**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Jefferson Maciel

**Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação**

São Gonçalo
2020

Jefferson Maciel

**Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Telles

São Gonçalo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/D

M152 Maciel, Jefferson
Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação / Jefferson Maciel. – 2020.

47f.:il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Telles.

Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Análise combinatória - Teses. 2. Dirichlet, Problemas de - Teses. 3. Matermática aplicada - Teses. I. Telles, Márcio. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Faculdade de Formação de Professores. IV. Título.

CRB/7 - 4994 CDU 519.1

Jefferson Maciel

**Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de novembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Telles (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza
Faculdade Formação de Professores – UERJ

Dra. Jéssica Quintanilha Kubrusly
Universidade Federal Fluminense

PHD Guilherme Frederico Lima
Universidade de Cambridge

São Gonçalo

2020

## RESUMO

MACIEL, Jefferson. *Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação.* 2020. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

O presente trabalho tem por objetivo utilizar o conhecido "Princípio da Casa dos Pombos" como ponto inicial e espinha dorsal para ilustrar algumas das várias vias de aplicações de conceitos de Matemática e, em particular da Combinatória, tais como aspectos históricos, possibilidades de atividades no âmbito do ensino, generalizações a conceitos mais amplos e abstratos e uso de técnicas oriundas de outras áreas da Matemática em conjunto, resultando em demonstrações mais coerentes e elegantes.

Palavras-chave: Princípio das gavetas de Dirichlet. Número de Ramsey. Paris-Harrington.

# ABSTRACT


MACIEL, Jefferson. *Dirichlet and Ramsey: a beautiful combination.* 2020. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

The present work aims to use the well-known "Principle of House of pigeons" as a starting point and backbone to illustrate some of the various ways of applications of mathematics concepts and, in combinatorial, such as historical aspects, possibilities for activities in the field of education, generalizations to broader concepts and use of techniques from other areas of Mathematics in resulting in more coherent and elegant demonstrations.



Keywords: Dirichlet drawer principle. Ramsey's Number. Paris-Harrington.

## LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo utilizar o conhecido "Princípio da Casa dos Pombos" como ponto inicial e espinha dorsal para ilustrar algumas das várias vias de aplicações de conceitos de Matemática e, em particular da Combinatória, tais como aspectos históricos, possibilidades de atividades no âmbito do ensino, generalizações a conceitos mais amplos e abstratos e uso de técnicas oriundas de outras áreas da Matemática em conjunto, resultando em demonstrações mais coerentes e elegantes.

A Combinatória é um ramo da Matemática que lida com técnicas de contagem de famílias de estruturas. Por isso, necessita, entre outras coisas, de um conhecimento básico das operações matemáticas tais como soma, multiplicação, divisão e subtração. Talvez por isso, desperte interesse em alunos do ensino médio. Mas a Combinatória não fica limitada à ideia de contar. Existem alguns problemas de formulações simples mas cuja solução ainda não sabemos: Quantas pessoas são necessárias numa festa para ter certeza que 5 delas se conhecem mutuamente ou se desconhecem mutuamente? Quantas cores são necessárias para pintar o plano de tal forma que nenhum par de pontos distantes de uma unidade possua a mesma cor? Neste trabalho, não iremos resolver esses problemas, mas mostraremos um pouco da magia e curiosidade que despertaram em matemáticos como Dirichlet e Ramsey.

Johann Peter Gustav, o jovem Dirichlet, tem uma ampla história na matemática como veremos no Capítulo 1. Veremos ali um princípio bem simples, mas de grande importância na solução de problemas de "raciocínio lógico" e suas versões mais específicas: O Princípio das Gavetas de Dirichlet, que tem aplicações muito interessantes. Apresentaremos, também, algumas de suas variações.

Na Seção 1.7 teremos algumas aplicações que podem auxiliar professores do ensino médio ao ensinarem este tema. Os exercícios encontram-se com gabarito comentado para que tanto o professor quanto o aluno possam comparar argumentos e soluções.

A partir do Capítulo 2, teremos uma porção bem menos elementar do trabalho, envolvendo, entre outras coisas, a Teoria de Ramsey e o uso de técnicas de Topologia para provarmos certos resultados, conforme é possível acompanhar abaixo.

Apesar da curta vida, Frank Plumpton Ramsey, deixou um grande legado para a matemática e é o grande responsável pelo crescimento de uma área que leva o nome de Teoria de Ramsey, que procura encontrar regularidades em conjuntos grandes e com estrutura possivelmente caótica.

Quantas pessoas precisam estar em uma festa para que cinco delas se conheçam ou cinco delas se desconheçam mutuamente? Essa pergunta, cuja resposta não se conhece, é típica da Teoria de Ramsey. Nos debruçaremos sobre alguns aspectos e resultados básicos da teoria.

Ainda no Capítulo 2, trabalharemos com duas versões de um resultado conhecido como Teorema de Ramsey. Apresentaremos demonstrações tradicionais das versões "finita" e "infinita", ambas por processos de indução, alguns aninhados de forma um tanto quanto intrincada.

No Capítulo 3, que encerra a dissertação, encontraremos uma segunda demonstração da versão "infinita" do Teorema de Ramsey, usando técnicas de Topologia. Mais especificamente, construímos um espaço ultramétrico cuja compacidade é um dos principais ingredientes no argumento da prova. Os autores Jeff Paris e Leo Harrington introduziram uma versão modificada deste teorema que parece ser o primeiro exemplo natural das proposição indecidíveis em Aritmética de Peano previstas pelo Teorema da Incompletude de Gödel. É possível demonstrar essa versão modificada usando argumentos em claríssima analogia aos utilizados na prova topológica da versão "infinita". Incluímos também essa demonstração para fins de completude do texto, além de formular o teorema em uma versão equivalente, embora um pouco diferente, à versão usual com o intuito de enfatizar a analogia referida acima. Ao final, destacamos, sem prova, o fato de que a versão modificada introduzida por Jeff Paris e Leo Harrington não pode ser demonstrada em Aritmética de Peano e, portanto, não se presta a uma demonstração nos moldes dos argumentos encontrados no Capítulo 2. Este fato é conhecido com Teorema de Paris-Harrington.

Apesar de referências muito claras e diretas à possibilidade do uso das técnicas topológicas que discutimos acima em demonstrações das duas versões do Teorema Finito de Ramsey existirem em literaturas variadas, não encontramos os argumentos completos escritos em detalhe e, portanto, achamos por bem incluí-los no presente trabalho.

Esperamos que o presente texto dê sua modesta contribuição à divulgação e ao incremento do interesse por esses vastos e interessantíssimos temas.

# 1 PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS (PCP)

## 1.1 Quem foi Dirichlet?

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um matemático alemão nascido em Düren no dia 13 de fevereiro de 1805. A atual definição formal de funções é atribuída a ele, além de diversas outras contribuições, tais como a lei de reciprocidade quadrática, teoria dos números, equações diferenciais e, especialmente relevante para este trabalho, o princípio da casa dos pombos, tembém conhecido como "princípio das gavetas".

Sua família era originária de Richlet, na Bélgica, por isso ser chamado de "Lejeune Dirichlet" ("o jovem de Richlet").

Foi educado na Alemanha e na França e teve professores como Simeon Denis Poisson e Jean-Baptiste Joseph Fourier. Sua primeira publicação foi sobre o "último teorema de Fermat", a famosa conjectura, provada nos dias atuais, que afirma:

*Para todo $n > 2$ a equação $x^n = y^n + z^n$ não tem solução inteira, com exceção da solução trivial, onde $x = y = z = 0$.*

Dirichlet concebeu uma prova para $n = 5$, que foi completada pelo seu avaliador Adrien-Marie Legendre, mas ele também a completou quase ao mesmo tempo. Mais tarde produziu uma prova completa para $n = 14$.

Em 1837, Dirichlet introduziu argumentos relevantes envolvendo progressões aritméticas e números primos e, em 1838, publicou trabalhos introduzindo as séries que têm o seu nome.

Em sua única obra a respeito da Teoria Algébrica dos Números, ele forneceu a definição moderna de função, que utilizamos até hoje.

A partir de 1839, na mecânica, investigou sistemas em equilíbrio e a teoria do potencial. Aplicou técnicas para avaliar integrais múltiplas no problema da atração gravitacional.

Em 1852, estudou o problema de uma esfera submersa em um fluido, sendo o primeiro a obter equações precisas sobre a hidrodinâmica.

Também realizou estudos a respeito das condições de convergência de séries trigonométricas e utilizou séries para representar funções arbitrárias. Tais séries foram usadas por Fourier na resolução de equações diferenciais.

Casou-se com Rebecka Mendelssohn, originária de uma distinta família, a neta do filósofo Moses Mendelssohn e irmã do compositor Felix Mendelssohn.

Gotthold Eisenstein, Leopold Kronecker e Rudolf Lipschitz foram seus alunos. Após a sua morte, os escritos de Dirichlet e outros resultados em teoria dos números foram recolhidos, editados e publicados por seu amigo e colega matemático Richard Dedekind sob o título Vorlesungen über Zahlentheorie (Aulas sobre Teoria dos Números).

Ele foi sepultado no Bartholomäusfriedhof em Göttingen.

## 1.2 O Princípio e suas demonstrações

O princípio da casa dos pombos (PCP) é também conhecido como teorema de Dirichlet ou princípio das gavetas de Dirichlet, pois supõe-se que o primeiro relato deste princípio tenha sido feito por Dirichlet em 1834, com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas").

Em sua versão mais simples, o princípio pode ser enunciado da seguinte forma:

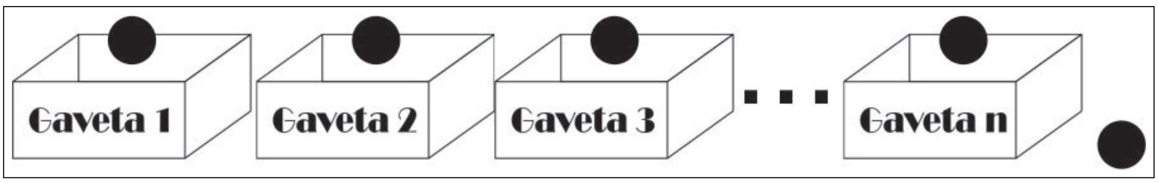
**Teorema 1.** *Se tivermos $n+1$ objetos para serem colocados em $n$ gavetas, pelo menos uma gaveta terá pelo menos dois objetos.*

É muito comum, no enunciado acima, "gavetas" serem substituídas por "casas" e "objetos" por "pombos". Por isso, tal princípio é também conhecido por "Princípio da Casa dos Pombos".

Suas demonstrações são, quase invariavelmente, muito simples. Vejamos uma possibilidade:

Vamos distribuir $n+1$ objetos nas $n$ gavetas. Se colocarmos mais de um objeto em uma única gaveta o princípio se cumprirá. Coloquemos, então, um objeto em cada uma das $n$ gavetas. Assim, executamos a pior das hipóteses e teremos $n$ objetos distribuídos nas $n$ gavetas e sobrará um objeto, que terá que ser colocado em qualquer uma das gavetas já previamente ocupadas, que ficará, assim, com dois objetos.

Figura 1 - Gavetas de Dirichlet




Legenda: Organizando os objetos nas gavetas

Outro possível caminho é argumentar por absurdo: se cada uma das $n$ gavetas tivesse no máximo 1 objeto, o número total de objetos seria $\leq n$, um absurdo. É oportuno notar que, caso estejamos lidando com uma turma de ensino médio, esta é uma boa oportunidade para introduzir ou exemplificar argumentações por absurdo. Veremos, adiante, que este argumento se generaliza mais facilmente.

## 1.3 Como aplicar?

O princípio das gavetas é um exemplo de argumento muito versátil e abrangente: pode ser aplicado a muitos problemas formais, sejam aqueles que envolvem conjuntos infinitos ou não.

Embora seu conteúdo seja extremamente elementar e intuitivo, o princípio é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos, com conclusões por vezes surpreendentes ou paradoxais. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos (Pombos) e quem faz o papel das gavetas (Casas).

A primeira coisa que devemos aprender é a reconhecer quando um problema pode ser abordado via o PCP. Normalmente, a estrutura a ser identificada é, de maneira geral, a seguinte:

*Dado um conjunto de $n$ objetos, prove que podemos escolher $k$ deles satisfazendo uma certa propriedade.*

Depois de identificar que o enunciado do problema se trata do PCP devemos analisar três itens:

**i)** Quem são os pombos?

**ii)** Quem são as casas?

**iii)** Quantas são as casas?

Vejamos um exemplo simples onde podemos aplicar o PCP:

**Exemplo 1.** *Qual o número mínimo de pessoas em um grupo para que tenhamos certeza de que pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo mês?*

**Solução:**

Tal número mínimo é 13.

De fato, se o número de pessoas for no máximo 12, é possível que cada uma faça aniversário em um mês diferente de todas as outras. Assim, o número mínimo de pessoas é $\geq 13$.

Por outro lado, 13 pessoas são suficientes: aqui, se as pessoas desempenharem o papel dos pombos e cada um dos 12 meses, as casas, o PCP nos dá uma casa com pelo menos dois pombos, isto é, um mês com pelo menos duas pessoas cujos aniversários ocorrem nesse mês.

É interessante observar que o princípio não determina quais pessoas fazem aniversário no mesmo mês. Mostra apenas que pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. A conclusão diz respeito apenas à existência.

