos alternados e novamente no ponto inicial.

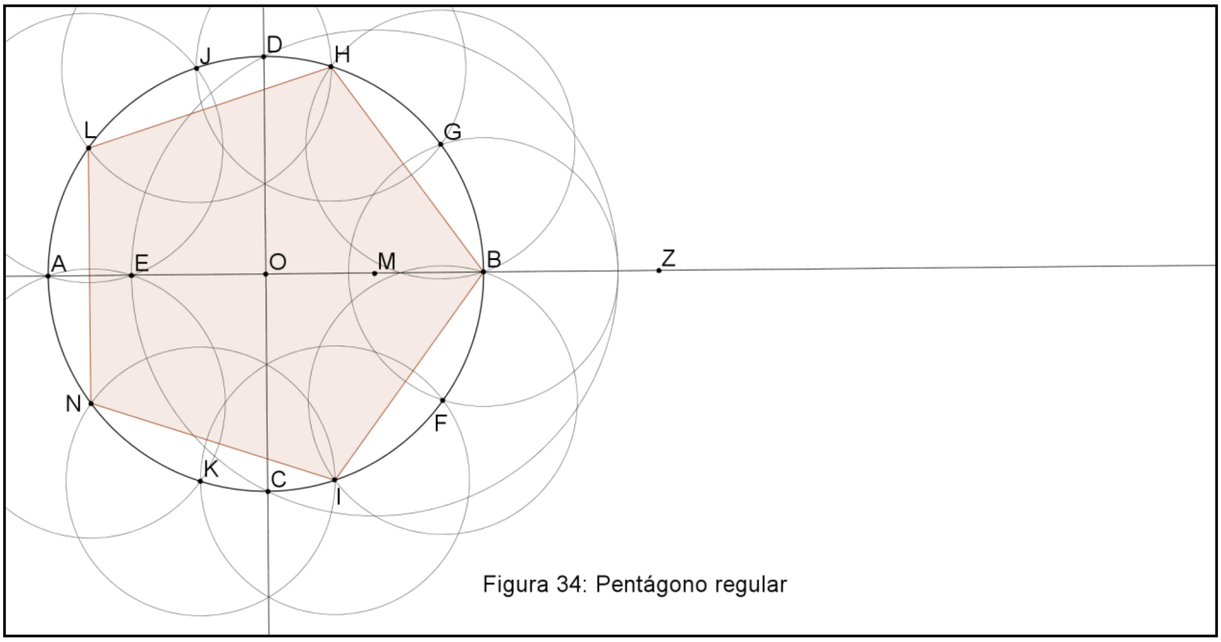
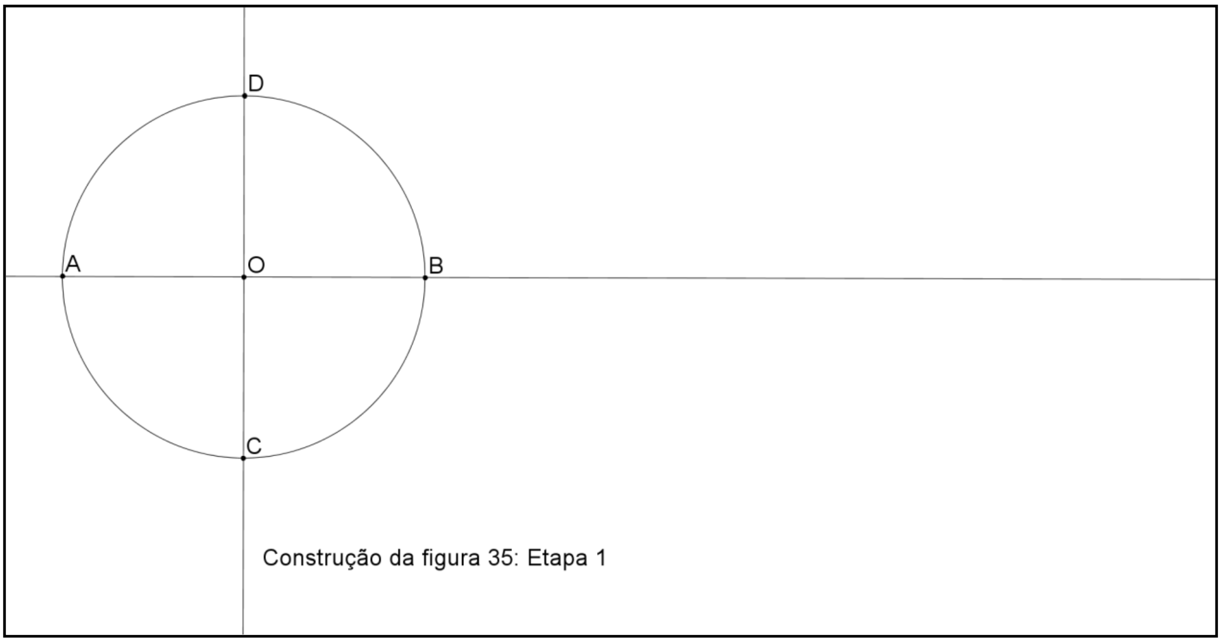


