UFPB
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Números Complexos: Um Pouco de História, Ensino e Aplicações

por

Antônio Geraldo Lacerda da Costa

Agosto de 2013

UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Números Complexos: Um Pouco de História, Ensino e Aplicações [†]

por

Antônio Geraldo Lacerda da Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - PB

[†] O presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

C837n Costa, Antônio Geraldo Lacerda da.
Números complexos: um pouco de história, ensino e aplicações / Antônio Geraldo Lacerda da Costa.-- João Pessoa, 2013.
68f.
Orientador: Uberlandio Batista Severo
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Números complexos - propriedades. 3. Números complexos - história. 4. Números complexos - aplicação - matemática.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Números Complexos: um Pouco de História, Ensino e Aplicações

por

Antonio Geraldo Lacerda da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Maria Isabelle Silva

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB

Agosto/2013

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus, que plantou em mim um sonho que hoje se materializa. O que seria de mim sem a fé que eu tenho Nele? Agradecer pode não ser uma tarefa fácil, nem justa e para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a construção desta dissertação. Agradeço, particularmente, a Uberlandio, meu ex-aluno, e agora meu orientador por sua disposição, dedicação e sabedoria nos encaminhamentos e correções desta dissertação. Por fim, agradeço também aos meus colegas, professores, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento e, em especial, a toda minha família. Ninguém vence sozinho... OBRIGADO A TODOS!

Dedicatória

Dedico esta dissertação a toda minha família, composta por meus verdadeiros mestres, modelos reais de perseverança, parceria, dedicação, paciência e ética.

Resumo

Neste trabalho apresentamos as principais propriedades referentes aos números complexos. Justificamos como a História da Matemática pode contribuir para a aprendizagem desse conteúdo. Em seguida, descreveremos de forma sucinta a história dos números complexos. Mostramos também onde os números complexos podem ser aplicados, tanto dentro da própria Matemática, como fora dela.

Abstract

In this work we present the main results for the complex numbers. We justify how the Mathematics History can contribute to learn this discipline. Next, we describe briefly the history of the complex numbers. We also show where the complex numbers can be applied both within mathematics itself, and beyond.

Sumário

Introdução

A teoria dos números complexos é uma extensão natural da teoria dos números reais e é de fundamental importância tanto no campo da própria Matemática como em suas aplicações. Além disso, este conteúdo é parte integral dos currículos atuais da Matemática no Ensino Médio sendo, portanto, básico para muitos cursos que os alunos enfrentarão quando chegarem a uma universidade.

Este trabalho foi escrito com o intuito de atender as necessidades desses estudantes. Acreditamos que nas escolas brasileiras, o conteúdo de números complexos não é visto de maneira ideal e, quando visto, a atenção é voltada às manipulações algébricas que, por muitas vezes, não apresentam sentido algum para os aprendizes.

No Capítulo 1 apresentamos uma abordagem histórica dos números complexos, desmestificando seu surgimento através da necessidade de se resolver a equação do segundo grau $x^2 + 1 = 0$. Além disso, são apresentadas algumas justificativas de como a História da Matemática pode contribuir para o ensino desse conteúdo.

No Capítulo 2 definimos o corpo dos números complexos e apresentamos as suas principais propriedades. Mostramos como os números complexos podem ser representados geometricamente tal como suas operações. Definimos a exponencial complexa e demonstramos algumas de suas propriedades. Ademais, apresentamos uma seção que mostra algumas diferenças entre os corpos dos números reais e dos números complexos.

Finalmente no Capítulo 3, mostramos algumas aplicações dos números complexos. Dentre elas, a reflexão de espelhos e uma simples demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, fazendo uso das propriedades dos números complexos mostradas no Capítulo 2.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Neste capítulo, mostraremos como surgiu a necessidade de estender o corpo dos números reais para um conjunto "maior", no sentido de, além de o conter, manter válidas as propriedades das operações que dela já conhecemos. Na primeira seção, descreveremos e justificaremos como a História da Matemática pode contribuir para a aprendizagem de um novo conteúdo. Já na segunda seção, contaremos a história dos números complexos, rompendo o mito de que este conjunto surgiu da necessidade de se resolver a equação quadrática $x^2 + 1 = 0$.

1.1 História da Matemática e sua contribuição para o Ensino

Por muitas vezes, o ensino de Matemática é associado a uma prática de conhecimentos sem contextualização, desvinculado da realidade e que, por isso, não desperta a curiosidade da maioria das pessoas. O índice de reprovação e evasão em vários níveis de ensino que envolvem essa disciplina é alto e isso pode ocorrer devido ao fraco desempenho que o professor exerce sobre os alunos. Mais precisamente, pode não haver um interesse absoluto por parte do docente em pesquisar e aprender mais sobre o assunto que está sendo abordado, no intuito de fornecer ao aprendiz informações que podem ser relevantes e importantes para a aprendizagem daquela matéria.

A elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que são o resultado de um movimento em âmbito nacional, tendo como meta organizar um currículo que insira o aluno na sociedade de forma consciente, procura um ensino interdisciplinar que incentive o raciocínio lógico e a capacidade de aprender. Sendo assim, é necessário que haja uma procura por métodos inovadores de ensino-aprendizagem capazes de melhorar o ensino de Matemática.

Nesta direção, a *História da Matemática* pode fornecer ao professor ferramentas das quais facilite a transmissão de uma ideia e desperte a curiosidade do seu aluno. Através dela, os professores têm a oportunidade de fornecer caminhos alternativos de enxergar a Matemática, isto é, mostrar que, apesar de conhecermos e divulgarmos o conhecimento matemático formalizado e organizado, ele não foi concebido de uma hora para outra em um único momento.

Com isso, o aluno perceberá que a Matemática é feita na tentativa de resolver problemas de certas épocas, possibilitando que ele faça uma comparação da Matemática que está aprendendo hoje com a Matemática daquele tempo. Ele conhecerá as preocupações vividas por diferentes povos em diferentes momentos da história da humanidade. Ele entenderá que muitos matemáticos passaram por diferentes tipos de dificuldades e cada uma foi superada com muito esforço e dedicação levando-os a mudar suas visões sobre um determinado conceito.

A seguir, resumimos cinco itens que justificam a utilização da História da Matemática como ferramenta pedagógica:

(1) possibilita o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;

(2) constitui veículos de informação cultural e sociológica;

(3) reflete as preocupações práticas e teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos;

(4) constitui um meio de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados;

(5) permite mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente.

Levando em consideração os motivos iniciais desta seção e das justificativas que reforçam a ideia de utilizar a História da Matemática para um melhor entendimento de um determinado assunto, descrevemos de modo breve a história dos números complexos.

1.2 A História dos Números Complexos

Uma *equação algébrica*, como é conhecido nos dias atuais, é uma equação da forma $P = 0$, onde P é um polinômio com coeficientes em um determinado corpo. Resolver estes tipos de equações sempre esteve presente na Matemática. Os matemáticos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do segundo grau baseado no método de completamento de quadrados, como conhecemos hoje. Já os gregos, que desempenharam um papel fundamental para o desenvolvimento da Matemática, resolviam algumas equações do segundo grau utilizando régua e compasso. Entretanto, com a conquista da Grécia por Roma, e o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas e o desenvolvimento da Matemática ficou por conta dos árabes e dos hindus.

Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas sobre equações do segundo grau e, quando falamos em equações dessa natureza, o primeiro nome que vem a nossa mente é o de Baskara. Entretanto, não foi ele quem descobriu as soluções para este tipo de equação e, sim, um matemático hindu chamado Sridhara, no século XI. Lembre-se que para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, a *fórmula de Baskara* garante que suas raízes são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E, como sabemos, dependendo da equação, pode ocorrer do valor de $b^2 - 4ac$ ser um número negativo. Porém, isso não perturbava os matemáticos da época, já que quando isso acontecia, eles simplesmente afirmavam que a equação não possuia solução.

Foi no século XVI que a Matemática começou a ressurgir fortemente. Em particular, em meio a uma disputa entre dois matemáticos italianos chamados *Girolamo Cardano* e *Niccolò Tartaglia* para a resolução da equação do terceiro grau, é que se percebeu a insuficiência dos números reais para explicar algumas teorias que estavam surgindo e as primeiras ideias sobre os números complexos começaram a aparecer.

Cardano nasceu em Pavia, em 1501 e falaceu em Roma, em 1576. Era um excepcional cientista e era conhecido por ser violento, traidor e invejoso. Foi autor de um livro chamado *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade e também ensinou maneiras de trapacear em jogos. Sua maior obra, entretanto, foi o *Ars Magna*, publicado na Alemanha em 1545, que na época era o maior compêndio algébrico existente até então. Já Niccolò Fontana, apelidado de Tartaglia, era praticamente o oposto de Cardano, tendo em comum apenas a nacionalidade e o talento matemático. Nasceu na Bréscia em 1500 e, na infância, foi gravemente ferido por golpes de sabre. Por isso, ficou com uma profunda cicatriz na boca que lhe provocou um defeito na fala. Daí, o nome Tartaglia, que significa gago. Ele não ficou conhecido por nenhuma obra extraordinária e, sim, pelas disputas que tinha com Cardano.

Por volta dos anos 1510, um matemático italiano chamado Scipione del Ferro encontrou uma fórmula para a obtenção das raízes do terceiro grau $x^3 + px + q = 0$, mas morreu antes de publicar sua descoberta. Entretando, seu aluno Antonio Maria Fior conhecia esta solução e propôs a Tartaglia o desafio de descobri-la. Tartaglia, apesar de não saber resolver ainda tais equações, aceitou o desafio. Porém, ele fez mais. Não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$.