### 1.4 Uma generalização do princípio das gavetas

O Principio das gavetas pode ser generalizado de muitas maneiras. Uma delas é a seguinte:

**Teorema 2.** *Se $k$ objetos são colocados em $m$ gavetas, então alguma gaveta terá pelo menos $\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor + 1$ objetos.*

*Demonstração.* Vamos admitir, por absurdo, que cada gaveta terá no máximo $\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor$ objetos. Então o número de objetos será no máximo

$$m \cdot \lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor \leq m \cdot \frac{k-1}{m} = k - 1,$$

uma contradição, já que temos k objetos. □

Vamos observar dois exemplos de aplicação para a versão do PCP enunciada no Teorema 2:

**Exemplo 2.** *Em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 têm o mesmo signo.*

**Solução:** De fato, colocando $k = 40$ pessoas em $m = 12$ gavetas dos signos. Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\lfloor \frac{40-1}{12} \rfloor + 1 = 4$ objetos.

**Exemplo 3.** *Considere que 47.129 candidatos estão fazendo uma prova de 40 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação "Pelo menos k candidatos responderão de modo idêntico às 5 primeiras questões da prova". Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.*

**Solução:** Note que para marcar as 5 primeiras questões temos $4^5 = 1024$ maneiras distintas. Podemos usar as maneiras de marcar as 5 primeiras opções como as gavetas e o número de candidatos como os objetos. Assim temos:

$$k = \lfloor \frac{47.129 - 1}{1024} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{47.128}{1024} \rfloor + 1 = 46 + 1 = 47$$

Logo, pelo menos 47 candidatos responderão de modo idêntico às 5 primeiras questões da prova.

Uma outra maneira de resolver problemas como os anteriores é com o método da pior hipótese, que gostamos de chamar de "Princípio do Azarão". Alguns problemas podem ser facilmente resolvidos com essa ferramenta simples, mas muito eficaz. O método da pior hipótese argumeta: "Deseja-se obter uma determinada propriedade. Serão usadas todas as outras possibilidades de propriedades até que a probabilidade de ocorrer a desejada seja de 100%."

Vejamos um problema que é facilmente resolvido com esse método.

**Exemplo 4.** *Qual o menor número de pessoas em um grupo de modo que tenhamos certeza de que 4 delas têm o mesmo signo?*

**Solução:** Suponha que haja 12 gavetas, batizadas cada uma com um signo: A gaveta 1 será Capricórnio, a gaveta 2 será Aquário e assim por diante. Colocaremos cada pessoa na gaveta correspondente ao seu signo. Com 12 pessoas, a pior das hipóteses (a hipótese do "azarão") é termos uma pessoa em cada gaveta, utilizando as 12 pessoas. Qualquer 13ª pessoa que colocarmos será a 2ª pessoa de um signo repetido. Prosseguindo de forma análoga, distribuiremos mais 12 pessoas nas gavetas e, como um "azarão", colocaremos mais uma em cada gaveta. Agora temos duas pessoas em cada gaveta e 24 pessoas no total. Continuamos o processo distribuindo mais 12 pessoas nas gavetas, como um "azarão" poderemos ter 3 pessoas em cada gaveta e 36 pessoas no total. Qualquer 37ª pessoa que pegarmos será a 4ª pessoa de um mesmo signo. Então podemos concluir que precisamos de 37 pessoas no mínimo para ter a certeza de que 4 delas têm o mesmo signo.

Note que este método mostra, simultaneamente, que 37 pessoas são suficientes para garantir a conclusão mas que 36 não são.

Note ainda que o método não garante qual é o signo e nem quais 4 pessoas exatamente terão o mesmo signo, mas garante que pelo menos 4 pessoas, dessas 37, terão o mesmo signo, independentemente de qual seja. Caso o número de objetos seja muito grande, esse método talvez não seja uma boa escolha pois pode causar confusão na contagem e o método geral visto anteriormente talvez seja a melhor saída.

## 1.5 Versão da média aritmética

Uma outra generalização útil do PCP tem relação com médias aritméticas:

**Teorema 3.** *"Suponha que tenhamos $n$ gavetas e seja $\mu$ um inteiro positivo dado. Coloquemos $a_1$ objetos na 1ª gaveta, $a_2$ objetos na 2ª gaveta e assim sucessivamente até $a_n$ objetos na n-ésima gaveta. Se a média de objetos por gaveta, a saber $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$, for maior do que $\mu$, então uma das gavetas conterá pelo menos $\mu + 1$ objetos.*

*Demonstração.* Suponha que a média $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ seja maior do que $\mu$ mas, por absurdo, cada gaveta contenha no máximo $\mu$ objetos:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \mu \\ a_2 &\leq \mu \\ a_3 &\leq \mu \\ &\vdots \\ a_n &\leq \mu \end{aligned}$$

Assim temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n \leq n\mu$$
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n}{n} \leq \mu,$$

o que é uma contradição com a hipótese. □

Ou seja, o que o enunciado acima quer dizer é que se a média aritmética de um determinado conjunto de números é maior que uma constante então pelo menos um dos elementos deste conjunto é maior do que esta constante.

Evidentemente vale, com argumento praticamente idêntico, um enunciado análogo trocando-se $>$ por $\geq$.

Vejamos, a seguir, um exemplo utilizando essa versão.

**Exemplo 5.** *A média de idade do elenco dos 23 jogadores da Seleção Brasileira de futebol campeã da Copa das Confederações, realizada no Brasil, no ano 2013, era de 26 anos. O que se pode dizer da idade do atleta mais velho do time?*

**Solução** Como temos 23 atletas, podemos ter no máximo $n = 23$ idades diferentes (Gavetas). Sabemos que a média de idade da seleção é 26 anos. Portanto:
Objetos: Cada um dos 23 atletas;
Gavetas: As 23 possíveis idades;
Regra: Cada atleta está associado à sua idade.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{23}}{23} = 26$$

Assim, pela consequência do teorema 3 do Princípio das Gavetas, existe pelo menos um atleta, $a_i$ com $i = 1, ..., 23$, que possui idade de pelo menos 26 anos.

## 1.6 Consequências Surpreendentes

O Princípio da Casa dos Pombos às vezes tem consequências surpreendentes que, mesmo simples, não são tão intuitivas nem imediatas. Podemos usá-las para motivar os alunos à pesquisa e prender a atenção com casos como os seguintes: "na sua cidade há pelo menos duas pessoas com exatamente o mesmo número de fios de cabelos"; "Numa turma com 57 alunos, a probabilidade de duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia é de aproximadamente 99%; porém, para termos 100% de probabilidade, são necessárias 366 pessoas", "Numa festa com 6 pessoas, pelo menos 3 delas se conhecem ou 3 delas não se conhecem mutuamente", etc.

Vejamos mais detalhadamente cada uma dessas afirmações:

### 1.6.1 Número de fios de cabelos

Entre 20 e 30 anos, a cabeça humana tem, em média, 615 fios por centímetro quadrado – o que quer dizer 150 000 fios, aproximadamente. Dos 30 aos 50, o número cai para 485 fios por $cm^2$ e vai diminuindo lentamente. Um octogenário saudável tem 435 raízes por centímetro quadrado. [1]

Do texto acima, concluímos que uma pessoa normal tem em média 150.000 fios de cabelos. É razoável supor que nenhuma pessoa tenha mais de 500.000 fios de cabelo. Em uma cidade com mais de 500.000 habitantes teremos mais pessoas do que números de fios de cabelos. Assim, teremos pelo menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

A Cidade do Rio de Janeiro, por exemplo, tem aproximadamente 6,32 milhões de habitantes. Como citado anteriormente, é razoável supor que nenhuma pessoa tem mais de 500.000 fios de cabelo. Então na Cidade Maravilhosa há pelo menos

$$\lfloor \frac{6.320.000 - 1}{500.000} \rfloor + 1 = 13$$

pessoas com o mesmo número de fios de cabelos.

### 1.6.2 O Paradoxo do aniversário

É muito surpreendente para muitas pessoas, inclusive aquelas com aptidão matemática, saber que em um grupo de 23 pessoas, a probabilidade de duas fazerem aniversário no mesmo dia do ano é maior do que 50%. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, a certeza absoluta de que duas pessoas farão aniversário no mesmo dia acontecerá com um grupo de 366 pessoas (desconsiderando o ano bissexto). Mas mesmo com um grupo muito menor, a probabilidade disso acontecer ainda é muito alta. Vejamos: Vamos considerar um ano não bissexto, ou seja, com 365 dias. Para ter a certeza de que duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia do ano é fácil perceber, mais uma vez usando o argumento do "azarão", que precisaremos de pelo menos 366 pessoas. O paradoxo do aniversário reside no fato de precisarmos de muito menos pessoas para que a probabilidade de que duas pessoas tenham nascido no mesmo dia do ano seja de pelo menos 99%:

Apesar de parecer estranho, com 57 pessoas a probabilidade pedida já é maior do que 99%. Vejamos o porquê:

Há um pequeno truque que facilita esse cálculo: não focar em pessoas sozinhas e sim em duplas. Na verdade, vamos calcular o número de maneiras de nenhum par de

[1] https://super.abril.com.br/comportamento/com-25-anos-podemos-ter-150-000-fios-de-cabelos/

pessoas ter a mesma data de aniversário.

Portanto, comecemos considerando o número de pares possíveis com o número de pessoas presentes.

Vamos calcular a probabilidade $\mathbb{P}(\neg E)$ do evento $\neg E$, que indica que não há duas pessoas fazendo aniversário no mesmo dia, e diminuir o resultado de 1, pois esse evento é o complementar ao evento $E$ procurado. Assim temos que:

$$\mathbb{P}(\neg E) = 1.(1 - \tfrac{1}{365}).(1 - \tfrac{2}{365}). \ldots .(\tfrac{365-(n-1)}{365})$$

Podemos reescrever o que vai acima de uma forma mais organizada, usando fatoriais:

$$\mathbb{P}(\neg E) = \tfrac{365!}{365^n.(365-n)!}$$

O evento que indica que pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia do ano é o evento $E$. Assim, podemos calcular sua probabilidade usando $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\neg E)$.

Tal probabilidade ultrapassa os 50% quando $n = 23$. Ainda, e surpreendentemente, temos probabilidade acima de 97% para um conjunto com 50 pessoas. Abaixo, temos uma tabela que apresenta a probabilidade aproximada para alguns valores de n, para anos não bissextos, como descrito no início. Note que denotamos $\mathbb{P}(E)$ quando há $n$ passoas por $P(n)$, para enfatizar a dependência em $n$.

| n | P(n) |
|---|---|
| 10 | 12% |
| 20 | 41% |
| 23 | 50,7% |
| 30 | 71% |
| 50 | 97% |

### 1.6.3 O Problema da Festa

Numa festa com seis pessoas, podemos garantir que três delas se conhecem mutuamente ou três delas se desconhecem mutuamente (Demonstraremos esse resultado mais tarde, colocando-o sob uma perspectiva mais ampla). Se essa festa for um pouco maior e tiver 18 pessoas, podemos garantir que quatro delas se conhecem ou quatro delas se desconhecem.

Agora, quantas pessoas devemos ter no mínimo para garantir que cinco se conhecem ou cinco se desconhecem? Apesar de aparentemente simples, esse é um problema cuja solução exata ainda não se conhece. Existem, porém, estimativas e aproximações. Tudo isso tem relação com os números de Ramsey e, mais geralmente, com a Teoria de Ramsey. No próximo capítulo exploraremos um pouco da superfície desse vasto assunto.

## 1.7 Algumas Aplicações

Nesta seção iremos disponibilizar algumas aplicações através de problemas que serão resolvidos utilizando o princípio abordado até aqui.

**Questão 1.** *Mostrar que todo número inteiro $n$ tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.*

**Solução:** Vamos escolher $n+1$ números distintos formados somente com algarismos 1, assim temos:
1
11
111
1111
...
111111...11111
Agora dividindo todos os números por $n$ teremos, na pior das hipóteses, restos diferentes para todos os $n$ primeiros números. Na divisão do termo $n+1$, pelo princípio das gavetas, o resto será igual a qualquer um dos outros $n$ restos anteriores. Fazendo a diferença entre os dois números que deixam o mesmo resto, tornaremos esse número divisível por $n$.

**Questão 2.** *Escolha, dentre os elementos do conjunto* $1, 2, \ldots, 200$, *101 números ao acaso. Então, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.*

**Solução:** Primeiramente veremos uma afirmação da teoria dos números: *Todo número inteiro $n$ diferente de zero pode ser escrito sob a forma $n = 2^r \cdot b$, em que $r$ é um inteiro não negativo e $b$ um número ímpar* Exemplo: $32 = 2^5 \cdot 1, 40 = 2^8 \cdot 5, 36 = 2^2 \cdot 9$. Dessa forma, se $n \in 1, 2, \ldots, 200$, então pela afirmação acima, $n$ pode ser escrito como $n = 2^r.b$ em que $b$ é um dos inteiros ímpares $1, 3, \ldots, 199$. Note que $b$ não é maior que 199 pois, caso contrário, teríamos $n > 200$, pois $2^r \geq 1$. Assim, há 100 possibilidade para $b$.

**Questão 3.** *Encontrar o número mínimo de pessoas que devem estar reunidas para que se possa afirmar que nesta reunião há pelo menos 3 pessoas que fazem aniversário no mesmo mês.*

**1ª Solução:** Pensando na pior das hipóteses, com 12 pessoas temos uma aniversariante em casa mes do ano, a 13ª pessoa fará aniversário no mesmo mês que qualquer uma das outras 12, continuando com a pior das hipóteses 24 pessoas temos duas fazendo aniversário no mesmo mês em todos os meses e a 25ª fará aniversário em um dos meses sendo a terceira de um mesmo mês. Então necessita-se de 25 pessoas para ter certeza que pelo menos 3 pessoas fazem aniversário no mesmo mês.