Figura 34: Pentágono regular

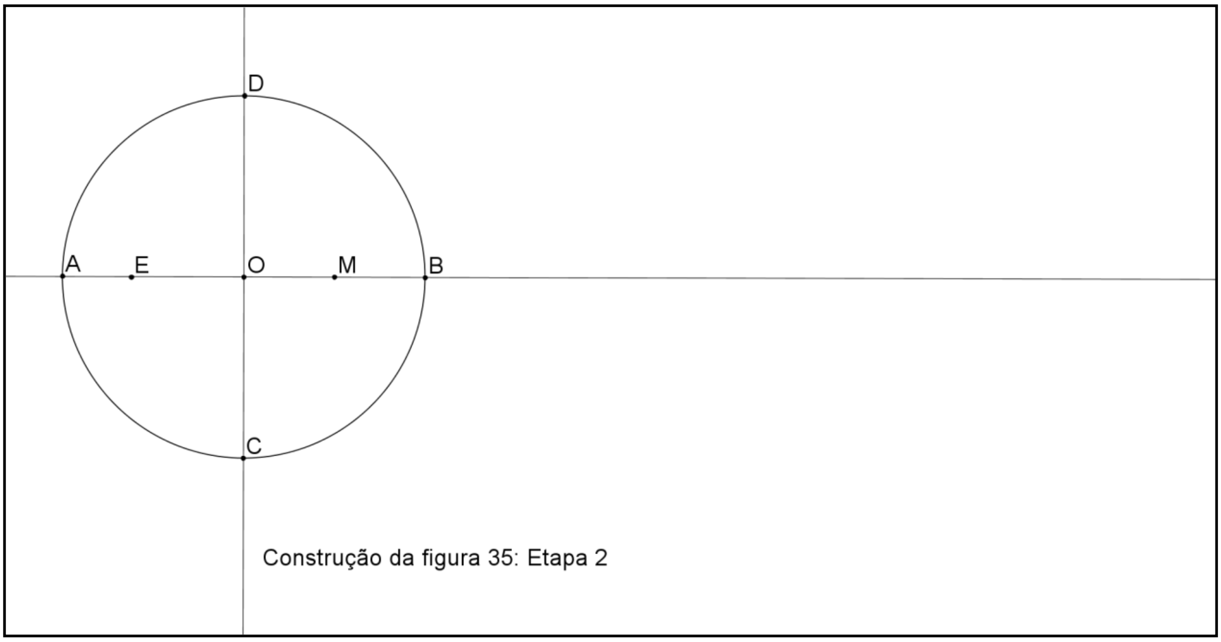
3.3.7 Construção do pentadecágono regular

O pentadecágono possui quinze lados. Neste caso ele é formado pela união entre quinze triângulos isósceles cujo ângulo definido pelo vértice central é de $\frac{360°}{15}$ = 24°. Os procedimentos serão os mesmos usados com régua e compasso, ou seja, pela relação 24° = 60° - 36°.

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar na área de trabalho e digitar a medida do raio. Renomear O como o centro do círculo. Habilitar a opção “reta definida por dois pontos”. Clicar no ponto O e em outro local fora do círculo. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar no círculo e na reta. Habilitar a opção “mediatriz”. Clicar nos pontos A e B obtendo os pontos C e D nas interseções dessa reta com o círculo.

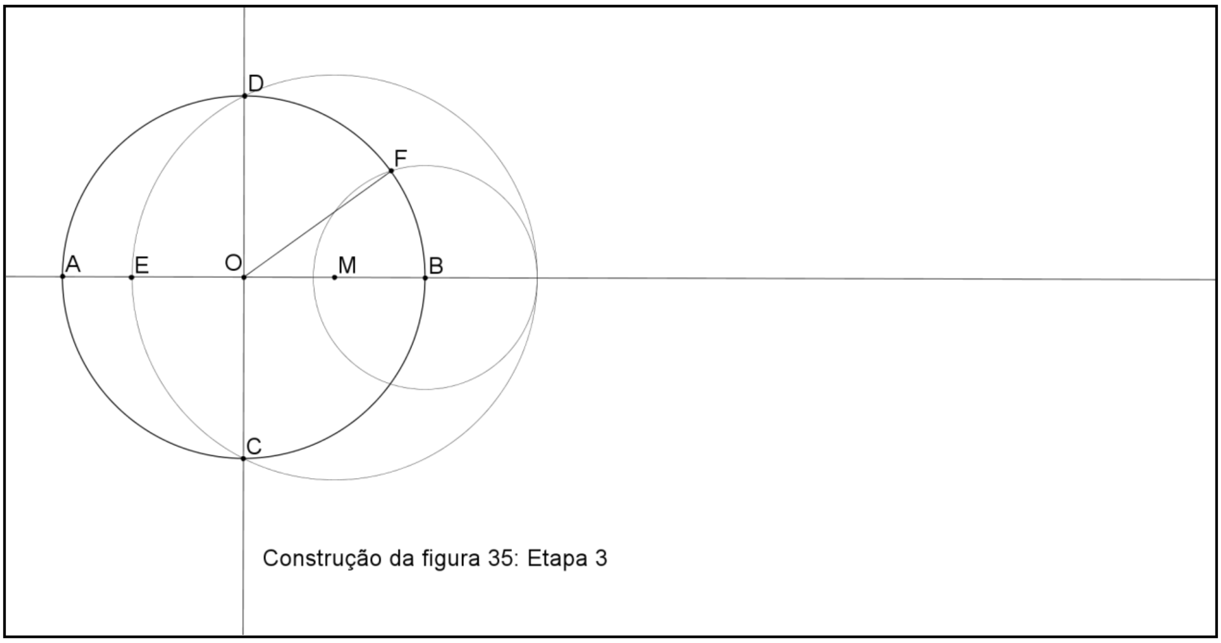


- Habilitar a opção “ponto médio ou centro” e clicar nos pontos O e B. Renomear de M o ponto gerado. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto M e digitar MD. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar no círculo obtido e na reta OA.



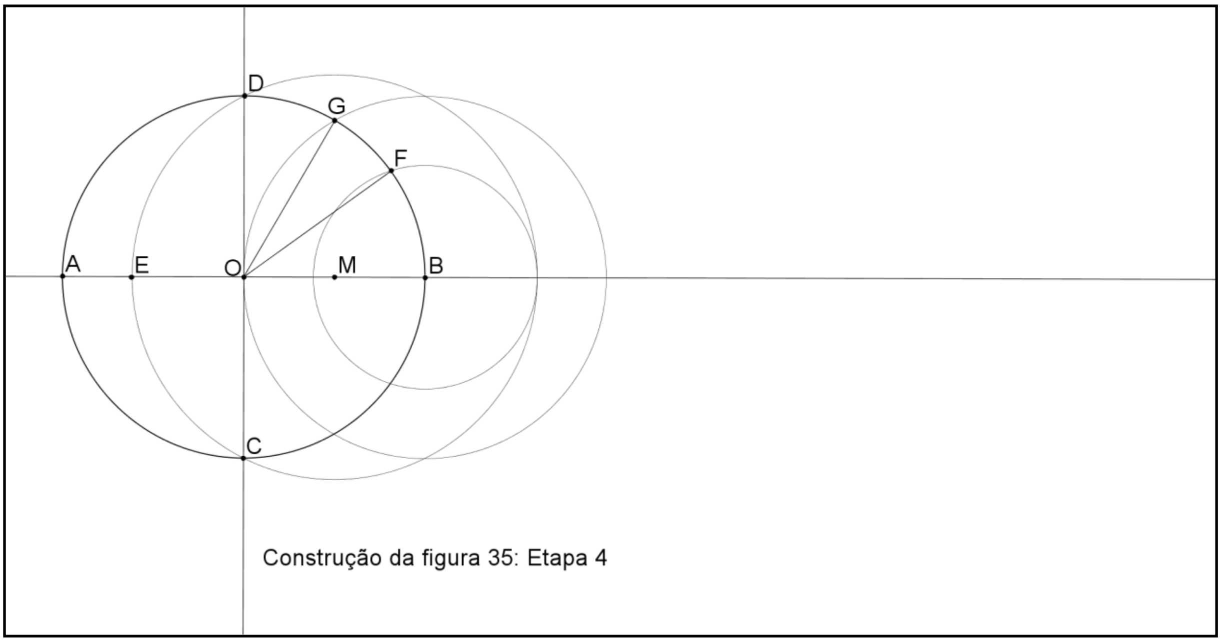
- Já sabemos que OE é a medida do lado do decágono. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto B e digitar OE, obtendo o ponto