Nesta época, Cardano estava escrevendo um livro chamado *Pratica Arithmeticae Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Quando ele soube que Tartaglia havia obtido a solução geral das equações de terceiro grau, pediu-lhe para que a revelasse, para que assim pudesse publicá-la em seu próximo livro, o *Ars Magna*. Entretanto, Tartaglia não aceitou, justificando que ele próprio publicaria o resultado em um livro de sua autoria. Depois de muita insistência, Tartaglia acabou cedendo a resolução para Cardano que, como prometido, publicou em seu livro como se o resultado fosse seu, fazendo jus ao seu conhecido adjetivo de traidor. Até hoje, tais fórmulas são conhecidas como *fórmulas de Cardano*. Vejamos como obter tais fórmulas.

Considere primeiramente uma equação do terceiro grau, agora do seguinte tipo:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Vamos mostrar que qualquer equação com este aspecto, pode ser transformada em uma equação sem o termo de segundo grau:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Com efeito, se $a = 0$, então não há nada para fazer. Agora suponha que $a \neq 0$ e considere $y = x + m$, onde m será escolhido convenientemente com o intuito de eliminar o coeficiente que acompanha o termo de segundo grau. Assim,

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (y-m)^3+a(y-m)^2+b(y-m)+c \\ &= (y-m)^2(y-m)+a(y^2-2ym+m^2)+by-bm+c \\ &= y^3-my^2-2y^2m+2ym^2+ay^2-2aym+am^2+by-bm+c \\ &= y^3+(a-3m)y^2+(2m^2-2am+b)y+(am^2-bm+c). \end{aligned}$$

Escolhendo $m=\dfrac{a}{3}$, temos que

$$a-3m=a-3\cdot\frac{a}{3}=a-a=0$$

e, portanto, saberemos resolver equações do terceiro grau se soubermos resolver equações do tipo $x^3+px+q=0$. A ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada era do tipo $x=A+B$.

De fato, seja $x^3+px+q=0$ uma equação do terceiro grau. Suponha que $x=A+B$ seja uma solução desta e veja que

$$\begin{aligned} x^3 &= (A+B)^3 \\ &= A^3+B^3+3A^2B+3AB^2 \\ &= A^3+B^3+3AB(A+B) \\ &= A^3+B^3+3ABx. \end{aligned}$$

Desde que $x^3=(-p)x+(-q)$ e $x^3=A^3+B^3+3ABx$, segue que

$$3AB=-p \quad \text{e} \quad A^3+B^3=-q$$

e, portanto,

$$A^3B^3=-\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad A^3+B^3=-q.$$

Agora, note que A^3 e B^3 são as raízes da equação do segundo grau $x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0$. De fato,

$$\begin{aligned}(A^3)^2 - q\cdot A^3 - \frac{p^3}{27} &= A^6-(A^3+B^3)A^3+A^3B^3\\ &= A^6-A^6-B^3A^3+A^3B^3\\ &= 0.\end{aligned}$$

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}(B^3)^2 - q\cdot B^3 - \frac{p^3}{27} &= B^6-(A^3+B^3)B^3+A^3B^3\\ &= B^6-A^3B^3-B^6+A^3B^3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Entretanto, pela fórmula de Baskara, temos que as raízes desta equação são dadas por

$$x_1=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{4p^3}{4\cdot 27}}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

e

$$x_2=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{4p^3}{4\cdot 27}}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Portanto,

$$A^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad \text{e}\quad B^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Logo,

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Como $x = A + B$, segue que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1.1}$$

Aplicaremos a fórmula de Cardano para obtenção das raízes da equação do terceiro grau a seguir. Tal equação foi a que levou os matemáticos a descobrirem os números complexos. Consider a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Mostraremos que todas as três raízes da equação acima são reais. De fato, note que $x = 4$ é solução da equação, já que

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 64 - 64 = 0.$$

Assim, dividindo $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$, podemos escrever que

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Por sua vez, $x^2 + 4x + 1$ tem suas duas soluções reais, quais sejam,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}.$$

Entretanto, a fórmula de Cardano, nos diz que a solução da equação considerada é dada por

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

considerando $q = -4$ e $p = -15$.

Assim, questões como essa surgiram e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes de números negativos, surgiam agora problemas como encontrar raízes cúbicas de números de natureza não conhecida. Quando, nas equações do segundo grau, a fórmula de Baskara nos dava raízes onde apareciam números negativos, era fácil dizer que a solução de tal equação não existia. Porém, com este exemplo, nota-se que existem equações do terceiro grau com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação dessas, usando a fórmula (1.1), passa por extração de raízes de números negativos.

Não havia como negar a insuficiência dos números reais para se tratar das equações do terceiro grau. O que estava acontecendo naquela época, era algo semelhante ao que aconteceu com os gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, ou seja, o conceito dos números reais precisava ser estendido de forma a sanar este problema.

Foi o italiano Rafael Bombelli que, em 1530, conseguiu resolver estas questões. De acordo com o seu relato em 1572, no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi tratar os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ como se fossem números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Como veremos a seguir, ele chegou a conclusão de que a deveria ser 2 e b igual a 1.

Suponha que $\sqrt{-1}$ seja um número conhecido e que, com ele, opera-se do mesmo modo que com os outros números reais. Verifiquemos que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Com efeito, veja que

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= (2+\sqrt{-1})^2(2+\sqrt{-1})\\ &= (4+4\sqrt{-1}-1)(2+\sqrt{-1})\\ &= (3+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})\\ &= 2+11\sqrt{-1}\\ &= 2+\sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}$.

Depois de Bombelli, outros personagens históricos da Matemática deram contribuições significativas para o desenvolvimento da teoria dos números complexos. Um deles foi o matemático francês Abraham Moivre que inclusive possui uma fórmula com seu nome. Além dele, os irmãos Bernoulli, Jacques Bernoulli e Jean Bernoulli, também possuem um papel fundamental nesta teoria. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo foi o suíço Leonhard Euler.

Euler nasceu em 1707 na Basiléia, quando o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Isaac Newton e Gottfried Leibniz estava em expansão. Foi um dos matemáticos que mais publicou e produziu em todos os tempos. Aos 28 anos, perdeu a visão de seu olho esquerdo e viveu totalmente cego os seus últimos 18 anos de vida. Apesar disso, continuou trabalhando e produzindo. Seu nome é ligado ao *número de Euler* e que é um dos números irracionais mais importantes e está bastante ligado a fenômenos físicos de grande importância.

Muitas das notações que usamos até hoje na teoria dos números complexos, deve-se a Euler. Ele introduziu, por exemplo, a notação i para a expressão $\sqrt{-1}$. Ele passou a estudar números da forma $a+b\sqrt{-1} = a+bi$, onde a e b são números reais, pondo $i^2 = -1$. Números dessa natureza foram chamados de *números complexos* e são utilizados até hoje em diversos campos, não só da Matemática, mas como Física, Química e Biologia.

Capítulo 2

Os Números Complexos

Neste capítulo, vamos estudar as principais propriedades dos números complexos. Para uma abordagem mais geral e mais completa, consulte [1, 7, 9] e [13].

2.1 O Corpo dos Números Complexos

Vamos estudar aqui expressões da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, como Euler o fez. É natural, portanto, considerarmos uma correspondência entre $a + bi$ e o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

O conjunto dos *números complexos*, denotado por $\mathbb{C}$, é definido como sendo o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações de adição vetorial, multiplicação por escalar e uma operação de multiplicação, ou seja,

(a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

(b) $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$,

(c) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

para quaisquer $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Diremos que o eixo das abscissas é o *eixo real* e o eixo das ordenadas é o *eixo imaginário*. Denotaremos todo número real x

por $(x, 0)$ e por i o ponto do plano cartesiano $(0, 1)$. Assim,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + yi,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned} iy = (0,1) \cdot (y,0) &= (0 \cdot y - 1 \cdot 0, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (0, y) \\ &= y(0,1) \\ &= yi \end{aligned}$$

e de fato

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1.$$

Assim, $iy = yi$ para qualquer número real y e $i^2 = -1$, como já esperávamos. Então, todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito sob a forma

$$z = x + iy = x + yi,$$

onde x e y são números reais. Com isso, podemos definir soma, multiplicação por escalar e multiplicação de números complexos da seguinte maneira:

(1) *Soma:* $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

(2) *Multiplicação por escalar:* $\lambda(x + iy) = \lambda x + \lambda iy$,

(3) *Multiplicação:* $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

para quaisquer $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Usando esta nova notação, podemos provar propriedades fundamentais da multiplicação entre dois números complexos. Para as interpretações geométricas das operações (1) e (2), confira as figuras 2.1 e 2.2.

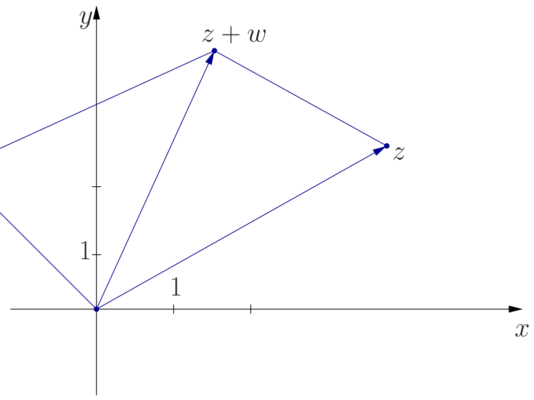

Figura 2.1: Interpretação geométrica da soma entre dois números complexos.

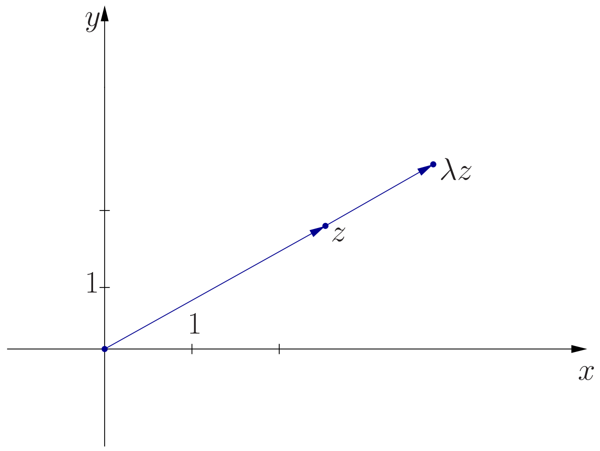

Figura 2.2: Interpretação geométrica da multiplicação de um número escalar positivo por um número complexo.