**2ª Solução:** Utilizando a generalização do Princípio das Gavetas $\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor + 1$ aonde $k$ é o número mínimo procurado e $m$ é o total de gavetas (número de meses do ano) tem-se $\lfloor \frac{k-1}{12} \rfloor + 1 = 3$ sem perda de generalidade podemos afirmar que $\lfloor \frac{k-1}{12} \rfloor = \frac{k-1}{12}$, assim:
$\frac{k-1}{12} + 1 = 3$
$\frac{k-1}{12} = 2$
$k - 1 = 24$
$k = 25$

**Questão 4.** *Mostrar que em qualquer conjunto de 8 inteiros há sempre dois deles cuja diferença é um múltiplo de 7.*

**Solução:** Em um conjunto com 8 inteiros, quando divididos por 7 deixam um dos restos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pelo princípios das gavetas tem 8 objetos (números inteiros) e 7 gavetas (restos da divisão por sete), então existe dois inteiros com o mesmo resto que quando fizer a diferença entre eles teremos um múltiplo de 7.

**Questão 5.** *Mostrar que em toda reunião de $n$ pessoas há sempre duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.*

**Solução:** Podemos usar como gavetas o número de conhecidos, e de objetos as pessoas. Então temos as gavetas 0 conhecido, 1 conhecido, 2 conhecidos, ..., (n-1) conhecidos. A princípio temos $n$ objetos e $n$ gavetas, o que não dá certeza de solução, porém as gavetas 0 conhecido e $(n-1)$ conhecidos não podem ser usados ao mesmo tempo já que a propriedade "conhecer" é simétrica, ou seja, se $a$ conhece $b$ então $b$ conhece $a$. Agora temos $n$ objetos e $(n-1)$ gavetas. Então existe pelo menos duas pessoas que conhecem o mesmo número de pessoas.

**Questão 6.** *Mostrar que existe um múltiplo de 1997 que tem todos os dígitos iguais a 1.*

**Solução:** No problema 1 mostramos que todo número inteiro $n$ tem um múltiplo que se escreve apenas com algarismos 1 e 0. Então temos $N = 111...1000...0$ sendo $N$ divisível por 1997. Escrevendo $N = 111...110^p$ temos que esse é divisível por 1997. Mas $10^p$ não é divisível por 1997, assim concluímos que 111...1 é divisível por 1997.

**Questão 7.** *40.100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: Pelo menos $k$ candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova. Determine o maior valor de $k$ para o qual a afirmação é certamente verdadeira.*

**Solução:** Para marcar as 4 primeiras questões temos $5^4 = 625$ maneiras distintas. Podemos usar as maneiras de marcar as 4 primeiras opções como as gavetas e o número de candidatos como os objetos. Assim temos:

$$k = \lfloor \frac{40100 - 1}{625} \rfloor + 1$$
$$k = \lfloor \frac{40099}{625} \rfloor + 1$$
$$k = 64 + 1$$
$$k = 65.$$

Logo, pelo menos 65 candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova.

**Questão 8.** *Quantas vezes é preciso jogar um dado de 6 faces, para que se garanta que uma mesma face apareça duas vezes?*

**Solução:** 1ª solução: Podemos pensar na pior das hipóteses e assim teremos uma face de cada valor, ou seja, joga-se o dado seis vezes. Qualquer face que sair na sétima jogada teremos uma face repetida. então precisamos de 7 jogadas.
2ª Solução: Utilizando a generalização do princípio das gavetas temos:

$$\lfloor \frac{k-1}{6} \rfloor + 1 = 2$$
$$\lfloor \frac{k-1}{6} \rfloor = 1$$
$$\frac{k-1}{6} = 1$$
$$k - 1 = 6$$
$$k = 7.$$

**Questão 9.** *Os pontos de uma reta são coloridos com 11 cores. Mostrar que é possível achar dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.*

**Solução:** Tome o ponto $x$ nessa reta e escolha $x+1, x+2, x+3, \ldots, x+11$. Os 12 pontos em destaque estarão pintados com 11 cores, isso garante que dois pontos possuem a mesma cor e a diferença entre eles sempre será um número inteiro

**Questão 10.** *Na região metropolitana de São Paulo, existem pelo menos duas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo, o mesmo com pelo menos dois homens. Os dados do PNAD (2004), afirmam que o máximo de fios de cabelos que uma pessoa pode ter é 7106 e existem 10106 mulheres e 9106 homens. Mostre que a afirmação é verdadeira.*

**Solução:** A quantidade de fios de cabelos que uma pessoa pode ter será o número de casas e mulheres e homens serão os pombos. Identificando as casas e os pombos fica fácil continuar o problema. Como temos 7106 casas e 10106 mulheres (pombos), colocando cada mulher em cada casa teremos pelo menos duas mulheres na mesma casa, ou seja, com o mesmo número de fio de cabelos. O raciocínio para os homens é análogo.

**Questão 11.** *Se cada ponto do plano é pintado de vermelho ou azul, então algum retângulo no plano tem seus vértices de uma mesma cor.*

**Solução:** Como são duas cores, suponha os pontos $P_1, P_2$ e $P_3$ colineares em $r_1$ vertical (Note que não faria diferença se fosse horizontal). Temos 8 possibilidades de colorir 3 pontos com as duas cores e em todos os casos temos pelo menos dois pontos pintados com duas cores igual. Tome três retas $s_1, s_2, s_3$, perpendiculares a $r_1$ que passam, respectivamente, por $P_1, P_2$ e $P_3$.
Agora, traçaremos 8 retas paralelas a $r_1$ e a intersecção dessas retas com $s_1, s_2$ e $s_3$ nos fornecerá 3 pontos distintos e colineares que podem assumir uma das oito configurações de cores.
Então, temos 9 retas com 8 configurações de cores. Pelo princípio das gavetas, pelo menos, 2 destas 9 retas, necessariamente, irão assumir a mesma configuração e sabemos que em cada, pelo menos, dois pontos têm a mesma cor, o que garante que sempre temos um retângulo monocromático.

**Questão 12.** *Existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 2.007.*

**Solução:** Existem 2007 possíveis restos para a divisão por 2007. Considerando a P.G. $(3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{2007})$. Nessa sequência temos 2008 termos e pelo princípio das gavetas dois deles deixam mesmo resto quando dividível por 2007. Sendo assim, a diferença desses dois termos com mesmo resto será um número divisível por 2007.

**Questão 13.** *Em um restaurante, há 16 amigos sentados em torno de uma mesa circular para uma confraternização. Um garçom serve a cada um deles, sem perguntar a sua preferência, um suco. Alguns desses sucos são de laranja e outros de abacaxi. Sabendo que 8 desses amigos preferem suco de laranja e os outros 8 preferem suco de abacaxi, mostre que, sem mexer nos amigos e fazendo apenas rotações na mesa (por exemplo sentido horário), é possível fazer com que pelo menos 8 amigos tenham suas preferências respeitadas.*

**Solução:** A mesa pode assumir 16 posições diferentes. Seja $ai, i = 1, \ldots, 16$, o número de amigos cuja preferência é atendida com a mesa na posição i. Portanto, temos:
Objetos: O número total de preferências atendidas pela mesa em cada posição $i, (a_1 + a_2 + ... + a_{16})$;
Gavetas: As 16 posições distintas que a mesa pode assumir;

Regra: Cada número de amigos cuja preferência é atendida está associado com a mesa na posição $i$. Mas cada suco é colocado, sucessivamente, em frente a cada um dos amigos e sabemos que existem exatamente 8 amigos que preferem cada sabor, ou seja, cada suco atende a exatamente 8 amigos. Visto que o garçom serviu 16 sucos, podemos concluir que o total de preferências atendidas será 128. Assim, temos:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{16} = 128$$
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{16}}{16} = 8$$

**Questão 14.** *Suponha que n+1 inteiros são tomados ao acaso dentre os inteiros 1,2,...,2n, pelo menos um desses inteiros é múltiplo de um outro.*

**Solução:** Adote $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ os inteiros escolhidos. Note que cada $x_i$ pode ser escrito da forma $2^{n_i}b_i$, onde $b_i$ é um número ímpar. No intervalo $1, 2, 3, \ldots, 2n$ existe $n$ números ímpares e os $n+1$ valores de $b_i$ encontram-se nesse intervalo. Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, temos $b_r = b_s$ para algum par de inteiros $r$ e $s$ variando no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ com $n_r > n_s$. Temos que $x_r = 2^{n_r}b_r$ é múltiplo de $a_s = 2^{n_s}b_s$.

## 1.8 Exercícios Propostos

**Problema 1.** *Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?*

**Problema 2.** *Numa prova de vestibular compareceram 63.127 candidatos. A prova era composta de 25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questões. Considere a afirmação "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico a k primeiras questões da prova."Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?*

**Problema 3.** *Refaça o problema anterior para a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova?*

**Problema 4.** *Um ponto $(x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ é* inteiro *se todas suas coordenadas são inteiras.*

*a) Considere um conjunto de nove pontos inteiros do $\mathbb{R}^3$. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.*

*b) Dê um exemplo de um conjunto de oito pontos inteiros do $\mathbb{R}^3$ tais que nenhum dos pontos médios dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.*

**Problema 5.** *Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascida no mesmo mês?*

**Problema 6.** *Mostre que em todo* $(n+1)$ *subconjunto de* $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ *há um par de elementos tais que um divide o outro.*

**Problema 7.** *Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.*

**Problema 8.** *Prove que dado qualquer conjunto de dez inteiros positivos de dois dígitos cada, é possível obter dois subconjuntos disjuntos cujos elementos têm a mesma soma.*

**Problema 9.** *Considere 1990 pontos em um plano. Prove que quaisquer três semiplanos, tais que cada um deles contém mais de 1327 desses pontos, têm interseção não vazia.*

**Problema 10.** *Mostre que se escolhemos 800 pontos de um cubo de aresta 10, pelo menos um dos segmentos determinados por esses pontos tem comprimento menor que 2.*

**Problema 11.** *Sejam* $x$ *um número real e* $n$ *um inteiro positivo. Mostre que entre os números* $x, 2x, 3x, ..., (n-1)x$ *existe um cuja distância a algum inteiro é, no máximo,* $1/n$.

**Problema 12.** *Um mestre de xadrez, preparando-se para um torneio, joga durante onze semanas, pelo menos uma partida por dia mas não mais do que doze partidas por semana. Prove que existe um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele joga exatamente 20 partidas.*

**Problema 13.** *Seja* $n$ *um inteiro ímpar maior que 1 e seja* $A$ *uma matriz nxn simétrica tal que cada linha e cada coluna de* $A$ *é formada pelos números* $\{1, 2, ..., n\}$ *escritos em alguma ordem. Mostre que cada um dos inteiros* $\{1, 2, ..., n\}$ *aparece na diagonal principal de* $A$.

**Problema 14.** *Prove que se o conjunto* $\{1, 2, ..., 1978\}$ *é partido em 6 subconjuntos, em algum desses subconjuntos existe um elemento que é igual a soma de dois elementos, não necessariamente distintos do mesmo subconjunto.*

### 1.8.1 Soluções dos Exercícios Propostos

1. Pensando nas meias como objetos e nas duas cores com as duas gavetas, vê-se que com 3 meias haverá duas meias com a mesma cor.

2. Há 5 modos de responder a primeira questão, $5^2 = 25$ modos de responder as duas primeiras questões, $5^3 = 125$ modos de responder as três primeiras questões,..., $5^6 = 15.625$ modos de responder as seis primeiras questôes, $5^7 = 78125$ modos de responder as sete primeiras questões. Pensando nos candidatos como objetos e nos modos de responder como gavetas, vê-se que a resposta é 6.

3. Há 5 modos de responder a primeira questão, $5^2 - 25$modos de responder as duas primeiras questões,...,$5^k$ modos de responder as $k$ primeiras questões. O maior grupo de pessoas para o qual não é necessariamente verdade que pelo menos 4 pessoas responderam de modo idêntico as $k$ primeiras questões da prova é um grupo de $3.5^k$ pessoas, no qual cada um dos $5^k$ modos de responder as $k$ primeiras questões foi usado por 3 pessoas. Então, qualquer pessoa que responder as $k$ primeiras questões fará de forma idêntica à outras 3 pessoas. Assim $3.5^k + 1$ é o tamanho do menor grupo para o qual podemos garantir que haverá pelo menos quatro pessoas que responderam de modo idêntico as $k$ primeiras questões.

4. a) Ponha os pontos em oito gavetas conforme suas coordenadas sejam pares ou ímpares: (P,P,P), (I,P,P), (P,I,P), (P,P,I), (I,I,P), (I,P,I), (P,I,I), (I,I,I). Há 9 pontos e 8 gavetas; portanto, alguma gaveta terá pelo menos dois pontos. Como as coordnadas do ponto médio de um segmento são média aritmética das coordenadas dos extremos e a média aritmética de dois inteiros de mesma paridade é inteira, o ponto médio do segmento que liga os dois pontos da mesma gaveta tem coordenadas inteiras.
   b) Basta pegar oito pontos cujas coordenadas sejam da forma (P,P,P), (I,P,P), (P,I,P), (P,P,I), (I,I,P), (I,P,I), (P,I,I), (I,I,I).

