Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Arquimedes e Polya em sala de aula

Kleber Alves Borges
Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Vinícius M. P. dos Santos**

Trabalho financiado pela Capes e
Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso

Cuiabá - MT

Outubro de 2020

Arquimedes e Polya em sala de aula

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Kleber Alves Borges e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 9 de outubro de 2020.

Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos
Prof. Dr. Djeison Benetti
Prof. Dr. William Vieira Gonçalves

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

B732a Borges, Kleber Alves.
Arquimedes e Polya em sala de aula / Kleber Alves Borges. -- 2020
xii, 76 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Vinícius Machado Pereira dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Heurística. 2. Centro de gravidade. 3. Lei da alavanca. 4. Áreas. 5. Atividades. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título**:** Arquimedes e Polya em sala de aula

Autor: mestrando Kleber Alves Borges

Dissertação defendida e aprovada em 9 de outubro de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Vinicius Machado Pereira dos Santos** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutor Djeison Benetti** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Doutor William Vieira Gonçalves** (Membro Externo)

Instituição: Universidade Estadual de Mato Grosso - campus Barra do Bugres

4. **Doutor Aldi Nestor de Souza** (Membro Suplente)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Cuiabá, **9/10/2020**.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Machado Pereira dos Santos**, **Usuário Externo**, em 09/10/2020, às 18:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Djeison Benetti**, **Usuário Externo**, em 09/10/2020, às 21:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **William Vieira Gonçalves**, **Usuário Externo**, em 15/10/2020, às 14:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2861316** e o código CRC **4FF9E483**.

Referência: Processo nº 23108.072328/2020-87 SEI nº 2861316

Em sua memória, minha querida Mãe!

.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida! Agradeco a minha esposa e filho, pela compreeensão e apoio.

Expresso minha eterna gratidão, ao Professor Vinícius, por aceitar orientar este trabalho, com suas valorosas considerações e sugestões para a elaboração do roteiro de escrita e organização dos capítulos. E também, pela paciência e zelo, ao lidar com minhas limitações, durante as correções deste texto. O meu muito obrigado!

Ao coodenador acadêmico do Profmat, Professor Geraldo, pela atenção e cordialidade, ao cuidar da comunicação e das rotinas acadêmicas do curso.

Aos professores, em especial ao Professor Aldi.

Aos meus colegas de curso!

Muito obrigado!

"Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e levantarei o mundo."

Arquimedes.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma revisão do texto *A arte de resolver problemas* de George Polya, por conter o método das quatro fases para resolver problemas baseado em *heurística*. E também, discorrer sobre a vida e obras de Arquimedes, com foco na quadratura do círculo, baseado no método heurístico e mostrar a engenhosidade de Arquimedes em *O método sobre os teoremas mecânicos* ao calcular a área de uma região delimitada por um segmento de parábola e um segmento de reta, utilizando os princípios físicos do *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*. Considerando o exposto, propor atividades a cerca do estudo das características e o cálculo da área das figuras geométricas planas, a ideia de grandezas inversamente proporcionais, tomando como base a *heurística moderna* e as noções de cálculo de área e, por fim, empregar os conceitos físicos de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* em experimentos práticos utilizando a balança e a alavanca.

Palavras chave: Heurística, centro de gravidade, lei da alavanca, área, atividades.

Abstract

The aim of this work is to present a review of the text *The Art of Problem Solving* by George Polya, as it contains the four-phase method for solving problems based on *heuristic*. Also, discourse about Archimedes ‘life and works, focusing on the square of the circle based on the heuristic method and show Archimedes’ ingenuity in *The Method on Mechanical Theorems* when calculating the area of a region delimited by a parabolic segment and a straight segment, using the physical principles of the *center of gravity* and the *law of the lever*. Considering these ideas, to propose activities around the study of characteristics and the calculation of the area of flat geometric figures, the idea of quantities inversely proportional, based on the *modern heuristic* and the notions of calculation of area reported end finally employ the physical concepts of *center of gravity* and the *law of the lever* in practical experiments using the balance and the lever.

Keywords: Heuristics, center of gravity, law of lever, area, activities.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

"Eureka"

(Arquimedes)

O ponto de partida para a escrita deste trabalho surge do interesse em aprofundar o estudo sobre como resolver problemas. Ou seja, buscar por estratégias que possam contribuir no processo de ensino aprendizagem de resolução de problemas, considerando a problemática observada em sala da aula de muitos alunos em apresentar dificuldades neste assunto. A ideia inicial era fazer uma revisão do livro *A arte de resolver problemas* de George Polya, que contém noções elementares para resolver problemas com base em *heurística*. Mas, por outro lado, ao cursar a disciplina de Tópicos em História da Matemática do Profmat, ministrada pelo prof. Vinícius, durante uma aula de matemática da Grécia antiga com base no texto de Serres (1989), algo atraiu a nossa atenção em *O método sobre os teoremas mecânicos* de Arquimedes e ao ler o texto de Magnaghi e Assis (2014), encontramos prováveis indícios de *heurística* em *O método* de Arquimedes. Assim, foi sugerido como tema para a elaboração deste texto, investigar sobre a *heurística* presente nas obras de Arquimedes e George Polya citadas acima e elaborar uma proposta de intervenção pedagógica para os anos finais do ensino fundamental.

É possível observar que as quatro fases do método de Polya (1995) é muito abordado em textos sobre resolução de problemas, entretanto o termo *heurística* ou *heurística moderna* não aparece na mesma proporção. E por acreditar que seja relevante conhecer mais sobre este tema que nos motivou escrever este trabalho organizado da seguinte forma. Primeiro vamos apresentar o método de resolução de problemas de Polya (1995), que tem por base os conhecimentos relacionados com *heurística*. Em seguida, apresentar passagens da obra de Arquimedes em que podemos encontrar indícios de *heurística*, principalmente na quadratura do círculo e ao abordar a essência de *O método sobre os teoremas mecânicos* no plano ao empregar os conceitos físicos de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* para mostrar a quadratura da parábola. Em seguida, com base nos estudos realizados, discutir propostas de intervenção pedagógicas que contemplem atividades diferenciadas sobre o cálculo da área de figuras geométricas planas e a compreensão de grandezas inversamente proporcionais.

Com base em pesquisa realizada por Arquimedes, George Polya ou *heurística* nos títulos de dissertações no repositório do Profmat durante a elaboração deste texto, não foi encontrado até o momento nenhuma dissertação que tentasse relacionar a *heurística* presente em *A arte de resolver problemas* de George Polya com as ideias de *O método* de Arquimedes. Podemos observar apenas textos sobre o *O método* de Arquimedes, como exemplo, Silva (2014) apresenta a área sob a parábola e o volume da esfera, muitos textos sobre resolução de problemas com base em Polya (1995), no entanto, a maioria dos textos não discorre sobre *heurística*.

O primeiro capítulo será dedicado a revisão do texto *A arte de resolver problemas*, que tem por objetivo principal propor um método dividido em quatro fases para resolver problemas, que consiste em compreender o problema, traçar um plano, executar o plano e verificar se a resolução está correta, o retrospecto. Caso a resposta do problema não esteja correta, retornar ao primeiro passo, repetir o processo. No entanto, para propor o seu método de resolução de problemas, Polya (1995) comenta sobre um tema sensível em matemática, que é como lidar com as dificuldades ao abordar e tentar resolver um problema. Logo, o objetivo deste capítulo é mostrar com base em Polya (1995), as noções sobre os tipos de problemas e o que consiste a solução, expor estratégias para superar as dificuldades no processo de resolução do problemas. Ao lidar com a provisório, o provável, investigar possíveis caminhos que levem a solução, estamos manipulando conhecimentos relacionados com *heurística*. Logo, como os alunos precisam aprender noções de como resolver problemas, as ideias contidas Polya (1995) podem contribuir com a formação inicial em resolução de problemas. E para aprofundar o estudo sobre resolução de problemas, as obras de Oliveira e Corcho (2010) e Tao (2013) são indicadas. No que se refere à problemas de demonstração, aqui será apresentado apenas algumas noções, no entanto, caso o leitor deseje aprender mais poderá encontrar uma abordagem completa em Morais Filho (2012).

No segundo capítulo vamos apresentar um breve relato da vida e obra de Arquimedes, abordar sobre o conhecimento dos gregos antigos sobre o cálculo da área das figuras geométricas planas e relatar as contribuições de Arquimedes sobre a quadratura do círculo. Em seguida abordar a respeito das ideias contidas em *O método sobre os teoremas mecânicos* ou simplesmente, *O método*, no que se refere a aplicação dos conceitos físicos de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* para o cálculo da área de figuras geométricas planas, em particular, mostrar o cálculo da área de uma região delimitado por um segmento de parábola e um segmento de reta, em função do triângulo interior a região, de mesma base e altura. E discorrer sobre a *heurística* presente nas obras de Polya e Arquimedes abordadas neste texto e os impactos no estudo da matemática. Em seguida, apresentar a essência de *O método*, e a discussão sobre a viabilidade da aplicação de experimentos físicos baseados no *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*, como alternativa para complementar o estudo do cálculo de área de figuras geométricas planas, a ideia de grandezas inversamente proporcionais e o cálculo da incógnita em equações do primeiro grau de forma prática na alavanca.

No terceiro capítulo iremos apresentar as definições baseadas em Assis (2008) dos conceitos físicos, dos materiais necessários empregados para realizar experimentos, a construção e calibragem de uma balança e alavanca. Além das observações sobre o comportamento prático da balança e da alavanca, com base em experimentos. Por fim, apresentar as propostas de intervenção pedagógica com foco nos anos finais do ensino fundamental.

Capítulo 1

A heurística de George Polya

Este capítulo é dedicado à apresentar o estudo sobre *heurística*, contido no livro *A arte de resolver problemas* de George Polya. O texto propõe um método, dividido em quatro fases, que consiste de uma sequência de perguntas e sugestões, com o intuito de resolver problemas. Destacamos, o *pequeno dicionário de heurística*, no qual Polya apresenta artigos sobre temas sensíveis em matemática, como indução matemática, formas de demonstração e o seu *método* para resolver problemas.

1.1 Raciocínio heurístico

Não existe uma receita eficiente que resolva todos os tipos de problemas, como enfatiza Polya (1995). O autor aponta que fatores emocionais precisam ser considerados e sugere formas de lidar com esta realidade. Para ajudar os estudantes, destaca o papel do professor, que deve propor problemas considerando o nível dos estudantes, nem muito fácil ou muito avançado para a turma. O docente deve intervir, somente quando for necessário, com sutileza e bom senso - não entregar a solução pronta - apenas guiar os educandos no caminho em direção a resposta. Logo, ao tomar todos estes cuidados, os aprendizes deverão ficar, pelo menos, com a impressão que tiveram participação no processo de resolução do problema. Assim, o professor incentiva sem dar na vista, ou seja, sem que os alunos percebam, quando não conseguirem encontrar a resposta sozinho, a interferência do mestre.

A base do método de Polya (1995) é uma lista de perguntas, cujo objetivo é guiar o estudante ao abordar problemas e tentar resolvê-los. O método é composto por quatro etapas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e o retrospecto ou revisão da execução do plano. Cada etapa contendo muitas perguntas e sugestões em linguagem simples e direta. Polya (1995) utilizou ideias baseadas em heurística para sugerir como resolver problemas.

> *Heurística*, era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras de descoberta e da invenção.
> Heurístico, adjetivo, significa "que serve para descobrir" (Polya, 1995, p. 86-87)

Mesmo quase esquecida atualmente, estudiosos do passado escreveram sobre *heurística*. Logo, Polya (1995) encontrou registros sobre o tema, no livro VII, da Coleção de Pappus, matemático grego do século III d.C. Polya (1995) escreveu: Pappus descreve um ramo de estudo que ele chamou de *analyomenos*. Podemos traduzir este nome por "tesouro da análise"ou "a arte de resolver problemas"ou, mesmo "*heurística*". Há relatos das tentativas dos matemáticos e filósofos, Descartes e Leibniz, que empreenderam esforços para compreender mais a fundo sobre o tema. E, na observação de Polya (1995), também Bernard Bolzano, lógico e matemático, apresentou notável descrição pormenorizada da *heurística*. Assim, o livro *A arte de resolver problemas* tem por objetivo principal retomar o estudo sobre *heurística* e suas aplicações na resolução de problemas. Assim, com base em seus estudos, Polya (1995) apresentou a definição:

> *Heurística moderna* procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciente da *heurística* deve o levar em conta, tanto suas bases lógicas quanto psicológicas. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem construir a base em que se assenta a *heurística*. Neste estudo não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. (Polya, 1995, p. 87)

Polya (1995) aponta que seu texto discute sobre temas filosóficos. Mas, prefere utilizar uma linguagem mais simples, acessível aos estudantes. Relata sobre o papel relevante da psicologia, principalmente nos momentos que não conseguimos resolver um problema; ao cometer erros, não devemos desistir, pelo contrário, renovar as forças, procurar contornar as dificuldades, seguir em frente, pensar em novas estratégias. Logo, o erro faz parte do processo de resolução de problemas e deve ser levado em consideração, não deixar-se abater pelo insucesso e aproveitar o momento para revisar, refletir, reavaliar, abordar o problema de outra forma e não desistir de tentar encontrar a solução.

Para desenvolver a capacidade de resolver problemas de forma independente, o raciocínio heurístico é fundamental. Pois, para construir uma solução, quando não encontramos um problema semelhante já resolvido, precisamos analisar muitas possibilidades e verificar a viabilidade de cada uma delas, mesmo que sejam estranhas à primeira vista. A partir de uma ideia com potencial, aprender a reconhecer os sinais heurísticos que possam ser utilizados na resolução.

> *Raciocínio heurístico* é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o *raciocínio heurístico*. Teremos a absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas frequentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o *raciocínio heurístico*, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício.
> Muitas vezes, o *raciocínio heurístico* é baseado na indução ou na analogia.
> O *raciocínio heurístico* vale por si próprio. O que é mau é confundi-lo com a demonstração rigorosa. Pior ainda é fazer passar um *raciocínio heurístico* por uma demonstração rigorosa. (Polya, 1995, p. 132-33)

O estudo de temas em matemática geralmente é feito de forma direta. Apresentação da teoria: definições, teoremas, corolários, exemplos e exercícios. Para cursos de graduação e pós-graduação na área de matemática, esta prática é natural e considerada apropriada. Mas, quando voltamos nosso olhar para o ensino fundamental e médio, a maioria dos estudantes apresentam dificuldades em lidar com esta forma de abordagem. Colocados em contato com teorias que estão distantes de aplicações práticas, apresentadas de forma pronta e inflexível. Devendo estudar, aprender, e a justificativa é, vai cair na prova ou no vestibular (Enem). Em contrapartida, a forma de ensinar matemática deve ser pensada levando em consideração o público alvo. Obviamente, um estudante de graduação em matemática, escolheu este curso por ter certa afinidade com a disciplina. Fato não observado em grande parte dos estudantes da escola de nível básico. Muitas vezes, não tiveram oportunidade e nem tempo necessário para compreender a estrutura da disciplina e aprender a apreciar seu estudo. Para tentar reverter esta realidade da educação básica, no que se refere a matemática, é preciso complementar a forma de ensinar. Apresentar as ideias, como elas foram concebidas e amadurecidas até chegarem em algum resultado é um bom caminho. Explorar o processo de criação, observação e compreensão de fenômenos físicos e da descoberta de resultados matemáticos, pode ser uma importante ferramenta a ser utilizada, com o intuito de democratizar o acesso ao conhecimento na área de exatas. Para obtermos uma abordagem mais abrangente sobre o ensino de matemática, podemos recorrer a *heurística*.

A seguir, a classificação dos problemas por Polya (1995) e das características da resolução.

1.2 Problemas

Resolver um problema de matemática não é uma tarefa fácil para a maioria dos estudantes. Um dos motivos é a falta de preparo em como abordar o problema. O que devo fazer? Como fazer? Por exemplo, qual operação devo realizar? Somar? Subtrair? Caso consiga identificar que se trata uma subtração, o aluno terá pelo menos, um ponto de partida para tentar encontrar a solução. No entanto, para problemas mais difíceis, que envolvam operações ou procedimentos mais complexos, o aluno poderá não ter a menor ideia de como proceder. Para tentar superar esta dificuldade, cabe ao professor abordar sobre as ideias gerais envolvidas na resolução de problemas. Partilhar com os estudantes as estratégias que possam ser aplicadas de forma geral, um método. Assim, os educandos terão uma regra geral de aproximação, ao menos uma noção do que deve ser feito. Uma operação? Determinar uma incógnita? Mostrar ou demonstrar um resultado? O ponto de partida é conhecer sobre os possíveis tipos de problemas e no que consiste a sua resolução. Para isto, vamos estudar as características dos problemas segundo a divisão proposta por Polya (1995) e classificar como problema de determinação ou demonstração.

1.2.1 Problemas de determinação

Polya (1995) privilegia este tipo de problemas em seu livro. O objetivo de resolver um problema de determinação é encontrar a *incógnita*. Além da incógnita, os dados e a condicionante, são as partes principais desse tipo de problema.

> A incógnita ... aquilo que se procura ou de que se necessita. Os *problemas de determinação* podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. No problema da novela policial, a incógnita é um assassino. No problema de xadrez, a incógnita é a jogada do enxadrista. Em certos problemas de Álgebra Elementar, a incógnita é um número. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura. (Polya, 1995, p. 124)

O método heurístico contido no livro de Polya (1995) pode ser aplicado na resolução de problemas sobre temas gerais. Mas, vamos enfatizar em sua aplicação sobre problemas matemáticos.

> Para resolver um "problema de determinação"é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante. Nossa lista contém muitas indagações e sugestões relativas a essas partes.
> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
> Separe as várias partes da condicionante?
> Considere a incógnita! E procure pensar num problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
> Mantenha apenas uma parte da condicionante, ponha a outra de lado; até que ponto a incógnita fica assim determinada? Como pode ela variar? É possível obter alguma coisa de útil a partir dos dados? Pode imaginar outros dados que sirvam para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita, ou os dados, ou ambas as coisas, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos entre si?
> Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? (Polya, 1995, p. 125)

O método de resolução de problemas proposto por Polya (1995) não deve ser entendido como uma receita infalível. Pelo contrário, é preciso incentivar os alunos a procurar por possíveis erros de interpretação e coleta de dados. Dito isto, cada questionamento e sugestão terá o potencial de ajudar a classificar e compreender a função de cada informação que serão usadas para montar a resolução do problema.

1.2.2 Problemas de demonstração

Problemas de demonstração tendem a ser mais explorados no ensino superior devido ao grau de complexidade. No entanto, mesmo para alunos de graduação em matemática que não tiveram oportunidade de estudar as noções básicas sobre uma demonstração matemática no ensino básico, podem apresentar mais dificuldade em lidar com problema de demonstração. Assim, no ensino básico não se deve omitir sobre as demonstrações e sua relevância ao estudo da matemática. Logo, o professor precisa apresentar as noções básicas aos alunos. Neste sentido, (Polya, 1995) aborda sobre as demonstrações matemáticas, chama atenção para: demonstrações completas, incompletas, por absurdo e indireta. Mais uma vez, utiliza linguagem simples na medida do possível e muitos exemplos para justificar suas afirmações. Observa ainda sobre indução matemática, assunto que causa muitas dúvidas. Por fim, reforça sobre a importância do rigor presente nas demonstrações matemáticas e sobre os sistemas lógicos, como exemplo, o presente em *Os elementos* de Euclides.

> A Geometria, tal como apresentada em *Os elementos* de Euclides, não é uma simples coleção de fatos, mas sim um sistema lógico. Os axiomas, as definições e as proposições não estão relacionada em sequências aleatórias, mas sim dispostos em perfeita ordem. Cada proposição está de tal maneira situada que ela pode basear-se nos axiomas, definições e proposições que a precedem. Podemos considerar a disposição ordenada das proposições, como o maior sucesso de Euclides e o seu sistema lógico como o maior mérito dos Elementos. (Polya, 1995, p. 116)

Com relação ao seu método heurístico, Polya (1995) toma o cuidado de abordar sobre o rigor presente nas demonstrações matemática e sua fundamental importância para esta ciência. Assim, o seu método é pensado para ajudar os estudante e professores para resolver problemas. Não para substituir o método tradicional de demonstração. Logo, servir como apoio, organizar as ideias e filtrar aquelas que podem ser aproveitadas na elaboração da resolução. Polya (1995) define problemas de demonstração e o que trata sua resolução de maneira geral.