F na interseção com o círculo inicial. Habilitar a opção “segmento definido por dois pontos”, clicar em O e em F.



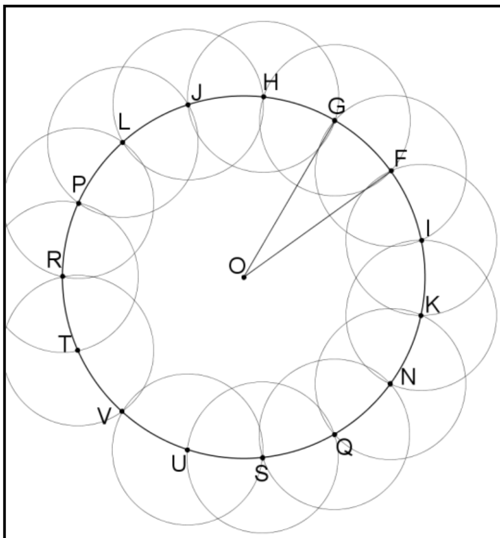
Construção da figura 35: Etapa 3

- Para obter o lado do triângulo sabendo que B é um de seus vértices basta traçarmos um círculo centrado em B e raio OB. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em B e digitar OB. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar no círculo obtido e no círculo inicial, obtendo o ponto G. Habilitar a opção “segmento definido por dois pontos”, clicar em O e em G.



Construção da figura 35: Etapa 4

- Neste caso, GF é a medida do lado do pentadecágono. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto G e digitar GF, clicar no ponto F e digitar GF. Repetir o procedimento até contornar o círculo inicial. Vamos ocultar alguns detalhes para melhorar a visualização da construção.



Construção da figura 35: Etapa 5

- Habilitar a opção “polígono”, clicar em todos os pontos do círculo e novamente no ponto inicial.

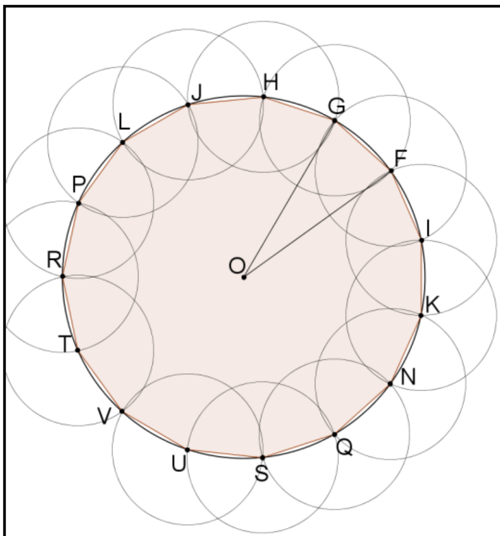
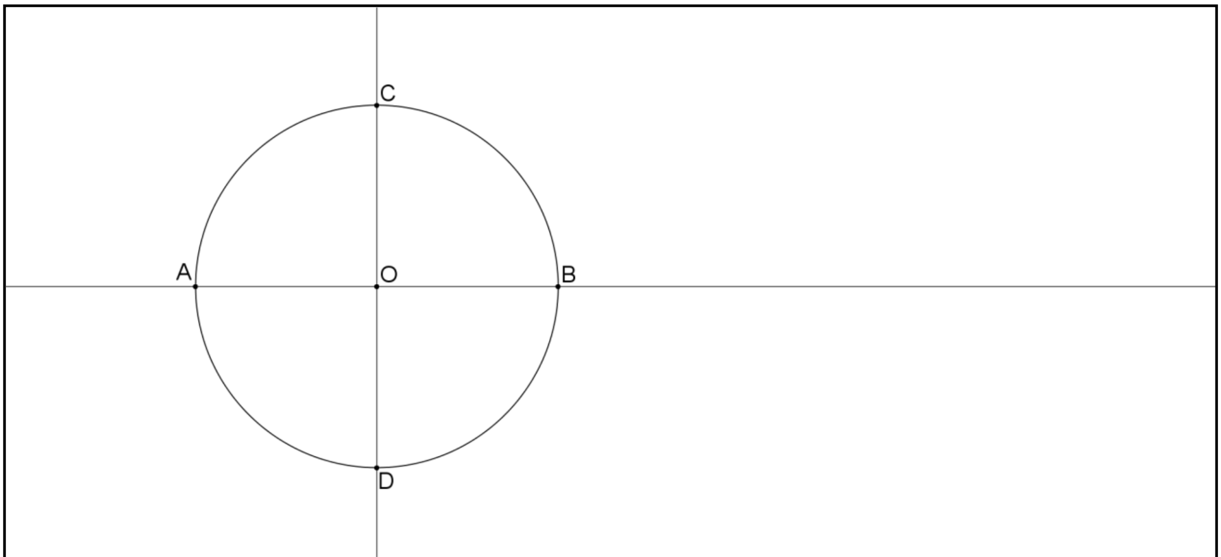