5. O maior grupo para o qual não se pode garantir que a existência de pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês é formado por 48 pessoas. Podemos organizar 4 pessoas nascidas em cada mês: 4 em janeiro, 4 em fevereiro,..., 4 em dezembro, $4x12 = 48$ pessoas. Qualquer pessoa que for adicionada dará a certeza de 5 pessoas nascidas num mesmo mês. A solução é 49.

6. Todo elemento $x$ do conjunto pode ser escrito como o produto de uma potência de 2por um número ímpar, $x = 2^k.t$, sendo $t$ ímpar. Há, no máximo, $n$ valores possíveis para $t = 1, 2, 3, ..., 2n - 1$. Logo, pensando nos números como objetos e nos valores de $t$ como gavetas, haverá pelo menos dois números com o mesmo valor de $t$. Se os números forem $x_1 = 2^{k_1}.t$ e $x_2 = 2^{k_2}.t$, $x_1$ dividirá $x_2$ se $k_1 \leq k_2$ e $x_2$ dividirá $x_2$ se $k_2 \leq k_1$.

7. Ponha os 52 números em 51 gavetas: na primeira gaveta, os números que divididos por 100 dão resto 0; na segunda, os que dão resto 1 ou 99; na terceira, os que dão resto 2 ou 98;...; na quinquagésima, os que dão resto 49 ou 51; na última, os que dão resto 50. Pelo Princípio das Gavetas, haverá dois números na mesma gaveta, a soma e também a diferença deles será divisível por 100, se os restos forem diferentes; a diferença será divisível por 100, se os restos forem iguais.

8. O conjunto possui $2^{10} = 1024$ subconjuntos. A soma dos elementos em cada subconjunto valerá, no máximo, $91 + 92 + 93 + ... + 99 = 950$, e no mínimo, 0. Portanto,

haverá dois subconjuntos distintos cujos elementos têm a mesma soma. Se esses subconjuntos forem disjuntos, provamos o que desejávamos. Caso possuam elementos comuns, suprimindos esses elementos comuns obteremos dois novos subconjuntos, disjuntos, cujos elementos têm a mesma soma.

9. Como $(A \cup B) = A + B = (A \cap B)$, $(A \cap B) = A + B - (A \cup B)$. Se A é o conjunto dos pontos que pertencem ao primeiro semiplano e B, ao segundo semiplano, $(A \cap B) \geq 1328 + 1328 - 1990 = 666$, pois $A \geq 1328$, $B \geq 1328$ e $(A \cap B) \leq 1990$. Usando novamente o mesmo resultado, sendo agora A o conjunto dos pontos que pertencem aos dois primeiros semiplanos e B, ao terceiro semiplano, $(A \cap B) \geq 666 + 1328 - 1990 = 4$. Há, portanto, pelo menos 4 pontos na interseção dos três semiplanos.

10. Divida o cubo em 729 cubinhos de aresta $\frac{10}{9}$. Pelo Princípio das Gavetas, haverá dois pontos pertencentes a um mesmo cubinho. A distância entre esses pontos é menor que ou igual a $\frac{10}{9}\sqrt{3}$, que é o comprimento da diagonal do cubinho, e $\frac{10}{9}\sqrt{3} < 2$.

11. Vamos construir as seguintes gavetas:
Gaveta 1: Nela colocamos todos os reais $y$ tais que $a \leq y < a + \frac{1}{n}$ para algum inteiro $a$ para algum inteiro $a$.
Gaveta 2: Nela colocamos todos os reais $y$ tais que $a \leq y < a + \frac{2}{n}$ para algum inteiro $a$.
Gaveta 3: Nela colocamos todos os reais $y$ tais que $a \leq y < a + \frac{3}{n}$ para algum inteiro $a$. E assim sucessivamente.
Se algum dos números $x, 2x, 3x, ..., (n-1)x$ ocupar a primeira ou a última gaveta, este número terá distância a um inteiro, no máximo, igual a $\frac{1}{n}$. Caso contrário, a quantidade de gavetas ocupadas será, no máximo, igual a $n - 2$. Camo há $n - 1$ números, haverá dois dois números $px$ e $qx$, com $p < q$ na mesma gaveta. Então existirão inteiros $ap$ e $aq$ tais que

$$a_p + \frac{k-1}{n} \leq px < a_p + \frac{k}{n}$$
$$a_q + \frac{k-1}{n} \leq qx < a_q + \frac{k}{n}.$$

Daí $a_q - a_p - \frac{1}{n} \leq (q-p)x \leq a_q - a_p + \frac{1}{n}$ e a distância de $(q-p)x$ ao inteiro $a_q - a_p$ será, no máximo, igual a $\frac{1}{n}$.

12. Seja $S_k$ o total de partidas jogadas até o $k$-ésimo dia inclusive. $1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < ... < S_{77} \leq 132$. O número de partidas jogadas do dia $p$ ao dia $q$ (inclusive) é $S_q - S_{p-1}$. Desejamos mostrar que há dois termos da sequência $S_n$ cuja diferença é 20.

Seja $T_k = S_k + 20 \times 21 \leq T_1 < T_2 < ... < T_{77} \leq 152$ e $S_1, S_2, S_3, ..., S_{77},$

$T_1, T_2, T_3, ..., T_{77}$ são 154 números inteiros pertencentes a $[1, 152]$. Pelo Princípio das Gavetas, pelo menos dois desses números são iguais. Esses números não podem ser dois termos da sequência $S_k$, pois esta é estritamente crescente; tampouco da sequência $T_k$, pelo mesmo motivo. Portanto, existem $S_p$ e $T_q$ tais que $S_p = T_q$, ou seja, $S_p = S_q + 20$.

Daí, $S_p - S_q = 20$ e foram jogadas exatamente 20 partidas entra os dias $q + 1$ e $p$.

13. Cada um desses inteiros aparece exatamente $n$ vezes na matriz. Pela simetria de $A$, as ocorrências fora da diagonal aparecem aos pares. Como $n$ é ímpar, cada um desses inteiros aparece pelo menos uma vez na diagonal de $A$.

14. Se $y_i = y_j + y_k$, $y_i - y_j = y_k$, devemos mostrar que há um subconjunto que contém dois elementos e a sua diferença. Como $\frac{1978}{6} = 329,666...$, algum dos subconjuntos, digamos $X_1$, conterá, pelo menos, 330 elementos.

    Sejam $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{330}$ esses elementos. Considere as 329 diferenças $a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{330} - a_1$. Se alguma dessas diferenças pertencer a $X_1$, $X_1$ conterá dois elementos e a sua diferença. Caso contrário, essas 329 diferenças pertencerão aos outros 5 subconjuntos, e, como $\frac{329}{5} = 65,8$, algum desses 5 subconjuntos, digamos $X_2$, conterá pelo menos 66 dessas diferenças.
    Sejam $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_{66}$ essas diferenças.
    Considere as 65 diferenças $b_2 - b_1, ..., b_{66} - b_1$ essas diferenças.
    como $b_j - b_1 = (a_k - a_1) - (a_s - a_1) = a_k - a_s$, se alguma dessas 65 diferenças pertencer a $X_1$ ou $X_2$, $X_1$ ou $X_2$ conterá dois elementos e sua diferença; Caso contrário, essas 65 diferenças pertencerão aos outros 4 subconjuntos, e, como $\frac{65}{4} = 16,25$, algum desses 4 subconjuntos, digamos $X_3$, conterá pelo menos 17 dessas diferenças.
    Sejam $c_1 < c_2 < ... < c_{17}$ essas diferenças. Considere as 16 diferenças $c_2 - c_1, ..., c_{17} - c_1$.
    Sejam $c_j - c_1 = (b_k - b_1) - (b_s - b_1) = b_k - b_s$, se alguma dessas 16 diferenças pertencer a $X_1$, ou $X_2$, ou $X_3$, haverá um desses 3 subconjuntos contendo dois elementos e sua diferença. Caso contrário, essas 16 diferenças pertencerão aos outros 5 subconjuntos, e, como $\frac{16}{3} = 5,333...$, algum desses 3 subconjuntos, digamos $X_4$, conterá pelo menos 6 dessas diferenças. Sejam $d_1 < d_2 < ... < d_6$ essas diferenças.
    Considere as 5 diferenças $d_2 - d_1, ..., d_6 - d_1$.
    Como $d_j - d_1 = (c_k - c_1) - (c_s - c_1) = c_k - c_s$, se algumas dessas 5 diferenças pertecer a $x_1$, ou $X_2$, ou $X_3$, ou $X_4$, haverá um desses 4 subconjuntos contendo dois elementos e sua diferença. Caso contrário, essas 5 diferenças pertencerão aos outros 2 subconjuntos, e, como $\frac{5}{2} = 2,5$, algum desses 2 subconjuntos, digamos $X_5$, conterá pelo menos 3 dessas diferenças. Sejam $e_1 < e_2 < e_3$ essas diferenças.
    Considere as 2 diferenças $e_2 - e_1, e_3 - e_1$.
    Como $e_j - e_1 = (d_k - d_1) - (d_s - d_1) = d_k - d_s$, se alguma dessas 2 diferenças pertencer

a $X_1$, ou $X_2$, ou $X_3$, ou $X_4$, ou $X_5$, haverá um desses 5 subconjuntos contendo dois elementos e sua diferença. Caso contrário, tanto $f_1 = e_2 - e_1$ como $f_2 = e_3 - e_1$, pertencerão ao outro subconjunto $X_6$.

Considere agora $f_2 - f_1 = (e_3 - e_1) - (e_2 - e_1) - e_3 - e_2$. O conjunto ao qual $f_2 - f_1$ pertence conterá dois elementos e a sua diferença.

# 2 DO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS A RAMSEY

## 2.1 Onde tudo começou

Frank Plumpton Ramsey nasceu em 1903, viveu pouco menos de 27 anos, foi filósofo, matemático e economista. Estudou no Trinity College (1915), em Cambridge, para estudar matemática, completando o ensino secundário em Winchester, em 1920. Tornou-se um estudante sênior em 1921 e graduou-se como um Senior Wrangler no Tripos Matemática de 1923. Em 1926, foi indicado a professor em Matemática na Universidade de Cambridge, tornando-se posteriormente Diretor de Estudos de Matemática no King's College.

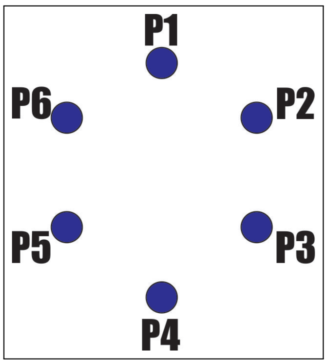
Ramsey foi acometido de um ataque de icterícia e faleceu em 1930. Apesar do pequeno período de vida, contribuiu muito em vários campos; na matemática, é considerado responsável pelo crescimento de uma nova área, que leva o nome de "teoria de Ramsey". Uma de suas contribuições está relacionada à lógica (sobre grafos), aplicada mais abaixo em um de seus teoremas.

Essa teoria procura encontrar regularidade dentro de um conjunto grande e potencialmente caótico. O problema da festa, que citamos rapidamente acima, é um exemplo clássico de aplicação elementar desse tipo de raciocínio:

Em uma festa com seis pessoas, podemos afirmar que três delas se conhecem ou três delas se desconhecem. Vejamos porque:

Imagine que essas seis pessoas sejam vértices de um hexágono. Iremos nomear esses vértices $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ e $P_6$ como mostra a Figura 2.

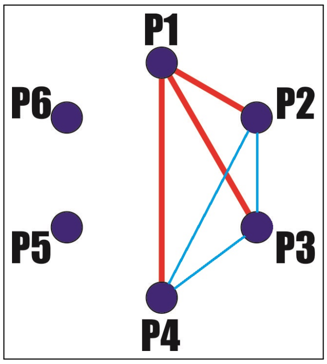
Figura 2 - Vértices do Hexágono




Legenda: Grafo que representa o problema da festa.

Sempre convencionando que a relações de "conhecer" e "desconhecer" são simétricas, exaustivas e exclusivas, quando duas pessoas se conhecem, ligaremos os vértices correspondentes com uma linha azul. Caso contrário, com uma linha vermelha. Fixando o vértice $P_1$, podemos ligá-lo com os outros cinco vértices usando as linhas azul (se conhecem) ou vermelhas (se desconhecem) e, pelo princípio das gavetas (com as arestas sendo os objetos e as duas cores, as caixas), haverá pelo menos três linhas azul ou três linhas vermelhas. Assim, sem perda de generalidade, podemos escrever $P_1P_2$, $P_1P_3$, $P_1P_4$ com as linhas vermelhas. As outras duas não fazem diferença, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 - Arestas do grafo




Legenda: $P_1$ conhece/desconhece outros 3

Se houver uma linha vermelha ligando os vértices $P_2$ e $P_3$, teremos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ se desconhecendo e assim o problema fica provado. Podemos supor, assim, que a aresta $P_2$,$P_3$ é azul. De forma análoga, podemos supor que as arestas $P_3$,$P_4$ e $P_2$,$P_4$ são também azul e, assim, $P_2$, $P_3$ e $P_4$ se conhecem entre si e terminamos.

Então concluímos que numa festa com seis pessoas ou três se conhecem (triângulo azul) ou três se desconhecem (triângulo vermelho).

Para saber mais sobre o problema da festa e outras coisas relacionadas ao PCC, consulte o artigo "Princípio das Gavetas" de Paulo Cézar Pinto Carvalho, que foi publicado na revista Eureka! Nº 5 em 1999. Note que a conclusão do problema da festa é equivalente à afirmação "Tomando os vértices de um hexágono e ligando-os com arestas vermelhas ou azuis, existe um triângulo monocromático vermelho ou azul". Os exemplos apresentados são casos particulares, muito simples, de um teorema bem mais geral, conhecido como Teorema de Ramsey. Mais à frente, vamos examinar duas de suas versões: a finita e a infinita. Antes, uma pequena curiosidade.