Vamos descrever e provar tais propriedades através da próxima proposição.

Proposição 1. Para quaisquer números complexos $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$ e $s = x_3 + iy_3$ valem as seguintes igualdades:

(i) $(zw)s = z(ws)$, ou seja, a multiplicação de números complexos é *associativa*.

(ii) $zw = wz$, ou seja, a multiplicação de números complexos é *comutativa*.

(iii) $z(w + s) = zw + zs$, ou seja, a multiplicação de números complexos é *distributiva*.

Demonstração: Provaremos apenas a comutatividade, já que os outros itens seguem analogamente. De fato, por um lado temos que

$$\begin{aligned} zw &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

e por outro

$$\begin{aligned} wz &= (x_2 + iy_2) \cdot (x_1 + iy_1) \\ &= x_2x_1 - y_2y_1 + i(x_2y_1 + x_1y_2) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned}$$

o que prova a igualdade. ■

Vejamos agora algumas observações. Além das propriedades já mencionadas anteriormente, ainda temos duas muito importantes. A primeira diz respeito ao *elemento neutro* da multiplicação de números complexos. A saber, o par $(1, 0)$ é tal que $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (1,0) \cdot (x,y) &= (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) \\ &= (x,y). \end{aligned}$$

A segunda propriedade é sobre o *inverso multiplicativo*. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$ não nulo, sempre existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot w = w \cdot z = 1.$$

De fato, dado $z = a + ib$ com $a^2 + b^2 \neq 0$, o elemento

$$w \equiv z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

é tal que $z \cdot w = w \cdot z = 1$. Isto é comprovado com os cálculos a seguir:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+ib) \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + i\left(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Note que a *igualdade dos números complexos* $a + ib = x + iy$ significa $a = x$ e $b = y$, já que isso nada mais é do que uma igualdade de coordenadas. Além disso, o elemento $0 \in \mathbb{C}$ se escreve unicamente sob a forma $0 + i0$ e teremos $a + ib = 0$ se, e somente se $a = b = 0$.

Com todas as propriedades provadas até aqui, podemos concluir que o conjunto dos números complexos é um *corpo*, ou seja, $\mathbb{C}$ é um conjunto não vazio munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, tais que valem as seguintes propriedades:

(S_1) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todos $x, y, z \in \mathbb{C}$.

(S_2) Existe um elemento em $\mathbb{C}$, denotado por 0, tal que $x+0 = 0+x = x$, chamado *elemento neutro da adição.*

(S_3) Para todo $x \in \mathbb{C}$, existe $y \in \mathbb{C}$ tal que $x + y = y + x = 0$ e esse elemento y é denotado por $-x$.

(S_4) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{C}$.

(M_1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para todos $x, y, z \in \mathbb{C}$.

(M_2) Existe um elemento em $\mathbb{C}$, denotado por 1 tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, para todo $x \in \mathbb{C}$, chamado *elemento neutro da multiplicação.*

(M_3) Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{C}$, existe $y \in \mathbb{C}$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$ e tal elemento é denotado por x^{-1}.

(M_4) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{C}$.

(SM) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, para todos $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Note que o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais, já que como todo número complexo se escreve como $a+ib$, com a e b números reais, podemos tomar $b = 0$ e variando o número real a, conseguimos todos os números reais.

Temos, portanto, a seguinte inclusão de conjuntos estabelecida: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Mostraremos algumas diferenças entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números complexos na Seção 2.5 deste capítulo.

2.2 Representação Polar de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + ib$, diremos que a é a *parte real* e b é a *parte imaginária* do número complexo z. Denotamos as partes real e imaginária por $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$, respectivamente. Com isso, todo número complexo z pode ser escrito como

$$z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z).$$

Por essa razão, na representação geométrica de um número complexo, chamamos o eixo dos x's de *eixo real* e o eixo dos y's de *eixo imaginário.* Assim, o número complexo $z = a+ib$ pode ser representado como na Figura 2.1. Entendido isso, como podemos representar geometricamente a multiplicação de dois números complexos?

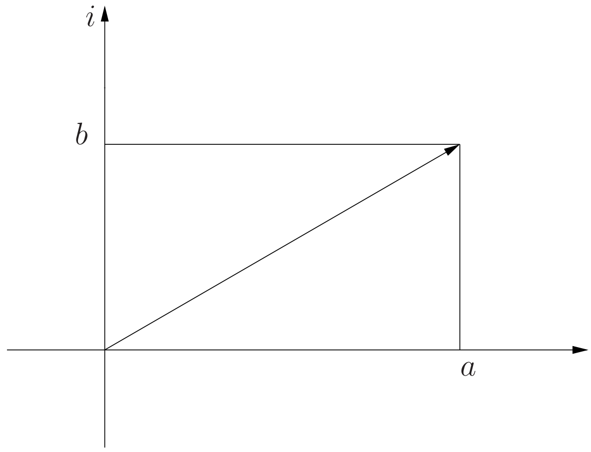

Figura 2.3: Representação geométrica de $z = a + ib$

Para entender isso, vamos escrevê-los em sua forma polar. Lembre-se que a *norma* de um vetor $(a, b) = a + ib$ é definida por

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Suponha que este vetor faz um ângulo θ com a direção positiva do eixo real, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como nos mostra a Figura 2.4. Daí, como $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \operatorname{sen} \theta$,

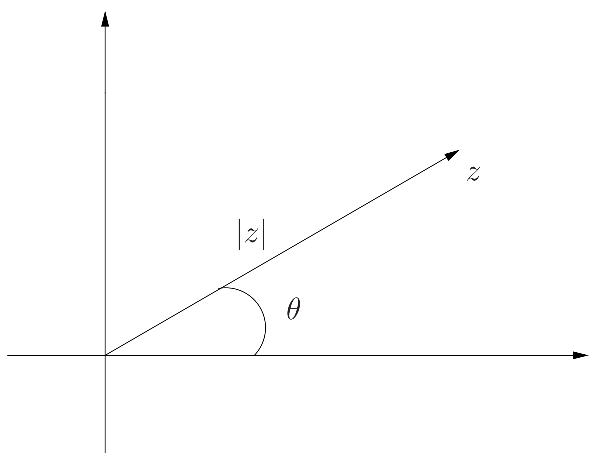

Figura 2.4: O comprimento do vetor z é denotado por $|z|$.

temos que

$$\begin{aligned} a + ib &= |z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta \\ &= |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \end{aligned}$$

que é chamada *representação polar* do número complexo $z = a+ib$. O comprimento de z é denotado por r e é chamado *módulo* do número complexo z. O ângulo θ é chamado *argumento* do número complexo z e escreveremos $\theta = \arg(z)$.

Por exemplo, considere o número complexo $z = 1 + i$. Então, seu módulo é

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Como $1+i = (1,1)$ se encontra no primeiro quadrante, não é difícil ver que $\theta = \pi/4$ e, portanto, sua representação polar é

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Agora, sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ números complexos. Escreva-os em suas respectivas formas polares, ou seja, sejam $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$. Então,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)], \end{aligned}$$

usando soma de arcos. Com isso, temos que

(1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$,

(2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Assim, usando (1) e (2) podemos responder a pergunta feita de como representar geometricamente a multiplicação de dois números complexos. Para tanto, basta multiplicar o módulo do primeiro número complexo pelo segundo e somar seus argumentos. Confirma a Figura 2.5, onde se vê que $z_1 \cdot z_2$ faz para z_2 o mesmo que z_1 faz para 1.

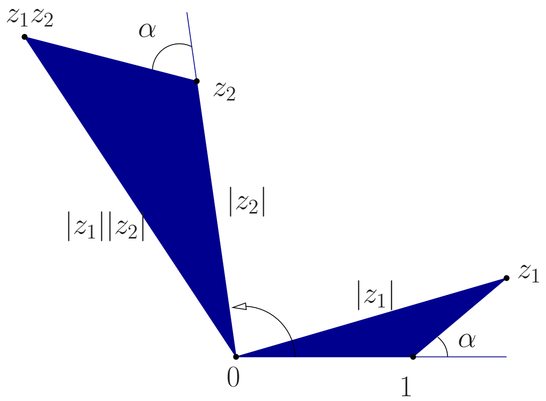

Figura 2.5: Interpretação geométrica da multiplicação entre dois números complexos.

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = a + ib$ como sendo o número complexo

$$\overline{z} = a - ib.$$

Observa sua representação geométrica na Figura 2.6. Mais tarde, provaremos várias propriedades referentes ao conjugado de um número complexo e sua relação com o número complexo que o determina. Agora, vamos usá-lo para mostrar que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)],$$

onde $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. Para isso, usaremos um resultado bem simples sobre o conjugado. O que acontece quando multiplicamos z

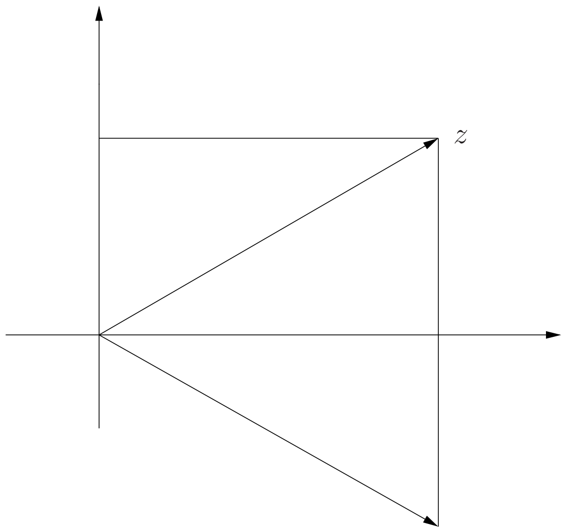

Figura 2.6: Representação geométrica do conjugado $\overline{z}$ de um número complexo z.

por seu conjungado $\overline{z}$? Vejamos:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+ib)\cdot(a-ib) \\ &= a^2 - iab + iab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= \frac{r_1 r_2}{r_2^2}(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)], \end{aligned}$$

como queríamos. Assim,

(1') $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

(2') $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Assim, para representar a divisão entre dois números complexos, basta usar os resultados de (1') e (2'), ou seja, a representação geométrica da divisão entre dois números complexos é determinada pela divisão de seus módulos e da diferença entre seus argumentos.

