

## ESCHER E A DIVISÃO REGULAR DO PLANO

FATIMA TACORONTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

Catálogo na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

t119e Tacoronte, Fatima  
Escher e a divisão regular do plano / Fatima  
Tacoronte. São Paulo: [s.n.], 2021.  
103 f.

Orientador: Leandro Albino Mosca Rodrigues

Dissertação (Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal  
de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,  
IFSP, 2021.

1. Escher. 2. Isometrias. 3. Tesselações. 4.  
Geometria. 5. Arte. I. Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II.  
Título.

CDD 510

**FATIMA TACORONTE**

## **ESCHER E A DIVISÃO REGULAR DO PLANO**

Dissertação de mestrado apresentada em 29 de Janeiro de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

---

Orientador e Presidente da Banca:  
Prof. Me. Leandro Albino Mosca  
Rodrigues  
IFSP – Câmpus São Paulo

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Barbara Corominas  
Valério  
USP – São Paulo

---

Prof. Dr. Henrique Marins de  
Carvalho  
IFSP – Câmpus São Paulo

São Paulo, 29 de Janeiro de 2021.

*"Nas minhas impressões tento  
mostrar que vivemos em um  
mundo bonito e ordenado e  
não em um caos sem normas,  
como às vezes parecemos."*

*M.C.Escher*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir essa realização que se iniciou nas tentativas do ENA (Exame Nacional de Acesso), depois nas conclusões das disciplinas e na aprovação do ENQ (Exame Nacional de Qualificação) e por fim na elaboração da dissertação.

Aos idealizadores do PROFMAT por tornarem possível aos professores das redes públicas terem acesso a um mestrado de excelência.

A minha mãe Valentina pelo exemplo de força e caráter, meu padrasto José Bento pela bondade e paciência, minha filha Bianca pela inspiração e em especial a meu filho José Otávio e meu esposo Janderson por serem meus maiores incentivadores.

Ao meu orientador Mestre Leandro Albino Mosca Rodrigues, pela paciência e ajuda imprescindíveis para este trabalho e pelas aulas ministradas juntamente com o Mestre Emiliano Augusto Chagas, de forma magistral.

Às Mestras Valeria Ostete Jannis Luchetta, Gabriela Cotrim de Moraes, Flavia Milo dos Santos e Monica Helena Ribeiro Luiz, pela representatividade e por serem um exemplo de determinação e prosperidade.

Aos Mestres Marco Aurélio Granero Santos e Luciano Aparecido Magrini pelas aulas ministradas, pela atenção e pelo apoio à continuidade dos estudos, aos Mestres Amari Goulart e Lucas Casanova Silva, que apesar do breve contato, me auxiliariam no aprendizado do curso.

Ao Mestre Rogério Ferreira da Fonseca que antes do início do curso me incentivou a não desistir passando orientações importantes sobre a melhor forma de estudar para o PROFMAT, e depois ao longo do curso e ao ministrar a disciplina de Tópicos da História da Matemática, sempre com palavras de apoio e respeito aos meus esforços.

E em especial ao Mestre Henrique Marins de Carvalho, que ministrou as disciplinas de Tópicos da História da Matemática, Números e Funções, Resolução de Problemas e Geometria Analítica de forma eloquente e esclarecedora, tornado possível para mim a conclusão deste curso, sendo um exemplo de humildade e sabedoria, uma referência que estará sempre em minha memória na busca de ser uma professora melhor para meus alunos.

Agradeço também pelas excelentes aulas sobre Tópicos da História da Matemática que me inspiram a pensar no tema desta dissertação relacionando a Arte e a Matemática.

Também não poderia deixar de agradecer em especial pelas aulas do curso de resolução de problemas, ministradas pelos Mestres Henrique Marins de Carvalho e Lucas Casanova Silva, que foram fundamentais para minha aprovação no ENQ (Exame Nacional de Qualificação).

Aos colegas do curso que por motivos diversos não puderam concluí-lo, mas que sempre tiveram palavras de incentivo e disposição em ajudar: Ailton Santos Valério, Bárbara Santana Sander, Emivaldo de Oliveira, Haile Guilherme do Nascimento, João Matias Santos e Ricardo Aparecido Pereira.

Aos colegas que chegaram ao final dessa jornada, serei eternamente grata por toda a ajuda, as explicações, a paciência, a troca de experiências e a motivação: Bruno Pavani Azevedo, Cristiane Silva Santos Medeiros, Helaine Pereira da Silva, Jessica Leal Joves do Reis, João Alves, Raquel Guimarães de Medeiros, Sandro Yoshio Kuriyama, Vitor Capparelli Silveira de Faria e Augusto Ribeiro de Almeida, que chegou no segundo ano do curso, mas que se tornou parte do grupo.

Aos professores e coordenadores da Escola Estadual Dom Camilo Maria Cavalheiro e da Escola Municipal Brigadeiro Haroldo Veloso pela compreensão e incentivo.

A todos sou muito grata.

## RESUMO

Neste trabalho relacionamos a Arte e a Matemática, através de três obras específicas do artista Maurits Cornelis Escher sobre a divisão regular do plano. Para melhor compreensão do artista, descrevemos fatos importantes de sua vida e as fases de sua obra. Relacionamos os principais temas da geometria plana e da geometria das transformações como subsídio para elaboração de futuros trabalhos com discentes. Descrevemos características das tesselações, com foco nas regulares, por fim fazemos uma análise usando às isometrias e tesselações de três obras de Escher mostrando que apesar de não ter domínio na Matemática, através da Arte Escher desvendou os mistérios de temas rítmicos em superfícies planas possibilitando a criação de obras primas, que fascinam o espectador.

Palavras-chave: Escher, Isometrias, Tesselações, Geometria, Arte.

## **ABSTRACT**

In this work we relate art and mathematics, through three specific works by the artist Maurits Cornelis Escher on the regular division of the plan. For a better understanding of the artist, we describe important facts of his life and the phases of his work. We relate the main themes of flat geometry and geometry of transformations as a support for the elaboration of future works with students. We describe characteristics of the tessellations, focusing on the regular, finally we make an analysis using the isometry and tessellations of three works of Escher showing that despite having no mastery in Mathematics through Art, Escher uncover the mysteries of rhythmic themes on flat surfaces enabling the creation of masterpieces, which fascinate the viewer.

Keywords: Escher, Isometry, Tesselacões, Geometry, Art.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Escher em 1913 .....	16
<b>Figura 2:</b> Samuel Jessurun De Mesquita .....	17
<b>Figura 3:</b> Escher e sua esposa Jetta .....	18
<b>Figura 4:</b> Escher nos anos 30 .....	18
<b>Figura 5:</b> Escher e a abstração .....	19
<b>Figura 6:</b> Escher observando seu reflexo em um espelho .....	20
<b>Figura 7:</b> Escher nos anos 70 .....	21
<b>Figura 8:</b> O livro Escrito por Bruno Ernest Sobre Escher em 1978 e seu autor .....	22
<b>Figura 9:</b> Castrovatva (1930), uma grande litografia. ....	23
<b>Figura 10:</b> Metamorfose (1940).....	24
<b>Figura 11:</b> Em cima e em baixo (1947) .....	24
<b>Figura 12:</b> Galeria De Arte (1956) .....	25
<b>Figura 13:</b> Ponto, Reta e Plano .....	26
<b>Figura 14:</b> Reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ .....	26
<b>Figura 15:</b> Plano $\alpha$ .....	27
<b>Figura 16:</b> Pontos Colineares .....	27
<b>Figura 17:</b> Segmento $\overline{AB}$ .....	27
<b>Figura 18:</b> Semirreta $\overrightarrow{AB}$ .....	27
<b>Figura 19:</b> Ângulo $A\hat{O}B$ .....	29
<b>Figura 20:</b> Ângulos Opostos Pelo Vértice .....	29
<b>Figura 21:</b> Corda, Diâmetro e Raio.....	31
<b>Figura 22:</b> Arco menor e Arco Maior.....	31
<b>Figura 23:</b> Semicircunferência.....	32
<b>Figura 24:</b> Retas Concorrentes .....	32
<b>Figura 25:</b> Retas Perpendiculares .....	33
<b>Figura 26:</b> Mediatriz.....	33
<b>Figura 27:</b> Retas Paralelas .....	34
<b>Figura 28:</b> Reta Transversal .....	34
<b>Figura 29:</b> Teorema de Tales .....	35
<b>Figura 30:</b> Triângulo .....	36

<b>Figura 31:</b> Elementos do Triângulo .....	36
<b>Figura 32:</b> Ângulo externo do triângulo.....	37
<b>Figura 33:</b> Triângulos Congruentes .....	38
<b>Figura 34:</b> Caso LAL de Congruência de Triângulos.....	38
<b>Figura 35:</b> Caso ALA de Congruência de Triângulos .....	39
<b>Figura 36:</b> Caso LLL de Congruência de Triângulos .....	39
<b>Figura 37:</b> Caso LAA <sub>o</sub> de Congruência de Triângulos.....	40
<b>Figura 38:</b> Congruência de Triângulo Retângulo.....	40
<b>Figura 39:</b> Soma dos ângulos internos do triângulo .....	41
<b>Figura 40:</b> Teorema do ângulo externo .....	41
<b>Figura 41:</b> Semelhança de Triângulos com dois Ângulos Congruentes .....	42
<b>Figura 42:</b> Semelhança de Triângulos com dois Lados Proporcionais.....	43
<b>Figura 43:</b> Semelhança de Triângulos com três Lados Proporcionais.....	43
<b>Figura 44:</b> Arco Central .....	44
<b>Figura 45:</b> Medida do Ângulo Central.....	45
<b>Figura 46:</b> Semelhanças no triângulo retângulo .....	45
<b>Figura 47:</b> Elementos do Triângulo retângulo.....	46
<b>Figura 48:</b> Triângulo retângulo .....	47
<b>Figura 49:</b> Lei dos Senos no lado $\overline{BC}$ .....	47
<b>Figura 50:</b> Lei dos Senos nos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ .....	48
<b>Figura 51:</b> Lei dos Cossenos.....	49
<b>Figura 52:</b> Polígono.....	50
<b>Figura 53:</b> Elementos do Polígono.....	50
<b>Figura 54:</b> Polígono Côncavo e Convexo.....	51
<b>Figura 55:</b> Diagonais .....	52
<b>Figura 56:</b> Trapézio .....	53
<b>Figura 57:</b> Paralelogramo .....	53
<b>Figura 58:</b> Retângulo .....	54
<b>Figura 59:</b> Losango .....	54
<b>Figura 60:</b> Quadrado .....	54
<b>Figura 61:</b> Ângulos Opostos no Paralelogramo.....	55
<b>Figura 62:</b> Lados Opostos Congruentes no Paralelogramo.....	55
<b>Figura 63:</b> Diagonais no Paralelogramo .....	56
<b>Figura 64:</b> Diagonais no Retângulo .....	57
<b>Figura 65:</b> Diagonais no Losango Isometria .....	57

<b>Figura 66:</b> Diagonais no Quadrado Soma de pontos e vetor .....	58
<b>Figura 67:</b> Isometria.....	60
<b>Figura 68:</b> Soma de ponto e vetor .....	61
<b>Figura 69:</b> Paralelogramo formado pela Translação de dois Pontos Distintos .....	62
<b>Figura 70:</b> Reflexão do ponto p em relação ao ponto M.....	63
<b>Figura 71:</b> Reflexão da reta $\overline{PQ}$ em relação ao ponto M.....	64
<b>Figura 72:</b> Paralelogramo formado pela reflexão de dois pontos distintos .....	64
<b>Figura 73:</b> Translação formada pela composta de duas reflexões de pontos.....	65
<b>Figura 74:</b> Translação formada pela composta dos pontos médios de um triângulo .....	65
<b>Figura 75:</b> Rotação de centro $O$ e ângulo $\alpha$ .....	66
<b>Figura 76:</b> Rotação dos pontos p e q colineares e não colineares .....	67
<b>Figura 77:</b> Rotação de pontos não colineares.....	67
<b>Figura 78:</b> Arte japonesa De Hajime Ouchi's .....	68
<b>Figura 79:</b> Triângulo e hexágonos simétricos pela rotação .....	69
<b>Figura 80:</b> Translação obtida a partir da composição de duas rotações .....	69
<b>Figura 81:</b> Translação do vetor $\vec{v}$ .....	70
<b>Figura 82:</b> Rotações de ângulos com soma cônica a zero .....	70
<b>Figura 83:</b> Reflexão do ponto p em relação à reta m .....	71
<b>Figura 84:</b> Reflexão do segmento $\overline{PQ}$ em relação à reta m .....	72
<b>Figura 85:</b> Translação obtida pela composição de duas rotações .....	73
<b>Figura 86:</b> Rotação do ângulo central obtida pela composta da rotação de duas retas .....	74
<b>Figura 87:</b> Tesselação Simétrica (hexágono regular, quadrado, triângulo equilátero) .....	76
<b>Figura 88:</b> Simetrias do quadrado .....	76
<b>Figura 89:</b> Nós e vértices .....	77
<b>Figura 90:</b> Tesselação regular $\{3,6\}$ .....	78

<b>Figura 91:</b> Tesselações regulares .....	79
<b>Figura 92:</b> Tesselação regular $\{3,6\}$ .....	80
<b>Figura 93:</b> Tesselação regular $\{4,4\}$ .....	81
<b>Figura 94:</b> Pentágonos regulares ao redor de um vértice .....	81
<b>Figura 95:</b> Tesselação regular $\{6,3\}$ .....	82
<b>Figura 96:</b> Divisão regular de superfície com peixes de asas .....	84
<b>Figura 97:</b> Figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do triângulo equilátero .....	85
<b>Figura 98:</b> Tesselação formada a partir das rotações da figura base com peixes de asas.....	86
<b>Figura 99:</b> Malha hexagonal sobreposta à obra de Escher da divisão regular da superfície com peixes de asas .....	87
<b>Figura 100:</b> Translação obtida pela composição de duas rotações.....	87
<b>Figura 101:</b> Divisão regular de superfície com pássaros.....	89
<b>Figura 102:</b> Figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do quadrado.....	90
<b>Figura 103:</b> Translação horizontal da figura base do pássaro.....	91
<b>Figura 104:</b> Translação vertical da figura base do pássaro.....	91
<b>Figura 105:</b> Tesselação formada pelas translações horizontais e verticais.....	92
<b>Figura 106:</b> Malha quadriculada sobreposta a obra de Escher sobre a divisão regular da superfície com pássaros .....	93
<b>Figura 107:</b> Translação obtida pela composição de duas rotações.....	93
<b>Figura 108:</b> Divisão regular de superfície com peixes .....	94
<b>Figura 109:</b> Figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do quadrado.....	95
<b>Figura 110:</b> Rotação da figura base de $180^\circ$ .....	95
<b>Figura 111:</b> Reflexão em relação à reta $r$ .....	96
<b>Figura 112:</b> Tesselação obtida através da reflexão vertical e horizontal da figura base .....	96
<b>Figura 113:</b> Malha quadriculada sobreposta a obra de Escher sobre a divisão regular da superfície com peixes.....	97
<b>Figura 114 :</b> Translação obtida pela composição de duas rotações.....	97

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>1. O ARTISTA MAURITS CORNELIS ESCHER</b> .....	16
1.1 Um pouco sobre Escher .....	16
1.2 Fases da obra de Escher .....	22
<b>2. CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA PLANA</b> .....	26
2.1 Ponto, reta e plano .....	26
2.2 Ângulo .....	28
2.3 Circunferência .....	30
2.4 Paralelismo.....	32
2.5 Triângulos .....	36
2.6 Ângulos na Circunferência .....	44
2.7 Relações Métricas no triângulo retângulo.....	45
2.8 Seno, Cosseno e Tangente .....	47
2.9 Polígonos .....	50
2.10 Quadriláteros Notáveis .....	53
<b>3. GEOMETRIA DE TRANSFORMAÇÕES</b> .....	59
3.1 Transformação no plano.....	59
3.2 Isometria do plano .....	59
3.3 Translações .....	61
3.4 Reflexões em relação a um ponto .....	63
3.5 Rotações .....	66
3.6 Reflexão em relação a uma reta.....	71
<b>4. TESSELAÇÕES</b> .....	75
4.1 Definições.....	75
4.2 Elementos das Tesselações no plano .....	76
4.3 Tesselações Regulares .....	77
<b>5. ANÁLISE OBRAS DE ESCHER</b> .....	83
5.1 Análise da obra de Escher sobre a divisão regular de superfície com peixes de asas .....	84

5.2 Análise da obra sobre a divisão regular de superfície com pássaros .....	89
5.3 Análise da obra sobre a divisão regular de superfície com peixes .....	94
<b>CONCLUSÃO</b> .....	99
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	101

## INTRODUÇÃO

"Ao confrontar, intensamente, os enigmas que nos rodeiam, e ao considerar e analisar as observações que fiz, acabei no domínio da matemática, embora não tenha efetivamente nenhuma formação nas ciências exatas, muitas vezes pareço ter mais em comum com matemáticos do que com os meus colegas artistas." (Maurits Cornelis Escher)

A Matemática é qualificada como uma forma de expressão natural à espécie humana que não difere em essência das linguagens artísticas, segundo a série Arte & Matemática <sup>1</sup>, criada pelo Professor Luiz Barco, nas mais remotas eras, os homens se defrontavam com o caos do mundo e pouco a pouco, foram observando a ordem que havia na natureza.

A arte suscita o pensamento, faz abstrair, essa abstração é o caminho com que o cientista constrói a matemática. Essa beleza intrínseca no fazer científico é muito semelhante a beleza ao admirar uma obra de arte. Ambas deram respostas a problemas que o mundo impõe, respostas construídas com abstração, a beleza intrínseca do homem. (Barco, 2001)

Segundo Barco (2001), a Matemática que fazemos na escola é a parte técnica, mas a Matemática sobretudo é resolver os problemas da natureza de forma lógica, os artistas pintam e os matemáticos dão respostas lógicas e coerentes, todas elas permeadas pela estética.

Conforme concluiu Barco (2001), Escher pintou paradoxos matemáticos e é uma referência importante em muitos trabalhos científicos. Escher se interessou desde cedo por temas rítmicos em superfícies planas e só encontrou a solução para seu trabalho depois de visitar Alhambra, no sul da Espanha, onde copiou os mosaicos feitos durante a invasão árabe.

O padrão Escher é encontrado na natureza, na casca da árvore, na celulose, na folha de papel no livro. Repetições das formas em escala macro e microscópica, repetições das formas na natureza. Na ciência a repetição significa um padrão, inferimos conclusões pelo comportamento repetitivo dos eventos. Toda sequência de padrões de Escher pode ser

---

<sup>1</sup> Link da série: <http://www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html>, (Laboratórios da Faculdade de Educação da USP, da tv cultura de 2001).

descrita matematicamente, e a composição dessas formas ou as equações matemáticas que acabam regendo a maneira como as moléculas se agrupam na natureza. (Toma, 2001)

O primeiro capítulo descreve alguns fatos importantes sobre a vida do artista Maurits Cornelis Escher e as fases de sua obra, usando como referência principal o livro *Espelho Mágico* do matemático Bruno Ernst .

O segundo capítulo aborda os conceitos básicos da geometria Eucliana plana, tendo como referência principal os livros *Fundamentos de Matemática elementar* de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu e o volume de *Geometria da coleção PROFMAT* de Antonio Caminha Muniz Neto.

O terceiro capítulo aborda uma parte específica da geometria das transformações, com ênfase nas três obras de Escher analisadas nesta dissertação. Nesta abordagem foram usados como referência principal os livros *Um estudo Geométrico das transformações elementares* de Sérgio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão e *Isometrias* do Elon Lages de Lima.

O quarto capítulo aborda também uma parte específica das tesselações, as regulares, que são fruto do estudo desta dissertação nas obras de Escher. As principais referências foram as dissertações do PROFMAT de Maria Robevânia Leitão, *Tesselações no ensino da geometria Euclidiana*, (2015) e José Bernardo de Araújo Torres, *Tesselações planas: Apresentar as tesselações do plano e algumas aplicações nas obras de Maurits Cornelis Escher*, (2017).

O quinto e último capítulo faz um estudo sobre três obras de Escher, no aspecto das isomorfias e tesselações. As obras foram escolhidas especificamente por representarem sequencias de padrões que cobrem perfeitamente o plano e que podem ser representadas matematicamente, unindo a Arte e a Matemática.



## 1 O ARTISTA MAURITS CORNELIS ESCHER

### 1.1 Um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher foi um famoso artista gráfico do mundo moderno, dedicando sua vida às artes gráficas. Escher deixou uma produção de 448 litografias<sup>2</sup> e xilogravuras<sup>3</sup> e mais de 2 mil desenhos e esboços, além de ter ilustrado livros, tapeçarias, selos e murais.

Segundo sua bibliografia retirada do site oficial de Escher (<https://mcescher.com/about/biography/>), e o livro “*O espelho mágico de M. C. Escher*” de Bruno Ernst de 1978, Escher nasceu em Leeuwarden, na Holanda, em 17 de junho 1898, filho de George Arnold Escher, engenheiro civil e chefe de um departamento de engenharia do governo, e de sua segunda esposa, Sara Gleichman. Escher era o mais novo dos três irmãos. Em 1903, a família mudou-se para Amhelm, onde Maurits cursou o primário e o secundário, fases da sua infância e adolescência.

Figura 1: Escher em 1913



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

---

<sup>2</sup> Arte de reproduzir em papel, por meio de uma prensa de pedra calcária pintada

<sup>3</sup> Técnica que consiste em realizar gravuras em madeiras, a qual se deixa em relevo a parte que pretende fazer a reprodução do desenho

Segundo Ernest (1978), na escola Escher se interessava mais pelas aulas de desenho, sendo reprovado por duas vezes no exame final do curso secundário. Seu professor de Arte, F.W. van der Haagen ficou decepcionado pois o aluno possuía um talento acima do normal.

O pai de Escher, observando o talento do filho e simpatizando-se pela área de exatas, deduziu que o melhor curso seria o de Arquitetura. Sendo assim, em 1919, Escher foi para Haarlem para estudar na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas. Em pouco tempo, um professor de técnicas de gravuras artísticas, Samuel Jesserun de Mesquita (figura 2), observando o talento de Escher, convenceu seu pai a mudar o curso do filho de Arquitetura para o de Artes Decorativas, passando a ser seu principal professor. Nessa época, Escher começou a dominar a técnica de xilogravura. Dois anos depois Escher deixou a escola de Arte, pois havia adquirido uma boa base em desenho e domínio da xilogravura. Escher manteve contato com Mesquita, até sua morte, enviando seus trabalhos para que ele opinasse.

Figura 2 : Samuel Jesserun de Mesquita



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Segundo Ernest (1978) Escher viajou pela Itália central, com amigos, passando uma curta temporada na Espanha e depois passou o inverno de 1922 e a primavera de 1923 em Siena, na Itália. Escher também viajou pelo sul da Itália, onde havia arquitetura com elementos romanos, gregos e sarracenos despertando seu interesse.

Durante essa viagem que ele conheceu a jovem Jetta Umiker em uma pensão no sul da Itália, com quem casou-se em 1924.

Figura 3: Escher e sua esposa Jetta



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Após o casamento foram morar em Roma, onde havia um quarto preparado para estúdio e em 1926 nasceu seu primeiro filho Giorgio Arnaldo Escher.

Na primavera faziam viagens por outras cidades na companhia de outros pintores, em busca de novas impressões, vivendo algumas aventuras e retornando com centenas de desenhos.

Por volta de 1930, Escher ainda era desconhecido. Ele organizava pequenas exposições e ilustrava alguns livros, sendo em grande parte dependente dos pais até meados de 1951, onde parte de seus rendimentos eram obtidos pela venda de gravuras.

Figura 4: Escher nos anos 30



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

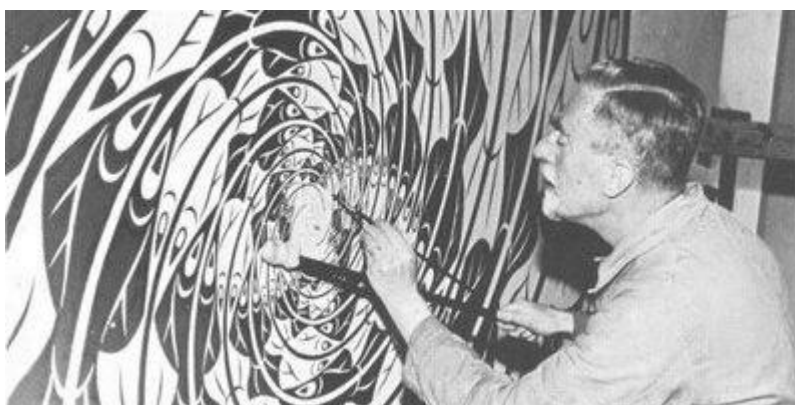
Segundo Ernest (1978) seu pai faleceu em 1939 e apesar de ter possibilitado o desenvolvimento de Escher, não pôde apreciar o valor de suas obras.

