



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

Peterson Conceição Monte

**Proposta metodológica de utilização do método
intuitivo para a construção do gráfico das
funções afim, quadrática e exponencial**

Belém - PA

2020

Peterson Conceição Monte

**Proposta metodológica de utilização do método intuitivo
para a construção do gráfico das funções afim,
quadrática e exponencial**

Universidade Federal do Pará - UFPA

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

Belém - PA

2020

M772p Monte, Peterson Conceição
Proposta metodológica de utilização do método intuitivo para a
construção do gráfico das funções afim, quadrática e exponencial/
Peterson Conceição Monte. – 2020
96f. : il.

Orientador: Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará - UFPA
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional,
Belém - PA, 2020.

1. Educação Matemática. 2. Ensino de Gráfico de Funções. 3.
Método Intuitivo. 4. GeoGebra. I. Título

CDD 510.7081

PETERSON CONCEIÇÃO MONTE

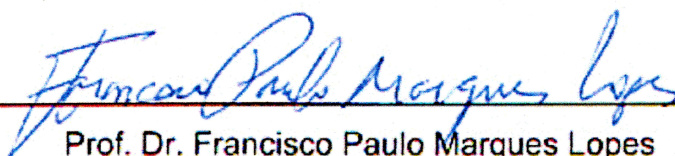
**PROPOSTA METODOLÓGICA DE UTILIZAÇÃO DO MÉTODO INTUITIVO
PARA A CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DAS FUNÇÕES AFIM,
QUADRÁTICA E EXPONENCIAL**

Dissertação apresentada ao Programa De Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Pará - UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes.

Data de aprovação: 23/10/2020

Conceito: APROVADO

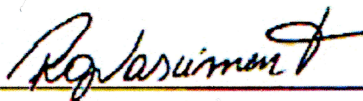
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
Professor Orientador - UFPA



Prof. Dr. Miguel Chaquiam
Professor Convidado - UEPA



Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento
Membro Interno - UFPA

Belém - PA
2020

*Aos meus filhos, Iris Silva Monte e Luiz Eduardo Monte Meretka e aos primeiros mestres
do amor e de matemática, que me deram vida e me ensinaram os primeiros passos
Marlene C. Monte e Paulo Roberto R. Monte*

Agradecimentos

Ao senhor nosso Deus, aos meus filhos Iris S. Monte e Luiz Eduardo Monte Meretka, por seu amor incondicional, e presença eterna no meu coração, aos Pais, Paulo Roberto Rodrigues Monte e Marlene Conceição Monte, que com toda paciência e amor me direcionaram ao caminho certo me corrigindo dos erros para que eu pudesse triunfar. Ao meu irmão Gabriel pela ajuda em tradução, revisão e apoio.

Ao colega de classe de Ensino Médio Fernando Colares que o destino veio cruzar novamente através de um colega de mestrado, e que pode facilitar o meu caminho pelo mestrado removendo alguns percalços pelo percusso, ao Henry Pipolos pela sua persistência em ser uma pessoa que tenta unir até mesmo pessoas totalmente divergentes e que foi fundamental a evolução não só minha, mas de tantos que impensavelmente podiam contar com sua ajuda, como eu que não tinha duvidas se ele me ajudaria.

A UFPA, o ICEM e a SBM, pela oportunidade de oferecer aos professores da educação básica, formação de qualidade para melhorar o ensino público de nosso país em especial de Belém do Pará.

À Dra. Rúbia, coordenadora de Matemática, por contribuir de forma imensurável para a minha formação acadêmica.

Ao Dr. Paulo Marques, que além de me orientar, me deu um enorme presente, que foi o tema desse projeto, o qual nem encontro palavras para agradecer.

*“Agora, pois, permanecem a fé, a esperança e o amor,
estes três, mas o maior destes é o amor.”
(Bíblia Sagrada, 1 Coríntios 13:13)*

Resumo

Ao verificar a forma como o ensino de gráficos é abordado no nível básico no Brasil, levando em consideração o que está apresentado em livros didáticos como [Bianchini \(2015\)](#), [Souza e Garcia \(2016\)](#), só para citar alguns, percebemos que em geral temos uma forma cristalizada de apresentação do conteúdo, que se repete em vários outros livros didáticos aprovados pelo Ministério da Educação (MEC). Comumente apresenta-se tabelas com valores convenientes e definem-se pontos através da função que darão uma noção do lugar geométrico, que seguirá sendo apresentado como o gráfico da função. Podemos também considerar que os valores apresentados em tais tabelas se não forem escolhidos apropriadamente poderão dar uma noção incorreta do gráfico. Deste modo, muitos professores e alunos afirmam que o ensino deste assunto não possui alta eficácia ([GRAVINA, 1990](#) apud [OLIVEIRA, 2007](#)) e que gera muitas dúvidas quanto à compreensão do próprio gráfico e suas propriedades. Não obstante, não vemos consonância entre esta forma, como é comumente apresentada nos livros didáticos em nosso país, e os documentos oficiais (PCNs e BNCC) que direcionam o ensino de matemática e, neste caso particular, o ensino de gráficos. Desta forma, temos aqui o intuito de apresentar uma proposta para o ensino de gráficos baseado no método intuitivo de [Calkins \(1886](#) apud [VALDEMARIN, 2004](#)) utilizando o aplicativo GeoGebra como apoio para as especificidades pertinentes ao método, que tem como característica principal fazer com que o aluno se aproprie dos conceitos e propriedades dos gráficos partindo da observação e manipulação direta destes para que haja a internalização dos conceitos, criando o aprendizado nas duas primeiras etapas do método: sensível e intelectual e das três etapas postas por [Buisson \(1897](#) apud [VALDEMARIN, 2004](#)), sendo a terceira suprimida neste trabalho por impossibilidade de aplicação da proposta em sala de aula devido à crise sanitária provocada pela pandemia de covid-19. Por meio dessa proposta vamos trazer um olhar sobre o ensino-aprendizado dos gráficos das funções afim, quadrática e exponencial que contrasta com os modelos de ensino que se vem aplicando tradicionalmente nas escolas para estes temas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Gráficos de Funções, Método Intuitivo, GeoGebra.

Abstract

When verifying the way graphics teaching is approached at the basic school in Brazil, taking into account what is presented in textbooks such as Bianchini (2015) and Souza and Garcia (2016), just to name a few, we realize that in general, there is a crystallized way of presenting the content, which is repeated in several other textbooks approved by the Ministry of Education (MEC). It commonly shows tables with values conveniently chosen and points defined through the function that will give a sense of the locus, which will be presented as the function graph. We can also consider that the values displayed in such tables, if not properly chosen, may give an incorrect notion of the graphic. In this way, many teachers and students affirm that the teaching of this subject is not highly effective (GRAVINA, 1990 apud OLIVEIRA, 2007) and that it generates many doubts about the understanding of the graphic itself and its properties. Nevertheless, we see no consonance between this form, as it is commonly presented in textbooks in our country, and official documents (PCNs and BNCC) that direct the teaching of mathematics and, in this particular case, the teaching of graphics. Thus, we intend to present in this issue a proposal for the teaching of graphics based on Calkins' (1886 cited VALDEMARIN, 2004) intuitive method using the application GeoGebra as a support to the relevant characteristics of the method, which is mainly characterized by causing the student to take the ownership of concepts and properties of the graphs, starting from the observation and direct manipulation of these so that there is the internalization of the conceptions, creating learning in the first two stages of the method: sensitive and intellectual and of the three stages put by Buisson (1897 apud VALDEMARIN, 2004), the third aspect is suppressed in this work due to the impossibility of applying the proposal in the classroom, due to the health crisis caused by the covid-19 pandemic. Through this proposal, we bring a focus on the teaching-learning of graphs of linear, quadratic and, exponential functions, contrasting with the teaching models that are traditionally being applied at schools.

Keywords: Mathematics Education, Teaching Function Charts, Intuitive Method, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – gráfico da função afim construído no exemplo	24
Figura 2 – gráfico da função afim construído no exemplo	24
Figura 3 – Diagrama sobre comparação de fração	29
Figura 4 – Home page do GeoGebra	38
Figura 5 – Tela inicial do aplicativo	38
Figura 6 – Campo de entrada do aplicativo	39
Figura 7 – Função com parâmetros definidos por controles deslizantes	39
Figura 8 – Gráfico da atividade 5.2.1	42
Figura 9 – Gráfico da atividade 5.2.1	43
Figura 10 – Gráfico da atividade 5.2.1	43
Figura 11 – Gráfico da atividade 5.2.1	43
Figura 12 – Gráfico da atividade 5.2.1	44
Figura 13 – Gráfico da atividade 5.2.1	44
Figura 14 – Gráfico da atividade 5.2.1	45
Figura 15 – Gráfico da atividade 5.2.1	45
Figura 16 – Gráfico da atividade 5.2.1	45
Figura 17 – Gráfico da atividade 5.2.1	46
Figura 18 – Gráfico da atividade 5.2.1	46
Figura 19 – Gráfico da atividade 5.2.1	47
Figura 20 – Gráfico da atividade 5.2.1	47
Figura 21 – Gráfico da atividade 5.2.1	48
Figura 22 – Gráfico da atividade 5.2.1	48
Figura 23 – Gráfico da atividade 5.2.1	48
Figura 24 – Gráfico da atividade 5.2.1	49
Figura 25 – Gráfico do problema	51
Figura 26 – Gráfico de referência	52
Figura 27 – Gráfico do exemplo	52
Figura 28 – Gráfico do exemplo	53
Figura 29 – Gráficos $f(x) = x + p$	53
Figura 30 – Gráfico do deslocamento da reta	54
Figura 31 – Gráfico do exemplo 6.2.3	54
Figura 32 – Gráfico de referência para o deslocamento $f(x) = -x + p$	54
Figura 33 – Gráfico do exemplo	55
Figura 34 – Exemplo para função afim	55
Figura 35 – Exemplo para função afim	56
Figura 36 – Exemplo para função afim	56

Figura 37 – Função afim $f(x) = rx + p$	56
Figura 38 – Função afim $f(x) = rx + p$	57
Figura 39 – figura do item do ENEM 2018	59
Figura 40 – figura do item do ENEM 2013	60
Figura 41 – Gráfico de referência da função quadrática referencial	61
Figura 42 – Gráficos de $f(x) = x^2 + p$ com $p > 0$	62
Figura 43 – Gráficos das parábolas com $p < 0$	62
Figura 44 – Gráfico de referência ao deslocamento horizontal da parábola	63
Figura 45 – Gráfico da parábola para $q > 0$ no deslocamento horizontal	63
Figura 46 – Gráfico do deslocamento horizontal sob a forma $f(x) = (x + q)^2$, com $q > 0$	64
Figura 47 – Gráfico da parábola com deslocamentos	64
Figura 48 – Gráfico da parábola nos deslocamentos vertical e horizontal simultâneos	65
Figura 49 – Gráfico referencial para concavidade	65
Figura 50 – Gráfico referencial para análise sobre a concavidade da parábola	66
Figura 51 – Gráficos para análise sobre a concavidade da parábola	66
Figura 52 – Gráfico da parábola referencial para $r < 0$	67
Figura 53 – Gráficos da parábola para $r < 0$	67
Figura 54 – Gráfico da parábola utilizado no exemplo 7.2.9	68
Figura 55 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9	68
Figura 56 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9	69
Figura 57 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9	69
Figura 58 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9	70
Figura 59 – Gráfico da parábola como exercício	70
Figura 60 – Gráfico da parábola e pontos notáveis	71
Figura 61 – Gráfico mostrando raízes	71
Figura 62 – Gráfico mostrando antes da primeira raiz	72
Figura 63 – Gráfico mostrando entre as raízes	72
Figura 64 – Gráfico mostrando segunda raiz	73
Figura 65 – O vértice	73
Figura 66 – O crescimento à esquerda do vértice	73
Figura 67 – O crescimento à direita do vértice	74
Figura 68 – O valor máximo	74
Figura 69 – Intercessão do eixo Oy	74
Figura 70 – Gráfico da parábola e pontos notáveis	75
Figura 71 – Gráfico mostrando raízes	75
Figura 72 – Gráfico mostrando antes da primeira raiz	75
Figura 73 – Gráfico mostrando entre as raízes	76
Figura 74 – Gráfico mostrando segunda raiz	76

Figura 75 – O vértice	76
Figura 76 – O crescimento à esquerda do vértice	77
Figura 77 – O crescimento à direita do vértice	77
Figura 78 – O valor máximo	77
Figura 79 – Intercessão do eixo Oy	78
Figura 80 – Gráfico da parábola e pontos notáveis	78
Figura 81 – Gráfico sem raízes reais	78
Figura 82 – O vértice	79
Figura 83 – O crescimento à esquerda do vértice	79
Figura 84 – O crescimento à direita do vértice	79
Figura 85 – O valor mínimo	80
Figura 86 – Intercessão do eixo Oy	80
Figura 87 – Meia vida do Ra 226	84
Figura 88 – Crescimento da população de bactérias	84
Figura 89 – Gráfico referencial para as exponenciais	85
Figura 90 – Gráficos exponenciais do deslocamento vertical	85
Figura 91 – Gráfico de exponencial de base $1/2$	86
Figura 92 – Gráficos das exponenciais com base $1/2$	86
Figura 93 – Gráfico de referência	87
Figura 94 – Exponenciais alterando o valor de q	87
Figura 95 – Gráfico de referência para o elemento multiplicativo	88
Figura 96 – Exponenciais alterando o valor de r	88
Figura 97 – Gráficos exponenciais multiplicadas por um número real negativo	88
Figura 98 – Gráfico exponencial de referência	89
Figura 99 – Gráficos para valores de $s > 0$	89
Figura 100 – Gráficos para valores de $s < 0$	90

Lista de tabelas

Tabela 1 – tabela de valores arbitrários	23
Tabela 2 – tabela de valores arbitrários	24

Lista de abreviaturas e siglas

MEC	Ministério da Educação.
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais.
BNCC	Base Nacional Comum Curricular.
GNLD	Guia Nacional do Livro Didático.
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.
PNDL	Programa Nacional do Livro Didático.
IPT	Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo.
SEB	Secretaria de Educação Básica.
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
NTIC	Novas Tecnologias da Informação e Comunicação.
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática.
UFPA	Universidade Federal do Pará.
TI	Tecnologias da Informação
TC	Tecnologias da Comunicação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	O ENSINO DE GRÁFICO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO NOS DIAS ATUAIS	19
2.1	O livro didático como recurso ao ensino de matemática	19
2.2	O que diz os PCNs?	20
2.3	O que diz a BNCC?	21
2.4	Como os gráficos de funções são ensinados atualmente na educação básica?	22
3	O MÉTODO INTUITIVO	26
3.1	Recorte histórico, elementos norteadores e fundamentos epistemológicos	26
3.2	A introdução do método intuitivo na educação básica brasileira	31
4	O USO DAS TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO	34
4.1	O uso de tecnologia na educação é uma tendência	34
4.2	Usando o GeoGebra como ferramenta	36
4.2.1	Alguns recursos do GeoGebra	38
5	O MODELO DE CALKINS APLICADO AO ENSINO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES: PROPOSTA METODOLÓGICA	40
5.1	Gráfico de uma função	40
5.2	Procedimentos didáticos para a construção de gráficos	41
6	UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM	50
6.1	Possibilidades de contextualização da função afim	50
6.2	Proposta metodológica para o ensino do gráfico de função afim	51
6.2.1	Rotação	51
6.2.2	Deslocamento	53
6.2.3	Os dois movimentos	55
7	UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA	58
7.1	Possibilidades de contextualização	58
7.2	Proposta metodológica para o ensino do gráfico de função quadrática	60

7.2.1	Deslocamento vertical do gráfico	61
7.2.2	Deslocamento horizontal da parábola	62
7.2.3	Abertura, fechamento: concavidade	65
7.2.4	Os pontos relevantes no gráfico da parábola	71
7.3	Relação com a equação reduzida da parábola	80
8	UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL	83
8.1	Possibilidades de contextualização	83
8.2	Proposta de construção de gráficos das funções exponenciais	84
8.2.1	Deslocamento vertical	85
8.2.2	Deslocamento horizontal	86
8.2.3	Elemento multiplicativo	87
8.2.4	Outro elemento multiplicativo	89
9	CONCLUSÃO	91
	REFERÊNCIAS	93

1 Introdução

No estudo de uma função a construção do gráfico que a representa aparece como elemento fundamental para sua perfeita caracterização e ao mesmo tempo trás inúmeras possibilidades de aplicação na resolução de problemas em várias ciências e na própria matemática. A partir do gráfico é possível definir de que tipo é a função, mesmo que não se tenha, de forma explícita, sua lei de formação. Isso acontece porque o gráfico guarda todos pontos do plano que definem a própria função. Além disso, a partir dele podemos adquirir informações gerais sobre o comportamento da função, domínio, imagem, intervalos de crescimento e de decrescimento, valores máximos ou mínimos etc.

No modelo educacional proposto nas últimas décadas, o ensino e a construção de gráfico de funções elementares dá-se pela utilização de tabelas numéricas, onde atribui-se valores reais arbitrários para a variável independente e calcula-se os valores correspondentes às imagens desses pontos pela função dada. Desse procedimento, obtém-se pares ordenados que, de maneira completamente conveniente, dão forma ao lugar geométrico que representa o gráfico da função.

Essa é a abordagem que tem sido adotada nos livros didáticos e a qual temos empregado em nossa prática docente enquanto professor de matemática do ensino fundamental e médio. Assim com eu, outros colegas utilizam essa mesma abordagem seguindo o modelo pré-estabelecido nos livros didáticos, dando margem às seguintes reflexões:

- A construção de uma tabela para o esboço do gráfico de uma função demanda muito tempo, isso não inviabiliza a proposição de um número maior de problemas de gráfico tais que estes ocupem posições diferentes no plano, modelem problemas reais e ofereçam um número maior de possibilidades de aplicações e generalizações?
- O fato do professor, na maioria das vezes, utilizar somente números inteiros para a construção de sua tabela, não cria, para o estudante, a ideia de que os números inteiros são suficiente para a construção do gráfico de funções reais, omitindo a propriedade da continuidade dos reais?
- Essa prática, é capaz de levar o estudante à completa compreensão das características e propriedades do gráfico, sua relação enquanto elemento definidor de uma função real?

Essas reflexões justificam plenamente nossa busca por um método de ensino de gráfico que responda eficazmente às inquietações suscitadas acima e ao mesmo tempo sirva de ponto de partida para responder ao seguinte questionamento: É possível estruturar

uma estratégia de ensino de gráfico de função que não parta da construção de uma tabela numérica?

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo didático para o ensino de gráfico de funções que não necessite a priori da utilização de uma tabela numérica. Para isso, adotamos como referência metodológica o Método de Ensino Intuitivo o qual, grosso modo, parte da ideia de colocar o estudante em contato físico com o objeto em estudo para que, a partir de sua observação, ele possa compreender suas características e propriedades para depois fazer aplicações e generalizações, aqui fazendo uma pequena adaptação neste contato que será de forma virtual.

Nossa proposta partirá da apresentação de alguns modelos de problemas, que envolvem a análise de gráfico, e a partir destes estruturamos uma sequência de procedimentos didáticos visando por o estudante em contato visual com os elementos e características do gráfico. Esse é o primeiro passo para por em prática a construção dos elementos norteadores do Método de Ensino Intuitivo. Por essa metodologia, o estudante, inicialmente, deve manipular e observar fisicamente seu objeto de estudo para que a partir dessa observação e de sua própria maneira de pensar ele o compreenda.

Essa prática, por si só, se mostra promissora quanto à sua eficácia do ponto de vista didático, pois, por esse modelo, o estudante é levado a construir o seu conhecimento a partir de sua vivência pessoal, isto é, o estudante é levado a fazer uso dos seus próprios saberes para perceber e compreender as características mais elementares do objeto. Com isso, ele é colocado na condição de agente fundamental do seu próprio conhecimento, coadunando com orientações dos textos oficiais (PCN's e BNCC), e que mediante às orientações e direcionamentos do professor tome para si as propriedades mais simples de gráfico e, posteriormente, chegue às mais complexas.

Em resposta às inquietações oriundas da utilização de tabelas numéricas para a construção de gráfico de funções a qual se revela uma prática docente inteiramente norteada pelos modelos pré-estabelecidos nos livros didáticos, adotaremos como hipótese fundamental de nossa pesquisa, a afirmativa que o modelo “tradicional” (com o uso de tabelas numéricas) de ensino de gráfico de funções talvez não atenda às orientações dos documentos norteadores da educação em nosso país (PCN's e BNCC) ao mesmo tempo que não se mostra eficaz quanto ao objetivo a ser atingido ao se ensinar o gráfico e suas aplicações. Isso justifica nossa busca por uma outra forma de fazer o ensino de gráfico.

Além de apoiar metodologicamente nosso modelo didático nos elementos norteadores do Método de Ensino Intuitivo, proposto no manual de Alisson Calkins, apontamos alguns elementos da Tecnologia da Informação (T. I.) como recursos tecnológicos capazes de contribuir com nossa proposta e, mais especificamente, contamos com o auxílio do aplicativo GeoGebra para fazer a aplicação do modelo didático estudado no ensino do gráfico das funções; Afim, Quadrática e Exponencial. Em cada função, o gráfico será

obtido intuitivamente a partir de transformação de um modelo geométrico padrão que se deslocará e ocupará posições diferentes no plano conforme se queira manipular a função.

Para estruturar nosso trabalho, adotamos a seguinte estratégia: iniciamos apresentando um breve apanhado de como o ensino do gráfico de funções é apresentado nos dias atuais, seguindo as análises apresentadas por pensadores e pesquisadores da educação, artigos científicos pertinentes ao tema e as orientações dos PCNs e BNCC. No segundo capítulo, apresentaremos um recorte histórico, os elementos norteadores e os fundamentos epistemológicos do Método Intuitivo. No terceiro, mostramos como o uso de tecnologias pode contribuir para a melhoria o aprendizado nesse tema. O capítulo 4, trás alguns conceitos matemáticos que consideramos relevantes ao tema e a proposta de procedimentos didáticos para o ensino de gráfico baseado no método intuitivo. Por fim, os capítulos seguintes serão destinados às aplicações do modelo aqui proposto para o ensino do gráfico das funções: afim, quadrática e exponencial.

2 O ensino de gráfico de funções no ensino médio brasileiro nos dias atuais

O livro didático pode contribuir significativamente como recurso ao ensino da matemática, a seguir menciona-se que o papel que desempenha este recurso e de que forma o mesmo pode contribuir ou cristalizar o ensino da matemática, conseqüentemente o ensino de gráficos de funções no Brasil, tornando-o obsoleto ou pelo menos aquém das transformações de nossa sociedade, embora, como veremos na seção seguinte, que considera-se o seu uso sem caráter prescritivo. Não obstante, como este recurso traça o modo de ensino do gráfico de funções atualmente faz com que este mesmo modo seja replicado e o mais comumente aplicado ao ensino no território brasileiro e mostraremos porque há problemas para este modelo de aplicação de ensino de gráfico para funções e que tentamos corrigir com nossa proposta.

2.1 O livro didático como recurso ao ensino de matemática

Devemos considerar inicialmente, ao falar sobre o livro didático, que ele deve ser usado como um recurso e não deve ser o único. Como qualquer recurso, não deve excluir o uso de outros materiais que venham a contribuir com o processo de aprendizagem. Nesse sentido o PCN em 1997 traz em sua orientação:

(...) é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1998, P.67)

No que se refere à avaliação do livro didático Rosa, Ribas, Barazuti concordam com aquilo que está listado no PCN ao apontar que, dentre vários fatores listados pelos autores, a variedade de recursos pedagógicos oferece aos alunos uma vasta fonte de informações. Bitencourt (2008 apud MARIM; SOUZA, 2015) aponta o livro didático como

um material fundamental usado na preparação das aulas tanto para construir o planejamento diário, semanal, mensal e do ano letivo quanto na sistematização de conteúdos escolares, podendo também servir como referencial na elaboração de exercícios e questionários.

Entretanto reconhecem que não há um caráter prescritivo no seu uso, sendo ele um dos vários recursos didático-pedagógicos que podem e devem ser usados pelos professores.

A análise e escolha dos livros didáticos é feita pelo MEC através do PNLD e de acordo com Prado (2014, p. 49) ocorre da seguinte forma:

Os critérios para inscrições das obras são especificados em um edital. Os títulos são inscritos pelas editoras e avaliados pelo MEC. Esse processo consiste em uma análise ampla e criteriosa dos aspectos didático-pedagógicos e metodológicos das obras.