Podemos agora nos perguntar, o que significa multiplicar um número complexo por i. Já vimos que geometricamente o ponto i é o vetor definido pela seta que vai da origem até o ponto $(0,1)$, ou seja, é um número complexo unitário que possui argumento igual a $\pi/2$. Por isso, a multiplicação desse número por um número complexo qualquer significa somar 90 graus ao argumento desse outro número, pois se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, então

$$iz = i(a + ib) = -b + ia$$

como nos mostra a Figura 2.2. Por isso, multiplicar z por $i^2 = i \cdot i$ significa girá-lo duas vezes de um ângulo reto positivo, já que $i^2 z = (-1)z$, como nos mostra a Figura 2.2.

A seguir, provaremos a *fórmula de De Moivre*.

Proposição 2. (Fórmula de De Moivre) Se $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e n é um número natural, então

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Demonstração: Vamos provar esta igualdade usando indução sobre n. Se $n = 1$, então

$$z^1 = r^1[\cos(1 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(1 \cdot \theta)] = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

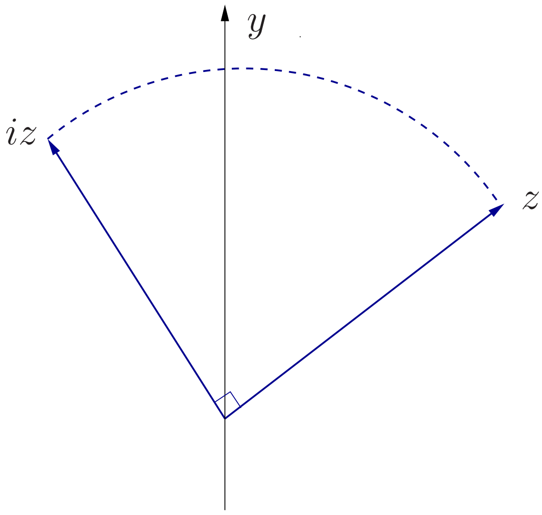

Figura 2.7: Multiplicação de um número complexo pelo fator i.

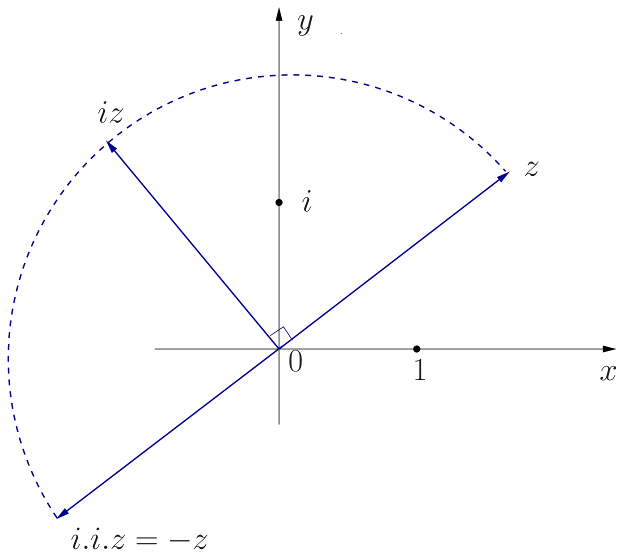

Figura 2.8: Multiplicação de um número complexo por i^2.

que é uma igualdade verdadeira. Suponhamos agora que o resultado seja válido para

n e provemos para $n+1$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n \cdot z &= r^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] \cdot r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\ &= r^{n+1}[\cos(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta + i(\cos(n\theta)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta)] \\ &= r^{n+1}[\cos((n+1)\theta) + i\operatorname{sen}((n+1)\theta)]. \end{aligned}$$

Assim, a fórmula é válida para $n+1$ e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 1. Seja $w \in \mathbb{C}$. Vamos resolver a seguinte equação

$$z^n = w \tag{2.1}$$

Para resolver a equação (2.1), usaremos a fórmula de De Moivre. Sejam $w = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $z = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$. Então, pela fórmula de De Moivre, temos que

$$z^n = \rho^n(\cos(n\psi) + i\operatorname{sen}(n\psi)).$$

Como $z^n = w$, segue que

$$\rho^n\cos(n\psi) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \rho^n\operatorname{sen}(n\psi) = r\operatorname{sen}\theta$$

e, portanto, $\rho^n = r$ e $n\psi = \theta + 2k\pi,$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$z = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ temos n valores distintos para z.

Este exemplo nos permite calcular o que chamamos *raízes da unidade*, ou seja, calcular as raízes de uma equação do tipo

$$z^n = 1, \tag{2.2}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Para resolver este problema, procedemos da mesma forma que acima e obtemos n valores distintos para z como raiz desta equação. Por exemplo, suponha que $n = 8$. Então, ficamos com a equação $z^8 = 1$ e deveremos achar oito valores distintos para z de forma que esses valores satisfaçam a equação (2.2). Temos que o argumento do número complexo 1 é igual a 0 e seu módulo igual a 1. Assim, duas das oito raízes desta equação são $z_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{0}{8} + \frac{2\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{8} + \frac{2\pi}{8}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

O mais interessante em equações dessa natureza, é que as raízes são obtidas da anterior, rodando um ângulo de $\dfrac{2\pi}{n}$ no sentido anti-horário. Desta maneira, as raízes n-ésima da unidade são precisamente os vértices de um polígono regular inscrito na circunferência de raio 1 e centro na origem, tendo como um dos vértices o ponto $(1, 0)$, em que 1 é sempre a primeira raiz da equação. Veja a Figura 2.9 para o caso da equação $z^8 = 1$.

A seguir, vamos demonstrar algumas propriedades que envolvem módulo e conjugado de um número complexo e algumas das principais desigualdades sobre números complexos.

2.3 Propriedades e Desigualdades Importantes

A próxima proposição diz respeito a várias igualdades envolvendo números complexos. Tais igualdades são muito úteis na hora de resolver um exercício ou até mesmo demonstrar um teorema que envolve números complexos.

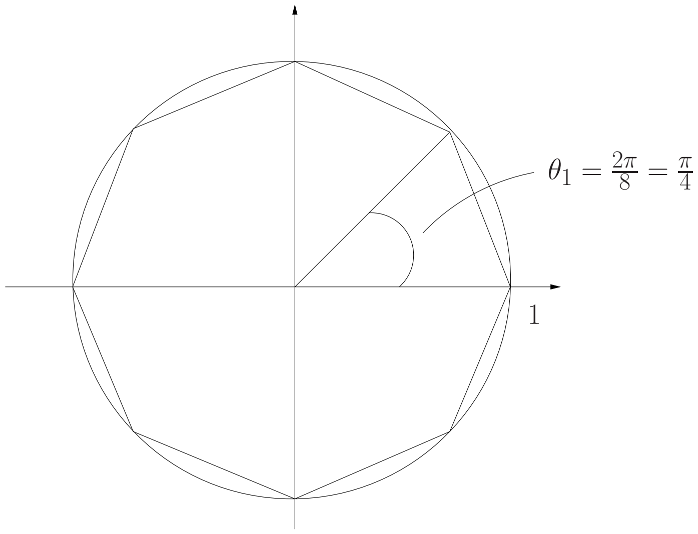

Figura 2.9: As raízes da equação $z^8 = 1$.

Proposição 3. Para quaisquer números complexos z e w, sempre são válidas as seguintes propriedades:

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(iii) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$, onde $w \neq 0$.

(iv) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ e, se $z \neq 0$, então $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

(v) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(vi) $\overline{\overline{z}} = z$.

(vii) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Demonstração: Veja que

$$
\begin{aligned}
\overline{z+w} = \overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} &= \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\
&= x_1+x_2-i(y_1+y_2) \\
&= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) \\
&= \overline{z}+\overline{w}.
\end{aligned}
$$

Isto prova (i). Agora, consideremos (ii). Por um lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\overline{z\cdot w} = \overline{(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)} &= \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)} \\
&= x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1)
\end{aligned}
$$

e por outro

$$
\begin{aligned}
\overline{z}\cdot\overline{w} = \overline{(x_1+iy_1)}\cdot\overline{(x_2+iy_2)} &= (x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2) \\
&= x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1).
\end{aligned}
$$

Isto estabelece a igualdade. Passemos agora para a terceira propriedade. Para isso, provamos primeiro (vi). De fato,

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a+ib)}} &= \overline{a-ib} \\
&= a-(-ib) \\
&= a+ib \\
&= z.
\end{aligned}
$$

Agora, veja

$$
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}}\right)} = \overline{\left(\frac{z\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{1}{|w|^2}\cdot\overline{z\overline{w}} = \frac{1}{|w|^2}\cdot\overline{z}w = \frac{\overline{z}w}{w\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.
$$

Isto prova (iii). Note que na segunda igualdade usamos (iv), que já tínhamos provado anteriormente. Resta-nos provar (v) e (vii). Veja que $z = \overline{z}$, então $a + ib = a - ib$ e, portanto, $b = -b$, o que acarreta que b é identicamente nulo. Finalmente, para provar (vii), basta calcularmos

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$

e

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \mathrm{Im}(z),$$

como queríamos. ■

Para finalizar esta seção, provaremos algumas identidades e desigualdades importantes.

Proposição 4. Para quaisquer números complexos z e w, sempre são válidas as seguintes propriedades:

(i) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(ii) $|z/w| = |z|/|w|$, se $w \neq$.

(iii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(iv) $|\overline{z}| = |z|$.

