

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT**

PATRIK BORGES DE MIRANDA

**ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO
MERCADO BRASILEIRO**

CURITIBA

2021

PATRIK BORGES DE MIRANDA

**ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO
MERCADO BRASILEIRO**

**INVESTMENT PORTFOLIO MANAGEMENT STRATEGIES IN THE BRAZILIAN
MARKET**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: João Luis Gonçalves

Coorientador: Ronie Peterson Dario

CURITIBA

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba



PATRIK BORGES DE MIRANDA

ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS NO MERCADO BRASILEIRO.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 19 de Fevereiro de 2021

Prof Joao Luis Goncalves, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Marcio Rostirolla Adames, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Moiseis Dos Santos Ceconello, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso (Ufmt)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/02/2021.

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

- A todos que fizeram, fazem e farão parte de minha caminhada.
- Aos meus colegas de curso, em especial ao Leonardo Costa pelo companheirismo ao longo do curso e à Maria Lucia Abbott Jacob por tudo o que fez para o trabalho de conclusão de curso.
- Ao meu amigo Daniel por ter me ajudado em um momento fundamental.
- Aos meus pais e namorada pela paciência.
- Ao orientador, João Luis Gonçalves, e ao coorientador, Ronie Peterson Dario, pelo trabalho.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede maior satisfação. Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855): matemático, astrônomo e físico alemão.

RESUMO

MIRANDA, Patrik Borges de. **Estratégias de Gestão de Carteiras de Investimentos no Mercado Brasileiro**. 61 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

Apresentamos e analisamos o desempenho de estratégias de investimentos baseadas no clássico método de Média Variância de Markowitz e em uma de suas variações, que chamamos de Média Variância Penalizada, na gestão de uma carteira de investimento em ações de empresas brasileiras listadas na Bolsa de Valores de São Paulo. O período de análise inclui os meses atingidos pela crise econômica causada pela pandemia de COVID-19. Os resultados indicam melhor desempenho da estratégia de Média Variância Penalizada em comparação com a Média Variância de Markowitz, assim como com a alocação uniforme do capital entre os ativos da carteira, com a alocação tradicional 60-40 e com a estratégia "Buy-and-Hold". Simplificamos alguns procedimentos para deixar as estratégias mais aplicáveis. Os métodos de média variância requerem uma estimativa para o retorno esperado, para a qual usamos a média histórica dos retornos. Também analisamos a eficiência das estratégias com relação a qualidade destas estimativas. A aplicação no ensino de educação financeira foi exemplificada considerando carteiras com poucos ativos, onde são utilizadas funções quadráticas, matrizes, vetores e estatística.

Palavras-chave: Gestão de Carteiras; Investimento; Média-Variância; Markowitz.

ABSTRACT

MIRANDA, Patrik Borges de. **Investment Portfolio Management Strategies in the Brazilian Market**. 61 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

We present and analyze the performance of investment strategies based on the classic Markowitz Mean Variance method and one of its variations, which we call Penalized Mean Variance, in the management of an investment portfolio in Brazilian companies shares listed on the São Paulo Stock Exchange. The analysis period includes the months affected by the economic crisis caused by the COVID-19 pandemic. The results indicate better performance of the Penalized Mean Variance strategy compared to Markowitz Mean Variance, as well as with the uniform allocation of capital among the portfolio's assets, with the traditional 60-40 allocation and with the "Buy-and-Hold ". We simplified some procedures to make the strategies more applicable. Mean variance methods require an estimate of the expected return, for which we use the return historical average . We also analyzed the efficiency of the strategies in relation to the quality of these estimations. The application in the teaching of financial education was exemplified considering portfolios with few assets, using quadratic functions, matrices, vectors and statistics.

Keywords: Portfolio Management; Investment; Mean-Variance; Markowitz.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 3.1 – Gráfico $x_1 \times \sigma^2$ para o método MVM | 25 |
| Figura 3.2 – Fronteira Eficiente do Exemplo 1. | 25 |
| Figura 3.3 – Gráfico $x_1 \times y$ para o método MVP. | 26 |
| Figura 3.4 – Fronteira Eficiente do Exemplo 2. | 27 |
| Figura 5.1 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias ao longo do período. | 30 |
| Figura 5.2 – Riscos (em porcentagem) das estratégias ao longo do período. | 31 |
| Figura 5.3 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias ao longo do período. | 32 |
| Figura 5.4 – Riscos (em porcentagem) das estratégias ao longo do período. | 33 |
| Figura 5.5 – Erros relativos (em porcentagem) das estimativas dos retornos esperados. | 34 |
| Figura 5.6 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 50%. | 34 |
| Figura 5.7 – Riscos (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 50%. | 35 |
| Figura 5.8 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 160%. | 36 |
| Figura 5.9 – Riscos (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 160%. | 36 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 3.1 – Retornos das ações BRFS3, SAPR11 e CAML3. | 23 |
| Tabela 4.1 – Ativos utilizados | 28 |
| Tabela B.1 – Retornos semanais de cada ativo | 44 |
| Tabela C.1 – Matriz formada pelo comando $RAND(i, :) = (2 * (1, 12) - 1)$, utilizada para perturbar o retorno | 53 |
| Tabela D.1 – Retornos semanais das ações, do TESOIRO SELIC 2021 e do IBOVESPA | 55 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 2 | ELEMENTOS ESTATÍSTICOS | 14 |
| 3 | MÉTODOS DE GESTÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO . . . | 18 |
| 3.1 | Definições Básicas | 18 |
| 3.1.1 | Retorno Esperado | 18 |
| 3.1.2 | Risco da Carteira | 19 |
| 3.2 | Métodos de Gestão | 20 |
| 3.2.1 | Métodos Básicos | 20 |
| 3.2.2 | O Método de Média Variância de Markowitz (MVM) | 21 |
| 3.2.3 | O Método de Média Variância Penalizada (MVP) | 22 |
| 3.3 | Aplicações dos Métodos MVM e MVP no Ensino Médio | 23 |
| 4 | METODOLOGIA | 28 |
| 5 | EXPERIMENTOS NUMÉRICOS | 30 |
| 5.1 | Experimentos com Estimativas de Retorno por Média Histórica | 30 |
| 5.2 | Qualidade das Estimativas de Retornos \times Desempenho das Estratégias . . . | 33 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 37 |
| | REFERÊNCIAS | 39 |
| | APÊNDICES | 40 |
| | APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES | 41 |
| | APÊNDICE B – RETORNOS DE CADA ESTRATÉGIA | 44 |
| | APÊNDICE C – CÓDIGO MATLAB | 47 |
| | APÊNDICE D – RETORNOS SEMANAIS DE CADA ATIVO | 55 |

1 INTRODUÇÃO

Em reunião no início de agosto de 2020, o Comitê de Política Monetária (COPOM) reduziu a taxa básica de juros da economia brasileira - taxa SELIC - para 2% ao ano, a mínima histórica. Caso considere-se a meta de inflação hoje em 3.75% ao ano, a taxa de juros real brasileira está negativa em 1.75% ao ano. A SELIC nesse nível implica que a poupança rende apenas 1.4% ao ano, fazendo com que todos os brasileiros que ainda investem nela percam poder de compra. Esta conjuntura explica, em parte, a migração de investidores da renda fixa para investimentos de risco, especialmente o investimento em ações. De fato, o número de investidores na Bolsa de Valores (B³) atingiu três milhões em outubro de 2020, que representa mais de 80% de crescimento somente em 2020.