Figura 35: Pentadecágono regular

3.3.8 Construção do heptadecágono regular

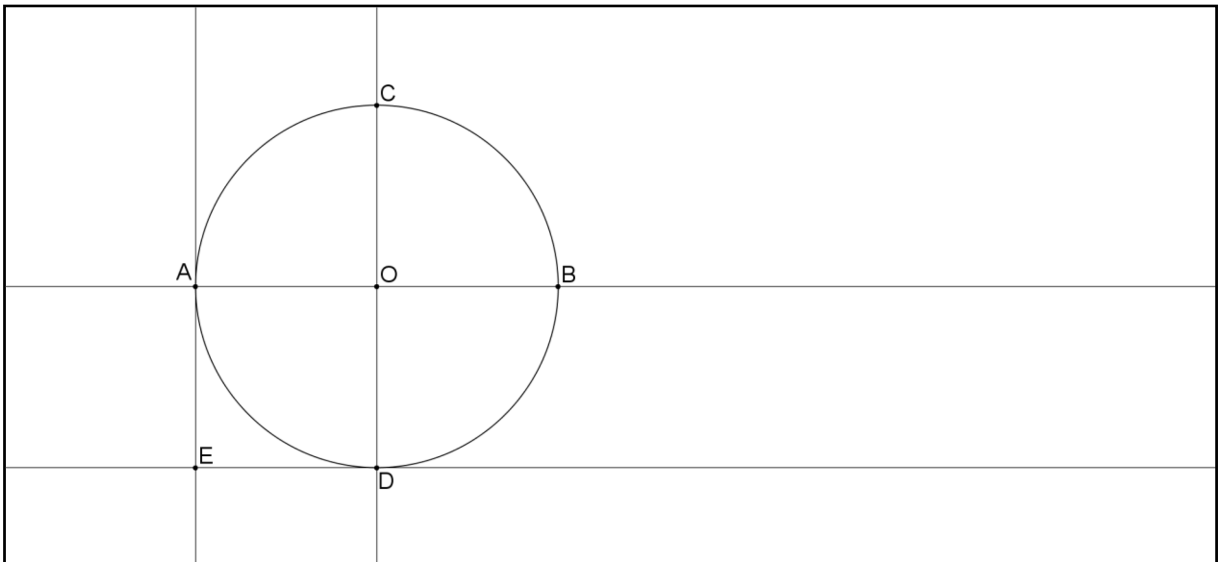
Construiremos o heptadecágono regular no GeoGebra seguindo os mesmos passos usados na construção com régua e compasso, o que diferencia é a praticidade com que o GeoGebra executa cada etapa da construção.

- Habilitar a opção "círculo dados centro e raio". Clicar na área de trabalho e digitar o raio do círculo. Renomear o centro do círculo com a letra O. Habilitar a opção "reta definida por dois pontos". Clicar no ponto O e em outro local fora do círculo. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar no círculo e na reta, obtendo os pontos A e B na interseção. Habilitar a opção "mediatriz" e clicar nos pontos A e B. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar no círculo e nessa última reta.



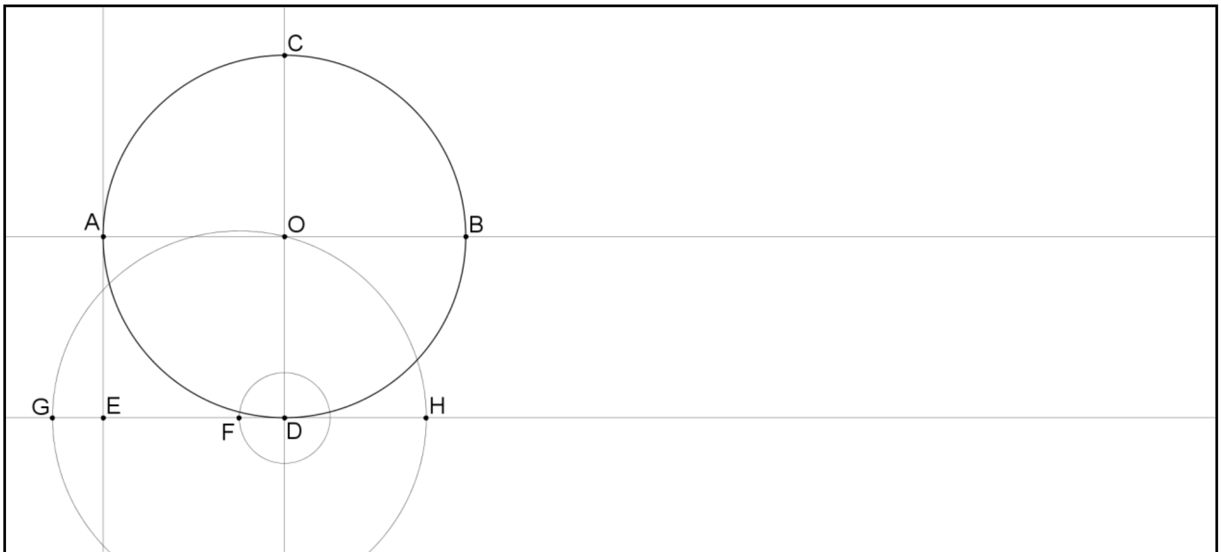
Construção da figura 36: Etapa 1

- Habilitar a opção "reta perpendicular". Clicar na reta AB e no ponto A. Clicar na reta CD e no ponto D. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar nessas duas retas, obtendo o ponto E.