Em 1935 o clima político fez Escher mudar para a Suíça, onde não havia inspiração para o artista na paisagem local, e um ano depois ele resolveu viajar de navio com sua esposa pela Europa, observando os ornamentos mouriscos no sul da Espanha. Escher copiou os ornamentos de forma a descobrir os segredos da divisão regular do plano, a translação, a rotação, a reflexão e a translação refletida, obtendo o conhecimento através do estudo sistemático e da experimentação.

Tal contato de Escher com a arte árabe está na base de seu interesse e da sua paixão pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, repetem-se e refletem a partir das pavimentações. Assim, as obras de Escher consistiam também em preencher as superfícies e substituir as figuras abstrato-geométricas comuns na arte árabe, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza (apesar de altamente estilizadas), como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc. E esse estilo caracteriza as obras de Escher. (ESQUERDO, 2018, p.30)

Em 1937 mudou-se para Bélgica, pois quando a Segunda Guerra Mundial começou o ambiente ficou difícil para Escher. Nessa época ele mudou o foco de sua obra, inspirando-se em arabescos mouros, que ele havia observado em suas viagens pela Espanha, direcionando suas gravuras para a abstração conforme figura 5.

Figura 5: Escher e a abstração



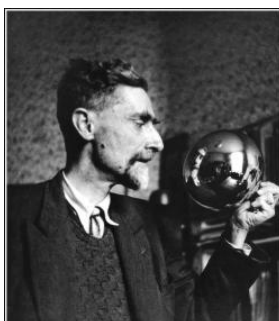
Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Em muitas obras há o interesse pelos sólidos geométricos, pois o artista admirava as formas cristalográficas naturais, possivelmente influenciado por seu

irmão que era professor de Geologia e escreveu um manual sobre Cristalografia e Mineralogia.

Escher despertou a atenção por parte de muitos matemáticos, cientistas e cristalógrafos. Analisavam suas obras e seu perfeccionismo, mas somente quando o matemático Bruno Ernest começou a trocar correspondências com Escher é que ele passou a olhar essa matemática presente em sua obra, a partir do contato de Escher e outros matemáticos, o artista passou a usar a matemática como ponto de partida nas obras com geometria hiperbólica conforme a figura 6.

Figura 6: Escher observando seu reflexo em um espelho



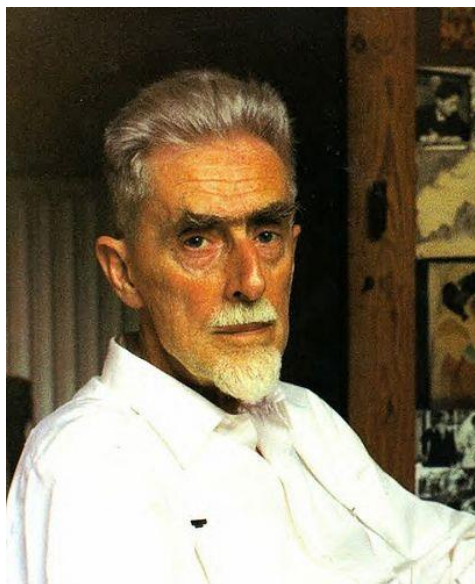
Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Em 1941 mudou-se para Holanda, onde seus filhos cresceram e encontraram seus próprios caminhos. Escher fez ainda várias viagens, porém não encontrou novas inspirações.

Embora não se tenha qualquer formação matemática, Escher utilizou a criatividade e o dinamismo atrelado à Matemática no processo de criação de suas obras de gravuras. Inclusive, o próprio Escher declarou que era inteiramente leigo no âmbito da Matemática e que ele considerava estranho o fato de seus trabalhos abordarem teorias matemáticas que ele desconhecia. São palavras do próprio Escher sobre seu conhecimento matemático, publicadas numa entrevista a Ernst: “Eu nem sequer tive um <suiciente> em Matemática. É esquisito que eu pareça abordar teorias matemáticas, sem que eu próprio as conheça. Não, na escola era um rapaz simpático e pateta. E então agora imaginar que matemáticos ilustram os seus livros com as minhas gravuras! E que eu me dou com toda esta gente erudita como um irmão e colega. Eles não podem imaginar de maneira alguma que eu não perceba nada do assunto. (ESQUERDO, 2018, p.32)

Em 1962 adoeceu e parou por um tempo seu trabalho, já em 1970 como mostra figura mudou-se para a Casa-de Rosa-Spieri em Lren, norte da Holanda, local para artistas idosos, onde faleceu dois anos depois.

Figura 7 : Escher nos anos 70



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

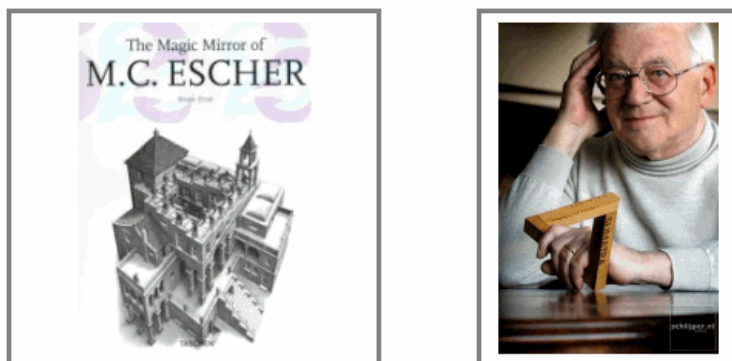
Segundo Esquerdo (2018), na sua dissertação, ao estudar as gravuras de Escher é possível observar três momentos de sua produção, que relacionam-se ao meio que ele estava inserido, e as influências científicas e artísticas da época.

Em um primeiro momento seu trabalho se caracterizava por paisagens que representavam os lugares por ele visitados em suas viagens.

Mudou-se devido à guerra, durante seu trabalho focou em gravuras abstratas e desenhos inspirados em arabescos mouros visualizados em suas viagens. Essas obras foram analisadas por matemáticos sem que Escher percebesse essa aproximação com a matemática.

Após o contato, através de correspondência, com o matemático Bruno Ernest conforme figura 8, Escher passou a olhar para os aspectos matemáticos de suas gravuras, e a partir daí, em um terceiro momento, passou a utilizar conceitos matemáticos para inspirar suas obras.

Figura 8: o livro escrito por Bruno Ernest sobre Escher em 1978 e seu autor



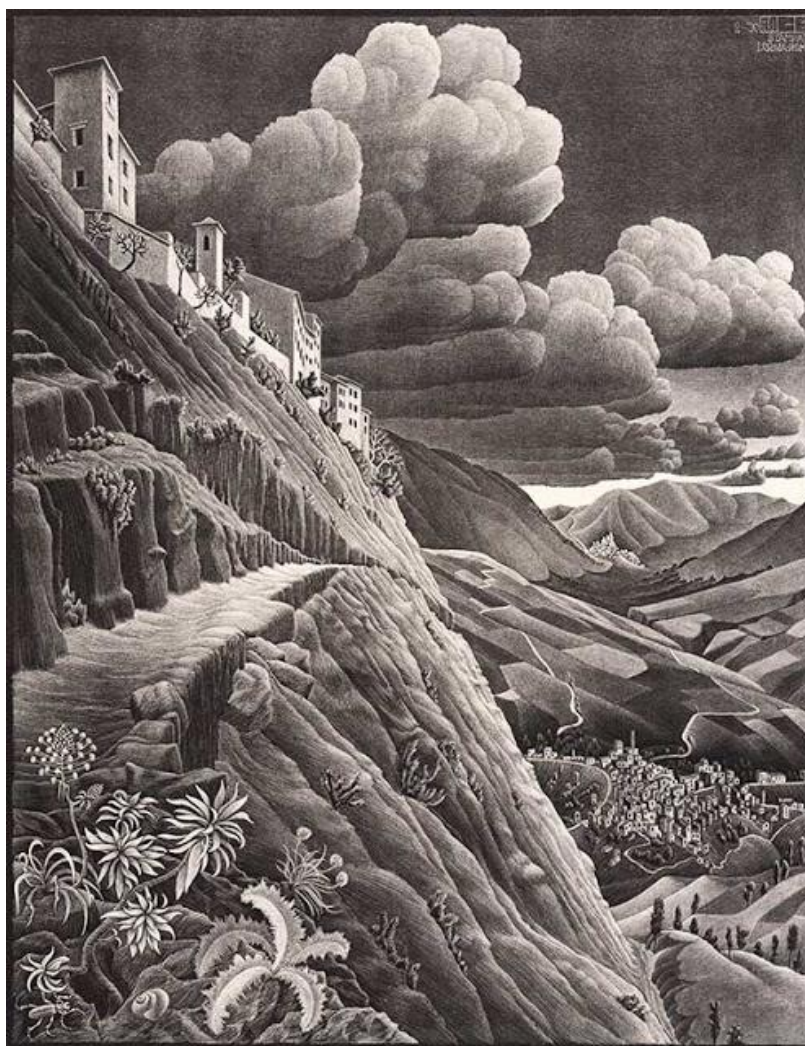
Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

A minha visita foi o início de uma longa amizade. Nas numerosas visitas e conversas que se seguiram, fui lentamente conduzido ao mundo imaginário de Escher, acerca do qual acabaria por escrever tantos artigos ao longo dos anos. Sentia-me sempre lisonjeado pelas reações, tais como “...não creio ter lido em lado algum algo tão autorizado acerca desta gravura(ou mesmo outra)” Referia-se a uma análise de Galeria de Arte que eu criticara no meu primeiro livro e que Escher, tal como eu, mais tarde, considerava a sua melhor obra . (ERNEST, 1978, p.6)

## 1.2 Fases da Obra de Escher

No livro O Espelho Mágico o matemático Bruno Ernest identifica 4 fases no trabalho de Escher. Na primeira fase que vai de 1922- 1937, Escher pintava paisagens do sul da Itália e regiões costeiras mediterrâneas, retratos, plantas e animais. O auge foi alcançado com *Castrovatva* (1930) conforme a figura 9, uma grande litografia.

Figura 9: Castrovatva (1930), uma grande litografia.



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Na segunda fase que vai de 1937-1945, Escher fazia gravuras sob influência da matemática, separadas por três temas: a estrutura do espaço, a composição de paisagens e a interpenetração de mundos diferentes e os sólidos matemáticos abstratos. Nesse período pintavam transformações graduais, bidimensionais e tridimensionais, havendo várias obras significantes, entre elas a Metamorfose 1940, conforme figura 10.



Figura 10: Metamorfose (1940)



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Na terceira fase que vai de 1946-1956, Escher pintou representações pictóricas da relação entre espaço e superfície, ressaltando a essência da representação, a perspectiva e as figuras impossíveis. Nesse período as gravuras estavam subordinadas a perspectivas, com pontos de vistas insólitos, havendo grandes pesquisas sobre as suas regras. O auge foi alcançado com a obra *Em cima e em baixo* 1947 conforme figura 11, onde além da relatividade dos pontos de fuga, são reproduzidos feixes de linhas paralelas com curvas convergentes.

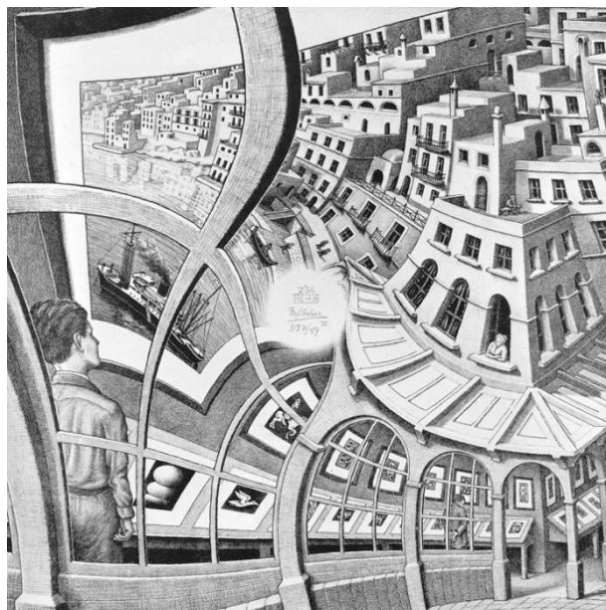
Figura 11: Em cima e em baixo (1947)



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

Na quarta fase que vai de 1956 -1970, pintou a estrutura da superfície, usando a metamorfose, os ciclos e a aproximação ao infinito. Nesse período foram produzidas as obras chamadas de figuras impossíveis, sendo a mais bem-sucedida, Galeria de Arte conforme figura 12, onde o próprio Escher reconhece que havia atingido os limites máximos do seu pensamento e representação.

Figura 12: Galeria de Arte(1956)



Fonte: <<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em julho 2019.

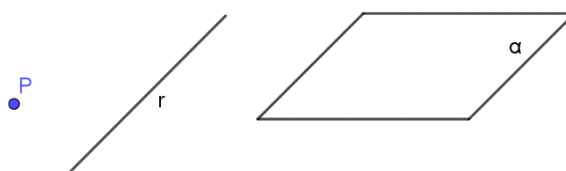
## 2.CONCEITOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Neste capítulo iremos rever alguns conceitos básicos da Geometria Euclidiana plana, tais como ponto, reta, plano, ângulos, circunferência, paralelismo, triângulos e suas propriedades, ângulos na circunferência, polígonos, quadriláteros notáveis e suas propriedades que serão úteis para o estudo das transformações geométricas no capítulo seguinte.

### 2.1 Ponto, reta e plano

Ponto, reta e plano são conceitos primitivos, que prescindem de definições formais.

Figura 13: Ponto P, reta r e plano  $\alpha$



Fonte: Autora (2020)

#### 2.1.1 Postulados

a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles. Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por  $\overleftrightarrow{AB}$ .

$$(A \neq B, A \in r, B \in r) \rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$$

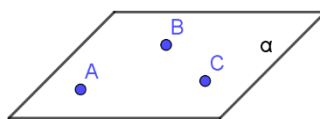
Figura 14: Reta  $r = \overleftrightarrow{AB}$



Fonte: Autora (2020)

b) Três pontos não colineares<sup>4</sup> determinam um único plano que passa por eles. Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano  $\alpha$  que indicamos por (A, B, C).

<sup>4</sup> Pontos colineares são pontos que pertencem a mesma reta.

FIGURA 15: PLANO  $\alpha$ 

Fonte: Autora (2020)

c) Quaisquer que sejam os pontos A, B e P, se P está entre A e B, então A, B e P são colineares.

Figura 16: Pontos Colineares



Fonte: Autora (2020)

### 2.1.2 Segmento de reta

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta. Assim, dados A e B,  $A \neq B$ , o segmento de reta  $\overline{AB}$  é o que segue:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X | X \text{ está entre } A \text{ e } B\}.$$

Figura17: Segmento  $\overline{AB}$ 

Fonte: Autora (2020)

### 2.1.3 Semirreta

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta  $\overline{AB}$  com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X | B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Figura 18: Semirreta  $\overrightarrow{AB}$ 

Fonte: Autora (2020)

### 2.1.4 Congruência de segmentos

Na geometria Euclidiana plana segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

A congruência de segmentos (símbolo  $\equiv$ ) satisfaz as propriedades:

- a) Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo, ou seja,  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$  ;
- b) Simétrica. Se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  , então  $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$  ;
- c) Transitiva. Se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$  , então  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ .

### 2.1.5 Distância

Distância: Uma função  $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma distância, se para todo  $A, B, C \in \mathbb{R}$  temos:

- a)  $d$  é Real, finita e não negativa,
- b)  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;
- c)  $d(A, B) = d(B, A)$ ;
- d)  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ .

### 2.1.6 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  a distância entre  $A$  e  $B$ ,  $d(A, B)$ , é a medida do comprimento  $\overline{AB}$  do segmento  $AB$ :  $d(A, B) = \overline{AB}$ .

### 2.1.7 Ponto médio de um segmento

Um ponto  $M$  é ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  se  $M$  está entre  $A$  e  $B$  e  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$  .

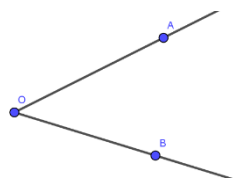
## 2.2 Ângulo

Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não colineares. Sendo  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  duas semirretas não colineares, dizemos que o ponto  $O$  é

o vértice do ângulo e as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  são os lados do ângulo. Indicamos o ângulo por  $A\hat{O}B$  ou  $\hat{O}$ . Assim temos:

$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

Figura 19: Ângulo  $A\hat{O}B$



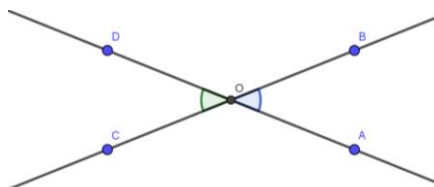
Fonte: Autora (2020)

### 2.2.1 Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

$A\hat{O}B$  e  $C\hat{O}D$  são o.p.v.

Figura 20 :Ângulos Opostos pelo Vértice



Fonte: Autora (2020)

### 2.2.2 Definição da função medida angular

A medida de um ângulo  $A\hat{O}B$ , indicada por  $m(A\hat{O}B)$ , é um número real positivo associado ao ângulo.

Dizemos que dois ângulos são congruentes se têm medidas iguais

$$A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D \leftrightarrow m(A\hat{O}B) \equiv m(C\hat{P}D)$$

### 2.2.3 Definição de Grau

Associamos a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa, dividindo uma circunferência de centro  $O$  em 360 arcos iguais e tomando pontos  $X$  e  $Y$ ,

extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida do ângulo  $X\hat{O}Y$  é de 1 grau, denotando por  $1^\circ$  e escrevendo  $m(X\hat{O}Y) = 1^\circ$ .

#### 2.2.4 Ângulos complementares e suplementares

Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é  $90^\circ$  e são suplementares se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ .

#### 2.2.5 Bissetriz de um ângulo

Uma semirreta  $\overrightarrow{OC}$  interna<sup>5</sup> a um ângulo  $A\hat{O}B$  é bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$  se  $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$ .

### 2.3 Circunferência

Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é chamado de centro e a distância dada é chamada de raio da circunferência. Note que raio é a medida do comprimento do segmento com origem no centro da circunferência e extremidade na circunferência.

#### 2.3.1 Corda ou diâmetro

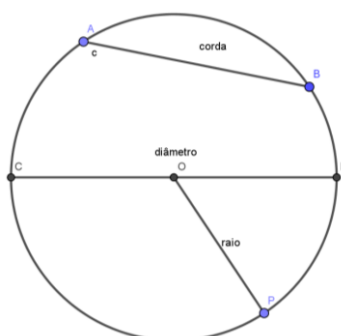
Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência. Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo seu centro. Considere o exemplo a seguir que ilustra essas definições. Temos que  $\overline{AB}$  é uma corda,  $\overline{CD}$  é um diâmetro e  $\overline{OP}$  é um segmento cuja medida é igual ao raio.

Obs: Um segmento com origem no centro da circunferência e que possua medida igual ao raio, será chamado ao longo deste trabalho apenas de raio.

---

<sup>5</sup> Definição no livro *Fundamentos de Matemática Elementar* de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu.

Figura 21: Corda, Diâmetro e Raio.

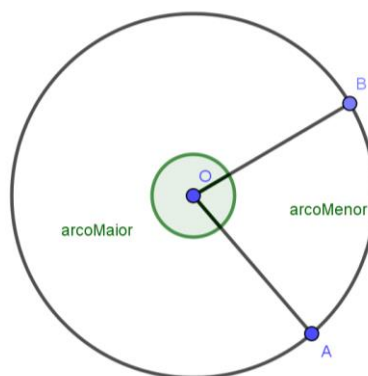


Fonte: Autora (2020)

### 2.3.2 Arco da circunferência e semicircunferência

Considerando uma circunferência de centro  $O$  e  $A$  e  $B$  dois pontos da circunferência que não sejam extremidades de um diâmetro. Tais pontos dividem a circunferência em dois arcos, sendo que o arco de menor comprimento será denominado simplesmente arco menor e analogamente o arco de comprimento maior será denominado arco maior.

Figura 22: Arco menor e Arco maior

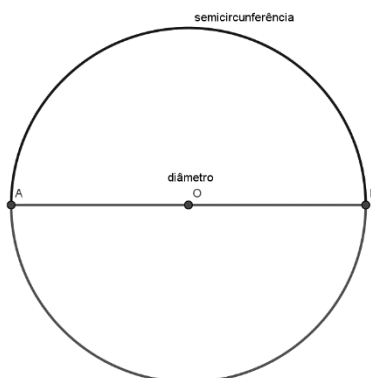


Fonte: Autora (2020)

Semicircunferência  $\widehat{AB}$  é a reunião dos conjuntos dos pontos  $A, B$  e de todos os pontos da circunferência que estão em um dos semiplanos determinados pelo diâmetro  $\overline{AB}$ .



Figura 23: Semicircunferência



Fonte: Autora (2020)

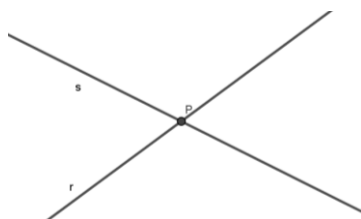
## 2.4 Paralelismo

### 2.4.1 Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se elas têm um único ponto comum.

$$r \cap s = \{P\}$$

Figura 24: Retas Concorrentes



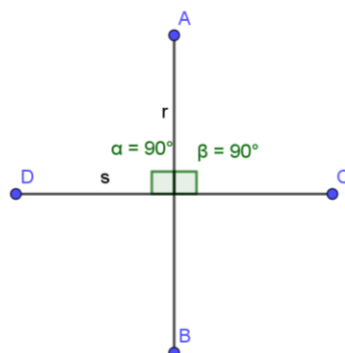
Fonte: Autora (2020)

### 2.4.2. Retas perpendiculares

Duas retas são perpendiculares, símbolo  $\perp$ , se são concorrentes e na sua intersecção temos ângulos retos.

$$r \perp s \Leftrightarrow r \cap s = \{E\} \text{ e } m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{CEA}) = 90^\circ$$

Figura 25: Retas Perpendiculares



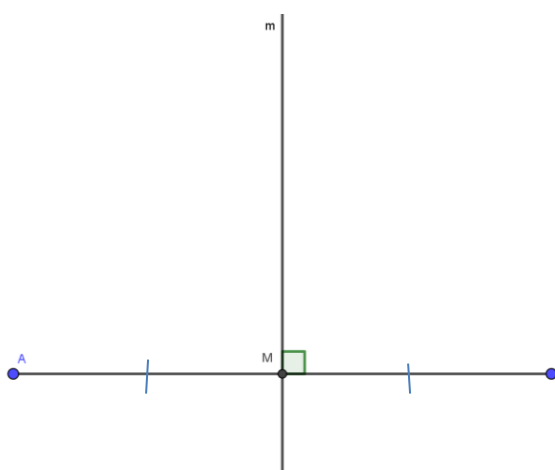
Fonte: Autora (2020)

### 2.4.3 Mediatriz

Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos de um plano. A mediatriz do segmento determinado pelos pontos  $A$  e  $B$  é a reta  $m$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  e que passa pelo ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$ .

$$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$$

Figura 26: Mediatriz



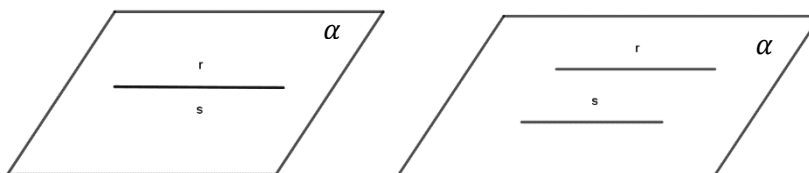
Fonte: Autora (2020)

#### 2.4.4 Retas paralelas

Duas retas são paralelas, símbolo  $//$ , se são coincidentes ou são coplanares<sup>6</sup> e não tem nenhum ponto comum.

$$r \subset \alpha, s \subset \alpha, r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$$

Figura 27: Retas Paralelas Coincidentes e Retas Paralelas Distintas

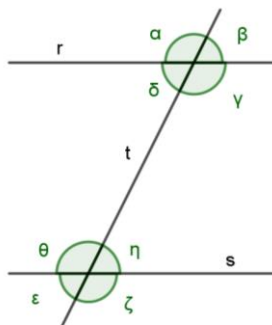


Fonte: Autora (2020)

#### 2.4.5 Reta transversal

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas ou não e  $t$  uma reta concorrente com  $r$  e  $s$ , a reta  $t$  é uma transversal de  $r$  e  $s$ .