## 2.2 Número de Ramsey

De certa forma, a desordem completa não existe segundo a teoria de Ramsey. Essa teoria investiga a ordem inerente de algumas estruturas matemáticas. Quão grande deve ser a estrutura original, de modo a assegurar que pelo menos uma das partes tenha determinada propriedade? O exemplo anterior, o "problema da festa", é uma instância simples e emblemática dessa teoria.

Mas podemos generalizá-lo: Temos, numa festa, $n$ convidados onde convencionaremos que se A conhece B, então B conhece A. Dados $s$ e $t$ inteiros positivos, qual deve ser o tamanho mínimo de $n$ para garantir que existem $s$ pessoas que se conhecem ou existem $t$ pessoas que não se conhecem? O número de Ramsey, denotado por $R_2(s,t)$, é o menor número que satisfaz a condição anterior. Note que, a princípio, não é nem claro que tais números estejam bem definidos! O fato de que eles estão é parte de um dos muitos teoremas que levam o nome de Ramsey. Esse é um problema cuja solução completa está longe de ser conhecida.

Podemos analisar o caso mais simples, quando $s = t = 3$. Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ o conjunto de $n$ pessoas da festa e defina $\binom{A}{2} = \{\{a_i, a_j\} \mid a_i \neq a_j : a_i, a_j \in A\}$. Considere o grafo completo $K_n = G(A; \binom{A}{2})$ com vértices em A e arestas em $\binom{A}{2}$. Considere a coloração das arestas dada por $f : A \to \{1, 2\}$ de maneira que

$$f(a_i, a_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_i \text{ e } a_j \text{ se conhecem} \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

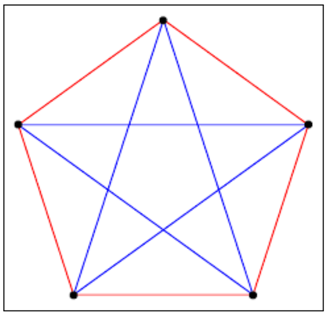
Se tivermos 5 pessoas na festa, não podemos garantir que 3 delas se desconhecem ou 3 delas se desconhecem. Vejamos:

Se $n = 5$, temos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e podem ser formados $\binom{5}{2} = 10$ duplas e são elas: $(a_1, a_2)$, $(a_1, a_3)$, $(a_1, a_4)$, $(a_1, a_5)$, $(a_2, a_3)$, $(a_2, a_4)$, $(a_2, a_5)$, $(a_3, a_4)$, $(a_3, a_5)$, $(a_4, a_5)$. Note que se considerarmos $(a_1, a_2)$, $(a_2, a_3)$, $(a_3, a_4)$, $(a_4, a_5)$, $(a_5, a_1)$ na cor 1 e $(a_1, a_3)$, $(a_1, a_4)$, $(a_2, a_4)$, $(a_2, a_5)$, $(a_3, a_5)$ na cor 2 e nesse caso não temos um triângulo da mesma cor, ou seja, é possível que em uma festa com 5 pessoas não existam 3 que se conhecem e não existem 3 que se desconhecem, então $n = 5$ não é a solução de $R_2(3, 3)$.

Se $n = 6$ temos a solução nos exemplos acima. Uma solução encontra-se na figura 3, mas deixaremos aqui uma solução menos didática.

Se $n = 6$ temos $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ e podem ser formamos $\binom{6}{2} = 15$ duplas e são elas: $(a_1, a_2)$, $(a_1, a_3)$, $(a_1, a_4)$, $(a_1, a_5)$, $(a_1, a_6)$, $(a_2, a_3)$, $(a_2, a_4)$, $(a_2, a_5)$, $(a_2, a_6)$, $(a_3, a_4)$, $(a_3, a_5)$, $(a_3, a_6)$, $(a_4, a_5)$, $(a_4, a_6)$ e $(a_5, a_6)$. Temos nas arestas $(a_1, a_2)$, $(a_1, a_3)$, $(a_1, a_4)$, $(a_1, a_5)$ e $(a_1, a_6)$ que pelo menos três delas são da mesma cor. Adotando que $(a_1, a_2)$, $(a_1, a_3)$ e $(a_1, a_4)$ é da cor 1, temos $(a_2, a_3)$ e $(a_2, a_4)$ na cor 2 (caso uma dessas arestas seja na cor 1 teremos um triângulo monocromático para a cor 1 e o problema

Figura 4 - Pentágono



Legenda: Pentágono sem triângulo monocromático

fica resolvido) assim qualquer que seja a cor da aresta $(a_3, a_4)$ nos dará um triângulo monocromático. Então $n = 6$ temos é o menor número de pessoas em uma festa para garantir que pelo menos três pessoas se conhecem ou se desconhecem. Em outras palavras, $R_2(3, 3) = 6$.

### 2.2.1 Por que é tão difícil encontrar mais números de Ramsey $R_2(n, n)$?

A despeito de sua definição conceitualmente simples, a prática tem mostrado que é muito difícil calcular números de Ramsey explicitamente. Por exemplo, hoje, ainda não se conhece o valor de $R_2(5, 5)$!

A respeito dessas dificuldades, o grande matemático Paul Erdös, no documentário "N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös" (1993), conta uma anedota:

"Suponha que um espírito do mal fale assim: Diga-me a resposta para o problema com cinco pessoas ou vou exterminar a raça humana. Eu digo de brincadeira que, nesse caso, o melhor seria tentar computar o resultado tanto com matemática quanto com computadores. Mas se ele perguntasse quantas pessoas é preciso para haver seis que se conheçam ou que não se conheçam, o melhor seria destruí-lo antes que ele nos destruísse. Porque não podemos computar esse problema. Agora, se fôssemos espertos o bastante para produzir uma prova matemática genuína, poderíamos mandar o espírito para o inferno."

Para poder entender um pouco melhor a origem da dificuldade na obtenção explícita desses números, vamos olhar a combinatória de $R_2(3, 3) = 6$ mais de perto. Na solução do problema da festa, temos pessoas que se conhecem ou que não se conhecem. Os vértices (pessoas) serão ligados por arestas verdes (pessoas que se conhecem) ou vermelhas (pessoas que não se conhecem). Nesse grafo teremos $\binom{6}{2} = 15$ arestas com duas possibilidades de cor cada. Assim teremos $2^{15}$ maneiras diferentes de colorir esse grafo.

Mais genericamente, de quantas maneiras distintas se pode desenhar um grafo completo com $n$ vértices, com 2 possibilidades de cores para cada aresta? Claramente $2^{\binom{n}{2}}$. Será que é razoável analisarmos cada grafo para concluirmos que todos têm pelo menos um triângulo monocromático? Note que o número grafos a serem considerados cresce exponencialmente com $n$.

Analogamente, vamos considerar as várias possibilidades no cálculo de $R_2(4,4)$ (que, aliás, é igual a 18). Com duas cores podemos desenhar

$$2^{\binom{18}{2}} = 2^{153}$$

grafos diferentes. O número de possibilidades nesse caso ficou muito alto, mas ainda é possível analisar com certa facilidade dada a tecnologia de hoje. Computadores fazem os estudos de possibilidades e encontrariam o valor de $R_2(4,4)$ de forma fácil.

Por que não fazer isso com $R_2(5,5)$? Nesse caso, os computadores de hoje provavelmente levariam mais tempo do que a existência da Terra para conseguir verificar todas as possibilidades. Vamos imaginar que $R_2(5,5) = 50$. Isso nos daria $2^{\binom{50}{2}} = 2^{1225}$ maneiras distintas de colorir as arestas. Vamos supor que um super computador possa varrer $2^{1000}$ dados por segundo, ou seja, ele levará 1 segundo para poder verificar $2^{1000}$ dados. Se trata um computador bem rápido e hipotético. Os computadores de hoje estão bem longe dessa potência. Com uma regra de três simples, conseguimos calcular o tempo que esse super computador levaria para poder varrer todas as possibilidades e calcular $R_2(5,5)$:

$$\frac{2^{1000}}{2^{1225}} = \frac{1}{x}$$

$x = 2^{1225-1000} = 2^{225}$ segundos. Quanto tempo isso representa? É mais tempo do que a existência do sol. Não é difícil escrever um algoritmo que estude todas as possibilidades. O difícil é obter um algoritmo que o faça com tremenda rapidez.

Observamos que sabemos hoje que $43 \leq R_2(5,5) \leq 48$ e conjectura-se que $R_2(5,5) = 43$ (ver (EXOO, 1989), (MCKAY, 2017) e (MCKAY, 1997)).

## 2.3 Método Probabilístico

Vimos, anteriormente, que calcular números de Ramsey de forma exata pode ser muito difícil. Assim, é conveniente contarmos com estimativas, que nos ajudam a calibrar a intuição sobre velocidades de crescimento desses números. Abaixo, veremos uma instância muito tradicional de obtenção de cotas inferiores para alguns números de Ramsey, que evidenciam seu crescimento veloz: a cota inferior obtida é exponencial.

O método probabilístico é um meio para se provar teoremas, especialmente de existência, com diversas aplicações em combinatória. Uma das estimativas dos Números diagonais de Ramsey (a saber, $R_2(k,k)$) origina-se de uma aplicação dessa engenhosa ferramenta.

O método em si, resume-se no resultado abaixo, cuja veracidade é evidente:

**Teorema 4.** *Seja $S$ um conjunto e $P(x)$ uma propriedade que elementos $x \in S$ podem satisfazer ou não. Suponha que a probabilidade da negação de $P$ seja menor do que 1 para elementos de $S$. Então existe pelo menos um elemento de $S$ satisfazendo $P$.*

Note que este método usa probabilidades para concluir fatos determinísticos. Note também que, usualmente, aplicações desse princípio não fornecem um elemento explícito com a propriedade desejada. Ou seja, ele, em geral, produz provas não construtivas.

A estimativa é a seguinte:

**Teorema 5.** *Se $k$ é um número inteiro com $k \geq 2$ então $R_2(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}} = \sqrt{2}^k$.*

*Demonstração.* Podemos notar que para k = 2 e k = 3 a afirmação é verdadeira. Suponha, então, que $k \geq 4$. Ainda usando a ilustração da festa, o método probabilístico mostrará que se houver menos pessoas que $2^{\frac{k}{2}}$ na festa, é possível que nenhum subconjunto de $k$ delas seja formado por amigos ou inimigos mútuos. Isto mostrará que $R_2(k,k)$ é pelo menos $2^{\frac{k}{2}}$.

Assuma que é igualmente provável que duas pessoas sejam amigas ou inimigas, de modo que a probabilidade de cada um desses eventos é igual a $\frac{1}{2}$. Considere uma festa com $n$ pessoas. Temos $\binom{n}{k}$ subconjuntos com $k$ pessoas, que listaremos como $S_1, S_2, ..., S_{\binom{n}{k}}$. Seja $E_i$ o evento em que todas $k$ pessoas em $S_i$ são amigas ou inimigas mútuas. A probabilidade de que todas as $k$ pessoas em $S_i$ sejam amigas mútuas é igual a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

Assim $p(E_i) = 2.(\frac{1}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

A probabilidade de haver $k$ amigos ou inimigos mútuos num grupo de $n$ pessoas é igual a $p(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_{\binom{n}{k}})$. Temos também que

$$p(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_{\binom{n}{k}}) \leq \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} p(E_i) = \binom{n}{k}.p(E_i) = \binom{n}{k}.2.\frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

Temos que $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$, e, com isso:

$$\binom{n}{k}.2.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.2.\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

Agora com $n < 2^{\frac{k}{2}}$, temos:

$$\left(\frac{n^k}{2^{k-1}}\right).2.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} < \left(\frac{2^{\left(\frac{k}{2}\right)^k}}{2^{k-1}}\right).2.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2^{\frac{k^2}{2}}.2}{2^{k-1}.2^{\frac{k^2-k}{2}}} = 2^{\frac{4-k}{2}}$$

Como $k \geq 4$ temos que $2^{\frac{4-k}{2}} \leq 1$ podemos concluir que $p(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_{\binom{n}{k}}) < 1$ quando $k \geq 4$. Com isso, a probabilidade do evento complementar, de que não há conjuntos de $k$ amigos ou inimigos mútuos na festa, é maior que 0. Temos que, se $n < 2^{\frac{k}{2}}$, então há pelo menos um conjunto que não tem nenhum subconjunto com $k$ pessoas que sejam amigas ou inimigas mútuas.

□

Notamos que não se conhecem estimativas da forma $R_2(k,k) > c^k$ com $c > \sqrt{2}$. Notamos, também, que a base da melhor cota superior puramente exponencial conhecida para $R_2(k,k)$ é 4 (ver (CONLON, 2009)).

## 2.4 Ramsey Versão Finita

Discutimos na Seção 2.2, números de Ramsey do tipo $R_2(r,s)$. Essa notação subentende que há duas cores e que cada aresta é um conjunto formado por dois vértices distintos. Chegou a hora de generalizar o Número de Ramsey para mais cores e subconjuntos maiores do que pares não ordenados. Para fixar as ideias, leia o parágrafo abaixo.