> O objetivo de um "problema de demonstração"é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeiro ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa. Se o "problema de demonstração"for um problema matemático comum, suas partes principais serão a hipótese e a conclusão do teorema que tiver de ser provado ou refutado. (Polya, 1995, p. 124-25)

Verificar se uma afirmativa é verdadeira em muitos casos não é uma tarefa fácil. Assim, além de identificar a hipótese e a conclusão, é preciso manipular as informações para elaborar a demonstração. Vejamos as noções básicas presentes no método sobre este tema.

> Para resolver um *problema de demonstração* é preciso conhecer, com grande exatidão as suas partes principais, a hipótese e a conclusão. Há indagações e sugestões úteis relativas a essas partes e que correspondem aquelas indicações e sugestões da nossa lista que são especialmente aplicáveis aos *problemas de determinação.*
> Qual é a hipótese? Qual é a conclusão?
> Separe as várias partes da hipótese.
> Procure a relação entre a hipótese e a conclusão.
> Considere a conclusão. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.
> Mantenha apenas uma parte da hipótese, ponha a outra de lado: a conclusão ainda é válida? É possível obter alguma coisa de útil a partir da hipótese? Pode imaginar outra hipótese a partir da qual seja possível chegar-se facilmente a conclusão? Pode mudar a hipótese, ou a conclusão ou, se necessário, ambas, de modo a que a nova hipótese e a nova conclusão fiquem mais próximas uma da outra? Utilizou toda a hipótese? (Polya, 1995, p. 126)

A definição apresentada, as indagações e sugestões baseadas no *método heurístico* de Polya (1995), se usadas pelo professor - respeitando o nível dos estudantes - e levando em consideração que se trata de um processo lento, cíclico e progressivo, poderá ser trabalhado com os alunos a partir dos anos finais do ensino fundamental, as noções básicas sobre demonstrações matemáticas. Claro que não se trata de uma tarefa fácil, no entanto, é preciso criar estratégias com o objetivo de abordar sobre as características de uma demonstração e sua fundamental importância para a matemática. Assim, os estudantes terão a oportunidade de conhecer sobre este assunto e para os educandos que decidirem se aprofundar na área de exatas, poderão avançar mais rápido em seus estudos, já que que terão a oportunidade de aprender as noções básicas sobre uma demonstração matemática.

1.3 O Processo

Sobre o processo de resolução de problemas, Polya (1995) apresenta o *pequeno dicionário de heurística* no qual o autor discorre sobre noções de conhecimentos sobre matemática. A seguir, vamos apresentar as ideias contidas nos artigos relacionados com a *heurística.*

1.3.1 Analogia

Quem já teve a experiência de se deparar com um problema parecido com algum já resolvido previamente, não terá grande trabalho. Pois não será necessário empregar muito tempo e recursos para desvendar a solução. Vários problemas podem ser resolvidos empregando analogia e esta forma de abordagem está presente nas mais variadas atividades humanas.

> A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhuma delas. (Polya, 1995, p. 29)

Conforme Polya (1995), resolver um problema encontrando outro problema análogo mais simples é um grande feito. Como exemplo; encontrar o centro de gravidade de um tetraedro (problema principal) utilizando a forma como encontrou o centro de gravidade de um triângulo: o centro de gravidade de um triângulo é determinado utilizando seus três vértices, daí podemos conjecturar que o centro de gravidade do tetraedro também poderia ser encontrado utilizando seus quatro vértices. Lembrando que o tetraedro é uma figura geométrica tridimensional composta de seis arestas, quatro vértices, quatro faces, cujo o formato de cada uma é um triângulo. Desta forma:

> Essa conjectura constitui uma "inferência por analogia". Sabemos que o triângulo e o tetraedro assemelha-se em muitos aspectos, conjecturamos que eles se assemelham-se em mais um aspecto.
> A inferência por analogia parece ser o tipo mais comum de conclusão e é o essencial. Proporciona conjecturas mais ou menos plausíveis que podem ou não ser confirmadas pela experiência e pelo raciocínio mais rigoroso. (Polya, 1995, p. 33)

Por outro lado, se acontecer de não encontrar um problema auxiliar mais simples, ou sua solução não seja útil de forma direta. Logo, mesmo neste caso, é possível tentar contornar e encontrar um caminho em direção a resolução do problema.

> Ao resolver um problema proposto, podemos muitas vezes utilizar a resolução de um problema análogo mais simples: pode nos ser possível utilizar o seu método, o seu resultado ou ambos. Em particular, podem ocorrer que a solução do problema análogo não possa ser imediatamente utilizada ao nosso problema original. Neste caso, pode valer a pena reconsiderar a resolução, variá-la e modificá-la até que, depois de serem tentadas diversas forma de resolução, encontrar finalmente uma, suscetível de aplicação ao nosso problema original. (Polya, 1995, p. 32-33)

Portanto, a analogia é uma importante ferramenta a ser empregada na resolução de problemas.

1.3.2 Decomposição e recombinação

Ao decompor o problema, temos a oportunidade de observar cada informação de forma individual. Isto pode ajudar a compreender os detalhes, que muitas vezes, na leitura geral do problema não conseguimos.

> Procuremos, antes de tudo, compreender o problema como um todo. Uma vez compreendido, estamos em melhor posição para avaliar que pontos particulares podem ser os mais essenciais. Tudo examinado um ou dois pontos essenciais, ficamos em melhor posição para julgar quais os outros detalhes que merecem exame mais atento. Passamos aos detalhes e decompomos gradualmente o problema, mas não além do necessário. (Polya, 1995, p. 41)

Uma ideia interessante e desafiadora e a recombinação do problema. Combinar de forma diferente as informações, montar o quebra-cabeça com as peças em outros prováveis posições, avaliar o papel que cada parte desempenha na nova visão geral do problema. Assim, (Polya, 1995) sugere a possibilidade de recombinar os elementos do problema, um problema auxiliar.

> Uma vez decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos tentar recombinar de modo a obtermos um problema novo e mais acessível, que possamos utilizar como um problema auxiliar.
> As possibilidades de recombinação são, naturalmente, ilimitadas. Os problemas difíceis exigem combinações ocultas, excepcionais, originais, e o engenho do solucionador revela-se na originalidade da combinação. Há, porém, certos tipos de combinações úteis e relativamente simples, suficientes para os problemas menos complexos, que devemos conhecer bem e ensaiar primeiro, mesmo que depois sejamos obrigados a recorrer a meios menos óbvios. No preparo de um novo problema, a partir do problema proposto podemos:
> (1) manter a incógnita e mudar o restante (os dados e a condicionante);
> (2) manter os dados e mudar o restante (a incógnita e a condicionante);
> (3) manter a incógnita e os dados. (Polya, 1995, p. 42)

A ideia de recombinar os elementos de um problema exige criatividade. Assim, para estudantes em nível de eduação básica, o professor precisa conduzir o processo de aprendizagem com cuidado, para que todos tenham a oportunidade de desenvolver a capacidade de observar e explorar outras possibilidades com as informações de um problema. Sob um ponto de vista diferente, criar raciocínios heurísticos. Para problemas de determinação: após identificar a incógnita, os dados e a condicionante, o professor deverá guiar o aluno a tentar, caso seja necessário, recombinar o problema e fazer suposições ao considerar ou não certas partes do problemas. Se o professor julgar pertinente, cabe ao docente, criar um problema auxiliar derivado do principal que possa contribuir para a resolução do problema inicial, ou seja, ensinar essa extratégia aos seus alunos.

Sobre problemas de demonstração, Polya (1995) observa:

> Uma vez compreendido o problema como um todo, devemos, de maneira geral, examinar as suas partes principais, que são a hipótese e a conclusão do teorema que temos de demonstrar ou de refutar. Precisamos compreender perfeitamente tais partes. Qual é a hipótese? Qual é a conclusão? Se houver necessidade de descer a pontos mais específicos, poderemos separar as diversas partes da hipótese e examiná-las uma a uma. Podemos então passar a outros detalhes, decompondo mais e mais o problema.
> (1) Manter a conclusão e mudar a hipótese. Tentamos primeiro relembrar um tal problema. Considere a conclusão. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante. Se não conseguimos relembrar tal teorema, procuremos inventar um: é possível imaginar uma outra hipótese da qual se possa facilmente deduzir a conclusão? Podemos mudar a hipótese pela omissão de alguma coisa, sem nada lhe acrescentar: mantenha apenas uma parte da hipótese e deixe a outra de lado. A conclusão continua válida?
> (2) Manter a hipótese e mudar a conclusão: é possível obter algo de útil da hipótese?
> (3)Manter tanto a hipótese quanto a condicionante. Podemos estar mais inclinados a mudar ambas se não tivermos sucesso com a mudança de uma só delas. É possível mudar a hipótese, ou a conclusão, ou ambas, se necessário, de modo que a nova hipótese e a nova conclusão fiquem mais próximas uma da outra? (Polya, 1995, p. 47)

Ao estudar um problema de demonstração para desvendar sua resolução, é necessário identificar as suas partes principais. Logo, uma forma de decomposição, além de usar de possíveis manipulações das informações e seus resultados, recombinação.

Se o professor apresentar domínio sobre uma demostração, terá condições de mostrar aos alunos: a estrutura, as ideias básicas contidas nos detalhes de como fazemos e pensamos a matemática, e os aprendizes dedicarem tempo suficiente para absorverem as ideias abordadas e aprofundar o seu conhecimento, então estarão no caminho certo para relacionar e aplicar os saberes matemáticos. Não podemos deixar de observar que propor um problema matemático de determinação para alunos do ensino básico é uma atividade difícil, pois muitos alunos não conseguem realizar em curto prazo avanços significativos sobre esta tarefa. Imagine apresentar um resultado matemático que envolva uma demonstração. Desta forma, abordar sobre demonstração matemática, problemas de demonstração, está muito distante da realidade e do alcance de alunos dos anos finais do ensino fundamental. Mesmo alunos de graduação podem não se apropriam com profundidade suficiente, a ponte de adquirir domínio sobre o assunto. Por isso, o professor não deve desanimar, desistir de abordar sobre o tema, mesmo que os resultados demorem para serem detectados, logo que tratar sobre o assunto é fundamental para o processo de alfabetização e letramento em matemática.

Devido a complexidade, as demonstrações são deixadas de lado, desde o ensino fundamental. Muitos livros didáticos deixam a desejar, não contemplam sobre o tema de forma apropriada. Claro que o objetivo da educação básica não é preparar um aluno para estudar uma graduação em matemática. Mesmo assim, as avaliações de desempenho em matemática em âmbito nacional, retornam resultados abaixo do esperado. Este relato não é uma tentativa de generalização, mas, pode retratar pelo menos, em parte, a realidade para muitos estudantes deste país.

Para tentar superar esta realidade, uma alternativa é incentivar os estudantes a ter contato com as demonstrações e demais elementos que ajudem a compreender a estrutura da matemática. Assim, cabe ao professor, tentar criar um ambiente mais proprício possível para ajudar os estudantes nos estudos que levem à alfabetização e letramento em matemática.

O foco principal deste trabalho não é discorrer sobre demonstrações, entretanto, como Polya (1995) aborda sobre o tema ao tratar sobre *heurística* e defendemos que é preciso abordar sobre noções básicas de demonstrações matemáticas no ensino básico, foi apresentado neste item, algumas breves noções relacionadas ao *raciocínio heurístico* e problemas de demonstração.

1.3.3 Elementos auxiliares

Considerar um elemento auxiliar é um grande feito. É importante que os estudantes tenham contato com exemplos de problemas resolvidos com esta estratégia.

> Há elementos auxiliares de vários tipos. Ao resolvermos um problema geométrico, podemos acrescentar novas linhas à figura, linhas auxiliares. Ao resolvermos um problema algébrico, podemos adotar uma incógnita auxiliar. Teorema auxiliar é aquele cuja demonstração empreendemos na esperança de facilitar a resolução de nosso problema original. (Polya, 1995, p. 69)

A *heurística* se bem empregada, irá criar um ambiente em que as chances de se descobrir um elemento auxiliar útil a resolução de um problema será maior. No entanto, é preciso observar os sinais, não desistir de investigar cada ideia que surgir.

1.3.4 Problemas auxiliares mais acessíveis

> É aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro - o nosso problema original. Este último é o fim que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo. (Polya, 1995, p. 119)

Ao considerar um problema auxiliar, (Polya, 1995) aponta sobre os riscos desta estratégia. Criar falsas respostas, que precisam ser verificadas. Devemos ainda, ter o cuidado ao avaliar um caminho seguido quando este não parecer promissor, tomar medidas para não empregar muito tempo em algo inútil. Também relata sobre a cadeia de problemas auxiliares equivalentes no raciocínio matemático.

> Temos a resolver um problema A e não sabemos como, mas podemos achar que A é equivalente a um outro problema B. Ao examinarmos B, podemos encontrar um terceiro problema C, equivalente a B. Procedemos da mesma maneira, reduzimos C a D, e assim por diante, até chegar a um último problema L, cuja resolução é conhecida ou imediata. Como cada um desses problemas e equivalentes ao que o precede; o último problema, L, deve ser igual ao problema original A. Ficamos, assim, capazes de deduzir a resolução do problema original A a partir do problema L, ao qual chegamos como último elo de uma cadeia de problemas auxiliares. (Polya, 1995, p. 121)

Uma aplicação do procedimento descrito acima por Polya (1995) é a ideia empregada ao resolver uma equação do primeiro grau, em que são realizadas operações matemáticas para obter uma sequência de equações equivalentes, cada vez mais simples, até que o valor desconhecido representado geralmente, por uma letra, *a incógnita*, esteja isolada em um membro da igualdade. Assim, o valor numérico determinado pela última igualdade, também irá satisfazer todas as anteriores, em especial a primeira equação. Ideia que parece simples, mas que se não for bem abordada pelo professor, muitos alunos não conseguem entender.

1.4 Quatro fases

Polya (1995) organizou um método para resolver problemas, divido em quatro fases: compreender o problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Para explicar sobre as fases, o autor utilizou muitos exemplos de situações idealizadas de diálogos em sala de aula, entre professor e aluno. Conforme veremos a seguir, o método é composto de indagações e sugestões para orientar os estudantes.

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário, temos de ver os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecer um *plano.* Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (Polya, 1995, p. 3 - 4)

1.4.1 Compreender o problema

Ao realizar a leitura do enunciado do problema, tentar responder cada um dos questionamentos a seguir. Ao proceder desta forma, vamos criar a oportunidade de coletar as informações e interpretar os dados, fundamentais para o próximo passo, traçar um plano de resolução.

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
> É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditório?
> Trace uma figura. Adote uma notação adequada.
> Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (Polya, 1995, p. XII)

Para compreender o problema, Polya (1995) aponta que devemos estudar o enunciado, busca saber o objetivo, a incógnita. Incentiva ainda, ler o texto quantas vezes for necessário até identificar todos os termos e isolar os principais.

1.4.2 O plano de resolução

Nesta etapa, o estudante será desafiado em sua capacidade de observar, relembrar em seus conhecimentos adquiridos, encontrar algum que possa ser utilizado. Devendo tentar analogias, explorar possibilidades na busca de um problema parecido. Deslumbrar a oportunidade de revisar, aprofundar, reavaliar, consolidar os saberes. Buscar informações sobre assuntos novos, que julgar relevantes. Momento que vai exigir criatividade, *heurística.*

> Já viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
> Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
> É possível reformular o problema?
> Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em contas todas as noções essências implicada no problema? (Polya, 1995, p. XII-XIII)

Criar um plano de resolução vai exigir dedicação, paciência, força de vontade por parte dos estudantes. Cabe ao professor orientar, apoiar, partilhar experiências e incentivar. Pois, muitos jovens não tiveram tempo e oportunidade de se aprimorar das habilidades necessárias e para socializar esta capacidade como os alunos é preciso respeitar o tempo dos estudantes, o progresso pode ser lento, mas, com o tempo, e a intervenção do professor, os alunos poderão absorver e aplicar esse conhecimento na resolução de problemas.

1.4.3 Execução do plano

Depois de conseguir traçar uma estratégia de resolução, ainda vai restar a dúvida. Se seguir esse caminho, vou encontrar a resolução correta? Ou devo retornar ao passos anteriores? Ajustar/elaborar outro plano? Muitas dúvida podem surgir, mas, é preciso seguir em frente, aplicar o plano.

> Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.
> É possível verificar claramente que o passo está correto?
> É possível demonstrar que ele está correto? (Polya, 1995, p. XIII)

Para verificar se os procedimentos realizados estão corretos, podemos recorrer ao retrospecto.

1.4.4 Retrospecto

> É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?
> É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?
> É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? (Polya, 1995, p. XIII)

Se verificar a resolução e esta estiver correta, pronto, terminado o trabalho. Caso contrário, é preciso procurar por inconsistências, retornar ao início do processo, buscar por erros na compreensão do problema, reavaliar a viabilidade do plano ou procurar por outro caminho que possa parecer promissor. Aplicar o novo plano e fazer o retrospecto. Repetir todo o processo até obter a solução.

1.5 Caráter heurístico dos sinais de progresso

Ao lidar com *heurística* é preciso tomar cuidado. Caso contrário, o estudante poderá cometer graves erros e não conseguir identifica-lós, ou ainda, desistir de tentar resolver problemas por não conseguir lidar com o provável, provisório, fazer conjecturas. Por isso, é fundamental aprender a identificar os sinais de progresso.

> Com a palavra *provavelmente*, a conclusão é razoável e natural, mas de maneira alguma constitui uma demonstração conclusiva: ela é somente uma indicação, uma sugestão heurística. Seria um grande engano esquecer que uma tal conclusão é apenas provável e considerá-lo como uma certeza. Porém desprezar inteiramente essas conclusões seria um engano ainda maior. Que tomar uma conclusão heurística como certa, poderá ser enganado e ficar desapontado; mas quem desprezar completamente as conclusões heurísticas não fará nenhum progresso. Os mais importantes sinais de progresso são heurísticos. Devemos confiar neles? Devemos segui-lo? Siga-os, mas fique de olho aberto. Confie neles, mas não deixe de observar. E nunca renuncie ao seu discernimento. (Polya, 1995, p. 145)

Ao enveredar pelo estudo da *heurística*, podemos observar sobre as noções de como os resultados em matemática podem ser descobertos. O matemático tem de lidar com o desconhecido, o provisório, *raciocínios heurísticos*, o erro, tentar muitas vezes até conseguiu um progresso. Assim como um inventor que precisa de muitas tentativas para apresentar um invento, se o matemático desistir antes de explorar todas as possibilidade, outra pessoa que tiver mais persistência poderá chegar até o final e descobrir o resultado. O que resta fazer é aprender a identificar os sinais de progresso ao lidar com *heurística.*

> A compreensão clara da incógnita é progresso. A disposição ordenada dos diversos dados, de tal maneira que possamos facilmente relembrar de qualquer um deles, também é progresso. A visualização nítida da condicionante como um todo pode significar um progresso essencial e a separação dessa condicionante em partes apropriadas pode constituir um importante passo à frente. Quando encontramos uma figura fácil de imaginar, ou uma notação fácil de reter, podemos razoavelmente crer que fizemos progresso. A recordação de um problema correlato e já anteriormente resolvido pode constituir um passo na direção certa.
> E assim por diante: a cada operação mental concebida com clareza corresponde um certo sinal claramente expresso. A nossa lista, bem examinada, inclui também sinais de progresso.
> Ora, as indagações e sugestões que constituem essa nossa lista são simples, óbvias, apenas de bom senso comum. Para compreendê-la, não é necessário nenhuma ciência oculta, pois bastará um pouco de bom senso, naturalmente, alguma experiência. (Polya, 1995, p. 146)

A definição de *heurística* e suas possibilidade de aplicação, conforme (Polya, 1995) apresenta no livro *A arte de resolver problema* pode ser amplamente empregada em matemática. Ao tentar resolver um problema, estamos lidando em grande parte do tempo, com ideias que dependem de *raciocínios heurísticos.* Assim, dentro do contexto matemático a *heurística* é capaz de produzir bons resultados para a aprendizagem e desenvolvimento desta ciência.