Figura 28: Reta transversal



Fonte: Autora (2020)

Dos oito ângulos determinados por essas retas indicados na figura acima, chamam-se:

Ângulos alternos internos:  $\gamma$  e  $\theta$ ,  $\delta$  e  $\eta$

Ângulos alternos externos:  $\alpha$  e  $\zeta$ ,  $\beta$  e  $\epsilon$

<sup>6</sup> Retas coplanares são retas que pertencem a um mesmo plano.

Ângulos correspondentes:  $\alpha$  e  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\eta$ ,  $\gamma$  e  $\zeta$ ,  $\delta$  e  $\varepsilon$

Ângulos colaterais internos:  $\gamma$  e  $\eta$ ,  $\delta$  e  $\theta$

Ângulos colaterais externos:  $\alpha$  e  $\varepsilon$ ,  $\beta$  e  $\zeta$

Ângulos opostos pelo vértice:  $\alpha$  e  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ,  $\eta$  e  $\varepsilon$ ,  $\theta$  e  $\zeta$

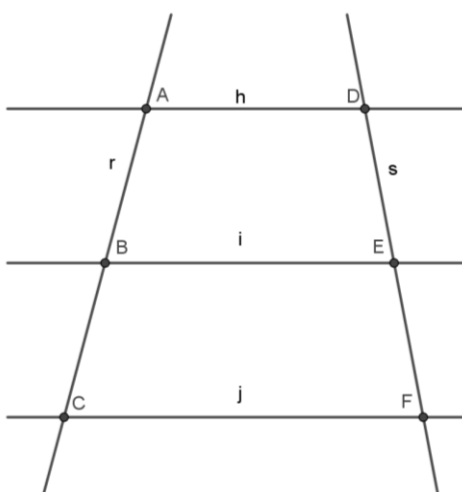
Pode-se provar que se as retas  $r$  e  $s$  forem paralelas, os pares de ângulos correspondentes são congruentes. O mesmo se pode dizer entre os pares de alternos e também sobre os pares de opostos pelo vértice. Já os pares de ângulos colaterais são suplementares.

#### 2.4. 6 Teorema de Tales

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Considere as retas  $r$  e  $s$  transversais as retas paralelas  $h$ ,  $i$  e  $j$  e os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  conforme a figura a seguir:

Figura 29: Teorema de Tales



Fonte: Autora (2020)

Nas condições dadas temos que :

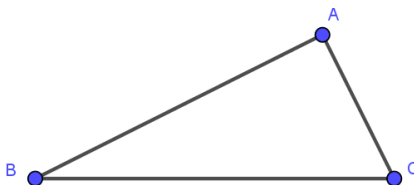
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

## 2.5 Triângulo

Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares a reunião dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  chama-se triângulo  $ABC$ , indicamos por  $\Delta ABC$ .

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

Figura 30: Triângulo

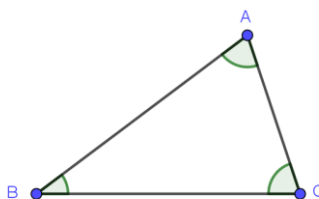


Fonte: Autora (2020)

### 2.5.1 Elementos

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do  $\Delta ABC$ , os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são os lados do triângulo. Os ângulos  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  são os ângulos internos do  $\Delta ABC$ .

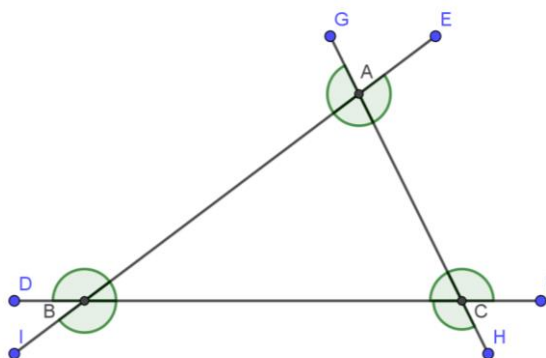
Figura 31: Elementos do triângulo



Fonte: Autora (2020)

Cada ângulo interno define dois ângulos externos. Dessa forma,  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{CBI}$  são ângulos externos adjacentes ao ângulo  $\widehat{ABC}$ ;  $\widehat{ACF}$  e  $\widehat{BCH}$  são ângulos externos adjacentes ao ângulo  $\widehat{ACB}$ ;  $\widehat{EAC}$  e  $\widehat{GAB}$  são ângulos externos adjacentes ao ângulo  $\widehat{BAC}$ .

Figura 32: Ângulos externos do triângulo



Fonte: Autora (2020)

## 2.5.2 Classificação

### 2.5.2.1 Quanto aos lados os triângulos se classificam em:

Equilátero quando tem os três lados congruentes, isósceles quando tem pelo menos dois lados congruentes e escaleno quando dois quaisquer lados não são congruentes.

### 2.5.2.2 Quanto aos ângulos os triângulos se classificam em:

Retângulo se tem um ângulo reto. Acutângulo se tem os três ângulos agudos<sup>7</sup> e obtusângulo se tem um ângulo obtuso<sup>8</sup>.

No caso do triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

## 2.5.3 Congruência de Triângulos

### 2.5.3.1 Definição

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e de outro, de modo que seus respectivos lados e ângulos internos correspondentes sejam congruentes entre si.

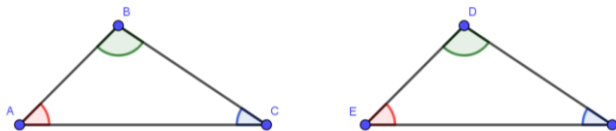
Para os triângulos  $ABC$  e  $EDF$ , temos:

<sup>7</sup> Ângulos com medidas menores do que  $90^\circ$

<sup>8</sup> Ângulos com medidas maiores do que  $90^\circ$  e menores do que  $180^\circ$

$$\Delta ABC \equiv \Delta EDF \Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{ED}, \overline{AC} \equiv \overline{EF}, \overline{BC} \equiv \overline{DF}, \hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{B} \equiv \hat{D} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Figura 33: Triângulos Congruentes



Fonte: Autora (2020)

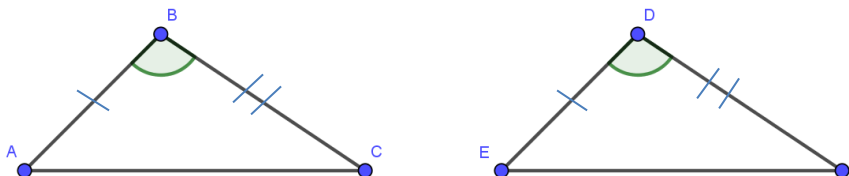
### 2.5.3.2 Casos de congruência

#### 2.5.3.2.1 1º Caso – LAL

Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles forem congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo entre eles, então os dois triângulos são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{ED}, \hat{B} \equiv \hat{D}, \overline{BC} \equiv \overline{DF} \xrightarrow{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta EDF \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{E}, \overline{AC} \equiv \overline{EF}, \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Figura 34: Caso LAL de Congruência de Triângulos



Fonte: Autora (2020)

Obs: Este caso pode ser tomado como postulado e os casos seguintes podem ser provados<sup>9</sup> através dele!

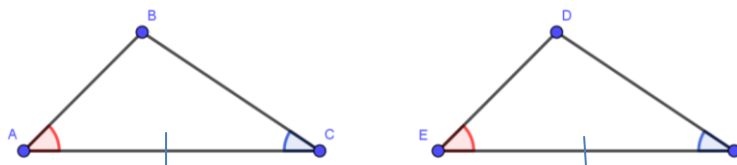
#### 2.5.3.2.2 2º Caso – ALA

Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre eles forem congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

<sup>9</sup> Os outros casos estão demonstrados no livro *Fundamentos de Matemática Elementar* de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu.

$$\hat{A} \equiv \hat{E}, \overline{AC} \equiv \overline{EF}, \hat{C} \equiv \hat{F} \stackrel{ALA}{\implies} \Delta ABC \equiv \Delta EDF \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{ED}, \hat{B} \equiv \hat{D}, \overline{BC} \equiv \overline{DF}$$

Figura 35: Caso ALA de Congruência de Triângulos



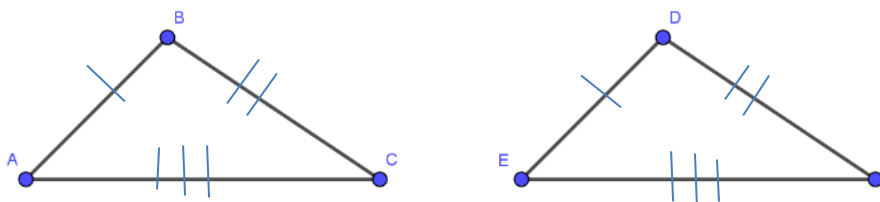
Fonte: Autora (2020)

## 2.5.3.2.3 3º Caso – LLL

Se os três lados de um triângulo são respectivamente congruentes aos lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{ED}, \overline{BC} \equiv \overline{DF}, \overline{AC} \equiv \overline{EF} \stackrel{LLL}{\implies} \Delta ABC \equiv \Delta EDF \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{B} \equiv \hat{D}, \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Figura 36: Caso LLL de Congruência de Triângulos



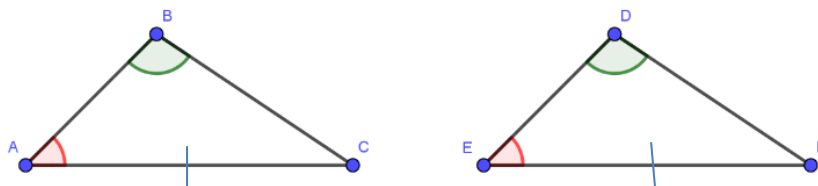
Fonte: Autora (2020)

2.5.3.2.4 4º Caso - LAA<sub>o</sub>

Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um deles forem congruentes a dois ângulos e ao lado oposto correspondente de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

$$\overline{AC} \equiv \overline{EF}, \hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{B} \equiv \hat{D} \stackrel{LAAo}{\implies} \Delta ABC \equiv \Delta EDF \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{ED}, \overline{BC} \equiv \overline{DE}, \hat{C} \equiv \hat{F}$$



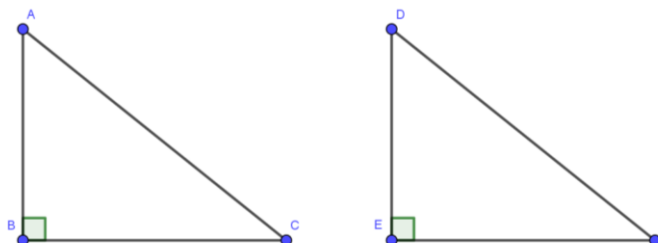
Figura 37: Caso LAA<sub>o</sub> de Congruência de Triângulos

Fonte: Autora (2020)

### 2.5.3.2.5 Congruência de triângulos retângulos

Se os dois lados de um triângulo retângulo são respectivamente congruentes aos lados de outro triângulo retângulo, então os dois triângulos são congruentes. Esse caso é consequência do Teorema de Pitágoras que será demonstrado adiante.

Figura 38: Congruência de Triângulo Retângulo



Fonte: Autora (2020)

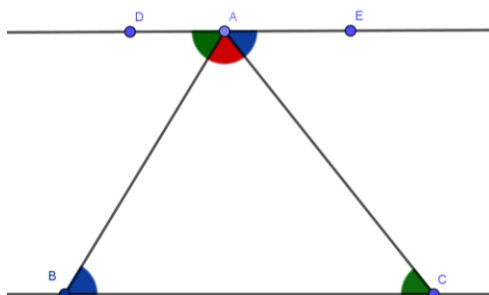
## 2.5.4 Propriedades

### 2.5.4.1 Soma dos ângulos internos

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .

Demonstração: Seja o triângulo  $ABC$ . Pelo vértice  $A$  traçamos a reta  $\overleftrightarrow{DE}$ , paralelo ao lado  $\overline{BC}$ . Os ângulos  $\hat{A}BC$  e  $\hat{D}AB$  são alternos internos, e, portanto, congruentes. Os ângulos  $\hat{ACB}$  e  $\hat{E}AC$  são alternos internos, e, portanto, congruentes. Dessa forma, tem-se que  $m(\hat{D}AB) + m(\hat{B}AC) + m(\hat{E}AC) = 180^\circ$ . Como  $m(\hat{D}AB) = m(\hat{A}BC)$  e  $m(\hat{E}AC) = m(\hat{ACB})$ , temos que  $m(\hat{C}BA) + m(\hat{A}CB) + m(\hat{B}AC) = 180^\circ$ .

Figura 39: Soma dos ângulos internos do triângulo



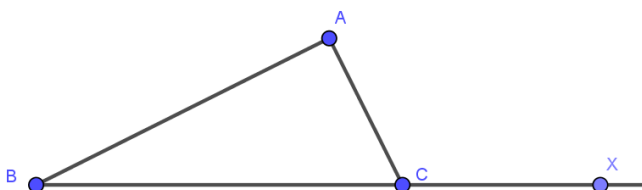
Fonte: Autora (2020)

#### 2.5.4.2 Teorema do ângulo externo

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração: Seja o triângulo  $ABC$  indicado abaixo e  $X \in \overrightarrow{BC}$  tal que  $C$  está entre  $B$  e  $X$ , pela propriedade da soma dos ângulos internos, temos que  $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{BCA}) = 180^\circ$ . Note ainda que ângulos  $\widehat{BCA}$  e  $\widehat{ACX}$  são suplementares, logo  $m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ACX}) = 180^\circ$ . Igualando as duas equações temos que  $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ACX})$  e portanto  $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACX})$ .

Figura 40: Teorema do Ângulo externo



Fonte: Autora (2020)

#### 2.5.4.3 Proposição: Desigualdade nos triângulos

a) Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

b) Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

#### 2.5.4.3.1 Proposição: Desigualdade triangular

Em todo triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois.

### 2.5.5 Semelhança de triângulos

#### 2.5.5.1 Definição

Dois triângulos são semelhantes (símbolo  $\sim$ ), se e somente se, possuem os três ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

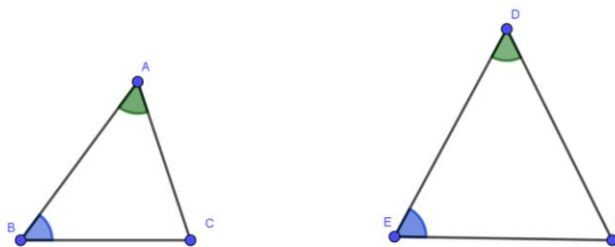
#### 2.5.5.2 Critérios de Semelhança

1º Caso- AAA: Se dois triângulos possuem três ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

Como corolário imediato temos o caso AA: Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

$$\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E} \stackrel{AA}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{CB}{FE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Figura 41: Semelhança de triângulos com dois ângulos congruentes

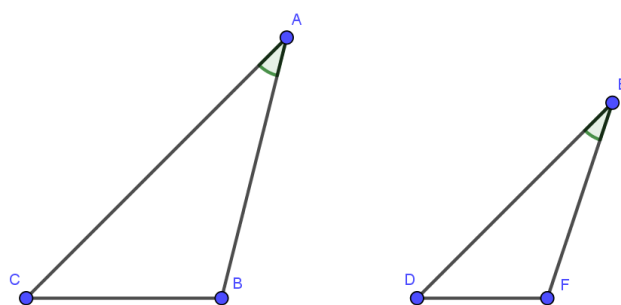


Fonte: Autora (2020)

2º Caso-LAL: Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados correspondentes de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

$$\frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EF}, \hat{A} \equiv \hat{E} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta ACB \sim \Delta EDF \Rightarrow \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{D}, \frac{CB}{DF} = \frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EF}$$

Figura 42: Semelhança de Triângulos com dois lados proporcionais

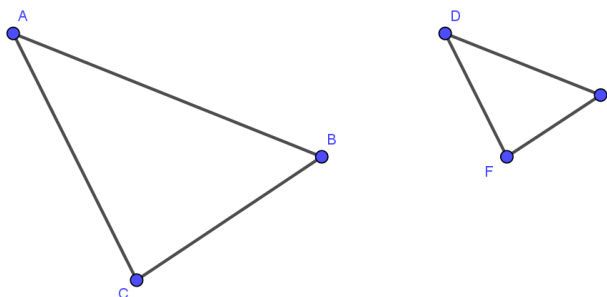


Fonte: Autora (2020)

3º Caso-LLL: Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

$$\frac{CB}{FE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \stackrel{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}$$

Figura 43: Semelhança de Triângulos com três lados proporcionais



Fonte: Autora (2020)

## 2.6 Ângulos na Circunferência

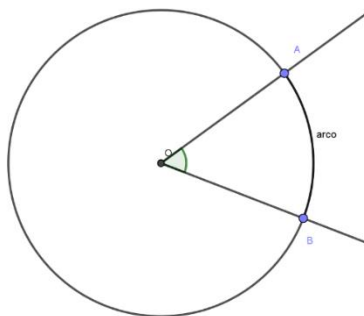
### 2.6.1 Ângulo Central

Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Em uma circunferência de centro O um ângulo central

determina um arco  $\widehat{AB}$  e a medida desse arco é correspondente ao ângulo central  $A\hat{O}B$ .

$A\hat{O}B$  ângulo central /  $\widehat{AB}$  arco menor

Figura 44: Arco Central  $A$



Fonte: Autora (2020)

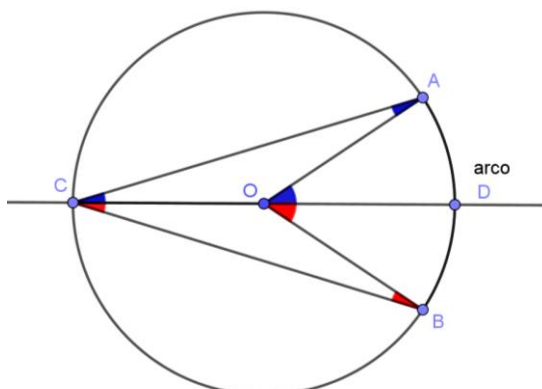
### 2.6.2 Medida do ângulo inscrito

Um ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são retas que contêm cordas. O Teorema do ângulo inscrito propõe que se  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são cordas de um círculo de centro  $O$ , então a medida do ângulo inscrito  $B\hat{A}C$  é igual à metade da medida do ângulo central  $B\hat{O}C$  correspondente. A demonstração foi retirada do livro de Geometria do PROFMAT, no caso em que o ângulo inscrito contém o centro, os outros casos poderão ser encontrados no respectivo livro.

Demonstração: O ângulo  $A\hat{C}B$  contém o centro  $O$  em seu interior: como os triângulos  $OAC$  e  $OBC$  são isósceles, de bases respectivamente  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ , temos  $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = \alpha$  e  $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = \beta$ . Segue que  $m(\widehat{BCA}) = \alpha + \beta$  e, pelo teorema do ângulo externo, temos que  $m(\widehat{AOD}) = 2\alpha$  e  $m(\widehat{DOB}) = 2\beta$  e  $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{DOB}) = 2(\alpha + \beta) = 2m(\widehat{ACB})$ .

$$m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2} \text{ ou } m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

Figura 45: Medida do Ângulo Central

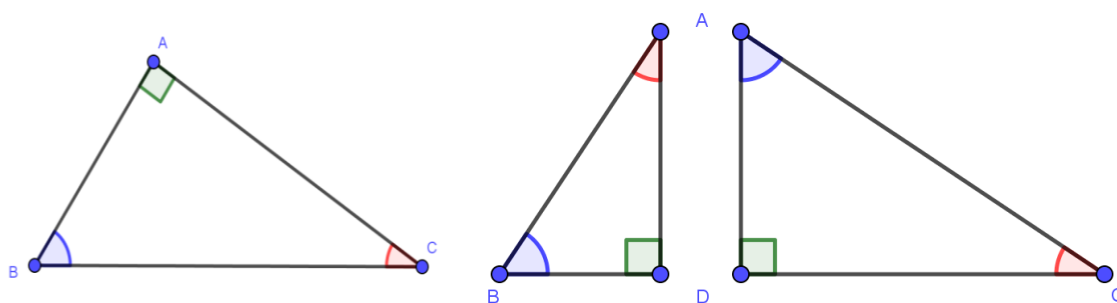


Fonte: Autora (2020)

## 2.7 Relações métricas no triângulo retângulo

Traçando a altura  $\overline{AD}$  relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo  $ABC$  obtém-se dois triângulos retângulos  $DBA$  e  $DAC$  semelhantes ao triângulo  $ABC$  pelo critério da congruência AA. Note ainda que  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$  e  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ACD}$ , portanto novamente pelo caso AA podemos concluir que  $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ ,  $\Delta ABC \sim \Delta DAC$  e  $\Delta DBA \sim \Delta DAC$ .

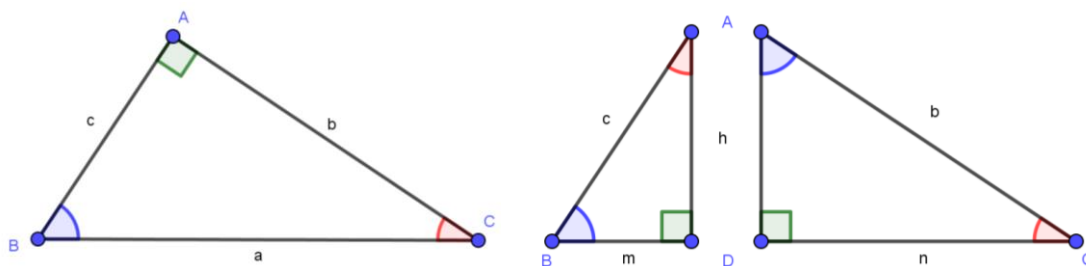
Figura 46: Semelhanças no triângulo retângulo



Fonte: Autora (2020)

Com base nas semelhanças dos triângulos e indicando as medidas dos segmentos na figura abaixo, obtemos a relações a seguir, que são chamadas de relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 47: Elementos nos triângulos retângulos



Fonte: Autora (2020)

$$(I) b^2 = an$$

$$(II) c^2 = am$$

$$(III) h^2 = mn$$

$$(IV) bc = ah$$

### 2.7.1 Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Obtemos esta relação a partir das relações métricas no triângulo retângulo.

Demonstração: Usando as relações métricas no triângulo retângulo, vamos somar (I) e (II).  $b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a \cdot a$ , ou seja,  $b^2 + c^2 = a^2$ .