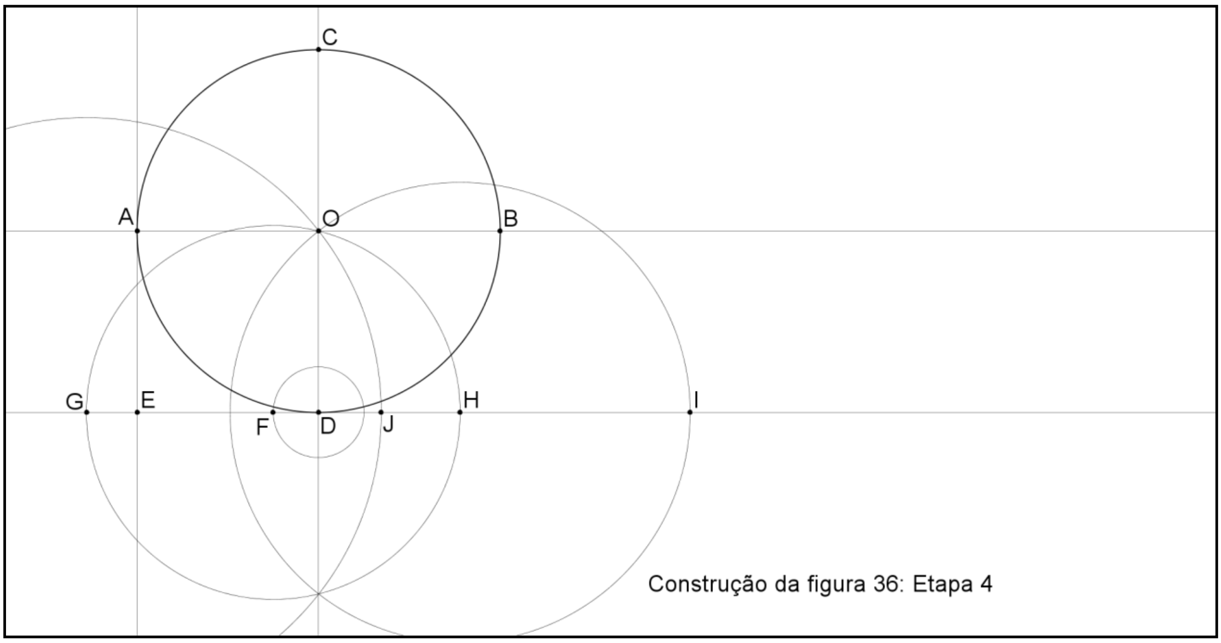
Construção da figura 36: Etapa 2

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto D e digitar ED/4 (Com régua e compasso, trace o ponto médio do ponto médio). Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção desse círculo com o segmento ED obtendo o ponto F. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto F e digitar OF. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nesse último círculo e na reta ED obtendo os pontos G e H.



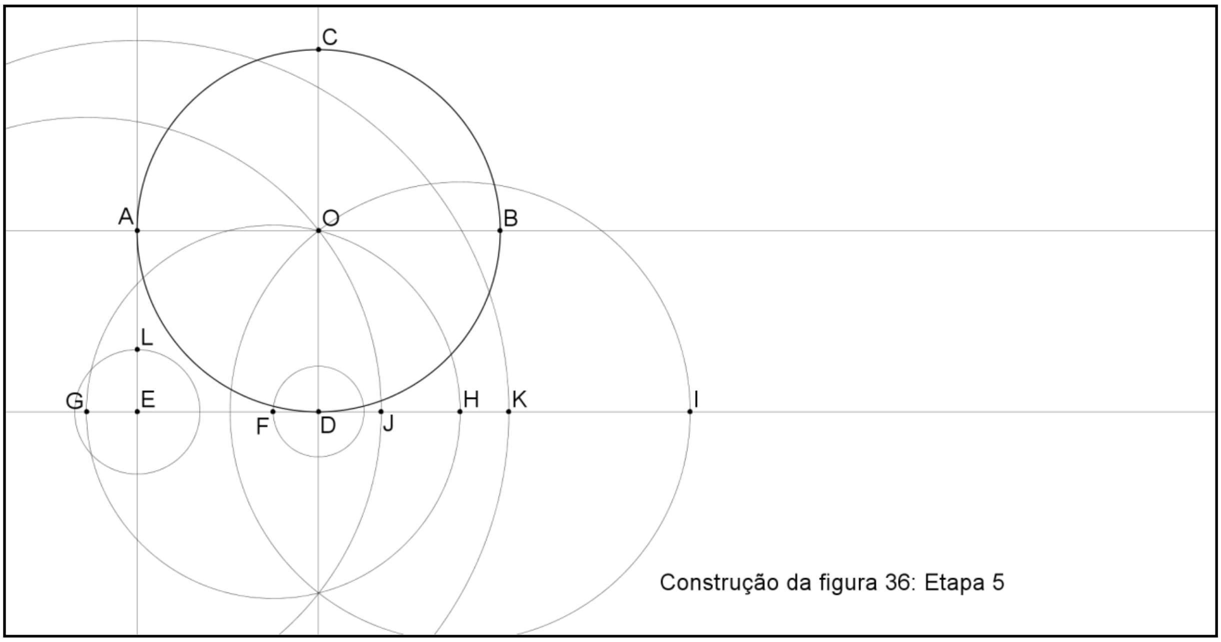
Construção da figura 36: Etapa 3

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar no ponto H e digitar OH. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção desse círculo com a reta DH (à direita de H), obtendo o ponto I. Habilitar a opção "círculo dados centro e raio". Clicar no ponto G e digitar OG. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar na interseção desse círculo com a reta DH (à direita de G), obtendo o ponto J.



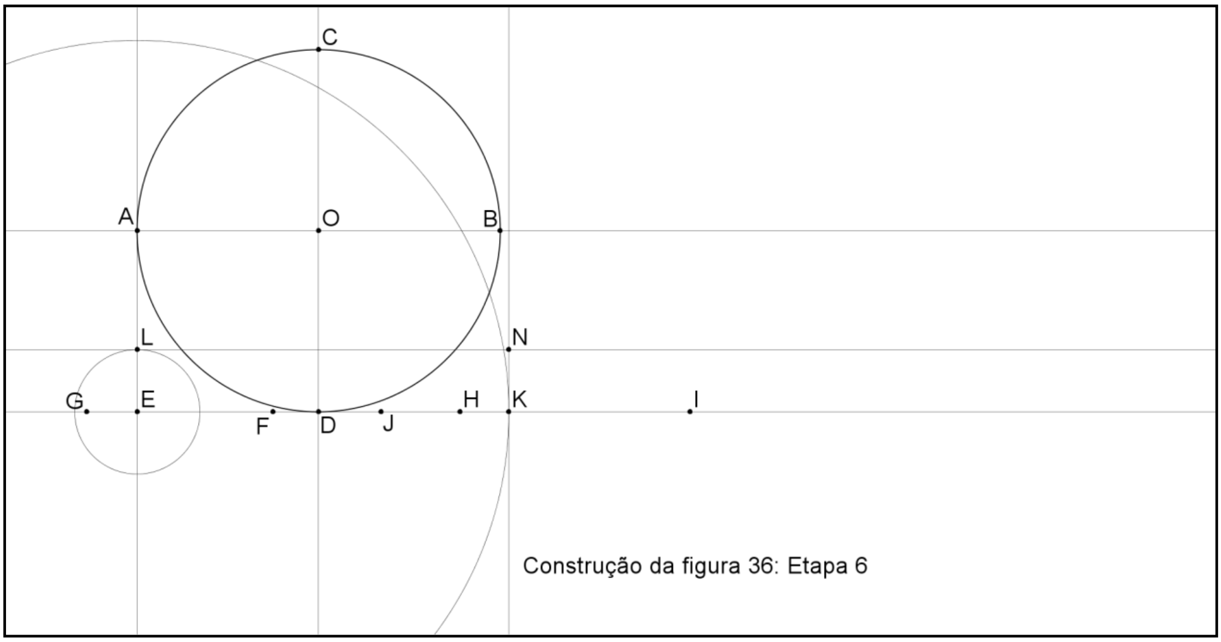
Construção da figura 36: Etapa 4

- Habilitar a opção "círculo dados centro e raio". Clicar em E e digitar DI. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar na interseção desse círculo com a reta EH (à direita de E), obtendo o ponto K. Habilitar a opção "círculo dados centro e raio". Clicar em E e digitar DJ. Habilitar a opção "interseção de dois objetos" e clicar na interseção desse círculo com a reta EA (acima de E), obtendo o ponto L.