É razoável supor que este contingente de novos investidores é composto principalmente por pessoas que não estão em busca de lucros rápidos, operando com opções ou com *day-trade*. Estudo recente de Chague e Giovanetti (2020) indica que menos de 1% das pessoas que se dispõem ao *day-trade* tem sucesso após um ano no mercado. Desta forma, a análise de estratégias de investimentos de médio e longo prazo ganha ainda mais importância no momento atual, sejam elas focadas em redução de risco, busca de maior rentabilidade, ou um misto das duas coisas.

A Teoria Moderna das Carteiras (ou do Portfólio) admite risco de um ativo como a variância dos seus possíveis retornos e o risco de uma carteira de investimentos como a variância da carteira, definida em termos das covariâncias entre os possíveis retornos dos ativos que a compõe, conforme a Definição 5.

Estratégias especificamente voltadas para a redução de risco de investimento em crises no mercado brasileiro foram estudadas em Bortoluzzo (2018) no caso da crise de 2008, e em Dario et al. (2021) na atual crise provocada pela pandemia de COVID-19. A Paridade de Risco estudada por Maillard, Thierry e Teiletche (2010) assim como o método de Mínima Variância desenvolvida por Markowitz (1952) mostraram bons resultados neste sentido.

Buscamos analisar o desempenho de estratégias de investimento que buscam determinado nível de retorno, ao qual corresponda o menor risco possível.

Formamos uma carteira de ações (Tabela 4.1) representativa dos diversos setores da economia e listadas no índice BOVESPA, IBOVESPA, em janeiro de 2019. O período de análise foi de janeiro de 2019 a agosto de 2020, e compreende a crise econômica causada pela COVID-19. A carteira e o período de análise coincidem com as do trabalho de Dario et al. (2021).

Dada uma carteira de ativos de risco e um certo nível de retorno predeterminado, o clássico método de Média Variância de Markowitz (1952), ou simplesmente MVM, determina a alocação que minimiza o risco para um retorno fixado. Uma variação do trabalho de Markowitz penaliza o risco pelo retorno, a esta chamaremos de Média Variância Penalizada (MVP).

Conforme apresentado em Neto (2020) o MVM não produz bons resultados com dados *out of the sample*, isto é, com dados que não estão na amostra, especialmente pela dificuldade nas estimativas dos retornos esperados da carteira. Verificamos neste trabalho que esta percepção é reforçada no ambiente de crise, tornando as estimativas ainda mais complicadas. Para estimar o retorno esperado utilizamos a média histórica dos retornos de 52 semanas.

Comparamos os resultados obtidos nas estratégias MVM e MVP com três estratégias básicas de gestão de carteira: a distribuição igualitária do capital na carteira, *Equal Weighting (EW)*, ou $1/n$, conforme Exemplo 2; A estratégia *Buy and Hold (BH)* - Exemplo 1; Por fim, a Tradicional, ou 60/40, que utiliza o clássico método de alocar 40% do capital em ativos livres de risco e 60% do capital igualmente distribuído em ativos de risco - Exemplo 3.

Para a estratégia Tradicional, utilizamos como ativo livre de risco o título do Tesouro Direto conhecido como TESOURO SELIC (antiga LFT), com vencimento em 01 de março de 2021.

O tema desta dissertação surgiu de um grupo de estudos da UTFPR em busca de conteúdos que possam ser aplicados ao ensino de educação financeira. Com o fato da pandemia de 2020, as pesquisas encaminharam-se aos métodos de gestão de risco, que resultou num primeiro artigo de Dario (2021) e na dissertação de Jacob (2021).

Uma continuação natural do tema de gestão de risco é incluir os retornos esperados ao modelo. Seguimos essa direção considerando os mesmos dados do trabalho anterior.

O foco do trabalho foi desenvolver os métodos MVM e MVP e analisá-los, mostrando seus prós e contras, dando uma atenção especial às facilidades de aplicação do segundo método, o MVP, pelo fato dele não fixar um retorno à carteira.

Por meio de dois exemplos, é feita uma abordagem dos dois métodos, onde se explora as definições e propriedades do trabalho no nível de ensino médio e busca-se desenvolver conceitos de operações de matrizes, vetores e principalmente funções quadráticas. Para isso, utilizamos carteiras com poucos ativos a fim de simplificar as técnicas de minimização.

O trabalho de Alves (2020) desenvolvido no âmbito do PROFMAT aborda o ensino de estatística e também utiliza o método de Markowitz como aplicação em sala de aula.

O primeiro capítulo apresenta alguns conceitos básicos de estatística que serão necessários na descrição dos modelos. O segundo capítulo aborda a modelagem dos métodos de gestão. Já o terceiro capítulo contempla a metodologia utilizada para a aplicação dos métodos, tal qual os dados, o período e as ferramentas computacionais consideradas. Na sequência, no quarto capítulo apresentamos e discutimos os resultados da aplicação das estratégias de gestão nas carteiras de investimentos. Também pontuamos os possíveis motivos para os comportamentos apresentados pelas estratégias, principalmente quanto a risco e retorno acumulado. Por fim, na conclusão revisitamos os principais pontos do trabalho, fazemos considerações sobre o desempenho das estratégias e apontamos possibilidades de futuros trabalhos.

2 ELEMENTOS ESTATÍSTICOS

A estatística é muito relevante nas teorias do campo da economia. Apresentamos as ferramentas estatísticas essenciais para esse trabalho, que são utilizadas nos próximos capítulos. Também buscamos motivar o uso de tais ferramentas nos modelos. As definições e resultados foram inspirados dos textos de Morettin e Bussab (2010) e de Markowitz (1952) e alguns resultados estão demonstrados no Apêndice A.

Embora não debatamos muito sobre variáveis aleatórias, esse é um conceito fundamental para os modelos que apresentamos.

Definição 1 (Variável Aleatória). *Uma variável aleatória é uma função X , definida em um espaço amostral Ω e com valores num conjunto D de pontos da reta real. Se D for enumerável então dizemos que a variável aleatória é discreta. Se além de enumerável, D for finito então dizemos que X é variável aleatória finita.*

Definição 2 (Função Probabilidade). *Seja X uma variável aleatória finita. A função probabilidade de X é a função que associa a cada valor possível x_i de X , $i \in I$, sua probabilidade de ocorrência $p(x_i)$, tal que*

$$p(x_i) \geq 0 \text{ e } \sum p(x_i) = 1. \quad (2.1)$$

Um parâmetro para tomada de decisão quanto a uma variável aleatória da qual sabemos a função probabilidade é o valor esperado.

Definição 3 (Valor Esperado). *Seja X uma variável aleatória finita, temos que o valor esperado de X , $E(X)$, quando tal soma existe, é igual a*

$$E(X) = \sum x_i p(x_i), \quad (2.2)$$

sendo x_i e p_i são, respectivamente, o i -ésimo valor possível da variável aleatória e sua probabilidade de ocorrência.

Uma informação valiosa é a homogeneidade da variável aleatória, isto é, uma medida da dispersão dos dados com relação ao valor esperado. A ferramenta que analisa isso é a variância.

Definição 4 (Variância). *Seja X uma variável aleatória, a variância de X , $Var(X)$ é definida por*

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum (x_i - E(X))^2 p(x_i). \quad (2.3)$$

Da linearidade da soma e das definições de valor esperado e variância, conforme Morettin e Bussab (2010), sendo a e b constantes, temos as seguintes propriedades:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;
- $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$.

O comportamento entre duas variáveis aleatórias também é importante para nossos modelos. Essa análise bidimensional revela se as variáveis se comportam de maneira igual, inversa ou não possuem uma relação.