## 2.8 Seno, cosseno e tangente

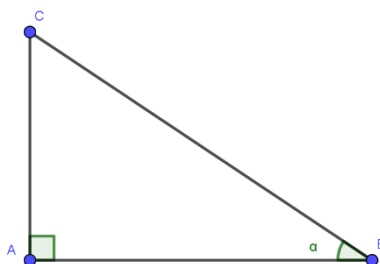
Considerando um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $\hat{A}$ ,  $\alpha$  a medida de um dos ângulos agudos, temos que seno do ângulo  $\alpha$ , cosseno do ângulo  $\alpha$  e tangente do ângulo  $\alpha$  são definidos, respectivamente por:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AC}{AB}$$

Figura 48: Triângulo Retângulo



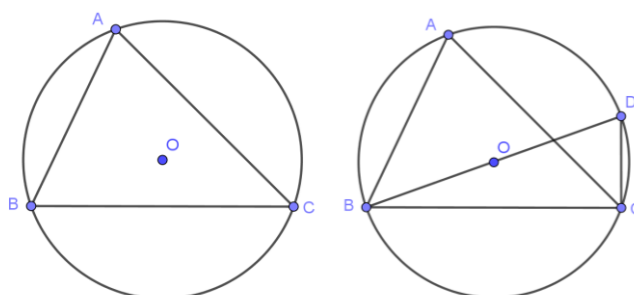
Fonte: Autora (2020)

### 2.8.1 Lei dos senos

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração: Dados um triângulo  $ABC$  e a circunferência circunscrita de centro  $O$  e raio  $R$ , traçamos o diâmetro  $\overline{BD}$  desta circunferência. Pelo teorema do ângulo inscrito temos que  $m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$  e  $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$  e, portanto,  $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BAC})$ . Também pelo teorema temos que o triângulo  $DCB$  é retângulo em  $C$  e, portanto, valem as relações:

$$\text{sen } \widehat{BAC} = \frac{BC}{2R} \rightarrow \frac{BC}{\text{sen } \widehat{BAC}} = 2R$$

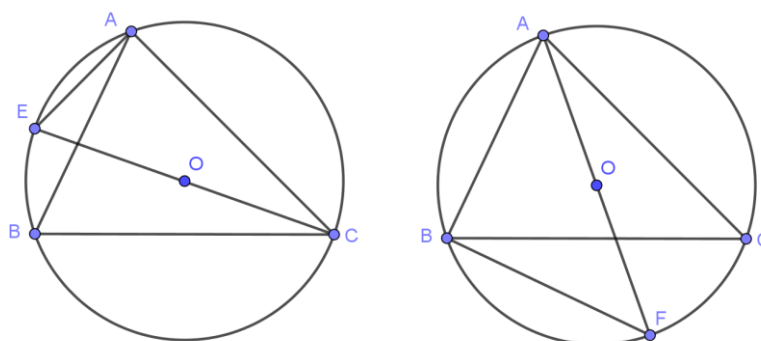
Figura 49: Lei dos senos lado  $BC$ 

Fonte: Autora (2020)

Repetindo o processo para os outros ângulos teremos:

$$\frac{AC}{\text{sen } (\widehat{ABC})} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{AB}{\text{sen } (\widehat{ACB})} = 2R$$



Figura 50: Lei dos senos lados  $AC$  e  $AB$ 

Fonte: Autora (2020)

E finalmente a expressão da lei dos senos:

$$\frac{BC}{\text{sen}(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\text{sen}(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\text{sen}(\widehat{ACB})} = 2R$$

### 2.8.2 Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração: Considere um triângulo  $ABC$ ,  $D$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  e  $m(\widehat{CAB}) < 90^\circ$ . Considerando agora o triângulo retângulo  $CDA$  vem que  $\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AD}{AC} \rightarrow AD = AC \cdot \cos(\widehat{CAB})(1)$ ,  $AD^2 + DC^2 = AC^2(2)$  e  $DB^2 + DC^2 = CB^2$ . Substituindo  $DB$  por  $(AB - AD)$ , temos :  $(AB - AD)^2 + DC^2 = CB^2$ . Desenvolvendo o produto notável temos que  $AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 + DC^2 = CB^2(3)$ .

Substituindo (1) e (2) em (3) teremos:

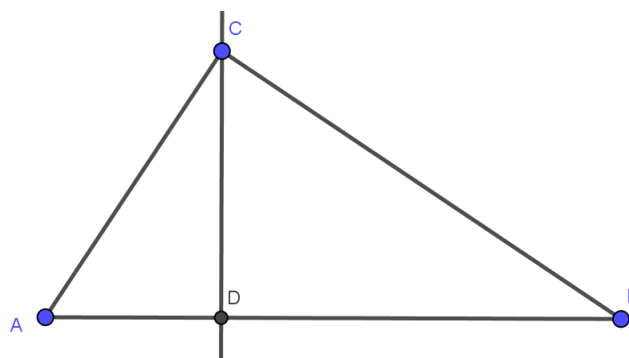
$$AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 + DC^2 = CB^2$$

$$AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{CAB}) + AC^2 = CB^2$$

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{CAB})$$

A demonstração para os demais lados é análoga.

## 51: Lei dos Cossenos



Fonte: Autora (2020)

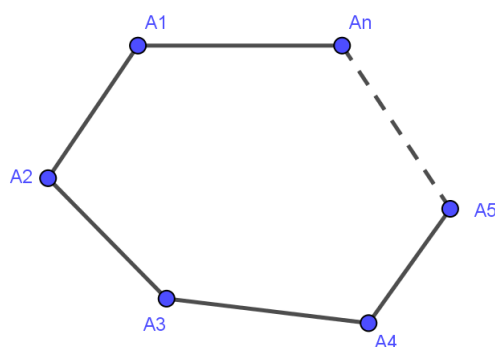
No caso em que  $m(\hat{CAB}) = 90^\circ$  e  $m(\hat{CAB}) > 90^\circ$  as demonstrações podem ser encontradas no livro do PROFMAT volume Geometria.

## 2.9 Polígonos

### 2.9.1 Definição

Dada uma sequência de pontos de um plano ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) com  $n \geq 3$ , todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos  $A_{n-1}$ ,  $A_n$  e  $A_1$ , assim como  $A_n$ ,  $A_1$  e  $A_2$ , chama-se polígono à reunião dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$ ,  $\overline{A_nA_1}$ .

Figura 52: Polígono

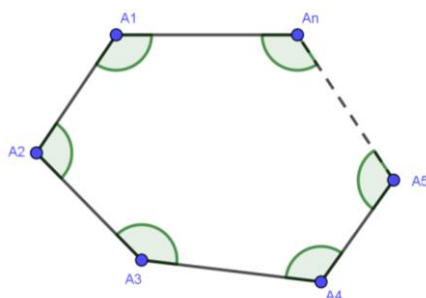


Fonte: Autora (2020)

### 2.9.2 Elementos

Considerando o polígono  $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1} A_n$  temos que  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$  são os vértices do polígono, os segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$  são os lados do polígono e os ângulos  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \dots, \hat{A}_{n-1}, \hat{A}_n$  são os ângulos do polígono.

Figura 53: Elementos do polígono

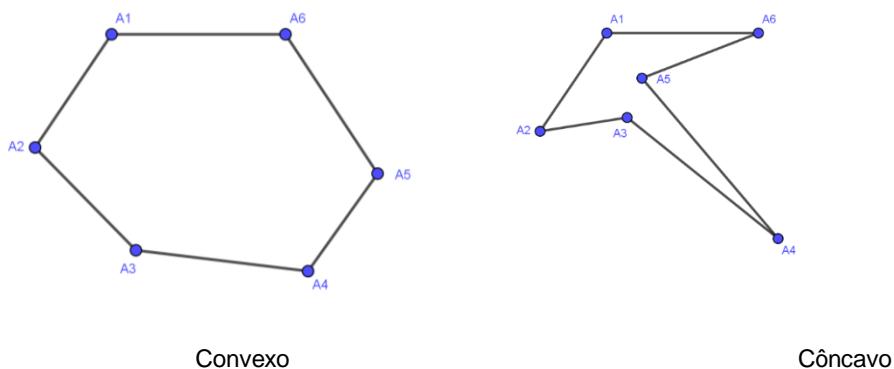


Fonte : Autora (2020)

### 2.9.3 Polígono convexo e polígono côncavo

Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos deixa todos os demais vértices num mesmo plano dos dois que ela determina. Se um polígono não é convexo, ele é um polígono côncavo ou não convexo.

Figura 54: Polígono Convexo e Côncavo



Fonte: Autora (2020)

#### 2.9.4 Nome dos polígonos

De acordo com o número de lados os polígonos recebem nomes especiais.

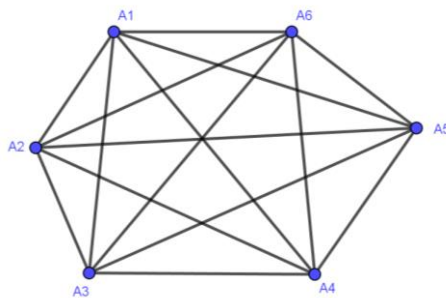
Número de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

#### 2.9.5 Diagonais

Diagonal de um polígono é um segmento com extremidades nos vértices não consecutivos do polígono. O número de diagonais  $d$  de um polígono de  $n$  lados é dada por:

$$d = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Figura 55:Diagonais



Fonte: Autora (2020)

### 2.9.6 Soma dos ângulos internos de um polígono

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é dada por:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Demonstração: Seja  $A_1A_2A_3\dots A_n$  um polígono convexo de  $n$  lados. De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm este vértice como extremo. O polígono fica então dividido em  $(n - 2)$  triângulos e a soma dos ângulos internos do polígono  $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$  é igual à soma dos ângulos internos dos  $(n - 2)$  triângulos, logo:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

### 2.9.7 Ângulo interno de um polígono regular

Os ângulos internos ( $A_n$ ) de um polígono regular são congruentes, portanto, temos que  $nA_n = S \rightarrow nA_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow A_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ .

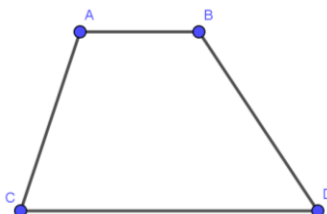
## 2.10 Quadriláteros Notáveis

Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos de um mesmo plano, e três a três não colineares. Definimos que o polígono convexo ABCD é um quadrilátero. Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

### 2.10.1 Trapézio

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se possui pelo menos dois lados paralelos.

Figura 56 :Trapézio



Fonte: Autora (2020)

### 2.10.2 Paralelogramo

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se possui os lados opostos paralelos.

Figura 57:Paralelogramo



Fonte: Autora (2020)

### 2.10.3 Retângulo

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se possui os quatro ângulos retos.

Figura 58: Retângulo

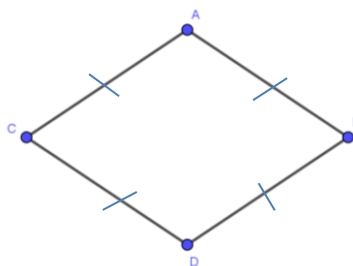


Fonte: Autora (2020)

### 2.10.4 Losango

Um quadrilátero plano convexo é um losango se possui os quatro lados congruentes.

Figura 59: Losango

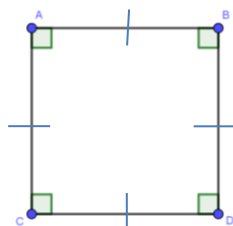


Fonte: Autora (2020)

### 2.10.5 Quadrado

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se possui os quatro ângulos retos e os quatro lados congruentes.

Figura 60: Quadrado



Fonte: Autora (2020)

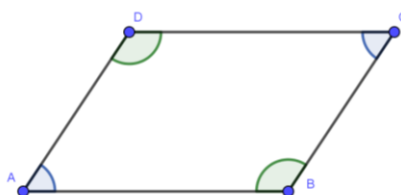
### 2.10.6 Propriedades dos paralelogramos

#### 2.10.6.1 Ângulos opostos congruentes

Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes. Assim, se  $ABCD$  é paralelogramo temos que  $\hat{A} \equiv \hat{C}$  e  $\hat{B} \equiv \hat{D}$ .

Demonstração: Se  $ABCD$  é paralelogramo temos que  $\overline{AD} // \overline{BC}$ , logo  $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ . Temos ainda que  $\overline{AB} // \overline{CD}$  e, portanto, podemos concluir  $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ADC}) = 180^\circ$ . Comparando as duas expressões obtemos que  $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABC})$ . A demonstração de que  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BCD})$  é análoga.

Figura 61: Ângulos Opostos no Paralelogramo

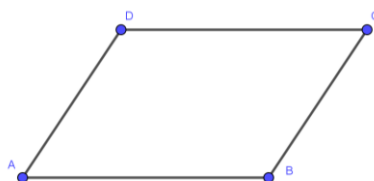


Fonte: Autora (2020)

#### 2.10.6.2 Lados opostos congruentes

Em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes. Assim, se  $ABCD$  é paralelogramo temos que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ .

Figura 62: Lados Opostos Congruentes no Paralelogramo



Fonte: Autora (2020)

A demonstração deste fato pode ser encontrada no livro de Fundamentos de Matemática Elementar, volume geometria plana, Dolce e Pompeo (1985).

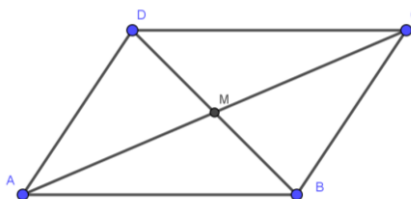
#### 2.10.6.3 Diagonais dividem-se ao meio

Em todo paralelogramo as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.



Demonstração: As diagonais formam ângulos alternos internos congruentes. Usando o caso ALA de congruência de triângulos, observamos os lados congruentes. Se  $ABCD$  é paralelogramo e  $M$  é a intersecção de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , temos que  $\overline{AM} \equiv \overline{CM}$  e  $\overline{BM} \equiv \overline{DM}$ .

Figura 63: Diagonais no Paralelogramo



Fonte: Autora (2020)

A demonstração deste fato pode ser encontrada no livro de Fundamentos de Matemática Elementar, volume geometria plana, Dolce e Pompeo (1985).

#### 2.10.6.4 Um par de lados paralelos e congruentes

Todo quadrilátero convexo que tem um par de lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

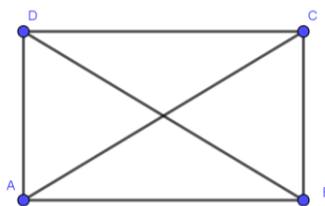
#### 2.10.7 Propriedades do retângulo, losango e quadrado

##### 2.10.7.1 Retângulo – diagonais congruentes

Em todo retângulo as diagonais são congruentes. Assim se  $ABCD$  é retângulo, temos que  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ .

Demonstração: Seja  $ABCD$  um retângulo. Como todo retângulo é um paralelogramo, temos que  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$  e  $\overline{CD} = \overline{AB}$ . Note ainda que  $\hat{C} \equiv \hat{A}$  pelo caso de congruência do triângulo retângulo temos que  $\Delta DAB \equiv \Delta BCD$  e, portanto,  $\overline{BD} \equiv \overline{AC}$ .

Figura 64: Diagonais no Retângulo



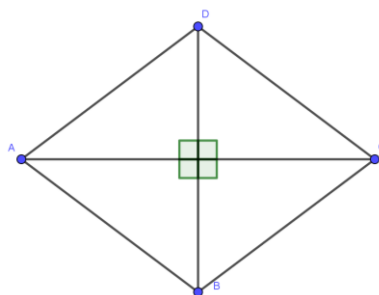
Fonte: Autora (2020)

### 2.10.7.2 Losango – diagonais perpendiculares

Em todo losango as diagonais são perpendiculares.

Demonstração: Suponha que ABCD é um losango. Temos que  $\overline{CD} \equiv \overline{AD}$ . Como todo losango é um paralelogramo, sendo M o ponto de encontro das suas diagonais, vem que  $\overline{MA} \equiv \overline{MC}$ . Por fim como  $\overline{MD}$  é comum aos triângulos  $MAD$  e  $MCD$ , pelo caso LLL temos  $\triangle MAD \equiv \triangle MCD$  e assim  $m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{CMD})$ . Por fim, note que os ângulos  $\widehat{AMD}$  e  $\widehat{CMD}$  são suplementares, ou seja  $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{CMD}) = 180^\circ \rightarrow 2m(\widehat{AMD}) = 180^\circ \rightarrow m(\widehat{AMD}) = 90^\circ = m(\widehat{CMD})$ .

Figura 65: Diagonais no Losango



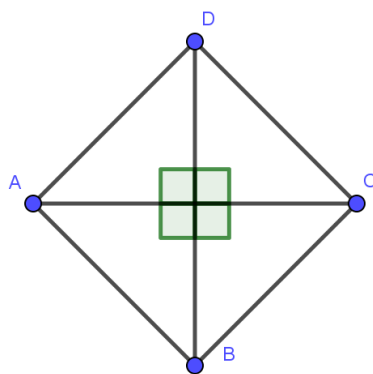
Fonte: Autora (2020)

### 2.10.7.3 Quadrado – diagonais congruentes e perpendiculares

Em todo quadrado as suas diagonais são congruentes e perpendiculares entre si.

Demonstração: Como todo quadrado é simultaneamente um retângulo e um losango a demonstração segue direto das duas propriedades anteriores.

Figura 66: Diagonais no Quadrado



Fonte: Autora (2020)

### 3. GEOMETRIA DE TRANSFORMAÇÕES

Neste capítulo iremos estudar as principais transformações geométricas tais como translações, reflexões e rotações serão de fundamental importância para a análise da obra de Escher, no capítulo cinco. Os estudos foram baseados no livro *Um estudo geométrico das transformações elementares* de Sergio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão e no livro *Isometrias* de Elon Lages Lima.

#### 3.1 Transformação no plano

Considere uma aplicação  $F$  do conjunto dos pontos do plano em si mesmo, isto é, uma correspondência que a cada ponto  $P$  do plano associa um único ponto desse plano, indicado por  $F(P)$ .

$F$  é uma aplicação bijetora se, para todo ponto  $Q$  do plano existe um único ponto  $P$  tal que  $F(P) = Q$ . Uma transformação do plano é uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si. Sendo  $F$  bijetora, existe a aplicação  $F^{-1}$ , chamada inversa da transformação  $F$ , definida por  $F^{-1}(Q) = P$ .

Sendo  $F$  e  $G$  transformações do plano, indicaremos a aplicação composta de  $F$  e  $G$  por  $G \circ F$ , dada por  $(G \circ F)(P) = G(F(P))$ , para todo ponto  $P$ .

Consideraremos ainda  $Id$  a transformação identidade definida por  $Id(P) = P$  para todo ponto  $P$  do plano. Podemos provar que  $F \circ Id = F = Id \circ F$ ,  $F \circ F^{-1} = Id = F^{-1} \circ F$  sendo  $F$  uma transformação qualquer do plano.

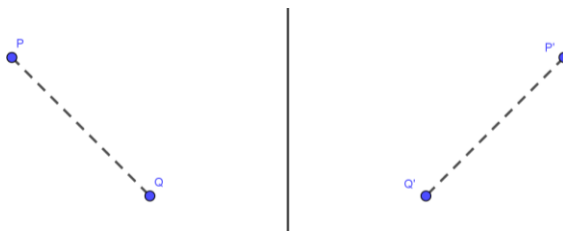
#### 3.2 Isometria do plano

##### 3.2.1 Definição

Uma transformação do plano  $F$  é chamada uma isometria do plano, ou ainda, uma congruência do plano, se  $\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}$  para todo par de pontos distintos  $P$  e  $Q$  do plano, sendo  $P' = F(P)$  e  $Q' = F(Q)$ . Em resumo, dizemos que uma transformação do plano  $F$  é uma isometria se  $F$  preserva a distância entre pontos do plano.

Figura 67: Isometria

$$\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$$



Fonte: Autora (2020)

Uma isometria entre os planos  $\pi$  e  $\pi'$  é uma função  $\tau: \pi \rightarrow \pi'$  que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos  $X, Y \in \pi$ , sendo  $X' = \tau(X)$  e  $Y' = \tau(Y)$ , tem-se  $d(X', Y') = d(X, Y)$ . Toda isometria  $\tau: \pi \rightarrow \pi'$  é uma função injetiva pois  $X \neq Y \rightarrow d(X, Y) > 0 \rightarrow d(X', Y') = d(X, Y) > 0 \rightarrow X' \neq Y'$ . Uma isometria é também sobrejetiva. (LIMA, 1996).

Toda isometria do plano é uma transformação do plano que preserva: a relação de estar entre pontos médios, segmentos, semirretas, triângulos, ângulos, medidas angulares, perpendicularismos e paralelismos.

### 3.2.2 Pontos fixos de uma isometria do plano

Uma transformação do plano  $F$  fixa um ponto  $A$  se  $F(A) = A$ . Neste caso,  $A$  é chamado um ponto fixo da transformação  $F$ .

Dado um conjunto  $P$  do plano, diremos que  $F$  fixa  $P$ , ponto a ponto, se  $F(A) = A$  qualquer que seja o ponto  $A$  pertence a  $P$ , isto é, se  $F$  fixa todos os pontos de  $P$ .

Propriedade 1: Se uma isometria do plano fixa dois pontos distintos de uma reta então ela fixa, ponto a ponto, esta reta.

Propriedade 2: Se uma isometria do plano fixa três pontos não colineares então ela é a transformação identidade.

Propriedade 3: Se  $F$  e  $G$  são isometrias do plano tais que  $F(A) = G(A)$ ,  $F(B) = G(B)$ ,  $F(C) = G(C)$  para três pontos não colineares  $A, B, C$  do plano então  $F = G$ .

Demonstração: Sabemos que  $G^{-1} \circ F$  é uma isometria do plano. E  $(G^{-1} \circ F)(A) = G^{-1}(F(A)) = G^{-1}(G(A)) = A$  e analogamente concluímos que  $(G^{-1} \circ F)(B) = B$  e  $(G^{-1} \circ F)(C) = C$ , usando a propriedade 2 concluímos que  $(G^{-1} \circ F) = id$ , ou seja,  $F = G$ .

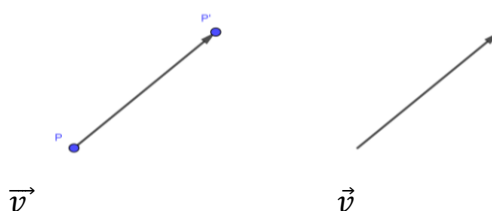
### 3.3 Translações

A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor (do Latim "vehere" = transportar). Na realidade, podemos definir os vetores do plano a partir das translações. (LIMA, 1996)

Para definir uma translação no plano, precisamos apenas de um vetor  $v$  no plano. Lembremos que o vetor nulo  $\vec{0}$  é aquele que não possui comprimento, sentido e direção.

É importante lembrar ainda que dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{v}$ , definimos que  $P + \vec{v} = P'$  se o segmento  $\overline{PP'}$  é o representante de  $\vec{v}$  com origem  $P$ .

Figura 68: Soma de pontos e vetor



Fonte: Autora (2020)

A soma de pontos com vetor permite definir a aplicação chamada translação na direção do vetor  $\vec{v}$ , ou translação de vetor  $\vec{v}$ , ou translação no plano.

$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ , para todo ponto  $P$  do plano.

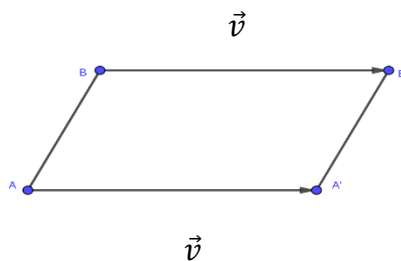
Propriedade 1: Uma translação na direção de um vetor não nulo não tem pontos fixos, isto é, se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , não existe um ponto  $P$  tal que  $T_{\vec{v}}(P) = P$ .

Propriedade 2: Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  do plano, existe uma única translação  $T_{\vec{v}}$  tal que  $T_{\vec{v}}(A) = B$ .

Propriedade 3: Uma translação na direção de um vetor não nulo  $\vec{v}$  deixa invariantes as retas paralelas à direção de  $\vec{v}$  e somente essas retas.

Propriedade 4: Se  $A' = T_{\vec{v}}(A)$ ,  $B' = T_{\vec{v}}(B)$  com  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , então o quadrilátero  $ABB'A'$  é um paralelogramo.

Figura 69: Paralelogramo formado pela translação de dois pontos distintos



Fonte: Autora (2020)

Demonstração: Sendo  $A' = T_{\vec{v}}(A)$  e  $B' = T_{\vec{v}}(B)$ , temos que  $A' = A + \vec{v}$  e  $B' = B + \vec{v}$ , ou seja,  $\vec{v} = A' - A$  e  $\vec{v} = B' - B$ . Logo  $A' - A = B' - B$  e, conseqüentemente,  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  são paralelos e de mesmo comprimento. Pela propriedade 2.10.6.4 temos que  $ABB'A'$  é um paralelogramo.

Propriedade 5: Seja  $F$  uma transformação do plano tal que para todo par de pontos distintos  $A$  e  $B$  o quadrilátero  $ABB'A'$  é um paralelogramo, sendo  $A' = F(A)$  e  $B' = F(B)$ . Então  $F$  é uma translação.

Demonstração: Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos tais que  $A' = F(A)$  e  $B' = F(B)$ , temos pela hipótese que o quadrilátero  $ABB'A'$  é um paralelogramo. Sendo  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  segmentos orientados, paralelos, congruentes e com o mesmo sentido, então pela propriedade 2 existe uma única translação  $T_{\vec{v}}$  tal que  $T_{\vec{v}}(A) = A'$  e  $T_{\vec{v}}(B) = B'$ , e portanto existe uma única translação  $T_{\vec{v}}$ , com  $\vec{v} = \overline{AA'}$ , tal que  $T_{\vec{v}}(A) = A'$  e  $T_{\vec{v}}(B) = B'$ . Temos então que  $F$  e  $T_{\vec{v}}$  coincidem em todos os pontos do plano.