Vamos considerar um problema simples do mesmo tipo: Num conjunto de 17 pessoas, podemos encontrar três pessoas que se amam, ou três pessoas que se odeiam, ou três pessoas que são indiferentes entre si. Além disso, nenhum número de pessoas menor do que 17 possui essa propriedade. Expressamos sucintamente as informações acima dizendo que o número de Ramsey $R_2(3,3,3)$ é igual a 17. Exemplificamos assim o aumento no número de cores: Azul para duas pessoas que se amam, vermelho para duas pessoas que se odeiam e amarelo para duas pessoas que são indiferentes entre si, por exemplo. Podemos seguir generalizando para um número arbitrário $r$ de cores e também aumentando o número de vértices por arestas. Mais precisamente:

**Definição 1.** *Dados $e, a_1, a_2, \ldots, a_r, \in \mathbb{N}$, o* Número de Ramsey *$R_e(a_1, \ldots, a_r)$, caso exista, é o menor inteiro $N$ tal que, para todo conjunto $X$ com pelo menos $N$ elementos e toda função $f : \binom{X}{e} \to \{c_1, \ldots, c_r\}$, existe $1 \leq i \leq r$ e um subconjunto $Y \subseteq X$ com $a_i$ elementos tal que $f$ é constante em $\binom{Y}{e}$.*

Repare que, na notação $\binom{X}{e}$, temos uma ligeira diferença em relação ao número binomial usual. Aqui, o índice superior $X$ é um conjunto. Nesse caso, $\binom{X}{e}$ é a classe dos subconjuntos de $X$ de tamanho $e$. Assim, por exemplo, temos:

$$\text{CARD}\left(\binom{X}{e}\right) = \binom{|X|}{e}.$$

Na definição acima, intuitivamente, devemos pensar que estamos colorindo as arestas do hipergrafo completo $e$-regular (i.e., o hipergrafo com vértices em X cujas arestas são todos os elementos de $\binom{X}{e}$) com as $r$ cores $c_1, \ldots, c_r$. O conjunto $Y$ mencionado é um subhipergrafo induzido de $X$, monocromático para a coloração $f$.

Note que, a princípio, não é claro que números de Ramsey existam para todas as escolhas dos parâmetros mencionados. Mas, de fato, eles sempre existem:

**Teorema 6** (Ramsey, Versão Finita)**.** *Dados $e, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$, existe o número de Ramsey $R_e(a_1, \ldots, a_r)$.*

Vamos inicialmente entender o significado de $R_1(a_1, \ldots, a_r)$, ou seja, quando $e = 1$. As arestas desse grafo são simplesmente vértices. O que estamos buscando é ou um conjunto com $a_1$ elementos da cor 1, ou um conjunto com $a_2$ elementos da cor 2 e assim sucessivamente.

Imagine que cada cor corresponda a uma gaveta e, com o "Princípio do Azarão" você conseguiu colocar $a_1 - 1$ elementos na gaveta 1, $a_2 - 1$ elementos na gaveta 2, $a_3 - 1$ elementos na gaveta $3, \ldots, a_r - 1$ elementos na gaveta $r$. Temos um elemento a menos do que precisamos em cada gaveta, e qualquer gaveta que receber mais um elemento verificará a tese do teorema com:

$$R_1(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r) = (\Sigma_1^r a_i) - r + 1$$

Note que a equação acima também pode ser naturalmente encarada como uma generalização do PCP, exigindo que a $i$-ésima gaveta tenha pelo menos $a_i$ objetos:

**Teorema 7** (PCP Generalizado)**.** *Se $(\sum_{i=1}^r a_i) - r + 1$ objetos são distribuídos em $r$ gavetas, então, para algum $i$, a $i$-ésima gaveta terá, no mínimo, $a_i$ objetos.*

Agora podemos pensar melhor o caso geral, cuja prova será dividida em três lemas, cada um provado por indução. Começaremos com a demonstração da generalização do Número de Ramsey para duas cores. Denotaremos por $\mathrm{K_n}$ o grafo completo em $n$ vértices.

No que vai abaixo, note a analogia com a argumentação utilizada acima, na dicussão sobre o Problema da Festa, para mostrar que $R_2(3, 3) = 6$.

**Lema 1.** *Sejam $r, s \geq 2$. Existe o número de Ramsey $R_2(r, s)$. Além disso, $R_2(r, s) \leq R_2(r - 1, s) + R_2(r, s - 1)$.*

*Demonstração.* Pinte, de vermelho ou azul, as arestas do grafo $G$, completo com $R_2(r - 1, s) + R_2(r, s - 1)$ vértices e fixe um vértice $v \in G$ arbitrário. Defina os subgrafos induzidos de $G$, $V$ e $A$ impondo: $w \in V$ se, e somente se $\{v, w\}$ é uma aresta vermelha e $w \in A$ se, e somente se $\{v, w\}$ é uma aresta azul. Note que ou bem $Card(V) \geq R_2(r-1, s)$ ou $Card(A) \geq R_2(r, s-1)$.

Considere, sem perda, que $Card(V) \geq R_2(r-1, s)$. Então ou $V$ possui um subconjunto homogêneo vermelho com $r-1$ elementos (caso em que $\{v\} \cup V$ tem um subconjunto monocromático vermelho com $r$ elementos) ou $V$ possui um subconjunto monocromático azul com $s$ elementos. Como $V \subseteq G$, terminamos neste caso. O caso $Card(A) \geq R_2(r, s-1)$. é análogo.

□

Para aumentar indutivamente a dimensão das arestas, temos o próximo lema, que é uma generalização do lema 1.

**Lema 2.** *Para todo $e \in \mathbb{N}$, existe o número de Ramsey $R_e(a_1, a_2)$. Além disso, $R_e(a_1, a_2) \leq R_{e-1}(R_e(a_1 - 1, a_2), R_e(a_1, a_2 - 1)) + 1$*

*Demonstração.* O caso $e = 1$ já foi analisado acima e sabemos que $R_e(1, a_j) = R_e(a_j, 1) = 1$ quaisquer que sejam $a_j$ e $e$. Suponha, por indução, que exista $R_{e'}(r', s')$ para todos $e' < e$, $R_e(b_1, b_2)$ e $b_1 \leq a_1$ e $b_2 \leq a_2$ tais que $b_1 + b_2 < a_1 + a_2$.

Seja $M$ um conjunto tal que $card(M) \geq R_{e-1}(R_e(a_1 - 1, a_2), R_e(a_1, a_2 - 1)) + 1$. Pinte, de vermelho ($V$) ou azul ($A$), cada subconjunto de $M$ contendo $e$ elementos. Mais precisamente, considere uma coloração

$$f : \binom{M}{e} \to \{V, A\}.$$

Fixe $v \in M$ arbitrário. Vamos construir uma coloração $\tilde{f}$, "induzida" por $f$, dos subconjuntos de $M - \{v\}$ contendo $e - 1$ elementos da seguinte forma:

$$\tilde{f}(\{x_1, \ldots, x_{e-1}\}) = f(\{v, x_1, \ldots, x_{e-1}\}).$$

Por hipótese, a coloração $\tilde{f}$ admite ou bem um conjunto $H \subseteq M - \{v\}$ homogêneo vermelho com tamanho $R_e(a_1 - 1, a_2)$ ou homogêneo azul com tamanho $R_e(a_1, a_2 - 1)$. Sem perda de generalidade, suponha que existe $H$ homogêneo vermelho (para $\tilde{f}$) de tamanho $R_e(a_1 - 1, a_2)$. Considere a coloração $f$ restrita a $H$. Pela definição dos números de Ramsey, $H$ admite ou um subconjunto homogêneo azul (para $f$) de tamanho $a_2$, e a tese resta verificada, ou $H$ admite um subconjunto homogêneo vermelho (para $f$) de tamanho $a_1 - 1$, caso em que $H \cup \{v\}$ admite subconjunto monocromático vermelho (para $f$) de tamanho $a_1$, e novamente a tese se verifica.

□

O próximo lema nos permite aumentar indutivamente o número de cores, concluindo a prova do Teorema 6.

Note que, no argumento abaixo, $\tilde{f}$ pode ser intuitivamente interpretada como a coloração de um daltônico, cuja visão funde as cores $c_2, \ldots, c_r$ numa única cor, diferente de $c_1$.

**Lema 3.** *Para todos $e, r \in \mathbb{N}$, existe o número de Ramsey $R_e(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Além disso, $R_e(a_1, a_2, \ldots, a_r) \leq R_e(a_1, R_e(a_2, a_3, \ldots, a_r))$.*

*Demonstração.* Note que, no caso em que $r = 2$, temos a igualdade. Suponha por indução que, dados $e, r$, exista $R_e(b_1, \ldots, b_{r-1})$ para quaisquer $b_1, \ldots, b_{r-1}$.

Seja $M$ um conjunto com $R_e(a_1, R_e(a_2, \ldots, a_r))$ elementos e considere a coloração $f : \binom{M}{e} \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Defina a nova coloração $\tilde{f} : \binom{M}{e} \to \{V, A\}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(v) = \begin{cases} V, & se \quad f(v) = c_1 \\ A, & se \quad f(v) \neq c_1 \end{cases}$$

Por definição, $M$ admite ou bem um subconjunto $H$ $\tilde{f}$-homogêneo de cor $V$ ("vermelha") com $a_1$ elementos ou um subconjunto $I$ $\tilde{f}$-homogêneo de cor $A$ ("azul") com $R_e(a_2, a_3, \ldots, a_r)$ elementos. No primeiro caso vale o lema, pois $H$ é $f$-homogêneo de cor $c_1$. No segundo caso, pela hipótese de indução, existe $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $I$ admite um subconjunto com $a_i$ elementos $f$-monocromático de cor $c_i$, e concluímos a prova.

□

Note que, embora o Teorema Finito de Ramsey garanta a existência dos números $R_e(a_1, \ldots, a_r)$, ele não nos dá muita ferramenta para calcularmos esses números exatamente, fora as cotas superiores implícitas na indução. A falta de algoritmos práticos para calculá-los exatamente (que já discutimos) reforça a conveniência e importância de métodos de obtenção de estimativas, tais como o Método Probabilístico, que discutimos brevemente acima.

## 2.5 Teorema de Ramsey - Versão Infinita

Vejamos a versão infinita do teorema de Ramsey. O argumento será por indução, cujo caso-base é a versão infinita do PCC abaixo. Este estado de coisas mostra que podemos interpretar a Teoria de Ramsey como uma generalização do PCC.

**Teorema 8.** *Seja função $f : A \to B$ tal que $A$ é infinito e $B$ é finito. Então existe pelo menos um $b \in B$ tal que $f^{-1}(b)$ é infinito.*

Devemos interpretar os elementos de $A$ como os objetos a serem distribuídos nas gavetas, representadas pelos elementos de $B$, segundo $f$:

**Teorema 9** (PCP Infinito)**.** *Se infinitos objetos são distribuídos em um número finito de gavetas, haverá pelo menos uma gaveta contendo infinitos objetos.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que todo elemento de $B$ tenha pré-imagem finita. Então $A$ é finito, com

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$$

elementos. Uma contradição, pois $A$ é infinito.

□

**Teorema 10** (Ramsey, Versão Infinita)**.** *Seja um conjunto $X$ infinito e pinte os elementos de $\binom{X}{e}$ com $r$ cores diferentes, segundo a coloração $f : \binom{X}{e} \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Então existe $Y \subseteq X$ infinito monocromático, i.e., tal que $f$ é constante em $\binom{Y}{e}$.*

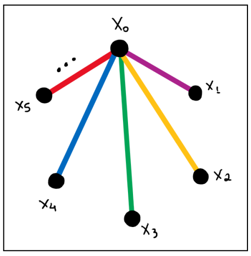
Antes de iniciar a prova, que será por indução em $e$, vamos entender um pouco melhor os primeiros casos.

Quando $e = 1$ temos infinitos vértices, cada um pintado com uma única cor dentre as $r$ cores disponíveis. O PCP Versão Infinita (Teorema 9) garante que pelo menos uma cor foi usada para pintar infinitos pontos.

Quando $e = 2$, temos grafos usuais (vértices ligados por arestas), com arestas já coloridas com um número finito de cores. Em analogia ao argumento usado para mostrar que $R_2(3, 3) = 6$, destacamos algum $x_0 \in X$, prestando especial atenção às arestas que partem de $x_0$ aos demais vértices $y$ do grafo. Pintamos cada vértice $y$ com a cor da aresta que o liga a $x_0$, i.e, com a cor de $\{x_0, y\}$. Assim, temos uma quantidade infinita de pontos pintados com finitas cores. Pelo Teorema 9, existe pelo menos uma cor que pintou infinitos pontos, i.e., existe $X_1 \subseteq X \setminus x_0$ infinito monocromático. Pintamos $x_0$ com essa cor e o separamos numa caixa. Repetimos o argumento com $X_1$: destacamos $x_1 \in X_1$ e pintamos cada $y \in X_1 \setminus x_1$ com a cor da aresta $\{x_1, y\}$. Assim, temos novamente uma quantidade infinita de arestas pintadas com um número finito de cores, e obtemos $X_2 \subseteq X \setminus \{x_1\}$ infinito e monocromático. Pintamos $x_1$ com essa cor e o colocamos junto de $x_0$ na caixa. Podemos repetir esse processo indefinidamente, obtendo $\{x_o, x_1, x_2 \ldots\}$. Na caixa agora temos infinitos pontos pintados com um número finito de cores. Mais uma vez, o Teorema 9 garante que pelo menos uma cor pintou infinitos pontos e um tal subconjunto infinito e monocromático satisfaz a tese do teorema.