No capítulo a seguir, vamos abordar sobre a vida e obra de Arquimedes, as noções sobre o cálculo da área das figuras planas conhecidas pelos gregos, a quadratura do círculo e como Arquimedes aplicou os conceitos físicos do *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* na obra *O método sobre os teoremas mecânicos.*

Capítulo 2

O método de Arquimedes

O objetivo é apresentar um breve relato sobre a vida e obra de Arquimedes, os fundamentos de matemática e física. E por fim, descrever o procedimento contido em *O método sobre os teoremas mecânicos* de Arquimedes, *O método*. Como *O método* de Arquimedes possui partes complexas, que envolvem o cálculo do volume de figuras geométricas tridimensionais sofisticadas, o enfoque aqui, será a parte de *O método* que envolve o cálculo da área do segmento parabólico. Logo, não faremos uma abordagem completa de *O método*. Mesmo assim, ao acompanhar os estudos feitos no plano é suficiente para compreender a essência desta obra.

2.1 Arquimedes (287-212 a.C)

Strathern (1999) aponta que Arquimedes nasceu em Siracusa, uma importante cidade estado grega na Sicília, atual Itália. Filho de Fídias, um astrônomo e aristocrata. Ainda jovem, Arquimedes complementou seus estudou na cidade de Alexandria, o mais importante centro de conhecimento da época, com sua famosa biblioteca que possuía um vasto acervo com milhares de textos. Possivelmente, o lugar que conheceu outros grandes estudiosos, com os quais, Arquimedes ao retornar para sua cidade natal, passou a enviar seus trabalhos, muitos em formato de cartas. Em parte, graças a estas correspondências, o seu legado sobreviveu.

Arquimedes é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos. Capaz de grandes descobertas e contribuições nas áreas de matemática, física e engenharia. Com grande capacidade de adaptação e singular engenhosidade, conseguiu resolver problemas práticos e teóricos, como inventar uma forma de retirar a água dos porões dos navios - o que permitiu viagens mais longas - e para irrigação. Com seu mecanismo mecânico, um parafuso usado para transportar água contra a gravidade. Trabalhou para rei de Siracusa na organização das defesas militares da cidade. Pode ter projetado um grande navio, chamado Siracusia. É aceito por estudiosos modernos que muitas obras de Arquimedes sobreviveram, o seu legado foi preservado.

No campo da matemática pura descobriu muitos teoremas, o que Arquimedes considerava o seu grande legado. Já que os inventos destinados à resolução de problemas práticos eram atividades de menor valor para Arquimedes. Mesmo distante, enviava seus trabalhos no formato de cartas para grandes estudiosos da época. Uma dessas cartas endereçada à Erastóstenes de Alexandria, contendo o que chamamos de *O método*, consistia de procedimento experimentais físicos para descobrir ou justificar teoremas puramente matemáticos sobre áreas e volumes de figuras geométricas complexas.

Autor de muitos textos que sobreviveram pelos séculos, copiados e comentados. O interesse por suas obras não é por acaso. No campo das ciências, em matemática e física fez grandes descobertas, que podem ser consideradas a base da revolução científica a partir do século XVI. Arquimedes já dominava as ideias relacionadas com a base para o desenvolvimento do cálculo.

Obras conhecidas de Arquimedes.

Sobre o equilíbrio dos planos;
Quadratura da parábola;
Sobre o equilíbrio dos planos. Livro I;
Quadratura da parábola;
Sobre o equilíbrio dos planos. Livro II;
Sobre a esfera e o cilindro;
Sobre as espirais;
Sobre conoides e esferoides;
Sobre os corpos flutuantes;
Medida do círculo;
O contador de areia;
Stamachion;
Método sobre os teoremas mecânicos.
Obras que se conhece fragmentos ou citadas em textos de outros autores.
O problema bovino;
Livro de lemas;
Poliedros semi-regulares;
Área do triângulo;
Sobre o heptágono em um círculo;
Elementos de mecânica.

(Magnaghi e Assis, 2014, p. 35-7)

Netz e Noel (2009) em seu livro intitulado *Código Arquimedes* descreveram a jornada para conseguir desvendar as letras dos textos de Arquimedes em uma cópia de *O método* do século VIII, por debaixo do texto de um livro de orações do século XIII. A leitura quase completa do texto de Arquimedes é muito importante por conter o seu método mecânico para estudar teoremas matemáticos.

> A melhor caracterização da tradição científica europeia é que ela consiste em uma série de notas de rodapé que citam Arquimedes. Como exemplo,*Diálogo sobre duas novas ciências* de Galileu. Esse livro foi publicado em 1638: ... Essencialmente, Galileu foi o precursos de duas ciências, da estática (como os objetos se comportam em repouso) e da dinâmica (como os objetos se comportam em movimento). Com relação à estática, os principais legados de Galileu são os *centro de gravidade* e a *lei do equilíbrio.* Ambos os conceitos Galileu tomou emprestado - sempre expressando, explicitamente, sua adimiração - de Arquimedes. Com relação à dinâmica, os principais legados de Galileu são *A aproximação de curvas* e o *De tempos e movimentos*, os quais, mais uma vez, derivam diretamente de Arquimedes. Nenhuma outra autoridade é citada com tanta frequência, ou com igual reverência. Galileu fundamentalmente começou do ponto em que Arquimedes havia parado, prosseguindo na mesma direção definida por seu predecessor grego. Isso é verdade não somente para Galileu, como também para outras grandes figuras da chamada"revolução científica", como Leibniz, Huigens, Fermat, Descartes e Newton. Todos foram crias de Arquimedes. Com Newton, a ciência da revolução científica alcançou a perfeição de forma perfeitamente arquimediana. Baseado em primeiros princípios puros e distintos, aplicando geometria pura. Newton deduziu as regras que governam o universo. Toda a ciência posterior é uma consequência do desejo de generalizar métodos newtonianos - isto é, arquimedianos. Os dois princípios que autores da ciência moderna aprenderam a partir de Arquimedes foram:
> . A matemática do infinito;
> . A aplicação de modelos matemáticos ao mundo físico.
>
> (Netz e Noel, 2009, p. 21-22)

A obra de Arquimedes abordada neste trabalho será o *Método sobre os teoremas mecânicos*, que no decorrer do texto vai ser identificado como *"O método"*. Trata-se de uma carta enviada para Eratóstenes de Alexandria, que continha teoremas e proposições sobre o cálculo da área da superfície delimitada por uma parábola e do volume de figuras tridimensionais, utilizando os princípios físicos do *centro de gravidade* e a *lei da alavanca.*

Vamos a seguir reunir e apresentar algumas informações relevantes ao entendimento da essência de *O método.*

2.2 O *centro de gravidade*

O conceito de *centro de gravidade* é utilizado por Arquimedes em seu método. Magnaghi e Assis (2014) apresentam uma definição para o *centro de peso*, nome que Arquimedes atribuia ao conceito moderno de *centro de gravidade.* Para esta afirmação, Magnaghi e Assis (2014) recorreram ao estudo de outras obras de Arquimedes e aos comentários de estudiosos sobre o assunto, já que não se conhece nenhuma definição de centro de gravidade nas obras conhecidas de Arquimedes. Ainda há a possibilidade que a definição esteja em algum texto grego perdido. Com imaginação, experimentos e estudos teóricos, observa-se uma metodologia para determinar de forma experimental e matemática o *centro de gravidade*.

> O *centro de gravidade* de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanecerá em repouso e preservará sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação a Terra. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 45-46)

Magnaghi e Assis (2014) afirmam que Arquimedes tinha uma maneira experimental para encontrar o *centro de gravidade*. Na obra Quadratura da Parábola, Arquimedes relata:

> Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o *centro de gravidade* do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada. (Magnaghi e Assis, 2014, p.46 apud Mugler, 1971)

Desta forma, o procedimento consiste em pendurar por um fio o objeto pelo ponto P_1 até o repouso (primeira situação de equilíbrio). Traçar um segmento de reta vertical por P_1 ou imaginar um segmento vertical por P_1, no caso de objetos tridimensionais. Em seguida, pendurar o objeto pelo ponto P_2 diferente de P_1, até atingir o repouso (segunda situação de equilíbrio). Traçar o segundo segmento ou imaginar, como na primeira situação de equilíbrio. O ponto de encontro das duas semirretas é o centro de gravidade do objeto. Portanto, Arquimedes tinha um procedimento prático para determinar o centro de gravidade de um objeto "corpo". Obviamente, para figuras geométricas regulares, como quadrado, retângulo, losango, triângulos retângulos e outras figuras mesmo não regulares, mas que o centro de gravidade esteja no seu interior, a determinação do centro de gravidade é imediata ou de fácil compreensão. Para atender ao foco deste trabalho, vamos limitar ao estudo do centro de gravidade das figuras geométricas planas.

Por outro lado, Magnaghi e Assis (2014) mostram que Arquimedes encontrou vários resultados teóricos sobre o centro de gravidade de figuras geométricas planas e tridimensionais. Para isto, utilizou o princípio de simetria: Grandezas iguais se equilibram a distâncias iguais, sexto postulado de Sobre o equilíbrio dos planos (Assis, 2008). Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.

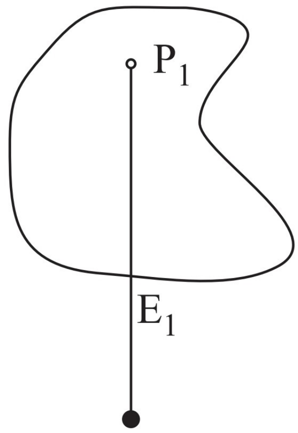

Figura 2.1: Primeira situação de equilíbrio.
Fonte:(Magnaghi e Assis, 2014, p. 46)

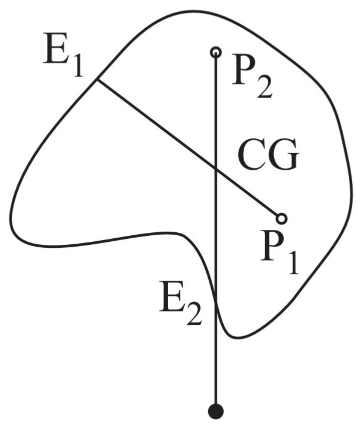

Figura 2.2: Segunda situação de equilíbrio.
Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 47)

2.2.1 O *centro de gravidade* de um triângulo

Vamos relembrar que encontrar o *centro de gravidade* de figuras geométricas, como quadrados, retângulos, losangos e círculos não implicam em grande esforço. Pois, aplicando o procedimento prático proposto acima, ou usando de imaginação suficiente, estes resultados são imediatos, isto é, e o ponto de encontro das diagonais para as figuras geométricas formadas por segmentos de retas, citadas acima; e, para um círculo qualquer, a definição da circunferência que o delimita, aponta para a localização, o centro da circunferência.

Para um triângulo qualquer, o ponto considerado o centro de gravidade está localizado no encontro das medianas, as retas que ligam um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. A demonstração deste fato dada por Arquimedes, pode ser encontrada em (Assis, 2008, p. 197-200).

2.3 A *lei da alavanca*

A ideia de usar alavanca rígida e um ponto de apoio a fim de mover objetos muito pesados que diretamente não seriam possíveis é um feito incrível na antiguidade. Observa e põem em prática o princípio de que o objeto mais leve pode equilibrar o objeto mais pesado; e o mais útil, o objeto mais leve movimentar o mais pesado. Para tanto, basta variar a distância do objeto mais leve ao ponto de apoio. Os gregos conheciam está propriedade e Arquimedes a utilizou com maestria em *O método*. Magnaghi e Assis (2014) define:

> A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear e horizontal, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra. Esse eixo de rotação é normalmente ortogonal à barra da alavanca. O ponto em que o eixo toca a alavanca é chamado de *fulcro* da alavanca. Este é também o ponto de sustentação da alavanca. Uma alavanca está em equilíbrio quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca à distância horizontal entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro.
> Vamos supor que temos dois corpos ligados aos braços opostos de uma alavanca. O equilíbrio ocorre de acordo com a chamada lei da alavanca, que aqui lembramos nas palavras do próprio Arquimedes. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 48)

Arquimedes define a *lei da alavanca* em sua obra *Sobre o equilíbrio dos planos*:

> Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais aos seus pesos.
> Da mesma maneira, se grandezas são incomensuráveis, elas se equilibram em distâncias inversamente proporcionais às grandezas. (Assis, 2008, p. 227-228)

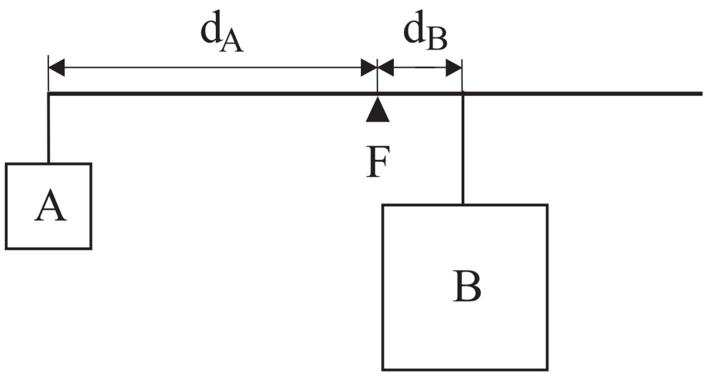

Figura 2.3: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro F.
Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 49)

Esta lei pode ser expressa matematicamente, tanto para grandezas comensuráveis quanto incomensuráveis, afirmando que a alavanca vai estar em equilíbrio quando for satisfeito a seguinte situação:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A} \quad [1] \tag{2.1}$$

Vamos usar esse resultado acima, para mostrar a essência de *O método*, para isto, precisamos olhar a proporção acima, de uma forma diferente.

$$\frac{P_A}{d_B} = \frac{P_B}{d_A}. \tag{2.2}$$

2.4 O palimpsesto

Segundo Netz e Noel (2009) em 1906, o filólogo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg observou um livro de orações do século XIII, na cidade de Constantinopla, atual Istambul, na Turquia. Neste livro encontrou fragmentos de textos em grego e logo viu que se tratava de uma cópia de obras de Arquimedes, feita no século VIII. Os textos estavam quase apagados, devido ao processo de reutilização de pergaminhos, prática comum no século XIII por conta do auto custo e da dificuldade em conseguir peles de animais para confeccioná-los. Este processo chamado palimpsesto, consiste em raspar a pele para apagar a escrita original, em muitos casos não removiam por completo os escritos antigos.

Os pergaminhos eram geralmente guardados em dois rolos, o que dificultava a

[1]Veja (Magnaghi e Assis, 2014, p. 49)

leitura, pois deveria ser desenrolado de um lado e enrolado do outro até chegar na parte desejada. Já o livro de orações foi confeccionado em outro formato, *o códex*, em que as páginas são reunidas e costuradas ou coladas, tomando o formato de livro como o conhecemos, mais prático para leitura.

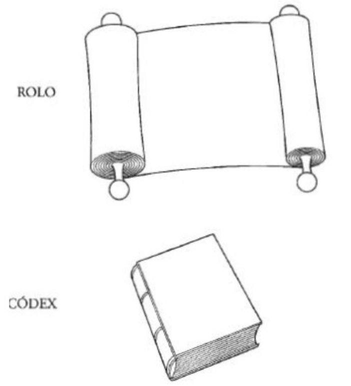

Figura 2.4: Exemplo de pergaminho no formato de rolo e codéx (livro).
Fonte: (Netz e Noel, 2009, p. 59)

Para fazer um livro utilizando o processo de palimpsesto, geralmente, cortavam o pergaminho em formato retangular e giravam 90 graus para escrever o novo texto. Esta forma de organização do novo livro atrapalhou Heiberg ao tentar ler os textos de Arquimedes, parte das palavras estavam escondidas pela encadernação. Mesmo assim, ele conseguiu ler grande parte dos escritos e fez as traduções do grego para outras línguas, registrou as páginas do manuscrito em muitas fotografias.

Heiberg identificou as seguintes obras de Arquimedes no palimpsesto do livro de orações:

> Sobre a esfera e cilindro;
> Sobre as espirais (quase completo);
> Medida do círculo;
> Sobre o equilíbrio dos planos.
> Mas a extraordinária importância deste documento é que representa a única fonte em grego de:
> Sobre os corpos flutuantes I, II (quase completo).
> Stomachion (as duas primeiras Proposições):
> Método sobre os teoremas mecânicos. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 42-43)

Dentre essas obras, a mais interessante é o *Método sobre os teoremas mecânicos*, por conter a forma como Arquimedes utilizava princípios físicos para descobrir teoremas matemáticos.

Após Heiberg ter estudado o palimpsesto contendo as obras de Arquimedes, no início do século XX, este importante livro ficou por um longo tempo desaparecido. Somente em 1998, reapareceu em Nova York para ser leiloado. O comprador anônimo enviou o palimpsesto para ser estudado no museu The Walters Art Museum, Baltimore, Maryland, Estados Unidos.

Com o uso das tecnologias modernas mais partes dos textos puderam ser lidas, tornando mais confiáveis as interpretações, completando as partes do quebra cabeça. Desta forma, ajudou na compreensão de *O método* de Arquimedes.

> A grande importância dada à carta de Arquimedes para Eratóstenes reside no fato de que é um dos poucos tratados (talvez até mesmo o único) em que algum cientista da antiguidade revela o seu método de indução físico-matemático usado para chegar a determinadas conclusões. Por suas obras Arquimedes é considerado por muitos como o pai da física matemática. Em seu trabalho *O método*, perdido por tanto tempo, ele mostra o íntimo relacionamento entre essas duas ciências e como extrair dele o melhor aproveitamento. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 43)

Geralmente os cientístas modernos usam conhecimento matemático para descrever fenômenos físicos, atravéz de equações que obedecem a certas condições bem específicas. Mas, Arquimedes foi além do que os matemáticos gregos que usavam matemática para produzir matemática, ou seja, o rigor das demonstrações. Ele usou experimentos físicos para descobrir teoremas puramente matemáticos.

> Para provar teoremas puramente geométricos como cálculo de áreas e de volumes, ele utilizou aspectos básicos da mecânica. Em particular, podemos citar a utilização do conceito de *centro de gravidade*, a *lei da alavanca* e condições de equilíbrio de corpos sob a ação gravitacional terrestre. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 181)

2.5 O cálculo de área na Grécia antiga

Vamos expor aqui, alguns fatos relevantes ao bom desenrolar deste texto, sobre o que os gregos já sabiam do cálculo de área de figuras geométricas planas. Lembrando que vamos utilizar a notação matemática de nossos dias, muitas vezes bem distante daquela utilizada pelos gregos na antiguidade. Devemos ter este cuidado.

Os gregos já conheciam muitos resultados matemáticos importantes de como calcular a área de figuras geométricas formadas por segmento de reta e do círculo, que serão abordados nesta seção, juntamente com algumas contribuições de Arquimedes.

Para Netz e Noel (2009), os gregos a muito tempo entenderam que toda área delimitada por linhas retas podiam ser repartidas em triângulos e que a área de cada um desses triângulos podia ser igualado a metade da área de um retângulo e, por fim, a área de cada retângulo igualado a área de um quadrado. Desta forma, os gregos podiam calcular a área de figuras geométricas delimitadas por segmentos de reta. No entanto, Arquimedes foi além. Netz e Noel (2009) apontam que nos tratados enviados a Dositeu (muito pouco conhecidos: Quadratura da parábola, dois livros sobre a Esfera e o cilindro, um livro sobre Linhas espirais e o livro sobre Conóides e Esferóides), podem ser considerados os alicerces para a criação do cálculo. Mas, para Arquimedes, eram apenas variações sobre a quadratura do círculo. Arquimedes tomava um objeto delimitado por linhas curvas e o igualava com um objeto mais simples, de preferência delimitado por linhas retas.

Quanto ao círculo, os gregos sabiam que o perímetro ou comprimento da circunferência de um círculo é proporcional ao seu diâmetro. Ou seja, os comprimentos de duas circunferências estão para si como seus diâmetros.