Para verificar se as obras inscritas se enquadram nas exigências, uma triagem é realizada pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. Esses especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos. Esse guia é disponibilizado às escolas para que os professores possam fazer suas análises e escolher a coleção que melhor se adequar a proposta pedagógica do colégio.

Deve-se salientar, no entanto, que a seleção dos materiais deve ser feita levando-se em conta a orientação dos PCNs sobre o ensino da matemática, que prioriza o ensino através da solução de problemas, que levaria o aluno a desenvolver uma competência analítica e facilitaria a aquisição do conteúdo. A seção seguinte tem por objetivo aprofundar esse assunto ao abordar quais as orientações contidas nos PCNs em relação ao ensino da matemática.

2.2 O que diz os PCNs?

Com relação ao ensino da matemática os PCNs, sob o tópico: recurso à resolução de problemas, afirmam o seguinte:

Ao colocar o foco na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que poderia ser resumida nos seguintes princípios:

- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Como pode ser observado o recurso à resolução de problemas, não é a mera aplicação mecânica de regras e fórmulas previamente ensinadas ao aluno, onde de posse das fórmulas

o papel do aluno seria meramente de identificar os valores e executar os cálculos necessários, mas sim de outra forma, em que se apresenta o problema como recurso no qual o aluno pode encontrar, através de sua interpretação os caminhos ou caminhos que levarão às possíveis soluções do problema e que darão corpo aos conceitos que se buscam desenvolver dentro do seu aprendizado no assunto abordado, é nesse sentido que os PCNs (BRASIL, 1997) explanam a aplicação deste recurso, bem como o caráter interdisciplinar do ensino de funções:

O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Como pode ser observado, o ensino das funções deve estar alinhado aos mesmos princípios listados nos PCNs com relação ao ensino da matemática como um todo, tendo em vista o seu caráter integrador. É preciso que o aluno seja capaz de fazer as conexões citadas anteriormente, bem como entender de que forma o conceito de funções se alinha com as outras áreas do conhecimento, desenvolvendo, a partir disso uma competência mais investigativa e interpretativa da matemática. No que se refere à aplicação do recurso à resolução de problemas, a própria BNCC (BRASIL, 1996) denuncia que os problemas como recurso de aprendizado vêm sendo utilizados de maneira diversa à proposta, o que será abordado na seção seguinte.

2.3 O que diz a BNCC?

Em consonância com o que está registrado nos PCNs, a BNCC afirma que, referente às habilidades necessárias para que os alunos do ensino médio continuem desenvolvendo o letramento matemático iniciado no ensino fundamental, sejam desenvolvidas de modo que os estudantes sejam capazes de realizar “processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas” (BRASIL, 1996). Para tanto é necessário que os alunos desenvolvam certas competências relacionadas ao raciocínio, representação,

comunicação e argumentação, essas competências são definidas no mesmo texto como “competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio” as quais apresentamos a seguir:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Seguindo a forma que a abordagem da matemática, segundo a BNCC (BRASIL, 1996) orienta, verificamos que o ensino aplicado aos alunos deve fomentar a curiosidade epistemológica que, na evolução de suas conjecturas, levará a caracterização dos conceitos matemáticos que se tornarão, na culminância do processo de ensino, o caráter formal dos fundamentos matemáticos. Não obstante, a abordagem deve ser feita sempre em torno da realidade para o aluno não tenha a falsa noção de que a matemática, ou parte dela, não tem nada a ver com o mundo que nos cerca, mais sim a interpretação de que a matemática tem estreita ligação com os fenômenos naturais, e que inclusive a partir desses fenômenos e da observação desses, parte dela começou a ser pensada e construída, como por exemplo: o conceito de número e o processo de contagem (EVES, 2004, p. 25).

2.4 Como os gráficos de funções são ensinados atualmente na educação básica?

No âmbito do que já foi mencionado sobre a BNCC e os PCNs o ensino de gráficos é um assunto de extrema relevância dentro da matemática por trazer uma forma eficaz de leitura e interpretação de fenômenos compreendidos de forma matemática que segundo os estudos de MEVARECH e KRAMARSKY (1997 apud GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI,) e LEINHARDT, ZASLAVSKY e STEIN (1990 apud GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI,) são recursos importantes para a resolução de problemas do cotidiano.

Baseando-se no que consta nos livros didáticos aprovados no PNLD e considerando que o professor usa o livro de forma adequada seguindo as orientações do mesmo, e ainda tomando como ponto de partida o que dizem os PCN, a BNCC e o pressuposto, de que os professores reconhecem a importância do livro didático como é colocado por Houaiss (2001 apud ALVES, 2004) como “guia essencial para viabilizar o ensino e a aprendizagem”, espera-se que a prática pedagógica seja feita tal qual é orientada, de modo a que o ensino das funções seja realizado de forma que o aluno desenvolva as competências que permeiam tal assunto e desenvolva sua análise críticas também através da resolução de problemas.

Porquanto ao analisar certas obras, nota-se que existe uma discrepância entre aquilo que é estabelecido nos PCNs e na BNCC e aquilo que de fato é apresentado no livros didáticos, que pode ser observado na prática pedagógica, conforme é apresentado no exemplo abaixo (Tabela 1), extraído do livro **#Contato Matemática** (SOUZA; GARCIA, 2016) aonde o ensino do gráfico da função afim exemplifica a construção do esboço do gráfico da função $g(x) = x + 1$ através de uma tabela (Tabela 1) onde são produzidos pontos com valores pré-estabelecidos. Pode-se observar, portanto, que no modelo educacional proposto, o ensino e a construção de gráficos de funções elementares dá-se pela utilização de tabelas numéricas, onde a partir da lei de formação da função e atribui-se valores reais arbitrários para a variável independente e calcula-se os valores correspondentes às imagens desses pontos pela função dada. Desse procedimento, obtemos pares ordenados que, de maneira completamente intuitiva, darão forma aos lugares geométricos que representam o gráfico da função (Figura 1).

Tabela 1 – tabela de valores arbitrários

x	$g(x) = x + 1$	(x, y)
-2	$g(-2) = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$g(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$g(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$g(2) = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$

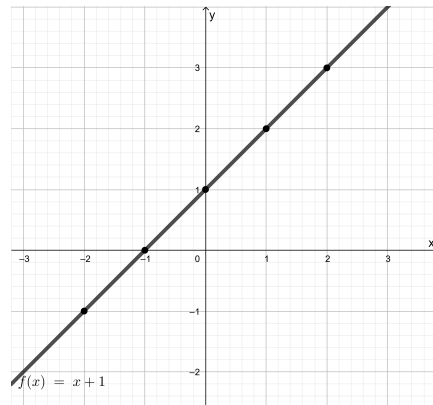
Fonte: (SOUZA; GARCIA, 2016)

A tabela apresentada (Tabela 1) ilustra bem como o ensino do gráfico das funções elementares está sendo ensinado na educação básica, mostrando, assim, que a estrutura básica da colocação dos conceitos é, em geral, a mesma.

No livro didático **Matemática e suas Tecnologias: ensino médio** (ALVES, 2010) usa como exemplo a função $f(x) = 2x - 1$ por caráter introdutório ao assunto ao que leva à construção do gráfico (Figura 2), o que sustenta a ideia de que o uso de tabelas vêm sendo o recurso mais utilizado para o ensino de gráficos de funções.

Podemos perceber também que os valores geralmente utilizados não estão fora do conjunto dos números inteiros, e por isso poderiam trazer a falsa percepção de que o

Figura 1 – gráfico da função afim construído no exemplo



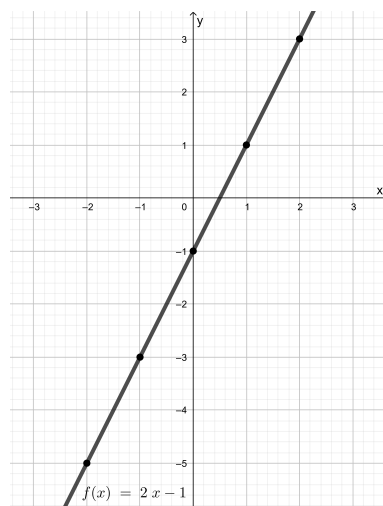
Fonte: (SOUZA; GARCIA, 2016)

Tabela 2 – tabela de valores arbitrários

x	$f(x) = 2x - 1$	(x, y)
-2	$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$	$(-2, -5)$
-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 2 \cdot (0) - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$f(1) = 2 \cdot (1) - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2 \cdot (2) - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$f(3) = 2 \cdot (3) - 1 = 5$	$(3, 5)$

Fonte: (ALVES, 2010)

Figura 2 – gráfico da função afim construído no exemplo



Fonte: (ALVES, 2010)

conjunto trabalhado neste caso seria o conjunto dos inteiros.

É comum encontrarmos nos livros didáticos de matemática exemplos como o supracitado no se refere à construção dos gráficos de funções, o que foi muito bem salientado por Gravina (1990 apud OLIVEIRA, 2007, p. 16), quando acerca deste assunto,

constata:

(...) o quanto os alunos se veem presos ao uso de tabelas na construção de gráficos de funções, fazendo com que se perca a ideia mais geral sobre o comportamento da função. Apresenta-nos [também] a possibilidade de podermos com um raciocínio simples obter informações sobre os gráficos e formas das curvas, em que a tabela entra como um dos recursos mas não o único.

O que nos revela, ademais, que há uma possibilidade de que o uso das tabelas pode gerar posteriores dificuldades de interpretação dos fenômenos associados ao comportamento das funções, e como [Oliveira \(2007\)](#) afirma que a autora encontra essa dificuldade entre os calouros da UFRGS, nos faz deduzir que essa forma de construir gráficos de funções se apresenta como reflexo do ensino anterior à graduação, ou seja, no ensino básico.

3 O método intuitivo

Neste capítulo, apresentaremos um recorte histórico do método intuitivo, enfatizando seus princípios norteadores e seus fundamentos epistemológicos, baseado essencialmente no livro: *Estudando as lições de coisas: análise dos fundamentos filosóficos do método intuitivo*, de Vera Teresa Valdemarin, 2004 e no manual: *Primeiras Lições de Coisas* de Norman Allisson Calkins, Ministério da Educação e Saúde, (Volume XIII, tomo I das Obras completas de Rui Barbosa). 1886/1950.

3.1 Recorte histórico, elementos norteadores e fundamentos epistemológicos

O MÉTODO INTUITIVO é um método de ensino desenvolvido na Alemanha, na segunda metade do século XIX, que propõe a construção de conceitos abstratos a partir da observação de objetos concretos, de acontecimentos fáticos, de fenômenos físicos, de imagens reais, gravuras, tabelas, gráficos etc. O método se funda na ideia de possibilitar que o(a) estudante, inicialmente, se aproprie de conhecimentos simples e, a partir deles, construa os mais complexos. Segundo Ferdinand Buisson (1897 apud VALDEMARIN, 2004, p. 9), educador francês, considerado um dos maiores intelectuais da Europa, naquela época, essa construção se dá pela valorização da intuição como elemento essencial do conhecimento

Ainda, nas concepções de Buisson (1897 apud VALDEMARIN, 2004), o método intuitivo estrutura-se, respectivamente, em três etapas de desenvolvimento: a intuição sensível, a intuição intelectual e a intuição moral. A intuição sensível, consiste em ensinar [o estudante] a observar: ver, sentir, tocar, distinguir, medir, comparar, nomear, para depois estabelecer conceitos. A intuição intelectual, consiste no desenvolvimento da inteligência por meio do raciocínio, da abstração e reflexão, ultrapassando a intuição sensível. A intuição moral ocupa o terceiro grau no desenvolvimento do ensino intuitivo e consiste em educar [o estudante] quanto aos aspectos morais e sociais.

Esse método surgiu em meio à grande necessidade de um método de ensino mais eficaz às camadas populares da sociedade europeia, da segunda metade do século XIX, devido ao processo de industrialização que se estabelecia e à necessidade de mão-de-obra mais qualificada. Logo, o método se difundiu por grande parte da Europa e da América, com os preceitos da chamada pedagogia moderna, preconizados por Pestalozzi, Rousseau, Bacon, Locke entre outros, em contraposição ao chamado ensino escolástico ou tradicional. (VALDEMARIN, 2004)

Segundo os estudiosos em educação da época, a escola não conseguia responder às necessidades emergentes da grande transformação social e econômica daquele momento. Isso colocou a educação tradicional no centro das discussões sobre o desenvolvimento econômico.

As críticas à escola vão além do aspecto metodológico. Sua ineficiência é reafirmada imputando-lhe também uma defasagem em relação ao desenvolvimento econômico, que explicaria, até mesmo, o alto nível de desemprego e os baixos salários então existentes, uma vez que o trabalho industrial demanda indivíduos letrados e capazes de raciocinar rápido e criativamente. (VALDEMARIN, 2004, p. 103).

Devido ao descontentamento generalizado com o ensino escolar da época, surgiu um grande movimento por toda a Europa e parte da América pedindo a renovação pedagógica da escola, através de sucessivas conferências e exposições universais, organizadas para a difusão de práticas pedagógicas renovadas, seus materiais e suas aplicações: Londres (1862), Paris (1867), Viena (1873), Filadélfia (1876) (VALDEMARIN, 2004, p. 104).

Essas exposições deram origem ao relatório de Ferdinand Buisson, apresentado ao governo francês, após a Exposição Internacional de Filadélfia (1876), o qual apresenta uma coleção das chamadas lições de coisas, como proposição de um método de ensino inovador frente ao velho livro de textos para serem memorizados. Nesse relatório, ele analisa vários manuais didáticos destinados a orientar o uso de novos materiais na prática pedagógica e que adotam o método de ensino intuitivo como norteador dos procedimentos didáticos a serem utilizados pelos professores em suas aulas.

Entre os manuais apresentados, destacamos o de Fanny Delon e Michel Delon (DELON; DELON, 1913 apud VALDEMARIN, 2004, p. 106) . Nele, os autores apresentam um programa de ensino baseado nas formulações de Pestalozzi e Fröbel, propondo exercícios que utilizam materiais como bolas, esferas, cubos, prismas, cilindros, bastões para o ensino dos numerais e das operações aritméticas, tábuas para a representação das linhas, aros e círculos em atividades que englobam trançado, tecelagem, dobradura, recorte, costura, desenho, pintura etc. Esse manual apresenta também modelagem e variadas técnicas de desenho tais como: sobre papel pontilhado, em três dimensões, em cores, reprodução da natureza, interpretação das formas a partir de modelos e procedimentos de demonstração concreta.

Segundo esses autores, o primeiro meio de aquisição das ideias é a observação, “ela nos conduz ao conhecimento dos fatos, o raciocínio os interpreta, nos faz perceber seu encadeamento, suas causas, suas relações e nos põe em condições de extrair suas consequências práticas” (DELON; DELON, 1913 apud VALDEMARIN, 2004, p. 4) . A observação educa e aperfeiçoa os sentidos preparando no(a) estudante a base sobre a qual se constrói o conhecimento humano: perceber, analisar, abstrair, comparar, generalizar,

sintetizar. Segundo esse relatório, o método intuitivo é a ponte mais adequada para esse desenvolvimento (VALDEMARIN, 2004, p. 106).

Na concepção dos autores Delon e Delon (1913 apud VALDEMARIN, 2004, p. 107),

O método intuitivo corresponde ao método experimental em uso em níveis mais avançados de ensino, pois “a experimentação é um procedimento aperfeiçoado da observação”. O caminho a ser seguido é progredir “da percepção da ideia, do concreto ao abstrato, a inteligência por meio dos sentidos, ao julgamento por meio de provas”.

Dos procedimentos didáticos exemplificados em Delon e Delon (1913 apud VALDEMARIN, 2004), depreende-se que os autores propõem que a aplicação do método intuitivo deve ser pautada nas seguintes etapas: Observação do objeto didático, estudo de suas características e propriedades mais simples e compreensão da sua natureza e de fenômenos naturais como: movimento, posição no espaço, distanciamento, aproximações, variações etc. Por fim, o desenvolvimento das capacidades de comparação, transformação, generalização e sintetização.

... pode-se afirmar que o princípio fundamental sobre o qual o método intuitivo se assenta e do qual decorrem as atividades de ensino é a proposição de que a aprendizagem tem seu início nos sentidos, que operam sobre os dados do mundo para conhecê-lo e transformá-lo pelo trabalho e que a linguagem é a expressão desse conhecimento (VALDEMARIN, 2004, p. 116).

Outro manual didático que apresenta os fundamentos epistemológico do método de ensino intuitivo é o chamado Primeiras lições de coisas, de Norman Allison Calkins, educador Americano, cuja obra foi largamente traduzida no século XIX e que é um marco significativo da implantação do método de ensino intuitivo na educação brasileira (VALDEMARIN, 2004, p. 118)

Esse manual, trás os procedimentos didáticos que deveriam ser adotados pelo professor na instrução elementar, os quais baseiam-se num conjunto de atividades compostas por perguntas e respostas, na manipulação de objetos didáticos e na apresentação de material didático direcionado a cada conteúdo programado.

Nele, os procedimentos de ensino têm seu início na educação dos sentidos, visando prepará-los para observações mais cuidadosas do objeto didático apresentado. Acredita-se, que essas observações produziram ideias mais claras e distintas e que, essas ideias, acrescidas da imaginação e do raciocínio, levariam ao desenvolvimento da capacidade de julgamento e de discernimento, fazendo com que a aprendizagem evoluísse concomitante ao desenvolvimento físico e intelectual [do estudante] (VALDEMARIN, 2004, p. 119).

Segundo as ideias [Calkins \(1886 apud VALDEMARIN, 2004\)](#), o ensino é plenamente justificado pela intuição, pelo exercício reflexivo dos sentidos e pelo cultivo da capacidade de observação. Em seu manual,

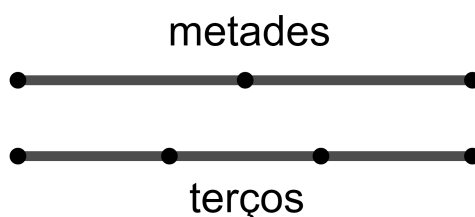
O autor afirma pretender dar primazia aos fatos, criando as condições para a observação e para a experiência, num processo ascendente de compreensão, que tem início nas operações dos sentidos. Os exercícios devem priorizar a observação, criando as condições para que sejam desenvolvidos o raciocínio, a linguagem e a escrita, sempre tendo os sentidos humanos como instrumentos postos a serviço da produção do conhecimento ([VALDEMARIN, 2004](#), p. 119).

Vejamos um exemplo em que [Calkins \(1886 apud VALDEMARIN, 2004\)](#) busca fazer com que os alunos adquiram a ideia intuitiva de comparação de duas frações utilizando, como objeto de observação, a representação gráfica das frações em segmentos de retas paralelas. Segundo o autor:

(...) O tamanho relativo das metades, ou meios, e terços, assim como dos terços e quartos, rapidamente se patenteia mediante duas linhas na pedra. Para este fim, traçará o mestre paralelas como as do diagrama seguinte, dividindo uma delas em duas partes iguais, meios, ou metades, e a outra em três partes iguais ou terços ([CALKINS, 1886 apud VALDEMARIN, 2004](#), p. 322, grifo do autor)

Isso pode ser visto na figura 3

Figura 3 – Diagrama sobre comparação de fração



Fonte: Manual Lições de Coisas (1886/1950, p. 322)

Ao observarem os segmentos, os alunos deveriam responder alguns questionamentos feitos pelo professor, como:

- Os dois segmentos são iguais ou diferentes? Iguais.
- Em quantas partes o primeiro segmento foi dividido? Duas.
- As duas partes são iguais? Sim.
- Cada parte do primeiro segmento corresponde a uma metade. Quantas metades tem esse segmento? Duas

- Em quantas partes o segundo segmento foi dividido? Três.
- As três partes são iguais? Sim.
- Cada parte do segundo segmento corresponde a um terço. Quantos terços tem esse segmento? Três
- A metade do primeiro segmento é maior ou menor que um terço do segundo segmento? Maior
- Pode-se concluir que, de maneira geral, a metade é maior que um terço? Sim
- Se juntarmos dois terços do segundo segmento fica maior ou menor um metade do primeiro segmento? Maior
- Pode-se concluir que, de maneira geral, dois terços é maior que uma metade? Sim.

Nesse exemplo, Calkins evoca os princípios da observação e percepção para induzir [o estudante] a discernir “[...] qual a maior fração, se a metade, se o terço, e obtenha-se que desenhem, cada uma na sua pedra, linhas semelhantes, dividindo-as em metades e terços” (CALKINS, 1886 apud VALDEMARIN, 2004, p. 322)

Essa mesma proposta também era sugerida para a comparação de um terço com um quarto e assim sucessivamente.

Vale destacar ainda, que de acordo com Calkins (1886 apud VALDEMARIN, 2004).

(...) No comparar essas frações, o fim a que se arma, não é ensinar a sua diferença exata, mas gravar primordialmente no espírito dos meninos a noção real de que a metade é maior do que o terço, o terço maior que o quarto, dois terços menores que três quartos. O que se quer, é que vejam que quanto maior for o número de frações de uma coisa, tanto menor é cada uma delas. (CALKINS, 1886 apud VALDEMARIN, 2004, p. 323)

Para esse autor, durante o processo de observação o professor deve despertar o interesse [do estudante] por meio de um conjunto de perguntas que propiciem a oportunidade para o exercício da percepção, da comparação e do julgamento e que não permita que a observação transforme-se em mera enumeração ou descrição de coisas e objetos.

Diferentemente do que propunham os autores Delon e Delon (1913 apud VALDEMARIN, 2004), as Primeiras lições de coisas de Calkins (1886 apud VALDEMARIN, 2004) abrangem a maior parte do conteúdo a ser ministrado no ensino elementar, acompanhadas dos passos metodológicos a serem observados pelo professor na atividade de ensino. Entretanto, os conteúdos não são apresentados necessariamente na ordem em que devem ser ensinados. Para se adequar aos princípios norteadores do método, as lições devem ser organizadas de acordo com a importância atribuída a cada um dos sentidos para a aquisição do conhecimento, iniciando-se pelos conteúdos mais adequados à percepção

visual e finalizando com aqueles que tem na experiência prática ou material seu suporte cognitivo (VALDEMARIN, 2004, p. 120).

Em seu manual, Calkins (CALKINS, 1886 apud VALDEMARIN, 2004) evidencia que o princípio filosófico sobre o qual o método de ensino intuitivo se assenta tem nos sentidos a origem do conhecimento e das ideias, intuídas a partir da experiência, base geral da reflexão. Para esse autor,

A escola deve elaborar experiências para que a percepção dos objetos particulares ali apresentados gere ideias que vão, posteriormente, ser transformadas em ideias gerais e universais, garantindo assim uma concepção de mundo coesa e articulada (VALDEMARIN, 2004, p. 123)

Esses são os princípios que norteiam, justificam e fundamentam o Método de Ensino Intuitivo como ferramenta que provocou uma verdadeira revolução na educação elementar da Europa e da América no final do século XIX e que permeou a educação básica brasileira por todo o século XX e perdura até os dias atuais.

3.2 A introdução do método intuitivo na educação básica brasileira

O método de ensino intuitivo foi introduzido na educação brasileira pelas mãos de Rui Barbosa, intelectual, culto, estudioso das questões educacionais no final do século XIX e responsável pela reformulação da educação básica brasileira naquele momento. Segundo o que acreditam Lourenço Filho (1966 apud VALDEMARIN, 2004) e Penteado (1984 apud VALDEMARIN, 2004) as motivações que levaram Rui Barbosa a acreditar no método intuitivo, como instrumento capaz de modernizar a educação brasileira, foi a indicação do manual de Norma Allisson Calkins, ao governo francês, feita por Ferdinand Buisson (1897 apud VALDEMARIN, 2004, p. 1)

Rui Barbosa, então, dedicou-se a estudar o manual de Calkins e a traduzi-lo para o português, o que ocorreu entre 16 de fevereiro e 8 de abril de 1881, com publicação somente em 1886. Dessa forma, o método intuitivo, apresentado no manual de Calkins, foi inserido no movimento que discutia inovações metodológicas do ensino básico brasileiro (VALDEMARIN, 2004, p. 2).