Definição 5 (Covariância). *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. A covariância entre elas, $\text{Cov}(X, Y)$, é dada por*

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Se $\text{Cov}(X, Y) > 0$ as variáveis aleatórias são positivamente correlacionadas. Caso $\text{Cov}(X, Y) < 0$ as variáveis são negativamente relacionadas. E, se $\text{Cov}(X, Y) = 0$ então elas não estão correlacionadas.

Observamos que se as variáveis aleatórias são independentes, então a covariância entre elas é nula. Todavia a recíproca nem sempre é válida.

Da Definição 5, temos as seguintes propriedades para covariância:

- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;
- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$;
- $\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y)$.

Os resultados a seguir são de grande importância, por essa razão os faremos em detalhes.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e a, b duas constantes. Temos que

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y). \quad (2.4)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(aX + bY) &= E\left((aX + bY)^2\right) - (E(aX + bY))^2 \\
&= E\left(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2\right) - (E(aX) + E(bY))^2 \\
&= E\left(a^2X^2\right) + E\left(2abXY\right) + E\left(b^2Y^2\right) \\
&\quad - (E(aX))^2 - 2E(aX)E(bY) - (E(bY))^2 \\
&= a^2E(X^2) + 2abE(XY) + b^2E(Y^2) \\
&\quad - a^2(E(X))^2 - 2ab(E(X)E(Y)) - b^2(E(Y))^2 \\
&= a^2E(X^2) - a^2(E(X))^2 + b^2E(Y^2) \\
&\quad - b^2(E(Y))^2 + 2abE(XY) - 2abE(X)E(Y) \\
&= a^2\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) + b^2\left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) \\
&\quad + 2ab\left(E(XY) - E(X)E(Y)\right) \\
&= a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y). \quad \square
\end{aligned}$$

Porém, como $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$, podemos colocar a equação acima em função somente das covariâncias das variáveis aleatórias, ou seja:

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Cov}(X, X) + b^2\text{Cov}(Y, Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$$

Este resultado nos motiva a generalizar o mesmo para n variáveis aleatórias. Novamente utilizando a igualdade $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$, temos que para $w_1X_1 + \dots + w_nX_n = \sum_{i=1}^n w_iX_i$:

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i\right) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i, \sum_{i=1}^n w_iX_i\right) \\
&= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i, \sum_{j=1}^n w_jX_j\right) = \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i \sum_{j=1}^n w_jX_j\right) - E\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i\right) E\left(\sum_{j=1}^n w_jX_j\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_jX_iX_j\right) - E\left(\sum_{i=1}^n w_iX_i\right) E\left(\sum_{j=1}^n w_jX_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_jE(X_iX_j) - \sum_{i=1}^n w_iE(X_i) \sum_{j=1}^n w_jE(X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_jE(X_iX_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_jE(X_i)E(X_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_j(E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_iw_j\text{Cov}(X_i, X_j). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Manipulando este último passo e levando em consideração que $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$, obtemos a seguinte expressão

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n w_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \text{Cov}(X_i, X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n w_i w_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Podemos perceber que ao adicionar variáveis, a variância da soma depende mais da covariância entre as variáveis do que da variância de cada variável aleatória, a não ser que as variáveis sejam independentes entre si, pois sendo assim $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ será igual a zero e a variância do somatório acima será a soma das variâncias.

Essas serão as ferramentas básicas que utilizaremos ao decorrer do trabalho. Porém, como veremos mais à frente, por falta da função de probabilidade das variáveis aleatórias, utilizamos como valores possíveis das variáveis aleatórias seus valores passados e atribuímos a cada um desses valores a mesma probabilidade de ocorrência. Assim, estaremos considerando o caso de probabilidades equiprováveis.

Com isso, o cálculo do valor esperado, variância e covariância para uma quantidade finita, n , de valores possíveis têm por base a média aritmética, o que fica evidente no formato de suas expressões.

Se $p(x_1) = \dots = p(x_n)$ e $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ então $p(x_i) = \frac{1}{n}$.

Sob essas considerações, para $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, vemos que:

- $E(X) = \bar{X}$;
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2$;
- $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{X} \bar{Y}$.

3 MÉTODOS DE GESTÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

Neste capítulo, apresentamos os métodos de gestão de carteiras de investimentos, bem como os conceitos necessários para a compreensão dos métodos.

3.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Define-se uma **carteira de investimentos** como um conjunto de ativos financeiros: ações, títulos, opções, etc., e seus respectivos pesos, isto é, o percentual do capital da carteira alocado no ativo. Ainda, o peso do ativo representa a razão entre o valor investido no ativo e o valor total da carteira. Desta forma, uma carteira x formada pelos ativos $1, \dots, n$ pode ser entendida como um vetor

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (3.1)$$

onde $x_i(t)$ é o peso do ativo i no tempo t . Uma consequência direta é que

$$x_1(t) + \dots + x_n(t) = 1, \text{ para todo } t. \quad (3.2)$$

O **peso de um ativo** i na carteira $x(t)$ depende de seu preço, $P_i(t)$, sua quantidade, $\alpha_i(t)$, e do valor da carteira, $V(t)$, e é definido como:

$$x_i(t) = \frac{\alpha_i(t)P_i(t)}{V(t)}. \quad (3.3)$$

Uma sequência de carteiras é denominada uma **estratégia de investimento**, sendo cada termo da sequência uma nova carteira correspondente a um período pré-estabelecido. A estratégia também é determinada pelo **método de gestão** utilizado para rebalancear a carteira.

Também assumiremos que os valores dos ativos sempre serão positivos e variáveis aleatórias discretas. Além disso, supomos que cada ação pode ser comprada em qualquer quantidade, inteira ou fracionada. Consideramos que os pesos serão não negativos. Admitir pesos negativos corresponderia à possibilidade de vendas a descoberto na carteira, que não é a abordagem deste trabalho. Markowitz (1952) também não considera este caso em seu trabalho. O leitor interessado em vendas a descoberto pode encontrar mais detalhes em Capinski (2003).

Nas próximas seções, veremos como definir o retorno esperado de um ativo e de uma carteira, assim como o risco da mesma.

3.1.1 RETORNO ESPERADO

Fixado um ativo i e um intervalo de tempo $I = [s, t]$, seja R_i a variável aleatória finita que representa o retorno de i no intervalo I . Sejam m_1, \dots, m_k os possíveis valores para R_i e

$p(m_1), \dots, p(m_k)$ as respectivas probabilidades destes valores ocorrerem. O **retorno esperado do ativo** i no intervalo I é entendido como o conceito estatístico de valor esperado (Definição 3) e denotado por $\mu_i = E(R_i)$. Mais precisamente,

$$\mu_i = E(R_i) = \sum_{j=1}^k m_j p(m_j). \quad (3.4)$$

Sendo $R = (R_1, \dots, R_n)$ o vetor composto pelos retornos da carteira $x = (x_1, \dots, x_n)$, o **retorno** de x em I é

$$Rx^T = \sum_{j=1}^n R_j x_j. \quad (3.5)$$

Considerando a linearidade do valor esperado, podemos definir o **retorno esperado da carteira** x no intervalo I como

$$\mu = E(Rx^T) = E(R)x^T = \sum_{j=1}^n x_j \mu_j. \quad (3.6)$$

Denotando $M = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, o retorno esperado da carteira é dado por

$$\mu = Mx^T. \quad (3.7)$$

3.1.2 RISCO DA CARTEIRA

Para um ativo em particular, o risco é traduzido no contexto do trabalho de Markowitz (1952) como a variância deste ativo, utilizando (3.4) na Definição (4). O que faz sentido, pois como visto na Definição 4, ela mede a homogeneidade da variável aleatória e caso os valores prováveis estejam muito dispersos do valor esperado, então é mais difícil de obter uma estimativa precisa.