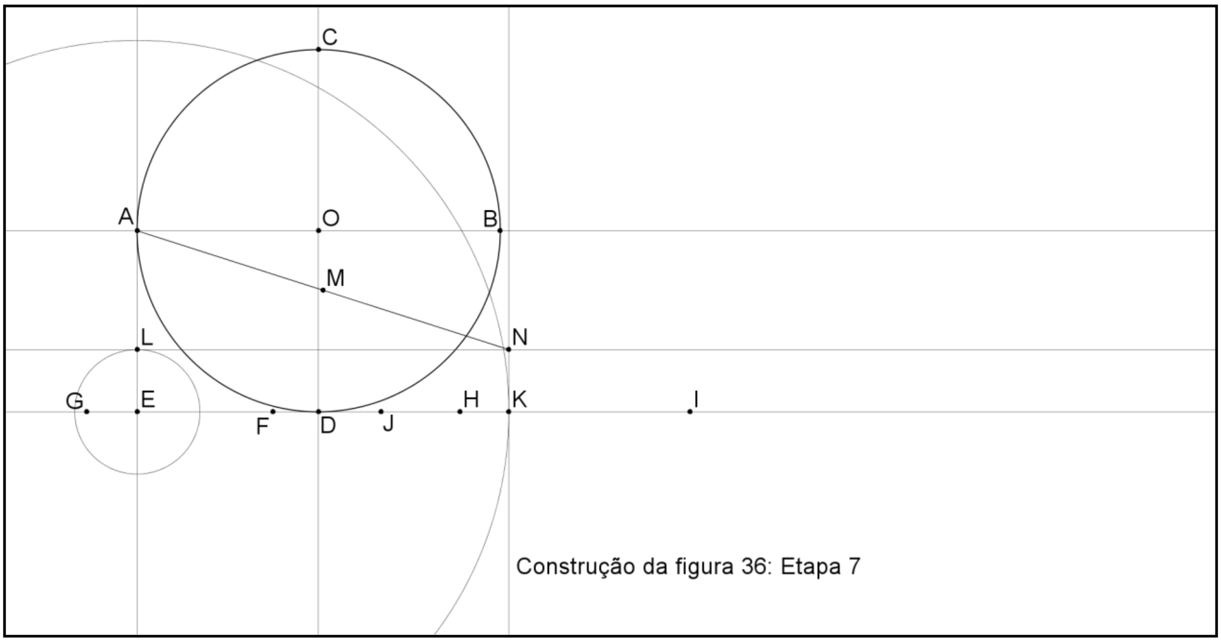
Construção da figura 36: Etapa 5

- Habilitar a opção “reta perpendicular”. Clicar na reta EL e no ponto L. Clicar na reta EK e no ponto K. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção dessas duas retas, obtendo o ponto N. Antes disso, ocultaremos alguns detalhes para melhorar a visualização da etapa.



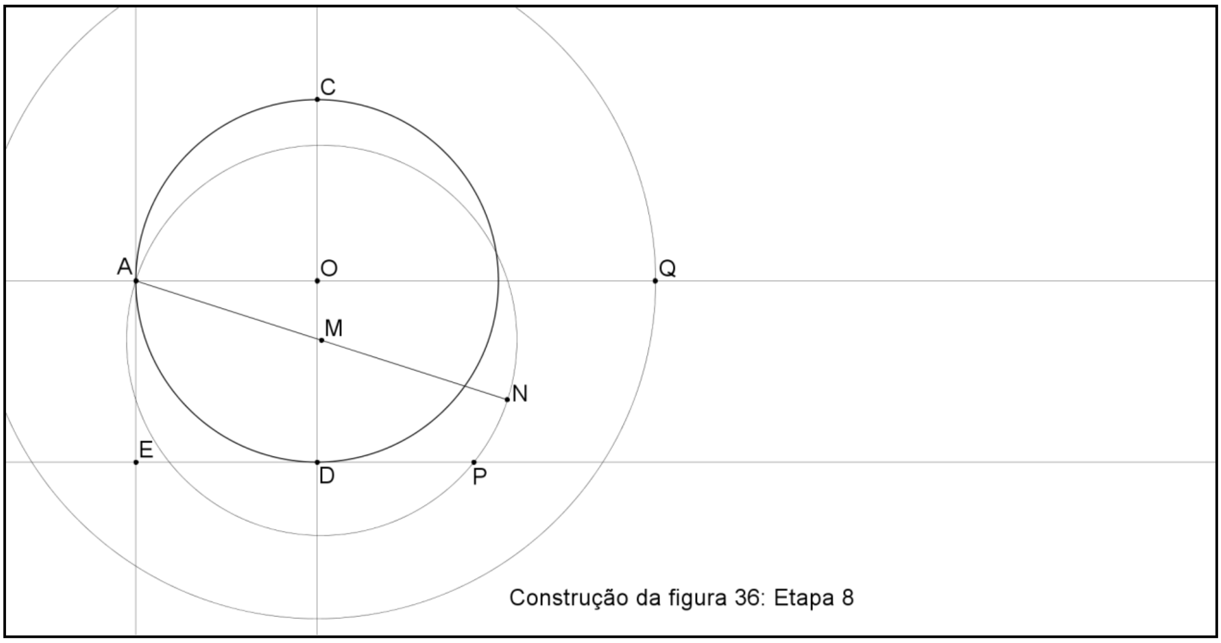
Construção da figura 36: Etapa 6

- Habilitar a opção “segmento definido por dois pontos” e clicar nos pontos A e N. Habilitar a opção “ponto médio ou centro” e clicar nos pontos A e N, obtendo M, ponto médio de AN.