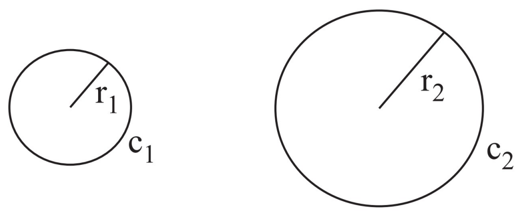

Figura 2.5: Circunferências de raios r_1 e r_2 com comprimentos c_1 e c_2, respectivamente. Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 25)

A proporção entre as circunferências c_1 e c_2 de diâmetros dados por $d_1 = 2r_1$ e $d_2 = 2r_2$.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{2.3}$$

No século XVIII, os matemáticos adotaram o símbolo π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro de um círculo e provaram que π é um número irracional. Vamos usar o símbolo $\equiv$ para uma definição. Logo, dado um círculo de comprimento c, diâmetro d e raio r:

$$\pi \equiv \frac{c}{d} = \frac{c}{2r} \tag{2.4}$$

Usando esta definição para π, o comprimento para qualquer circunferência pode ser expresso por:

$$c = 2\pi r \tag{2.5}$$

Arquimedes em *Medida do círculo*, na observação de Magnaghi e Assis (2014), encontrou limites superiores e inferiores para esta razão ao circunscrever e inscrever um círculo com dois polígonos regulares de n lados. Assim, quanto mais aumentar o número de lados dos polígonos regulares, mais próximas as áreas das figuras seriam.

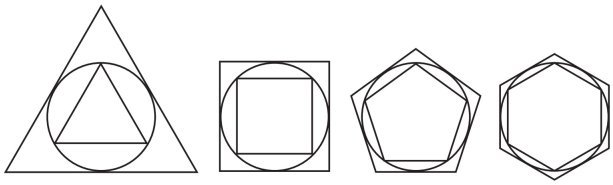

Figura 2.6: Aproximações da circunferência: por triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos inscritos e circunscritos.
Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 26)

Ao circunscrever e inscrever uma circunferência por polígono de 96 lados, Arquimedes obteve uma ótima aproximação para π.

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$$

No texto de (Karlson et al., 1961, p. 131-139) podemos observar uma demonstração da quadratura do círculo atribuída a Arquimedes e os detalhes de como ele obteve uma boa aproximação do valor de π, utilizando polígonos inscrito e circunscrito ao círculo, uma forma de limites inferiores e superiores, ou seja, quanta maior o número de lados dos polígonos, mais próximas as áreas dos polígonos se tornam em relação a área do círculo interior a região delimitada. A seguir, vamos observar nas imagens que as áreas dos polígonos vão se aproximando cada vez mais a da área do círculo de raio unitário a medida que a quantidades dos lados dos polígonos considerados for maior.

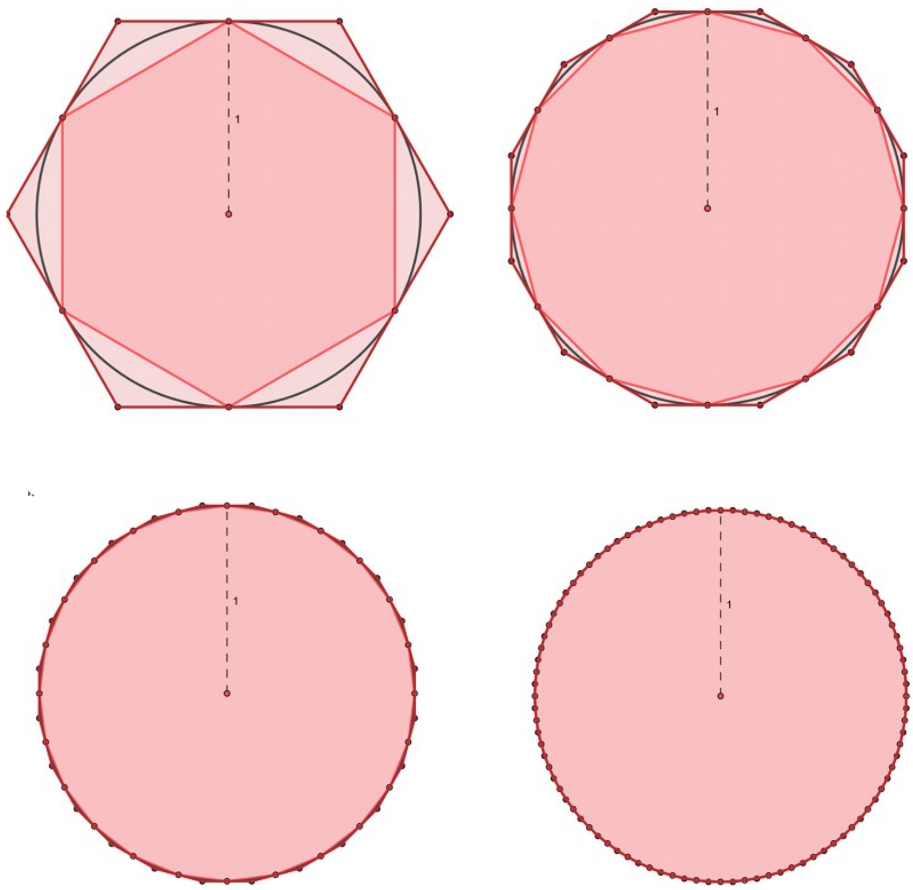

Figura 2.7: Polígonos regulares, inscritos e circunscritos ao círculo de raio unitário, de 6, 12, 24 e 48 lados.

Fonte: Nápoles (2020)

Na imagem a seguir, os lados dos polígonos de 96 estão muito próximos circunferência do círculo, ou seja, seria necessário ampliar muito a figura e mesmo assim não seja possível observar a distância entre os lados dos polígonos e a circunferência, somente se construir um círculo com dimensões muito grandes para viabilizar a observação dos lados dos polígonos em separado.

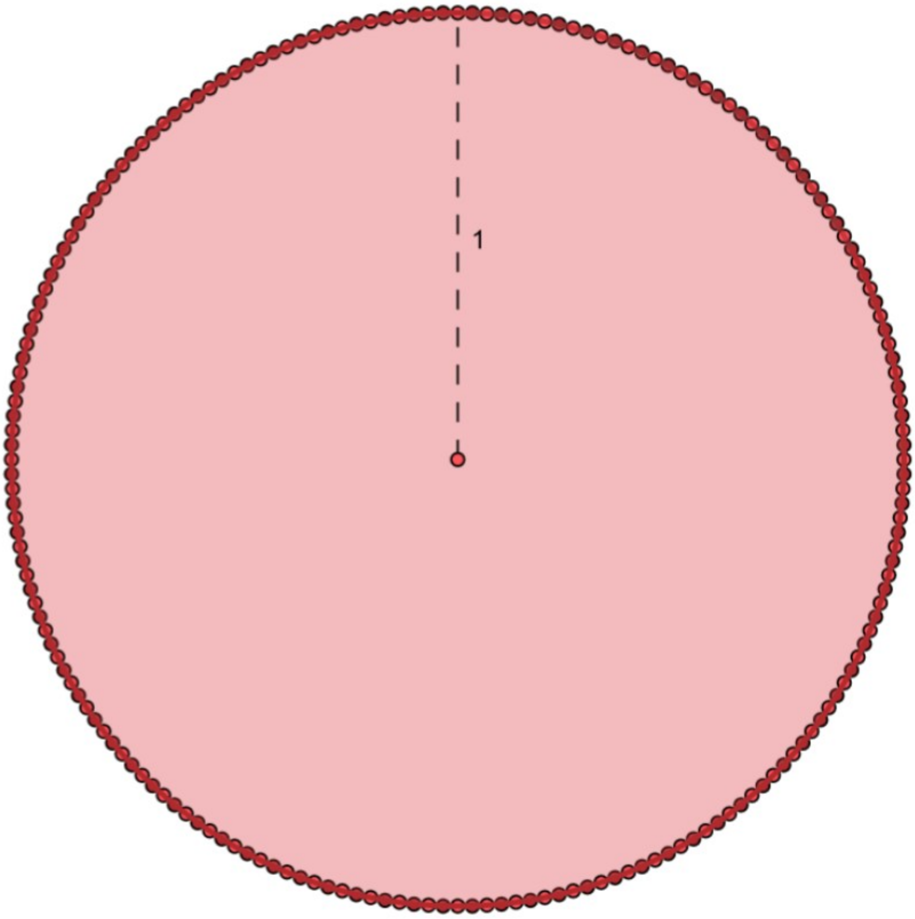

Figura 2.8: Polígonos regulares de 96 lados, inscritos e circunscritos ao círculo de raio unitário.

Fonte: Nápoles (2020)

Logo, este caminho percorrido ao observar o comportamento das áreas das figuras envolvidas ao aumentar o número de lados dos polígonos, constitui um interessante ponto de partida para explorar sobre o método heurístico de descoberta e justificar de forma prática com raciocínios lógicos acessíveis aos estudantes, as noções sobre o círculo e o famoso número *pi*, além de poder observar como Arquimedes buscou por soluções alternativas para contornar a dificuldade lidar com o círculo.

Em seu trabalho *Medida do círculo*, Arquimedes propõe, conforme (Magnaghi e Assis, 2014, p. 28): A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo.

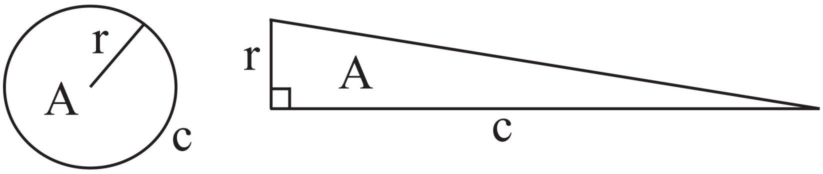

Figura 2.9: A quadratura do círculo.
Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 28)

Abaixo, algumas imagens para retratar as animações contidas em Orchiming (2020) sobre a quadratura do círculo, onde é possível observar a divisão do círculo em setores circulares congruentes e a reorganização dessas partes para forma uma nova figura. Se o círculo for dividido em 12 setores circulares, obtemos:

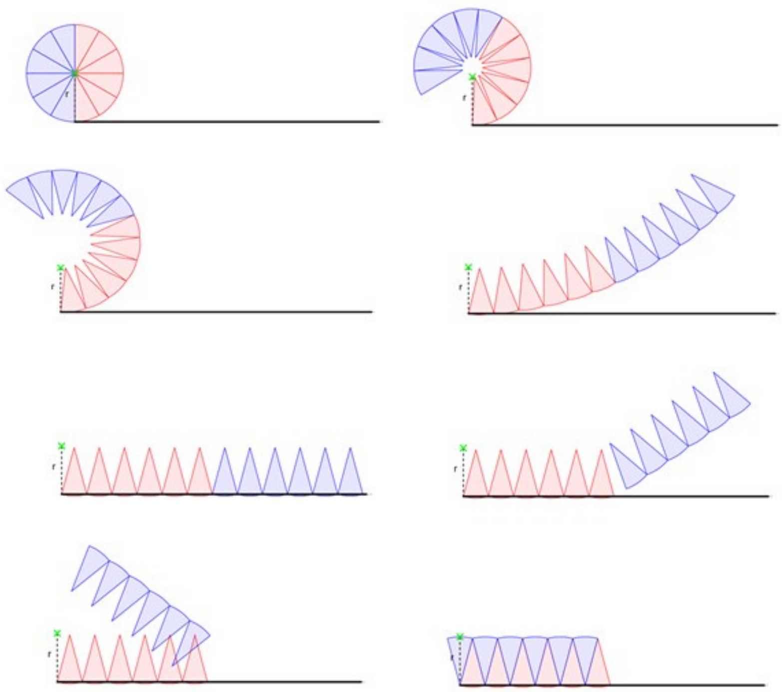

Figura 2.10: A figura formada pelo círculo dividido em 12 setores congruentes e reorganizados.
Fonte: Orchiming (2020)

Ao repetir o processo duplicando a quantidades de setores conseguimos observar o comportamento, o padrão que auxilia para compreender as mudanças na figura proveniente da reorganização dos setores circulares.

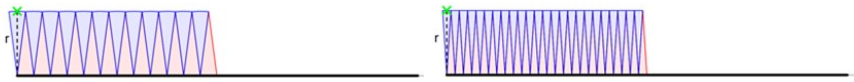

Figura 2.11: A figura obtida dividindo o círculo em 24 e 48 setores circulares.
Fonte: Orchiming (2020)

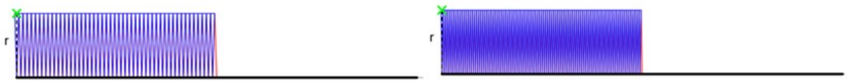

Figura 2.12: A figura obtida dividindo o círculo dividido em 96 e 192 setores circulares.
Fonte: Orchiming (2020)

Ao observar as imagens da animação de Orchiming (2020) e possível constatar que a figura formada com a reorganização de 12 setores circulares, apresenta ondulações bem visível. Mas, a medida que a quantidade de setores circulares foi duplicada, elas foram desaparecendo. Por fim, a figura formada pela remontagem dos 192 setores é muito parecida com um retângulo, isto é, podemos dizer que a figura formada pela reorganização dos setores circulares tende a ser um retângulo, ou seja, quanto maior a quantidade de setores isto implica que o formato da figura será mais próxima ao formato de um retângulo. Assim, com um método heurístico conseguimos concluir sobre a possibilidade de se obter um retângulo a partir de um círculo, em que um lado do retângulo é a medida do raio e o outro lado do retângulo, a metade do comprimento da circunferência do círculo.

Agora, uma forma diferente de manipulação do círculo usando linhas paralelas para obter um triângulo retângulo e na sequência, um retângulo. Primeiro, considerando uma quantidade pequena de linhas.

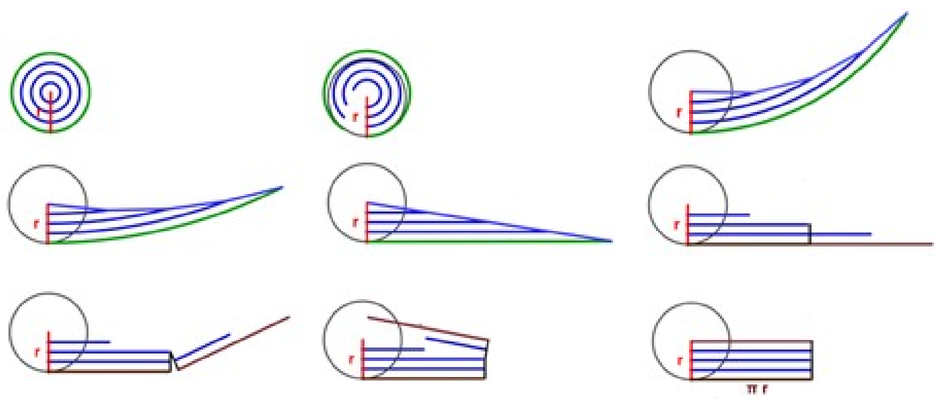

Figura 2.13: A quadratura do círculo.
Fonte: Cmodom (2020)

Com poucas linhas paralelas a animação de Cmodom (2020) não é conclusiva. Mas, ao observar as imagens a seguir com uma quantidade cada vez maior de linhas que podemos acompanhar melhor o processo.

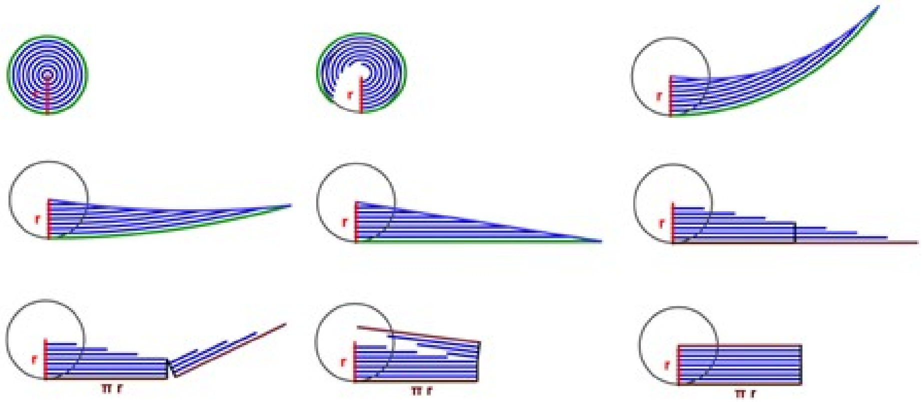

Figura 2.14: A quadratura do círculo.
Fonte: Cmodom (2020)

Assim, se as linhas paralelas estiverem muito próximas, podemos supor baseado em heurística, que o triângulo retângulo formado a partir do círculo possui o comprimento do raio como medida de um cateto, e a medida do outro cateto será o comprimento da circunferência. Como sabemos calcular a área de um triângulo retângulo, por consequência é possível determinar o valor da área do círculo.

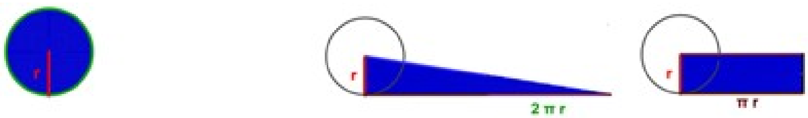

Figura 2.15: A quadratura do círculo.
Fonte: Cmodom (2020)

Portanto, a partir do método heurístico e utilizando a definição para calcular a área de um triângulo retângulo vamos expressar a equação a seguir:

$$A_T = A_C = \frac{r.2\pi.r}{2} = \pi.r^2 \tag{2.6}$$

Assim, usando a notação moderna de equações e o processo analítico, podemos mostrar que a área (A_C) do círculo de raio r e comprimento c e a área (A_T) do triângulo retângulo de altura r e base c são iguais. Temos a área do triângulo retângulo A_T dada pela equação:

$$A_T = \frac{c.r}{2} \tag{2.7}$$

Por outro lado, a área A do círculo é:

$$A_C = \pi . r^2 \tag{2.8}$$

Partido da equação (2.5) e substituindo o comprimento c por $2\pi r$, justificado pela igualdade da equação (2.4), obtemos:

$$A_T = \frac{c.r}{2} = \frac{2\pi r.r}{2} = \pi r^2 = A_C \tag{2.9}$$

Além desses resultados, Arquimedes descobriu muitos resultados importantes sobre figuras geométricas tridimensionais, que não serão citadas neste texto.

2.6 A quadratura da parábola

Vamos relembrar que a quadratura da parábola é determinar um quadrado que tenha a mesma área da região limitada por uma parábola e um segmento de reta - segmento parabólico - designaremos a região por A_P.

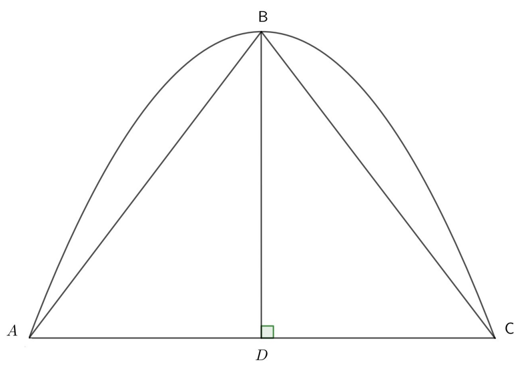

Figura 2.16: Região A_P delimitada pelo segmento de parábola ABC e o segmento de reta AC.

Fonte: O autor - GeoGebra

Para isto, Arquimedes relacionou a área da região delimitada A_P com a área do triângulo A_T, de mesma altura e base de A_P. Obtendo o resultado, $A_P = \dfrac{4}{3}A_T$. Ele demonstrou este resultado, utilizando o que ficou conhecido como o *método da exaustão*, podemos encontrar noções sobre este assunto no texto de Roque e Carvalho (2012) e Silva (2014). Em *O método* Arquimedes percorreu outro caminho para mostrar o resultado da quadratura da parábola; mesmo não sendo uma demonstração matemática tradicional é muito interessante. É este caminho alternativo que vamos explorar.