(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(vi) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

Demonstração: Provaremos apenas as propriedades (v) e (vi). Para mostrar a desigualdade (v), usaremos algumas das propriedades da proposição anterior e os itens (iii) e (iv) desta proposição. Com efeito, se z e w são números complexos, temos que

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos o resultado. Agora, para provar (vi), observe, pela propriedade (v), que temos que

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$$

e, portanto, $|z| - |w| \leq |z - w|$. Por outro lado,

$$|w| = |z - w - z| \leq |z - w| + |z|$$

e, portanto, $|w| - |z| \leq |z - w|$. Assim

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w|,$$

donde segue (vi). ∎

A propriedade (iv) é conhecida como *desigualdade triangular*. Tal desigualdade pode ser estendida para um maior número de parcelas. Por exemplo, se z_1, z_2 e z_3

são números complexos, então

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3|,$$

onde aplicamos a desigualdade triangular para as parcelas $z_1 + z_2$ e z_3. Novamente aplicando a desigualdade triangular para z_1 e z_2, teremos que

$$|z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|,$$

ou seja, vale a desigualdade tringular para três números complexos:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|. \tag{2.3}$$

Usando a mesma ideia que usamos para provar (2.3), podemos provar que também vale a desigualdade triangular para um número finito de parcelas, ou seja,

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|, \tag{2.4}$$

e, da mesma forma, podemos usar (vi) para provar que

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - |z_3| - \ldots - |z_n|, \tag{2.5}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

2.4 A Função Exponencial e suas Propriedades

Nesta seção, admitiremos alguns resultados sobre funções trigonométricas, função exponencial e^x e representações de funções em séries. Nos cursos de Cálculo, vemos que a função exponencial e^x pode ser representada como uma soma infinita dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Além disso, existem as representações em soma infinita para as funções trigonométricas seno e cosseno que são:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

e

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Isto significa que se quisermos definir o número complexo e^z, teremos que saber o valor de e^{iy}, onde y é um número real. Mas, podemos achá-lo substituindo iy na expressão (2.6) e, portanto, temos que

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \ldots \\
&= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \ldots. \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Portanto, usando as expressões (2.7) e (2.8), temos que

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Observe que essas considerações não definem a exponencial complexa, mas servem para motivar sua definição. Queremos definir a exponencial complexa para manter a propriedade de aditividade que temos para a exponencial real, ou seja,

$$e^{x_1+y_1} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

Definimos, portanto, a exponencial e^z, onde $z = x + iy$ é um número complexo qualquer, como sendo

$$e^z := e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{2.9}$$

Esta igualdade é conhecida como *Fórmula de Euler*. Vamos resumir algumas das principais propriedades da função exponencial complexa na próxima proposição.

Proposição 5. Para quaisquer números complexos z e w, sempre são válidas as seguintes propriedades:

(i) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$.

(ii) $e^{-z} = 1/e^z$.

(iii) $(e^z)^n = e^{nz}$, para qualquer n natural.

(iv) $e^z \neq 0$.

(v) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Demonstração: Usando a definição da exponencial complexa, temos que

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \cos y_2 \operatorname{sen} y_1)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)] \\ &= e^{z+w}. \end{aligned}$$

Isso prova (i). Temos também que

$$\begin{aligned} e^{-z} = e^{-x-iy} &= e^{-x}[\cos(-y) + i\,\mathrm{sen}(-y)] \\ &= e^{-x}[\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y)] \\ &= \overline{e^{iy}}/e^{x}. \end{aligned}$$

Mas se multiplicamos e dividimos esta última fração por e^{iy}, obtemos

$$\frac{\overline{e^{iy}}}{e^{x}} \cdot \frac{e^{iy}}{e^{iy}} = \frac{|e^{iy}|^2}{e^{x} \cdot e^{iy}},$$

que nos dá o resultado, já que $|e^{iy}|^2 = 1$ e $e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^{z}$. Daí, segue a segunda propriedade. Agora, como $|e^{iy}|^2 = 1$, segue imediatamente a última propriedade. Resta-nos provar as propriedades (iv) e (iii). Entretanto, a propriedade (iv) é fácil, por causa das funções trigonométricas envolvidas na definição da exponencial complexa. Finalmente, provemos (iii). Façamos isso por indução sobre n. Para $n = 1$, a fórmula é válida. Portanto, podemos supor o resultado para n e provar para $n + 1$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} (e^{z})^{n+1} = (e^{z})^{n} \cdot e^{z} &= e^{zn} \cdot e^{z} \\ &= e^{nz+z} \\ &= e^{(n+1)z}. \end{aligned}$$

Isto prova a propriedade (iii) e a proposição está demonstrada. ■

2.5 Algumas diferenças entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

2.5.1 O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenado

Nesta seção, vamos mostrar algumas diferenças entre os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Começamos com uma diferença extremamente importante. Diferentemente dos números reais, o conjunto dos números complexos *não* é um *corpo ordenado*, isto é, não podemos dizer, por exemplo, que o número $3+2i$ é maior ou menor do que o número $2-i$. Mais precisamente, dizemos que um corpo K é *ordenado* se

(1) a soma e o produto de elementos positivos são positivos,

(2) dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou x é positivo, ou $-x$ é positivo.

Note que, com essa definição, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, já que todos os seus elementos gozam das propriedades (1) e (2) acima. Mostraremos a seguir que isto não ocorre com o corpo dos números complexos.

Proposição 6. O corpo dos números complexos não é um corpo ordenado.

Demonstração: Com efeito, suponha, por absurdo, que $\mathbb{C}$ fosse um corpo ordenado. Então, teríamos que $i \geq 0$ ou $i \leq 0$. Se i fosse um número maior do que ou igual a 0, então $i \cdot i$ também seria. Mas isto é um absurdo, já que o quadrado de i é igual a -1, que é um número negativo. Por outro lado, se $i \leq 0$, então $-i \geq 0$ e, portanto, teríamos $0 \leq i \cdot i = -1$, o que é uma nova contradição. Em qualquer caso, teremos um absurdo e, portanto, $\mathbb{C}$ não pode ser um corpo ordenado, como queríamos demonstrar. ■

2.5.2 As funções seno e cosseno definidas em $\mathbb{C}$ não são limitadas por 1

Mostraremos, agora, uma outra diferença entre estes dois conjuntos. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, as funções trigonométricas seno e cosseno são tais que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$, isto é, não assumem valores acima de 1. Curiosamente este mesmo resultado *não* vale para as funções seno e cosseno complexos. Para ver isso, precisamos definir tais funções.

Já vimos na seção anterior, que podemos escrever

$$e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos estender esta igualdade para o corpo dos números complexos de maneira natural. Nosso objetivo é mostrar que

$$\cos(i) \approx 1,54... > 1. \tag{2.10}$$

Podemos definir, como já fizemos, a função $f(z) = e^z$, para cada $z \in \mathbb{C}$. É possível mostrar, a partir dessa definição, que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos que

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w},$$

isto é, valem "leis" semelhantes àquelas que estamos acostumados a trabalhar nos reais. Uma outra maneira de definir a exponencial complexa é como fizemos na seção anterior. Seja $z = x + iy$ um número complexo. Então,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$$

que é a Fórmula de Euler, como já havíamos mencionado. Em particular, quando

$y = 0$, temos que

$$e^z = e^{x+i\cdot 0} = e^x(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)) = e^x \cdot 1 = e^x,$$

ou seja, a definição de exponencial complexa generaliza, como era de se esperar, a exponencial real.

Uma das grandes diferenças entre essas duas funções é que a exponencial complexa é periódica e tem período $2\pi i$, já que

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} = e^{(x+iy)+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} &= e^x(\cos(y+2\pi) + i\,\mathrm{sen}(y+2\pi)) \\ &= e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \\ &= e^z, \end{aligned}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$, onde utilizamos o fato de que as funções seno e cosseno reais são ambas periódicas e possuem período 2π.

Agora, vamos escrever as funções complexas seno e cosseno através da função exponencial complexa. Como o seno é uma função ímpar, o cosseno é uma função par e vale a fórmula de Euler, temos que

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x). \tag{2.11}$$

Somando e subtraindo as igualdades em (2.11), obtemos

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Motivamos por estas igualdades, definimos as funções seno e cosseno complexas, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2.12}$$

Definidas dessa maneira, as funções complexas seno e cosseno coincidem com as funções reais seno e cosseno quando z é um número real. Na proposição a seguir, provamos uma série de propriedades dessas duas novas funções. Para cada $z \in \mathbb{C}$, temos que

Proposição 7. As funções complexas seno e cosseno gozam das seguintes propriedades:

(a) $\cos(-z) = \cos(z)$ e $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$,

(b) $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$,

(c) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$,

(d) $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) \pm \operatorname{sen}(z_2)\cos(z_1)$,

(e) $\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$,

(f) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)$.

Todas os itens acima são demonstrados de forma semelhante, utilizando as expressões (2.12). Por isso, demonstraremos apenas o item (b) para efeito de ilustração.

Demonstração: (b) Temos que

$$\cos^2(z) = (\cos(z))^2 = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}$$

e que

$$\operatorname{sen}^2(z) = (\operatorname{sen}(z))^2 = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{(-4)}.$$

Logo,

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{(-4)} = \frac{4}{4} = 1.$$

■

Ao contrário do que acontece com as funções exponencial complexa e exponencial real, as funções complexas seno e cosseno possuem o mesmo período das funções reais seno e cosseno, a saber, 2π. De fato, como e^z é uma função periódica de período $2\pi i$ temos, para cada $z \in \mathbb{C}$, que

$$\begin{aligned}\cos(z+2\pi) \overset{(2.12)}{=} \frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2} &= \frac{e^{iz+2\pi i}+e^{-(iz+2\pi i)}}{2}\\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &\overset{(2.12)}{=} \cos(z).\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que vale (2.10). Com efeito,

$$\cos(i) = \frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2} = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2} \approx 1,54....$$

2.5.3 Algumas equações que não possuem soluções reais

Já sabemos que existem muitas equações que não possuem soluções no corpo dos números reais mas possuem no corpo dos números complexos, como vimos no Capítulo 1. Vejamos mais dois exemplos.