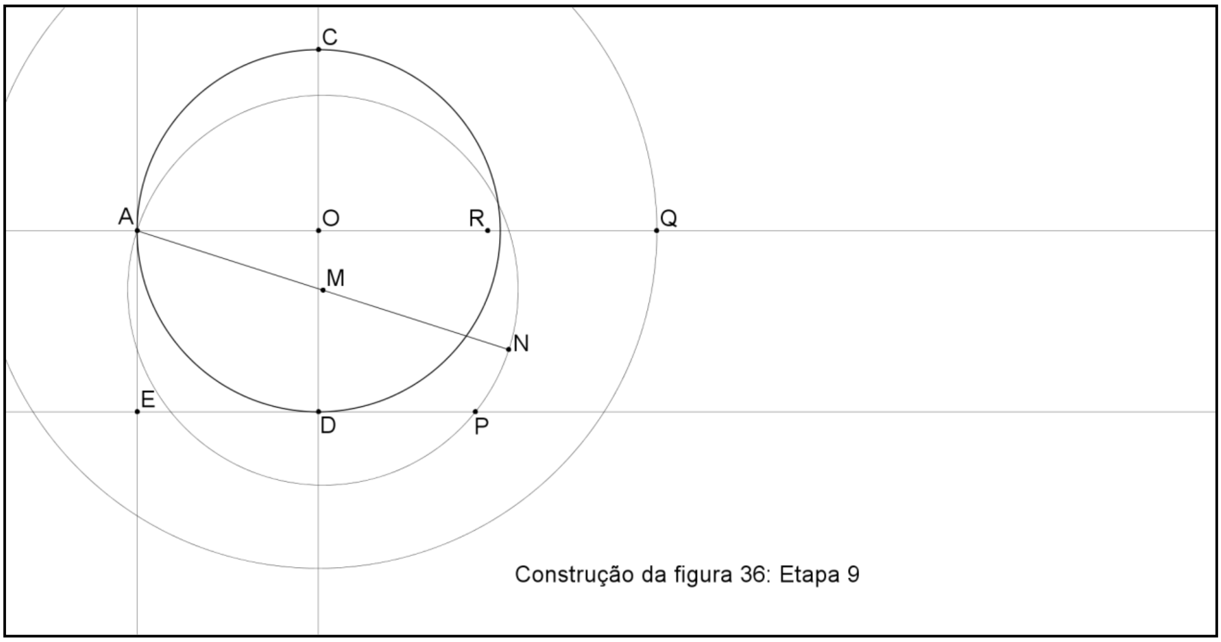
Construção da figura 36: Etapa 7

- Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em M e digitar MN. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção desse círculo com a reta ED (à direita de D), obtendo o ponto P. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em O e digitar EP. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção desse círculo com a reta OB (à direita de B), obtendo o ponto Q. Vamos novamente ocultar alguns detalhes.



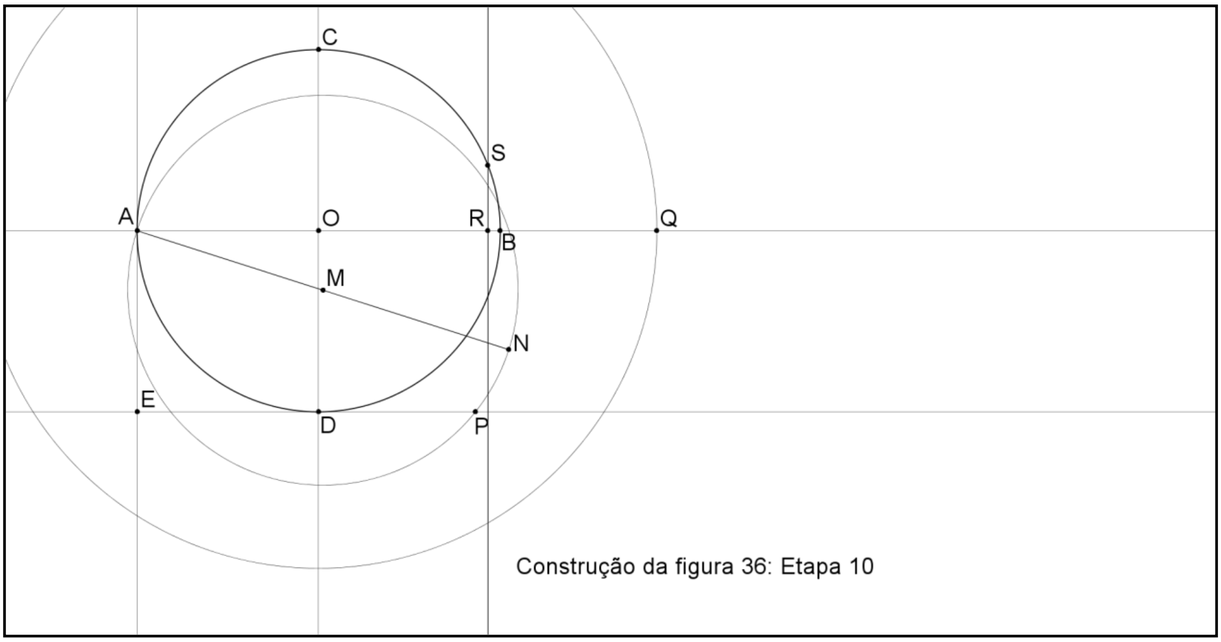
Construção da figura 36: Etapa 8

- Habilitar a opção “ponto médio ou centro” e clicar nos pontos O e Q, obtendo o ponto R.



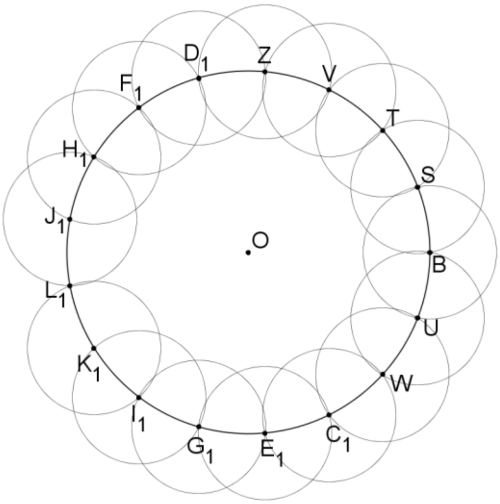
Construção da figura 36: Etapa 9

- Habilitar a opção “reta perpendicular”. Clicar na reta OR e no ponto R. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar na interseção dessa reta com o círculo inicial (acima de R), obtendo o ponto S.