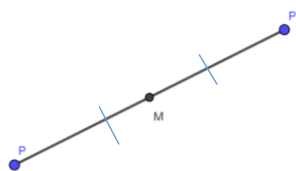
É importante observar que, na definição de  $T_{\overline{AB}}$ , é essencial levar em conta a ordem em que são mencionados os pontos  $A$  e  $B$ . A translação  $T_{\overline{BA}}$  é diferente de  $T_{\overline{AB}}$ . Na realidade, como se vê facilmente, tem-se  $T_{\overline{BA}} = (T_{\overline{AB}})^{-1}$ . Mencionaremos o segmento de reta orientado  $\overline{AB}$  para significar que o ponto  $A$  foi tomado como origem e o ponto  $B$  como extremidade. O segmento orientado  $\overline{BA}$  (oposto de  $\overline{AB}$ ) tem  $B$  como origem e  $A$  como extremidade.

Salientemos que a translação  $T_{\overline{AB}}$  não possui pontos fixos. (LIMA, 1996).

### 3.4 Reflexões em relação a um ponto

Dado um ponto  $M$  do plano a reflexão em relação à  $M$  é a aplicação que fixa o ponto  $M$  e associa a cada ponto  $P$  do plano,  $P \neq M$  o ponto  $P'$  tal que  $M$  é ponto médio do segmento  $\overline{PP'}$ . Indicaremos a reflexão em relação ao ponto  $M$  por  $R_M$ .

Figura 70: Reflexão do ponto  $P$  em relação ao ponto  $M$



Fonte: Autora (2020)

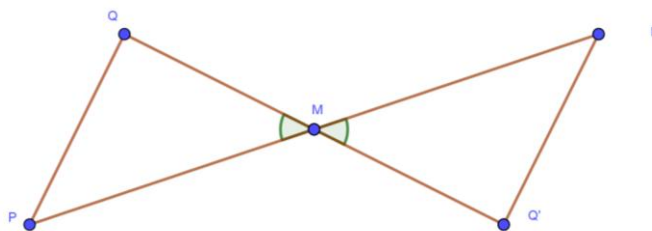
A definição acima diz que  $R_M(M) = M$  e que para todo ponto  $P$  do plano,  $P$  distinto de  $M$ , temos  $R_M(P) = P'$  se  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$ . Neste caso  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação ao ponto  $M$  que, por sua vez, é chamado o centro da reflexão.

Propriedade 1 : Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ , sendo  $P' = R_M(P)$  e  $Q' = R_M(Q)$ , temos que se  $P, Q$  e  $M$  são pontos não colineares então  $P', Q', M$  são também não colineares. Vamos mostrar que nas condições dadas temos que  $\overline{PQ}$  é congruente a  $\overline{P'Q'}$ .

Demonstração: Pelo critério *LAL* de congruência de triângulos, temos  $\triangle PMQ \cong \triangle P'MQ'$ , pois  $\widehat{QMP} \equiv \widehat{Q'MP'}$  por serem opostos pelo vértice e  $\overline{QM} \equiv \overline{QM}$  e  $\overline{PM} \equiv \overline{MP'}$ , pois os pontos  $Q$  e  $Q'$  e  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação ao ponto  $M$ , portanto  $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ .



Figura 71: Reflexão da reta  $\overline{PQ}$  em relação ao ponto  $M$



Fonte: Autora (2020)

O mesmo resultado obtemos quando os pontos  $P, Q$  e  $M$  são colineares, mesmo que  $P$  ou  $Q$  coincidam com  $M$ .

Concluimos assim, que toda reflexão em relação a um ponto é uma isometria do plano.

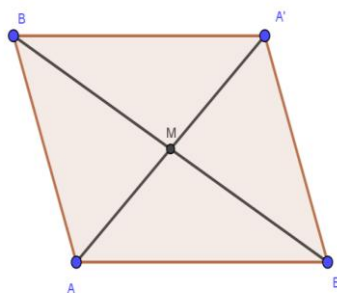
Propriedade 2: O único ponto fixo da reflexão  $R_M$  é o seu centro  $M$ .

Propriedade 3: As únicas retas do plano que são invariantes pela reflexão  $R_M$  são as que passam pelo centro  $M$ .

Propriedade 4: Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  do plano, existe uma única reflexão  $R_M$  tal que  $R_M(A) = B$ .

Propriedade 5: Se  $A' = R_M(A)$ ,  $B' = R_M(B)$ , com  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano, então o quadrilátero  $ABA'B'$  é um paralelogramo.

Figura 72: Paralelogramo formado pela reflexão de dois pontos distintos

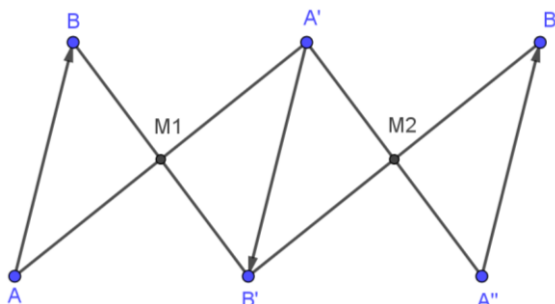


Fonte: Autora (2020)

Propriedade 6 : Sejam  $M_1, M_2$  pontos arbitrários do plano e  $\vec{v}$  um vetor qualquer do plano, então  $R_{M_2} \circ R_{M_1} = T_{\overrightarrow{2M_1M_2}}$ .

Demonstração : Sejam  $M_1, M_2, A$  e  $B$  pontos distintos do plano obtemos  $A', A'', B'$  e  $B''$  tais que  $A' = R_{M_1}(A), B' = R_{M_1}(B), A'' = R_{M_2}(A') = (R_{M_2} \circ R_{M_1})(A), B'' = R_{M_2}(B') = (R_{M_2} \circ R_{M_1})(B)$ . Pela propriedade 5 temos que o quadrilátero  $ABA'B'$  é um paralelogramo, pela propriedade 5 de Translação concluímos que  $R_{M_2} \circ R_{M_1}$  é uma translação.

Figura 73: Translação formada pela composta de duas reflexões de pontos

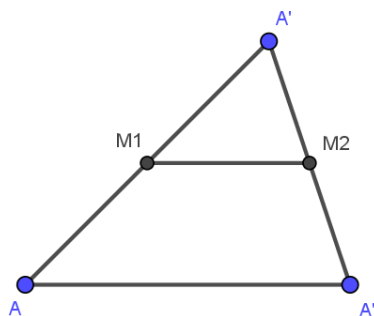


Fonte: Autora (2020)

Para determinar o vetor de tal translação vamos fixar um ponto  $A$  tal que  $A \notin \overrightarrow{M_1M_2}$ . Segue que  $A, A' = R_{M_1}(A), A'' = R_{M_2}(A')$  são não colineares e o segmento  $\overline{M_1M_2}$  é a base média do triângulo  $AA'A''$ , pois  $\overline{AM_1} = \overline{M_1A'}$  e  $\overline{A''M_2} = \overline{M_2A'}$ , portanto  $M_1$  e  $M_2$  são os pontos médios dos segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{A'A''}$ , respectivamente, formando a base média do triângulo  $AA'A''$ .

Como a base média do triângulo  $AA'A''$  é o segmento  $\overline{M_1M_2}$ , temos que  $2\overline{M_1M_2} = \overline{AA''}$ , ou seja,  $T_{2\overline{M_1M_2}}(A) = A'' = (R_{M_2} \circ R_{M_1})(A)$  e portanto pela propriedade 6 temos que  $R_{M_2} \circ R_{M_1} = T_{2\overline{M_1M_2}}$ .

Figura 74: Translação formada pela composta dos pontos médios de um triângulo



Fonte: Autora (2020)

Observamos também que se  $M_1$  e  $M_2$  são pontos distintos temos que  $R_{M_2} \circ R_{M_1} \neq R_{M_1} \circ R_{M_2}$  enquanto que  $R_{M_1} \circ R_{M_1} = T_{\vec{0}} = Id$ . Segue ainda que toda translação é a composta de duas reflexões em relação a pontos pois dado um vetor  $\vec{v}$  escolhemos  $M_1, M_2$  de modo que  $\vec{v} = 2\overline{M_1M_2}$  e temos  $T_{\vec{v}} = T_{2\overline{M_1M_2}} = R_{M_2} \circ R_{M_1}$ .

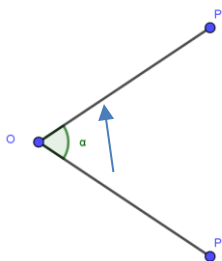
### 3.5 Rotações

#### 3.5.1 Definição

Dados um ponto  $O$  do plano e um número real  $\alpha$  satisfazendo  $-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ , a rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  é a aplicação que fixa o ponto  $O$  e associa a cada ponto  $P$  do plano,  $P$  distinto de  $O$ , o ponto  $P'$  pertencente à circunferência de centro  $O$  e raio  $\overline{OP}$  e tal que  $m(\widehat{POP'}) = \alpha$ . A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  será denotada por  $R_{O,\alpha}$ .

$$R_{O,\alpha+2k180^\circ} = R_{O,\alpha}, \alpha \in ]-180^\circ, 180^\circ], k \in \mathbb{Z}$$

Figura 75: Rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$

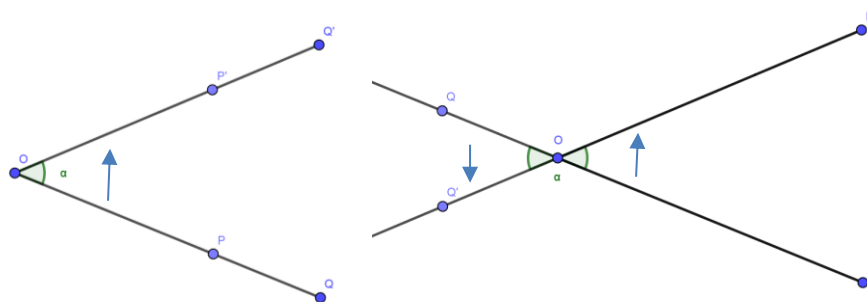


Fonte: Autora (2020)

Toda rotação do plano é uma isometria desse plano. Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  e sendo  $P' = R_{O,\alpha}(P)$  e  $Q' = R_{O,\alpha}(Q)$ , vamos provar que  $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$  e para esta finalidade consideraremos dois casos:  $P$  e  $Q$  colineares com o centro da rotação e  $P$  e  $Q$  não colineares com o centro da rotação.

No primeiro caso os pontos  $P'$  e  $Q'$  também são colineares com o centro de rotação e a distância entre esses pontos coincide com a soma ou a diferença dos raios das circunferências descritas pela rotação, dependendo de o centro estar ou não entre os pontos  $P$  e  $Q$ , em ambas as situações  $\overline{P'Q'} \equiv \overline{PQ}$ .

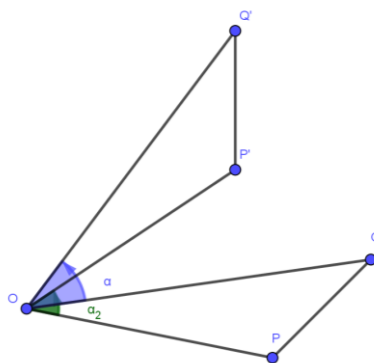
Figura 76: Rotação dos pontos p e q colineares e não colineares



Fonte: Autora (2020)

No segundo caso, em que os pontos não são colineares, observa-se que  $\Delta POQ \cong \Delta P'OQ'$  pelo critério *LAL* de congruência de triângulos e, portanto,  $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ .

Figura 77: Rotação de pontos não colineares



Fonte: Autora (2020)

Propriedade 1: Seja  $F$  uma isometria do plano tal que para todo par de pontos distintos  $P$  e  $Q$  a medida do ângulo orientado<sup>10</sup> de  $\overline{PQ}$  para  $\overline{P'Q'}$  é igual a  $\alpha \neq 0$ , sendo  $P' = F(P)$  e  $Q' = F(Q)$ . Nestas condições,  $F$  é uma rotação do ângulo  $\alpha$ .

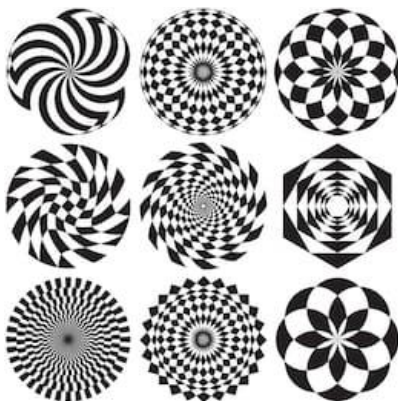
Propriedade 2: Um ponto  $O$  do plano é centro de simetria de um conjunto  $P$  do plano se  $P$  é invariante por uma rotação, distinta da transformação identidade, de centro  $O$ , ou seja, existe  $\alpha \neq 2k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ , tal que  $R_{O,\alpha}(P) = P$ . Neste caso  $P$  é simétrico pela rotação  $R_{O,\alpha}$ . Todo ângulo  $\alpha$  nas condições acima é dito admissível para  $P$  no centro de simetria  $O$ .

<sup>10</sup> Ângulo orientado: Ângulo orientado é um ângulo ao qual se atribuiu um sentido.

Seja  $A$  um triângulo equilátero e  $O$  seu centro. Esse triângulo é simétrico tanto pela rotação  $R_{O,120^\circ}$  quanto pela rotação  $R_{O,240^\circ}$ . Se  $P$  é um hexágono regular e  $O$  o seu centro então  $P$  é simétrico pelas rotações  $R_{O,60^\circ}, R_{O,120^\circ}, R_{O,180^\circ}, R_{O,240^\circ}$  e  $R_{O,300^\circ}$  de modo que  $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$  e  $300^\circ$  são ângulos admissíveis para o hexágono regular  $P$  no centro de simetria  $O$ .

A fim de que a rotação  $R_{O,\alpha}$ , de centro  $O$  e ângulo  $\alpha = \widehat{AOB}$ , esteja bem definida, é necessário que a ordem das semirretas  $\overrightarrow{AO}$  e  $\overrightarrow{OB}$  seja levada em conta:  $\overrightarrow{AO}$  é a primeira e  $\overrightarrow{OB}$  é a segunda. Diz-se então que  $\alpha = \widehat{AOB}$  é um ângulo orientado. Ele é considerado diferente do ângulo orientado  $-\alpha = \widehat{BOA}$ . Na realidade tem-se  $R_{O,-\alpha} = (R_{O,\alpha})^{-1}$ , como se vê facilmente. (LIMA,1996)

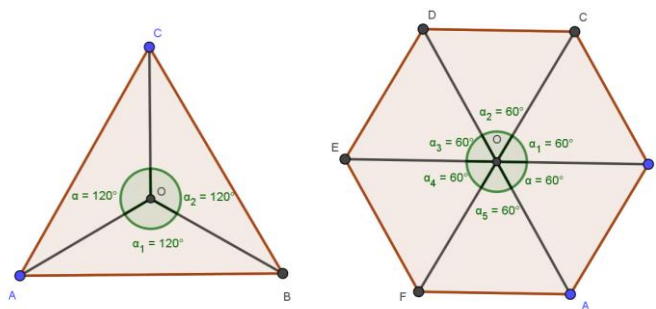
Figura 78: Arte Japonesa De Hajime Ouchi's



Fonte: <<https://br.pinterest.com/pin/532128512193994444/>>. Acesso em dezembro 2019.

As figuras acima exibem conjuntos do plano que são simétricos por rotação. Um centro de simetria de um conjunto  $P$  pode não pertencer a  $P$ , além disso pode haver vários ângulos admissíveis em um mesmo centro de simetria. Como  $(R_{O,\alpha})^n = R_{O,n\alpha}$  para todo inteiro  $n$  segue que se  $R_{O,\alpha}(A) = A$  então  $R_{O,n\alpha}(A) = A$  para todo inteiro  $n$ , ou seja, se  $\alpha$  é um ângulo admissível para  $A$  no centro de simetria  $O$  então o mesmo ocorre para  $n\alpha$  qualquer que seja o inteiro  $n$  com  $n\alpha \neq 2k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

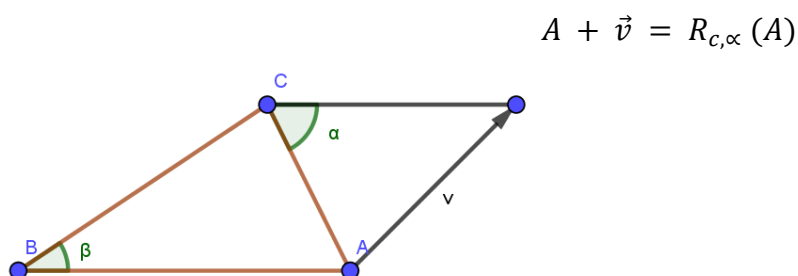
Figura 79: Triângulo e hexágonos simétricos pela rotação



Fonte: Autora (2020)

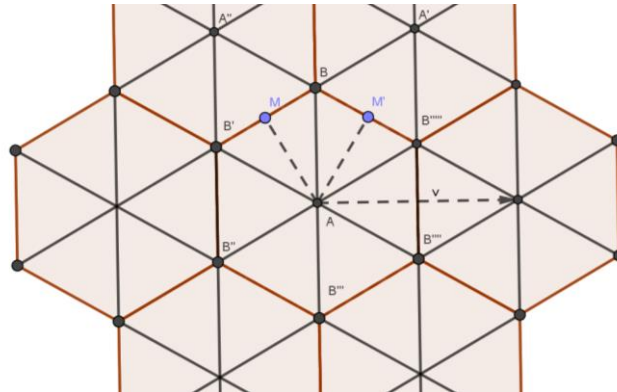
Propriedade 1: Sejam  $A$  e  $B$  dois centros de simetrias distintos de um conjunto  $A$ . Supondo que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam ângulos admissíveis em  $A$  e  $B$ , respectivamente, de modo que  $R_{A,\alpha}(A) = A$  e  $R_{B,\beta}(A) = A$ , obtemos a partir das rotações  $R_{A,\alpha}$  e  $R_{B,\beta}$ , uma translação  $T_{\vec{v}}$  com  $\vec{v} \neq 0$ , tal que  $T_{\vec{v}}(A) = A$ .

Figura 80: Translação obtida a partir da composição de duas rotações



Fonte: Autora (2020)

Se um conjunto  $A$  do plano tem dois centros de simetria distintos então  $A$  é invariante por uma translação de vetor não nulo. Determinando-se os centros das rotações  $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta}$  e  $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}$  obtemos, respectivamente, os centros de simetria  $M$  e  $M'$  ambos com ângulo admissível  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Na figura abaixo, esta análise pode ser estendida, com argumentos análogos, a todo o plano. Ela é invariante pela translação  $T_{\vec{v}} = R_{A',\alpha} \circ (R_{A,\alpha})^{-1}$ , onde  $A + \vec{v} = R_{A',\alpha}(A)$ , ou ainda  $\vec{v} = 2(\overline{MM'})$ .

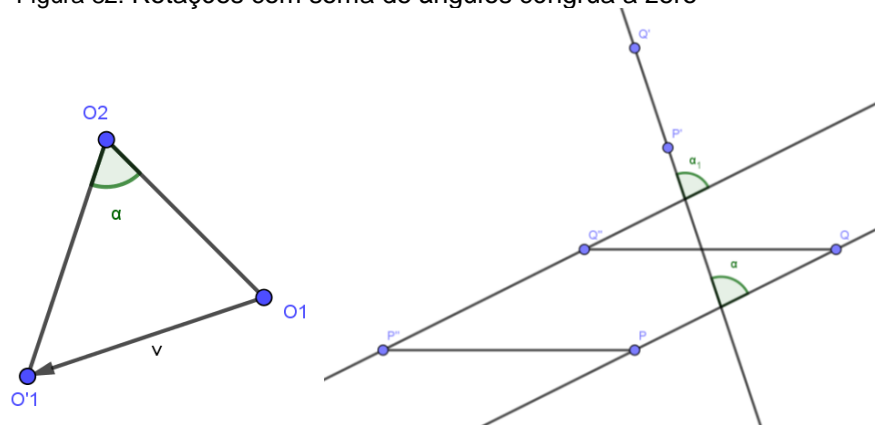
Figura 81: Translação do vetor  $\vec{v}$ 

Fonte: Autora (2020)

Dadas duas rotações de centros arbitrários, se a soma dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  é congruente a zero, então  $R_{O_2, \beta} \circ R_{O_1, \alpha} = T_{\vec{v}}$ , sendo  $\vec{v}$  o vetor  $\overrightarrow{O_1 O'_1}$  e  $O'_1 = R_{O_2, \beta}(O_1)$ .

Demonstração: Pela hipótese temos que  $\alpha + \beta \equiv 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , logo  $\beta = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Portanto  $R_{O_2, \beta} = R_{O_2, -\alpha + 2k\pi} = R_{O_2, -\alpha}$ .

Figura 82: Rotações com soma de ângulos cônica a zero



Fonte: Autora (2020)

Tomando dois pontos  $P$  e  $Q$  distintos do plano, um ângulo  $\alpha$  que esteja no intervalo  $] -90^\circ, 90^\circ ]$ , e dois centros distintos de rotação  $O_1$  e  $O_2$  temos que pela composta das rotações  $R_{O_2, -90^\circ} \circ R_{O_1, \alpha}$  a imagem do segmento  $\overline{PQ}$  será o segmento  $\overline{P''Q''}$ , formando o quadrilátero  $PQQ''P''$ . Observamos que a medida do ângulo orientado  $\overline{PQ}$  para  $\overline{P''Q''}$  é zero e  $R_{O_2, -\alpha} \circ R_{O_1, \alpha}$  é uma translação  $T_{\vec{v}}$ .

A partir do centro de rotação  $O_1$  e do ponto  $O'_1 = R_{O_2, -\alpha}(O_1)$  o vetor  $\vec{v}$  pode ser determinado, pois  $O'_1 = R_{O_2, -\alpha}(O_1) = (R_{O_2, -\alpha} \circ R_{O_1, \alpha})(O_1) = T_{\vec{v}}(O_1) = O_1 + \vec{v}$ , ou seja, o vetor  $\vec{v}$  da translação é o vetor  $\overrightarrow{O_1 O'_1}$ .

Podemos obter  $R_{O_2, -\alpha} \circ R_{O_1, \alpha} = Id$ , notando que  $O_1 = O_2$  e  $O'_1 = O_1$  de modo que  $\vec{v} = \vec{0}$ .

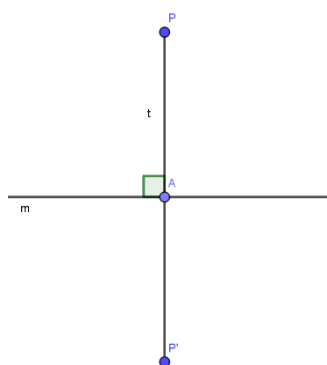
### 3.6 Reflexão em relação a uma reta

Seja  $r$  uma reta no plano  $\pi$ . A reflexão em torno da reta  $r$  é a função  $R_r: \pi \rightarrow \pi$  assim definida:  $R_r(X) = X$  para todo  $X \in r$  e, para  $X \notin r$ ,  $R_r(X) = X'$  é tal que a mediatriz do segmento  $\overline{XX'}$  é a reta  $r$ . Noutras palavras, seja  $Y$  o pé da perpendicular baixada de  $X$  sobre  $r$ . Então  $Y$  é o ponto médio do segmento  $\overline{XX'}$ . (LIMA, 1996)

#### 3.6.1 Definição

Dada uma reta  $m$  do plano, a reflexão em relação a  $m$  é a aplicação que fixa todos os pontos de  $m$  e associa a cada ponto  $P$  do plano,  $P \notin m$ , o ponto  $P'$  tal que  $m$  é a reta mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Indicaremos por  $R_m$  a reflexão em relação à reta  $m$ .

Figura 83: Reflexão do ponto P em relação a reta m



Fonte: Autora (2020)

Pela definição acima  $R_m(P) = P$  para todo ponto  $P \in m$  e, quando  $P \notin m$ , temos  $R_m(P) = P'$  se e somente se  $m$  é a reta mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Neste caso  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação à reta  $m$  que, por sua vez, é chamado o eixo da reflexão.



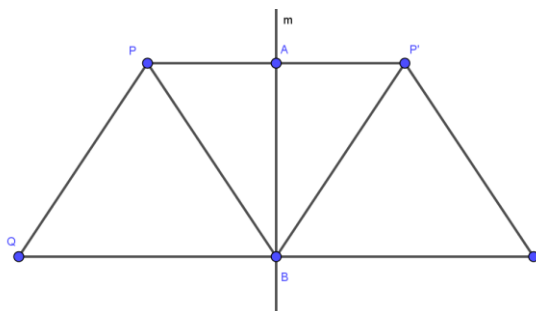
Propriedade 1: Toda reflexão em relação a uma reta é uma isometria.