Considere a parábola como uma seção plana de um cone reto:

> Tomemos a superfície de um cone e o cortamos com um plano. Dependendo de como o secionarmos, poderemos obter hipérboles, parábolas ou elipses. Círculos, quadrados e triângulos fazem sentido para nós de algum modo, em nosso dia-a-dia nos deparamos com eles. O mesmo não acontece com hipérboles, parábolas e elipses. Seu interesse advém principalmente do fato de que há toda uma variedade de interessantes proporções geométricas que resultam de combinações de seções cônicas. (Netz e Noel, 2009, p. 129)

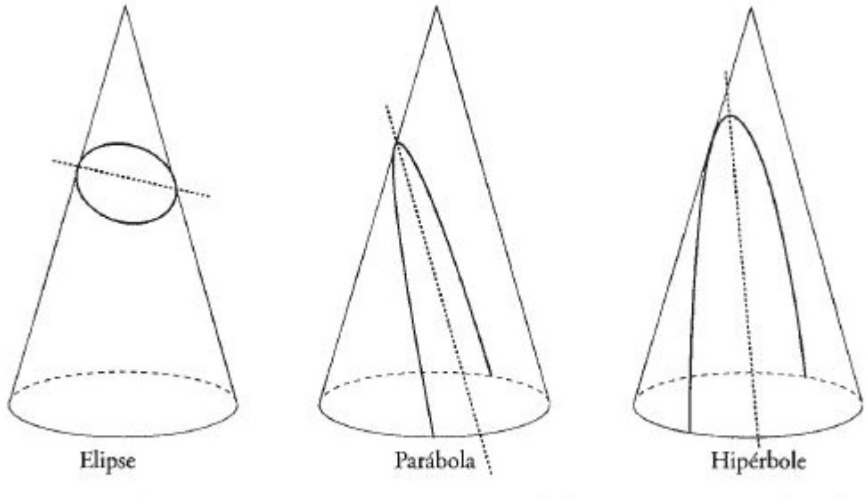

Figura 2.17: A seção de um cone por um plano produz uma elipse, quando o plano paralelo ao plano secante, que passa pelo vértice do cone, não possui com este nenhum outro ponto em comum; será uma parábola, quando o plano diretor tangencia o cone; e será uma hipérbole quando o plano diretor também corta o cone.

Fonte: (Karlson et al., 1961, p. 123)

2.6.1 O mistério revelado

Para nossa explanação nos basearemos em Magnaghi e Assis (2014) por conter uma linguagem mais acessível para *O método* de Arquimedes. O objetivo é mostrar como Arquimedes utilizou o seu método para determinar a área da região delimitada por um segmento de parábola e um segmento de reta, isto é, a quadratura da parábola em função da área do triângulo interior a região de mesma base e altura, utilizando o *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*.

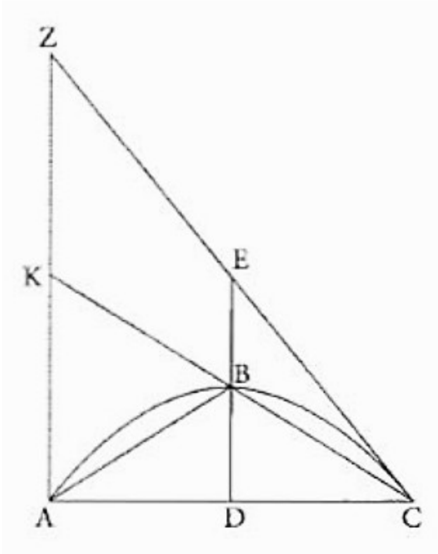

Figura 2.18: Segmento parabólico ABC e os triângulos ABD e AZC.
Fonte: (Netz e Noel, 2009, p. 129)

Vamos abordar o caso particular com o eixo de simetria da parábola dividindo exatamente ao meio o segmento da parábola ABC, e o eixo de simetria da parábola ABC perpendicular ao segmento AC. Uma demonstração do caso geral, pode ser encontrada em [2].

Conforme Netz e Noel (2009), a parábola possui um eixo de simetria. Na figura acima, a linha BD é o eixo de simetria da parábola por ABC. Desta forma, os segmentos AB e BC tem o mesmo comprimento e o segmento DB é a altura do triângulo ABC. Traçando uma reta por C, tangente ao segmento da parábola ABC. A partir do ponto A desenhamos o segmento AZ paralelo ao eixo de simetria BD, em que o ponto Z é a intersecção com a tangente partindo do ponto C. Assim, construímos o triângulo AZC. Prologando o eixo de simetria DB até o segmento CZ, no encontro dos dois segmentos, marcamos o ponto E. A partir de C, passando pelo ponto B, traçamos o segmento de reta CB, ao prolongar o segmento CB, até atingir o segmento AZ no ponto K.

Como o eixo de simetria corta exatamente ao meio o segmento da parábola, temos que o ponto K é o ponto médio do segmento de reta AZ. Assim, como $AZ//DE$ e

$$\frac{AZ}{AK} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AZ = \frac{AK.AC}{AD}, \tag{2.10}$$

[2](Magnaghi e Assis, 2014, p. 74-82)

o ponto D é o ponto médio de AC, $AD = DC$ então:

$$AC = AD + DC \Rightarrow AC = 2AD, \tag{2.11}$$

voltando a equação (2.9):

$$AZ = AK.\frac{AC}{AD} \Rightarrow AZ = AK.\frac{2AD}{AD} \Rightarrow AZ = 2AK \Rightarrow AK = \frac{AZ}{2}, \tag{2.12}$$

desta forma, K é o ponto médio do segmento de reta AZ, o ponto B divide exatemente ao meio o segmento de reta DE. Vamos verificar:

$$\frac{AZ}{AK} = \frac{DE}{DB} \Rightarrow DE = \frac{AZ.DB}{AK}, \tag{2.13}$$

usando o fato que $AZ = 2AK$, obtemos:

$$DE = \frac{2AK}{AK}.DB \Rightarrow DE = 2DB \Rightarrow DB = \frac{DE}{2}, \tag{2.14}$$

portanto, B é o ponto médio do segmento DE.

O triângulo AKC, tem exatamente a metade da área do triângulo AZC. Como o ângulo ZAC mede 90°, os triângulos AKC e KZC tem base de mesmo comprimento $AK = KZ$ e mesma altura AC. Portanto, $A_{\Delta AKC} = A_{\Delta KZC}$.

$$A_{\Delta AZC} = A_{\Delta AKC} + A_{\Delta KZC} \Rightarrow A_{\Delta AKC} = \frac{A_{\Delta AZC}}{2} \tag{2.15}$$

O ponto B é o ponto médio do segmento de reta KC. Partindo da proporção, obtemos:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{KC}{KB} \Rightarrow \frac{2AD}{AD} = \frac{CK}{KB} \Rightarrow KB = \frac{CK}{2} \tag{2.16}$$

Portanto, o ponto B é o ponto médio do segmento de reta CK.

O triângulo ABC, tem a metade da área do triângulo AKC. Tomando a proporção a seguir, temos:

$$\frac{AK}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow BD = \frac{AK.CD}{AC} = \frac{AK.CD}{2CD} \Rightarrow BD = \frac{AK}{2} \tag{2.17}$$

Pelo eixo de simetria da parábola, os segmentos de reta AB, BC e BK possuem o mesmo comprimento. E o triângulo ABC é composto pelos triângulos ABD e DBC que possuem áreas iguais. Como o segmento $BD = \dfrac{AK}{2}$, temos que a área do triângulo ABD é a metade da área do triângulo AKB.

Por consequência, o triângulo grande AZC tem área 4 vezes maior que a do triângulo ABC.

$$A_{\Delta AZC} = 4A_{\Delta ABC} \tag{2.18}$$

Até aqui, descrevemos a construção do triângulo AZC que possui a região delimitada por um segmento de parábola ABC e o segmento AC (área do segmento de parábola ABC) em seu interior, e mais, conseguimos comparar a área do triângulo ABC com a área triângulo AZC. Na sequência, conforme Netz e Noel (2009), será construído elementos auxiliares para relacionar a área do triângulo AZC com a área do segmento de parábola. Para isto, Arquimedes utilizou uma alavanca com o fulcro sobre o ponto K.

Assim, será traçado o segmento de reta MX paralelo ao eixo de simetria da parábola DB, que possibilita montar a seguinte proporção:

$$\frac{MX}{OX} = \frac{AC}{AX} \tag{2.19}$$

Como é possível traçar infinitos segmentos de reta MX paralelos ao segmento DB, pertencentes ao triângulo AZC, então podemos percorrer toda a superfície do triângulo AZC.

Em seguida, prolongar o segmento de reta CK até o ponto T de forma que $CK = KT$. Agora, vamos transportar o segmento de reta OX e colocar o seu ponto médio no ponto T.

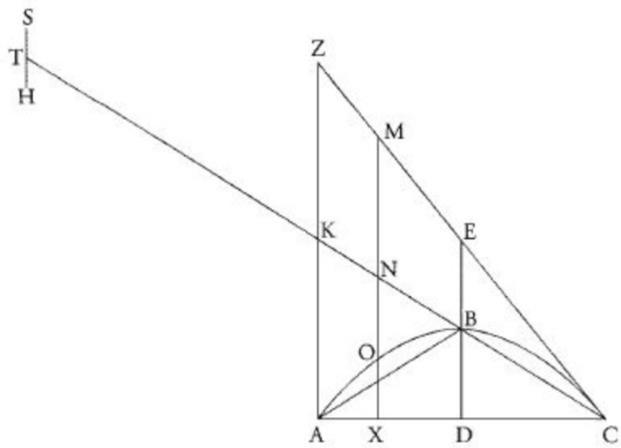

Figura 2.19: Segmento parabólico ABC e os triângulos ABD e AZC e o prolongamento da linha TK .

Fonte: (Magnaghi e Assis, 2014, p. 130)

Conforme Netz e Noel (2009) vamos imaginar em nossa mente, o transporte do segmento OX para a nova posição SH com o ponto médio em T. Assim, o transporte de um segmento é uma forma interessante de abordar o problema por Arquimedes. Assim, (Netz e Noel, 2009) observa, que a proporção original,

MX está para OX, assim como AC está para AX,

e como as linhas AZ, MX e DE são paralelos, obtemos a proporção,

AC está para AX, assim como KC está para KN,

e manipulando as proporções $\dfrac{MX}{OX} = \dfrac{AC}{AX}$ e $\dfrac{AC}{AX} = \dfrac{KC}{KN}$, obtemos:

$$\frac{MX}{OX} = \frac{KC}{KN}; \tag{2.20}$$

Mais ainda, como o ponto K é o ponto médio de TC, ou seja, $TK = KC$. Logo,

$$\frac{MX}{OX} = \frac{TK}{KN} \tag{2.21}$$

Portanto, conforme aponta Netz e Noel (2009) a linha paralela tomada aleatoriamente MX, em relação a sua menor seção OX, tem a mesma razão de TK para KN.

Seguindo o raciocínio de (Netz e Noel, 2009), como $OX = SH$, vamos substituir

OX por SH na equação (2.21), obtemos:

$$\frac{MX}{SH} = \frac{TK}{KN} \tag{2.22}$$

A equação (2.22), será útil a seguir.

Segundo (Netz e Noel, 2009) Arquimedes considerou objetos geométricos como se fossem objetos físicos. Destacam que não temos registros de alguém que tenha feito isto antes. Apontam ainda que Arquimedes inventou o tratamento matemático para a física e o tratamento físico de matemática pura. Este último sem dúvida, é algo fantástico, surpreendente, parece mágica, mas é a capacidade inventiva de um homem, que conseguiu o que parecia improvável.

Pela *lei da alavanca*, cada segmento de reta vertical MX do triângulo AZC equilibra o seu respectivo segmento de reta vertical $OX = SH$, contido no segmento de parábola ABC pelo fulcro K. Percorrendo os infinitos pontos do segmento de reta AC e como para cada um deles, podemos obter uma situação de equilíbrio e, além disso, podemos somar ou reunir todas as infinitas situações de equilíbrio e observando que elas estão contidas em figuras geométricas planas de área finita, portanto, o triângulo AZC equilibra o segmento de parábola ABC pelo fulcro K.

Portanto, Arquimedes encontrou uma forma de mostrar que a área de uma figura geométrica plana delimitada, em parte por uma curva, o segmento de parábola é

$$A_{seg.par.ABC} = \frac{4}{3}A_{\Delta ABC}$$

da área do triângulo inscrito no segmento parabólico, que compartilhar a mesma base e altura.

A matemática de Arquimedes se podemos assim dizer, já que no seu tempo a ciência não era subdividida, compartimentada como agora foi muito além do básico, do elementar, ele produziu ciência avançada. Ao abordar matemática, física e infinito, com tanta maestria podemos dizer que a ciência moderna foi forjada sobre os pilares deixados por Arquimedes.

2.7 *Heurística*: Arquimedes x Polya

Em *O método* Arquimedes utilizou o que podemos classificar segundo a definição apresentada por Polya (1995), de *heurística* para investigar teoremas de matemática. Os procedimentos realizados por Arquimedes e a forma como as ideias são aplicadas para desvendar e mostrar um determinado resultado não devem ser confundidos com uma demonstração matemática. Conforme Polya (1995), um resultado baseado apenas em *heurística* pode conter erros. Logo, para que tenhamos a certeza da veracidade de um teorema, é preciso prová-lo.

O método é um texto importante por conter os detalhes dos mecanismos empregados por Arquimedes em seus estudos. Assim, a cópia desta obra é um dos poucos registros desse tipo, que sobreviveu até nosso tempo, ou seja, em *O método* podemos observar como Arquimedes utilizava o seu *método heurístico* baseado em conceitos físicos a serviço da matemática; um caminho diferente do geralmente encontrado em registros sobre matemática, no qual, podemos observar apenas o teorema e a sua demonstração, o resultado final de um processo.

No entanto, para o processo de ensino aprendizagem em matemática, as ideias aplicadas em uma descoberta podem ser usadas como ferramenta de apoio ao professor. No sentido de mostrar a relação existente entre os objetos de estudo, e isto poderá ajudar na compreensão dos conceitos.

A matemática como uma construção humana, surgiu de necessidade de resolver problemas práticos. Mas, a medida que a ciência evoluiu, ela se tornou cada vez mais sofisticada, com uma linguagem própria e complexa. Assim, por conter uma linguagem complicada e abstrata, o estudo da matemática também se tornou mais árduo, o que dificulta a alfabetização e o letramento em matemática. Logo, uma maneira de tentar superar esta adversidade, é apresentar atividades práticas com a intenção de ajudar na compreensão dos conteúdos e fomentar o interesse pelo estudo de matemática. Desta forma, as ideias de *O método* poderiam ser utilizadas no ensino de matemática nos anos finais do ensino fundamental com este propósito.

Vale enfatizar que a abordagem de Arquimedes é interessante por conter experimentos físicos, relacionados com resultados teóricos de matemática. A ideia de aplicar experimentos físicos para o estudo da matemática no ensino fundamental é relevante, por conter a possiblidade de trabalhar com manipulação de matérias concretos, atividades de caráter lúdico e desafios.

Por outro lado, Polya (1995) propõe no livro *A arte de resolver problemas*, uma tentativa de retomada dos estudos sobre *heurística* e sua aplicação na *resolução de problemas*. Além disso, por conter um tratado sobre elementos básicos da estrutura da matemática, ou seja, o autor apresenta as noções sobre os processos de resolução e as ferramentas empregadas. Logo, o estudante que tiver contato com as ideias contidas no texto poderá aprender sobre as noções básicas dos procedimentos realizados em matemática e identificar sistemas lógicos.

Por exemplo, o professor propõe um problema de determinação. Se o estudante conhecer as noções sobre o assunto saberá que a resolução consiste em determinar a incógnita. A partir dessa observação, o aluno poderá seguir as ideias, contidas nos passos apontados por Polya (1995) para encontrar a solução do problema, com a mediação do professor.

O texto de Polya (1995) pode ser visto ainda, como um contraponto a visão do ensino de matemática baseada apenas em regra e repetição de procedimentos isolados, presente no ensino desta disciplina no Brasil desde o tempo em que se acreditava precisar desse tipo de habilidades. Infelizmente, resquícios dessa forma de ensino perduram até hoje, ou seja, novos professores absorvem velhas práticas e continuam aplicando em sala de aula. Logo, se o docente seguir esse caminho o aluno não terá oportunidade de aprender sobre o provisório, o provável, lidar com o erro, elementos presentes no processo de resolução de um problema e como tentar superar estas dificuldades. Polya (1995) apresenta assim a oportunidade do estudante conhecer sobre noções importantes de matemática, um ponto de partida para compreeender essa ciência.

O processo de ensino aprendizagem de matemática deveria ir além de apenas visualizar os resultados construídos pelos matemáticos, regras e mais regras. O ensino baseado somente na utilização de resultados prontos é uma forma limitada de abordar sobre esta ciência, a maioria dos estudantes não conseguem se adaptar. Por outro lado, é mais relevante compartilhar ideias e incentivar os estudantes a desenvolver uma visão ampla, que consiga abraçar e identificar os elementos em que se baseia a matemática. Portanto, a ideia de relatar e discutir sobre a *heurística* de Polya (1995) pode contribuir de forma positiva para o aprendizado de matemática.

E mais, o livro *A arte de resolver problemas* pode ser considerado como um ponto de apoio para estudar e analisar as ideias contidas em *O método*. Pois, Polya (1995) para escrever o livro, considerou textos de autores como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano, que estudaram sobre *heurística*. Desta forma, Polya (1995) obteve o embasamento necessário para compreender sobre o assunto e apresentar a sua visão sobre o tema, a *heurística moderna* em que apresenta a sua concepção sobre os elementos que deveriam ser considerados para a *resolução de problemas*. Logo, nesta obra podemos observar comentários de Pappus sobre *heurística*. Fato que aproxima Arquimedes e George Polya, devido a indícios claros de *heurística* na obra de Arquimedes. Ou seja, este tema era conhecido pelos gregos no tempo de Arquimedes e as ideias sobre *heurística* foram recuperadas por Polya, o ponto de partida para o seu método empregado na *resolução de problemas*.

A seguir, apresentamos a essência de *O método* capturada por Magnaghi e Assis (2014) e a partir desta, discutiremos aplicações em sala de aula.

2.8 A essência de *O método* de Arquimedes

As observações de Magnaghi e Assis (2014) sobre as ideias principais que Arquimedes utilizou em suas descobertas e relatou em *O método*, serão exploradas aqui na perspectiva de aplicações para o ensino de matemática.

> Por meio de considerações puramente geométricas determina-se a razão existente entre certas distâncias e certas grandezas pertencentes às figuras. Estas grandezas podem ser os comprimentos de algumas linhas, as áreas de algumas superfícies, ou os volumes de alguns sólidos.
> Atribui-se um peso às figuras geométricas, supondo-se que ele esteja distribuído homogeneamente nas figuras. Ou seja, Arquimedes considera que os segmentos lineares, as áreas, e os volumes possuem pesos proporcionais a estes comprimentos, áreas e volumes, respectivamente.
> Estas grandezas são colocadas em equilíbrio de acordo com a *lei da alavanca*. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 73)

A ideia de considerar figuras geométricas constituídas de material homogêneo em que o peso está distribuído de forma uniforme por toda a superfície, apresenta potencial de aplicação ao ensino de matemática no ensino fundamental pela oportunidade de relacionar conhecimento abstrato de matemática com experimentos físicos. Ao invés do aluno fazer apenas operações de matemática no papel, desenhos, conseguirá manipular objetos em três dimensões. Assim, o educando poderá relacionar elementos de matemática com a realidade.

Dos elementos presentes no obra *O método* de Arquimedes, vamos investigar sobre o *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*, na busca por aplicações que possam contribuir para o aprendizado de matemática. E também, ao apresentar e discutir sobre problemas, considerar, observar e procurar por prováveis erros na execução das atividades práticas em sala de aula, isto é, investigar a partir das contribuições de Polya (1995).

Com base na experiência de docência em sala de aula, podemos constatar a dificuldade dos estudantes em desenvolver de forma satisfatória, a capacidade de identificar as características das figuras geométricas do plano e aplicar as informações no cálculo de áreas. Assim, podemos utilizar o *centro de gravidade* para propor atividades que envolvam figuras geométricas. Logo, ao solicitar para fazer uma figura geométrica de material rígido e uniforme, como papel cartão, por exemplo, e dependurar pelo centro de gravidade, para isto é preciso considerar as características da figura geométrica escolhida para sua confecção. Logo, o objetivo principal é determinar o centro de gravidade, mas, por meio desta atividade prática o aluno poderá aprender sobre as características das figuras geométricas planas.