Como a variância tem uma potência 2 a medida de dispersão pode ser reescalada usando a raiz quadrada, ou seja, utilizamos o desvio padrão para interpretar o risco. Para esta definição, denotamos $\sigma_{ij} = \text{Cov}(i, j)$ a covariância entre os ativos i e j da carteira x . Por simplicidade, denotamos $\text{Var}(Rx^T)$ por $\sigma^2(x)$.

Com base no que vimos na Equação 2.5, podemos expressar o **risco da carteira** x como:

$$\sigma(x) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{1/2} = [xCx^T]^{1/2}, \quad (3.8)$$

onde C é a matriz de covariância, isto é, $c_{ij} = \sigma_{ij}$.

Resumindo, temos uma função que modela o retorno esperado $\mu = Mx^T$ e uma função que modela o risco $\sigma(x) = [xCx^T]^{1/2}$ da carteira x .

3.2 MÉTODOS DE GESTÃO

Nos Exemplos 1, 2 e 3 a seguir apresentamos os métodos básicos (ingênuos ou intuitivos) de gestão de carteira que servem como comparativos em relação aos métodos de média variância.

3.2.1 MÉTODOS BÁSICOS

Os métodos básicos são aqueles de dinâmica, manipulação e entendimento simples para o investidor.

Não rebalancear a carteira e deixar os percentuais se autorregularem conforme a variação de mercado também é considerada uma estratégia. Que inclusive tem baixo custo operacional e fiscal.

Exemplo 1 (Estratégia “*Buy and Hold*” (BH)). É feita uma alocação inicial, normalmente conforme o Exemplo 2 abaixo. Na sequência, os pesos x_1, \dots, x_n são atualizados conforme a variação de mercado dos preços dos ativos $1, \dots, n$. Temos então que $P_i(t+1) = (1 + r_i(t+1))P_i(t)$ e $V(t+1) = (1 + r(t+1))V(t)$, são respectivamente o preço do ativo i e o valor da carteira x no tempo $t+1$, onde $r_i(t)$ é o retorno obtido pelo ativo i , $r(t)$ o retorno obtido pela carteira x e $V(t)$ o valor da carteira em função de t . De acordo com (3.3), substituindo esses valores no cálculo dos pesos, segue que

$$x_i(t+1) = \frac{\alpha_i P_i(t)(1 + r_i(t+1))}{(1 + r(t+1))V(t)} = \left(\frac{1 + r_i(t+1)}{1 + r(t+1)} \right) x_i(t), \quad (3.9)$$

onde α_i é a quantidade de ações de i .

Dessa forma, o peso será atualizado na carteira, sem que seja feita compra ou venda de ativos, apenas através da variação de mercado de seus preços.

Para aplicar diversificação de maneira simples a próxima estratégia é a mais adequada, pois consiste em sempre estar com o capital dividido igualmente entre seus ativos.

Exemplo 2 (Estratégia “*Equal Weighting*” (EW)). Também chamada de estratégia $1/n$, trata-se de a cada rebalanceamento dos pesos dividir igualmente o capital total da carteira entre os n ativos que a compõem, isto é, basta definir

$$x_i(t) = \frac{1}{n}, \text{ para } i = 1, \dots, n, \forall t. \quad (3.10)$$

A seguir apresentamos a estratégia tradicional, que é a mais conservadora, pois 40% do capital estará aplicado em um ativo, ou fundo, com risco zero ou baixíssimo.

Exemplo 3 (Estratégia “*Tradicional*”). Trata-se de alocar 40% do capital disponível em título de renda fixa, considerado de risco zero, com rendimento pré-fixado, e os 60% restantes distribuídos igualmente em ações. Assim, para todo t ,

$$x_1(t) = \dots = x_n(t) = \frac{0.6}{n-1} \text{ e } x_{n+1}(t) = 0.4. \quad (3.11)$$

Nos Exemplos 2 e 3 acima, pressupõe-se que periodicamente é realizado o rebalanceamento dos ativos da carteira, de forma que a cada iteração sejam restabelecidos os percentuais indicados em (3.10) e (3.11).

Agora, vamos aos métodos mais sofisticados desenvolvidos com o intuito de reduzir o risco e obter uma carteira eficiente, ou seja, entre todas as carteiras com mesmo retorno esperado ela terá o menor risco.

3.2.2 O MÉTODO DE MÉDIA VARIÂNCIA DE MARKOWITZ (MVM)

Harry Markowitz (1952) teve como principal contribuição a formalização matemática da ideia de diversificação de investimentos, mostrando que a correlação entre os ativos de risco que compõe uma carteira pode ser utilizada para reduzir o risco da carteira para um dado nível de retorno desejado. A partir deste trabalho, surgiram diversas outras abordagens semelhantes e generalizações. Muitas delas feitas por ele mesmo originando a Teoria Moderna das Carteiras. Também há uma extensa utilização prática desta abordagem por gestores de carteira.

Dados os ativos de risco $1, \dots, n$, o investidor tem o problema de definir os pesos $x_1(t), \dots, x_n(t)$ destes ativos na carteira $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, de tal forma que $x_1(t) + \dots + x_n(t) = 1$, conforme vimos na Equação 3.2 e $x_i(t) \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Na prática não é possível maximizar μ e minimizar σ ao mesmo tempo. Desta forma, assume-se que o investidor racional deve escolher fixar um dos parâmetros e otimizar o outro, buscando obter o que Markowitz chamou de uma carteira eficiente, ou seja, que possua o maior retorno esperado entre todas de mesmo risco, ou o menor risco entre todas de mesmo retorno. A cada carteira corresponde um ponto no plano risco \times retorno e o conjunto de todos os pontos associados a carteiras eficientes é chamado de Fronteira Eficiente. O único ponto de menor risco representa a carteira de Mínima Variância, que se traduz em um conhecido método de minimização de riscos, particularmente útil em ambientes de crises econômicas. Veja Bortoluzzo et. al. (2018) para uma análise na crise de 2008 e Dario et al. (2021) para a crise de 2020.

O processo de otimização que descrevemos é chamado de Método de Média Variância de Markowitz, abreviado por MVM. Neste trabalho, escolhemos minimizar a variância, σ^2 , que é equivalente a minimizar o risco, σ , para um retorno esperado fixado, resolvendo o problema de otimização quadrática convexa dado por:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} x C x^T \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{1} x^T = 1, \\ & M x^T = \mu, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ é o vetor com n entradas iguais a 1.

Denotamos por μ_{min} o retorno associado à carteira de mínima variância, obtida retirando a segunda restrição do Problema 3.12. Por outro lado, o maior valor para μ é denotado por μ_{max} e é fácil verificar que corresponde ao retorno esperado do ativo com maior retorno esperado da carteira, que implicará na concentração total da carteira nesse ativo. A Fronteira Eficiente é obtida fazendo μ variar no intervalo $[\mu_{min}, \mu_{max}]$. Este resultado pode ser visto em Cesarone; Scozzari; Tardela (2010, pg. 4).

Portanto, o problema do investidor racional é escolher uma dessas carteiras, dependendo de quanto risco (ou retorno) deseja assumir. Ele pode escolher as carteiras dos extremos, ou algum outro ponto (σ, μ) sobre a Fronteira Eficiente.

A função objetivo do Problema 3.12 é quadrática e limitada inferiormente, pois a matriz C é simétrica e semidefinida positiva por ser a matriz de covariância do vetor randômico R . Também temos que as restrições são lineares e convexas.

A existência e unicidade de solução deste problema segue de Krulikovski (2017)[Teorema 1.34] que demonstra o Teorema 3.1, antes apresentado em Frank; Wolfe (1956) e Blum; Oettli (1972).