Devido à efervescência das discussões sobre a necessidade de renovação dos métodos de ensino praticados no Brasil e a criação de um sistema nacional de educação, o Brasil realiza no município do Rio de Janeiro, em 1883, sua primeira exposição pedagógica, cancelando por motivos políticos e financeiros o primeiro congresso de instrução, que deveria realizar-se simultaneamente (VALDEMARIN, 2004, p. 2).

Segundo textos oficiais, o decreto nº 7.247, de 19 de abril de 1897 do ministro Leôncio de Carvalho, estabelece que as “Lições de Coisas” ou

Método de Ensino Intuitivo devem ser introduzidas no ensino primário e, em seu substitutivo a este decreto, Rui Barbosa afirma que deste grau devem ser rigorosamente excluídos todos os sistemas mecânicos de ensino, todos os processos que apelem para a memória de palavras, empregando-se constantemente o método intuitivo, o ensino pelas coisas, de que será simples auxiliar o ensino pelos livros. (VALDEMARIN, 2004, p. 2)

A partir desse momento, numerosos estudos sobre “Lições de Coisas” foram produzidos no Brasil gerando muitas divergências sobre sua interpretação e, conseqüentemente, seus fundamentos epistemológicos. Valdemarin (2004, p. 3) diz que Leôncio de Carvalho (Ministro da Educação, em 1897) considera que as “Lições de Coisas” e “Método Intuitivo”, não se confundem, uma vez que o método de lições de coisa necessita ser aplicado aos exercícios da inteligência e aos atos do raciocínio para se configurar como método intuitivo. Por outro lado, para este autor, há limites no método intuitivo, pois nem tudo pode ser ensinado a partir de brincadeiras e observações, pois assim, os esforços da sociedade com a ordem e a disciplina escolar seriam suprimidos.

Já Rui Barbosa afirma que as lições de coisas devem ser o método e o processo geral a que devem ser subordinadas todas as disciplinas da educação elementar, pois, não faz nenhum sentido que [o estudante] vá para a sala de aula apenas para brincar, sem desenvolver sua capacidade cognitiva e intelectual para interagir com os fenômenos sociais. Segundo este autor, o desenvolvimento dessas capacidades são intrínsecas aos objetivos da aula. Dessa forma, “Lições de Coisas” é um método completo e se confunde com o “Método Intuitivo” (VALDEMARIN, 2004, p. 3 e 4)

Segundo Valdemarin (2004, p. 4), outros autores como Jules Paroz (1875) e Saffray (1908) apresentaram interpretações divergentes de “Lições de Coisas” enquanto método de ensino intuitivo. Essas diferenças de concepções sobre “Lições de Coisas” motivou uma análise mais cuidadosa do manual de Norma Calkins onde se verificou sua capacidade de criação de procedimentos de ensino consistentes, nos quais, variando o conteúdo a ser ensinado, permanecia inflexível a diretriz filosófica do método. Ainda, segundo essa autora,

...o método utilizado por Calkins em seus modelos de aulas, apresentado aos professores, obedecia a uma rigorosa seqüência de procedimentos que, partindo sempre de um objeto, ascendia à abstração, isto é ao conceito e ao princípio geral que, por sua vez, possibilitava a generalização para outros objetos da ideia particularmente adquirida (VALDEMARIN, 2004, p. 4)

Segundo observa Valdemarin (2004, p. 4), os fundamentos epistemológicos nos quais Calkins fundamenta suas lições de coisas preconizava que as ideias tinham origem nos sentidos humanos, a partir da observação, e que o raciocínio intelectual é o responsável pela progressão da percepção concreta à percepção abstrata. Esses fundamentos consolidaram as lições de coisas apresentado por Calkins como método de ensino a ser empregado em

todas as séries da educação básica brasileira, a partir do início do século XX e perduram até os dias atuais.

4 O uso das tecnologias em educação

As tecnologias são definidas por [Chaves \(1999\)](#) “como qualquer artefato, método ou técnica criado pelo homem para tornar seu trabalho mais leve, sua locomoção e sua comunicação mais fáceis, ou simplesmente sua vida mais satisfatória, agradável e divertida” assim podemos perceber que tecnologia não é um conceito novo de fato e aplica-se a um lápis, um papel, uma calculadora, um chapéu, um guarda-chuva etc. No entanto, é fácil perceber que nem todas as tecnologias existentes podem ser aplicadas à educação como próprio autor afirma.

Para um bom entendimento por parte do leitor, ao usar a palavra tecnologia consideraremos às que podem ser aplicadas em educação e principalmente às TICs e NTICs usadas como ferramentas computacionais e de informação, como os tablets, computadores, smartphones, quadros interativos, a Web, enfim, dispositivos e meios que vêm atualmente melhorando a comunicação e informação entre as partes interessadas nesse processo.

4.1 O uso de tecnologia na educação é uma tendência

Atualmente de tão acostumados com o uso de tecnologias fica até difícil de imaginar a vida sem os recursos tecnológicos que a humanidade dispõe. Os satélites em órbita, os celulares que se transformaram em smartphones, as televisões de led, as transmissões de dados em alta velocidade, enfim, hoje em dia fazemos uso das tecnologias para inúmeras aplicações, desde a leitura de um livro até os deslocamentos em viagens a longas distâncias. Apesar de todos os avanços em tecnológicos que estão acontecendo ao nosso redor, na educação as novas tecnologias ainda foram pouco inseridas e temos a necessidade de incorporá-las ao nosso contexto educacional conforme diz [Leite et al. \(2014, p. 13\)](#) “A presença inegável da tecnologia em nossa sociedade constitui a justificativa para que haja necessidade de sua presença na escola”, no mesmo sentido [Saldanha \(1978 apud LINHARES; DUARTE, 2019\)](#) nos revela a mesma inquietação de que já estamos “atrasados” até com relação à outras profissões no sentido de que essas práticas nem fazem parte da formação dos profissionais que atuarão na educação em sala de aula como professor. Mesmo que hajam desafios nesse processo devemos tentar superá-los. [Borba e Penteado \(2007 apud PETLA; ROLKOUSKI, 2008, p. 10\)](#) nos dizem que os alunos ficariam até mais preguiçosos ao usar as tecnologias em sala, porém há uma forte pressão da sociedade para que de coloque cada vez mais a disposição do ensino o que nos é tão comum ao nosso cotidiano, dessa forma, se faz necessário, então, que o modo como vamos ensinar em qualquer área do conhecimento, inclusive em matemática, não esteja em um desconfortável desalinhamento com o que socialmente encontramos em nossas relações.

Acerca do assunto, Richit e Kalinke (2015 apud LEMKE; SILVEIRA; SIPLE, 2016, p. 609) destacam que os resultados de pesquisas sobre o uso das novas tecnologias em Educação Matemática envolvendo professores e futuros professores, apontam para um consenso “sobre a importância da presença de recursos tecnológicos nos processos de ensinar e aprender matemática”.

Alguns conceitos se fazem necessários no meio deste processo de estudo sobre as possibilidades de aplicação das tecnologias, que como já dissemos possui um conceito muito amplo e que no entanto analisado mais profundamente para estudar certos fenômenos de forma específica, vamos separá-los em: TI (Tecnologias da informação) caracterizada pela digitalização de tecnologias de registro de conteúdo (tecnologia da informação, comunicações, telemática e interfaces); TC (Tecnologias da comunicação) constituídas principalmente por rádio, televisão e telefonia convencional, TICs (Tecnologias da informação e comunicação) que são a junção dos dois conceitos e que se apresentam como ferramentas teóricas e conceituais, suportes e canais que processam, armazenam, sintetizam, recuperam e apresentam informações das mais variadas formas; e as NTICs (Novas tecnologias de informação e comunicação) que diferem das TICs no momento em que revelam um avanço frenético segundo Santamaría (2010) e que são elencadas por Carvalho (2009) como alguns exemplos:

- Os computadores pessoais (PCs, personal computers), a impressão por impressoras domésticas, as câmeras de vídeo e foto para computador, ou webcams, a gravação doméstica de CDs e DVDs, os diversos suportes para guardar e portar dados como os disquetes (com os tamanhos mais variados), discos rígidos ou hds, cartões de memória, pendrives, zipdrives e assemelhados;
- A telefonia móvel (telemóveis ou telefones celulares);
- A TV por assinatura, a TV a cabo, a TV por antena parabólica;
- O correio eletrônico (e-mail);
- As listas de discussão (mailing lists);
- A internet, a world wide web (principal interface gráfica da internet);
- Os websites e home pages;
- Os quadros de discussão (message boards);
- O streaming (fluxo contínuo de áudio e vídeo via internet), o podcasting (transmissão sob demanda de áudio e vídeo via internet), a wikipedia, possível graças à Internet, à www e à invenção do wiki;
- As tecnologias digitais de captação e tratamento de imagens e sons a captura eletrônica ou digitalização de imagens (scanners), a fotografia digital, o vídeo digital, o cinema digital (da captação à exibição), o som digital, a TV digital e o rádio digital;
- As tecnologias de acesso remoto (sem fio ou wireless), o Wi-Fi e o Bluetooth.

Ainda segundo (CARVALHO, 2009), as NTICs surgiram durante a terceira revolução industrial na tentativa de agilizar e horizontalizar os meios de comunicação e difusão da informação e com isso modificando profundamente as formas de relação interpessoal que culminam nos moldes da nossa atual sociedade da informação que de certa forma

clamam para que este processo se repita em todas as áreas do conhecimento inclusive na educação pois consideramos que seja assim por reflexo natural destas transformações em nossa sociedade, neste sentido precisamos cada vez mais aproximar a prática escolar e as novas tecnologias, visando o uso que venha favorecer as relações de ensino, não esquecendo que o contato dos alunos com a tecnologia já existe através do manuseio de aplicativos de celulares que fazem parte de seu cotidiano, sendo, porém, necessário direcionar o foco para a educação, visando o máximo aproveitamento em seu aprendizado.

4.2 Usando o GeoGebra como ferramenta

O GeoGebra é software de acesso livre, multiplataforma criado por Markus Hohenwarter para o ensino e aprendizagem dinâmica de matemática através de um ambiente totalmente conectado onde é possível apresentar vários aspectos da álgebra e geometria (SAHA; AYUB; TARMIZI, 2010), funcionando como facilitador à aprendizagem. De acordo com os autores, pesquisas sobre a eficácia do uso do GeoGebra no ensino-aprendizagem de matemática ainda são limitadas, no entanto pesquisas em softwares similares apontam para o potencial que estes aplicativos têm para promover a aprendizagem centrada no aluno e aprendizagem ativa, deixando claro a sua capacidade de impactar o ensino da matemática. Dentre as vantagens do uso do GeoGebra e aplicativos similares, (SAHA; AYUB; TARMIZI, 2010) apontam que ele “pode melhorar a capacidade dos alunos de visualizar os elementos matemáticos”.

Neste sentido escolhemos o aplicativo GeoGebra que está disponível em aplicativos de smartphones (Android e IOS) e para computadores, pode ser baixado e instalado no computador (nos sistemas Windows MacOS X e Linux) ou simplesmente pode ser usado online. Pela facilidade ao seu acesso, por conveniência de ser um aplicativo o qual temos mais domínio de sua manipulação e a impressão de ser mais conhecido entre os colegas da área de atuação, também por outras vantagens como é reconhecida pelos próprios estudantes que já tiveram interações com o aplicativo “[...] Esses softwares também criam possibilidades de fazer conjecturas, experimentar, simular” Lemke, Silveira e Siple (2016 apud RICHIT; KALINKE, 2015). Os mesmos autores defendem que:

o uso de tecnologias nas práticas pedagógicas em matemática pode levar os estudantes a produzir conhecimentos que podem favorecer a compreensão e “envolvem aspectos como a visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, a elaboração de conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros.”

Essa percepção das vantagens de aprendizado para os alunos utilizando o GeoGebra como um propiciamento que aproxima e otimiza a compreensão da matemática por parte dos alunos, encontra suporte no feedback dos próprios em relação ao seu aprendizado, uma vez que

Na visão dos alunos, o GeoGebra torna a matemática tangível, dinâmica, interativa, divertida, acessível, disponível e torna a matemática mais fácil de se aprender. Os estudantes têm à disposição uma nova maneira estimulante de se aprender matemática que vai além do quadro e giz, proporcionando conexões entre geometria e álgebra. (LEMKE; SILVEIRA; SIPLE, 2016).

A facilidade de acesso também foi levada em conta na escolha, afinal existem mais de 470 mil materiais disponíveis online, dentre os quais é possível a sua utilização, adaptação ou como ideia para a criação de outros materiais, sendo por essas razões o aplicativo considerado uma tendência no ensino da matemática. (LEMKE; SILVEIRA; SIPLE, 2016)

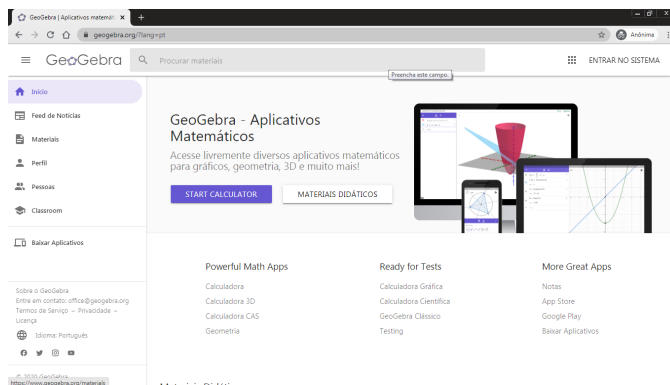
Ao que se pretende, no ensino dos gráficos de funções, será de grande importância e diríamos até fundamental a visualização dos gráficos e suas transformações na relação com os valores e aos tipos de função de forma imediata, como também a oferta de possibilidade de o aluno interagir e fazer suas conjecturas a partir não só da visualização, mas de seu próprio protagonismo diante da ferramenta.

Com os recursos tecnológicos disponíveis, diferente poderia ser o processo de aprendizagem da matemática a se instalar nas escolas – tanto na provocação das habilidades cognitivas dos alunos, quanto na integração de conteúdos que normalmente são estudados separadamente e desta forma o contexto da aprendizagem também poderia se aproximar daquele de natureza interdisciplinar. (GRAVINA; CONTIERO, 2011)

Nesse sentido é importante salientar que o protagonismo do aluno e a interdisciplinaridade caminham lado a lado uma vez que a partir das conjecturas que o aluno é capaz de fazer por meio da contextualização, ele será capaz de criar links que o permitirão enxergar as ciências como um todo e não mais como blocos separados e distintos.

Concordam os autores Gravina e Contiero (2011) e Lemke, Silveira e Siple (2016) que o GeoGebra é uma ferramenta adequada ao ensino da matemática pois oferece aos estudantes um imenso leque de recursos que tornarão, como se espera, o aprendizado dos conceitos matemáticos, e aqui vem ao caso particular do ensino do gráfico de funções, um encaminhamento mais suave e mais fácil como foi colocado pelos próprios alunos. Não obstante o recurso já é amplamente requerido e muito conhecido entre os profissionais de educação na área de matemática, como foi observado na pesquisa de Lemke, Silveira e Siple (2016) que objetivou quantificar a ocorrência de GeoGebra como palavra chave nos trabalhos de vários repositórios de instituições federais públicas, “Totalizando, assim, 308 teses e dissertações, sendo 9 teses e 299 dissertações, das quais 8 são de Mestrado Acadêmico e 291 de Mestrado Profissional, sendo 272 do PROFMAT.”

Figura 4 – Home page do GeoGebra



Fonte: Autor

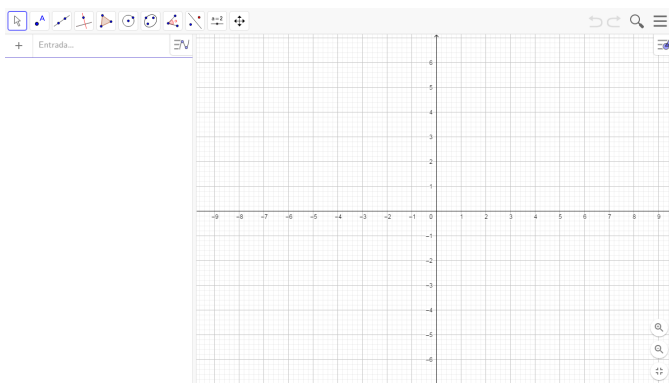
4.2.1 Alguns recursos do GeoGebra

Vamos fazer uma pequena abordagem para que se tenha o conhecimento mínimo que torne o seu uso possível dentro da nossa proposta.

O aplicativo GeoGebra pode ser encontrado no link: <https://www.geogebra.org/?lang=pt> que levará à um site onde pode-se baixar o aplicativo em português, ou usá-lo online e conferir modelos de trabalhos já produzidos no mundo todo, neste aplicativo. (Figura 4)

A tela inicial do nosso aplicativo nos mostra um campo de entrada e ao lado o plano de visualização dos gráficos. (Figura 5)

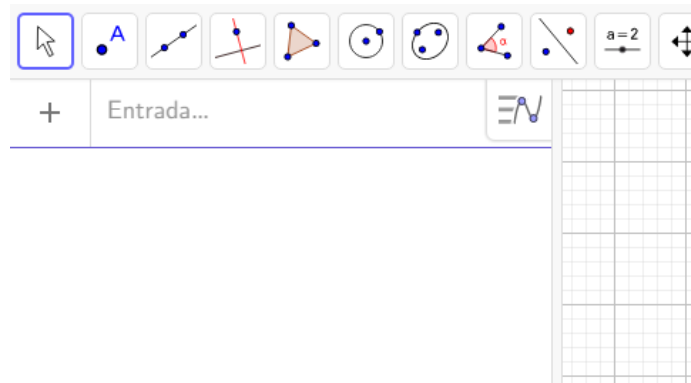
Figura 5 – Tela inicial do aplicativo



Fonte: Autor

No campo de entrada (Figura 6) podemos inserir diretamente as funções reais que queremos, visualizando imediatamente o gráfico formado ao lado ao inserir uma letra tipo a , b , c ... automaticamente o programa reconhece como um controle deslizante exceto as letras e (a constante de Euler), i (número imaginário), t (função de parâmetro t), x (função identidade $f(x) = x$), y e z (referências aos eixos e não produzem visualização ou comando imediato), ou se uma das letras já estiver nomeando um outro comando exemplo: se houver

Figura 6 – Campo de entrada do aplicativo



Fonte: Autor

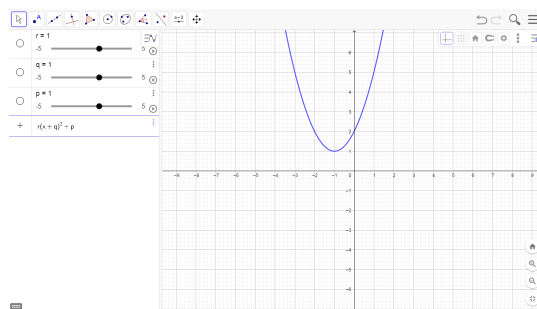
uma função real chamada f com sua sentença já definida o programa irá reconhecer a partir deste momento a letra f como uma menção à função definida como f .

O controle deslizante é utilizado dentro do aplicativo como um valor previamente definido como 1 movimentando-se de 0,5 em 0,5 para mais ou para menos até o valor mínimo de -5 e o valor máximo de 5 , oscilando quando clicamos no botão. Pode ser usado para visualizar o comportamento do gráfico de uma função quando trocamos o parâmetro.

Para inserirmos uma função no campo de entrada podemos escrever diretamente sua equação e o sistema reconhecerá automaticamente como uma função exemplo: ao inserirmos $x + 1$ o sistema reconhece e nomeia a função como $f(x) = x + 1$ ou uma função $g(x)$ e assim por diante conforme as letras que já foram utilizadas. Para inserir uma função como x^2 ou 3^x pode-se digitar x^2 ou 3^x .

Para qualquer das funções se precisarmos definir alguns parâmetros com os controles deslizantes recomenda-se que sejam definidos antes de definir as função em questão. Exemplo se quisermos definir a função $f(x) = r(x + q)^2 + p$ recomenda se digitar os parâmetros r , q e p com enter após cada um para que eles sejam definidos como controles deslizantes antes de definirmos a função. (Figura 7)

Figura 7 – Função com parâmetros definidos por controles deslizantes



Fonte: Autor

5 O modelo de Calkins aplicado ao ensino do gráfico de funções: proposta metodológica

5.1 Gráfico de uma função

Apenas para efeito didático, iniciaremos esta seção fazendo algumas definições (pouco formais) que julgamos serem relevantes para justificarmos alguns argumentos e afirmações que aparecerão no decorrer do trabalho.

Definição 5.1.1 (Função). Dados dois subconjuntos, não vazios, de números reais A e B , chamaremos de função f de A em B , indicamos por $f : A \rightarrow B$, a toda regra que permita associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Dizemos que y é a imagem de x pela função f e indicamos por $y = f(x)$.

Em geral, quando é possível estabelecer uma sentença explícita $y = f(x)$, que permita relacionar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, ela é chamada regra de formação da função $f : A \rightarrow B$ ou lei de formação de f .

A função $f : A \rightarrow B$ também pode ser representada como um conjunto de pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que $x \in A$ e $y = f(x) \in B$. Denota-se $f = \{(x, y) \in A \times B / x \in A \text{ e } y = f(x) \in B\}$.

Definição 5.1.2 (Domínio). Dada uma função $f : A \rightarrow B$ (Definição 5.1.1), ao conjunto de todos os elementos $x \in A$ chamaremos de domínio de f . Isto é, o domínio de f é o conjunto sobre o qual a função está definida. Indica-se por $D(f) = A$.

Definição 5.1.3 (Conjunto imagem). Dada uma função $f : A \rightarrow B$ (Definição 5.1.1), ao conjunto de todo elemento $y \in B$, tal $y = f(x)$ para algum $x \in A$, chamaremos de conjunto imagem de f . Indica-se por

$$Im(f) = \{y \in B / y = f(x) \text{ para } x \in A\} \quad (5.1)$$

Definição 5.1.4 (Gráfico). Dada uma função $f : A \rightarrow B$ (Definição 5.1.1), chamaremos de gráfico de f , indicamos por $G(f)$, ao lugar geométrico¹ dos pontos (x, y) , no plano, tais que, para todo $x \in A$, existe um único $y = f(x) \in B$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B / \forall x \in A \text{ e } y = f(x) \in B\} \quad (5.2)$$

¹ É o conjunto de todos os pontos de um subconjunto de um plano \mathcal{L} que contém todos os pontos que satisfazem uma propriedade \mathcal{P} (NETO, 2013). (a)

Observe que o conjunto dos pontos que formam o gráfico de f , coincide com o conjunto que define a própria função f , de onde segue imediatamente a unicidade do gráfico da função f , pois não poderão haver gráficos diferentes para uma mesma função. Assim, podemos concluir que a representação cartesiana do lugar geométrico que representa uma função não depende da maneira como ela é construída.

Nesta seção, apresentaremos alguns modelos de aulas para ensinar gráficos de função, para alunos da educação básica, sem especificar um ou outro método a priori. Enfatizamos que esta é a prática dominante em grande parte dos livros didáticos atuais, onde, em geral, apresenta-se a regra de formação de uma função e, em seguida, constrói-se uma tabela binária atribuindo-se valores genéricos, do domínio da função, na primeira fila da tabela e, em seguida, utiliza-se a regra de formação da função para encontrar as, respectivas, imagens desses valores. Dessa forma, completa-se a tabela com alguns pontos da função.

Após esse processo, plota-se os pontos da tabela no sistema cartesiano ortogonal² e, então ligando-se, “convenientemente”, esses pontos obtemos o lugar geométrico que representa a função. Isso pode ser facilmente verificado nas seguintes referências (IEZZI et al., 2016), (DANTE, 2012), (BIANCHINI, 2015), (JR.; CASTRUCCI, 2018), (ALVES, 2010), (SOUZA; GARCIA, 2016), (IEZZI; MURAKAMI, 2004) entre outros.

Nossa proposta é apresentar sequências de procedimentos didáticos para a construção de gráficos de funções, baseados no método intuitivo. A ideia é colocar o estudante em contato direto e natural com o gráfico de uma função para que o mesmo, a partir da observação, possa perceber seus elementos principais, identificar suas características e compreender suas propriedades.