Para provar essa propriedade supomos que  $P$  e  $Q$  não pertencem à reta  $m$  e não pertençam a mesma reta perpendicular  $m$ .

Demonstração: Sejam  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente, as reflexões dos pontos  $P$  e  $Q$  em relação à reta  $m$ . Considere ainda  $A$  e  $B$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ , respectivamente. Pelo critério  $LAL$  de congruência de triângulos temos  $\Delta ABP \cong \Delta ABP'$  ( $\overline{AB}$  é comum,  $\overline{PA} \cong \overline{P'A}$ , pois  $A$  é o ponto médio e  $\hat{P}AB \cong \hat{P'AB}$  (são retos)). Pela congruência anterior podemos ainda concluir que  $\overline{PB} \cong \overline{P'B}$  e  $\hat{P}BA \cong \hat{P'BA}$ . Como  $\hat{P}BA$  e  $\hat{P'BA}$  são, respectivamente, os ângulos complementares de  $\hat{P}BQ$  e  $\hat{P'BQ'}$  temos que  $\hat{P}BQ \cong \hat{P'BQ'}$ . Novamente pelo critério  $LAL$  de congruência temos que  $\Delta PBQ \cong \Delta P'BQ'$  ( $\overline{PB} \cong \overline{P'B}$ ,  $\hat{P}BQ \cong \hat{P'BQ'}$  e  $\overline{QB} = \overline{Q'B}$ ) e, portanto,  $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ .

A demonstração dos demais casos é análoga.

Figura 84: Reflexão do segmento  $\overline{PQ}$  em relação a reta  $m$



Fonte: Autora (2020)

Propriedade 2: Os únicos pontos fixos da reflexão  $R_m$  são pontos pertencentes ao eixo  $m$ .

Propriedade 3: Uma reta qualquer  $r$  do plano é invariante pela reflexão  $R_m$ , se e somente se, as retas  $r$  e  $m$  são coincidentes ou perpendiculares.

### 3.6.2 Composição de isometrias

Proposição 1: Sejam  $m_1$  e  $m_2$  retas paralelas distintas do plano e  $\overline{AB}$  uma perpendicular comum com  $A \in m_1$ ,  $B \in m_2$ . Então  $R_{m_2} \circ R_{m_1} = T_{2\overline{AB}}$ .

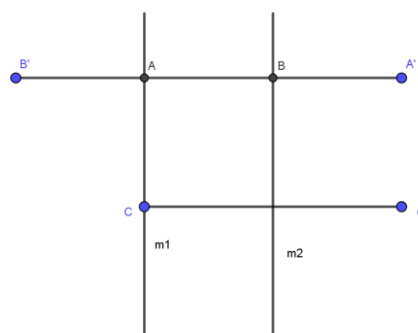
A igualdade  $R_s \circ R_r = T_{2\vec{v}}$ , válida quando  $r$  e  $s$  são paralelas, pode também ser lida da direita para a esquerda. Ela nos diz então que toda translação  $T_{\vec{v}}$  pode exprimir-se como composta de duas reflexões em torno de retas paralelas situadas uma da

outra a uma distância igual a metade do comprimento do vetor  $\vec{v}$ . Essas retas podem ser tomadas em qualquer parte do plano, desde que mantenham essa distância, que sejam perpendiculares a  $v$  e que o sentido do vetor  $v$  seja da reta  $r$  para a reta  $s$ . (LIMA, 1996)

Demonstração : Sendo  $A' = R_{m_2}(A)$  é imediato verificar que  $\overline{AA'} = 2\overline{AB}$  e, portanto,  $A' = T_{\overline{AA'}}(A) = T_{2\overline{AB}}(A)$ . Escolhendo um ponto arbitrário  $C$  de  $m_1$ ,  $C \neq A$ , e  $C' = R_{m_2}(C)$ , temos que o quadrilátero  $ACC'A'$  é um retângulo, de modo que  $CC' = AA' = 2AB$ , e assim  $C' = T_{\overline{CC'}}(C) = T_{2\overline{AB}}(C)$ . Finalmente, sendo  $B' = R_{m_1}(B)$  temos  $B = R_{m_1}(B')$  e  $\overline{BB'} = 2\overline{AB}$ , donde  $B = T_{\overline{BB'}}(B') = T_{2\overline{AB}}(B')$ .

Concluimos que  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(A) = R_{m_2}(A) = R_{m_2}(A) = A' = T_{2\overline{AB}}(A)$ ,  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(C) = R_{m_2}(C) = R_{m_2}(C) = C' = T_{2\overline{AB}}(C)$  e  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(B') = R_{m_2}(B) = B = T_{2\overline{AB}}(B')$ . Como  $A, C$  e  $B'$  são pontos não colineares segue a igualdade das isometrias  $R_{m_2} \circ R_{m_1}$  e  $T_{2\overline{AB}}$ . De acordo com a propriedade 3 das translações.

Figura 85: Translação obtida pela composição de duas rotações



Fonte: Autora (2020)

Proposição 2: Sejam  $m_1$  e  $m_2$  retas concorrentes distintas do plano se interceptando num ponto  $O$  e seja  $\alpha$  a medida de um dos ângulos orientados da reta  $m_1$  para a reta  $m_2$ . Então  $R_{m_2} \circ R_{m_1} = R_{O, 2\alpha}$ .

Portanto, a composta de duas rotações do plano com centros distintos e ângulos  $\alpha, \beta$  pode ser uma rotação com um terceiro centro de ângulo  $\alpha + \beta$  ou pode ser uma translação, caso se tenha  $\beta = -\alpha$ . (É importante lembrar que, para efeito de rotações  $\beta = -\alpha$  é o mesmo que  $\alpha + \beta = 360^\circ$ ). (LIMA, 1996)

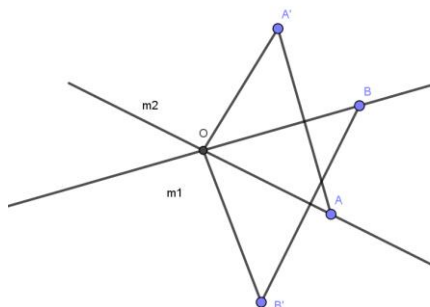
Demonstração : Seja  $A$  um ponto qualquer de  $m_1$ ,  $A \neq O$ , e considere  $B \in m_2$  de modo que  $R_{O,\alpha}(A) = B$ . Se  $A' = R_{m_2}(A)$  então  $m_2$  é a reta mediatriz de  $AA'$  e como  $O \in m_2$  temos  $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$ . Além disso, desde que  $m_2$  contém a bissetriz de  $\widehat{AOA'}$ , segue que este ângulo tem medida igual a  $2\alpha$ , ou seja,  $A' = R_{O,2\alpha}(A)$ . Analogamente, se  $B' = R_{m_1}(B)$  então  $\overline{OB} \equiv \overline{OB'}$  e  $m(B'OB) \equiv 2\alpha$ , isto é,  $B = R_{O,2\alpha}(B')$ .

Logo  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(O) = R_{m_2}(O) = O = R_{O,2\alpha}(O)$ ,  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(A) = R_{m_2}(A) = A' = R_{O,2\alpha}(A)$ ,  $(R_{m_2} \circ R_{m_1})(B') = R_{m_2}(B) = B = R_{O,2\alpha}(B')$ .

Como  $O, A$  e  $B'$  são pontos não colineares temos a igualdade das isometrias  $R_{m_2} \circ R_{m_1}$  e  $R_{O,2\alpha}$ .

As demonstrações das proposições foram retiradas de *Um estudo geométrico das transformações elementares*, Alves e Galvão (1996).

Figura 86: Rotação do ângulo central obtida pela composta da rotação de duas retas



Fonte: Autora (2020)

Analisando as proposições observamos que a composta de duas reflexões em relação a retas é uma translação ou uma rotação. Sendo a transformação identidade do plano simultaneamente uma translação e uma rotação.

Como consequência toda rotação, pode ser escrita como composta de duas reflexões em relações a retas concorrentes diferentes.

De modo efetivo, sendo  $m_1$  e  $m_2$  retas concorrentes em  $O$  e  $\alpha$  o ângulo orientado de  $m_1$  para  $m_2$ , teremos  $R_{O,2\alpha} = R_{m_2} \circ R_{m_1}$ .

## 4. TESSELAÇÕES

Neste capítulo iremos definir tesselação e em particular estudaremos as tesselações regulares, que conforme veremos no capítulo seguinte foi objeto de estudo de Escher, e fez parte de suas obras.

### 4.1 Definições

Segundo Torres (2017) tesselação é uma divisão de uma superfície em polígonos congruentes que não se sobrepõem e tampouco deixam lacunas, chamados de tesselas, ladrilhos ou mosaicos. As tesselações são referidas como ladrilhamento e aparecem em algumas das habilidades e competências da BNCC no eixo de Geometria no ensino fundamental e no ensino médio, conforme Apêndices A e B.

Tesselar o plano euclidiano significa cobri-lo com figuras que se encaixem perfeitamente não havendo sobreposições, nem espaços vazios entre elas, de modo que a superfície particionada seja igual ao tamanho total. (LEITÃO, 2015).

Podemos definir tesselação como sendo a cobertura de toda a superfície de um plano por figuras de modo que não existam espaços e nem sobreposições entre elas. Podemos considerar a tesselação de todo o plano ou de apenas uma região limitada, a primeira não é possível na prática, mas podemos obtê-la idealmente. (LEITÃO, 2015).

Dada uma tesselação  $T$  dizemos que  $T$  é simétrica se existir uma isometria  $f: T \rightarrow T$ .

Vamos chamar de  $\tau$  ao conjunto de todas as isometrias de  $f: T \rightarrow T$ .

As isometrias  $f: T \rightarrow T$  são chamadas simetrias de  $T$  e elas formam um grupo<sup>11</sup> chamado grupo de simetrias de  $T$  representado por  $\tau$ .

Concluimos assim que  $T$  é simétrica se existir uma isometria  $f$  em  $\tau$  tal que  $f(\pi_1) = \pi_2$  para quaisquer ladrilhos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  em  $T$ .

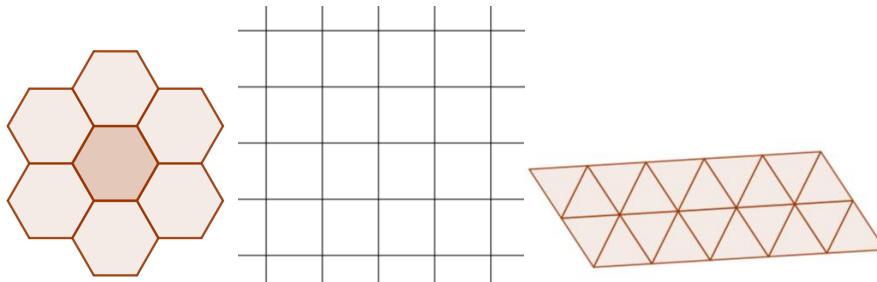
---

<sup>11</sup> Diz-se que um conjunto  $G$  de elementos, não vazio, forma um *grupo* se em  $G$  está definida uma operação binária, denominada produto e indicada por  $\cdot$  tal que :

- (1)  $a, b \in G$  implica que  $a \cdot b \in G$  (fechamento).
- (2)  $a, b, c \in G$  implica que  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (lei associativa).
- (3) Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a \cdot e = e \cdot a = a$  para todo  $a \in G$  (existência de um elemento unidade em  $G$ ).
- (4) Para todo  $a \in G$  existe um elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$  (existência de inverso em  $G$ ).

Segundo Torres (2017), as tesselações mais comuns no plano são as baseadas no triângulo equilátero, no hexágono regular e no quadrado conforme as seguintes figuras.

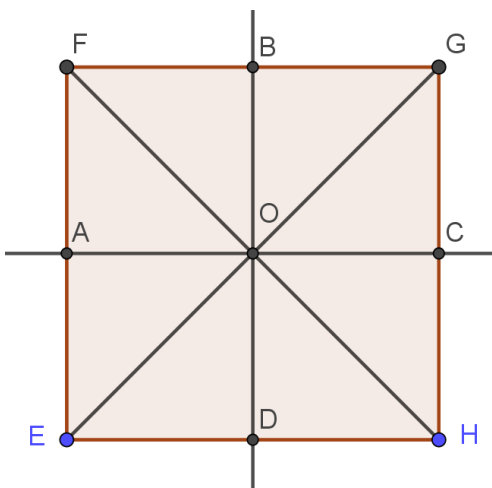
Figura 87: Tesselação Simétrica (hexágono regular, quadrado, triângulo equilátero)



Fonte: Autora (2020)

Nestas tesselações observamos simetrias que levam um ladrilho a si mesmo. Em relação ao quadrado podemos observar oito simetrias, sendo quatro rotações e quatro reflexões em relação às retas  $R_{\overline{AC}}$ ,  $R_{\overline{BD}}$ ,  $R_{\overline{EG}}$  e  $R_{\overline{FH}}$ .

Figura 88: Simetrias do quadrado



Fonte: Autora (2020)

## 4.2 Elementos das Tesselações no plano

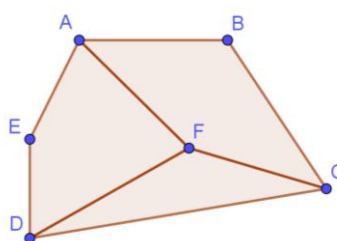
As tesselações que apresentaremos são formadas por polígonos regulares que farão a cobertura de toda superfície de parte do plano.

Nomearemos os principais elementos dos polígonos que compõem uma tesselação:

- nós de uma tesselação são todos os vértices dos polígonos usados na tesselação;
- arestas são os segmentos de retas que tem como extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono.

Na figura abaixo observamos os vértices  $A, B, C, D$  e  $E$  e os nós  $A, B, C, D, E, E$  e  $F$ .

Figura 89: Nós e vértices



Fonte: Autora (2020)

As tesselações podem ser classificadas de acordo com os tipos de polígonos e a disposição destes. As tesselações se classificam em: monoédricas, regulares, semirregulares, demirregulares, periódicas e não periódicas. Nesta dissertação estudaremos apenas as tesselações regulares, pois elas foram as usadas nas obras de divisão regular do plano de Escher que foram objeto de estudo desta dissertação.

### 4.3 Tesselações Regulares

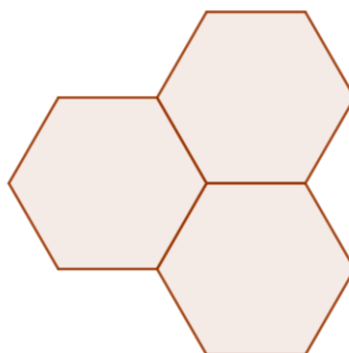
São Tesselações formadas por polígonos regulares e congruentes entre si. As tesselações regulares também são chamadas de pavimentações platônicas.

Uma tesselação regular do plano Euclidiano é uma cobertura total do plano por polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados, sem superposição de tais polígonos, de modo que a fronteira entre essas figuras seja sempre arestas

completas ou nós. Denotamos uma tesselação regular por  $\{p,q\}$ , onde  $q$  polígonos regulares com  $p$  lados encontram-se em cada vértice. A tesselação dual representaremos por  $\{q,p\}$ , onde  $p$  polígonos regulares com  $q$  lados encontram-se em cada vértice. Em particular, se  $p = q$  a tesselação é dita auto-dual. (LEITÃO, 2015)

Dada uma tesselação regular, podemos representá-la por  $\{p, q\}$ , sendo  $q$  a quantidade de polígonos regulares de  $p$  lados que estão ao redor de cada vértice ou nó. Observe o exemplo a seguir da tesselação regular  $\{6,3\}$ .

Figura 90: Tesselação regular  $\{6,3\}$



Fonte: Autora (2020)

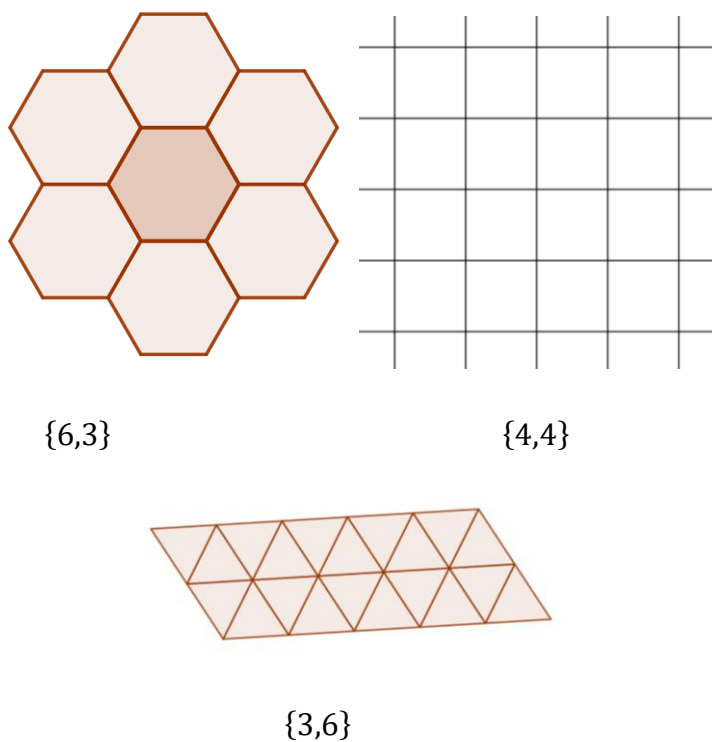
As tesselações regulares são formadas com uma quantidade de polígonos regulares em que a soma de seus ângulos internos com vértices nesse nó seja igual a  $360^\circ$ .

Observamos que no caso do polígono regular com o menor número de lados, o triângulo equilátero, teremos seis triângulos em um nó cuja soma é dada por  $60^\circ \times 6 = 360^\circ$ . No caso do quadrado, teremos quatro quadrados em um nó e novamente  $90^\circ \times 4 = 360^\circ$ . Note que no pentágono cada ângulo interno mede  $108^\circ$  e como  $108$  não é divisor de  $360$  não é possível fazer a tesselação. No caso do hexágono regular, teremos três em um nó e mais uma vez concluímos que  $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ .

Note que dado um polígono regular de  $n$  lados,  $n \geq 6$  o seu ângulo interno possui uma medida maior que  $120^\circ$  e menor que  $180^\circ$ . Como  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$  e  $2 \times 180^\circ = 360^\circ$  teríamos em cada nó uma quantidade de polígonos maior que 2 e menor que 3, se tratando de um número não inteiro, o que é absurdo.

Com base nas ideias desenvolvidas até aqui, em uma tesselação regular os únicos polígonos regulares que podem ser usados são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Figura 91: Tesselações regulares



Fonte: Autora (2020)

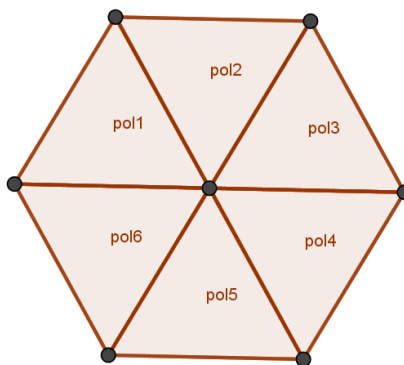
Proposição: As únicas tesselações regulares no plano euclidiano são as formadas por triângulos equiláteros, por quadrados ou por hexágonos regulares.



Demonstração: Supondo que tenhamos uma tesselação regular do plano formada por polígonos regulares de  $n$  lados. Se em um nó desta tesselação temos  $m$  polígonos, então a soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice será igual a  $360^\circ$ . Sendo a medida dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados dada pela expressão  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ , temos que a soma dos ângulos internos de um polígono regular em nó será dada por  $m \cdot \left(\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}\right) = 360^\circ$ . Simplificando essa equação teremos que  $m = \frac{2n}{(n-2)}$ . Como  $m \geq 3$ , obtemos a desigualdade  $\frac{2n}{(n-2)} \geq 3$ , que é equivalente a  $n \leq 6$ . Portanto concluímos que os únicos polígonos regulares possíveis para uma tesselação regular do plano euclidiano são: o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular.

Analisando o caso de  $n = 3$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 6$ . Portanto será uma tesselação regular do plano de triângulos equiláteros sendo seis triângulos em cada nó, representada por  $\{3,6\}$ .

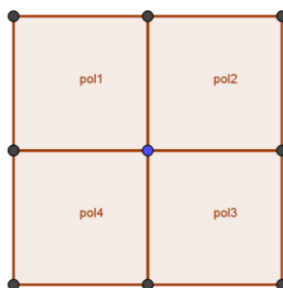
Figura 92: Tesselação  $\{3,6\}$



Fonte: Autora (2020)

Analisando o caso de  $n = 4$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 4$ . Portanto será uma tesselação regular do plano de quadrados sendo quatro quadrados em cada nó, representada por  $\{4,4\}$ .

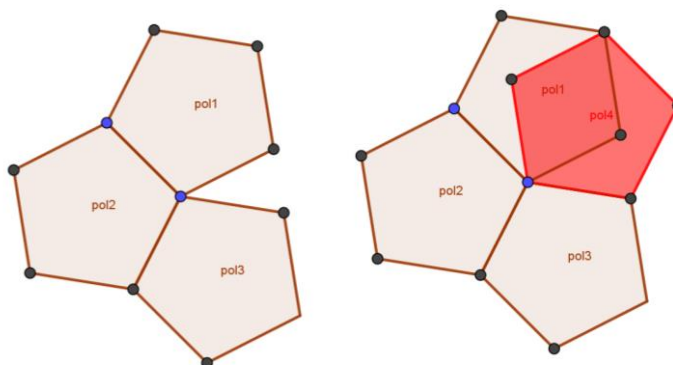
Figura 93: Tesselação {4,4}



Fonte: Autora (2020)

Analisando o caso de  $n = 5$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 3,333\dots$ , mas como  $m$  deve ser um número inteiro, concluímos que o pentágono regular não poderá ser usado na tesselação regular do plano Euclidiano. Observando as figuras abaixo, notamos que 3 pentágonos regulares não preenchem a tesselação e 4 pentágonos regulares se sobrepõem.

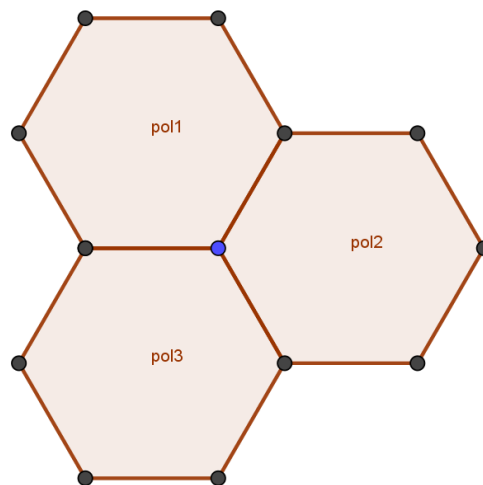
Figura 94: Pentágonos regulares ao redor de um vértice



Fonte: Autora (2020)

Analisando o caso de  $n = 6$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 3$ . Portanto será uma tesselação regular do plano de hexágonos regulares sendo 3 hexágonos em cada nó, representada por {6,3}.

Figura 95: Tesselação { 6,3}



Fonte: Autora (2020)

Concluindo, portanto, que somente o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados na tesselação regular do plano.

As propriedades geométricas das tesselações foram utilizadas por Escher na construção de boa parte de suas obras, inclusive nas analisadas no próximo capítulo desta dissertação.

## 5. ANÁLISE OBRAS DE ESCHER

Neste capítulo usando com base todos os conceitos vistos nos capítulos anteriores iremos fazer a análise das obras de Escher usando os conceitos vistos anteriormente.

Na obra de Maurits Cornelis Escher, conforme o primeiro capítulo, é possível observar a viagem do artista por três campos nas gravuras matemáticas: a estrutura do espaço, a estrutura da superfície e as representações pictóricas entre espaço e superfície plana.

No entanto, segundo Ernest (1978) nenhum objeto preocupou tanto Escher como a divisão cíclica de superfícies, escrevendo um extenso ensaio com pormenores técnicos e de forma minuciosa.