Teorema 3.1. Considere o problema quadrático

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ \text{s.a} & Ax + b \leq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Suponha que o seu conjunto viável seja não vazio e que a função objetivo seja limitada inferiormente neste conjunto. Então o problema tem um minimizador global.

3.2.3 O MÉTODO DE MÉDIA VARIÂNCIA PENALIZADA (MVP)

Uma variação do método de Média Variância de Markowitz encontrado na literatura Nocedal; Wright (2006) consiste em penalizar a função objetivo do Problema 3.12 usando o retorno esperado, conforme apresentamos no Problema 3.14. Em contrapartida desta penalização, não há restrições quanto ao retorno, diferente do que ocorre no Problema 3.12.

Desta forma, a função objetivo possui um parâmetro, representado por α , que faz a ponderação entre variância e retorno. Para uma melhor representatividade do papel de α , normalizamos as funções σ^2 e μ . O novo problema é dado por

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \alpha \frac{x C x^T}{\|C\|} - (1 - \alpha) \frac{M x^T}{\|M\|} \\ \text{s.a} & \mathbf{1} x^T = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De acordo com Wang Xia (2002) podemos encontrar as carteiras eficientes, como apresentado no Problema 3.12, fazendo α variar no intervalo $[0, 1]$. Por exemplo, para $\alpha = 1$, a solução do Problema 3.14 corresponde à carteira de mínima variância, que é a de menor risco e menor retorno esperado dentre as carteiras da Fronteira Eficiente. Para $\alpha = 0$, a solução indica a carteira eficiente de maior retorno esperado e maior risco, pois na função objetivo resta apenas o retorno esperado Mx^T com sinal negativo. Minimizar $-Mx^T$ é equivalente a maximizar Mx^T .

Nos casos particulares de $\mu = \mu_{min}$ e $\mu = \mu_{max}$, o Problema 3.12 é equivalente ao Problema 3.14 com $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, respectivamente. Apesar dessas equivalências e de ambos os problemas terem como solução carteiras eficientes, não temos uma relação explícita entre μ e α que torne os problemas equivalentes, ou seja, com mesmas soluções, riscos e retornos esperados. Isto será comprovado nos experimentos numéricos.

A existência e unicidade de solução para o Problema 3.14 segue o exposto no último parágrafo da seção anterior, uma vez que a função continua quadrática e limitada inferiormente.

3.3 APLICAÇÕES DOS MÉTODOS MVM E MVP NO ENSINO MÉDIO

Nesta seção, buscamos aplicar os métodos MVM e MVP com três e duas ações, respectivamente, pois isso possibilita a exploração de conceitos de estatística, vetores e matrizes, como também de funções quadráticas em nível de ensino médio. Com esses números de ações e respectivas restrições de cada método, é possível resolver o problema de otimização identificando o ponto de mínimo de funções quadráticas.

A Tabela 3.1 apresenta os retornos das ações utilizadas nos exemplos.

Tabela 3.1 – Retornos das ações BRFS3, SAPR11 e CAML3.

| Meses | BRFS3 | SAPR11 | CAML3 |
|--------|---------|---------|---------|
| dez/19 | -0.0383 | 0.1049 | 0.2041 |
| nov/19 | 0.0307 | 0.0065 | 0.1635 |
| out/19 | -0.0704 | 0.0831 | -0.0378 |
| set/19 | 0.0016 | -0.0365 | 0.0264 |
| ago/19 | 0.1416 | 0.0210 | -0.1093 |
| jul/19 | 0.1318 | 0.0856 | 0.0343 |
| jun/19 | 0.0657 | 0.1176 | 0.0655 |
| mai/19 | -0.1079 | -0.0803 | -0.0209 |
| abr/19 | 0.3709 | 0.0590 | 0.0213 |
| mar/19 | 0.1011 | -0.0278 | -0.0534 |
| fev/19 | -0.1262 | 0.0420 | -0.0428 |
| jan/19 | 0.0734 | 0.2367 | 0.0647 |

Exemplo 4. Considerando os ativos da Tabela 3.1, calcule por meio do método MVM a carteira (x_1, x_2, x_3) de menor risco com retorno esperado $\mu = 0.0417$.

Primeiramente, calculamos a média dos retornos de cada ativo, que consideramos como o vetor de retornos esperados dos ativos, M , e a matriz de covariância, C , conforme as fórmulas vistas no fim do Capítulo 2, obtendo:

$$M \approx \begin{bmatrix} 0.0478 & 0.0510 & 0.0263 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$C \approx \begin{bmatrix} 0.0184 & 0.0021 & -0.0006 \\ 0.0021 & 0.0071 & 0.0026 \\ -0.0006 & 0.0026 & 0.0081 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Segundo o que vimos na Seção 3.1, ao decidir os pesos de cada ativo para um determinado retorno μ imposto à carteira estamos procurando x tal que as equações

$$\begin{aligned} 0.0417 &= 0.0478x_1 + 0.0510x_2 + 0.0263x_3 \\ 1 &= x_1 + x_2 + x_3, \end{aligned}$$

sejam satisfeitas e que minimize a função

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_1, x_2, x_3) &= xCx^T \\ &= c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 \\ &\approx 0.0184x_1^2 + 0.0071x_2^2 + 0.0081x_3^2 + 2 \cdot 0.0021x_1x_2 \\ &\quad - 2 \cdot 0.0006x_1x_3 + 2 \cdot 0.0026x_2x_3. \end{aligned}$$

Expressando as variáveis x_2 e x_3 em termos de x_1 obtemos:

$$x_2 \approx 0.6241 - 0.8722x_1 \quad \text{e} \quad x_3 \approx 0.3759 - 0.1278x_1.$$

Usando essas expressões colocamos a função $\sigma^2(x_1, x_2, x_3)$ em termos apenas de x_1

$$\sigma^2(x_1) \approx 0.0211x_1^2 - 0.0085x_1 + 0.0051. \quad (3.17)$$

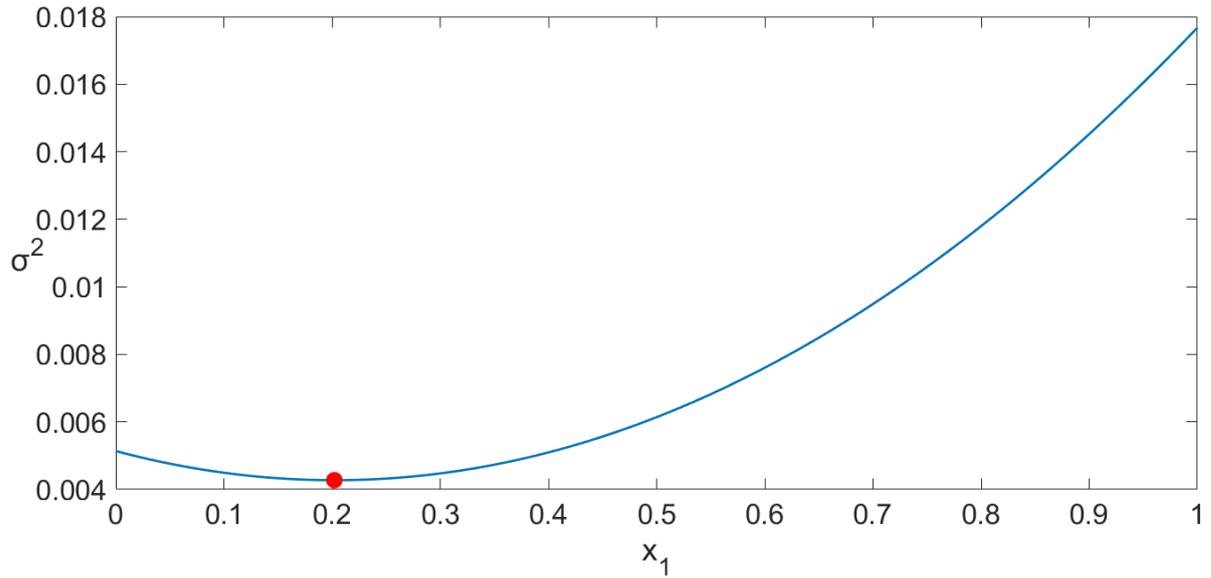
Como a função $\sigma^2(x_1)$ é quadrática e o coeficiente do termo quadrático é positivo, sabemos que a concavidade da parábola que é o gráfico de $\sigma^2(x_1)$ está voltada pra cima e portanto o valor de x_1 tal que $\sigma^2(x_1)$ é mínimo é a abscissa do vértice da parábola, dado por