Quando $e = 3$, as "arestas" são triângulos, previamente pintados segundo a coloração dada, e, é claro, estamos supondo, por indução, o caso $e = 2$. Como já feito anteriormente, vamos destacar um vértice arbitrário $x_0$, e prestar especial atenção aos triângulos com vértice em $x_0$. Pintaremos cada aresta $\{y, z\}$ com a cor do triângulo $\{x_0, y, z\}$. Assim, as arestas (com $e = 2$) do grafo $X \setminus \{x_0\}$ estão pintadas com um número finito de cores. O caso $e = 2$ garante $X_1 \subseteq X \setminus \{x_0\}$ infinito monocromático. Pintaremos $x_0$ com essa cor e o deixaremos separado numa caixa. Repetimos o argumento

Figura 5 - Grafo Colorido




em $X_1$, obtendo $x_1$ e $X_2$, e continuamos indefinidamente, obtendo a caixa $\{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$. Nela, temos infinitos pontos pintados com um número finito de cores. Pelo Teorema 9, temos uma cor que pintou infinitos vértices, e esses vértices formam o subconjunto infinito monocromático desejado.

Para $e = 4$, as "arestas" são tetraedros, e podemos seguir os mesmos passos até a conclusão análoga à do processo anterior.

Com essa ideia em mente, podemos apreciar melhor a demonstração abaixo.

*Demonstração.* A prova será por indução em $e$.

Para $e = 1$, o Teorema 9 garante o resultado: Sendo as $r$ cores $\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_r\}$, podemos colocar cada elemento de $X$ na gaveta de sua respectiva cor. Como são infinitos elementos em um número finito de gavetas, teremos pelo menos uma gaveta com infinitos elementos.

Supondo o resultado válido para $e$, devemos mostrar que ele é válido para $e + 1$.

Seja $f : \binom{X}{e+1} \to \{c_1, \ldots, c_r\}$, e fixe $x_0 \in X$ arbitrário. Em evidente analogia aos argumentos usados nas induções que utilizamos para estabelecer o Teorema Finito de Ramsey, vamos construir uma coloração $\tilde{f}$ "induzida" por $f$ em $\binom{X \setminus \{x_0\}}{e}$, impondo

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_e) = f(y_1, y_2, \ldots, y_e, x_0).$$

Pela hipótese de indução aplicada a $\tilde{f}$, existe $X_1 \subseteq X \setminus \{x_0\}$ infinito monocromático. Esta cor será chamada de *cor de referência de* $x_0$. Note que a presença de $x_0$ em qualquer aresta cujos outros vértices estejam em $X_1$ determina a $f$-cor desta aresta: a cor de referência de $x_0$.

Repetimos o argumento agora começando com $X_1$, e obtendo $x_1$ (com sua cor de referência) e $X_2$. Mais geralmente, prosseguimos, supondo definidos $x_{k-1}$ (e sua cor de referência) e $X_k$, aplicamos o mesmo argumento ao conjunto $X_k$, obtendo $x_k$ (e sua cor de referência) e $X_{k+1}$.

Finalmente, o Teorema 9 garante um subconjunto infinito $Y \subseteq \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ monocromático para a cor de referência (note que o número de cores de referência é $\leq r$). É claro que $Y$ é monocromático para $f$. $\square$

# 3 TOPOLOGIA E PROVA DE RAMSEY FINITO

Nesta seção, usaremos topologia para mostrar como a versão infinita do Teorema de Ramsey pode ser usada em uma demonstração da versão finita. Conheceremos, também, a versão de Paris-Harrington, um pouco mais forte do que o enunciado original.

Com o objetivo de usar conceitos de topologia para demonstrar o Teorema Finito de Ramsey, vamos construir um espaço métrico $\mathcal{K}$, cujo conjunto de pontos será a classe de todas as colorações dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ com $e$ elementos usando as $r$ cores no conjunto $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$, a saber

$$\mathcal{K} := \{f \mid f : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C\}.$$

Vamos definir uma métrica $d$ em $\mathcal{K}$, que o tornará um espaço métrico compacto. No que segue, para $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$, $f \restriction_A$ é a restrição de $f$ ao conjunto $A$.

**Definição 2.** *Sejam $f, g \in \mathcal{K}$. Se $f = g$, definimos $d(f, g) := 0$. Se $f \neq g$, seja $k$ o (único) natural tal que $f \restriction_{\binom{[k]}{e}} = g \restriction_{\binom{[k]}{e}}$ mas $f \restriction_{\binom{[k+1]}{e}} \neq g \restriction_{\binom{[k+1]}{e}}$. Então, definimos $d(f, g) := 2^{-k}$.*

Vamos mostrar que, de fato, $d$ é uma métrica em $\mathcal{K}$.

**Teorema 11.** *$(\mathcal{K}, d)$ é um espaço métrico.*

*Demonstração.* É fácil ver que $d \geq 0$ e que $d(f, g) = d(g, f)$ quaisquer que sejam $f$ e $g$. Também é imediato ver que $d(f, g) = 0 \iff f = g$.

Resta provar a desigualdade triangular, o que faremos através da desigualdade abaixo, obviamente suficiente, porque mais forte (esta desigualdade faz de $d$ uma *ultra-métrica*):

$$d(f, g) \leq \max\{d(f, h), d(h, g)\}.$$

Para provar a desigualdade acima, sejam

$$d_1 := d(f, g) = 2^{-k_1}$$

$$d_2 := d(f, h) = 2^{-k_2}$$

$$d_3 := d(h, g) = 2^{-k_3}$$

$$k := \min\{k_2, k_3\}$$

e repare que, como $f \restriction_{\binom{[k]}{e}} = g \restriction_{\binom{[k]}{e}}$, temos $k_1 \geq k$ e, portanto

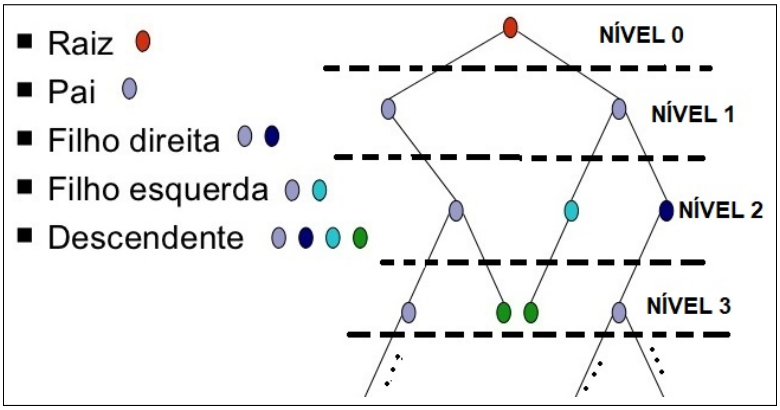
$$d_1 = 2^{-k_1} \leq 2^{-k} = \max\{d_2, d_3\}.$$

□

Para os nossos propósitos, é conveniente compreender o espaço $\mathcal{K}$ sob uma outra perspectiva: a das árvores, como segue abaixo:

Considere qualquer árvore infinita enraizada, com cada nível finito (como na figura 6) . Consideramos de conhecimento do leitor, e, ademais, intuitivamente claro, o vocabulário usual característico deste contexto, e.g.: *Raiz*, *Pai*, *Filho*, *Descendente*, *Ascendente*, *Galho*, *Nível*, etc ...

Figura 6 - Uma árvore




Legenda: Representação Grafo em árvore.

Construiremos um espaço métrico $\mathcal{K}$, cujos pontos são os galhos da árvore, i.e., os caminhos infinitos nos vértices, partindo da raiz, em que cada vértice no caminho é filho de seu antecessor imediato.

Agora, para definirmos a métrica, tome dois pontos

$$v = (a_0, a_1, \ldots), w = (b_0, b_1, \ldots) \in \mathcal{K}.$$

Obviamente, se $v = w$, poremos $d(v, w) = 0$. Por outro lado, se $v \neq w$ e $a_i = b_i$ para todo $0 \leq i \leq k$ mas $a_{k+1} \neq b_{k+1}$, definimos a distância como:

$$d(v, w) = 2^{-k}.$$

Considere, novamente, $\mathcal{K} = \{f : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C\}$ o espaço das colorações. Podemos organizá-lo como a árvore descrita acima, da seguinte forma:

1) Cada um dos galhos (caminhos infinitos) da árvore é uma coloração $f : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C$, um elemento de $\mathcal{K}$ (nos dois sentidos!).

2) Cada vértice da árvore no nível $k$ corresponde à restrição de uma coloração "completa" (com domínio $\binom{\mathbb{N}}{e}$) a uma coloração com domínio $\binom{[k]}{e} = \binom{\{0,1,\ldots,k-1\}}{e}$. Note

que, para $k \in \mathbb{N}$, estamos usando a notação

$$[k] := \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

comum em contextos de Lógica Matemática.

3) Assim, a métrica da árvore é igual à métrica do espaço $\mathcal{K} = \{f : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C\}$, que havíamos apresentado.

Já sabemos, então, que $\mathcal{K}$ (nos dois sentidos) é um espaço métrico.

Além disso, segundo uma das versões usuais do Lema de König, qualquer espaço métrico construído como a árvore acima é compacto:

**Teorema 12** (König)**.** *O espaço $\mathcal{K}$ é compacto.*

*Demonstração.* Já sabemos que $\mathcal{K}$ é um espaço métrico. Então basta provarmos que toda sequência $v^n = (a_0^n, a_1^n, a_2^n, \ldots)$ de elementos de $\mathcal{K}$ possui subsequência convergente.

Vamos exibir uma subsequência $v^{n_j}$ convergindo a $w = (b_0, b_1, b_2 \ldots)$ construindo esses objetos por indução:

Começamos notando que, necessariamente, $b_0$ é a raiz. Poremos, também, $n_0 = 0$, ou seja, $v^{n_0} = v^0$. Como o nível 1 é finito, o PCP Infinito garante que há infinitos termos da sequência $v^n$ com a mesma segunda coordenada, digamos $b_1$. Escolhemos um desses termos $v^{n_1}$ de forma que $n_1 > n_0$, o que é possível, pois há infinitos termos da sequência com segunda coordenada igual a $b_1$. Desprezamos todos os outros termos da sequência, i.e., todos os termos que não têm segunda coordenada igual a $b_1$, e repetimos o argumento com os infinitos termos da sequência cuja primeira coordenada é $b_0$ e a segunda coordenada é $b_1$:

Suponha definidos $b_0, b_1, \ldots, b_l$ de maneira que haja infinitos termos da sequência $v^n$ da forma $(b_0, b_1, \ldots, b_l, \ldots)$ e $n_l$ tal que os termos $v^{n_0}$, $v^{n_1}$, $\ldots$, $v^{n_l}$ satisfazem $n_0 < n_1 < \ldots < n_l$ e, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $v^{n_j} = (b_0, b_1, \ldots, b_j, \ldots)$. Como o nível $l+1$ da árvore é finito, o PCP Infinito garante que existem infinitos termos da sequência $v^n$ da forma $(b_0, b_1, \ldots, b_l, \ldots)$ com a mesma $(l+1)$-ésima coordenada, digamos $b_{l+1}$. Escolhemos um desses termos $v^{n_{l+1}}$ de forma que $n_l < n_{l+1}$, o que é possível, dada a infinitude das escolhas. Desprezamos todos os outros termos da sequência, i.e., todos os termos que não são da forma $(b_0, b_1, \ldots, b_{l+1}, \ldots)$ e ainda restam infinitos termos. É claro que $\lim_{j\to\infty} v^{n_j} = w = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$.

□

Basicamente o mesmo argumento usado acima funciona para demonstrar o Lema de König em sua formulação mais conhecida, que, ademais, também compartilha o espírito do PCP:

**Lema 4** (König)**.** *Toda árvore infinita em que cada nível é finito possui um caminho infinito, i.e, um galho infinito.*

## 3.1 Ramsey Infinito implica Ramsey Finito

Agora que já construímos o espaço métrico $\mathcal{K}$, iremos usá-lo para provar de outra forma o Teorema finito de Ramsey, usando a versão infinita:

**Teorema 13.** *Sejam $e, r, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que toda coloração $f : \binom{[M]}{e} \to C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r\}$ admite, para algum $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, um subconjunto $L \subseteq \{1, 2, \ldots, M\}$ monocromático de cor $c_i$ e tamanho $\geq k_i$.*

*Demonstração.* Por absurdo, sejam dados $e, r, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $M \in \mathbb{N}$, exista uma coloração $f^\flat : \binom{[M]}{e} \to C$ que não admite subconjunto monocromático de cor $c_1$ e tamanho $k_1$ nem subconjunto monocromático de cor $c_2$ e tamanho $k_2$ nem subconjunto monocromático de cor $c_3$ e tamanho $k_3$ ... nem subconjunto monocromático de cor $c_r$ e tamanho $k_r$.

Seja $k := \text{Máx}\ \{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r\}$. Então $f^\flat$ não tem nenhum subconjunto monocromático de tamanho $k$.

Para $M \in \mathbb{N}$, seja $F_M \subseteq \mathcal{K}$ tal que $f \in F_M$ se, e somente se, $f \restriction_{\binom{[M]}{e}}$ não admite subconjunto monocromático de tamanho $k$.

Note que $F_M \neq \emptyset$. De fato, se $f$ é qualquer extensão de uma $f^\flat$ como acima, temos $f \in F_M$.