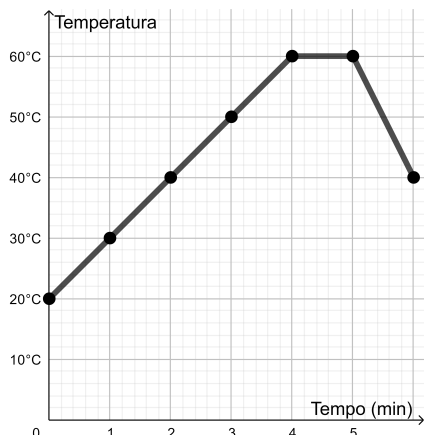
Será apresentado um conjunto de atividades que retratam problemas, conceitos, fenômenos do cotidiano ou mesmo problemas fictícios da realidade, visando que o estudante possa compreender o gráfico de uma função, a partir do manuseio dos seus elementos, do entendimento de suas características e da percepção de sua funcionalidade, como solução dos problemas apontados e como generalização a outros problemas e suas relações com o mundo.

5.2 Procedimentos didáticos para a construção de gráficos

Atividade 5.2.1. O gráfico (Figura 8) representa a relação entre tempo (t) e temperatura (T) de um líquido em aquecimento, cada ponto do gráfico está relacionado a um par de valores (t, T) , ou seja, o tempo de aquecimento e a temperatura naquele momento.

² Definição: consideremos os eixos x e y perpendiculares em 0, os quais determinam um plano α , o sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 65)

Figura 8 – Gráfico da atividade 5.2.1



Inicialmente o professor deverá apresentar o gráfico ao estudante informando que no eixo horizontal estão marcados os instantes de tempo e no eixo vertical estão os valores da temperatura em cada instante de tempo do líquido. Dizer que o gráfico representa o comportamento da temperatura em cada instante e mostrar que os pontos do gráfico são pares ordenados (tempo, temperatura).

Fonte: autor

Aplicando o modelo de Calkins ao ensino dos gráficos, podemos propor que, cada conceito como crescimento, decrescimento, taxa de variação seja posto sob a observação do aluno, fazendo com que ele desenvolva sua própria percepção de tais conceitos até que seja formalizado posteriormente dentro do processo. O professor poderá pedir que o estudante resolva as seguintes questões:

Procedimento 1. identifique no gráfico a temperatura correspondente a cada um dos instantes 1 min, 2 min, 3 min, 4 min, 5 min, 6 min. A ideia é fazer com que o estudante, a partir da observação, possa identificar pontos que pertençam ao gráfico.

- a) (1 min,)
- b) (2 min,)
- c) (3 min,)
- d) (4 min,)
- e) (5 min,)
- f) (6 min,)

Procedimento 2. Considere os intervalos de tempo: de 0 a 1 min; de 1 a 2 min; de 2 a 3 min e de 3 a 4 min, identifique as temperaturas no extremo inicial e no extremo final do intervalo.

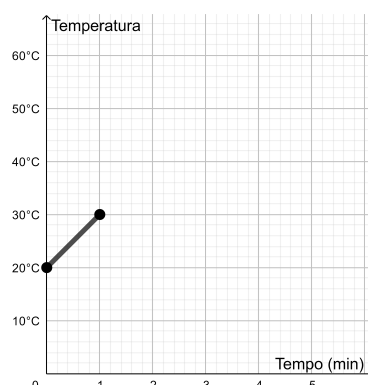
a) Ao observar o gráfico (Figura 9) o estudante perceberá que:

No intervalo de 0 a 1,

$$\begin{cases} T_0 = \\ T_1 = \end{cases}$$

Após identificar que $T_0 = 20^\circ C$ e $T_1 = 30^\circ C$, o professor poderá pedir a atenção do aluno para que compare os dois valores para que perceba se houve um aumento, podendo perguntar se houve um aumento ou diminuição na ordem em que foram apresentados.

Figura 9 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

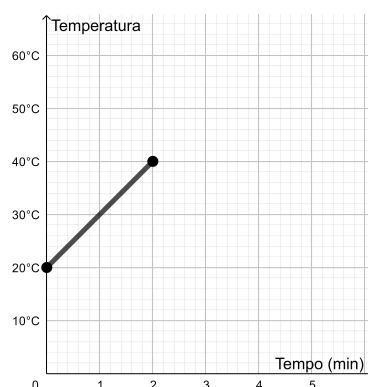
b) Ao observar o gráfico (Figura 10) o estudante perceberá que:

No intervalo de 1 a 2 minutos,

$$\begin{cases} T_1 = \\ T_2 = \end{cases}$$

Após o estudante identificar que $T_1 = 30^\circ C$ e $T_2 = 40^\circ C$ pode-se perguntar ao aluno se a temperatura aumentou ou diminuiu para que dispôr a percepção do aluno.

Figura 10 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

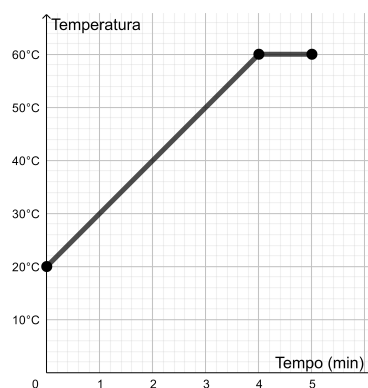
c) Ao observar o gráfico (Figura 11) o estudante perceberá que:

No intervalo de 4 a 5 minutos,

$$\begin{cases} T_4 = \\ T_5 = \end{cases}$$

Após o estudante identificar que $T_4 = 60^\circ C$ e $T_5 = 60^\circ C$ pode-se perguntar ao aluno se a temperatura aumentou ou diminuiu para que ele perceba que a temperatura se manteve.

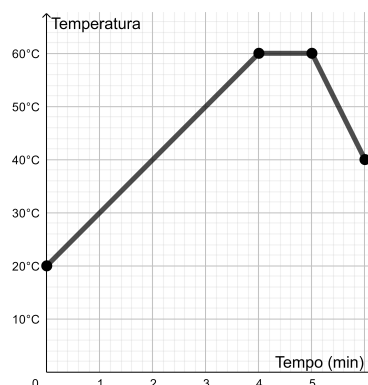
Figura 11 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

d) Ao observar o gráfico (Figura 12) o estudante perceberá que:

Figura 12 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

No intervalo de 5 a 6 minutos,

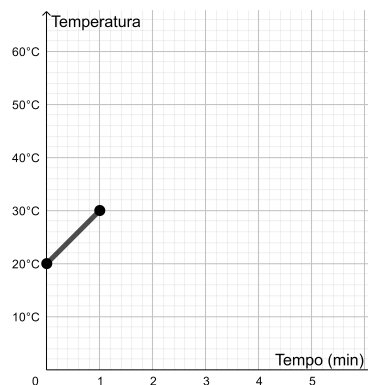
$$\begin{cases} T_5 = \\ T_6 = \end{cases}$$

Após o estudante identificar que $T_5 = 60^\circ C$ e $T_6 = 40^\circ C$ pode-se perguntar ao aluno se a temperatura aumentou ou diminuiu.

Procedimento 3. Considere que variação de temperatura em cada intercalo de tempo é dada pela diferença entre a temperatura no extremo final do intervalo e a temperatura no extremo inicial do intervalo e determine a variação de temperatura (ΔT) em cada intervalo de tempo, sendo $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}$

a) Ao observar o gráfico (Figura 13) o aluno perceberá que:

Figura 13 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

No intervalo de 0 a 1 minuto, temos $T_0 = 20^\circ C$ e $T_1 = 30^\circ C$,

$$\begin{cases} \Delta T = T_1 - T_0 \\ \Delta T = \end{cases}$$

Após o cálculo da variação da temperatura $\Delta T = 10^\circ C$, o professor poderá perguntar se obteve um resultado positivo ou negativo.

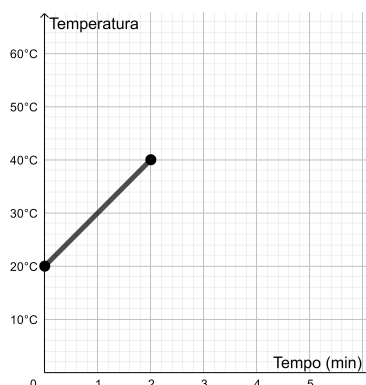
b) Ao observar o gráfico (Figura 14) o aluno perceberá que:

Figura 14 – Gráfico da atividade 5.2.1

No intervalo de 1 a 2 minutos, temos $T_1 = 30^{\circ}C$ e $T_2 = 40^{\circ}C$,

$$\begin{cases} \Delta T = T_2 - T_1 \\ \Delta T = \end{cases}$$

Após o cálculo da variação da temperatura $\Delta T = 10^{\circ}C$, o professor poderá perguntar se obteve um resultado positivo ou negativo.



Fonte: Autor

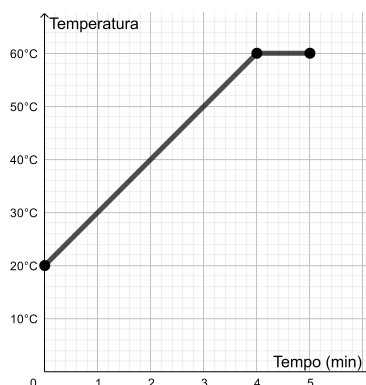
c) Ao observar o gráfico (Figura 15) o aluno perceberá que:

Figura 15 – Gráfico da atividade 5.2.1

No intervalo de 4 a 5 minutos, temos $T_4 = 60^{\circ}C$ e $T_5 = 60^{\circ}C$,

$$\begin{cases} \Delta T = T_5 - T_4 \\ \Delta T = \end{cases}$$

Após o cálculo da variação da temperatura $\Delta T = 0^{\circ}C$, o professor poderá perguntar se obteve um resultado positivo ou negativo. espera-se que o aluno perceba que ainda há a terceira opção como neste caso em que a variação é nula.



Fonte: Autor

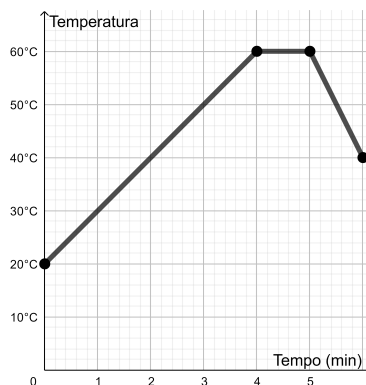
d) Ao observar o gráfico (Figura 16) o aluno perceberá que:

Figura 16 – Gráfico da atividade 5.2.1

No intervalo de 5 a 6 minutos, temos $T_5 = 60^{\circ}C$ e $T_6 = 40^{\circ}C$,

$$\begin{cases} \Delta T = T_6 - T_5 \\ \Delta T = \end{cases}$$

Após o cálculo da variação da temperatura $\Delta T = -20^{\circ}C$, o professor poderá perguntar se obteve um resultado positivo ou negativo. Neste caso temos a variação negativa.

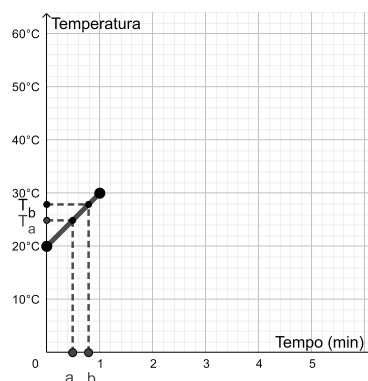


Fonte: Autor

Procedimento 4. Sempre que tomados dois pontos quaisquer, em ordem crescente, de um intervalo de tempo a temperatura aumenta, isto é, $\Delta T > 0$, então o gráfico é crescente e se a temperatura diminui, isto é, $\Delta T < 0$, então o gráfico é decrescente e se a temperatura não sofre variação, isto é, $\Delta T = 0$, então o gráfico é constante. Determine se o gráfico é crescente, decrescente ou constante.

- a) No gráfico (Figura 17), o professor poderá pedir que o estudante marque dois pontos quaisquer no intervalo de tempo entre 0 e 1.

Figura 17 – Gráfico da atividade 5.2.1

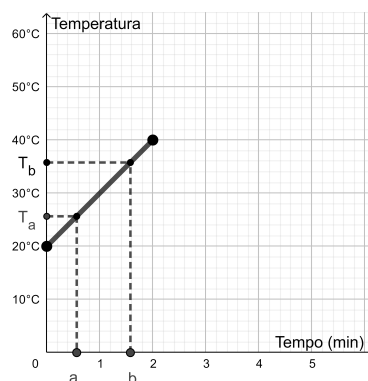


O estudante perceberá que para quaisquer tempos $a < b$, ele terá $T_a < T_b$, daí pode concluir que esse gráfico é crescente.

Fonte: Autor

- b) No gráfico (Figura 18), o professor poderá pedir que o estudante marque dois pontos quaisquer no intervalo de tempo entre 1 e 2 minutos.

Figura 18 – Gráfico da atividade 5.2.1

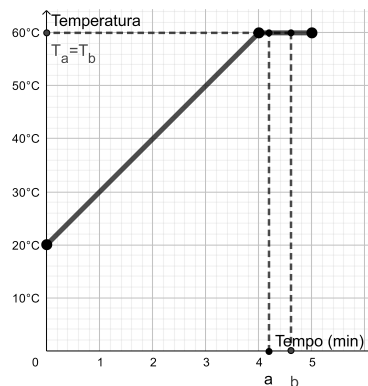


O estudante perceberá que para quaisquer tempos $a < b$, ele terá $T_a < T_b$, daí pode concluir que esse gráfico é crescente.

Fonte: Autor

- c) No gráfico (Figura 19), o professor poderá pedir que o estudante marque dois pontos quaisquer no intervalo de tempo entre 4 e 5 minutos.

Figura 19 – Gráfico da atividade 5.2.1

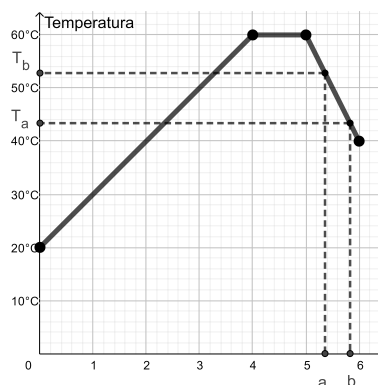


O estudante perceberá que para quaisquer tempos $a < b$, ele terá $T_a = T_b$, daí pode concluir que esse gráfico não sofreu variação neste intervalo e portanto ele é constante.

Fonte: Autor

- d) No gráfico (Figura 20), o professor poderá pedir que o estudante marque dois pontos quaisquer no intervalo de tempo entre 5 e 6 minutos.

Figura 20 – Gráfico da atividade 5.2.1



O estudante perceberá que para quaisquer tempos $a < b$, ele terá $T_a > T_b$, daí pode concluir que esse gráfico é decrescente.

Fonte: Autor

Procedimento 5. Considere que a taxa média de variação da temperatura no intervalo de tempo seja dada pelo quociente entre a variação de temperatura e a variação do tempo no intervalo. Determine a taxa média de variação de temperatura em cada intervalo de tempo.

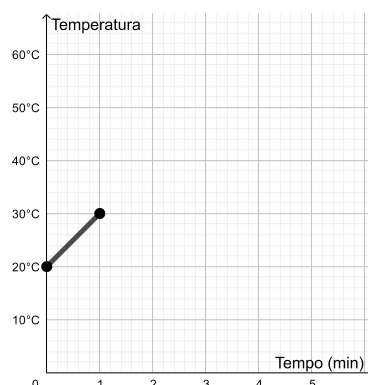
a) No gráfico (Figura 21), observe que no intervalo de tempo de 0 a 1 minuto:

$T_0 = 20^{\circ}C$ e $T_1 = 30^{\circ}C$. Assim a taxa média de variação da temperatura nesse intervalo de tempo é dada por

$$\text{Taxa média} = \frac{T_1 - T_0}{1 - 0} =$$

Ao obter o resultado = 10 podemos dizer que a cada 1 minuto a temperatura varia positivamente em $10^{\circ}C$

Figura 21 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

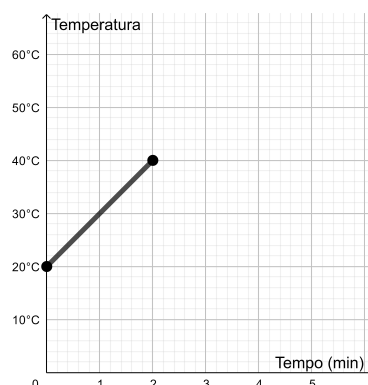
b) No gráfico (Figura 22), observe que no intervalo de tempo de 1 a 2 minutos:

$T_1 = 30^{\circ}C$ e $T_2 = 40^{\circ}C$. Assim a taxa média de variação da temperatura nesse intervalo de tempo é dada por

$$\text{Taxa média} = \frac{T_2 - T_1}{2 - 1} =$$

Pode-se chamar a atenção do aluno para que perceba que foi obtido o mesmo resultado do exemplo anterior item a) desta mesma questão.

Figura 22 – Gráfico da atividade 5.2.1



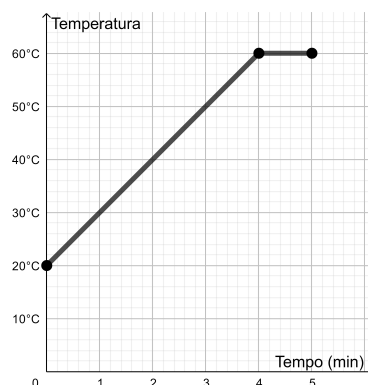
Fonte: Autor

c) No gráfico (Figura 23), observe que no intervalo de tempo de 4 a 5 minutos:

$T_4 = 60^{\circ}C$ e $T_5 = 60^{\circ}C$. Assim a taxa média de variação da temperatura nesse intervalo de tempo é dada por

$$\text{Taxa média} = \frac{T_5 - T_4}{5 - 4} =$$

Figura 23 – Gráfico da atividade 5.2.1



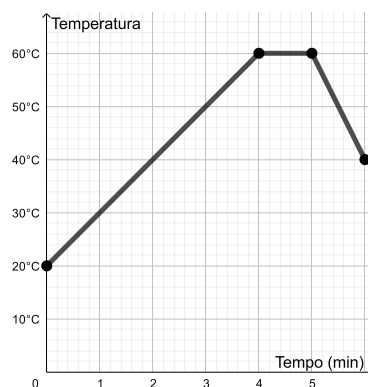
Fonte: Autor

d) No gráfico (Figura 24), observe que no intervalo de tempo de 5 a 6 minutos:

$T_5 = 60^\circ C$ e $T_6 = 40^\circ C$. Assim a taxa média de variação da temperatura nesse intervalo de tempo é dada por

$$\text{Taxa média} = \frac{T_6 - T_5}{6 - 5} =$$

Figura 24 – Gráfico da atividade 5.2.1



Fonte: Autor

6 Uma proposta metodológica para o ensino do gráfico da função afim

O aprendiz deve estar em contato direto com o gráfico da função afim através do aplicativo GeoGebra o qual, deve orientar o professor sobre como encontrá-lo e utilizá-lo de modo a favorecer seu aprendizado para que se tenha o método intuitivo e as orientações dos textos norteadores nacionais satisfeitos.

6.1 Possibilidades de contextualização da função afim

Talvez a função afim seja um dos tipos de funções mais comum de encontrar no nosso cotidiano, na física temos exemplos do espaço percorrido pelo móvel no movimento uniforme, a função da velocidade no movimento uniformemente variado, para citar alguns exemplos entre as possibilidades de contextualização temos o cálculo do preço da corrida em um táxi onde o preço é calculada através de um valor fixo, a bandeirada, mas um valor variável que aumenta conforme cada trecho do percurso percorrido, assim teremos $P(x) = b + ax$ com $P(x)$, sendo o preço da corrida, b , a bandeirada e a , o valor cobrado por cada trecho no percurso total. Também os juros simples. A progressão aritmética. O consumo de energia elétrica ou de abastecimento de água, questões de gastos com matrícula e mensalidade, neste caso¹, interessante quando comparamos duas funções afim e podemos indagar em qual momento um valor ultrapassa o outro como por exemplo: uma academia de ginástica e musculação *Like Fit* cobra R\$ 40,00 sua mensalidade e R\$ 140,00 a matrícula enquanto que outra *Body Strong*² cobra R\$ 70,00 a mensalidade e R\$ 20,00 a matrícula, até quantos meses matriculado na academia *Like Fit* pode-se pagar o menor valor com relação à academia *Body Strong*? O resultado para este problema pode ser apresentado através de uma inequação $40x + 140 > 70x + 20$ ou podemos explorar uma solução gráfica sugerido a seguir na figura 25

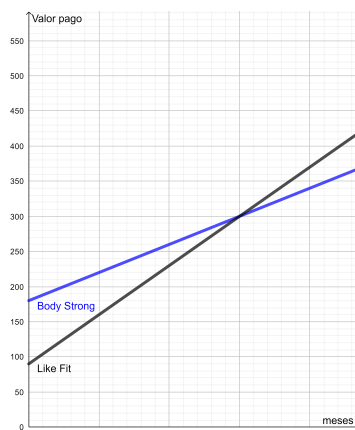
Podemos sugerir ao estudante que note como o gráfico *Like Fit* está abaixo do gráfico *Body Strong* antes do valor $x = 4$ em seguida ele o supera.

Lembramos que estes exemplos não devem exaurir a criação de novos contextos em que a função afim possa ser ingressada, a intenção é que estes possam alimentar a criatividade em busca de novas maneiras de contextualizar este tipo de função e seu gráfico.

¹ Sabemos que a variável mês é uma variável discreta, no entanto para efeito de continuidade de tempo poderíamos torná-la contínua, no entanto sem dar conotação mais aprofundada neste momento peço que considere a continuidade do gráfico considerando a continuidade do tempo mas mantendo como variável meses

² Os nomes *Like Fit* e *Body Strong* são fictícios

Figura 25 – Gráfico do problema



Fonte: Autor

6.2 Proposta metodológica para o ensino do gráfico de função afim

Aqui apresentaremos alguns procedimentos didáticos, baseados no método intuitivo, como proposta para o ensino do gráfico de funções afim. A ideia consiste em apresentar um gráfico referencial para a função quadrática (Figura 26) e a partir da observação e comparação construir um conjunto de propriedades e características desse gráfico que ajudarão o estudante a perceber sua funcionalidade, aplicabilidade e possivelmente sua generalidade.

Para tanto iremos analisar o deslocamento horizontal da parábola, o deslocamento vertical, abertura e fechamento e construção da parábola pela forma canônica.

6.2.1 Rotação

Consideramos que neste momento em que se apresenta a função afim e a observação dos movimentos que serão gerados a partir do que é sugerido a seguir, que estamos no primeiro nível do método intuitivo (intuição sensível) onde orientamos para que o estudante observe, compare sem no entanto estabelecer os conceitos. Desta forma sugerimos ao professor que mostre os gráficos e peça que sejam construídos com o aplicativo GeoGebra sem no entanto estabelecer os conceitos relativo as função afim (coeficientes linear e angular, ou crescimento, decréscimo relativos a estes).

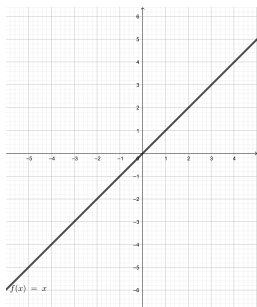
Vamos usar para movimentar o gráfico da função afim parâmetros constantes r e $p \in \mathbb{R}$ que se relacionarão com a nossa variável da seguinte forma:

$$f(x) = r \cdot x + p \quad (6.1)$$

Na rotação vamos inicialmente utilizar a constante r .

Começaremos observar a rotação do gráfico por nossa função referencial $f(x) = x$, onde iremos incluir uma constante r de modo que a nossa função ficará multiplicada por essa constante da seguinte maneira $f(x) = r \cdot x$, como ponto de partida vamos ter $r = 1$ e a nossa função será escrita desta forma $f(x) = x$.

Figura 26 – Gráfico de referência



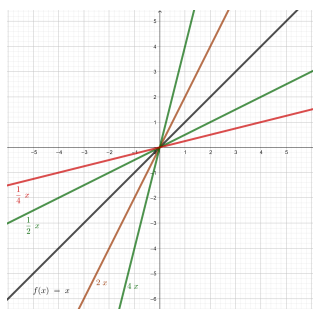
Fonte: Autor

Este gráfico será tomado como referencial para observarmos e compararmos o que ocorre ao modificar a lei da função com o parâmetro r . Sugerimos ao professor que chame a atenção do estudante para a relação entre os valores nos eixos mostrada no gráfico.