$$x_1 \approx -\frac{-0.0085}{2 \cdot 0.0211} \approx 0.2024, \quad (3.18)$$

o que implica que os valores de x_2 e x_3 são respectivamente 0.4476 e 0.3501.

Podemos observar graficamente esse ponto de mínimo obtido na Figura 3.1.

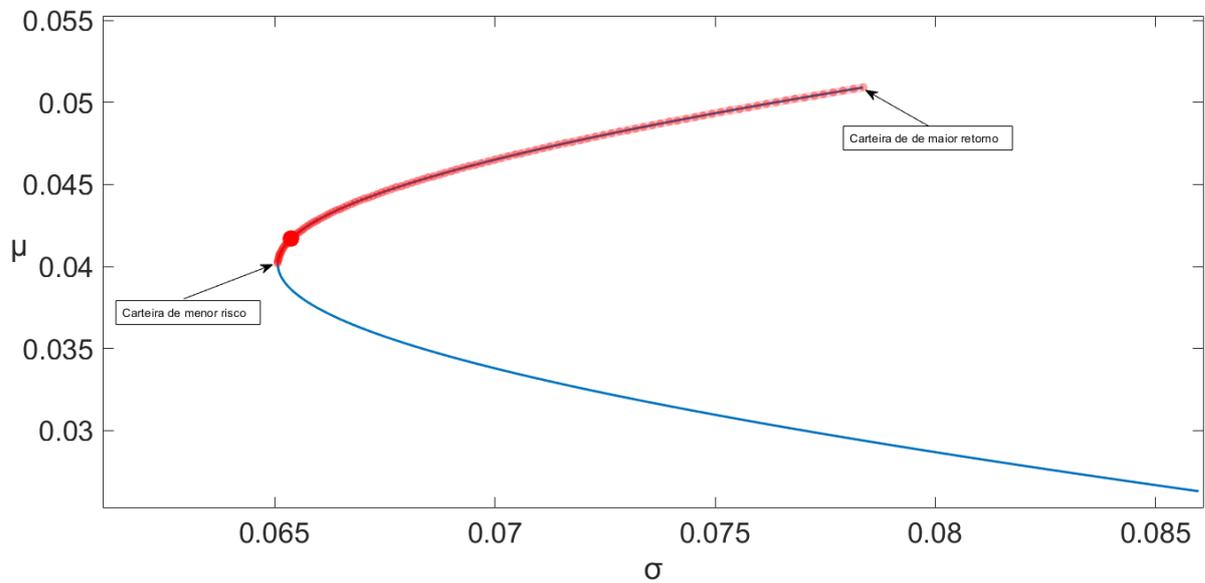
Figura 3.1 – Gráfico $x_1 \times \sigma^2$ para o método MVM



Fonte: Do Autor.

Na Figura 3.2, destacamos em vermelho os pontos que representam as carteiras com menor risco para um determinado retorno esperado, isto é, a Fronteira Eficiente. O ponto vermelho representa a carteira obtida no exemplo.

Figura 3.2 – Fronteira Eficiente do Exemplo 1.



Fonte: Do Autor.

Agora faremos uma aplicação do método MVP para uma carteira com dois ativos, buscando também analisar aspectos de minimização de uma função quadrática.

Exemplo 5. Utilizando os ativos BRFS3 e SAPR11, calcule a carteira (x_1, x_2) conforme o método MVP com $\alpha = 0.5$.

Calculamos a matriz de covariância C e o vetor de retornos esperados dos ativos, M , analogamente ao exemplo anterior, obtendo:

$$M \approx \begin{bmatrix} 0.0478 & 0.0510 \end{bmatrix} \text{ e } C \approx \begin{bmatrix} 0.0184 & 0.0021 \\ 0.0021 & 0.0071 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Assim, precisamos encontrar (x_1, x_2) tal que seja satisfeita a equação

$$1 = x_1 + x_2$$

e seja minimizada a função

$$\begin{aligned} y(x_1, x_2) &= \alpha x C x^T - (1 - \alpha) M x^T \\ &\approx 0.5 (0.0184 x_1^2 + 0.0071 x_2^2 + 2 \cdot 0.0021 x_1 x_2) \\ &\quad - (1 - 0.5) (0.0478 x_1 + 0.0510 x_2). \end{aligned}$$

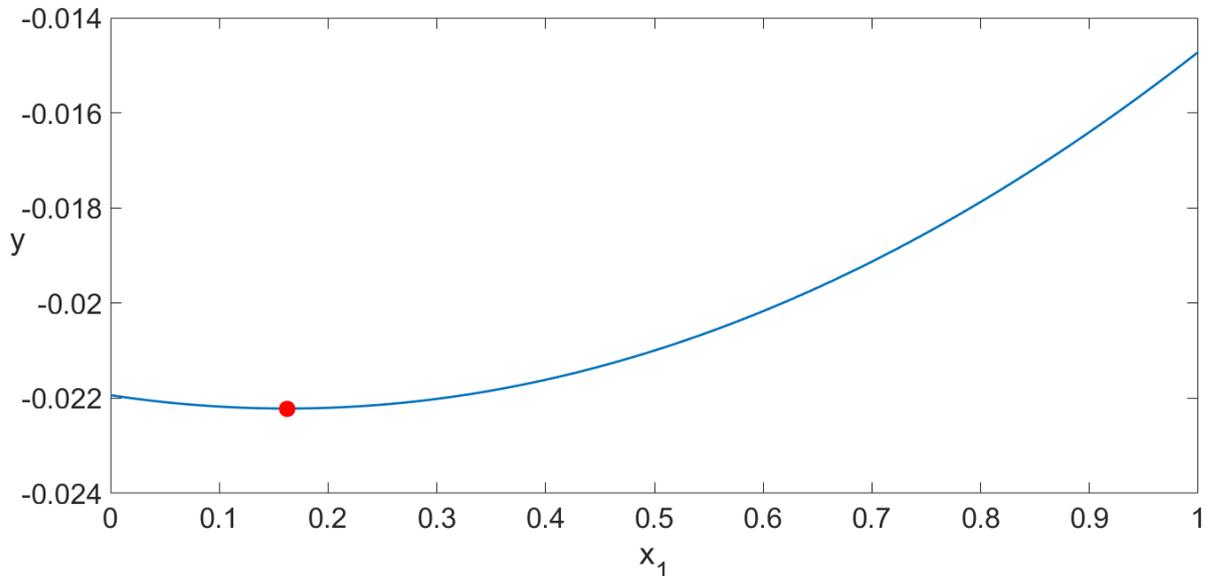
Diferente do primeiro exemplo, a função a ser minimizada não representa o risco da carteira e por isso a denominamos de y . Colocando y em função de x_1 obtemos

$$y(x_1) \approx 0.0107 x_1^2 - 0.0035 x_1 - 0.0219. \quad (3.20)$$

Analogamente ao exemplo anterior, o ponto de mínimo é a abscissa do vértice da parábola, para o qual obtemos $x_1 \approx 0.1621$, implicando em $x_2 \approx 0.8379$.