Ao propor atividades e experimentos sobre a determinação do centro de gravidade de figuras geométricas, os alunos poderão aprimorar ainda, a coordenação motora, concentração, autoconfiança e aprender a utilizar instrumentos tecnológicos como régua, compasso, transferidor, etc. Pois, muitas atividades podem ser realizadas com materiais de baixo custo, confeccionadas pelos próprios alunos com a supervisão do professor. Por exemplo, para dependurar um triângulo pelo centro de gravidade, é preciso construir com material rígido e uniforme. Portanto, podemos utilizar o cálculo do centro de gravidade para estudar as características das figuras geométricas planas.

> As figuras planas são consideradas como sendo construídas por todos os segmentos de linha nelas traçados em uma determinada direção. Analogamente, as figuras sólidas são consideradas como sendo construídas por todas as intersecções nelas determinadas por planos com a uma inclinação definida.
> Pelo equilíbrio da alavanca e por sua lei, pode-se determinar uma grandeza desconhecida a partir de outras grandezas conhecidas. Esta grandeza desconhecida pode ser uma área, um volume, ou o centro de gravidade de um objeto. (Magnaghi e Assis, 2014, p. 74)

Com a *lei da alavanca* por meio de uma balança em equilíbrio, podemos abordar sobre proporção, mostrar na prática, grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Sabemos que um peso menor pode equilibrar um peso maior, bastando variar a distância de forma apropriada, ou seja, quanto menor o peso mais distante deve estar do fulcro da balança para equilibrar o peso maior. E, ainda explorar o cálculo da incógnita presente nas equações do primeiro grau por meio de observações práticas.

Como o *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* são conceitos físicos, podem também ser abordados nas aulas de ciências no ensino fundamental, desta forma, reunir as disciplinas de matemática e ciências. Pesquisar nas ideias de *O método* e as contribuições de Netz e Noel (2009) um projeto de intervenção, em que cada área do conhecimento possa extrair novas possibilidades de aplicações em sala de aula, trabalhar em paralelo ou em conjunto. Pois, nestas obras podemos encontramos elementos que possam ser utilizados como ponto de partida para abordar sobre a ciência moderna.

As ideias aqui apresentadas constituem um ponto de partida na busca por extratégias que possam contribuir no processo de ensino aprendizagem de matemática: fruto da observação, baseada nas vivências em sala de aula e do estudo das noções de *O método* de Arquimedes e da *heurística moderna* de George Polya. No capítulo que segue, apresentaremos propostas de atividades envolvendo o *centro de gravidade* e a *lei da alavanca.*

Capítulo 3

Proposta de intervenção pedagógica

Neste capítulo, vamos apresentar propostas de atividades para as aulas de matemática, anos finais do ensino fundamental utilizando os conceitos físicos de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*. As ideias abordadas aqui, também podem ser empregadas na disciplina de ciências, ou ainda, no formato de projeto interdisciplinar de ciências e matemática. Em primeiro lugar, trataremos dos pré-requisitos necessários: os materiais, conceitos primitivos e definições físicas, suporte para experiências, fio de prumo, noções de equilíbrio e o centro de gravidade, noções de experimentos e definições sobre a balança e a alavanca. Em seguida, apresentamos as propostas de atividades.

3.1 Pré-requisitos

Para realizar as atividades é necessário dominar as noções básicas sobre os conceitos físicos empregados, a escolha e manipulação de materiais e equipamentos necessários. Assim, vamos apresentar informações complementares e o resultado dos experimentos, sobre *o centro de gravidade* e a *lei da alavanca*.

3.1.1 Materiais

A lista dos materias sugeridos por Assis (2008):

- Cartolina, papelão, cartão duro ou papel cartão plano (o papel cartão é melhor que a cartolina, pois é um pouco pais espesso e, portanto, mais forte). Também pode ser usado espuma de EVA, lâminas de madeira (tipo madeira de balsa), folhas de isopor, chapas planas e finas de plástico rígido ou de alumínio etc.
- Folhas de papel em branco.
- Régua, caneta, esquadro, compasso e transferidor. (Assis, 2008, p. 31)

A lista acima é apena uma sugestão, nada impede que outros materiais sejam utilizados, para isto, levar em consideração na hora da escolha as características necessárias para a viabilidade de aplicação nos experimentos.

3.1.2 Conceitos primitivos e definições

Conforme Assis (2008) vamos considerar os conceitos primitivos de: corpo, disposição relativa de corpos, distância entre corpos, mudança da posição relativa entre os corpos e tempo entre eventos físicos, e as definições a seguir:

Corpo rígido. Qualquer corpo cujas partes não mudam de posição relativa entre si enquanto o corpo está parado ou enquanto se desloca em relação a outros corpos. O triângulo de papel cartão, por exemplo, pode ser considerado um corpo rígido para os propósitos. Mesmo quando o triângulo cai girando em relação à Terra, as partes do triângulo permanecem fixas entre si (a distância entre dois pontos quaisquer do triângulo permanece constante no tempo, etc.).
Movimento e repouso. Dizemos que dois corpos A e B estão em movimento (repouso) relativo entre si, quando a distância entre eles varia (não varia) com o passar do tempo...
Equilíbrio. Vamos nos referir ao equilíbrio como sendo a falta de movimento em relação à Terra. Isto é, ao dizer que um corpo está em equilíbrio, queremos dizer que todas as suar partes permanecem em repouso em relação à Terra com a passagem do tempo.
Gravidade. Nome que se dá à propriedade que faz com que os corpos caiam em direção à Terra ao serem soltos do repouso. Outra forma de expressar isto é dizer que a gravidade é a tendência dos corpos atraídos em direção ao centro da Terra. (Assis, 2008, p. 38-9)

> **Descer e subir.** Quando dizemos que um corpo desce (sobe), queremos dizer que ele está se aproximando (se afastando) da superfície da Terra com a passagem do tempo. Em vez de descer, podemos usar também verbos análogos como cair, tombar, se aproximar da Terra ou se inclinar em direção à Terra, por exemplo. Da mesma maneira, em vez de subir, podemos usar verbos análogos como levantar ou se afastar da Terra, por exemplo.
> **Em cima e em baixo, superior e inferior.** Quando dizemos que um corpo A está em cima de um corpo B, queremos dizer que o corpo B está entre a Terra e o corpo A. Quando dizemos que um corpo A está abaixo de um corpo B, queremos dizer que o corpo A está entre a Terra e o corpo B. Quando nos referimos a parte superior (inferior) de um corpo, queremos dizer sua parte mais (menos) afastada da superfície da Terra.
> **Vertical.** Linha reta definida pela direção seguida por um pequeno corpo (como uma moeda metálica) ao cair em direção à Terra pela ação da gravidade, partindo do repouso. É também a linha seguida por um corpo que sobe em relação à Terra ao ser solto do repouso (como uma bexiga cheia de hélio, em uma região sem vento). Ou seja, a vertical (V) não é uma linha qualquer. É uma linha reta bem específica que está ligada com a gravidade da Terra. Para diminuir a influência do ar e do vento, o ideal é realizar esta experiência com corpos pequenos e densos, como moedas.
> **Horizontal.** Qualquer reta ou plano ortogonal à reta vertical.
> Deve ser ressaltado que todos estes conceitos estão ligados à Terra, indicando propriedade físicas relacionadas à interação gravitacional dos corpos com a Terra. Ou seja, não são conceitos abstratos ou puramente matemáticos. (Assis, 2008, p. 39)

Para Assis (2008), os conceitos definidos acima fazem sentido a nível macroscópico. A nível microscópico devemos considerar moléculas em vibração e as consequências decorrentes de seu estudo. Assim, as observações acima, constituem uma base de informações sobre elementos de física que apresentam algumas ideias a nível macroscópico.

3.1.3 Suporte para as experiências

Os suportes utilizados podem ser confeccionados de vários materiais facilmente encontrados como: palito de churrasco, lápis, garrafa pet, arrame ou prego, fixados em uma base de madeira, massa de modelar, isopor, etc.

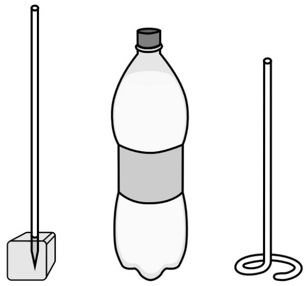

Figura 3.1: Suporte para as experiências.
Fonte:(Assis, 2008, p. 41)

Para que as experiências sejam realizadas da melhor forma possível, devemos considerar:

> Os aspectos importantes a ressaltar são que o suporte fique firma na base de sustentação, que o suporte fique na vertical, que sua extremidade superior seja plana (ficando na horizontal) e pequena comparada com as dimensões das figuras que serão equilibradas sobre ela. Mas a extremidade superior não pode ser muito pequena, análoga a um ponto (como os casos do palito de churrasco, alfinete, agulha ou prego com as pontas para cima). Caso isso ocorra, fica muito difícil de conseguir equilibrar as figuras e as experiências podem falhar. A extremidade superior deve ser pequena para que o ponto de equilíbrio do corpo fique bem localizado, mas não deve ser pequena demais, senão inviabiliza boa parte das experiências. (Assis, 2008, p. 41)

Além disso, é preciso preparar e testar os experimentos, esgotando todos os pontos críticos que possam causar falhas antes de aplicar em sala de aula. Usar os materiais apropriados para a escala escolhida e realizar todas as etapas da experiência e verificar sobre a sua viabilidade. Isto é, se funciona perfeitamente conforme o planejado para atingir os objetivos almejados. Caso contrário, encontrar os possíveis problemas que os estudantes possam encontrar e como superá-los. Por Exemplo, se for uma atividade realizada pelo professor para toda a turma, as figuras devem ser confeccionadas em tamanho apropriado para que todos possam visualizar e acompanhar todo o processo.

3.1.4 Fio de prumo

A definição de fio de prumo que será empregado em algumas atividades:

> **Fio de Prumo.** Qualquer fio ou linha dependurados pela extremidade superior, que fica fixa em relação à Terra, e que possui um corpo preso na extremidade inferior. O fio de prumo deve ser livre para oscilar ao redor da extremidade superior. (Assis, 2008, p. 56)

O fio de prumo pode ser utilizado para determinar o centro de gravidade de figuras planas, através do procedimento que consiste em furar e dependurar a figura por um ponto com liberdade para girar no suporte, com o fio de prumo dependurado pelo mesmo suporte. Assim, pela ação da gravidade, encontramos uma reta vertical da figura que passa pelo ponto de suspensão. Repetindo o procedimento, para outros pontos da figura, obtemos quantas verticais quisermos. Mas, para encontrar o centro de gravidade da figura, basta o ponto de intersecção de duas verticais.

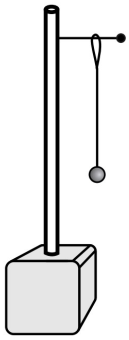

Figura 3.2: Fio de prumo.
Fonte:(Assis, 2008, p. 57)

Exemplo de fio de prumo e um triângulo, dependurados pelo mesmo suporte:

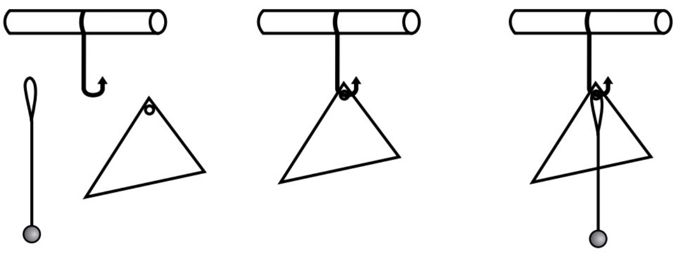

Figura 3.3: Fio de prumo e triângulo.
Fonte:(Assis, 2008, p. 58)

Assim, podemos usar o fio de prumo como um meio auxiliar para determinar o centro de gravidade de figuras geométricas regulares, ou meio principal em figuras planas quaisquer com formato irregular. Observamos ainda que o centro de gravidade em algumas figuras é um ponto exterior a figura. Fato que impossibilita dependurar ou equilibrar a figura em uma base, sem a adição de um elemento auxiliar, como fios ou uma haste.

Logo, ao utilizar o fio de prumo para determinar o centro de gravidade de uma figura geométrica plana, vamos utilizar um procedimento prático baseado em *heurística.*

3.1.5 Equilíbrio e centro de gravidade

Com base nas observações dos experimentos sobre equilíbrio, Assis (2008) redigiu a definição de *centro de gravidade*.

> O *centro de gravidade* de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra. Ele pode ser encontrado na prática pelo cruzamento das verticais que passam pelos pontos de suspensão do corpo quando ele permanece em equilíbrio ao ser solto do repouso, tendo liberdade para girar ao redor destes pontos. (Assis, 2008, p. 88)

Vamos utilizar a definição acima neste trabalho, para o caso das figuras geométricas planas. Logo, se dependurarmos por um fio uma figura pelo centro de gravidade, abandonada em repouso, em local sem a interferência do vento, a mesma deverá permanecer em repouso em relação à Terra.

Como estamos lidando com figuras planas, podemos utilizar um procedimento prático para encontrar o centro de gravidade, utilizando o fio de prumo.

> O *centro de gravidade* de um corpo é o ponto de encontro de todas as verticais passando pelos pontos de suspensão do corpo quando ele está parado em equilíbrio e tem liberdade para girar ao redor destes pontos. (Assis, 2008, p. 125)

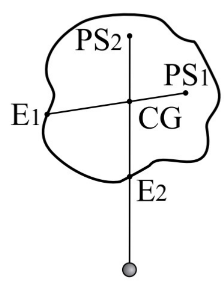

Figura 3.4: Segundo procedimento para encontrar o centro de gravidade.
Fonte:(Assis, 2008, p. 65)

Portanto, mesmo para o caso de figuras planas irregulares podemos encontrar o centro de gravidade por meio de procedimento prático, com o fio de prumo e um suporte para dependurar a figura.

A seguir vamos abordar sobre a balança e a alavanca.

3.1.6 Balanca e alavanca

Abaixo, as noções dos elementos sobre balanças, e o resultado de experimentos sobre a alavanca, de Assis (2008). Por acreditarmos que estas considerações possam contribuir para a compreensão dos conceitos e execução/adaptação das atividades propostas.

A figura abaixo representa uma balança de braços iguais em equilíbrio, isto é, a distância é a mesma dos pratos em relação ao fulcro da balança.

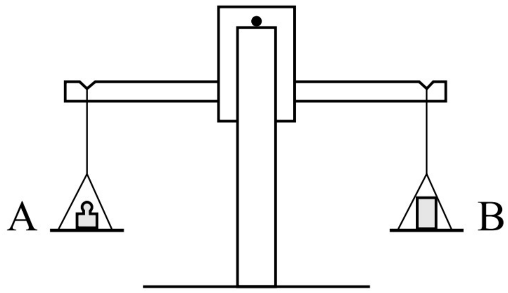

Figura 3.5: Uma balanca em equilíbrio com pesos iguais.
Fonte:(Assis, 2008, p. 135)

Medida de peso: Assis (2008) (definição) Dizemos que dois corpos A e B possuem o mesmo peso P quando, ao colocar o corpo A sobre um dos pratos desta balança e o corpo B sobre o outro prato, soltando-a do repouso ela irá atingir o repouso, parada na horizontal.

Partes que compõem uma balança de braços iguais:

> (A) Uma haste homogênea rígida (também chamada de travessão), que é livre para girar ao redor de um eixo horizontal perpendicular ao travessão que está a distâncias iguais das extremidades da haste (este eixo é chamado algumas vezes de fulcro da balança), (B) um suporte rígido que mantém o fulcro da balança parado em relação à superfície da Terra, e (C) dois pratos da balança, dependurados a distâncias iguais do plano vertical passando pelo fulcro. Nestes pratos vão ser colocados os corpos a serem pesados. O fulcro pode ser uma parte do suporte, tal como uma agulha horizontal presa ao suporte com o travessão dependurado pela agulha. Ou o fulcro pode ser uma parte do travessão, como a agulha apoiada pelo suporte fixo em relação à Terra. Chamamos de braço da balança à distância horizontal, d, entre o ponto e apoio do prato no travessão e o plano vertical passado pelo fulcro da balança. Em algumas balanças ... não utilizaremos pratos, pois os corpos a serem pesado serão dependurados diretamente no travessão da balança. (Assis, 2008, p. 128-9)

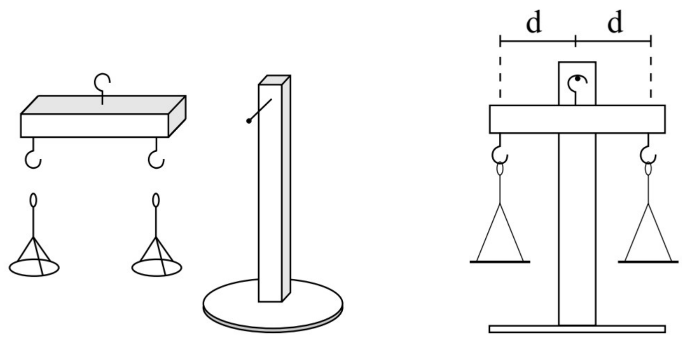

Figura 3.6: Componente de uma balança.
Fonte:(Assis, 2008, p. 130)

Ao confeccionar uma balança é preciso calibrar, ou seja, fazer os ajustes necessários para que a balança fique em equilíbrio, isto é, o travessão na horizontal ou com a adição dos pratos em lados opostos a mesma distância do fulcro.

> Antes de colocar quaisquer corpos a serem pesados, a balança deve ser ajustada para que seu travessão fique na horizontal sem a colocação dos pratos. Isto pode ser feito, caso necessário, alterando a colocação do fulcro no travessão ou o comprimento da haste de cada lado do travessão. Além disso, o travessão deve continuar horizontal quando são colocados os pratos. (Assis, 2008, p. 130)

Para que uma balança esteja em equilíbrio e preciso que aconteça a seguinte situação:

> Dizemos que uma balança de braços iguais está em equilíbrio quando seus braços ficam parados na horizontal, tendo ela liberdade para girar ao redor do fulcro. Dois corpos A e B possuem o mesmo peso P se, ao serem colocados em pratos separados de uma balança de braços iguais inicialmente em repouso na horizontal, permanecem em repouso. O corpo que equilibra outros N corpos de mesmo peso P em uma balança de braços iguais, possui N vezes o peso P. (Assis, 2008, p. 175)

Agora, vamos abordar sobre a *alavanca*, um forma diferente de manipular uma balança:

> A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra (o fulcro ou ponto de sustentação PS). O eixo de rotação é, em geral, ortogonal à alavanca, com os dois ficando usualmente no plano horizontal quando a alavanca está parada em relação à Terra. É como se fosse uma balança, mas agora com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro. (Assis, 2008, p. 155)

Logo, para Assis (2008) na alavanca podemos colocar pesos em distância diferentes em relação ao fulcro, o que abre caminho para novas aplicações. Conforme observamos em *O Método* de Arquimedes.

> Assim como no caso da balança, diremos por definição que uma alavanca está em equilíbrio quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca a distância horizontal, d, entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro. Algumas vezes (poderemos) falamos apenas, por brevidade, da distância entre o peso e o fulcro, mas deve-se entender que estamos nos referindo a distância horizontal entre o ponto de atuação do peso na alavanca e o plano vertical passando pelo fulcro. Se tivermos falando de dois braços da alavanca deve ser entendido que eles estão em lados opostos o plano vertical passando pelo fulcro. (Assis, 2008, p. 155)

Desta forma, a alavanca difere da balança de braços iguais pela possibilidade de colocar pesos em distâncias diferentes e relação ao fulcro, e mesmo assim, obter uma situação de equilíbrio. Agora, iremos apresentar as ideias contidas em experimentos sobre a alavanca, por Assis (2008).