Exemplo 6.2.1. A partir do gráfico referencial (Figura 26) o professor poderá construir os gráficos das seguintes funções do tipo $f(x) = r \cdot x$, com $r > 0$ (Figura 27):

- a) $f(x) = 4x$
- b) $f(x) = 2x$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x$
- d) $f(x) = \frac{1}{4}x$

Figura 27 – Gráfico do exemplo

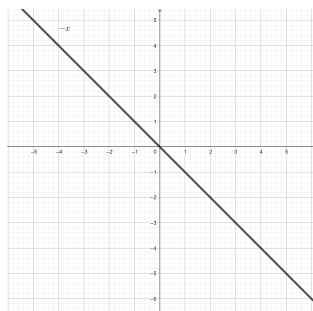


Fonte: Autor

Deve-se observar que ao multiplicarmos a variável x por um número r os valores que estes gráficos fazem referência no eixo Oy também foram multiplicados por r chamando atenção as relações entre os eixos em cada gráfico.

Para o exemplo negativo ($r < 0$) vamos tomar como gráfico (Figura 28) referencial a função $f(x) = -x$

Figura 28 – Gráfico do exemplo



Fonte: Autor

Pode-se chamar atenção para que os estudantes possam notar que os valores no eixo Oy que agora estão relacionados são os mesmos em módulo porém de sinais opostos todos ao gráfico que tomamos anteriormente como referencial (Figura 26), porém para melhor observação com o que ocorre ao termos um fator $r < 0$ esse será nosso referencial, note que neste caso $r = -1$.

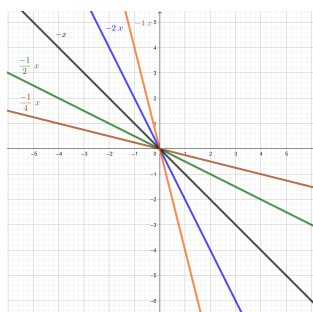
Exemplo 6.2.2. A partir do gráfico referencial (Figura 26) o professor poderá construir os gráficos das seguintes funções do tipo $f(x) = r \cdot x$, com $r < 0$ (Figura 29):

a) $f(x) = -4x$

b) $f(x) = -2x$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x$

Figura 29 – Gráficos $f(x) = x + p$ 

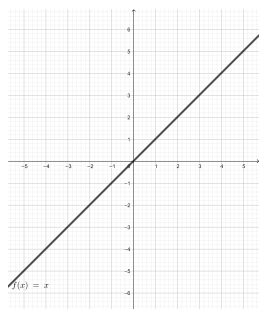
Fonte: Autor

Para os valores de $r < 0$ perceba que os valores de Ox estão sendo relacionados aos valores em Oy segundo a multiplicação por r

6.2.2 Deslocamento

A deslocamento vertical do gráfico é acompanhada de um deslocamento horizontal como veremos a seguir nos gráficos. No entanto vamos notar que o parâmetro p constante adicionado à nossa função referencial $f(x) = x + p$ pode facilmente ser observado no gráfico quando cruza o eixo Oy . Portanto vamos tomar como referência o deslocamento que esse gráfico produz verticalmente, porém não deixando de entender que há um deslocamento horizontal relacionado a este mesmo.

Figura 30 – Gráfico do deslocamento da reta



Fonte: Autor

Observe no gráfico que usaremos como referência, o valor da nossa constante $p = 0$, e temos a seguinte função $f(x) = x + 0$, onde podemos notar que o gráfico da função tangencia o valor 0 no eixo Oy e também no eixo Ox , ou seja a reta que forma o gráfico passa exatamente na origem dos eixos coordenados e está em simetria com os mesmos.

Exemplo 6.2.3. A partir do gráfico de referência (Figura 30) podemos modificar o valor de p e produzir os seguintes exemplos:

a) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = x - 1$

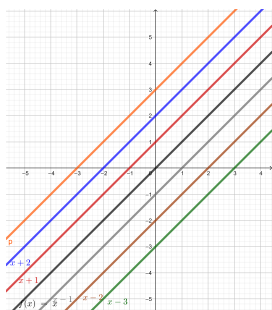
b) $f(x) = x + 2$

e) $f(x) = x - 2$

c) $f(x) = x + 3$

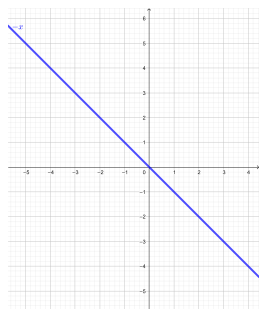
f) $f(x) = x - 3$

Figura 31 – Gráfico do exemplo 6.2.3



Note que ao modificar o parâmetro p o deslocamento do gráfico para valores $p > 0$ foi para cima e que pode ser observado no cruzamento dos gráficos com o eixo Oy e que para $p < 0$ o deslocamento foi para baixo também percebido no cruzamento do gráfico com o eixo Oy . É importante que o professor faça com que os estudantes percebam a relação do gráfico com a representação algébrica da função $f(x) = x + p$ que faz referência a valores adicionados p .

Figura 32 – Gráfico de referência para o deslocamento $f(x) = -x + p$



Fonte: Autor

Observamos no gráfico (Figura 32) que vamos usar como referência para o deslocamento de $f(x) = -x + p$. Inicialmente o valor da nossa constante $p = 0$, e temos a seguinte função $f(x) = x + 0$, onde podemos notar que o gráfico da função tangencia o valor 0 no eixo Oy e também no eixo Ox , ou seja a reta que forma o gráfico passa exatamente na origem dos eixos coordenados e está em simetria com os mesmos.

Exemplo 6.2.4. A partir do gráfico de referência (Figura 32) podemos modificar o valor de p e produzir os seguintes exemplos:

a) $f(x) = -x + 1$

d) $f(x) = -x - 1$

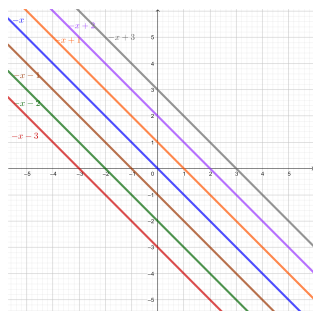
b) $f(x) = -x + 2$

e) $f(x) = -x - 2$

c) $f(x) = -x + 3$

f) $f(x) = -x - 3$

Figura 33 – Gráfico do exemplo



Fonte: Autor

Perceba que com relação ao deslocamento temos um comportamento esperado dos gráficos, basta perceber que os pontos que a reta cruza o eixo Oy estão exatamente em conformidade com o exemplo feito anteriormente (Exemplo 6.2.3)

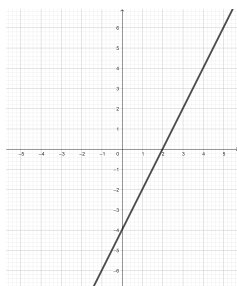
6.2.3 Os dois movimentos

Neste ponto já podemos verificar que as observações, comparações e medições foram feitas sobre os elementos que compõem o gráfico e portanto passaremos ao próximo nível do método intuitivo (intuição intelectual) onde faremos desenvolvimento da inteligência do estudante através da reflexão e abstração. Sugerimos que o professor a partir deste ponto, após o estudante perceber a ideia dos conceitos mais abstratos, que se definam formalmente esses conceitos implícitos nas exposições.

Vamos identificar os dois movimentos a partir do método, considerando a nossa função na seguinte forma $f(x) = r \cdot x + p$, como mostrado na função 6.1 . Para tanto considere o seguinte Exemplo 6.2.5

Exemplo 6.2.5. Podemos notar que o gráfico não está na posição conforme nossa referencia (Figura 26)

Figura 34 – Exemplo para função afim

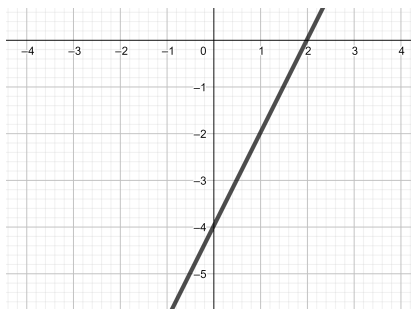


Fonte: Autor

Para encontrar a função que descreve o gráfico devemos encontrar os valores de r e p que são os parâmetros que alteram a função afim conforme as modificações que propusemos a $f(x) = x$ tornando-a $f(x) = rx + p$.

Para encontrarmos p observe seu deslocamento e:

Figura 35 – Exemplo para função afim

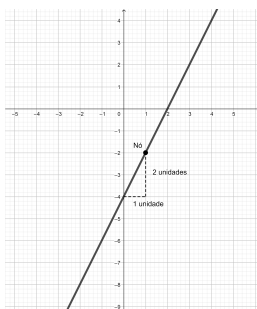


Fonte: Autor

Talvez seja mais notório que o gráfico sofreu um deslocamento e que seu cruzamento com o eixo Oy está em -4 , assim pode-se intuir que $p = -4$.

para encontrarmos r observe sua rotação:

Figura 36 – Exemplo para função afim



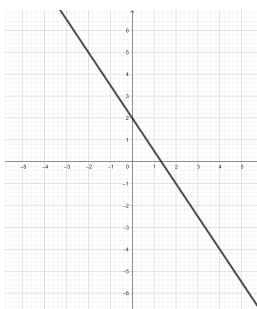
Fonte: Autor

vamos até um ponto onde seja possível, no gráfico dizer quais são as coordenadas, neste caso o ponto A , perceba que a rotação em relação ao gráfico de referencia fez com que para uma unidade fosse obtido como resposta 2 unidades. e para ter o valor de r podemos fazer a razão 2:1 e teremos $r = 2$

Com isso Fazendo a comparação dos valores obtidos em Oy e em Ox , nesta ordem podemos obter que a razão de $2 : 1$, ou seja, nossa função tem a seguinte configuração: $f(x) = 2x - 4$.

Exemplo 6.2.6. Observe o gráfico no seu deslocamento e rotação e vejamos como encontrar a função que deu origem a esta representação.

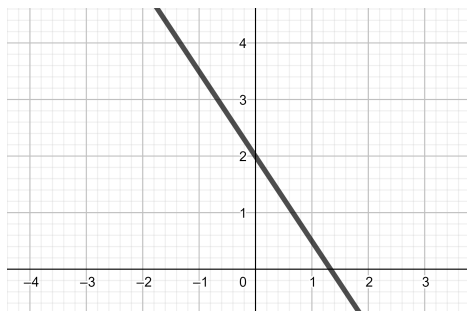
Figura 37 – Função afim $f(x) = rx + p$



Fonte: Autor

Note que a função descrita no gráfico (Figura 37) teve os parâmetros p e r alterados devido ao seu deslocamento e rotação evidentes em comparação a $f(x) = -x$ (Figura 28)

Para descobrir o parâmetro p basta notar o seu deslocamento que conforme pode-se observar no gráfico que corta o eixo Oy em 2 que este parâmetro $p = 2$

Figura 38 – Função afim $f(x) = rx + p$ 

Fonte: Autor

Observe que comparativamente à função referência $r < 0$ e que tínhamos a proporção de 1 : 1 e agora 3 : 2 relativa ao crescimento (decréscimo), então $r = -\frac{3}{2}$

Podemos então escrever a função é $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$.

O terceiro nível do método intuitivo (intuição moral) será alcançado com a aplicação do método às questões cotidianas que neste trabalho não foi possível de ser apresentadas por razão de tempo e impedimento prático por conta da pandemia de corona vírus, mas que deixamos como sugestão de aplicação aos professores com modelos de contextualização encontrados no início do capítulo.

7 Uma proposta metodológica para o ensino do gráfico da função quadrática

Os gráficos das funções quadráticas mostrados a seguir e na exposição destes pelo método intuitivo devem estar associados da manipulação por parte do estudante e sugerimos que esta seja feita no aplicativo GeoGebra, os estudantes devem adquirir habilidades em manipular e produzir tais gráficos, com o direcionamento do professor, que indicará onde deve ser observado e o quê deve ser, para que o estudante possa tomar para si e inferir os conceitos que devem ser aprendidos e assim ser o protagonista de sua aprendizagem.

As possibilidades de contextualização dos gráficos devem trazer a noção da aplicabilidade dos conceitos que serão abordados além de trazer a possibilidade de inserção destes em outras áreas do conhecimento. Deve-se por fim retornar a estas contextualizações e aplicá-las, porém deixaremos esta tarefa a cargo de cada professor que venha aplicar esta proposta.

Ao longo deste capítulo usaremos a função quadrática na forma canônica $f(x) = r(x + q)^2 + p$ que como ressalta [Romio-URI \(2009\)](#), embora não seja muito usual no ensino médio, a forma canônica:

(...) proporciona aos estudantes a realização de análises gráficas, uma vez que temos uma maior facilidade em relacionar suas variáveis visuais, e compará-las, onde a partir de expressões algébricas podemos determinar os movimentos ocorridos no gráfico, em relação a uma função padrão, no nosso caso, $y = x^2$ (...)

Contudo como já dito por ser a forma usual em que se trabalha no ensino médio nem tampouco no ensino fundamental, faremos na seção 7.3 uma relação com a forma de equação reduzida que é a mais trabalhada no ensino básico e como é possível a permuta entre as duas formas sem que haja a necessidade de “completar quadrados” (caso da fatoração).

7.1 Possibilidades de contextualização

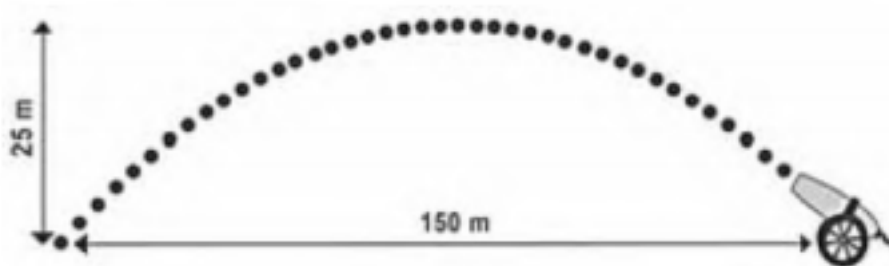
Ao chutarmos uma bola para cima, a não ser que ela seja lançada verticalmente, é bem comum que a trajetória seja curva em forma de uma parábola, a superfície de revolução gerada por uma parábola em torno do seu eixo central é chamada de parabolóide ou de superfície parabólica e para esta superfície temos inúmeras aplicações em nosso

cotidiano. Prado (2014, p. 38), em sua dissertação de mestrado em matemática, nos mostra vários exemplos de como as superfícies paraboloides ou as parábolas estão presentes em nosso cotidiano. Dentre estes exemplos, podemos destacar as pontes pênséis, a antena parabólica, os faróis de carros e nesse caso podemos acrescentar também as lanternas, assim como os movimentos uniformemente variados, quando apresentam a posição em função do tempo ($f(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + b \cdot t + c$) nos revelam uma equação quadrática que tem seu gráfico uma parábola e como ultimo exemplo do seu trabalho a equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$ que tem como uma de suas soluções o número de ouro Φ .

Vale ressaltar que entre as variadas formas de contextualização pode-se propor situações-problemas onde são mostradas as funções que definem um contexto e que por seguinte têm seu desdobramento como por exemplo onde Feltes e Puhl (2017) colocam seus estudantes em contato com o aplicativo Geogebra e exploram com mais profundidade os conceitos sobre a função quadrática propondo a seguinte situação: “Um *skatista* anda sobre uma pista de acordo com a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$, onde $f(x)$ representa a altura dessa pista e x o comprimento, para $[0 \leq x \leq 2]$ ”, onde . Aplicado ao que propomos basta ser feita a análise com a função escrita sob a forma $f(x) = r(x + q)^2 + p$ como veremos com mais detalhes adiante.

No Enem em 2018 (BRASIL, 2018) um item da prova era “Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.”¹ neste item em que havia a figura 39, pedia-se para determinar a equação da parábola que representava esta trajetória.

Figura 39 – figura do item do ENEM 2018



Fonte: (BRASIL, 2018)

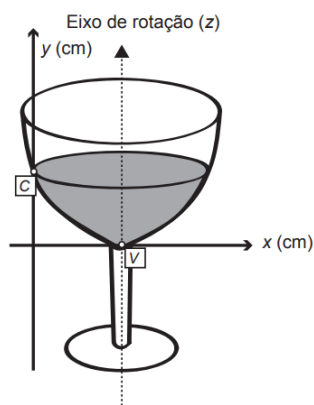
Em outra edição, o ENEM de 2013 (BRASIL, 2013) nos trouxe um item em que pedia-se a altura de um líquido contido em uma taça² (Figura 40) que se formava girando a parábola em torno de um eixo. São estes como também outros exemplos trazidos pelo

¹ Prova do ENEM na p. 25, disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/Caderno_20_2_dia_PPL_ROSA.pdf>

² prova do ENEM de 2013, caderno azul, p. 24, disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf>

ENEM que permitem a inserção do gráfico das funções quadráticas em contextos mais palpáveis.

Figura 40 – figura do item do ENEM 2013



Neste item do ENEM uma secção vertical da figura mostra uma parábola que tem seu vértice sobre o eixo Ox e perpassa o eixo Oy coincidindo com a altura do líquido na taça.

Fonte: (BRASIL, 2013)

Todos os exemplos supracitados podem ser inseridos como introdução ao método aqui proposto e/ou utilizados como atividades que tornarão o aprendizado das funções quadráticas conexo com a realidade. Sabemos também que são poucos exemplos, porém através destes poucos exemplos, podemos ter a ideia de que o estudo dos gráficos das parábolas pode ser relacionado num contexto que facilitará o entendimento e/ou tornarão o estudo mais atrativo e não limitado apenas à abstração, que é importante, porém é uma etapa um pouco mais distante do processo que estamos iniciando. Não obstante, a nossa criatividade como educadores não deve estar presa ao que habitualmente sempre foi ensinado e que se tornou tradicional, então nesse sentido é que iremos apresentar um novo método que se afasta um pouco das ideias tradicionais de ensino dos gráficos e neste caso para as parábolas.

7.2 Proposta metodológica para o ensino do gráfico de função quadrática

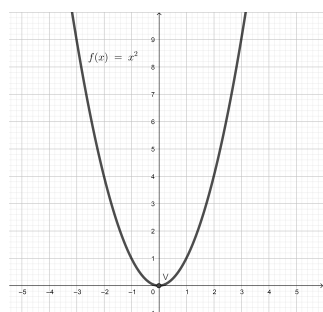
Aqui apresentaremos alguns procedimentos didáticos, baseados no método intuitivo, como proposta para o ensino do gráfico de funções quadráticas. A ideia consiste em apresentar um gráfico referencial para a função quadrática (Figura 41) e a partir da observação e comparação construir um conjunto de propriedades e características desse gráfico que ajudarão o estudante a perceber sua funcionalidade, aplicabilidade e possivelmente sua generalidade representando assim o primeiro estágio do método intuitivo (intuição sensível). Sugerimos que os professores que aplicarão esta proposta peçam aos estudantes que construam os gráficos exemplificados no aplicativo GeoGebra, e considere as orientações ao lado dos gráficos em cada exemplo.

Para tanto iremos analisar o deslocamento horizontal da parábola, o deslocamento vertical, abertura e fechamento e construção da parábola na seguinte forma $f(x) = r(x + q)^2 + p$, em que r , q e $p \in \mathbb{R}$ são constantes.

7.2.1 Deslocamento vertical do gráfico

A proposta de ensino do gráfico para esta função começa no seu exemplo mais simples $f(x) = x^2$. Deve-se indicar ao estudante o ponto vértice da parábola que irá nos dar a orientação sobre a ideia de movimento que se segue.

Figura 41 – Gráfico de referência da função quadrática referencial



Fonte: Autor

O professor poderá utilizar este gráfico como referência para construir as comparações entre os gráficos. Enfatizar que teremos esse formato e seguirão modificações, que no entanto manterão a característica de uma curva como esta em formato de “U” para cima ou para baixo. Também enfatizando que os valores no eixo Ox são mostrados pelo gráfico na relação de seus quadrados no eixo Oy , ou seja, $1^2 = (-1)^2 = 1$ e $2^2 = (-2)^2 = 4$ e assim por diante.

A partir dele o professor deve mostrar a soma de um termo à variável x^2 , um parâmetro $p \in \mathbb{R}$ constante da seguinte forma $f(x) = x^2 + p$ produzirá as seguintes modificações no gráfico que podem ser observadas no exemplo 7.2.1 e nos subsequentes.

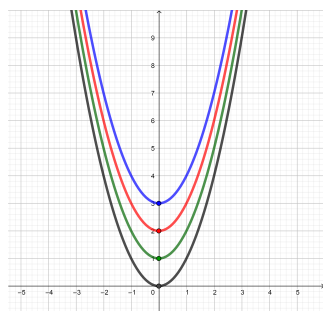
Exemplo 7.2.1. A partir do gráfico referencial (Figura 41) o professor poderá construir os gráficos das seguintes funções (Figura 42):

- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = x^2 + 2$
- $f(x) = x^2 + 3$

Exemplo 7.2.2. A partir do gráfico referencial (Figura 41) o professor poderá construir os gráficos do tipo $f(x) = x^2 + p$ agora com $p < 0$:

- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = x^2 - 2$
- $f(x) = x^2 - 3$

Figura 42 – Gráficos de $f(x) = x^2 + p$ com $p > 0$



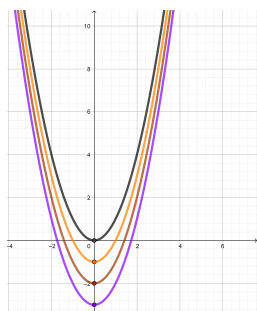
Fonte: Autor

Com $p > 0$ na função o deslocamento da parábola é para cima. A partir da referência note que os gráficos “subiram” um após o outro em uma unidade, de baixo para cima estão respectivamente os gráficos de $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + 2$ e $f(x) = x^2 + 3$. O professor poderá chamar a atenção para o fato de que a função de referência tangencia o eixo Ox porém as demais pelo deslocamento que tiveram não tangenciam este mesmo.

Exibimos a seguir todos os exemplos supracitados quando $p < 0$ e o gráfico que usamos como ponto de partida $f(x) = x^2$, para fins de comparação.

Agora com $p < 0$ pode-se notar que os gráficos tiveram deslocamento em sentido oposto ao mostrado anteriormente, porém analogamente seguiram se afastando em uma unidade para baixo, são respectivamente os gráficos de $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x^2 - 2$ e $f(x) = x^2 - 3$.

Figura 43 – Gráficos das parábolas com $p < 0$



Fonte: Autor

O professor poderá chamar a atenção do estudante indicando que os pontos onde a parábola tem em comum com o eixo Ox são chamados de raízes e para que note que a parábola de referência (Figura 41) tinha apenas uma raiz enquanto que as outras parábolas tem agora duas raízes.

Os gráficos que se seguiram com $p < 0$ possuem duas raízes, da forma tradicional de abordagem deste assunto isto ocorre quando $\Delta > 0$, e como veremos adiante na seção 7.3 na equação 7.7, fica determinado que $p = -\frac{\Delta}{4a}$ e como $a > 0$ segue que $\Delta > 0$ em $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x^2 - 2$ e $f(x) = x^2 - 3$.³

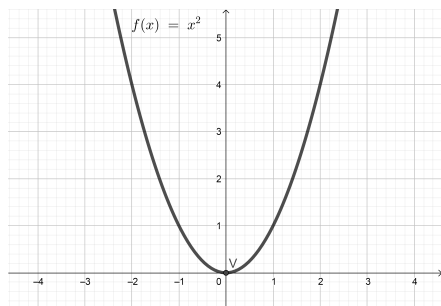
7.2.2 Deslocamento horizontal da parábola

Com ideia semelhante pode-se mostrar o deslocamento horizontal da parábola, usando para isto a função escrita sob a forma $f(x) = (x + q)^2$, já neste caso o estudante

³ Apresentamos aqui uma justificativa para que a função tenha duas raízes pelo modo em que ela é tradicionalmente apresentada no ensino médio, porém não é necessária esta abordagem nestes moldes, pois o estudante perceberá intuitivamente em quais os casos a função apresentará duas ou nenhuma ou apenas uma raiz.

deverá perceber que a forma de relação da variável x^2 com o parâmetro $q \in \mathbb{R}$ constante não é mais a mesma e o professor deve assumir a postura de levá-los a tal percepção diante do gráfico:

Figura 44 – Gráfico de referência ao deslocamento horizontal da parábola



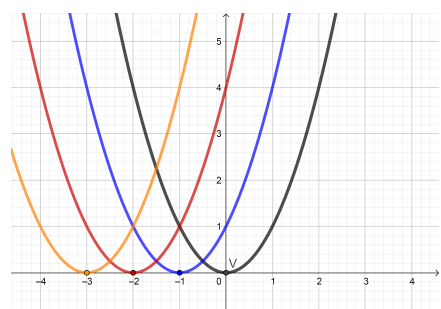
Fonte: Autor

O gráfico de $f(x) = x^2$ é novamente usado como referência para o desenvolvimento do raciocínio que teremos na continuidade, agora perceberemos que o “movimento” se dá em um deslocamento horizontal (esquerda e direita dos eixos coordenados).