Posso alegrar-me, com boa consciência, com esta perfeição e testemunhá-la, pois não fui eu que a inventei ou mesmo até a descobri. As leis da matemática não são nenhuma invenções ou criações humanas. Elas são, elas existem completamente independentes da mente humana. O mais que uma pessoa lúcida pode descobrir é que elas lá estão e raciocinar sobre o assunto. (ESCHER, p.39, 1926)

Sobre a divisão regular de superfícies, escreve ainda:

Esta é a fonte mais rica de inspiração de onde jamais bebi e lá ainda não está seca, de modo algum. (ESCHER,p.39,1926)

Nesta dissertação faremos um estudo em relação às gravuras matemáticas na estrutura da superfície no grupo de gravuras de ciclos. Trataremos das tesselações e das transformações geométricas no plano: rotações, translações e reflexões. Na produção de algumas dessas tesselações, Escher usou mais de um tipo de transformação.

Segundo Ernest (1978) uma característica especial e única da divisão de superfícies de Escher é que escolhe sempre motivos que representam alguma coisa de concreto. Sobre isso ele escreve:

Os árabes eram mestres na arte de preencher superfícies, sem lacunas, sempre com a mesma figura. Eles decoravam em especial, em Alhambra, na Espanha, paredes e pavimentos com peças de louça coloridas e congruentes, ajustadas, umas às outras, de forma

contínua. É pena que a religião islâmica lhes proibisse a representação de imagens. Nos seus mosaicos limitaram-se sempre a figuras geométricas abstratas. Tanto quanto é do meu conhecimento, nenhum artista árabe, arriscou alguma vez (ou nunca lhe teria vindo a ideia?) usar como elemento para preenchimento de superfícies, figuras concretas, perceptíveis e existentes na Natureza, como aves, peixes, répteis e pessoas. Esta limitação é para mim tanto mais incompreensível quanto o reconhecimento das componentes dos meus padrões é a razão do interesse que mantenho vivo neste campo. (ESCHER, p.41)

### 5.1 Análise da obra de Escher sobre a divisão regular de superfície com peixes de asas

A primeira obra a ser analisada foi criada em 1954, sendo sua referência o número 99, VIII. Nela observamos a tesselação por rotação, no qual a figura base de um peixe com asas é formada a partir de rotações de regiões de um triângulo equilátero.

A figura abaixo representa uma das divisões regulares do plano feitas pelo artista holandês M. C. Escher (1898-1972). Tais desenhos são elaborados a partir de uma subdivisão do plano em polígonos.

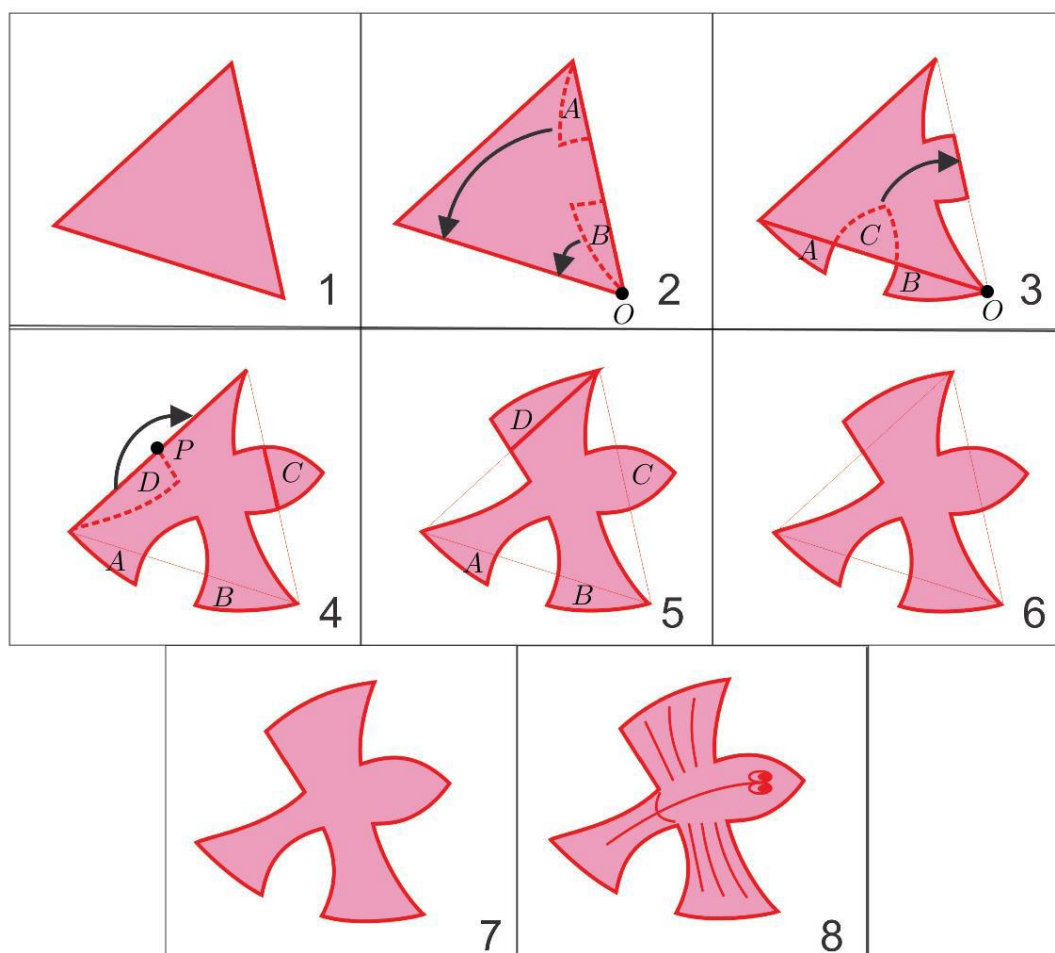
FIGURA 96 : divisão regular de superfície com peixes de asas



Fonte: <[https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox\[gallery\\_image\\_1\]/29](https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox[gallery_image_1]/29)>. Acesso em julho 2019.

Segundo Alves e Galvão (1996) e Torres (2017), podemos usar a figura abaixo para entender as rotações aplicadas na formação da figura base, temos no quadro 1 um triângulo equilátero. No quadro 2 foram feitos no triângulo equilátero dois recortes criando a região *A* e a região *B* que sofrem uma rotação de  $60^\circ$  em torno do ponto *O* conforme o próximo quadro. No quadro 3 foi feito um recorte criando a região *C* que sofre uma rotação de  $-60^\circ$ . As extremidades da região *C* coincidem com as extremidades internas das regiões *A* e *B* rotacionadas. No quadro 4 foi feito um recorte criando a região *D* que sofre uma rotação de  $-180^\circ$  em torno do ponto *P*, obtendo a figura do quadro 5. O ponto *P* é o ponto médio do lado do triângulo. Nos quadros 6 e 7 apagamos as linhas desnecessárias e finalmente no quadro 8 se formará a figura base da tesselação que será formada também por rotação.

Figura 97: figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do triângulo equilátero

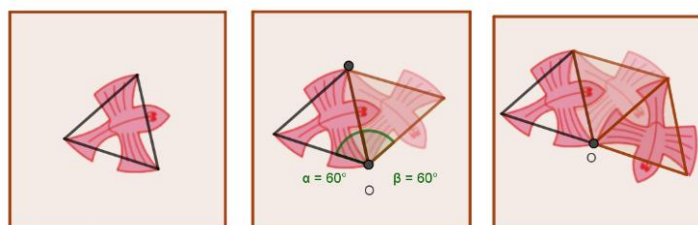


Segundo Torres (2007), usando como base a figura abaixo, vamos compreender como é formada a tesselação. No quadro 1 temos a figura formada no processo anterior, que será a base para a nossa tesselação. Vamos nos referir a ela como “peixe”.

No quadro 2 o peixe sofre uma rotação de  $-60^\circ$  em torno do ponto  $O$  e esse movimento se repete por mais cinco vezes até completar os seis peixes como mostra o quadro 6.

Observação: No quadro 6 temos a formação de um hexágono regular que poderia servir de figura base, rotacionando as seis regiões de um ângulo de  $-180^\circ$  em torno dos pontos médios dos lados do hexágono.

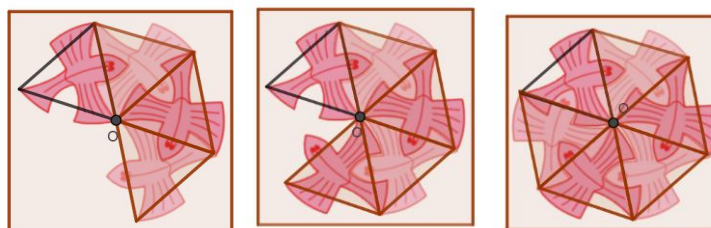
Figura 98: tesselação formada a partir das rotações da figura base com peixes de asas



Quadro 1

Quadro 2

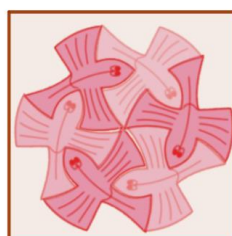
Quadro 3



Quadro n 4

Quadro 5

Quadro 6



Quadro 7

Segundo Alves e Galvão (1996), a mesma figura poderia ser criada por uma translação que é obtida pela composição de duas rotações, veja a imagem abaixo como uma malha que foi construída para auxiliar na demonstração. E em seguida iremos separar essa malha da imagem para facilitar a demonstração.

Figura 99: malha hexagonal sobreposta a obra de Escher da divisão regular da superfície com peixes de asas

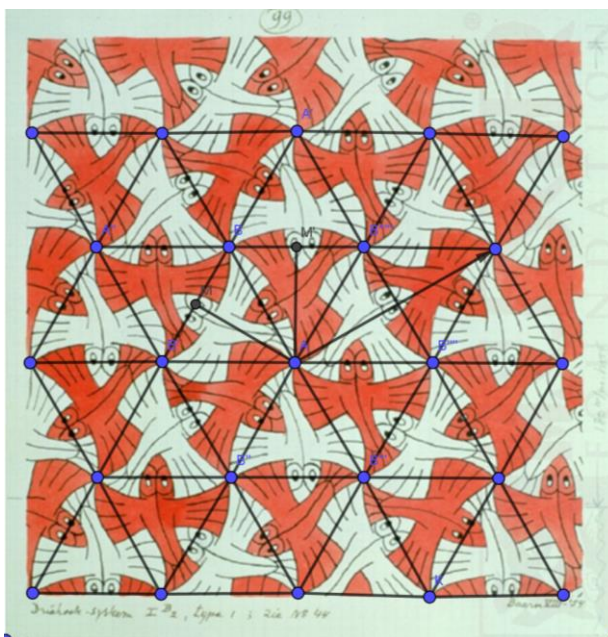
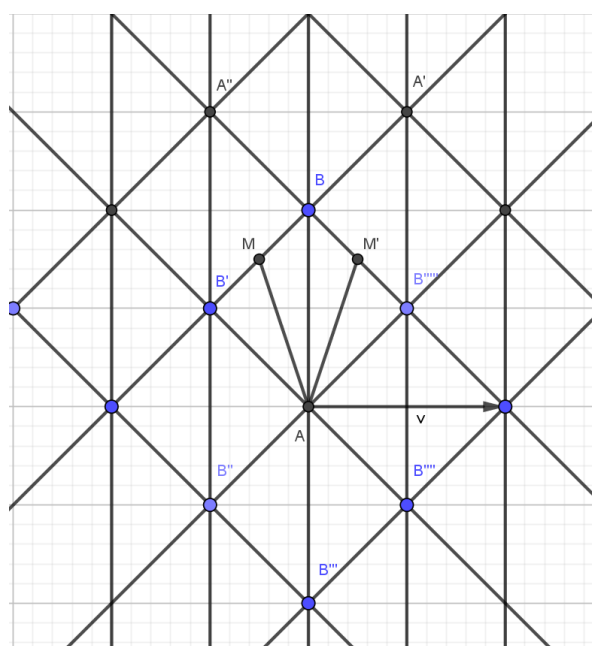


Figura 100: translação obtida pela composição de duas rotações



Fonte: Autor



Podemos imaginar a figura prolongada indefinidamente em todas as direções e podemos notar que o ponto  $A$  é um centro de simetria com ângulo admissível  $\alpha = 60^\circ$  e o ponto  $B$  é um centro de simetria com ângulo admissível  $\beta = 120^\circ$ .

A partir destes centros muitos outros podem ser determinados. Por exemplo, através de composições pela rotação  $R_{B,\beta}$  obtemos que  $A' = R_{B,120^\circ}(A)$ ,  $A'' = R_{B,120^\circ}(A')$  são centros de simetria com mesmo ângulo admissível  $\alpha = 60^\circ$  enquanto que, através de conjugação pela rotação  $R_{A,\alpha}$ , obtemos que  $B' = R_{A,60^\circ}(B)$ ,  $B'' = R_{A,60^\circ}(B')$ ,  $B''' = R_{A,60^\circ}(B'')$ , etc ... são centros de simetria com mesmo ângulo admissível  $\beta = 120^\circ$ .

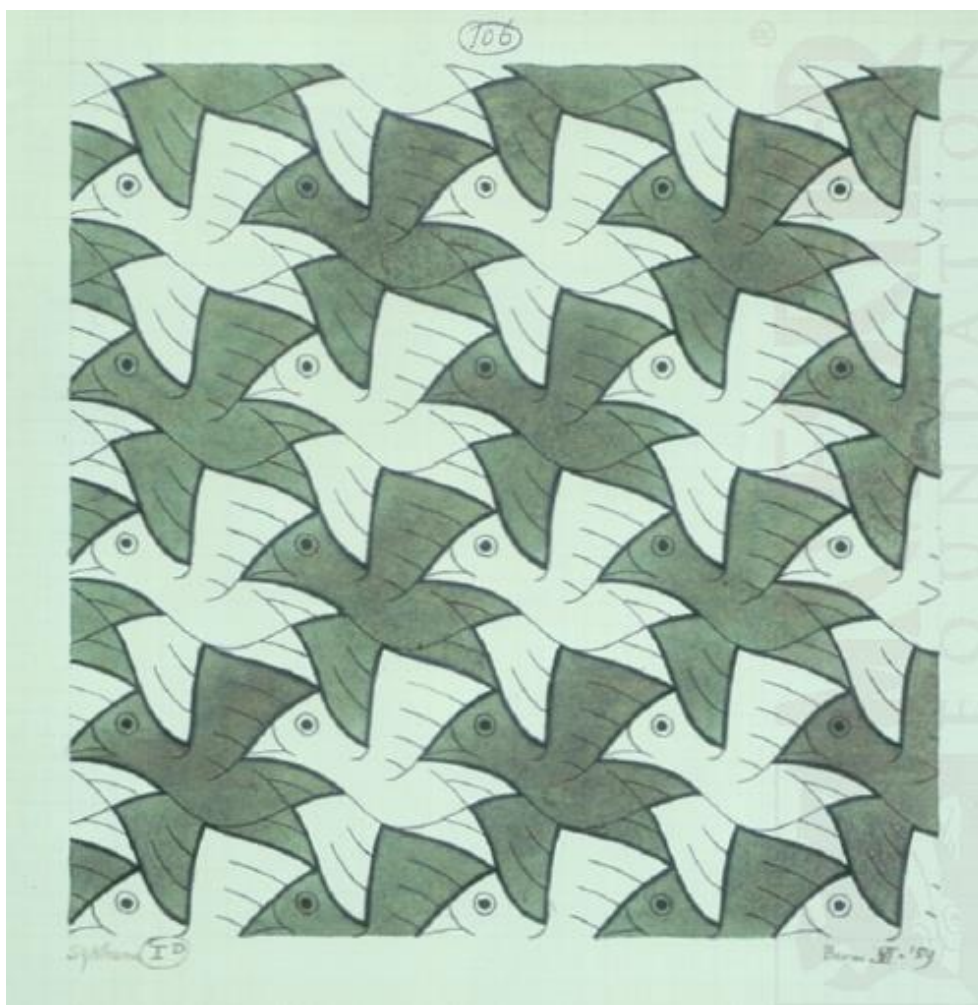
Por outro lado, determinando-se os centros das rotações  $R_{A,\alpha}$  o  $R_{B,\beta}$  e  $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}$  obtemos, respectivamente, os centros de simetria  $M$  e  $M'$  ambos com ângulos admissíveis  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Análise foi retirada de um Estudo Geométrico das transformações elementares de Sérgio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão e pode ser estendida, com argumentos análogos, a todo plano. Observamos finalmente que a figura é invariante pela translação  $T_{\vec{v}} = R_{A',\alpha} \circ (R_{A,\alpha})^{-1}$  sendo  $A + \vec{v} = R_{A',\alpha}(A)$ , ou ainda,  $\vec{v} = 2\overline{MM'}$ .

## 5.2 – Análise da obra sobre a divisão regular de superfície com pássaros

A segunda obra a ser analisada foi criada em 1959, sendo sua referência o número 106. Nela temos a tesselação por translação, no qual a figura base de um pássaro é formada a partir de translações de regiões de um quadrado.

Figura 101: divisão regular de superfície com pássaros



Fonte: <[https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox/gallery\\_image\\_1/23](https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox/gallery_image_1/23)>acesso em julho 2019.

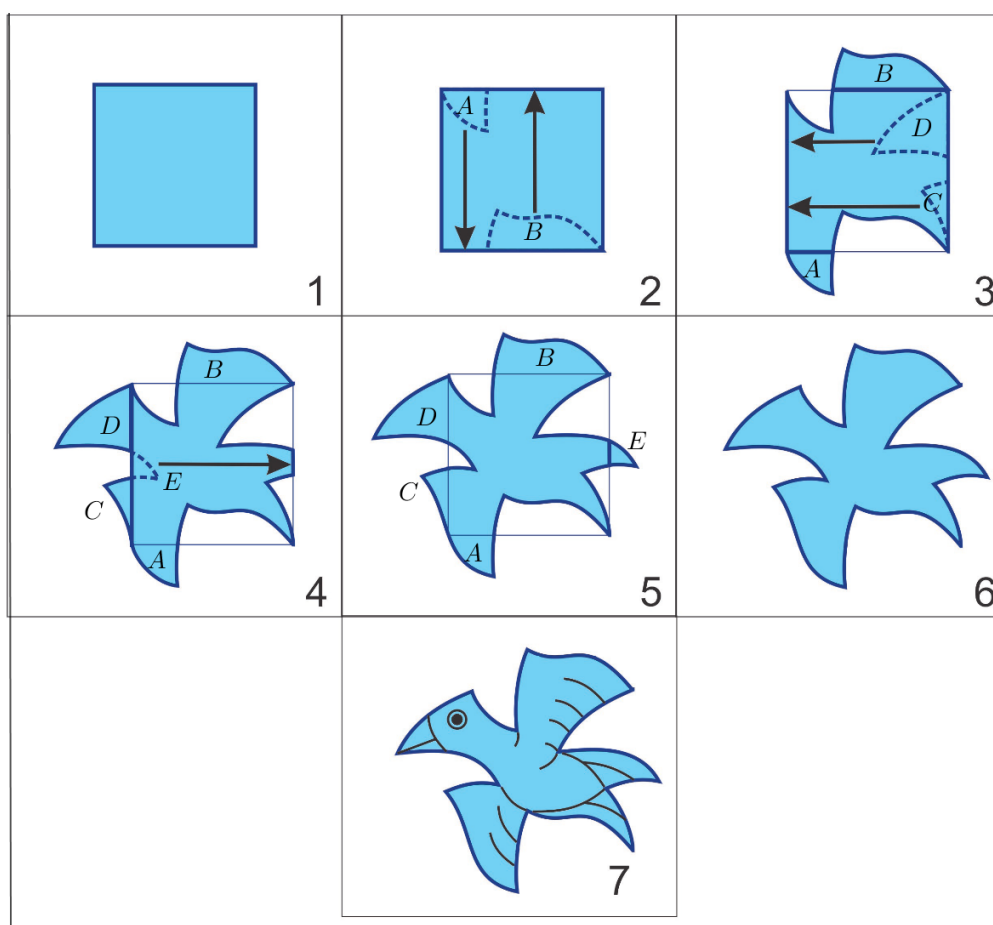
Segundo Torres (2017), podemos usar a figura a seguir para entender as translações aplicadas na formação da figura base, temos no quadro 1 um quadrado que servirá de base.

No quadro 2 observamos que as regiões A e B sofrem uma translação de um vetor vertical cujo módulo é igual a medida do lado do quadrado.

Nos quadros 3 e 4 as regiões C, D e E sofrem uma translação de um vetor horizontal cujo módulo é igual a medida do lado do quadrado. Nos quadros 5 e 6 observamos o resultado da formação da figura básica de um pássaro.

A partir da parte artística, dar-se-á vida a figura no quadro 7 quando finalmente se formará a figura base da Tesselação.

Figura 102: figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do quadrado.

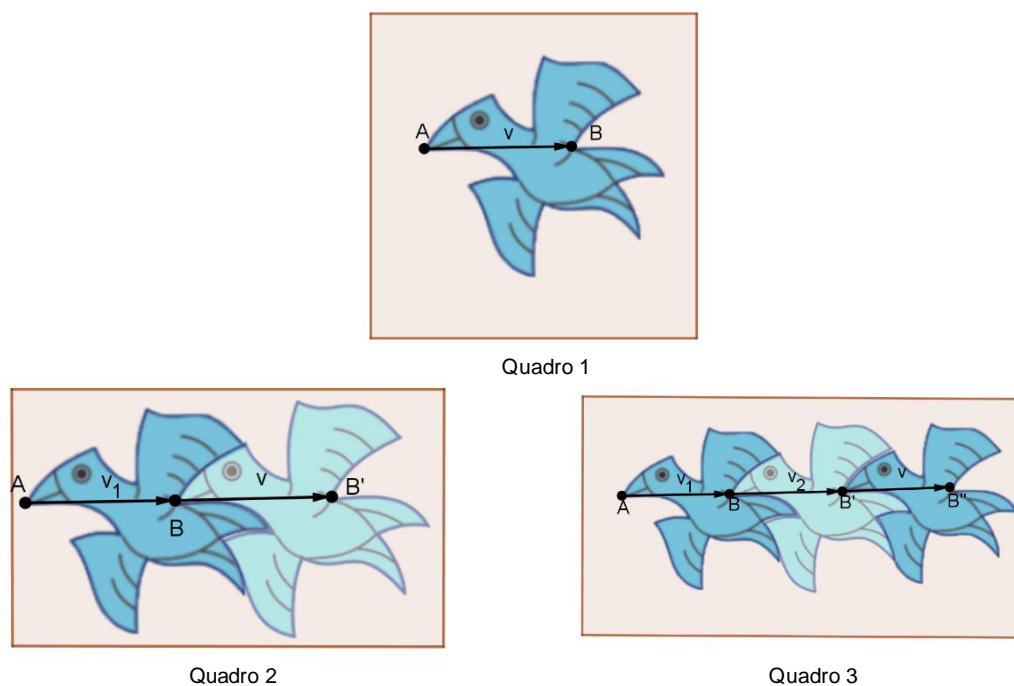


Fonte: < <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichatecnicaaula.html?aula=23463>>. acesso em julho de 2019.

E agora vejamos, segundo Torres (2017), a justaposição de vários pássaros recobrando o plano através de translações como mostra a figura abaixo.

Note que no quadro 1, temos a figura base de um pássaro e um vetor  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ . No quadro 2 temos uma primeira translação do pássaro inicial dada por  $T_{\vec{v}}(B) = B'$ . O mesmo ocorre no quadro 3 com outra translação do segundo pássaro dada por  $T_{\vec{v}}(B') = B''$ .

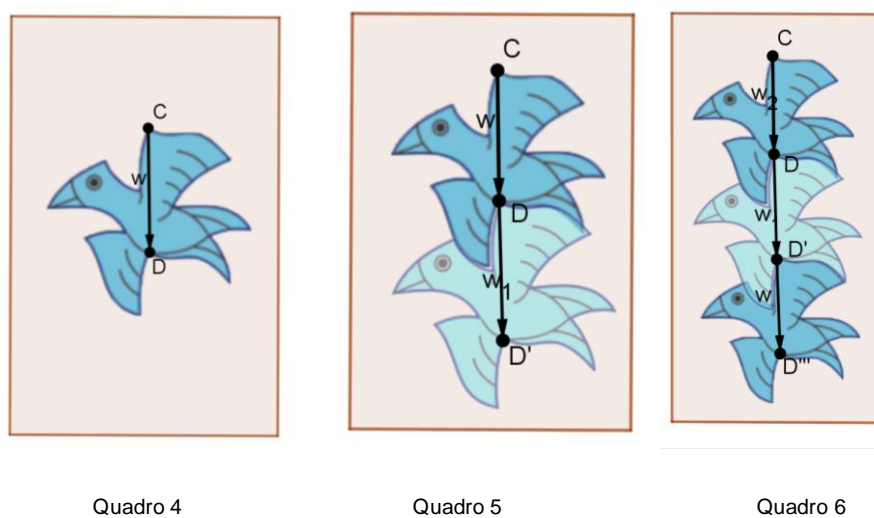
Figura 103: translação horizontal da figura base do pássaro



Fonte: Autora (2020).