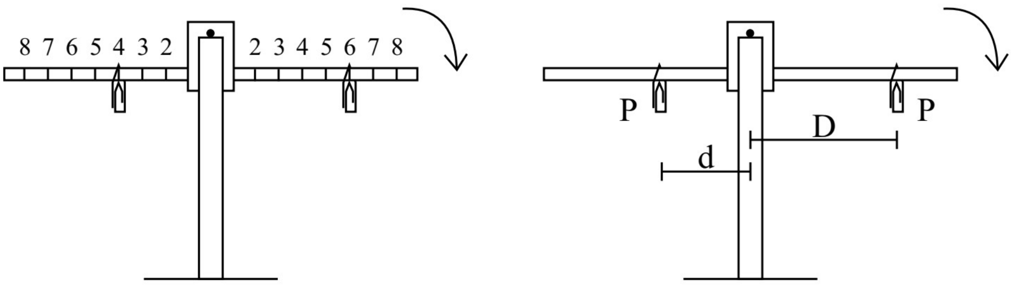

Figura 3.7: Um peso a uma distância maior do fulcro tem um poder maior de girar a alavanca do que um peso igual a uma distância menor do fulcro.
Fonte:(Assis, 2008, p. 157)

Logo, quanto mais distante um peso estiver do fulcro, maior a capacidade de seu peso de girar a alavanca, pela ação da gravidade.

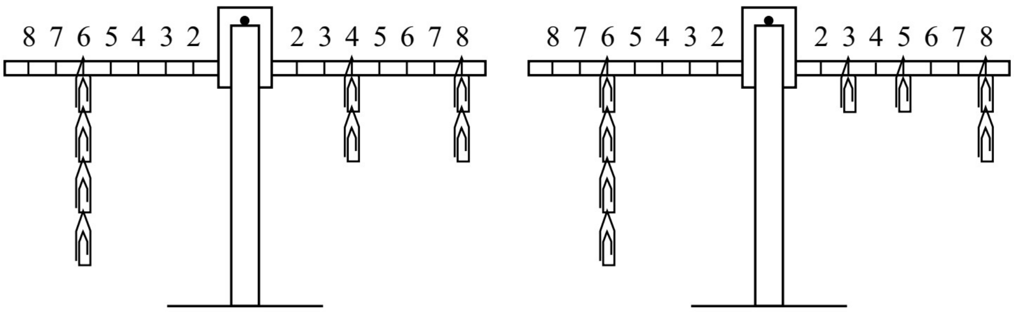

Figura 3.8: O equilíbrio de uma alavanca não é perturbado quando movemos um peso uma certa distância em direção ao fulcro e quando, simultaneamente, um outro peso igual desloca-se a mesma distância se afastando do fulcro.
Fonte:(Assis, 2008, p. 158)

Uma forma de justificar este experimento, está no fato de que dois clipes na posição 4 de uma alavanca, exerce o mesmo peso, do que um clipe na posição 3 e outro na posição 5, pois, temos um afastamento e aproximação em relação ao fulcro, de mesmo comprimento. Logo, é como se permanecesse na posição 4, ou seja, o centro de gravidade do conjunto formado pelos clipes na posição 3 e 5.

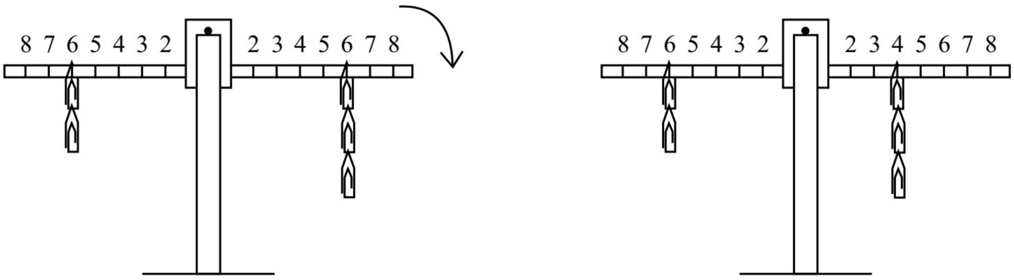

Figura 3.9: Alavanca: Equilíbrio de pesos diferentes.
Fonte:(Assis, 2008, p. 159)

O equilíbrio da alavanca com pesos diferentes, em distâncias desiguais é uma constatação direta e simples, mas apresenta grande potencial de aplicações e foi muito bem explorada por Arquimedes, em *O método*.

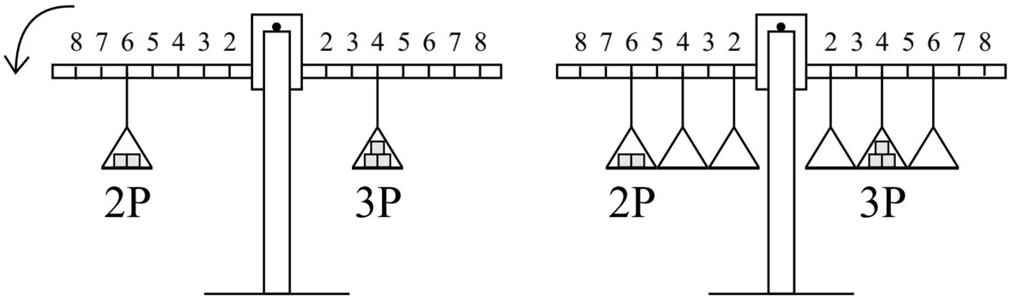

Figura 3.10: (a) Erro comum que inviabiliza a observação da lei da alavanca. (b) Como observar a lei da alavanca corretamente.
Fonte:(Assis, 2008, p. 162)

Caso queira utilizar pratos em uma alavanca, é preciso proceder conforme a figura (b) acima. Caso contrário, não é possível utilizar corretamente a alavanca. Pois, os pratos possuem peso e interferem no equilíbrio da alavanca se estiverem posicionados em distâncias diferentes em relação ao fulcro.

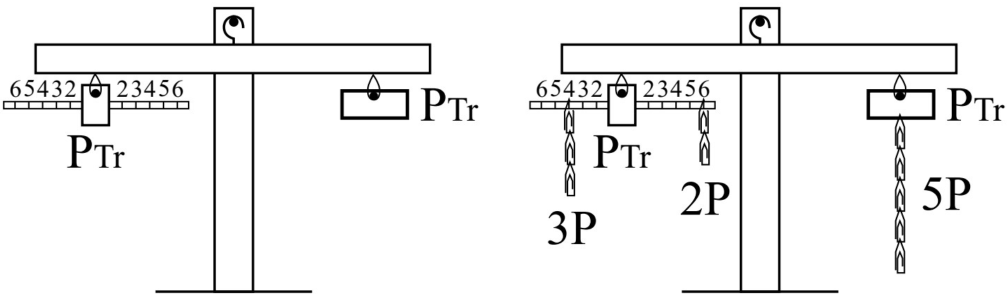

Figura 3.11: Alavancas em equilíbrio.
Fonte:(Assis, 2008, p. 164)

Esta experiência é importante, por conter a ideia de dependurar uma alavanca, em uma balança de pratos iguais. Obter o equilíbrio da balança ao colocar, um peso igual no outro braço da alavanca. Assim, se adicionarmos 5 clipes na alavanca de forma a obter o equilíbrio desta, será necessário adicionar a mesma quantidade de clipes, exatamente na reta vertical, baixo do ponto de suspensão do corpo. Então, o ponto de suspensão da alavanca em equilíbrio, está exatamente na vertical, que contém o centro de gravidade da alavanca. Isto é, podemos dependurar um objeto pelo seu centro de gravidade.

Conforme observado, tratamos aqui, brevemente sobre o resultado dos experimentos sobre o centro de gravidade, balança e alavanca. Para um tratamento completo, recomendamos Assis (2008).

Por fim, a equação matemática que caracteriza a *lei da alavanca*:

> A *lei da alavanca* afirma que um peso P_a atuando à distância d_a do plano vertical passando pelo fulcro equilibra um outro peso P_b atuando à distância d_b do outro lado do plano vertical passando pelo fulcro quando:
>
> $$\frac{P_a}{P_b} = \frac{d_b}{d_a}$$
>
> (Assis, 2008, p. 167)

A seguir, algumas sugestões de propostas de atividade, utilizando o conceito de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca*, com o foco no estudo de objetivos de matemática.

3.2 Atividades

Vamos apresentar abaixo, propostas de atividades de matemática, nos anos finais do ensino fundamental, baseadas ou adaptadas no texto de Assis (2008) e a busca por alternativas que possam contribuir para o processo de ensino aprendizagem desta disciplina.

Devemos enfatizar que se trata de sugestões de atividades, que não tivemos a oportunidade de realizar na práticas durante a elaboração deste trabalho. Assim, as ideias serão abordadas de forma geral sobre a confecção da balança e alavanca. Não vamos apresentar um projeto pronto que contenha os detalhes referentes a coleta de materiais, medidas, processo de construção e possíveis problemas da balança e o comportamento do uso de materiais inadequados. Mas, como se trata de um elemento mecânico simples, não deverá apresentar muitas dificuldades de construção e calibragem do dispositivo.

Ainda, como as atividades exigem habilidades manuais e manipulação de ferramentas, precisão ao medir e na execução de cortes para confeccionar o suporte, balança e alavanca. Logo, para evitar problemas de equilíbrio do sistema e erros na observação dos experimentos, é preciso verificar sobre a viabilidade de todas as etapas do projeto, empregando o tempo necessário e a manipulação apropriada dos materiais, até atingir a precisão mínima para realizar os experimentos de forma satisfatória.

Os materiais utilizados para construir as figuras precisam ter o seu peso distribuído de forma uniforme por toda a superfície. Sempre que for necessário comparar duas ou mais figuras na balança ou em uma alavanca, elas devem ser construídas obrigatoriamente do mesmo material.

Além disso, vamos abordar as atividades na perspectiva de figuras geométricas planas. E para ter a rigidez e o peso a fim de viabilizar os experimentos, as figuras precisam da terceira dimensão mais observável, ou seja, altura ou espessura. Desta forma, é preciso compartilhar esta informação com os alunos para evitar a confusão entre a definição matemática para figuras bidimensionais e tridimensionais. Logo, que estamos utilizando figuras em três dimensões para representar situações em duas dimensões.

3.2.1 Proposta I

Utilizar o cálculo do centro de gravidade das figuras geométricas planas: triângulos, quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, círculo ou outras figuras que o professor julgar apropriado, com o objetivo de aprender sobre as características das figuras. Logo, a atividade consiste em construir figuras geométricas planas, em material rígido, encontrar o centro de gravidade, furar e dependurar a figura por um fio flexível pelo centro de gravidade, ou ainda, caso queira, apoiar a figura em cima de uma base horizontal, de área menor possível.

Assim, o aluno poderá construir ou acompanhar o processo para confeccionar as figuras, devendo zelar para atingir uma certa precisão (definida pelo professor), ao efetuar as medições e recortes. Caso contrário, ao tentar dependurar/apoiar a figura pelo centro de gravidade, ela não irá permanecer na posição em que for abandonada, irá cair do suporte ou inclinar bastante para um lado, quando dependurada por um fio, indicando desequilíbrio.

No que se refere, aos conhecimentos de matemática que os estudantes poderão desenvolver, está na oportunidade ao realizar uma atividade prática, sobre os elementos que compõem as figuras geométricas planas, aprender a relacionar o nome com o formato das figuras e suas características. Assim, para confeccionar figuras, é preciso considerar ângulos, comprimento de lados, diagonais e a superfície ou área da figura. Além, de ajudar a desenvolver à coordenação motora, habilidade com: régua, compasso, transferidor e tesoura.

Como desenvolver/adaptar esta proposta de atividade, deve ser definida pelo professor, para atender aos seus objetivos, com base na observação da turma. Ou seja, no formato de ação de sala de aula, atividade complementar, reforço escolar, projeto interdisciplinar, para apresentar em eventos e feiras, ou ainda, como uma competição entre alunos/equipes.

A avaliação da atividade, quanto a confecção das figuras, poderá ser realizada ao colocar a figura no suporte ou dependurada pelo fio vertical, se a figura permanecer na horizontal, a tarefa foi cumprida. Se isto não acontecer, então, o professor deverá fazer os apontamentos necessários para a correção do problema ou indicar a construção de uma nova figura, reiniciar o processo.

Logo, é o momento propício para o docente abordar sobre o método de Polya (1995) para resolver problemas. Por se tratar de uma atividade prática, é mais fácil para o estudante entender e aplicar, as quatro fases do método de Polya, para verificar as medidas ou construir uma nova figura geométrica.

Desta forma, se o aluno não conseguir construir a figura geométrica desejada, de modo que possa realizar a experiência de forma satisfatória. O professor deverá auxiliar o estudante para encontrar as falhas no processo. E as quatro fases do método de Polya (1995), podem ajudar a identificar o erro. Pois é preciso compreender o problema, traçar um plano, executar o plano e verificar se o resultado está correto. E a partir da mediação do professor, o aluno será capaz de identificar o erro cometido. Assim, as indagações a seguir podem guiar neste processo:

O estudante compreendeu o problema?

Qual a figura que deveria ser construída? O aluno conseguiu relacionar o nome da figura com suas características?

Após, identificar a figura. O aluno conseguiu traçar um plano, que contemple todas as etapas de construção?

Executou o plano da forma correta?

Por fim, verificou se a resposta, ou seja, a construção da figura geométrica está correta?

O aluno atingiu a precisão definida pelo professor, ao medir e recortar?

Caso, o erro observado, em que não seja possível corrigir as imperfeições, a ponto de viabilizar o experimento. Uma nova figura geométrica deverá ser confeccionada. Repetir o processo, mas desta vez, corrigindo os erros observados, e as indagação acima, podem ajudar a identificar as falhas. No entanto, talvez seja necessário refazer, várias vezes a mesma figura, até atingir a perfeição definida. Logo, se o professor conduzir este processo de forma clara, e utilizar todas as oportunidades, para abordar sobre o método de Polya (1995), com o tempo, os alunos poderão se apropriar e utilizar, uma forma de analogia, de *heurística* e das quatro fases de Polya, para resolver outros problemas. Inclusive, fora do domínio da matemática.

Por outro lado, a avaliação da execução do planejamento do professor é muito importante, a fim identificar e corrigir prováveis problemas, inconsistências que possam atrapalhar à atingir os objetivos almejados. Desta forma, o método das quatro fases de Polya (1995), poderá ser empregado para avaliar a execução da atividade proposta. E as indagações a seguir, podem ajudar:

Quais os problemas que o professor observou ao aplicar à atividade? O professor consegue identificar às dificuldades dos alunos? (Compreender o problema)

Como ajudar os alunos a superar estas dificuldades? Como reformular ou adaptar à atividade? (O Plano)

Aplicar novamente a atividade, com as devidas alterações. (Executar o plano)

Com a reformulação/adaptação da atividade, foi possível atingir os objetivos defenidos? (Retrospecto)

Caso os objetivos não sejam contemplados, o professor deverá revisitar as quatro fases do método de Polya. A fim de corrigir as falhas na aplicação da atividade.

Assim, o método de resolver problemas de Polya e a *heurística* presente em indagações e sugestões, considerando as devidas adequações que cada tipo de problema exigir, poderá ser usado para ajudar o professor, na avaliação e na reflexão do seu trabalho, ou seja, terá a oportunidade de aperfeiçoar sua prática docente.

3.2.2 Proposta II

Usar uma *alavanca* para visualizar em um experimento prático, a ideia de grandezas inversamente proporcionais. Haja vista, que pela *lei da alavanca*, podemos equilibrar em braços opostos, pesos distintos, em distâncias diferentes em relação ao fulcro. Ou seja, um peso pequeno consegue equilibrar um peso muito maior, bastando para isto, que esteja longe o suficiente do fulcro.

Assim, relacionar a ideia de grandezas inversamente proporcionais, com um experimento físico e uma equação matemática. Pelo fato de que a distância e o peso se comportam, como grandezas inversamente proporcionais, em uma alavanca em equilíbrio. Para facilitar a observação do experimento, utilizar objetos com pesos iguais, como clipes, por exemplo, em uma alavanca devidamente graduada. Assim, por exemplo, um clipe na posição 4 de um lado do fulcro, consegue equilibrar, quatro clipes na posição 1, do outro lado do fulcro da alavanca. Usar grandezas comensuráveis.

> A ideia de comensurar é a de medir por comparação. Isto é, medir duas ou mais grandezas com a mesma unidade ou padrão de medida. Caso o peso de um corpo A seja 5 vezes de um corpo C, e o peso de um corpo B seja 3 vezes o peso do mesmo corpo C, diz-se que A e B são comensuráveis.
>
> (Assis, 2008, p. 160)

Logo, lidar com pesos e distâncias comensuráveis, apresenta grande vantagem, ao abordar sobre a ideia de grandezas inversamente proporcionais, pela facilidade de visualizar o experimento e acompanhar os cálculos na resolução da equação de proporção. Assim, novamente vamos relacionar um experimento prático, com uma equação matemática. E após esta etapa, aplicar o método de Polya (1995), para verificar se os alunos compreenderam a ideia de inversamente proporcional.

A seguir vamos considerar uma alavanca em equilíbrio com apenas dois objetos, para explorar as indagações a seguir:

O aluno é capaz de fazer uma analogia entre a atividade prática na alavanca e a ideia de grandezas inversamente proporcionais?

Quando, a partir do equilíbrio na alavanca, se mudar o primeiro objeto de posição, obtemos uma situação de desequilíbrio?

O aluno consegue dizer claramente se é possível restaurar o equilíbrio, ao mudar a posição do segundo objeto de lugar, no outro lado da alavanca?

O aluno compreendeu que a resolução de uma equação, proveniente da proporção, poderá determinar a posição correta do outro objeto, para restaurar o equilíbrio?

Qual atividade é mais prática e rápida, ir mudando o segundo objeto de posição até obter o equilíbrio ou resolver uma equação, em que a solução irá determinar a posição correta do segundo objeto?

O aluno consegue relacionar este experimento com uma atividade prática do dia a dia, como a ideia de multiplicar a força humana, para mover grandes objetos?

As indagações acima, ou outras perguntas que possam surgir no decorrer da execução da atividade, é importante que sejam observadas na perspectiva de *heurística moderna*. Pois, estamos interessados em identificar se o aluno conseguiu se apropriar da mensagem, neste caso, a ideia de grandezas inversamente proporcionais. Caso o aluno não consiga, cabe ao professor, com base na observação, encontrar estratégias para o objetivo proposto.

Logo, o professor irá se deparar com um desafio ou um problema, conseguir organizar uma estratégia de ensino que contribua para o processo de ensino aprendizagem, para superar as dificuldades dos alunos. Assim, o método de Polya (1995), para resolver problemas poderá ser empregado nesta missão.

O professor identificou a dificuldade dos alunos? (Compreender o problema)

Como o professor irá organizar a sua estratégia na intervenção pedagógica, com base na observação das dificuldades dos alunos? (Traçar um plano)

Após aplicar a intervenção pedagógica, os alunos conseguiram se apropriar e aplicar o objetivo proposto pelo professor? (Executar o plano. Retrospecto)

Todos os alunos conseguiram atingir o objetivo, abordado pelo professor?

Assim, as indagações provenientes da *heurística moderna* de Polya, se bem empregadas, constituem um importante ponto de apoio da prática docente, ou seja, facilitar o trabalho do professor.

Ainda, se considerar um dos elementos: d_a, d_b, P_a ou P_b da equação 1.1, que compõe a proporção, como uma incógnita. Podemos usar a alavanca para resolver de forma prática a equação decorrente, e em paralelo, resolver a equação, de forma algébrica. Relacionar os dois modos de resolução. Assim, os alunos poderão visualizar em uma atividade simples, que poderá ajudar na compreensão do significado de resolver uma equação matemática. Isto é, resolver um problema de determinação, descobrir o valor de uma incógnita.