Exemplo 7.2.3. O professor a partir do gráfico de referência (Figura 44) poderá construir modificando o parâmetro q em $f(x) = (x + q)^2$:

- a) $f(x) = (x + 1)^2$
- b) $f(x) = (x + 2)^2$
- c) $f(x) = (x + 3)^2$

Figura 45 – Gráfico da parábola para $q > 0$ no deslocamento horizontal



Fonte: Autor

Ao somarmos um parâmetro $q > 0$ o deslocamento do gráfico é para a esquerda dos eixos coordenados, já que o valor de q está sendo somado diretamente à variável x , fazendo com que o vértice e a raiz da função fiquem em -1 , -2 , e -3 , o que faz todo sentido pois como a variável será acrescida em 1 unidade o valor de $x = -1$ que é a raiz se torna-rá 0(zero), e os valores de $x = -2$ e $x = 0$ acrescidos de 1 terão o mesmo resultado quando elevados ao quadrado como mostra o gráfico, assim como $x = -3$ e $x = 1$, também $x = -4$ e $x = 2$ e assim por diante. Semelhantemente as parábolas com vértices em -2 e -3 o mesmo raciocínio pode ser aplicado.

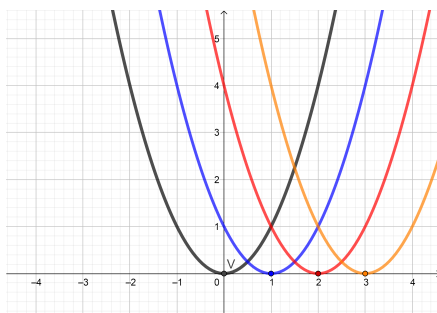
Note que todos os gráficos possuem uma única raiz, pois alteramos apenas o valor de q , e como veremos na seção 7.3 ($q = \frac{b}{2a}$ o que não altera o valor de Δ)⁴

⁴ Obs: Este comentário não precisa ser feito ao estudante, serve para comparação com os métodos tradicionais de ensino destes gráficos.

Exemplo 7.2.4. Para os valores de $q < 0$ com a função escrita sob a forma $f(x) = (x + q)^2$ pode-se construir os seguintes gráficos:

- a) $f(x) = (x - 1)^2$
- b) $f(x) = (x - 2)^2$
- c) $f(x) = (x - 3)^2$

Figura 46 – Gráfico do deslocamento horizontal sob a forma $f(x) = (x + q)^2$, Eis os gráficos onde $q < 0$ todos à direita da função de referência para comparação $f(x) = x^2$, seguindo o raciocínio que explicitamos com $q > 0$

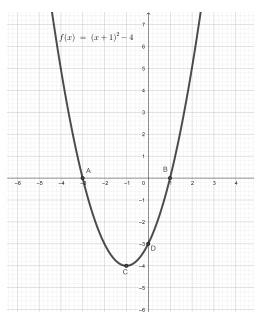


Os gráficos onde $q < 0$ todos à direita da função de referência para comparação $f(x) = x^2$, seguindo o raciocínio que explicitamos. O professor deverá pedir que se observe que as parábolas tiveram seus deslocamentos para a direita à mesma medida em que os parâmetros negativos foram adicionados $-1, -2$ e -3 seus vértices partiram para as posições no eixo em 1, 2 e 3 respectivamente.

Exemplo 7.2.5. A partir da observação da parábola, deslocada nos sentidos vertical e horizontal. Podemos determinar a função descrita, com base nos dados fornecidos pelo próprio gráfico:

Aqui temos o gráfico da função $f(x) = (x + 1)^2 - 4$, onde é apresentado simultaneamente a modificação nos dois parâmetros apresentados até agora p e q então a função nos é apresentada da seguinte forma $f(x) = (x + q)^2 + p$.

Figura 47 – Gráfico da parábola com deslocamentos



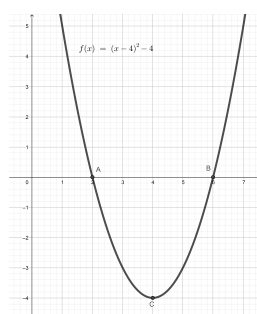
Fonte: Autor

Devemos notar que houve um deslocamento para a esquerda do gráfico de referência (Figura 44) por esse motivo pode-se observar que seu vértice foi deslocado à posição -1 no eixo Ox então intuir que $q = 1$ por ser deslocado à esquerda como dissemos temos $q > 0$. Não obstante de modo análogo podemos intuir que $p = -4$ pois o gráfico foi reposicionado para baixo com seu vértice em -4 no eixo Oy . Desta forma podemos definir a função mostrada: $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ como havíamos dito.

O professor poderá pedir que se observe que esta função possui duas raízes, representadas nos pontos A e B .

Exemplo 7.2.6. A função (Figura 48) exibida neste exemplo é $f(x) = (x - 4)^2 - 4$, veremos como pode-se chegar a este resultado a partir da observação e utilizando o método aqui proposto.

Figura 48 – Gráfico da parábola nos deslocamentos vertical e horizontal simultâneos



Fonte: Autor

Podemos perceber facilmente que $q = -4$ e $p = -4$ pois seu deslocamento vertical foi em 4 unidades para baixo ($p = -4$) e seu deslocamento horizontal foi para a direita em 4 unidades ($q = -4$) como pode-se observar o vértice está na posição $(4, -4)$ desta forma pode-se concluir que

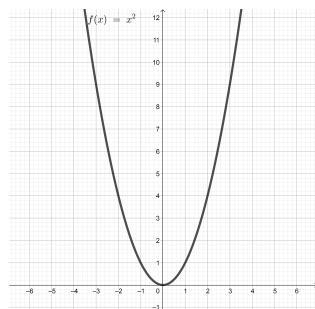
$$f(x) = (x - 4)^2 - 4$$

7.2.3 Abertura, fechamento: concavidade

Agora, vamos mostrar o gráfico (Figura 49) e a multiplicação do valor que é elevado ao quadrado nos exemplos que se seguem vamos novamente usar como referência a função $f(x) = x^2$ e como um fator constante $r \in \mathbb{R}$ pode alterar o comportamento do gráfico quando $f(x) = r \cdot x^2$. No nosso primeiro exemplo esse fator é igual a 1.

Deve-se salientar ao estudante que tanto à direita quanto à esquerda do gráfico ao avançarmos em uma unidade temos a correspondência entre os seus quadrados, ou seja, se observarmos uma unidade à direita ou à esquerda, a partir do vértice, o gráfico nos mostra é uma unidade acima e ao avançarmos duas unidades o gráfico nos mostra o valor correspondente aos seus quadrados.

Figura 49 – Gráfico referencial para concavidade

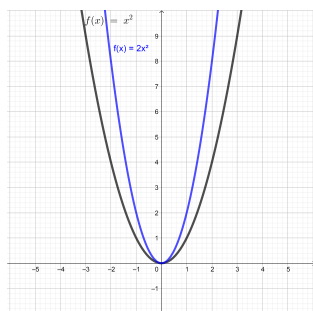


Fonte: Autor

Para este desenvolvimento é importante notar ou perceber certa característica no seu crescimento ou decréscimo tomando como referência cada unidade à direita ou a esquerda do ponto central, o vértice, observando o eixo Ox e sua relação no eixo Oy , para ser mais claro veja como afastando-se uma unidade para a esquerda ou para a direita do vértice temos a relação destes valores no eixo Oy resultando em 1, e continuando esse afastamento em uma unidade temos a relação destes com o valor 4 em Oy e assim por diante.

Para que se perceba as diferenças entre os gráficos que serão mostrados sugerimos como primeira comparação o gráfico de $f(x) = 2x^2$, que visualmente possui o gráfico mais “fechado”, digamos assim, em comparação com a nossa função de referência.

Figura 50 – Gráfico referencial para análise sobre a concavidade da parábola



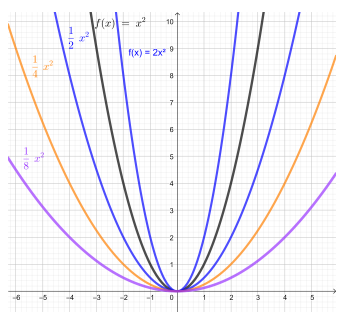
Fonte: Autor

Ao observarmos o afastamento para a esquerda ou à direita em uma unidade podemos ver que o valor associado no eixo Oy é 2 e é exatamente o valor que tínhamos anteriormente multiplicado por 2, o mesmo fator que apresentamos $r = 2$. Seguindo este raciocínio podemos no mesmo exemplo também notar que os valores associados a 4 no eixo Oy no exemplo anterior agora estão associados a 8 por ser multiplicado por 2.

Exemplo 7.2.7. Podemos construir a partir do gráfico de referência as seguintes parábolas no modelo de $f(x) = rx^2$, inicialmente com $r > 0$.

- a) $f(x) = 2x^2$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
- c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
- d) $f(x) = \frac{1}{8}x^2$

Figura 51 – Gráficos para análise sobre a concavidade da parábola

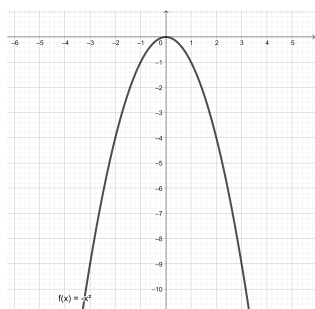


Fonte: Autor

Observe que em comparação com o gráfico de referência $f(x) = x^2$ quando $r > 1$ temos a curva da parábola mais fechada enquanto que para $0 < r < 1$ a curva da parábola é mais aberta e que o fator r multiplica os valores correspondentes mostrados na função de referência em todos os casos.

À medida que o valor de $r \in \mathbb{R}$ fica cada vez menor nos exemplos mostrados, em algum momento $r = 0$ e posteriormente $r < 0$ se continuarmos o raciocínio. Se $r = 0$ o termo quadrático $r \cdot x^2 = 0$ e portanto não teremos a função quadrática e sim a função constante em 0. Se $r < 0$ temos a concavidade voltada para baixo e vamos, para observar este caso tomar como referência o gráfico de $f(x) = -x^2$.

Figura 52 – Gráfico da parábola referencial para $r < 0$



Fonte: Autor

Teremos este gráfico como referência para que possamos observar e comparar demais gráficos com $r < 0$. Neste caso $r = -1$ e assim $f(x) = -x^2$. Sugerimos que se observe que os valores no eixo Ox relacionados pelo gráfico, neste caso terão seus quadrados (positivos) e ao ser multiplicados por -1 passarão a ser valores negativos representados em Oy em todo caso.

Exemplo 7.2.8. Através do gráfico que tomamos como referência para fins de comparação podemos construir os seguintes gráficos (Figura 53) mudando o parâmetro $r < 0$:

a) $f(x) = -\frac{1}{32}x^2$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

b) $f(x) = -\frac{1}{16}x^2$

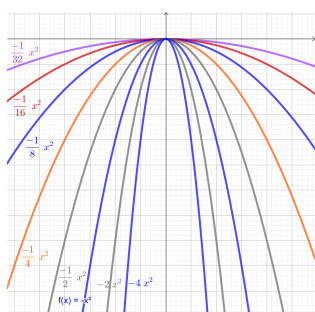
e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = -\frac{1}{8}x^2$

f) $f(x) = -2x^2$

g) $f(x) = -4x^2$

Figura 53 – Gráficos da parábola para $r < 0$



Fonte: Autor

É possível fazer uma comparação com as parábolas que foram produzidas para $r > 0$ pois de maneira análoga, pois as parábolas construídas com valores de $0 < |r| < 1$ têm o mesmo comportamento comparativamente às suas referências de abertura das mesmas. Assim como para valores de $|r| > 1$ que tem seus gráficos mais fechados do mesmo modo, e o professor deverá pedir atenção para este fato.

A partir deste ponto podemos notar que não tão somente a observação, medição, comparação farão parte das atividades que devem ser pedidas aos estudantes. A partir deste ponto pede-se que haja reflexões e que o estudante use um peculiar raciocínio nos exemplos mostrados a seguir. Portanto temos o nível intelectual do método intuitivo sendo apicado deste modo. Mais adiante alguns conceitos serão obtidos de forma intuitiva para que depois sejam formalizados pelo professor.

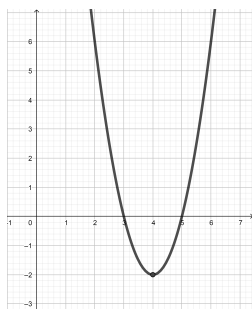
Exemplo 7.2.9. O gráfico a seguir pode ser desmembrado nas três variações citadas anteriormente nos parâmetros p , q e r e assim podemos sugerir quais foram as mudanças

ocorridas na sua lei de formação usando o seguinte modelo:

$$f(x) = r(x + q)^2 + p \quad (7.1)$$

Desta maneira podemos achar a função que está representada no gráfico (Figura 54) observando seus dados e aplicando o método aqui apresentado.

Figura 54 – Gráfico da parábola utilizado no exemplo 7.2.9

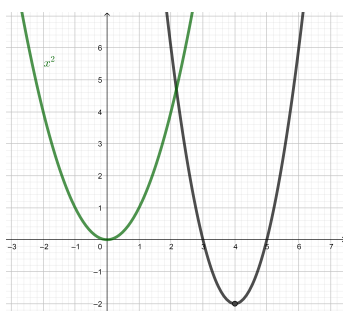


Fonte: Autor

Propositadamente não mostramos a função que gerou o gráfico exibido, para que possamos exercitar a percepção da leitura das informações e a relativas a este e concluindo com a formulação desta função.

Pede-se que o professor chame a atenção dos estudantes pra que estabeleçam a comparação com o gráfico de $f(x) = x^2$ e como sugestão para que eles notem a diferença entre estes. Espera-se que as observações sejam no sentido de deslocamentos vertical e horizontal e sua concavidade.

Figura 55 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9

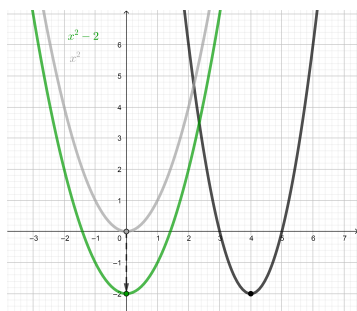


Fonte: Autor

Comparando a função de referência e o nosso gráfico desconhecido podemos perceber diferenças e através delas ou na diminuição delas chegarmos a entender quais mudanças nos parâmetros p , q e r nos levariam a tal gráfico.

Para começar espera-se que se tenha notado o deslocamento vertical e horizontal. Vamos primeiramente ao deslocamento vertical e lembrar de sua relação com a lei de formação da função. Pode-se dizer que a função desceu duas unidades então de $f(x) = x^2$ ela foi a $f(x) = x^2 - 2$.

Figura 56 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9

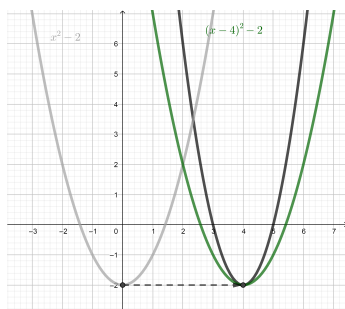


Fonte: Autor

Como podemos notar, houve uma translação vertical do gráfico de modo que seu vértice está na mesma direção de -2 no eixo Oy que nos faz concluir que $p = -2$.

Em seguida o deslocamento horizontal. A função foi então de $f(x) = x^2 - 2$ a $f(x) = (x - 4)^2 - 2$

Figura 57 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9



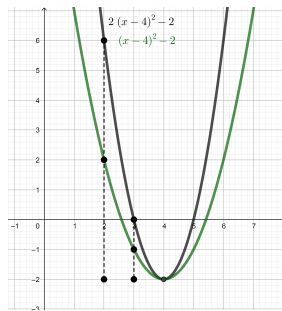
Fonte: Autor

Podemos notar que houve um deslocamento horizontal também, com efeito seu vértice está na mesma direção de 4 no eixo Ox que nos faz concluir que $q = -4$ (o oposto de 4).

Pode-se observar que a função teve um fator multiplicativo, e podemos notar que a parábola “se fechou”, portanto $r > 1$. Podemos verificar que os valores relacionados no gráfico com os valores no eixo Ox do centro da parábola para a esquerda ou direita são sempre o dobro.

Ao compararmos as parábolas neste momento, pode-se notar que ao nos afastarmos horizontalmente em uma unidade do vértice neste caso à esquerda, mas poderia ser a direita, temos o decréscimo relativamente ao dobro de nossa função de referência.

Figura 58 – Gráficos da parábola utilizado no exemplo 7.2.9



Fonte: Autor

Note que apresenta o decrescimento em uma unidade e a nossa função desconhecida o decrescimento é de 2 unidades, isto pode ser confirmado mesmo quando horizontalmente nos afastamos em 2 unidades do vértice da parábola onde o decrescimento é de 4 unidades na função de referência e 8 unidades para nossa parábola desconhecida, ou seja, temos o dobro, nos referimos ao lado esquerdo mas o mesmo ocorre ao lado direito por conta da simetria.

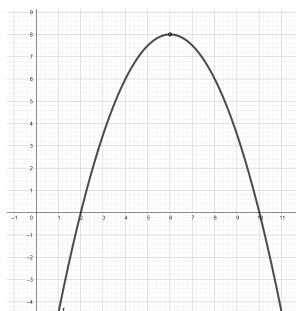
Portanto percebemos que o fator multiplicativo $r = 2$. Logo podemos dizer que a parábola apresentada deve ter a lei de formação

$$f(x) = 2(x - 4)^2 - 2$$

Procedimento 1. Observando a parábola e os valores por ela apresentados, vamos encontrar qual função gera este gráfico.

É fácil perceber o deslocamento do vértice de $(0, 0)$ para $(6, 8)$ e a concavidade da parábola voltada para baixo.

Figura 59 – Gráfico da parábola como exercício



Fonte: Autor

$$\begin{cases} p = \\ q = \\ r = \\ \text{logo: } f(x) = \end{cases}$$

Ao os valores à esquerda ou à direita do vértice no eixo Ox não temos informações relacionadas no eixo Oy precisas logo na primeira unidade, só vamos encontrar segurança em afirmar um valor ao nos duas unidades e o valor relacionado é 2 unidades de distância e quando afastamos em quatro unidades do vértice encontramos o valor relacionado pelo gráfico em 8 unidades, se compararmos com o gráfico referencial (Figura 44) onde para 2 unidades temos a este valor relacionado 4 e para 4 unidades temos relacionado 8 comparando essas relações e podemos perceber que o fator r está fazendo com que essas relações sejam pela metade do gráfico referencial, logo $r = \frac{1}{2}$.

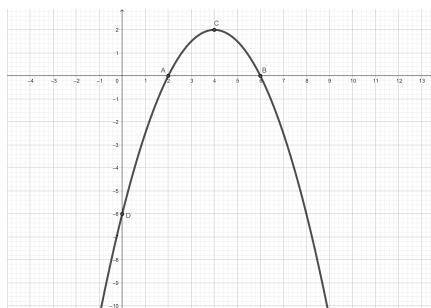
7.2.4 Os pontos relevantes no gráfico da parábola

Os cálculos a seguir que serão propostos devem ser feitos na calculadora pois neste momento a atenção e concentração do estudante devem estar focadas nas relações dos resultados obtidos com as informações da lei da função e o gráfico e não relacionadas com a habilidade das operações algébricas, ou seja, queremos que o estudante esteja mais envolvido com a percepção e o raciocínio do que com a execução de cálculos “(...) A calculadora não pensa pelos estudantes ela só executa cálculos” Mokrosky (1997 apud SÁ; SALGADO, 2015, p. 18).

A seguir vamos abordar pontos da parábola (os pontos de intercessão com os eixos e o vértice) e algumas propriedades pertinentes.

Exemplo 7.2.10. Utilizaremos a função $f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2$ onde as raízes são estão representadas nos pontos A e B , o ponto de interseção com o eixo Oy (D) e o vértice da parábola (C). Vejamos cada um deles:

Figura 60 – Gráfico da parábola e pontos notáveis



Fonte: Autor

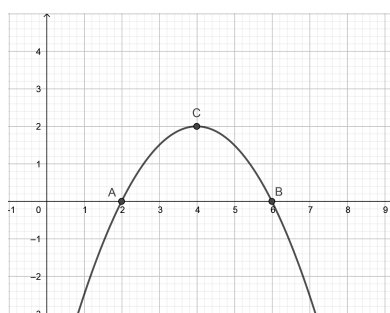
O professor deve pedir que se observe que cada ponto do gráfico é definido por um par de valores, as coordenadas (x,y) para os pontos

$$\text{destacados são: } \begin{cases} A(2, 0) \\ B(6, 0) \\ C(4, 2) \text{ e} \\ D(0, -6) \end{cases}$$

Procedimento 2 (Os pontos A e B e o sinal da função nos intervalos). Quais são as raízes? Qual é o sinal das imagens dos números antes, entre e depois das raízes?

a) Quais são as imagens de $x = 2$ e $x = 6$?

Figura 61 – Gráfico mostrando raízes



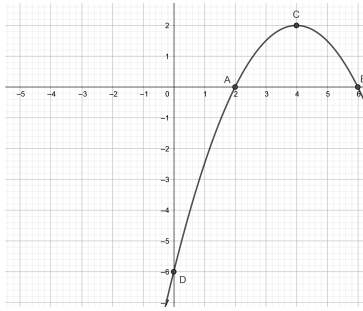
Fonte: Autor

A imagem de um valor x é o número y associado a ele pela função, no caso $y = f(x)$. Observe que as coordenadas dos pontos $A(2, 0)$ e $B(6, 0)$. Chamamos de *zero da função* a todo número x cuja imagem é nula. A função mostrada no gráfico é $f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2$ e a partir desta função vamos determinar as imagens de $x = 2$ e $x = 6$, para isto devemos calcular o resultado da função substituindo x por 2 e por 6.

$$\begin{cases} f(2) = -0,5 \cdot (2 - 4)^2 + 2 = \\ f(6) = -0,5 \cdot (6 - 4)^2 + 2 = \end{cases}$$

- b) Observe o gráfico (Figura 62) e indique o sinal, positivo ou negativo para qualquer elemento antes da primeira raiz:

Figura 62 – Gráfico mostrando antes da primeira raiz



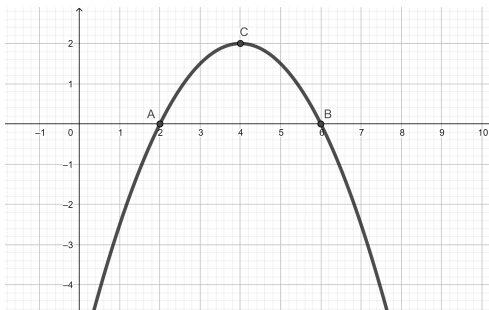
Fonte: Autor

O professor deve tentar fazer com que os estudantes observem a relação entre o trecho do gráfico que está abaixo do eixo Ox e o sinal negativo as imagens calculadas. Pede-se que o estudante escolha um valor menor que a primeira raiz $x = 2$ e que compare com os resultados obtidos pelos colegas se todos os resultados encontrados também foram negativos.

$$\begin{cases} _ < 2 f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(_) = -0,5(_ - 4)^2 + 2 = \end{cases}$$

- c) Observe o gráfico (Figura 63) e os valores de x entre as duas raízes então calcule a imagem de qualquer deles pela função:

Figura 63 – Gráfico mostrando entre as raízes



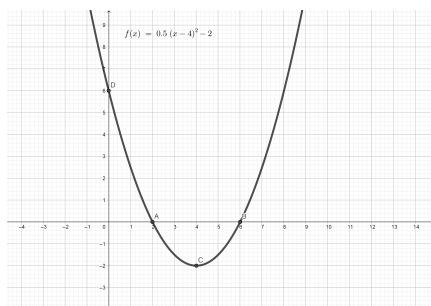
Fonte: Autor

O professor deve tentar fazer com que os estudantes observem a relação entre o trecho do gráfico que está acima do eixo Ox e o sinal agora positivo da imagem calculada. Pede-se que escolha um valor entre $x = 2$ e $x = 6$, calcule sua imagem e compare com os resultados obtidos pelos colegas se todos os resultados também foram positivos.

$$\begin{cases} 2 < _ < 6 f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(_) = -0,5(_ - 4)^2 + 2 = \end{cases}$$

- d) Observe o gráfico (Figura 64) e os valores após a segunda raiz então calcule a imagem de um desses valores pela função:

Figura 70 – Gráfico da parábola e pontos notáveis



Fonte: Autor

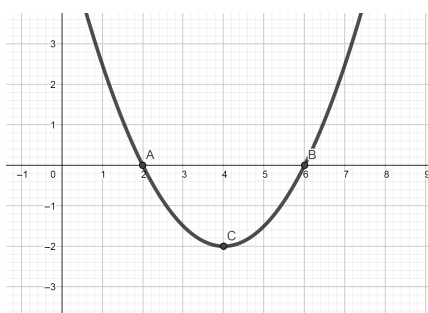
O professor deve pedir que se observe que cada ponto do gráfico é definido por um par de valores, as coordenadas (x,y) para os pontos

$$\text{destacados são: } \begin{cases} A(2, 0) \\ B(6, 0) \\ C(4, -2) \\ D(0, 6) \end{cases}$$

Procedimento 5 (Os pontos A e B e o sinal da função nos intervalos). Quais são as raízes? Qual é o sinal das imagens dos números antes, entre e depois das raízes?

a) Quais são as imagens de $x = 2$ e $x = 6$?