Exemplo 2. A equação

$$x^2 + 1 = 0 \tag{2.13}$$

é uma das equações mais conhecidas por não possuir soluções reais, isto é, não existe nenhum número real cujo seu quadrado somado com 1 resulta em 0, já que $x^2+1 \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mas o que falar dessa equação quando a olhamos no corpo dos números complexos? Neste caso, é possível tomar $x = 1 + i$, por exemplo. Mas $(1+i)^2 + 1 \neq 0$. Entretando, se tomarmos $x = i$ ou $x = -i$, temos que $x^2 + 1 = 0$ e isto determina todas as raízes de (2.13).

Consideremos agora uma equação mais complicada de ser trabalhada.

Exemplo 3. Estamos interessados em resolver a equação

$$\operatorname{sen}(z) = 5 \tag{2.14}$$

e mostrar que tal equação possui infinitas raízes em $\mathbb{C}$. Note, primeiramente, que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z) = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 10i \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 10i \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (e^{iz})^2 - 10ie^{iz} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Isto quer dizer que a equação (2.14) é uma equação quadrática em e^{iz}. Resolvendo tal equação, obtemos

$$e^{iz} = (5 \pm 2\sqrt{6})i.$$

Assim, se $z = x + iy$, então

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) = \begin{cases} (5 + 2\sqrt{6})i, \\ (5 - 2\sqrt{6})i. \end{cases}$$

Consideremos primeiro a equação $e^{-y}(\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) = (5 + 2\sqrt{6})i$. Como i é um imaginário puro e $5 + 2\sqrt{6} > 0$, segue que

$$e^{-y} = 5 + 2\sqrt{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

para $k \in \mathbb{Z}$, já que $\cos(x) = 0$ e $\operatorname{sen}(x) = 1$. Portanto,

$$y = -\ln(5 + 2\sqrt{6}) \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln(5 + 2\sqrt{6}),$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Analogamente, podemos mostrar que

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln(5 - 2\sqrt{6}),$$

onde $k \in \mathbb{Z}$, são as soluções da equação $e^{-y}(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)) = (5 - 2\sqrt{6})i$. Isso mostra que a equação (2.14) possui infinitas soluções em $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Algumas Aplicações

3.1 Reflexões de Espelhos

Sabemos que quando um raio luminoso incide em um espelho plano, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Tais ângulos são medidos a partir de uma reta que chamamos de *normal*. A normal é uma reta perpendicular ao espelho pelo ponto onde o raio de incidência ocorre. Nos perguntamos, então, como determinar, em relação a um dado sistema de coordenadas cartesianas, um ponto que seja simétrico em relação ao espelho como nos mostra a Figura 3.1. Veja também Figura 3.2.

Podemos resolver esse problema de várias maneiras diferentes. Uma delas é usando nossos conhecimentos de Geometria Analítica. Porém, iremos utilizar os números complexos para conseguir uma "fórmula" para o simétrico deste ponto dado.

Seja $z = x + iy$ um número complexo. Tal número, como já vimos, pode ser identificado em $\mathbb{R}^2$ como sendo o par ordenado (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Considere r como sendo a reta que passa pela origem e por z, e tenha direção $u = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Denotamos por z' o ponto em $\mathbb{R}^2$ simétrico a z em relação à reta r. Podemos girar esses objetos $-\theta$ em torno da origem e, portanto, a reta r coincidirá com o eixo dos

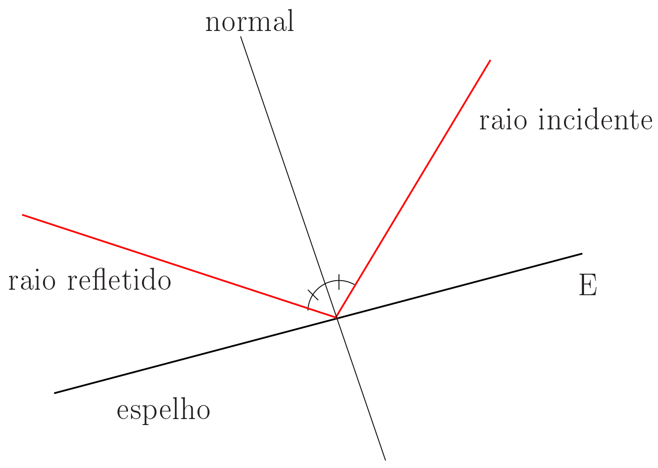

Figura 3.1: Reflexão de um raio em um espelho plano.

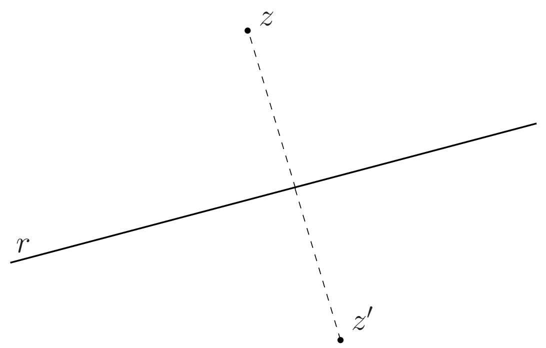

Figura 3.2: Ponto simétrico.

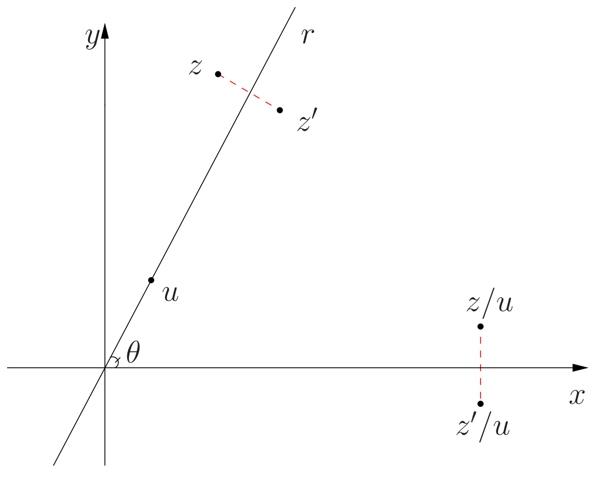

Figura 3.3: Giremos os objetos destacados até tocar o eixo Ox

x, como na Figura 3.3. Sendo assim, os pontos z e z' transformam-se em z/u e z'/u, já que girar um número complexo em um determinado ângulo significa multiplicá-lo pelo vetor unitário da direção orientada correspondente. Mas

$$\frac{z'}{u} = \overline{\left(\frac{z}{u}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{u}} = u\overline{z},$$

pois $u \cdot \overline{u} = |u|^2 = 1$. Logo, $z' = u^2\overline{z}$. Se consideramos os raios de incidência e de reflexão como retas, então dado um ponto z do raio de incidência, o simétrico de z em relação ao espelho será $z' = u^2\overline{z}$, desde que o espelho passe pela origem do sistema de coordenadas escolhido, como podemos ver na Figura 3.4.

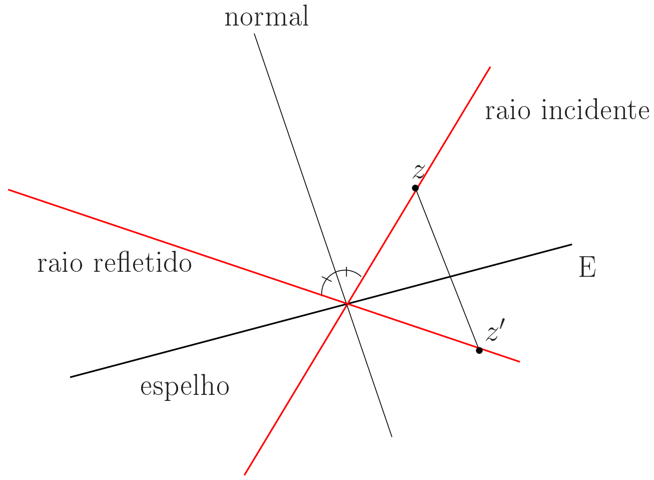

Figura 3.4: Como obter o simétrico z' de z?

3.2 O Teorema Fundamental da Álgebra

3.2.1 Comentários Iniciais e Preliminares

Nosso objetivo nessa seção é demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra utilizando apenas dois fatos de Análise Real que enunciaremos a seguir. Todo o resto da demonstração se concentra na manipulação das operações que envolvem números complexos e na utilização das fórmulas de Moivre e de Euler como vimos no Capítulo 2. Todos os resultados desta seção foram baseados em [14].

O tão famoso Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio em $\mathbb{C}$ tem uma raiz complexa. Inúmeras provas distintas podem ser encontradas para a demonstração desse resultado. Tradicionalmente, este teorema é provado em uma disciplina chamada *Variável Complexa* nos cursos de Bacharelado ou Licenciatura de Matemática ou Física. Nestes cursos, o Teorema Fundamental da Álgebra é provado como consequência do *Teorema de Liouville*, o qual é deduzido da *Fórmula Integral de Cauchy*, que para sua utilização é preciso conhecer ferramentas da *Integração Complexa*.

Da forma que demonstraremos aqui, é preciso que usemos dois resultados clássicos de Análise Real. O primeiro diz respeito ao *Teorema de Weierstrass* que dá condições suficientes sobre o domínio de uma função contínua para ela seja possua um mínimo naquele conjunto.