Note que no quadro 4, temos a mesma figura base de um pássaro e um vetor  $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$ . No quadro 5 temos uma primeira translação do pássaro inicial dada por  $T_{\vec{w}}(D) = D'$ . O mesmo ocorre no quadro 6 com outra translação do segundo pássaro dada por  $T_{\vec{w}}(D') = D''$ .

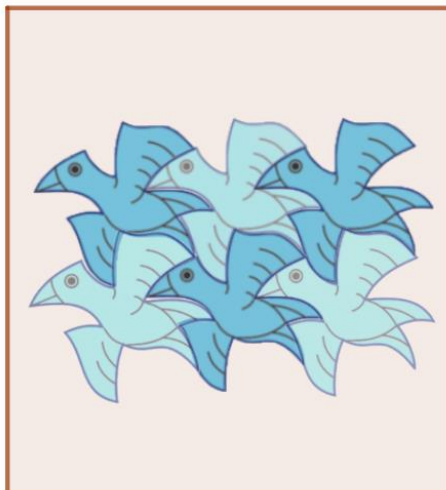
Figura 104: translação vertical da figura base do pássaro.



Fonte: Autora (2020).

Fazendo sucessivas translações desses pássaros nas direções dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , obtemos a tesselação do quadro 7.

Figura 105: tesselação formada pelas translações horizontais e verticais



Quadro 7

Fonte: Autora (2020).

Vamos agora perceber que a mesma figura, que foi criada por uma translação, seria obtida pela composição de duas reflexões em relação a ponto. Veja na imagem abaixo a demonstração. Note que  $T_{\overline{AA'}}(A) = A'$  e como a malha é quadriculada os pontos  $A$ ,  $O$  e  $A'$  são centro dos quadrados, logo  $\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = 2\overline{AO}$ .

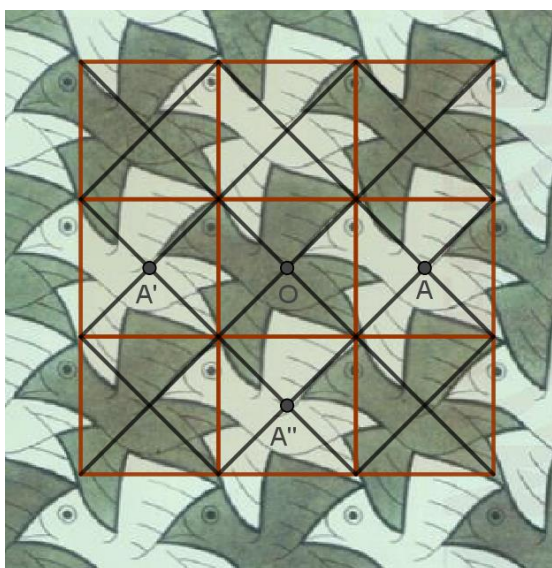
Pelo Propriedade 6 do capítulo das Isometrias temos que  $R_O \circ R_A = T_{2\overline{AO}} = T_{\overline{AA'}}$ .

Podemos perceber que a mesma translação seria obtida pela composição de duas rotações. Vamos aproveitar a mesma malha para provar.

Temos que  $R_{A'',90^\circ}(A) = A'$  e portanto pela análise das duas rotações do capítulo das tesselações vem que  $R_{A'',90^\circ} \circ R_{A,-90^\circ} = T_{\vec{v}}$  sendo  $\vec{v} = \overline{AA'}$ .

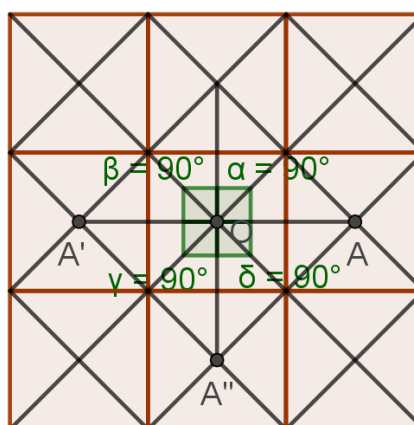
Esta análise foi baseada em um *Estudo Geométrico das transformações elementares* de Sérgio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão.

Figura 106: malha quadriculada sobreposta a obra de Escher sobre a divisão regular da superfície com pássaros



Fonte: Autora (2020).

Figura 107: translação obtida pela composição de duas rotações



Fonte: Autora (2020).

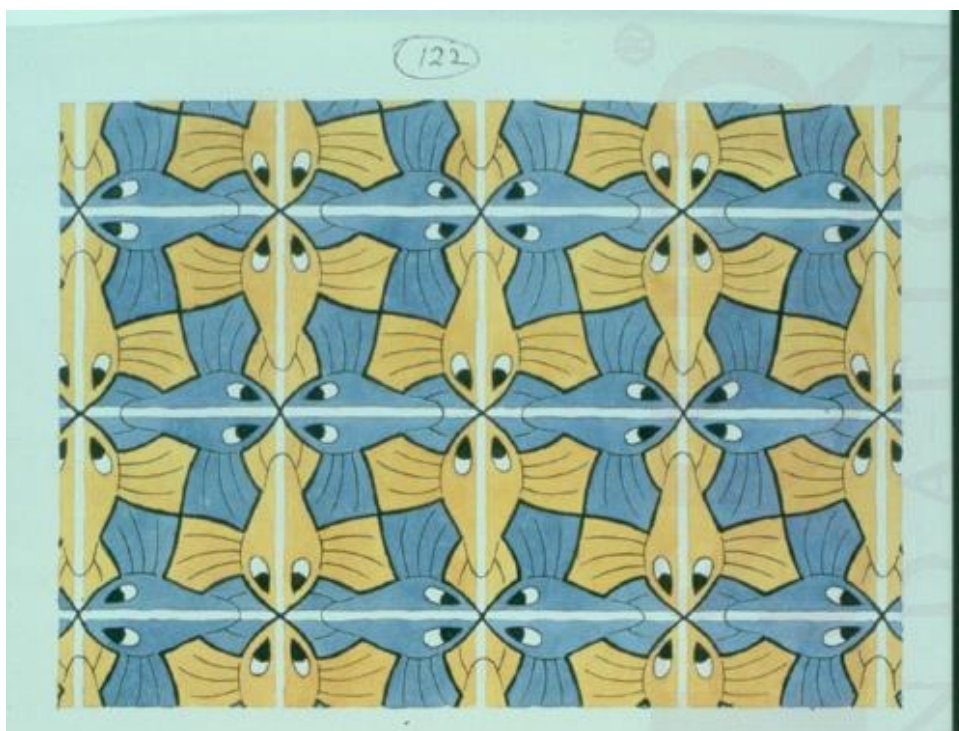
### 5.3 – Análise da obra sobre a divisão regular de superfície com peixes

A terceira obra analisada foi criada em 1964, sendo sua referência o número 122. Nela temos a tesselação por reflexão, no qual a figura base de um peixe é formada a partir de translações de regiões de um quadrado.

O desenho pode ser construído a partir da reflexão em torno das linhas brancas verticais ou horizontais. É interessante ressaltar que se observarmos o ponto na interseção no centro do quadrado, perceberemos que também se aplica nessa tesselação a isometria por rotação.

Aliás, como vimos nas figuras anteriores é comum na obra de Escher encontrar desenhos que podem fazer uso de mais de uma isometria para sua construção.

Figura 108: divisão regular de superfície com peixes



fonte: <[https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox\[gallery\\_image\\_1\]/10](https://mcescher.com/gallery/watercolor/#lightbox[gallery_image_1]/10)>. acesso em julho 2019.

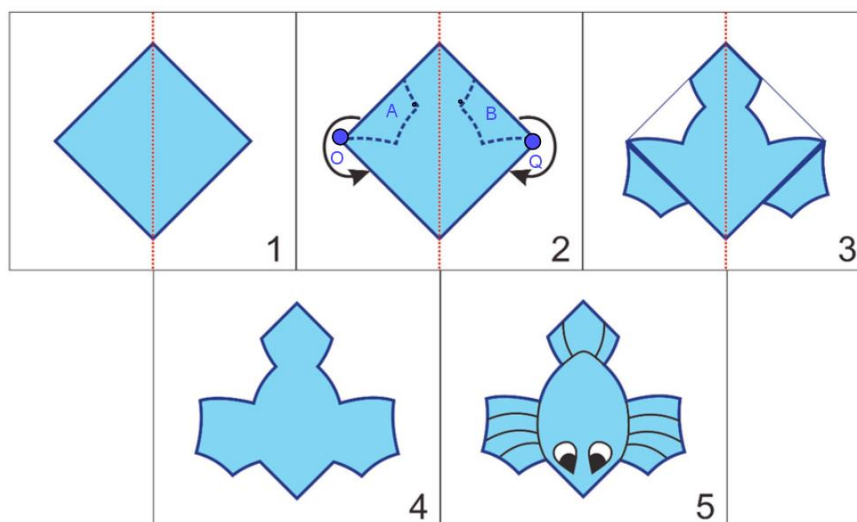
Segundo Leitão (2015), podemos usar a figura abaixo para entender as translações aplicadas na formação da figura base, temos no quadro 1 um quadrado

que servirá de base. No quadro 2 observamos os recortes simétrico feitos por uma das diagonais, criando as regiões  $A$  e  $B$ .

No quadro 3 e 4 observamos a rotação de  $90^\circ$  da figura  $A$  em torno do ponto  $O$  e a rotação de  $-90^\circ$  da região  $B$  em torno do ponto  $Q$ , resultando na formação da figura básica de um peixe.

No quadro 5 surge a parte artística, dando vida à figura que formará a figura base da tesselação.

Figura 109: figura base da tesselação formada a partir de rotações de regiões do quadrado.

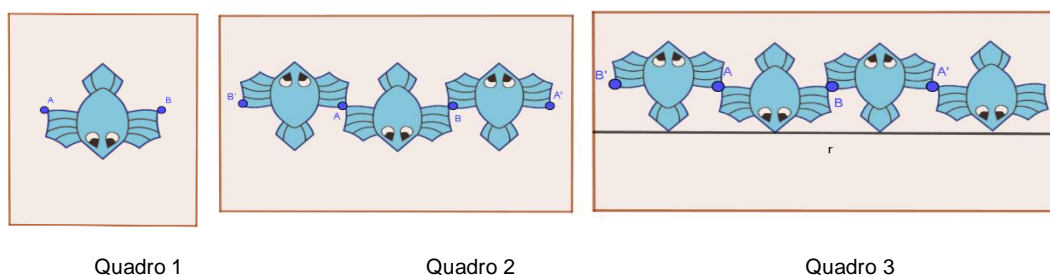


Fonte: < <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichatecnicaaula.html?aula=23463>> .acesso em julho de 2019.

Vejamos agora a formação da tesselação indicada na próxima figura. Observe que no quadro 1 temos apenas a figura base e os pontos  $A$  e  $B$ .

Em seguida, no quadro 2, a figura base sofre uma rotação de  $180^\circ$  em relação ao ponto  $A$  e uma rotação de  $-180^\circ$  em relação ao ponto  $B$ , assim  $R_{B,-180^\circ}(A) = A'$  e  $R_{A,180^\circ}(B) = B'$ .

Figura 110: rotação da figura base de  $180^\circ$



Quadro 1

Quadro 2

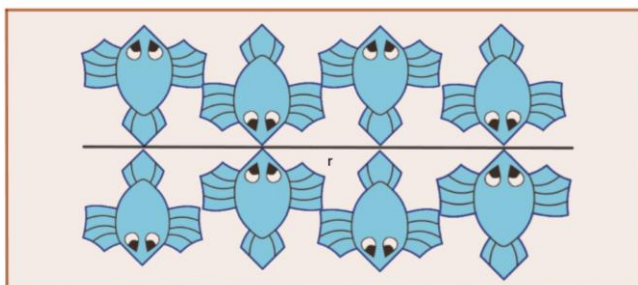
Quadro 3

Fonte: Autora (2020).



No quadro 3 após sucessivas rotações poderemos criar uma reta  $r$ . No quadro 4 faremos uma reflexão da figura do quadro 3 em relação à reta  $r$ .

Figura 111: reflexão em relação a reta  $r$

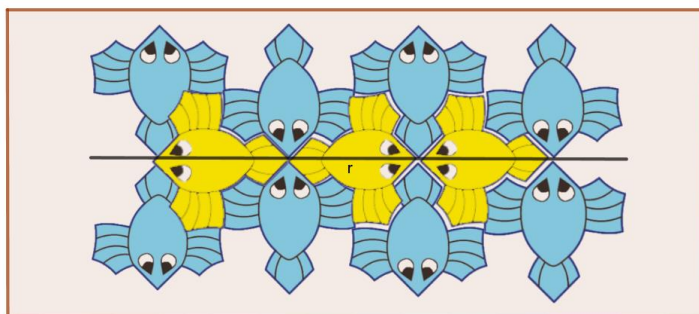


Quadro 4

Fonte: Autora (2020).

Observamos no quadro 5 que no espaço formado entre as reflexões há o surgimento de uma figura em amarelo que sofrerá as mesmas transformações.

Figura 112: tesselação obtida através da reflexão vertical e horizontal da figura base.



Quadro 5

Fonte: Autora (2020).

Nesta terceira obra, podemos observar que a mesma figura poderia ser criada por uma translação obtida pela composição de duas rotações.

Figura 113: Malha quadricular sobreposta a obra de Escher da divisão regular da superfície com peixes

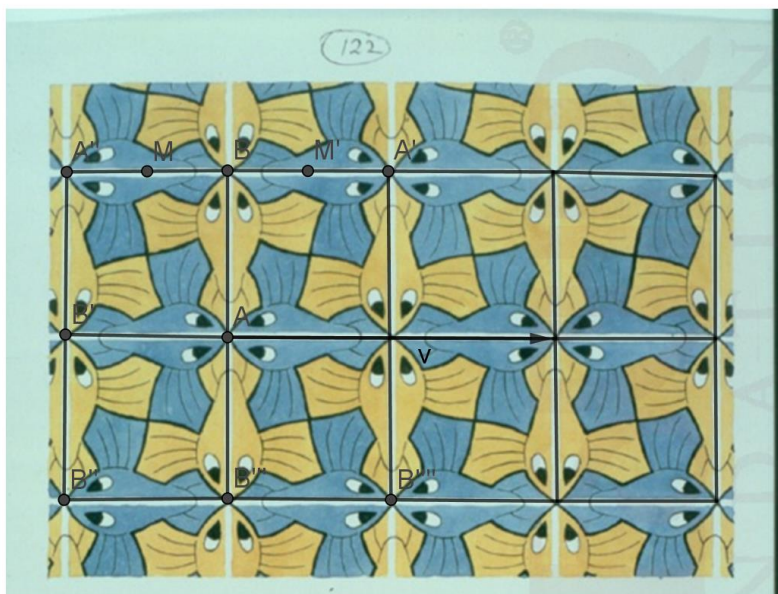
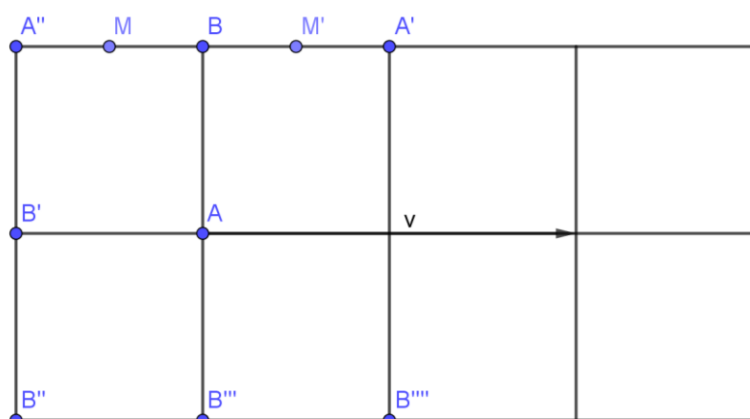


Figura 114: Translação obtida pela composição de duas rotações



Fonte: Autora (2020)

Como também foi observado na primeira obra analisada, esta figura pode ser prolongada indefinidamente em todas as direções, sendo que o ponto  $A$  é um centro de simetria com ângulo admissível de  $\alpha = 90^\circ$  e o ponto  $B$  é outro centro de simetria com ângulo admissível também de  $\beta = 90^\circ$ .

A partir destes centros muitos outros podem ser determinados. Por exemplo, através de conjugação pela rotação  $R_{B,\beta}$  obtemos que  $A' = R_{B,90^\circ}(A)$ ,  $A''' =$

$R_{B,90^\circ}(A')$  são centros de simetria com mesmo ângulo admissível  $\alpha = 90^\circ$  enquanto que ,através de conjugação pela rotação  $R_{A,\alpha}$  , obtemos que  $B' = R_{A,90^\circ}(B)$  ,  $B'' = R_{A,90^\circ}(B')$  ,  $B''' = R_{A,90^\circ}(B'')$ , etc ... são centros de simetria com mesmo ângulo admissível  $\beta = 90^\circ$ .

Por outro lado , determinando-se os centros das rotações  $R_{A,\alpha}$  o  $R_{B,\beta}$  e  $R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}$  obtemos, respectivamente , os centros de simetria  $M$  e  $M'$  ambos com ângulos admissível  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Análise foi retirada de um Estudo Geométrico das transformações elementares de Sérgio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão e pode ser estendida, com argumentos análogos, a todo plano. Observamos finalmente que a figura é invariante pela translação  $T_{\vec{v}} = R_{A',\alpha} \circ (R_{A,\alpha})^{-1}$ , onde  $A + \vec{v} = R_{A',\alpha}(A)$ , ou ainda ,  $\vec{v} = 2\overline{MM'}$ .

## CONCLUSÃO

A presente dissertação apresenta a relação entre a arte e a matemática, fazendo um estudo específico de três obras de Maurits Cornelis Escher, sobre a divisão regular do plano.

Foram observadas as transformações geométricas: translação, reflexão e rotação e suas composições aplicadas nas obras de Escher.

O estudo é direcionado às transformações elementares baseadas em partes dos livros: Um estudo Geométrico das Transformações Elementares de Sérgio Alves e Maria Elisa E.L. Galvão e Isometrias do Mestre Elon Lages Lima. Através das coletas de pesquisas em artigos e periódicos, dissertações e livros. A pesquisa nos trouxe oportunidade de aprofundar conhecimento sobre a vida e a obra de Escher.

Nas pesquisas sobre a vida acadêmica de Escher foi possível observar que apesar de sua genialidade, ele não se interessava pelas disciplinas tradicionais. No entanto demonstrava habilidade em criar imagens mentais, desenhar e identificar detalhes com precisão, além de um senso apurado de estética. Este fato propicia ao professor um olhar diferenciado às habilidades de seus discentes e à metodologia de ensino.

As três obras escolhidas como objeto de estudo para dissertação representam a divisão rítmica da superfície, tema que Escher investigou profundamente criando um sistema prático para superar a falta de habilidade com a Matemática e demonstrando toda a sua habilidade nas artes. Na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) estão inclusas entre as competências gerais da educação básica, o estímulo a curiosidade e a investigação, características marcantes de Escher.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BNCC, 2018)

Reuniram-se a Matemática e a Arte, duas áreas de conhecimento que juntas auxiliam no conhecimento dos conceitos de geometria através da observação, da investigação e da construção de elementos artísticos que despertam a abstração, sempre presente nas obras de Escher e característica intrínseca ao homem.

Concluindo, cito algumas dissertações do PROFMAT com propostas didáticas baseadas na Arte e na Matemática usando as obras de Escher : Holanda (2018) , construção de Caleidociclos<sup>12</sup> de Escher no Ensino Médio ; Esquerdo (2018), sugestão de atividade para o 6º e 7º ano do ensino fundamental II sobre reflexão e recobrimento do plano usando o software GeoGebra e observando as obras de Escher; Carinha(2018), sugestão de atividade para o ensino médio sobre isometrias e a obra de Escher, Modesto (2015), Construção da tesselação “Lagarto” obra de Escher no software SketchUp para o ensino médio; Andrade (2015), construção de Mosaicos<sup>13</sup> usando polígonos regulares no ensino básico; Alves (2014), atividade de pesquisa sobre a arte de Escher juntamente com o professor de Informática e atividades de simetria , composição de sólidos geométricos e tesselações no plano juntamente com o professor de Artes .

---

<sup>12</sup> Os caleidociclos são objetos tridimensionais fascinantes, formados a partir de dobraduras de papel que possuem uma característica especial de girar em torno do seu centro.

<sup>13</sup> O mosaico é uma arte decorativa milenar que reúne pequenas peças de diversas cores para formar uma grande figura.

**BIBLIOGRAFIA**

ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O Estudo Da Simetria Através Da Arte De Maurits Cornelis Escher** .2014.76f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA – São Paulo,2014. Disponível em:< [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=290](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=290)>. Acesso em:08 de junho de 2020.

ALVES, Sérgio; GALVÃO, Maria Elisa E.L. **Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares**. São Paulo, IME – USP,1996. (Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).

ANDRADE, Emerson Teixeira de. **Construção de mosaicos inspirados nas obras de Maurits Cornelis Escher**. 139f.Trabalho de Conclusão de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=77624](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=77624) > . Acesso em: 08 de junho de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em:< <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 08 de junho de 2020.

CARINHA, Marilene dos Santos. **A obra de M.C. Escher como subsídio ao ensino das isometrias**. 2018.139f. Trabalho de Conclusão de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2018. Disponível em : < [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150530921](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150530921) > .Acesso em: 08 de junho de 2020.

DOLCE, Osvaldo; HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson; MACHADO, Nilson; MURAKAMI, Carlos; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar** -Volume 9 - Geometria Plana. São Paulo: Atual, 1985.

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher**. Ed. Alemanha: Taschen, 2007. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller.

ESCHER, Maurits Cornelis, Website Oficial ,2020. **Biografia Oficial de M.C. Escher**. Disponível em :<<https://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em:15 de julho de 2019.

ESQUERDO, Caroline Andressa da Silva. **Transformações geométricas no plano :uma abordagem inspirada em Escher** .2018.125f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina ,2018 .Disponível em :< [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150600059](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150600059)>. Acesso em: 15 de julho de 2019.

HOLANDA, Kenia Costa. **Uma proposta didática usando os caleidociclos de Maurits Cornelis Escher**.2018.73f. Trabalho de Conclusão de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - Universidade de Brasília, 2018.Disponível em : < [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=160271163](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160271163)> . Acesso em : 08 de junho de 2020.

HERNSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra** :tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteir. 408f. São Paulo, Editora da Univ. E Polígono,1970.

LABEDUC DA FEUSP – Laboratórios Integrados para a Produção e Difusão de Conteúdos e Práticas Educativas, 2015. **Arte e Matemática**. Série de documentários produzida pela TV Cultura que trata das relações entre matemática e arte. Disponível em: <<http://www.labeduc.fe.usp.br/?videos=arte-e-matematica>>. Acesso em : 15 de julho de 2019.

LEITÃO, Maria Robevânia. **Tesselações no ensino de geometria euclidiana**. 2015.58f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=86703](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=86703)> . Acesso em: 03 de março de 2019.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MEC – Ministério da Educação e Cultura,2019. Portal do Professor. **Escher e a Matemática**. Proposta de aula sobre pavimentações e simetrias nas obras de Escher. Elaborado por Eguimara Selma Branco e Eziquiel Menta. Disponível em < <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichatecnicaaula.html?aula=23463>> . Acesso em julho de 2019.

MODESTO, Camila de Fátima. **Matemática e Arte: Explorando a Geometria dos Fractais e as Tesselações de Escher**. 2015. 147f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Jacarezinho, 2015.Disponível em:< [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=74021](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=74021)>.Acesso em: 08 de junho de 2020.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT;09. ed. Rio de Janeiro: SBM,2013.

TORRES, José Bernardo De Araújo. **Tesselações Planas: Apresentar As Tesselações Do Plano E Algumas Aplicações Nas Obras De Maurits Cornelis Escher**.2017.88f.Trabalho de Conclusão de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará , Fortaleza , Ceara , 2017.Disponível em : <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150710156](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150710156)> . Acesso em: 03 de março de 2019.