Figura 71 – Gráfico mostrando raízes



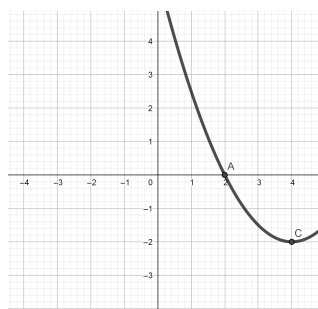
Fonte: Autor

Observe que as coordenadas dos pontos A(2, 0) e B(6, 0). A função mostrada no gráfico é $f(x) = 0,5(x - 4)^2 - 2$ e a partir desta função vamos determinar as imagens de $x = 2$ e $x = 6$, para isto devemos calcular o resultado da função substituindo x por 2 e por 6.

$$\begin{cases} f(2) = 0,5 \cdot (2 - 4)^2 - 2 = \\ f(6) = 0,5 \cdot (6 - 4)^2 - 2 = \end{cases}$$

b) Observe o gráfico (Figura 72) e indique o sinal, positivo ou negativo para qualquer elemento antes da primeira raiz:

Figura 72 – Gráfico mostrando antes da primeira raiz



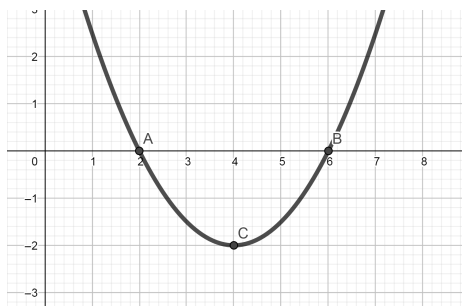
Fonte: Autor

O professor deve tentar fazer com que os estudantes observem a relação entre o trecho do gráfico que está acima do eixo Ox e o sinal positivo das imagens. Pede-se que o estudante escolha um valor menor que a primeira raiz $x = 2$ e que compare com os resultados obtidos pelos colegas se todos os resultados encontrados também foram positivos.

$$\begin{cases} __ < 2f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(__) = -0,5(__ - 4)^2 + 2 = \end{cases}$$

- c) Observe o gráfico (Figura 73) e os valores de x entre as duas raízes então calcule a imagem de qualquer deles pela função:

Figura 73 – Gráfico mostrando entre as raízes



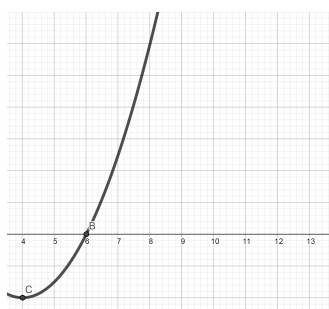
Fonte: Autor

O professor deve tentar fazer com que os estudantes observem a relação entre o trecho do gráfico que está abaixo do eixo Ox e o sinal negativo da imagem neste caso. Pede-se que escolha um valor entre $x = 2$ e $x = 6$, calcule sua imagem e compare com os resultados obtidos pelos colegas se todos os os resultados também foram negativos.

$$\begin{cases} 2 < _ < 6 \\ f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(_) = 0,5(_ - 4)^2 - 2 = \end{cases}$$

- d) Observe o gráfico (Figura 74) e os valores após a segunda raiz então calcule a imagem de um desses valores pela função:

Figura 74 – Gráfico mostrando segunda raiz



Fonte: Autor

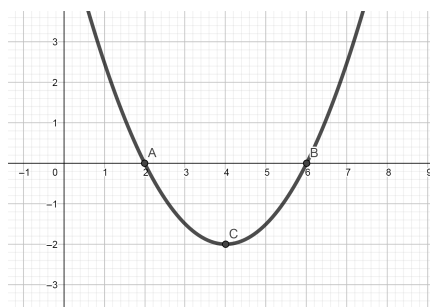
O professor deve tentar fazer com que os estudantes observem a relação entre o trecho do gráfico que está acima do eixo Ox e o sinal positivo da imagem para qualquer um desses valores de x . Pede-se que escolha um valor maior que $x = 6$, calcule sua imagem e compare com os resultados obtidos pelos colegas se todos os os resultados também foram positivos.

$$\begin{cases} 6 < _ \\ f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(_) = 0,5(_ - 4)^2 - 2 = \end{cases}$$

Procedimento 6 (O ponto C , o vértice e sua relação com o crescimento e decrescimento). Qual é crescimento da função antes e depois do vértice?

- a) Qual a imagem pela função de $x = 4$

Figura 75 – O vértice



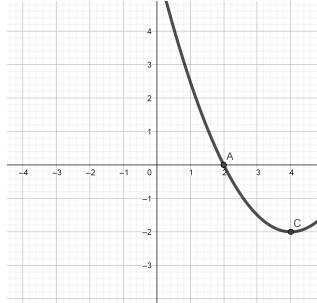
Fonte: Autor

Deve-se chamar a atenção para o fato de que na função $f(x) = 0,5(x - 4)^2 - 2$ já temos uma dica de quais os valores que representam o ponto da parábola o qual chamamos de vértice, $(4, -2)$, e que neste caso está ao ponto inferior da parábola.

$$\begin{cases} f(x) = 0,5(x - 4)^2 - 2 \text{ (função)} \\ f(4) = 0,5(4 - 4)^2 - 2 = \end{cases}$$

b) A parábola é crescente ou decrescente até o vértice?

Figura 76 – O crescimento à esquerda do vértice

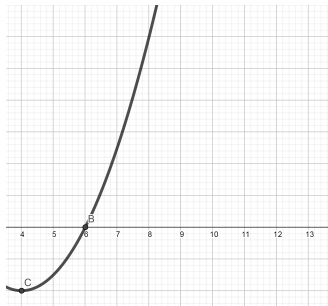


Fonte: Autor

$$\begin{cases} _ (a) < _ (b) \leq 4 \\ f(_ (a)) = 0,5(_ (a) - 4)^2 - 2 = _ f(a) \\ f(_ (b)) = 0,5(_ (b) - 4)^2 - 2 = _ f(b) \end{cases}$$

c) A parábola é crescente ou decrescente depois do vértice?

Figura 77 – O crescimento à direita do vértice



Fonte: Autor

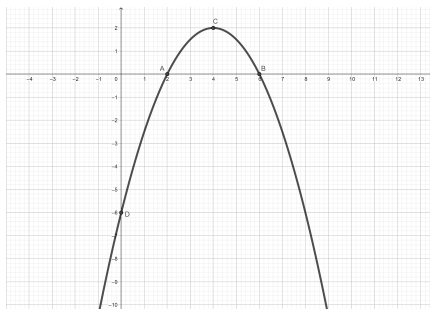
Em um intervalo do eixo Ox sempre que tomamos dois valores quaisquer a e b , com $a < b$, se $\begin{cases} f(a) < f(b) & \text{chamamos de crescente} \\ f(a) > f(b) & \text{chamamos de decrescente} \\ f(a) = f(b) & \text{chamamos de constante} \end{cases}$ à função neste mesmo intervalo. Escolha dois valores no eixo Ox , até o vértice, ou seja dois valores, um menor e outro maior ou $x = 4$ e determinarmos suas imagens $f(x)$.

Em um intervalo do eixo Ox sempre que tomamos dois valores quaisquer a e b , com $a < b$, se $\begin{cases} f(a) < f(b) & \text{chamamos de crescente} \\ f(a) > f(b) & \text{chamamos de decrescente} \\ f(a) = f(b) & \text{chamamos de constante} \end{cases}$ à função neste mesmo intervalo. Vamos escolher dois valores a e b no eixo Ox , determinar suas imagens e comparar.

$$\begin{cases} 4 \leq _ (a) < _ (b) \\ f(_ (a)) = 0,5(_ (a) - 4)^2 - 2 = _ f(a) \\ f(_ (b)) = 0,5(_ (b) - 4)^2 - 2 = _ f(b) \end{cases}$$

d) Qual o maior valor de imagem possível nesta função?

Figura 78 – O valor máximo

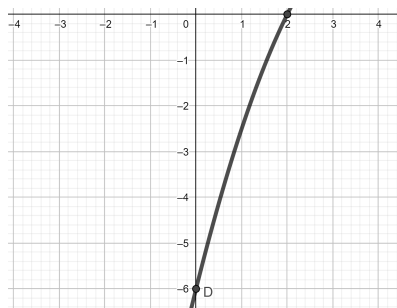


Fonte: Autor

Sabendo que a função $f(x) = 0,5(x - 4)^2 - 2$ é decrescente antes do vértice isto é $\begin{cases} x < 4 \\ f(x) > f(4) \end{cases}$ e crescente após o vértice, assim, $\begin{cases} 4 < x \\ f(4) < f(x) \end{cases}$

Procedimento 7 (O ponto D). Qual valor está relacionado ao ponto D ?

Figura 79 – Intercessão do eixo Oy



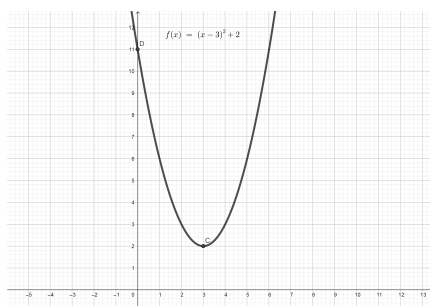
Fonte: Autor

O professor poderá enfatizar que como característica este ponto no gráfico tem sempre $x = 0$ e a imagem $f(0)$ como coordenadas, desta forma $(0, f(0))$ então vamos calcular a imagem de $x = 0$ nesta função

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = 0,5(0 - 4)^2 - 2 = \end{cases}$$

Exemplo 7.2.12. Utilizaremos a função $(x - 3)^2 + 2$ (Figura 80) onde estão representados o ponto de interseção com o eixo Oy , (D) e o vértice da parábola (C). Repare que a função em questão não possui raízes reais. Vejamos esses pontos:

Figura 80 – Gráfico da parábola e pontos notáveis



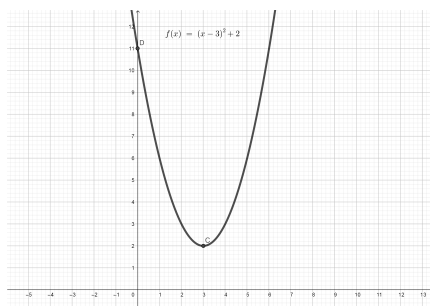
Fonte: Autor

O professor deve pedir que se observe que cada ponto do gráfico é definido por um par de valores, as coordenadas (x,y) para os pontos destacados são: $\begin{cases} C(3, 2) \\ D(0, 11) \end{cases}$

Procedimento 8 (O sinal da função). Qual é o sinal das imagens nesta função?

a) Quais são as imagens obtidas pela função?

Figura 81 – Gráfico sem raízes reais



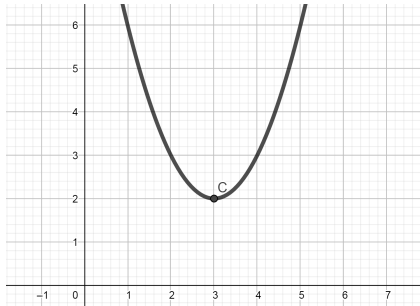
Fonte: Autor

As imagens para quaisquer valores de x são sempre positivas. Observe que o gráfico está todo acima do eixo Ox . Escolha qualquer valor de x e calcule a imagem deste e perceba que para qualquer valor x escolhido obteremos a imagem $f(x) > 0$ positiva. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ e a partir desta função vamos determinar as imagens de $x = \underline{\quad}$ e comparar com os colegas e verificar se em todos os resultados o sinal foi positivo. $f(\underline{\quad}) = (\underline{\quad} - 3)^2 + 2 =$

Procedimento 9 (O ponto C , o vértice e sua relação com o crescimento e decrescimento). Qual é o crescimento da função antes e depois do vértice (Figura 82)?

a) Qual a imagem pela função de $x = 3$

Figura 82 – O vértice



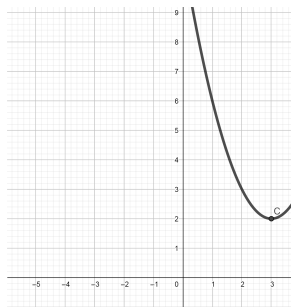
Fonte: Autor

A função $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ na forma em que está escrita nos faz intuir os valores que representam o ponto da parábola o qual chamamos de vértice, $(3, 2)$, e que neste caso está na parte inferior da parábola.

$$\begin{cases} f(x) = (x - 3)^2 + 2 \text{ (função)} \\ f(3) = (3 - 3)^2 + 2 = \end{cases}$$

b) A parábola é crescente ou decrescente até o vértice?

Figura 83 – O crescimento à esquerda do vértice



Fonte: Autor

Em um intervalo do eixo Ox sempre que tomamos dois valores quaisquer a e b , com $a < b$,

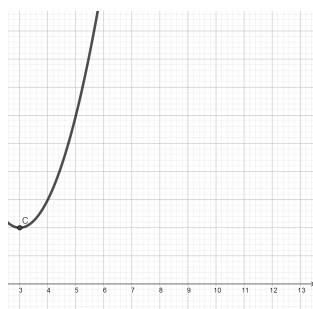
$$\begin{cases} f(a) < f(b) & \text{chamamos de crescente} \\ f(a) > f(b) & \text{chamamos de decrescente} \\ f(a) = f(b) & \text{chamamos de constante} \end{cases}$$

à função neste mesmo intervalo. Escolha dois valores a e b no eixo Ox , e determine suas imagens.

$$\begin{cases} \underline{\quad}(a) < \underline{\quad}(b) \leq 3 \\ f(\underline{\quad}(a)) = (\underline{\quad}(a) - 3)^2 + 2 = \underline{\quad}f(a) \\ f(\underline{\quad}(b)) = (\underline{\quad}(b) - 3)^2 + 2 = \underline{\quad}f(b) \end{cases}$$

c) A parábola é crescente ou decrescente depois do vértice?

Figura 84 – O crescimento à direita do vértice



Fonte: Autor

Em um intervalo do eixo Ox sempre que tomamos dois valores quaisquer a e b , com $a < b$,

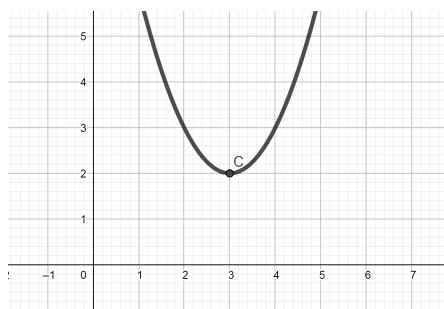
$$\begin{cases} f(a) < f(b) & \text{chamamos de crescente} \\ f(a) > f(b) & \text{chamamos de decrescente} \\ f(a) = f(b) & \text{chamamos de constante} \end{cases}$$

à função neste mesmo intervalo. Vamos escolher dois valores no eixo Ox , a partir vértice e determinarmos suas imagens.

$$\begin{cases} 3 \leq \underline{\quad}(a) < \underline{\quad}(b) \\ f(\underline{\quad}(a)) = (\underline{\quad}(a) - 3)^2 + 2 = \underline{\quad}f(a) \\ f(\underline{\quad}(b)) = (\underline{\quad}(b) - 3)^2 + 2 = \underline{\quad}f(b) \end{cases}$$

d) Qual o menor valor de imagem possível nesta função?

Figura 85 – O valor mínimo



Fonte: Autor

Sabendo que a função $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ é decrescente antes do vértice isto é

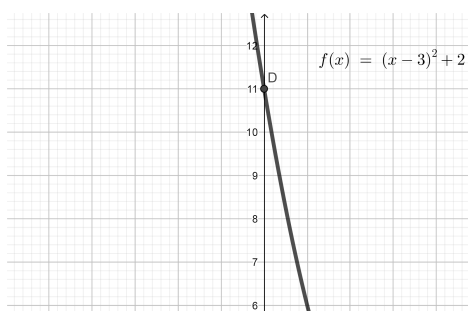
$$\begin{cases} x < 3 \\ f(x) > f(3) \end{cases}$$

e crescente após o vértice, assim,

$$\begin{cases} 3 < x \\ f(3) < f(x) \end{cases}$$

Procedimento 10 (O ponto D). Qual valor está relacionado ao ponto D ?

Figura 86 – Intercessão do eixo Oy



Fonte: Autor

O professor poderá enfatizar que como característica este ponto no gráfico tem sempre $x = 0$ e a imagem $f(0)$ como coordenadas, desta forma $(0, f(0))$ então vamos calcular a imagem de $x = 0$ nesta função

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = (0 - 3)^2 + 2 = \end{cases}$$

7.3 Relação com a equação reduzida da parábola

Consideremos a função quadrática na sua forma reduzida $f(x) = x^2 + bx + c$ com a, b e c constantes e $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \tag{7.2}$$

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} \right) + c = a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = \tag{7.3}$$

$$= a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = \tag{7.4}$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{7.5}$$

ou se preferir

$$a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \tag{7.6}$$

onde podemos perceber os valores das coordenadas do vértice da parábola (X_v, Y_v)

Ou ainda poderíamos escrever:

$$a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a} \right) \quad (7.7)$$

$$a(x - X_v)^2 + Y_v \quad (7.8)$$

considerando a equação (7.5) em que a , $\frac{b}{2a}$ e $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ são constantes resolvemos chamar $a = r$, $\frac{b}{2a} = q$ e $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = p$, daí teremos a mesma equação em (7.1):

$$f(x) = r(x + q)^2 + p \quad (7.9)$$

E assim temos a forma como a função quadrática é aqui apresentada.

Para transitarmos entre as duas representações basta desenvolvermos algebricamente, ou em outro caso, simplesmente calcularmos as coordenadas dos vértices da parábola e aplicarmos na equação 7.6. vejamos o exemplo:

Exemplo 7.3.1. Vamos transitar entre a função escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a forma $f(x) = r(x + q)^2 + p$.

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 9$ para a forma $f(x) = r(x + q)^2 + p$

Sabe-se que $a = 2$, $b = 5$ e $c = -9$. Então basta calcular

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4} \quad (7.10)$$

Também

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}{4 \cdot 2} = -\frac{25 + 72}{8} = -\frac{97}{8} \quad (7.11)$$

e então podemos escrever finalmente a partir da equação 7.6 que nossa função pode também ser representada por: $f(x) = 2 \left(x - \left(-\frac{5}{4} \right) \right)^2 - \frac{97}{8}$

b) $g(x) = 3(x - 1)^2 + 5$ para a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Neste caso, basta desenvolver algebricamente

$$3(x - 1)^2 + 5 = 3(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1) + 5 = 3x^2 - 6x + 8 \quad (7.12)$$

então pode ser escrita $g(x) = 3x^2 - 6x + 8$

Da mesma forma como no capítulo anterior aqui não conseguimos aplicar a proposta em sala de aula devido à pandemia de covid-19 e com isso o terceiro nível do método intuitivo (intuição moral) não está presente neste trabalho.

8 Uma proposta metodológica para o ensino do gráfico da função exponencial

Os gráficos mostrados a seguir e a exposição destes pelo método intuitivo não devem estar desassociados da manipulação por parte do estudante. Os gráficos que serão produzidos no aplicativo Geogebra, os estudantes devem ter a experiência de manipular e produzir tais gráficos com o direcionamento do professor que indicará onde deve ser observado e o quê deve ser observado para que o estudante possa tomar para si e interiorizar os conceitos que devem ser aprendidos e assim ser o protagonista de sua aprendizagem.

Da mesma forma como encontramos nos capítulos anteriores nas etapas em que sugere-se que o estudante observe, compare, meça, tenha atenção às características no que do seu objeto de estudo, que neste capítulo é o gráfico da função exponencial, temos o nível inicial do método e passaremos ao nível seguinte à medida que se exija um nível de abstração maior, ou raciocínio e reflexões que levarão a compreensão de conceitos relacionados ao objeto.

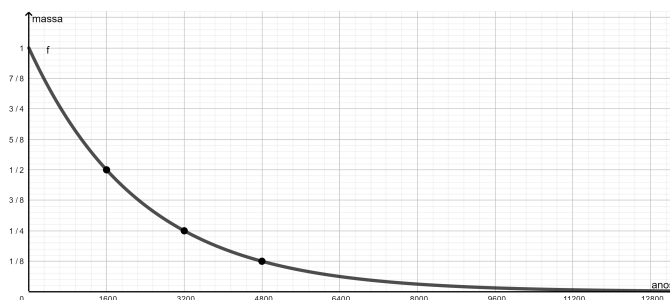
As possibilidades de contextualização dos gráficos devem trazer a noção da aplicabilidade dos conceitos que serão abordados além de trazer a possibilidade de inserção destes em outras áreas do conhecimento. Deve-se por fim retornar a estas contextualizações e aplicá-las.

8.1 Possibilidades de contextualização

Podemos contextualizar o estudo das funções exponenciais de diversas formas porém que na maioria destas há um relacionamento interdisciplinar, dentre os quais podemos citar a meia-vida de um elemento radioativo, crescimento populacional, juros compostos, decaimento (ROBALLO, 2014).

A chamada meia-vida de uma substância radioativa é dada em função do fenômeno que ocorre a estas substâncias quando metade de sua massa se desintegra (NASCIMENTO, 2019). Por exemplo o elemento químico rádio 226 leva aproximadamente 1600 para desintegrar metade de sua massa. podemos então considerando a massa da amostra sendo 1, assim temos o seguinte gráfico (Figura 87).

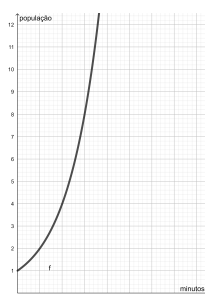
Figura 87 – Meia vida do Ra 226



Fonte: (NASCIMENTO, 2019)

O crescimento da população de bactérias também pode ser usado no ensino básico, existem bactérias como a *Escherichia coli* que se reproduzem por divisão celular chamada de fissão binária (PIMENTEL; DIONISIO; SIGNOR, 2016), ou seja a bactéria se divide em duas, num processo muito rápido em torno de 20 minutos e pode-se representar esse crescimento populacional de bactérias por uma curva exponencial como mostra o gráfico na figura 88.

Figura 88 – Crescimento da população de bactérias



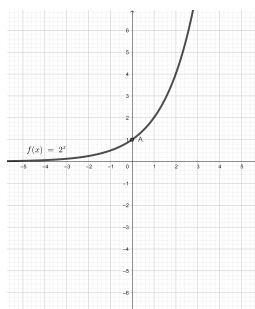
Fonte: Autor

Acreditamos que é possível obtermos vários exemplos sempre, também, observando a adaptação desses às condições cognitivas do público ao qual estamos direcionando, neste caso o público da educação básica, os estudantes de ensino médio como já mencionamos.