Construção da figura 36: Etapa 10

- Assim, BS é a medida do lado do heptadecágono regular. Logo, basta traçarmos círculos de raio BS sobre o círculo inicial. Habilitar a opção “círculo dados centro e raio”. Clicar em B e digitar BS. Clicar em S e digitar BS. Habilitar a opção “interseção de dois objetos” e clicar nas interseções desses círculos com o círculo inicial. O processo continua até contornarmos o círculo inicial.



Construção da figura 36: Etapa 11

- Habilitar a opção “polígono”, clicar em todos os pontos (sequencialmente) do círculo e novamente no ponto inicial.

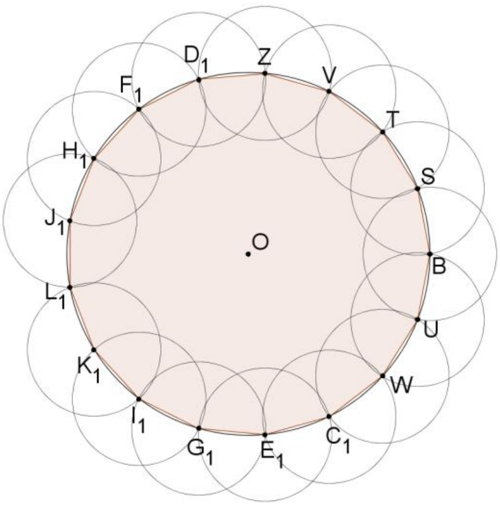


Figura 36: Heptadecágono regular

3.4 Possíveis continuações ou desdobramentos

Recomendamos a execução dessas atividades com o uso de régua e compasso e também a construção de todas as figuras propostas aqui, utilizando os recursos práticos do GeoGebra. É claro que o GeoGebra oferece recursos que agilizam as construções dessas figuras. Assim, a experiência será mais produtiva quando efetuarmos o trabalho manualmente e, em seguida, com o uso do GeoGebra.

3.4.1 Proposta de uma sequência de atividades

É muito importante que o leitor reflita e pesquise as soluções das atividades propostas referentes às noções básicas de Geometria plana. Em relação à Geometria espacial, as atividades são sugestões de continuidade das construções geométricas com o uso de régua e compasso. Assim, como foi conduzido no questionário 1, é necessário que o professor oriente e acompanhe as pesquisas e atividades dos alunos e as corrija no questionário 2.

Questionário 2:

a) Defina poliedro.
b) O que é um octaedro?
c) É possível construir um cubo com régua e compasso?
d) Se um cubo tem três dimensões, como o construiríamos em uma folha de papel de duas dimensões?
e) O que é uma pirâmide?
f) O que é um poliedro regular? Quais são esses poliedros?
g) Qual é a intersecção entre dois planos no espaço?
h) O que é um prisma?
i) Um paralelepípedo é um prisma?
j) O que você entende por planificação de um sólido?

Em relação ao segundo questionário, são atividades que requerem pesquisas para construções futuras, as quais não faremos aqui por não contemplarem a proposta inicial. Todavia, são de grande importância para o entendimento da Geometria espacial.

Recomendamos a realização de pesquisa acerca de alguns sólidos geométricos e suas planificações. Como atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, e que requerem o uso de régua e compasso, propomos as seguintes planificações:

- Cubo;
- Paralelepípedo qualquer diferente do cubo;
- Prisma triangular reto;
- Prisma hexagonal reto;
- Tetraedro regular;
- Pirâmide de base quadrada;
- Pirâmide de base hexagonal;
- Octaedro regular.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse pelo assunto se deu no início do curso de Mecânica no Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), que na época era conhecido como Escola Técnica Federal do Espírito Santo (ETFES). No 1º ano do ensino médio, estudava a disciplina Desenho Técnico e do 2º ao 4º ano, Desenho de Mecânica. Foi o primeiro contato que tive com o compasso. Fui seduzido logo na primeira aula e essa disciplina serviu de grande contribuição para o meu entendimento de Geometria. As aulas eram bastante prazerosas e o meu rendimento, consequentemente, foi muito bom. Durante esses 18 anos de trabalho, como professor de Matemática, tive a oportunidade de ensinar aos alunos do 8º e 9º ano um pouco de construções geométricas com o uso de régua e compasso. Percebi muitas dificuldades no início. No entanto, no decorrer do processo era fácil de perceber a satisfação dos alunos diante de atividades diferenciadas e envolventes. Notei grande interesse e bom desempenho dos alunos, atingindo satisfatório aprendizado em Geometria plana e espacial, pois construímos polígonos e alguns poliedros como o cubo, o prisma triangular reto e a pirâmide de base quadrada, sempre evidenciando as propriedades geométricas aplicadas nas construções.

Esses fatores serviram de inspiração para desenvolver esse trabalho e espero que ele seja visto com entusiasmo e também estimule alunos e professores para que a Geometria ganhe mais um aliado que venha despertar um espírito motivador, agradável e elegante de aprender seus conceitos e aplicações no dia a dia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília, DF, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília, DF, 1999.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FILHO, Joaquim Borges de S.; BRITO, Kleisy Laiana Vieira de. O aprendizado da geometria contextualizada no ensino médio. 2006. 87f. Monografia (Especialização em Educação Matemática – Faculdades Integradas IESGO, Formosa – GO, 2006.

GIOVANNI, José Ruy; FERNANDES, Tereza Marangoni; OGASSAWARA, Elenice Lumico. Desenho Geométrico. Editora FTD, São Paulo, 1996.

LEITE, Paulo Ferreira. Construções Geométricas: Variações sobre um Tema Clássico - Palestra apresentada em 16/10/2009 no IMECC/UNICAMP em homenagem aos oitenta anos do Prof. Elon Lages Lima.

LIMA, E. L. Exame de textos: análise de livros de Matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LIMA, E. L. Matemática e ensino. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro, 1991.

MENDES, Iran Abreu. Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas de aprendizagem. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009 .

PARANÁ SEED. Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática. Curitiba: 2008.

PEREIRA, M. R. de O. A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino. 2001. 70f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 2001.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

SILVA, F. H. S. da SANTO, A. O. do E. Contextualização: uma questão de contexto. In: VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010.

STRUIK, Dirk J. História Concisa das Matemáticas. Tradução: João Cosme Santos Guerreiro. Gradiva publicações ltda., 1989.

WAGNER, Eduardo. Uma introdução às construções geométricas. Rio de Janeiro, 2009.