3.2.3 Proposta III

Em uma alavanca, podemos dependurar figuras geométrica tridimensionais, para representar uma situação envolvendo figuras geométricas em duas dimensões. Assim, ao equilibrar duas figuras diferentes, se forem confeccionadas com o mesmo material, é possível comparar suas áreas. Por exemplo, se uma figura A, está a 8 unidades de comprimento de fulcro e equilibra, do outro lado, uma figura B, distante, 2 unidades de comprimento. Pela *Lei da Alavanca*, podemos inferir que:

$$\frac{\acute{A}rea_A}{\acute{A}rea_B} = \frac{d_B}{d_A} \Rightarrow \acute{A}rea_A = \frac{1}{4}.\acute{A}rea_B$$

ou ainda,

$$\acute{A}rea_B = 4.\acute{A}rea_A$$

Desta forma, a alavanca pode ser aplicada para comparar a área de figuras geométricas planas, com o objetivo de aprender o significado de *cálcular a área*. Então, vamos usar esta propriedade, para comparar a área de uma figura, com a unidade de área escolhida. Por exemplo, se considerar um retângulo, com comprimento de 4 cm e largura de 3 cm, logo a área do retângulo é $\acute{A}rea_{ret\hat{a}ngulo} = 12cm^2$. E a unidade de área definida, um quadrado de $1cm^2$. Pela *Lei da Alavanca*, se o retângulo, for dependurado a distância de uma unidade de comprimento de fulcro, o quadrado deverá ser dependurado a 12 unidades de comprimento distante, no lado oposto do fulcro. Isto implica, que precisamos de 12 quadrados de $\acute{A}rea_{quadrado} = 1cm^2$. Ou seja, a $\acute{A}rea_{ret\hat{a}ngulo} = 12.\acute{A}rea_{quadrado}$.

Uma comparação, da área do retângulo e o quadrado (unidade de área). Ou seja, calculamos a área do retângulo em função da unidade de área pré-estabelecida. Ao repetir o processo para outra figura, um triângulo, por exemplo. Conseguimos comparar a área do retangulo e do triângulo, em função de uma terceira figura, o quadrado que cumpre a função de unidade de área.

Uma sugestão, é usar nas atividades, com o objetivo de introduzir o estudo sobre o *cálculo de área*, números comensuráveis. Pois, permitem criar situações que envolvam cálculos simples, imediatos. Logo, que o foco deve ser, abordar sobre a comparação de áreas de figuras, para que todos os alunos tenham a oportunidade de acompanhar o processo.

Até aqui, esta atividade tem como proposito principal, ser o mais acessível possível ao estudante. Pois muitos alunos, não conseguem se apropriar da ideia de comparação, por traz do cálculo da área de uma figura em função de uma unidade de área definida. E uma atividade nestes moldes, talvez ajude à atingir esse objetivo. Então, vamos usar de *heurística moderna* de Polya (1995), ao fazer uma analogia entre o cálculo da área de um retângulo e de um triângulo, por exemplo, ao comparar com uma terceira figura, a unidade de área. E ao elaborar as sugestões e indagações que possam ajudar os estudantes a identificar os elementos e compreender a ideia que está sendo abordada.

Qual o papel da unidade de área no cálculo da área de uma figura geométrica?

O que consiste em calcular a área de uma figura? O que é preciso considerar para calcular a área de uma figura?

E as famosas fórmulas, por exemplo, para calcular a área de uma figura geométrica, se for um retângulo, a área é determinada pela multiplicação da base x altura, por que é assim? Como isso funciona?

Figuras geométricas com formatos diferentes, podem ter a mesma superfície, área?

Entre duas figuras geométricas distintas, como determinar qual figura geométrica tem a superfície maior?

A ideia de calcular a área de uma figura geométrica, pode ser empregada em uma atividade prática, do nosso cotidiano? Qual?

As indagações acima, se bem exploradas, irão ajudar o estudante a se apropriar do conceito matemático de determinar a área de uma figura geométrica qualquer, e suas possíveis aplicações em várias atividades humanas.

Agora, vamos abordar sobre a segunda fase, desta atividade. Em que os estudantes já dominam as noções básicas sobre o cálculo de área de uma figura geométrica plana.

Ao avaliar a turma, e o professor conseguir observar progressos no cálculo de áreas comensuráveis. Isto é, os alunos conseguirem compreender a definição de calcular a área e aplicar em cálculos simples. Neste momento, se o docente julgar apropriado, poderá abordar sobre situações de cálculo de área com números reais.

Se dispuser de uma alavanca calibrada e sensível o suficiente, em que o atrito do fulcro e da base não interfira no movimento da alavanca, em pequenas variações da posição em que for dependurado uma figura. Neste caso, será viável abordar sobre situações mais complexas, por exemplo, o cálculo aproximado, de forma experimental, de uma figura plana de contorno irregular e curvo, com o uso de uma unidade de área apropriada, ou múltiplo. Considerando elementos relacionados com *Heurística* no método de Polya (1995), para criar sugestões e indagações que possam atender ao objetivo definido pelo professor.

Portanto, a alavanca é uma ferramenta versátil para o estudo e investigação sobre figuras geométricas. Ou seja, conseguimos usar em situções simples ou atividades mais complexas, a depender dos objetivos definidos pelo professor.

Sobre a avaliação da atividade, o professor deverá considerar as seguintes indagações:

O aluno consegue compreender o significado de calcular a área de uma figura geométrica?

O aluno consegue associar o cálculo da área de uma figura geométrica com uma fórmula? E que cada figura, possui uma fórmula específica, que depende das características da figura?

O aluno consegue aplicar em uma atividade prática, o cálculo de área de figuras geométricas?

O aluno consegue elaborar ou resolver problemas relacionado com o cálculo de área de figuras geométricas?

Assim, a partir das respostas das indagações acima, o professor deverá elaborar, caso necessário, a intervenção pedagógica, a fim de superar as dificuldades dos estudantes.

3.2.4 Proposta IV

Conforme apresentado no capítulo 2 deste trabalho, a área de um círculo é igual a área do triângulo retângulo, em que a medida de um cateto é igual ao comprimento do círculo, e a medida do outro cateto, igual ao raio do círculo. Desta forma, podemos utilizar uma balança de pratos iguais para mostrar que a superfície de um círculo e do respectivo triângulo retângulo que compartilhar as medidas dos catetos, com o comprimento e raio do círculo em questão, são iguais.

Assim, se construídos do mesmo material e colocados em lados opostos, em uma balança de braços iguais e calibrada, o travessão da balança deverá permanecer na horizontal, isto implica, que as áreas das figuras são iguais. Uma forma experimental de mostrar que a área de duas figuras distintas é igual.

Por outro lado, apresentar a manipulação algébrica, partindo da fórmula da área de um triângulo retângulo, e fazer as substituições necessárias até obter a fórmula da área do círculo. Assim, relacionar uma atividade prática com outra, de caráter teórico.

Logo, o aluno terá a oportunidade de observar em uma atividade prática, como mostrar que a área de duas figuras geométricas, que a princípio, não poderiam ser igualadas, e na balança de pratos iguais, conseguir realizar essa tarefa. Ainda mais, com base na manipulação algébrica na equação que determina a área de um triângulo retângulo, substituindo a medidas dos catetos, pelo comprimento da circunferência e raio do círculo, mostrar de forma algébrica, que a área de todo círculo é igual a área do triângulo retângulo, em que a medida de um cateto, seja igual ao raio, e o outro cateto, igual ao comprimento da circunferência.

Assim, ao mostrar que a área de um círculo qualquer, poderá ser igualada a área de um triângulo retângulo. Mas, para isto, satisfazer as condições impostas acima. E por outro lado, podemos observar que para todo retângulo, é possível determinar um quadrado de mesma área. Ou seja, obtemos a quadratura do círculo, isto é, para todo círculo, existe um quadrado de mesma área. Logo, ao relacionar a área de um círculo com a área de um quadrado, é uma boa oportunidade de abordar sobre o conjunto dos números irracionais, com o exemplo, do número π.

Logo, a partir da aproximação feita, para determinar o lado de quadrado, que irá depender da quantidade de casas decimais consideradas após a vírgula, e da capacidade de medir pequenas distância menores que o milímetro (mm), por exemplo. Um fato importante, pois a definição matemática de π, como um número irracional, não permite que o segmento de comprimento π possa ser medido e traçado com exatidão, em uma folha de papel. Então, é preciso fazer uma aproximação, a depender da precisão exigida, em uma aplicação.

Desta forma, temos a oportunidade de apresentar aos alunos, conforme Polya (1995) a ideia de uma generalização, ou seja, para qualquer círculo, podemos obter um triângulo retângulo de mesma área. Além, de abordar sobre as noções sobre como procedemos em matemática, para mostrar um resultado, no caso a relação existente entre um círculo e um triângulo retângulo. Ou seja, abordar sobre uma proposição ou teorema, o primeiro passo, para compreender a estrutura de uma demonstração.

Para a aplicação desta proposta de atividade, é preciso construir ou possuir uma balança de pratos iguais muito bem calibrada, testar todos os passos do experimento, antes de apresentar aos estudantes, para garantir que ruídos quanto a possíveis falhas não tire o foco, do objetivo principal proposto pelo professor. E considerar as seguintes sugestões:

Fazer medições de objetos circulares, para determinar o comprimento da circunferência e o diâmetro;

Abordar o problema da quadratura do círculo e considerar à aproximação da área do círculo de Arquimedes, por polígonos regulares circunscrito e inscrito, é a ideia de aumentar o número de lados dos polígonos, para aproximar à área do círculo;

Usar a balança para mostrar que a área do polígono regular circunscrito é maior que a área do círculo, e o polígono regular inscrito ao círculo, a área é menor que a área do círculo, com os polígonos regulares com a mesma quantidade de lados;

Comentar sobre como determinar o comprimento da circunferência e fazer medições de objetos circulares e a generalização decorrente, em que a razão que define o número π, pode ser obtido em qualquer círculo/circunferência;

Considerar possíveis problemas de construção das figuras, que possam atrapalhar o experimento.

Assim, esta proposta de atividade sobre o círculo, pode ser organizada ou adaptada para trabalhar vários elementos relacionados com o círculo. Desde a ideia de determinar o perímetro e o cálculo da área do círculo. Abordar sobre π, um número irracional, ou no sentido de uma generalização, isto é, o número π, pode ser determinado em qualquer circunferência, pela razão do comprimento da circunferência pela medida do raio. Ou ainda, a ideia de aproximação de áreas, ao observar que o polígono regular inscrito no círculo, quanto maior a quantidade de lados, a área do polígono regular será mais próxima da área do círculo. E mais, uma forma de limite, pois a área do polígono regular inscrito ao círculo, quanto maior o número de lados, mais próximo da área do círculo. Ou seja, a área do polígono regular tende para a área do círculo, que depende da quantidade de lados. Logo, o professor poderá organizar uma sequência didática, ou inserir em seu planejamento, a parte desta proposta de atividade com base em seus objetivos.

Logo, o professor é quem deverá decidir qual objetivo irá contemplar. Atividade simples, para mostrar alguns resultados. Ou para trabalhar ideias mais complexas e abstratas. Ou seja, é preciso considerar o nível dos estudantes. E as indagações a seguir, podem ajudar a definir o objetivo principal e/ou avaliar à aplicação da atividade.

O aluno reconhece as característiscas de um círculo? O aluno compreende a importância do círculo (a roda) para a humanidade?

O aluno compreende o significado de calcular a área de um círculo?

O aluno consegue relacionar a área do círculo com a área de um quadrado?

O aluno conhece as características de um número irracional?

O aluno tem a noção sobre uma generalização em matemática?

O aluno tem a noção de limite? Como um experimento com círculo e polígonos regulares inscritos e circunscritos, com a mesma quantidade de lados, pode ajudar a desenvolver a ideia de limite?

Como organizar uma sequência didática, ou um minicurso, a partir desta atividade, de forma a contemplar todos os elementos citados?

Desta forma, as sugestões acima, constituem um ponto de partida, para organizar os objetivos da atividade. E as indagações, para ajudar a identificar até que ponto o professor irá aprofundar sobre o tema. Considerando ainda, as noções dos estudantes sobre o assunto.

Por fim, as propostas de atividades abordadas aqui, são idealizadas, para servir de apoio ao professor, na busca por alternativas, que possam contribuir para abordar sobre as ideias, contidas em conceitos e definições de matemática, no processo de ensino aprendizagem. Assim, discutimos sobre ideias de atividades, na perspectiva de permitir que os alunos possam acompanhar e aprender sobre o tema, ou seja, trabalhar os conceitos da forma mais simples possível ou aprofundar o seu conhecimento, uma tentativa de inserir o maior número de alunos no processo, a fim de facilitar a alfabetização e o letramento em matemática. Por considerar um bom ponto de partida, aquele que for o mais simples, que conseguirmos iniciar ou complementar o processo de ensino aprendizagem, e empreender esforços conscientes para completar as lacunas no estudo/compreensão dos sistemas lógicos presentes nesta ciência.

Considerações finais

.

A partir da pesquisa sobre Arquimedes e o estudo da essência de *O método*, podemos observar um ponto de vista interessante, empregado no estudo da matemática. Usar os conceitos físicos de *centro de gravidade* e a *lei da alavanca* , para investigar por teoremas. Ou seja, é possível perceber como Arquimedes descobria seus resultados com base em ideias de experimentos físicos. Assim, o caminho abordado sobre os detalhes de como um teorema foi descoberto, ou mostrar um resultado de forma experimental poderá ser explorado como uma ferramenta para o ensino de matemática.

Por outro lado, em matemática os resultados são baseados em lógica e demonstrações, leis que regem e descrevem com precisão os entes pertencentes a esta área do conhecimento. Desta forma, a matemática é uma sofisticada e complexa construção humana, é o processo de desenvolvimento desta ciência esteve sob os cuidados de um grupo restrito, que adotaram uma linguagem singular não acessível para a maioria das pessoas.

Ao apresentar a essência de *O método* de Arquimedes, podemos observar uma abordagem diferente ao estudar temas de matemática. Essas ideias são importantes, por abrir caminho para uma forma diferente de pensar e abordar os temas em matemática, que pode contribuir para o ensino desta disciplina. Lidar com *heurística* relacionada ao processo de descoberta ou invenção.

Para o processo de ensino aprendizagem, o que devemos considerar mais importante, é justamente o caminho percorrido ao estudar um tema. Assim, ao voltar o olhar para o processo de ensino aprendizagem e a resolução de problemas, o método das quatro fase de Polya (1995) e também, os conhecimentos relacionados com *heurística*, podem ser empregados para resolver problemas.

Assim, nesta perspectiva, abordamos o tratado de George Polya, sobre *heurística*, presente em *A arte de resolver problemas*, relevante pela intenção de contribuir para uma visão mais abrangente sobre a matemática, isto é, uma tentativa de abordar sobre os elementos básicos, que os estudantes precisam conhecer para progredir em seus estudos. Além, de aprender sobre estratégias para resolver problemas.

Em geral, os estudiosos privilegiam o registro dos resultados dos processos de investigação em matemática, e não os prováveis percalços enfrentados, as inúmeras tentativas e o tempo gasto até atingir um objetivo almejado. Polya (1995), por sua vez, ao discutir sobre os desafios de resolver um problema, mostra, que no estudo de matemática a maioria das pessoas podem enfrentam dificuldades, e o fator decisivo, é saber como enfrentar os desafios. Superar os obstáculos, aprender a conviver com o erro, não desistir. E os conhecimentos sobre *heurística* podem ajudar nesta tarefa.

As atividades propostas consistem em um esforço para lidar com temas de matemática, de forma a envolver e aplicar as ideias relacionadas com *heurística*, no estudo de assuntos de matemática. No caso deste trabalho, empregar os conceitos físicos por meio de procedimentos práticos.

A *heurística* presente no método das quatro fases de Polya (1995), por se basear em indagações e sugestões e pela liberdade de adaptação é uma alternativa para ser explorada em sala de aula, para gerar momentos de reflexão, análise, discutir sobre um tema, fazer conjecturas. Basta para isto, preparar as perguntas e sugestões em direção ao objetivo definido pelo professor.

Além disso, o método das quatro fases de Polya (1995) também poderá ser usado pelo professor para contornar os problemas e desafios na sua prática docente. No sentido de dar suporte para identificar as dificuldades de aprendizagem de um aluno/turma e a busca pela melhor solução possível, ou seja, a intervenção pedagógica apropriada. Assim, as sugestões e indagações baseadas em *heurística* por lidar com o provisório, o provável, não descartar nenhuma possibilidade, explorar todas as alternativas na busca da melhor saída, é uma ferramenta poderosa que o professor precisa utilizar e sua prática docente para atender as necessidades dos alunos, ou seja, cada turma pode exigir uma abordagem específica. E para isto, o professor precisa abordar uma situação problema e Polya (1995) pode ajudar muito neste processo.

Sobre as propostas de atividades, não foi possível durante a elaboração deste trabalho, construir os dispositivos e aplicar as atividades em sala de aula. Mas, na primeira oportunidade vamos realizar a parte prática, relatar a experiência, dificuldades e avaliação.

Assim, vamos elaborar um artigo para apresentar os resultados.

Este trabalho além apresentar propostas de atividades, tem por objetivo abordar sobre elementos que possam contribuir para a formação do professor, com uma tentativa de discorrer sobre *heurística* e sua aplicação na resolução de problemas, na perspectiva de Polya (1995) através do método das quatro fases. Assim, no capítulo 2, ao apresentar a essência de *O método* de Arquimedes, tivemos a oportunidade de observar, como utilizar ideias para conseguir mostrar um resultado importante, a área da região delimitada por um segmento de parábola e um segmento de reta. Determinar a área de uma região curva, em função de outra figura conhecida, um triângulo, que compartilhar a mesma base e altura do segmento de parábola. Assim, aprendemos com Arquimedes que podemos pensar diferente, analisar outras possibilidades, pois muitas vezes é preciso acreditar que é possível e o capítulo 2 em parte foi empregado com esta finalidade. Pois, mesmo com ideias simples, Arquimedes conseguiu fazer uma grande coisa em sua época.

A primeira vista as indagações e sugestões do método de Polya (1995) para resolver problemas podem parecer simples demais. Mas, são baseadas em *heurística* e podem ser usadas no processo de ensino aprendizagem com uma função previamente definida, ajudar o estudante a entender temas de matemática e resolver problemas. Além de estar atento sobre a organização da matemática, Polya (1995) tentar chamar atenção para os elementos minímos, que os estudantes precisam conhececer e compreender para avançar no estudo em matemática. Assim, este texto pode ser entendido como um ponto de apoio para aprofundar o conhecimento do professor sobre dois assuntos fundamentais em matemática: *heurística* e *resolução de problemas*.

Referências Bibliográficas

Assis, A. K. T. (2008). *Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca*. Apeiron, Montreal.

Cmodom (2020). Area of a Circles from Dissections. `https://www.geogebra.org/m/AJSmWRzp` Acesso em 22/10/2020.

Karlson, P., Pfeifer, H., e Brito, E. (1961). *A magia dos números*, capítulo 3, páginas 80–154. Coleção Tapete Mágico. Ed. Globo, R. Janeiro.

Magnaghi, C. P. e Assis, A. K. T. (2014). *O Método de Arquimedes*. Roy Keys, `http://redshift.vif.com`.

Morais Filho, D. C. (2012). Um convite à matemática. In *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, R. Janeiro.

Nápoles, S. (2020). Cálculo de Pi. Geometria Intuitiva Interativa `https://www.gi2.pt/galerias/calculo-de-pi/` Acesso em 22/10/2020.

Netz, R. e Noel, W. (2009). *Códex Arquimedes*. Record, S. Paulo.

Oliveira, K. e Corcho, A. J. (2010). *Iniciação à Matemática*. SBM, R. Janeiro.

Orchiming, A. (2020). Area of Circles. Geogebra Institute of Hong Kong, `https://www.geogebra.org/m/Vzmdw73g#material/fyqAUV22` Acesso em 22/10/2020.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo, Interciência, R. Janeiro.

Roque, T. e Carvalho, J. B. P. (2012). Tópicos de História da Matemática. In *Coleção Profmat*. SBM, R. Janeiro.

Serres, M. (1989). *Elementos para uma história das ciências.* Terramar, Lisboa.

Silva, R. P. (2014). Arquimedes e o método. Dissertação de Mestrado, IM, Profmat – UFAL, Maceió/AL.

Strathern, P. (1999). *Arquimedes e a Alavanca em 90 minutos.* Zahar, S. Paulo.

Tao, T. (2013). *Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal.* Tradução de Paulo Ventura, SBM, R. Janeiro.