8.2 Proposta de construção de gráficos das funções exponenciais

Veremos a seguir uma proposta baseada no método intuitivo para o ensino de funções exponenciais que consiste em fazer com que o estudante possa observar, comparar, medir, calcular diante modificações em um gráfico exponencial construído no aplicativo GeoGebra, possibilitando ao aprendiz a manipulação virtual ampliando sua percepção de conceitos propriedades gráficas, para usaremos como modelo de referência

Figura 89 – Gráfico referencial para as exponenciais



Fonte: Autor

Neste gráfico estão representados a relação entre os expoentes (em Ox) e as potências de base 2 (em Oy), note que o ponto A onde a curva perpassa o eixo Oy é onde o valor de $x = 0$, o expoente da potência $2^0 = 1$.

8.2.1 Deslocamento vertical

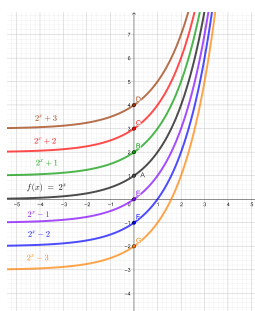
Vamos considerar inicialmente, para os estudos sobre o gráfico das funções exponenciais apenas duas bases: 2 e $1/2$.

Usaremos em nossa exposição primeiramente a **base 2**, e como ponto de partida a função $f(x) = 2^x$ que servirá de referência para as comparações feitas nas observações sobre os gráficos, iremos alterar sua disposição ao adicionarmos um parâmetro $p \in \mathbb{R}$ constante, assim a função será da seguinte forma $f(x) = 2^x + p$.

Exemplo 8.2.1. A partir do gráfico de referência (Figura 89) podemos alterar o valor de p e construir como exemplos os gráficos do tipo $f(x) = 2^x + p$:

- a) $f(x) = 2^x + 1$
- b) $f(x) = 2^x + 2$
- c) $f(x) = 2^x + 3$
- d) $f(x) = 2^x - 1$
- e) $f(x) = 2^x - 2$
- f) $f(x) = 2^x - 3$

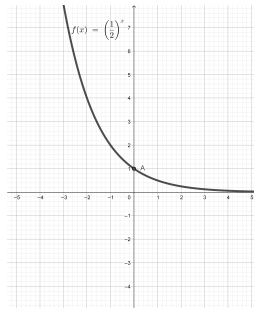
Figura 90 – Gráficos exponenciais do deslocamento vertical



Fonte: Autor

Observe que os gráficos com parâmetros positivos estão localizados acima do gráfico de referência adicionados no ponto de cruzamento com o eixo Oy exatamente os valores de p . De-ve se também notar que as forma do gráfico não foi alterada pois a maneira de como se dá o crescimento do gráfico não foi alterada no entanto a posição do mesmo no plano cartesiano foi alterada para cima ou para baixo.

Figura 91 – Gráfico de exponencial de base $\frac{1}{2}$



Fonte: Autor

Agora com a base da exponencial $\frac{1}{2}$, vamos usar fins de comparação este gráfico (Figura 91) como referência, note que a curva agora tem valores em decréscimo em relação aos gráficos anteriormente vistos e que a base é o inverso multiplicativo da base que tínhamos $\frac{1}{2} = 2^{-1}$. É que se percebe que os valores do eixo Oy são as potências relacionadas dos valores em Ox .

Com a base $\frac{1}{2}$ ocorre de modo semelhante vamos então mostrar o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exemplo 8.2.2. A partir do gráfico de referência (Figura 91) podemos alterar o valor de p e construir como exemplos os gráficos do tipo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + p$:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

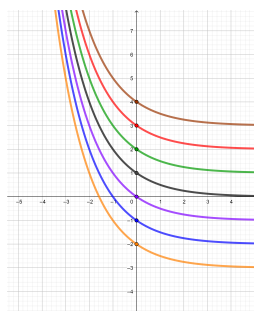
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

Figura 92 – Gráficos das exponenciais com base $\frac{1}{2}$



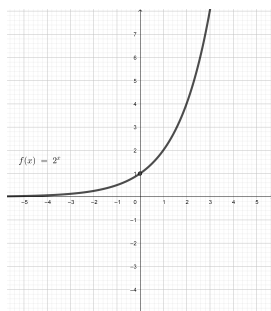
Fonte: Autor

Diante de todos os gráficos (Figura 92) que foram expostos deve-se observar que termo p adicionado ao gráfico pode posicionar a função acima ou abaixo do gráfico padrão em posição específica conforme o valor deste p .

8.2.2 Deslocamento horizontal

Vamos então considerar a função $f(x) = 2^{x+q}$ com q uma constante real. E nosso ponto de partida novamente será $f(x) = 2^x$.

Figura 93 – Gráfico de referência



Fonte: Autor

Usaremos para fins de comparação, a função $f(x) = 2^x$, onde iremos mostrar as transformações ou variações ocorridas no gráfico ao adicionarmos um valor q ao expoente x da seguinte forma $f(x) = 2^{x+q}$.

Exemplo 8.2.3. Modificando o valor de q podemos deslocar o gráfico na direção horizontal. A partir do gráfico de referência pode-se produzir os seguintes gráficos:

a) $f(x) = 2^{x+1}$

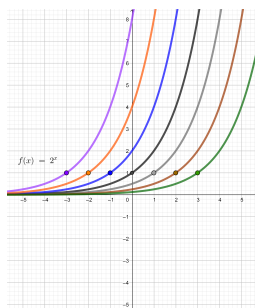
d) $f(x) = 2^{x-1}$

b) $f(x) = 2^{x+2}$

e) $f(x) = 2^{x-2}$

c) $f(x) = 2^{x+3}$

f) $f(x) = 2^{x-3}$

Figura 94 – Exponenciais alterando o valor de q 

Fonte: Autor

Note que os valores positivos de q deslocam a curva para a esquerda e valores $q < 0$ deslocam a posição do gráfico para a direita. Porém a curva mantém sua forma, e somente foi deslocada.

8.2.3 Elemento multiplicativo

Podemos mostrar também para esta função, um fator multiplicativo da seguinte forma $f(x) = r \cdot 2^x$ sendo $r \in \mathbb{R}$ um fator constante. Novamente como ponto de partida o gráfico de $f(x) = 2^x$, onde este fator que mencionamos é igual a 1.

Exemplo 8.2.4. Podemos alterar o valor de r e produzir os seguintes exemplos:

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

d) $f(x) = 0,25 \cdot 2^x$

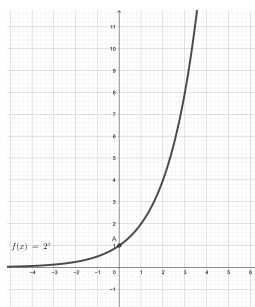
b) $f(x) = 2 \cdot 2^x$

e) $f(x) = 0,05 \cdot 2^x$

c) $f(x) = 0,5 \cdot 2^x$

f) $f(x) = 0,005 \cdot 2^x$

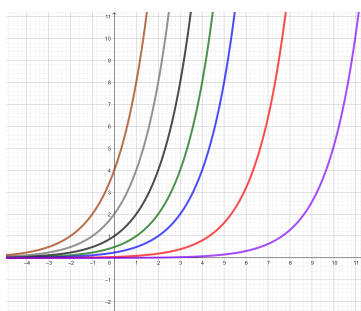
Figura 95 – Gráfico de referência para o elemento multiplicativo



Fonte: Autor

Este será o gráfico denominado padrão para fins de comparação e observação das mudanças que ocorrem com o gráfico da função ao alterarmos um valor r

Figura 96 – Exponenciais alterando o valor de r



Fonte: Autor

Da esquerda para a direita os valores de r estão em em ordem decrescente. perceba que agora a forma que a curva cresce foi modificada e as imagens produzidas foram multiplicadas por r em comparação com a curva que tomamos como referencia

Exemplo 8.2.5. Podemos também fazer $r < 0$ e teremos os seguintes gráficos:

a) $f(x) = -0,005 \cdot 2^x$

e) $f(x) = -1 \cdot 2^x$

b) $f(x) = -0,05 \cdot 2^x$

f) $f(x) = -2 \cdot 2^x$

c) $f(x) = -0,25 \cdot 2^x$

g) $f(x) = -4 \cdot 2^x$

d) $f(x) = -0,5 \cdot 2^x$

Figura 97 – Gráficos exponenciais multiplicadas por um número real negativo



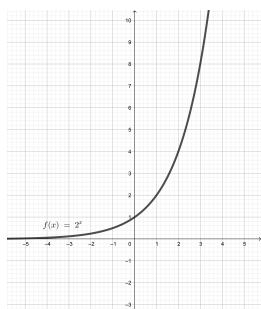
Fonte: Autor

De cima para baixo os gráficos foram em ordem decrescente. Repare que os as curvas estão dispostas simetricamente ao eixo Ox uma a uma com seus valores de r opostos.

8.2.4 Outro elemento multiplicativo

O que ocorre ao multiplicarmos um valor constante $s \in \mathbb{R}$ à lei da função que dá origem ao gráfico exponencial da seguinte maneira $f(x) = 2^{s \cdot x}$? considerando o primeiro valor da constante $s = 1$ onde teremos o gráfico da função $f(x) = x^{1 \cdot x}$ vejamos:

Figura 98 – Gráfico exponencial de referência



Fonte: Autor

Chamaremos por padrão este gráfico exponencial.

Exemplo 8.2.6. Variando os valores de s podemos produzir modificações na curva exponencial e produzir como exemplos:

a) $f(x) = 2^{4x}$

d) $f(x) = 2^{\frac{1}{4} \cdot x}$

b) $f(x) = 2^{2x}$

c) $f(x) = 2^{(\frac{1}{2}) \cdot x}$

e) $f(x) = 2^{\frac{1}{8} \cdot x}$

Ou para valores $s < 0$

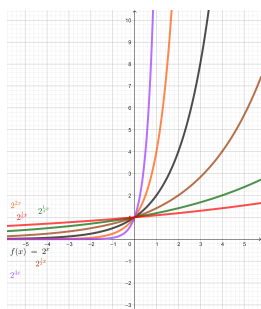
a) $f(x) = 2^{-\frac{1}{8} \cdot x}$

c) $f(x) = 2^{-(\frac{1}{2}) \cdot x}$

b) $f(x) = 2^{-\frac{1}{4} \cdot x}$

d) $f(x) = 2^{-1 \cdot x}$

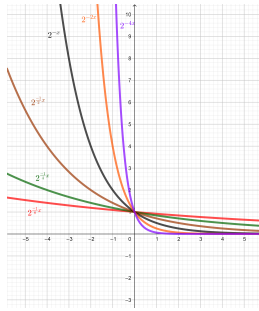
Figura 99 – Gráficos para valores de $s > 0$



Fonte: Autor

Repare que à medida que o valor de s se torna maior, o crescimento do gráfico é maior ainda pois para cada valor de x teremos o valor de imagem relativo ao dobro, quadruplo ou qualquer que seja a multiplicação que s realiza com a variável x . Podemos também notar que quanto menor o valor de s menor é o crescimento do gráfico fazendo com que este fique até parecendo uma reta paralela ao eixo Ox porém ainda é uma curva exponencial.

Observações:

Figura 100 – Gráficos para valores de $s < 0$ 

Fonte: Autor

Note a simetria dos gráficos para $s > 0$ com os gráficos em que $s < 0$ em relação ao eixo Oy .

Baseado nas propriedades de potência:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (8.1)$$

e

$$1^n = 1 \quad (8.2)$$

Podemos escrever que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (8.3)$$

logo, também:

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad (8.4)$$

Então $f(x) = 2^{-x}$ é a mesma função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, e têm portanto o mesmo gráfico, assim como as funções $g(x) = 2^{-2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, $h(x) = 2^{-4x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ e assim por diante.

Sugerimos Pedir que os estudantes comprovem tais afirmações através do GeoGebra inserindo as respectivas funções e verificando suas coincidências.

9 Conclusão

Como pudemos perceber, nossa proposta de construção de gráficos de funções pelo método intuitivo nos mostrou que podemos repensar os moldes tradicionais de ensino na intenção de melhorar a educação, o ensino da matemática em particular e mais especificamente o ensino de gráficos das funções afim, quadrática e exponencial, se contrapondo ao método que utilizava a construção destes por tabelas que poderiam dar uma falsa noção de como seriam os gráficos destas funções elementares. Que como dissemos tem um papel importante no ensino da matemática na relevância do que diz os PCNs e a BNCC quando comentam sobre a resolução de problemas e que os estudos de [MEVARECH e KRAMARSKY \(1997 apud GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, \)](#) e [LEINHARDT, ZASLAVSKY e STEIN \(1990 apud GUIMARÃES; GITIRANA; ROAZZI, \)](#) apontam resultados prósperos neste sentido além de que garantem a leitura rápida e interpretação peculiar sobre fenômenos diversos que podem ser descritos por este recurso matemático, sendo assim temos que os gráficos são uma poderosa ferramenta da matemática que pode por sua importância melhorar o ensino não somente da matemática mais também de outras disciplinas já que podemos ter representações de fenômenos na representação matemática em contextos interdisciplinares.

Verificamos que outros trabalhos já se apresentam em sentido análogo quando fazem o uso do GeoGebra ou de outros recursos dentro das NTICs como é o caso do [Silva e Costa \(2017\)](#) nas oficinas aos professores de matemática que puderam perceber que o GeoGebra se mostra como um poderoso recurso ou no caso do [\(ROMIO-URI, 2009\)](#) que não usa o GeoGebra mas faz uso de softwares educacionais, WinPlot, Vrum-Vrum e considerando a função quadrática na forma canônica. Porém não encontramos em nossa pesquisa a utilização do método intuitivo em aplicação ao ensino do gráfico de funções.

Notamos que quando fazemos o uso da tecnologia como suporte e tendo o aluno como foco direto da nossa concentração na abordagem do tema, tendemos a aproximá-lo do seu objeto de estudo e do seu interesse, que como vimos nas orientações dos documentos oficiais (PCNs e BNCC) este deve ser um agente ativo de seu próprio aprendizado sendo instigado a fazer observações e direcionado a inferências provocadas pelo professor segundo o método intuitivo, que está em nossa proposta.

Não obstante, vimos que o ensino de gráficos no Brasil precisa ser revisto pois encontra insatisfação entre professores e alunos e não se adequa em alguns aspectos as normas estabelecidas nos documentos oficiais. Também que o método intuitivo aplicado ao ensino dos gráficos é uma forma adequada aos preceitos estabelecidos como parâmetros na educação brasileira e uma contribuição inovadora para esta área da educação matemática.

Vimos que o aluno pode fazer com que os gráficos de cada tipo de função tenham movimento a partir da manipulação do aplicativo e que este movimento faz relação com sua lei de formação criando quase que uma ação lúdica na observação de suas generalidades.

Podemos considerar que a proposta apresenta-se com uma compatibilidade razoável ao que é orientado pela BNCC e PCNs e que com o uso das NTICs se mostra dentro das perspectivas que temos para a educação matemática no nosso país, e por ter como base de aplicação o método intuitivo, já consolidado não só no Brasil como também no mundo todo, mesmo que não tenhamos sua aplicação prática feita por conta do contexto sanitário que se apresenta o mundo todo (no caso a pandemia provocada pelo corona vírus e a doença provocada por ele: covid-19), acreditamos que por todas características já mencionadas sua aplicação prática não deverá ter dificuldades enormes e levará a bons resultados, mesmo que não tenhamos a posto em prática. Esperamos que em outra pesquisa sua aplicação possa ser feita e comprovada sua eficácia assim como a extensão à outras funções que por conta de prazos não puderam constar.

Nossa proposta diante de sua confecção, nos trouxe a confrontos relativos à nossa própria prática de mais de 15 anos de atuação no ensino básico, mediante às descobertas feitas durante a pesquisa e que enfim mudaram o modo como se configuravam os mecanismos internos de elaboração de aulas referentes ao tema e que com certeza contribuiu de maneira evolutiva e satisfatória.

Dito isto, sabemos que a educação brasileira, no campo da matemática possui diferentes problemas e muitos entraves como pudemos notar até de forma pessoal. Não temos a elevada pretensão de resolver tais problemas pois esta tarefa é antes de tudo uma construção coletiva e depende de cada um dos envolvidos atuantes em arduamente repensar, refazer e fazer as práticas de ensino. Contudo esperamos que esta proposta possa ser um caminho ou uma luz no campo das ideias para tentar resolver este em particular, que no mínimo venha a trazer de alguma forma uma contribuição ao pensamento de que podemos rever as nossas práticas como educadores, ajustá-las ao que vem sendo cobrado como sugestão pelas diretrizes e orientações vigentes do nosso país.

Referências

- ALVES, A. M. M. *Ensino de Matemática no Brasil: Um enfoque a partir dos livros didáticos (1940/2000)*. [s.n.], 2004. Disponível em: <http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2004/Poster/Poster/05_20_21_ENSINO_DE_MATEMATICA_NO_BRASIL_UM_ENFOQUE_A_PARTIR_DOS_LIVRO.pdf>. Acesso em: 24 julho 2020. Citado na página 23.
- ALVES, M. M. *Matemática e suas tecnologias: ensino médio - pré-vestibular 1*. [S.l.]: Matesc, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 41.
- BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini: 9 ano: ensino fundamental*. 8. ed. [S.l.]: Moderna, 2015. v. 4. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 41.
- BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: MEC, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- BRASIL. *Ministério da Educação. Prâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.]: MEC, 1997. Citado na página 21.
- BRASIL. *Prova do Enem caderno azul 2 dia*. 2013. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_azul.pdf>. Acesso em: 17 de agosto de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- BRASIL. *Prova do Enem caderno rosa 2 dia PPL*. 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/Caderno_20_2_dia_PPL_ROSA.pdf>. Acesso em: 17 de agosto de 2020. Citado na página 59.
- CARVALHO, V. *O que são NTICs?* 2009. Disponível em: <<http://linguagemmultimidia.blogspot.com/2009/02/o-que-sao-ntics.html>>. Acesso em: 14 de dezembro de 2020. Citado na página 35.
- CHAVES, E. O. C. Tecnologia na educação. *Encyclopaedia of Philosophy of Education, edited by Paulo Ghirardelli, Jr, and Michal A. Peteres. Published eletronicallly at*, p. 14, 1999. Citado na página 34.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. 1. ed. [S.l.]: Ática, 2012. v. 4. Citado na página 41.
- EVES, H. 1. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004. Citado na página 22.
- FELTES, C. M.; PUHL, C. S. Gráfico da função quadrática: uma proposta de ensino potencialmente significativa. *Scientia cum Industria*, v. 4, n. 4, p. 202–206, 2017. Disponível em: <<http://www.uces.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/viewFile/4899/pdf>>. Acesso em: 25 julho 2020. Citado na página 59.
- GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. de O. Modelagem com o geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *RENOTE-Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: <<https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/download/21917/12717>>. Acesso em: 02 julho 2020. Citado na página 37.

- GUIMARÃES, G. L.; GITIRANA, V.; ROAZZI, A. Interpretando e construindo gráficos. *ANPED, 24ª Reunião Anual da ANPED*, Caxambu. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 91.
- IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e aplicações: ensino médio*. 9. ed. [S.l.]: Saraiva, 2016. v. 1. Citado na página 41.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da matemática elementar 1: Conjuntos e funções*. 8. ed. [S.l.]: Atual, 2004. v. 1. Citado na página 41.
- JR., J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 9 ano: ensino fundamental*. 4. ed. [S.l.]: FTD, 2018. v. 4. Citado na página 41.
- LEITE, L. S. et al. *Teconogia Educacional: Descubra suas possibilidades em sala de aula*. 8. ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 2014. Citado na página 34.
- LEMKE, R.; SILVEIRA, R. F.; SIPLE, I. Z. Geogebra: uma tendência no ensino de matemática. *Colóquio Luso-Brasileiro de Educação-COLBEDUCA*, v. 1, p. 607–619, 2016. Disponível em: <<https://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8413/6125>>. Acesso em: 22 de julho de 2020. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 37.
- LINHARES, J.; DUARTE, E. C. F. Práticas pedagógicas no uso das ntics: possibilidades e convergências na educação escolar. *Revista Ensino de Ciências e Humanidades-Cidadania, Diversidade e Bem Estar-RECH*, v. 4, n. 1,, p. 58–80, 2019. Citado na página 34.
- MARIM, V.; SOUZA, A. B. Os livros didáticos de matemática: concepção do professor do ensino médio nas escolas públicas. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 5, n. 2, 2015. Disponível em: <<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2801/1439>>. Acesso em: 24 julho 2020. Citado na página 19.
- NASCIMENTO, G. Aplicação da equação logarítmica e exponencial: atividades contextualizadas. *Matemática-Tubarão*, 2019. Disponível em: <https://www.google.com/url?q=https://www.riuni.unisul.br/bitstream/handle/12345/8721/Monografia%2520Giulia%2520Riuni.pdf?sequence%3D1%26isAllowed%3Dy&sa=D&ust=1598513393705000&usg=AFQjCNFXKai1bkf4xNInSL_oGuXhj-Kyju>. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 84.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. [S.l.]: SBM, 2013. Citado na página 40.
- OLIVEIRA, F. C. de. Dificuldades na construção de gráficos de funções. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16119>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 24 e 25.
- PETLA, R. J.; ROLKOUSKI, E. Geogebra—possibilidades para o ensino de matemática. *União da Vitória, PR*, p. 1419–6, 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-6.pdf>>. Acesso em: 02 julho 2020. Citado na página 34.
- PIMENTEL, I. C.; DIONISIO, J.; SIGNOR, D. Bactérias. *Embrapa Semiárido-Capítulo em livro científico (ALICE)*, In: DIONISIO, JA; PIMENTEL, IC; SIGNOR, D.; PAULA, AM de; MACEDA, A . . . , 2016. Disponível em: <<https://www.google.com/url?q=https://www.alice.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/1044167/1/Diana3.pdf&sa=D&ust=1598516463655000&usg=AFQjCNGebk-Gil5K0pVsuQMbRznBWOXXTQ>>. Acesso em: 27 de agosto de 2020. Citado na página 84.

- PRADO, E. M. D. S. do. *Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau*. Rio de Janeiro: Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2014. Disponível em: <<http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/05092014Elza-Maria-dos-Santos-Prado.pdf>>. Acesso em: 20 de agosto de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 59.
- ROBALLO, M. S. Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas. 2014. Disponível em: <https://www.google.com/url?q=https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/17315/1/2014_MuriloSergioRoballo.pdf&sa=D&ust=1598515647630000&usg=AFQjCNEb7Gu0MKt7FJ0LPX3O-kJefjenLA>. Acesso em: 27 de agosto de 2020. Citado na página 83.
- ROMIO-URI, L. C. Explorando a forma canônica da função quadrática por meio do software winplot: Uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 91.
- SÁ, P. F. de; SALGADO, R. C. da S. *Calculadora: Possibilidades de uso no ensino da matemática*. [S.l.]: EDUEPA, 2015. Citado na página 71.
- SAHA, R. A.; AYUB, A. F. M.; TARMIZI, R. A. The effects of geogebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, Elsevier, v. 8, p. 686–693, 2010. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810022007>>. Acesso em: 15 de junho de 2020. Citado na página 36.
- SANTAMARÍA, L. M. R. El uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (ntics) en la enseñanza de la física moderna. *Revista Electrónica “Actualidades Investigativas en Educación”*, Universidad de Costa Rica, v. 10, n. 1, p. 1–13, 2010. Citado na página 35.
- SILVA, T. P. de S.; COSTA, C. G. da. O software geogebra como ferramenta de ensino-aprendizagem no estudo de funções. In: EDITOR (Ed.). [s.n.], 2017. Disponível em: <http://epem.sbempe.com.br/anais/2017/PDFs/CC09649240489_222156.pdf>. Acesso em: 17 de agosto de 2020. Citado na página 91.
- SOUZA, J. R.; GARCIA, J. da S. *#Contato Matemática*. [S.l.]: FTD, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 7, 23, 24 e 41.
- VALDEMARIN, V. T. *Estudando as lições de coisas: análise dos fundamentos filosóficos do método intuitivo*. Capinas: Autores associados, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 7, 26, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.