Na Figura 3.3, podemos observar os valores de y em função dos valores de x_1 , onde graficamente o resultado se verifica.

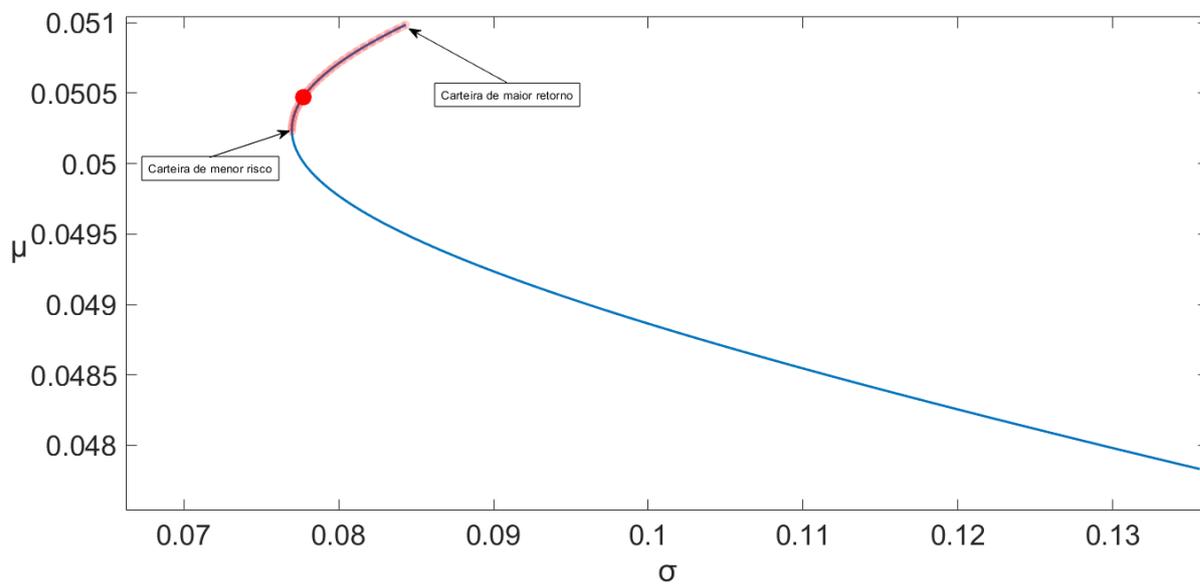
Figura 3.3 – Gráfico $x_1 \times y$ para o método MVP.



Fonte: Do Autor.

Novamente podemos perceber, na Figura 3.4 que, como visto no exemplo anterior, a carteira calculada pertence a Fronteira Eficiente, representada pelo ponto vermelho.

Figura 3.4 – Fronteira Eficiente do Exemplo 2.



Fonte: Do Autor.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentaremos a metodologia utilizada nos experimentos numéricos.

Os dois métodos de gestão de carteira apresentados nas seções do Capítulo 3 serão aplicados semanalmente para o ajuste da carteira, definindo assim estratégias de investimento que continuaremos a chamar de MVM e MVP, respectivamente.

Também são utilizadas as estratégias básicas *BH*, *EW* e Tradicional, definidas nos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente.

Os problemas de otimização são resolvidos utilizando a função *quadprog* do software Matlab® em sua versão R2015a, que escolhe o método de resolução mais apropriado para cada problema.

A carteira que consideramos é composta por 12 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (B³), conforme a Tabela 4.1. Estas ações representam diversos setores da economia e que constavam no IBOVESPA em janeiro de 2019.

Tabela 4.1 – Ativos utilizados

| N. | Ticker | Nome | Setor/Subsetor ou Segmento |
|----|--------|-------------------------|--|
| 1 | ABEV3 | Ambev S.A. | Consumo não Cíclico/Bebidas |
| 2 | EQTL3 | Equatorial Energia S.A. | Utilidade Pública/Energia Elétrica |
| 3 | IGTA3 | Iguatemi E. S. S.A. | Financeiro/Exploração de Imóveis |
| 4 | ITUB4 | Itaú Unibanco S.A. | Financeiro/Bancos |
| 5 | MGLU3 | Magazine Luiza SA | Consumo Cíclico/Eletrrodomésticos |
| 6 | PETR4 | PETROBRÁS S.A. | Petróleo, Gás e Biocombustíveis |
| 7 | RADL3 | Raia Drogasil S.A. | Saúde/Medicamentos e Outros Produtos |
| 8 | RENT3 | Localiza R.C. S.A. | Consumo Cíclico/Aluguel de Carros |
| 9 | SBSP3 | SABESP S.A. | Utilidade Pública/Água e Saneamento |
| 10 | VALE3 | Vale S.A. | Materiais Básicos/Mineração |
| 11 | VIVT4 | Telefônica Brasil S.A. | Comunicações/Telecomunicações |
| 12 | WEGE3 | WEG S.A. | Bens Industriais/Máquinas e Equipamentos |

Coletamos os preços de fechamento semanais dessas ações no período de 28 de dezembro de 2017 a 28 de agosto de 2020, através dos dados disponíveis em www.investing.com. A partir

desses dados calcularmos os retornos históricos semanais, totalizando 139 semanas.

As matrizes de covariância são calculadas semanalmente. Para os modelos utilizados, também são necessárias estimativas dos retornos esperados de cada ativo, os quais são obtidos pela média de retorno anteriores. Para ambos os casos são utilizados os retornos dos ativos das 52 semanas anteriores.

Analisamos 87 semanas sendo a semana 1 a primeira semana de janeiro de 2019 e a semana 87 a última semana de agosto de 2020. Assim, nos dados coletados, temos um histórico de retornos de 52 semanas anteriores à semana 1.

Para as estratégias *BH*, *EW* e Tradicional, o cálculo dos pesos nos rebalanceamentos seguem os Exemplos 3.9, 3.10 e 3.11, respectivamente.

No caso do MVM é estabelecido um retorno esperado para a carteira (μ_0) entre 1% e a média dos retornos esperados das ações no período, o que for maior. Quando esta escolha resultar em um conjunto viável vazio para o Problema 3.12, é aplicada uma redução no valor de μ , até que o conjunto viável não seja vazio. Ou seja, não necessariamente o retorno esperado da respectiva semana é o retorno imposto inicialmente.

A título de validação dos métodos é interessante termos uma estimativa de retornos esperados para a qual conseguimos quantificar sua precisão, ainda que esta não seja uma estimativa justa, no sentido de utilizar dados dos retornos efetivamente ocorridos (dados do futuro). Essa estimativa consiste em uma perturbação randômica do retorno real.

Para criar essa perturbação construímos um vetor randômico A , de mesma dimensão que o vetor de retornos esperados, com valores entre -1 e 1 , uniformemente distribuídos e com média zero. Esse vetor randômico é multiplicado pelo percentual de perturbação máxima que desejamos impor. Na sequência, multiplica-se entrada a entrada com o vetor de retornos reais. Por fim essa perturbação é somada ao vetor de retornos reais. Assim a j -ésima entrada da estimativa real perturbada é dada por

$$P(j) = p \cdot A(j) \cdot R(i, j) + R(i, j) \quad (4.1)$$

sendo p o percentual máximo de perturbação desejado, $A(j)$ o vetor de randômico e $R(i, j)$ o retorno do ativo j na semana i .