Note, ainda, que $F_M$ é fechado. De fato, tome uma coloração $h : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C$ no complementar de $F_M$. Então $h \restriction_{\binom{[M]}{e}} \to C$ possui subconjunto monocromático com $k$ elementos. Esse também será o caso de qualquer outra coloração $\tilde{h}$ cuja distância a $h$ seja $\leq 2^{-M}$, pois as restrições de $h$ e $\tilde{h}$ a $[M]$ coincidem. Ou seja, a bola de centro $h$ e raio $2^{-M}$ está contida no complementar de $F_M$. Como a coloração $h$ é arbitrária, o complementar de $F_M$ é aberto e $F_M$, por sua vez, é fechado.

Como $F_M \subseteq \mathcal{K}$ é fechado e $\mathcal{K}$ é compacto, então $F_M$ é compacto.

Além disso, claramente

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4 \supseteq \ldots$$

As hipóteses do Teorema dos Compactos Encaixados se verificam, e concluímos que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset.$$

Seja $g \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Note que $g$ contraria Ramsey Infinito por não ter subconjuntos monocromáticos de tamanho k, não tendo, portanto, e com maior razão, subconjuntos infinitos monocromáticos. Temos uma contradição, logo, terminamos.

$\square$

## 3.2 Uma variante de Ramsey finito e o Teorema de Paris-Harrington

A discussão sobre os usos do conceito de infinito em matemática é muito ampla e pode, facilmente, ser assunto para muitos outros trabalhos. Gostaríamos, no entanto, de ilustrar, mesmo que de maneira introdutória, como uma versão ligeiramente modificada do Teorema Finito de Ramsey pode ser inserida naturalmente neste contexto histórico.

A partir dos séculos XIX e XX, pode-se dizer, de forma muito simplificada, que a manipulação formal de conjuntos infinitos como entidades intrínsecas, em particular a interpretação de quantificações com escopo em conjuntos infinitos, foi, e de certa forma tem sido, objeto de uma calorosa controvérsia. Do lado mais simpático à manipulação de infinidades sem grandes restrições, podemos citar Cantor e Hilbert; do lado diametralmente oposto, defendendo que argumentos matemáticos deveriam ser restritos a raciocínios *finitistas* de alguma maneira, podemos citar Kroenecker e Brower. Podemos dizer que, para este último grupo, o infinito não se encontrava em lugar nenhum da realidade, sendo apenas uma “ideia abstrata”; não existia na natureza e nem oferecia base legítima para argumentos racionais precisos. Uma das correntes mais conhecidas deste lado da discussão era a formada pelos *Intuicionistas*, que não acreditavam que o uso do infinito era aceitável, como ingrediente direto e explícito, em uma demonstração matemática. Os intuicionistas só aceitariam como “entes” matemáticos intrínsecos aqueles que pudessem ser construídos pela mente humana em um número finito de procedimentos. A *Aritmética de Peano de Primeira Ordem* é um conjunto de axiomas para a aritmética usual dos números inteiros que apenas permite como teoremas aqueles que admitem demonstrações finitistas, aceitas, portanto, mesmo pelo segundo grupo.

Uma pergunta que surge de maneira natural nesse contexto é a seguinte: Não seria conveniente adotar apenas métodos finitistas nas demonstrações matemáticas, tendo em vista que o conteúdo assim produzido não seria objeto das controvérsias acima descritas? Não ousaremos responder a essa pergunta, mas o que vai abaixo ajuda a compreender certos aspectos delicados que deverão ser levados em conta caso alguém deseje formar uma opinião mais substancial sobre o assunto.

Nós apresentamos duas demonstrações para o Teorema Finito de Ramsey. Uma análise mais detida da primeira, na seção 2, mostra que este argumento é finitista e seria, portanto, aceito por partidários de ambos os lados da controvérsia acima. Já a segunda demonstração, formulada em linguagem topológica na seção 3, seria rejeitada ou, pelo menos, vista, no todo, ou em parte, com desconfiança pelos defensores de algum grau de finitismo, já que os argumentos envolvem manipulação e quantificações diretamente sobre conjuntos infinitos.

Uma pequena modificação no enunciado do Teorema de Ramsey Finito, de maneira a deixar sua conclusão mais forte, resulta no Teorema abaixo, que admite uma demonstração absolutamente análoga à apresentada na seção 3. Incluímos o argumento de forma integral, não só para fins da completude do texto, mas para facilitar e estimular uma comparação direta entre os enunciados e argumentos:

**Teorema 14** (Ramsey Finito Modificado)**.** *Sejam* $e, r, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, *existe* $M \in \mathbb{N}$ *tal que toda coloração* $f : \binom{[M]}{e} \to C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r\}$ *admite, para algum* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, *um subconjunto* $L \subseteq \{1, 2, \ldots, M\}$ *monocromático de cor* $c_i$ *e tamanho* $\geq k_i$. *Além disso,* $L$ *pode ser escolhido de forma que* $|L| > Min(L)$.

Note que a única diferença entre o Teorema 13 e este é a observação final, onde a condição $|L| > \text{Min}(L)$ pode ser intuitivamente interpretada como a exigência de $L$ ser "relativamente grande". Esta nomenclatura será usada na demonstração abaixo.

*Demonstração.* Por absurdo, sejam dados $e, r, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ e suponha que para todo $M \in \mathbb{N}$, exista coloração $f^\flat : \binom{[M]}{e} \to C$ que não admite subconjunto monocromático relativamente grande de cor $c_i$ e tamanho $\geq k_i$ para nenhum $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Seja $k := \text{Máx}\ \{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r\}$. Então $f^\flat$ não tem nenhum subconjunto monocromático relativamente grande de tamanho $k$.

Para $M \in \mathbb{N}$, seja $F_M \subseteq \mathcal{K}$ tal que $f \in F_M$ se, e somente se, $f \restriction_{\binom{[M]}{e}}$ não admite subconjunto relativamente grande monocromático de tamanho $k$.

Note que $F_M \neq \emptyset$. De fato, se $f$ é qualquer extensão de uma $f^\flat$ como acima, temos $f \in F_M$.

Note, ainda, que $F_M$ é fechado. De fato, tome uma coloração $h : \binom{\mathbb{N}}{e} \to C$ no complementar de $F_M$. Então $h \restriction_{\binom{[M]}{e}} \to C$ possui subconjunto monocromático com $k$ elementos. Esse também será o caso de qualquer outra coloração $\tilde{h}$ cuja distância a $h$ seja $\leq 2^{-M}$, pois as restrições de $h$ e $\tilde{h}$ a $[M]$ coincidem. Ou seja, a bola de centro $h$ e raio $2^{-M}$ está contida no complementar de $F_M$. Como a coloração $h$ é arbitrária, o complementar de $F_M$ é aberto e $F_M$, por sua vez, é fechado.

Como $F_M \subseteq \mathcal{K}$ é fechado e $\mathcal{K}$ é compacto, então $F_M$ é compacto.

Além disso, claramente

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4 \supseteq \ldots$$

As hipóteses do Teorema dos Compactos Encaixados se verificam, e concluímos que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset.$$

Seja $g \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Note que $g$ contraria Ramsey Infinito por não ter subconjuntos monocromáticos relativamente grandes de tamanho $k$, não tendo, portanto, e com maior razão, subconjuntos infinitos monocromáticos. Temos uma contradição, logo, terminamos.

$\square$

Apesar da evidente semelhança, tanto no enunciado quanto na demonstração apre-sentada acima, entre as versões original e modificada do Teorema Finito de Ramsey, esta última não admite demonstração por meios finitistas. Este é o conteúdo do Teorema abaixo, cuja demonstração utiliza argumentos muito avançados de Lógica Matemática e está, evidentemente, fora do escopo deste texto. Para mais informações consulte (NETO).

**Teorema 15** (Paris-Harrington)**.** *O Teorema de Ramsey Finito Modificado não é demonstrável na Aritmética de Peano de Primeira Ordem; ou seja, não existe uma demonstração para este resultado por métodos exclusivamente finitários.*

Já discutimos acima que os números de Ramsey crescem de maneira muito veloz. De fato, a parte crítica do argumento na demonstração do Teorema de Paris-Harrington consiste em mostrar que a função que leva os parâmetros $(e, r, k_1, \ldots, k_r)$ (na hipótese da versão modificada) no menor $M$ satisfazendo a conclusão cresce de uma maneira tão violentamente rápida que impossibilita que argumentações finitárias lidem com ela.

A versão modificada do Teorema de Ramsey Finito parece ter sido o primeiro exemplo natural das afirmações indecidíveis em aritmética previstas pelo Teorema da Incompletude de Gödel. Isto é, o enunciado é combinatoriamente natural e não parece ter sido explicitamente produzido com o intuito de ser indecidível.

O fato de ser uma afirmação que, apesar de muito natural, não admite demonstrações finitárias torna este resultado algo a ser levado em conta ao refletirmos sobre a conveniência de argumentos infinitários em Matemática.

# CONCLUSÃO

Como pudemos, perceber o Princípio da Casa dos Pombos é um assunto inicialmente muito intuitivo e, de fato, a reação inicial dos alunos é a de que é uma ideia óbvia. Mas, quando aplicado a ideias um pouco mais profundas da matemática, percebe-se que as coisas não são tão simples assim.

Vimos, neste trabalho, que a ideia para obter o Número de Ramsey é muito simples, mas com uma grande dificuldade para encontrar seus valores, haja visto que só conhecemos alguns poucos resultados. As ferramentas que temos à disposição para ajudar em cálculos explícitos do Número de Ramsey, por exemplo, são poucas e não são suficientes para cálculos precisos mais gerais.

O método probabilístico, que vimos como uma dessas ferramentas, nos ajuda a encontrar alguns limites inferiores e superiores para alguns Números de Ramsey, mas essa estimativa ainda nos deixa com um intervalo amplo e ainda sem possibilidade de exibir o valor explícito para cada $R_2(n, n)$ de forma sistemática.

Abordamos o Teorema de Ramsey apresentando-o em duas versões: a finita e a infinita. A primeira versão foi provada utilizando indução finita em três lemas. A segunda também foi provada por indução e, para auxiliar na intuição um pouco mais difícil, detalhamos os primeiros casos, deixando a prova mais concreta e fácil de entender.

Na terceira parte do trabalho, há um grande salto de complexidade, quando introduzimos a topologia para abordar uma outra maneira de provar a versão finita do Teorema de Ramsey. Depois disso, abordamos e provamos, utilizando ainda métodos de Topologia, uma outra versão do Teorema de Ramsey, acrescida de uma exigência simples, e enfatizamos que esta versão não poderia ser provada utilizando indução finita. Neste caso, o Número de Ramsey cresce de uma maneira tão veloz que é impossível utilizar métodos finitários em sua prova. Discutimos, também, algumas implicações deste estado de coisas na controvérsia histórica entre defensores e críticos às restrições dos argumentos matemáticos a métodos “finitários", já que o Teorema de Paris-Harrington garante que a versão modificada do Teorema de Ramsey não é demonstrável na Aritmética de Peano de Primeira Ordem.

Vale repisar, ainda, que, não tendo encontrado argumentos completos e detalhados dos técnicas de Topologia usadas para demonstrar a versão finita do Teorema de Ramsey, apesar de sugeridos na literatura com este fim, decidimos enriquecer o trabalho com seções que se prestam a preencher esta lacuna.

Esperamos ter dado nossa modesta contribuição aos interessados nesse vasto e interessantíssimo tema.

**REFERÊNCIAS**

ALON, Noga; SPENCER, Joel H. *The probabilistic method.* [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Nenhuma citação no texto.

BRUSAMARELLO ROSALI, L. Monte Carmelo Emerson. Paul erdös, o mago. Nenhuma citação no texto.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Ma 12–unidade 11: Combinatória. SBM, 2011. Nenhuma citação no texto.

CONLON, David. A new upper bound for diagonal ramsey numbers. Annals of Mathematics, 2009. Nenhuma citação no texto.

DOKIC, Jérôme; ENGEL, Pascal. *Frank Ramsey: Truth and Success.* [S.l.]: Routledge, 2003. Nenhuma citação no texto.

DORICHENKO, Sergey. *Um Círculo Matemático de Moscou*: Problema semana a semana. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 247 p. Nenhuma citação no texto.

EXOO, Geoffrey. A lower bound for R$(5, 5)$. Journal of Graph Theory, 1989. Nenhuma citação no texto.

MCKAY, Stanisław P. Radziszowski Brendan D. Subgraph counting identities and ramsey numbers. Journal of Combinatorial Theory, 1997. Nenhuma citação no texto.

MCKAY, Vigleik Angeltveit; Brendan. R$(5, 5) \leq 48$. ArXiv, 2017. Nenhuma citação no texto.

MORGADO JOãO BOSCO PITOMBEIRA DE CARVALHO, Paulo Cezar pinto Carvalho Pedro Fernandez Augusto César. *Análise Combinatória e Probabilidade.* 9. ed. [S.l.]: SBM, 2006. único. Nenhuma citação no texto.

MORICONI, Marco. *Qual o problema??*: Jogos matemáticos. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009. 112 p. Nenhuma citação no texto.

NETO, Wilson Reis de Souza. O teorema de paris-harrington. Nenhuma citação no texto.

PANSERA, Deividi Ricardo; VALMóRBIDA, Edson. O princípio da casa dos pombos e suas aplicações. Nenhuma citação no texto.

PARIS, J.; HARRIS, L. A mathematical incompleteness in peano arithmetic. In: *Handbook of Mathematical Logic.* [S.l.]: North Holland. Nenhuma citação no texto.

RAMSEY, O número de. 7 números de ramsey. Nenhuma citação no texto.

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*: Curiosidades. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1945. 313 p. Nenhuma citação no texto.