Vamos mostrar alguns fatos que facilitarão a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Seja $P(x) = ax + b$ um polinômio de primeiro grau, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sabemos que o gráfico de P é uma reta e que P é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$. Logo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty, \text{ se } a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \mp\infty, \text{ se } a < 0. \tag{3.1}$$

Agora se $P(x) = ax^2 + bx + c$ é um polinômio de segundo grau, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então o gráfico de P é uma parábola com concavidade voltada para cima se $a > 0$ e com a concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Logo,

$$\lim_{|x|\to\infty} P(x) = +\infty, \text{ se } a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|x|\to\infty} P(x) = -\infty, \text{ se } a < 0.$$

Mais geralmente, podemos considerar o polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Daí, podemos escrever

$$P(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right)$$

e desde que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = 0$ segue (3.1), onde o sinal do resultado do limite depende do sinal de a_n e se n é par ou ímpar. Sendo assim, para um polinômio real, temos quatro possibilidades:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty \ \text{e} \ \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

De uma forma mais resumida, podemos escrever

$$\lim_{|x|\to\infty} |P(x)| = +\infty.$$

Agora consideremos o caso complexo. Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$ um polinômio com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, onde $a_n \neq 0$. Assim, usando (2.4) e (2.5), temos que

$$|P(z)| \geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0| \geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \ldots - |a_1z| - |a_0|,$$

ou seja,

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots - |a_1||z| - |a_0|,$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Como $|z|$ é um número real não-negativo tal qual os números $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|$, segue que

$$\lim_{|z|\to\infty} |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots - |a_1||z| - |a_0| = +\infty,$$

pelo caso real já provado acima. Assim,

$$\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty. \tag{3.2}$$

Um outro resultado que usaremos adiante é o seguinte. Novamente consideremos um polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ em $\mathbb{C}$. Então, expandindo a potência $(z + z_0)^i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, vemos que $P(z + z_0)$ é um novo polinômio na variável z. Além disso, o termo independente desse polinômio é $P(z_0)$, já que se fizemos $z = 0$ em $P(z+z_0)$, obtemos $P(z_0)$. Por fim, $P(z+z_0)$ é um polinômio com coeficiente líder[1] igual a a_n que é um número não nulo. Por exemplo, considere o polinômio $P(z) = 8z^2 + 4z + 100$ e o ponto $z_0 = 5$. Então,

$$\begin{aligned} P(z+5) = 8(z+5)^2 + 4(z+5) + 100 &= 8(z^2 + 10z + 25) + 4(z+5) + 100 \\ &= 8z^2 + 80z + 200 + 4z + 20 + 100 \\ &= 8z^2 + 84z + 320. \end{aligned}$$

3.2.2 A demonstração do teorema

Teorema 1. (Teorema Fundamental da Álgebra) Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$ com grau ≥ 1. Então, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfazendo:

(a) $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$,

(b) $P(z_0) = 0$.

Demonstração: Seja n o grau de P e escreva $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, com $a_n \neq 0$. Temos por (2.4) e (2.5) que vale (3.2). Assim, pela definição de limite,

[1] Sejam $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ um polinômio qualquer. Para o maior índice i tal que $a_i \neq 0$, dizemos que a_i é o *coeficiente líder* do polinômio p.

$\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$, existe um raio $R > 0$ tal que

$$|P(z)| > |P(0)|$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > R$. Veja Figura 3.5. Agora, como a função $|P(z)|$

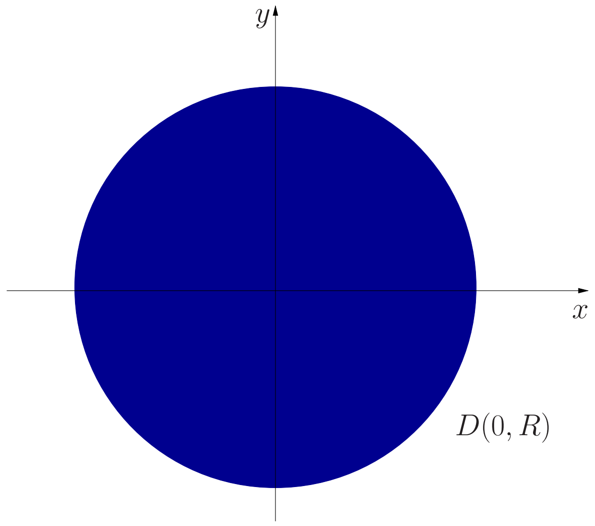

Figura 3.5: Disco de centro na origem e raio $R > 0$.

é contínua no disco $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, em azul na Figura 3.5 e, pelo Teorema de Weierstrass, a função $|P(z)|$ restrita a $D[0, R]$ assume mínimo em um ponto $z_0 \in D(0, R)$, ou seja,

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|,$$

para todo $z \in D[0, R]$. Porém, $|P(0)| \geq |P(z_0)|$, já que $0 \in D[0, R]$. Daí, temos três desigualdades:

$$|P(z)| \geq |P(z_0)| \tag{3.3}$$

para todo $z \in D[0, R]$,

$$|P(z)| > |P(0)| \tag{3.4}$$

sempre que $|z| > R$ e

$$|P(0)| \geq |P(z_0)|. \tag{3.5}$$

Juntando as informações em (3.3), (3.4) e (3.5), temos que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Isto é, z_0 é um ponto de mínimo absoluto de $|P(z)|$. Isto finaliza a demonstração do item (a). Partimos, agora, para o item (b).

Como vimos na seção anterior, $p(z) = P(z + z_0)$ é um polinômio em z, com coeficiente líder igual a a_n e, portanto, de grau n. Também vimos que o termo independente de $p(z) = P(z + z_0)$ é $P(z_0) = p(0)$. Assim,

$$P(z + z_0) = P(z_0) + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n, \tag{3.6}$$

com $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ e $b_n = a_n$. Com isso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $P(z_0)$ é assumido quando $z = 0$, ou seja, podemos assumir que $z_0 = 0$ e, assim teremos

$$|P(z)|^2 \geq |P(0)|^2, \tag{3.7}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Agora, como $b_n = a_n \neq 0$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ o menor número tal que o coeficiente b_k de z^k é diferente de zero. Então, de (3.6), podemos escrever

$$P(z) = P(0) + z^k Q(z), \tag{3.8}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, onde Q é um polinômio tal que $Q(0) = b_k \neq 0$. Considere $S^1 := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$. Então, para cada $r \geq 0$ e $w \in S^1$, temos por (3.7) que

$$|P(rw)|^2 \geq |P(0)|^2.$$

Por (3.8), segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq |P(rw)|^2 - |P(0)|^2 &= |P(0) + r^k w^k Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 \\ &= [P(0) + r^k w^k Q(rw)]\overline{[P(0) + r^k w^k Q(rw)]} - |P(0)|^2 \end{aligned}$$

Simplificando, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq |P(rw)|^2 - |P(0)|^2 &= [P(0) + r^k w^k Q(rw)][\overline{P(0)} + \overline{r^k w^k Q(rw)}] - |P(0)|^2 \\ &= \overline{\overline{P(0)} r^k w^k Q(rw)} + \overline{P(0)} r^k w^k Q(rw) + r^{2k} |Q(rw)|^2, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{P(0)} r^k w^k Q(rw)) + r^{2k} |Q(rw)|^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$2r^k\,\mathrm{Re}(\overline{P(0)} w^k Q(rw)) + r^{2k} |Q(rw)|^2 \geq 0,$$

para todo $r > 0$ e $w \in S^1$. Dividindo a última expressão por $r^k > 0$, temos que

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{P(0)} w^k Q(rw)) + r^k |Q(rw)|^2 \geq 0, \tag{3.9}$$

para cada $r > 0$. Mas a expressão do lado esquerdo de (3.9) é uma função contínua em $r \in [0, +\infty)$. Portanto, em $r = 0$, continuamos tendo a desigualdade

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{P(0)} w^k Q(0)) \geq 0, \tag{3.10}$$

para todo $w \in S^1$. Vamos provar que $P(0) = 0$. Escreva $w \in S^1$ como

$$w = \cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta,$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. Então, pela Fórmula de Moivre (veja Proposição 2 do Capítulo 2), temos que

$$w^k = \cos(k\theta) + i\,\mathrm{sen}(k\theta), \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Assim, se $\theta = 0$, temos que $w^k = 1$ e, portanto, $2\,\mathrm{Re}(\overline{P(0)}Q(0)) \geq 0$. Isto quer dizer que $2\,\mathrm{Re}(a+ib) \geq 0$, ou seja, que $2a \geq 0$ e, então, $a \geq 0$. Agora, se $\theta = \frac{-\pi}{2k}$, então $w^k = -i$, donde $2\,\mathrm{Re}(-i\overline{P(0)}Q(0)) \geq 0$. Com isso, $2\,\mathrm{Re}((-i)(a+ib) \geq 0$ e isto implica que $2b \geq 0$, isto é, $b \geq 0$.

Além dessas duas informações, temos que se $\theta = \frac{-\pi}{k}$, então $w^k = -1$. Logo, $2\,\mathrm{Re}(-\overline{P(0)}Q(0)) \geq 0$, isto é, $-2a \geq 0$ e, então, $-a \geq 0$. Agora, se $\theta = \frac{-3\pi}{2k}$, então $w^k = i$ e isto acarreta que $2\,\mathrm{Re}(i\overline{P(0)}Q(0)) \geq 0$ e, portanto, $-b \geq 0$. Podemos, portanto, concluir que $a + ib = 0$ e, então, $P(z_0) = P(0) = 0$, já que $Q(0) = b_k \neq 0$.

■

3.3 Polinômios e Raízes Conjugadas

Suponha que $P(z)$ seja um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais e considere a equação polinomial

$$P(z) = 0.$$

Como $P(z)$ é um polinômio, podemos escrever

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \tag{3.11}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_n \neq 0$ e z é uma variável real ou complexa. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz complexa de (3.11), então

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n = 0. \tag{3.12}$$

Provemos que $\overline{z_0} \in \mathbb{C}$ também é uma solução (complexa) de (3.11). De fato, (3.12) implica que

$$\overline{a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_n z_0^n} = \overline{0} = 0,$$

usando o item (v) da Proposição 3. Agora, usando o item (i), e em seguida os itens (ii) e (v), obtemos que

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_2 z_0^2} + \ldots + \overline{a_n z_0^n} = 0$$

e isto implica que

$$a_0 + a_1 \overline{z_0} + a_2 (\overline{z_0})^2 + \ldots + a_n (\overline{z_0})^n = 0,$$

ou seja, $\overline{z_0} \in \mathbb{C}$ é tal que $P(\overline{z_0}) = 0$. Isto quer dizer que $\overline{z_0}$ é uma outra solução da equação polinomial (3.11).

Agora, consideremos a recíproca. Será que podemos afirmar que, se um polinômio $P(z)$ com coeficientes complexos possuir todas as suas raízes aos pares conjugados, isto é, se $z_0 \in \mathbb{C}$ é raiz de $P(z)$ então $\overline{z_0}$ também o é, então seus coeficientes são reais?

Considere uma equação polinomial como em (3.12) e suponha que todas as suas raízes venham aos pares conjugados. Isto inclui o caso de pelo menos uma dessas raízes ser real já que o conjugado de um número real é ele mesmo. Como $a_n \neq 0$, podemos considerar a equação (3.12) como tendo o seguinte aspecto

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_{n-1} + z^n = 0, \tag{3.13}$$

onde $b_0 = \frac{a_0}{a_n}, b_1 = \frac{a_1}{a_n}, \ldots, b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja, podemos considerar, sem perda de generalidade, que o coeficiente que acompanha o termo de maior grau é 1 na equação polinomial considerada. Agora se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são as n raízes da equação (3.13), podemos escrever

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \tag{3.14}$$

Cada vez que $w \in \mathbb{C}$ é uma solução complexa de (3.13), o conjugado $\overline{w} \in \mathbb{C}$ também o é. Além disso, usando os resultados que vimos na Proposição 3, temos que

$$\begin{aligned} (z - w)(z - \overline{w}) &= z^2 - z\overline{w} - zw + w \cdot \overline{w} \\ &= z^2 - (w + \overline{w})z + |w|^2 \\ &= z^2 - 2\,\mathrm{Re}(w)z + |w|^2 \end{aligned}$$

é um polinômio de grau 2 com coeficientes reais. Portanto, $P(z)$ pode ser escrito como um produto de polinômios cujos fatores são desse tipo ou polinômios do tipo $(z - x_0)$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$, caso a raiz já seja real. Todos esses polinômios possuem coeficientes reais, o que responde afirmativamente a pergunta feita anteriormente sobre a reciprocidade do resultado inicial da seção.

3.3.1 Outros Contextos onde Surgem os Números Complexos

Os números complexos surgem em diversos contextos do mundo real. Por exemplo, eles são muito úteis na Aerodinâmica. Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, deduziu uma fórmula envolvendo a exponencial complexa, que permitiu calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do vôo de um avião. Os números complexos permitiram uma explicação matemática para o vôo. Daí, em diante, o progresso aeronáutico alavancou (veja mais detalhes em [2]).

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda dos números complexos. Grandezas como a Impedância (em ohms) e a Potência Aparente (em volt-ampère) são exemplos de quantidades complexas.

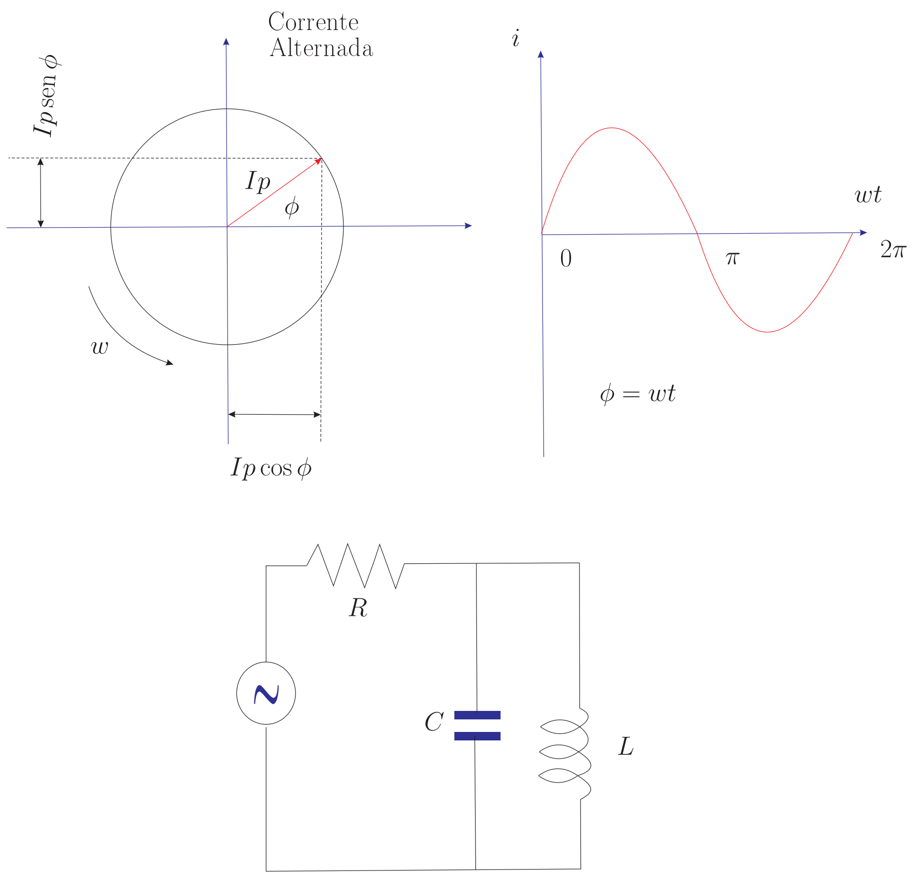

Figura 3.6: Circuito de Corrente Alternada

A impedância é o número complexo $Z = R + jX$, ou na forma polar $Z = |Z|(\cos\phi + j\mathrm{sen}\phi)$, onde $j^2 = -1$ e ϕ é o ângulo (argumento) de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, $|Z|$ é o módulo, R é a resistência elétrica (em ohm) e X é a resultante (em ohm) das reatâncias indutivas e capacitivas do circuito. Na Física e na Engenharia é usado, como número imaginário, o j no lugar do i para evitar confusão com o i, que simboliza a corrente elétrica. A potência aparente (em volt-ampère) é o número complexo $P = P_r + jP_x$, ou, $P = |P|(\cos\phi + j\mathrm{sen}\phi)$, onde $|P|$ é o módulo, ϕ é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, P_r é a potência real ou ativa (em watt), P_x é a potência reativa (em volt-ampère reativo).

O valor do $\cos\phi$ é chamado de *fator de potência*. Ele indica a eficiência com a qual a energia está sendo usada. Um alto fator de potência indica uma eficiência alta e, inversamente, um fator de potência baixo indica baixa eficiência. Um baixo fator de potência indica que você não está aproveitando plenamente a energia. O fator de potência é determinado pelo tipo de carga ligada ao sistema elétrico, que pode ser: Resistiva, Indutiva ou Capacitiva. É possível corrigir o fator de potência. Essa prática é conhecida como *correção do fator de potência* e é conseguida mediante o acoplamento de bancos de capacitores, com uma potência reativa contrária ao da carga, tentando ao máximo anular essa componente. A principal vantagem em corrigir o fator de potência é a economia que gera na conta de energia elétrica, além de evitar multas.

Os procedimentos (algoritmos) recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criam, por muitas vezes, figuras invariantes por escala denominadas *fractais*. Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para descrever as formas irregulares da superfície da terra, modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis, de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica, etc. Por exemplo, podemos iniciar o procedimento com um quadrado de lado L. Em seguida, dividimos seus lados em 3 partes iguais, obtendo 9 quadrados de lados $L/3$. Retiramos o quadrado central, repetimos o processo em cada quadrado restante e assim por diante. Obtemos, então, o quadrado de Sierpinski, como nos mostra a Figura 3.7.

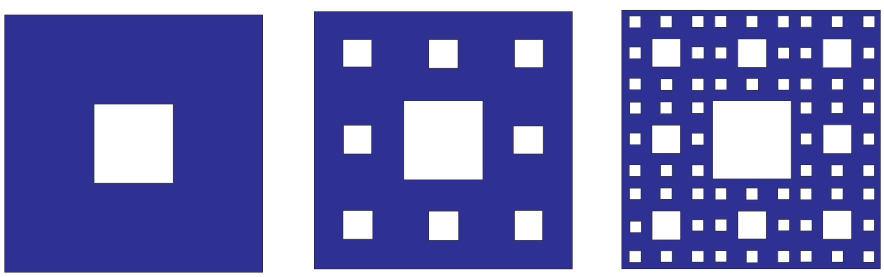

Figura 3.7: O quadrado de Sierpinski.

Para finalizar, podemos dizer que os números complexos aparecem de maneira significativa nos diversos ramos da Matemática e em outras ciências.

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, Ed. Mcgraw-Hill, 1979.

[2] Ávila, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*, LTC, Rio de Janeiro, 2003.

[3] Carneiro, J. P. Q., *A geometria e o ensino dos números complexos*, RPM 55.

[4] Carneiro, J. P. Q. e Lino, P. S. C., *Reflexões em espelhos usando números complexos*, RPM 76.

[5] Carneiro, J. P. Q., *Por que* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$*?*, RPM 77.

[6] Carmo, M.P., Morgado, A. C., Wagner E., *Trigonometria - Números Complexos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1992.

[7] Churchill, R. V., *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, Ed. Mcgraw-Hill, 1975.

[8] Figueiredo, D. G., *Análise na Reta*, LTC, 1996

[9] Gamelin, T. W., *Complex Analysis (Undergraduate Texts in Mathematics)*, Springer, 2001.

[10] Gardi, G. G., *O Romance das Equações Algébricas*, Makron Books, 1997.

[11] Gomes, C. A., *Pode um seno ser maior do que* 1*?*, RPM 81.

[12] Lima, E. L., *Um curso de Análise, Vol. 1*, Coleção Projeto Euclides, 2011.

[13] Marsden, J.E., Hoffman, M.J. *Basic Complex Analysis*, W.H. Freeman, New York, 1999.

[14] Oliveira, O.R.B., *The fundamental theorem of algebra: an elementary and direct proof*, Math. Intelligencer **33** no. 2 (2011).