O erro relativo de uma estimativa B na semana i é definido como

$$Erro_B(i) = \frac{\|B(i) - R(i, :)\|}{\|R(i, :)\|}, \quad (4.2)$$

em que $B(i)$ é o vetor de estimativa de retornos esperados na semana i e $R(i, :)$ é o vetor de retornos reais da semana i .

5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

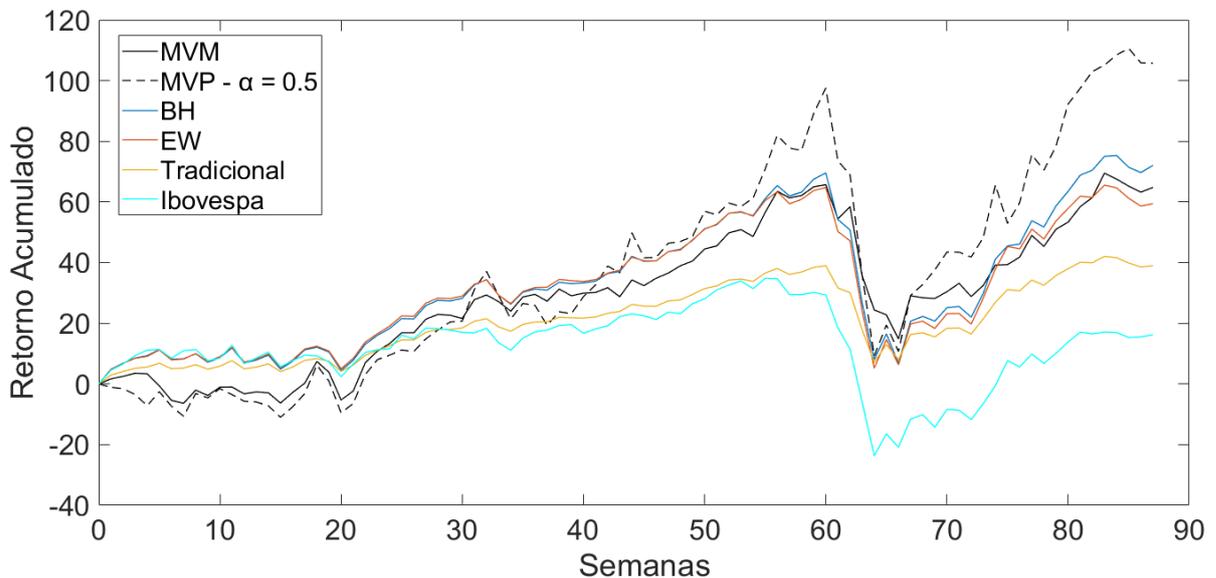
Neste capítulo, apresentamos e discutimos os resultados dos métodos de gestão descritos no Capítulo 3, aplicados conforme a estratégia e as metodologias apresentadas no Capítulo 4. Vamos considerar na primeira seção estimativas para o retorno esperado que usam a média histórica dos retornos dos ativos e na seção seguinte analisamos o desempenho das estratégias quanto a qualidade das estimativas.

5.1 EXPERIMENTOS COM ESTIMATIVAS DE RETORNO POR MÉDIA HISTÓRICA

Nos experimentos dessa seção, as estimativas de retorno consideradas são a média histórica dos retornos. Na estratégia MVP, não há um critério inicial para a escolha do parâmetro α . Para ponderar igualmente, em nossa concepção, risco e retorno da carteira consideramos $\alpha = 0.5$.

Na Figura 5.1, são apresentados os retornos acumulados das estratégias MVM, MVP, BH, EW, Tradicional e também pelo IBOVESPA, a título de comparação.

Figura 5.1 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias ao longo do período.



Fonte: Do autor.

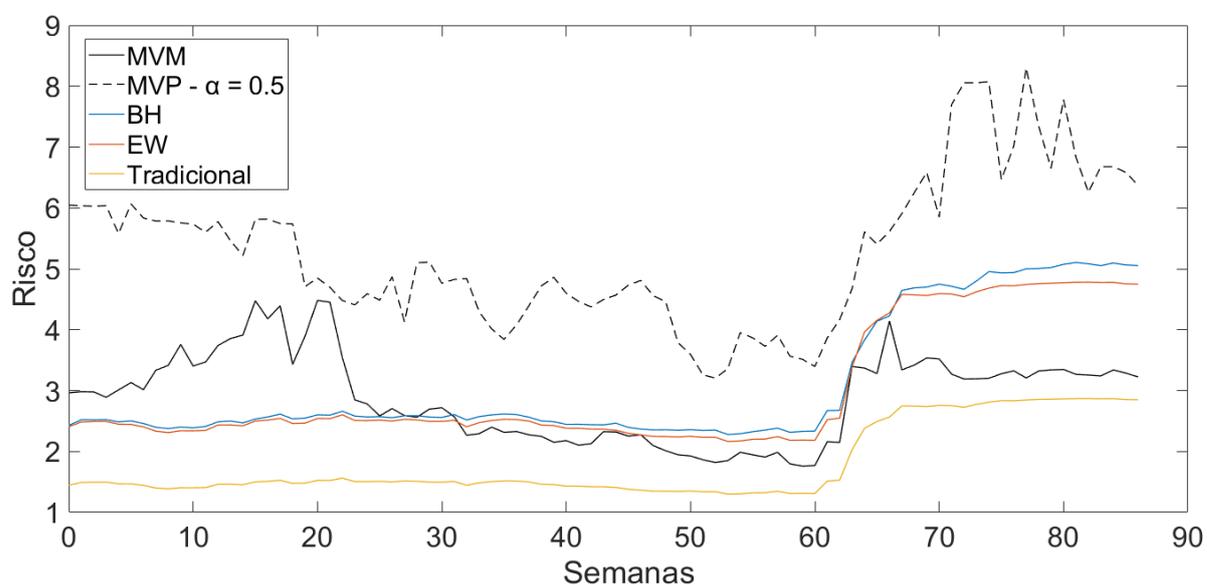
Com exceção das semanas iniciais, todas as estratégias obtiveram resultados superiores ao IBOVESPA. A estratégia MVP obteve o melhor desempenho, o que creditamos a escolha de $\alpha = 0.5$, pois dessa forma grande parte do objetivo do Problema 3.14 passa a ser maximizar o retorno.

As estratégias *MVM*, *BH* e *EW* apresentaram comportamentos parecidos. De fato, seus coeficientes de correlação são de aproximadamente 0.99 e a maior amplitude da diferença entre seus retornos são de aproximadamente 8%, mesmo que ainda nas primeiras 23 semanas e também nas últimas semanas, após o pior momento da crise, as diferenças sejam maiores.

Por sua natureza conservadora, a estratégia Tradicional tem menores oscilações e menores retornos. Ela mostrou comportamento muito próximo ao IBOVESPA até o período de crise, no qual por seu aporte em ativos livres de risco conseguiu amenizar bastante sua queda e se descolou do índice.

Na Figura 5.2, podemos ver o risco para as estratégias consideradas.

Figura 5.2 – Riscos (em porcentagem) das estratégias ao longo do período.



Fonte: Do autor.

De forma geral, os riscos apresentam comportamento bastante consistente com os retornos de cada estratégia, sendo os maiores riscos associados aos maiores retornos.

Dessa análise geral destoam as estratégias *MVM* e *MVP* no período da primeira a vigésima terceira semana em que os maiores riscos não produziram retornos superiores. Também destoa da análise geral, a *MVM* no período entre as semanas 67 e 87 em que, em comparação com as estratégias *BH* e *EW*, com menor risco tem o mesmo nível de retorno.

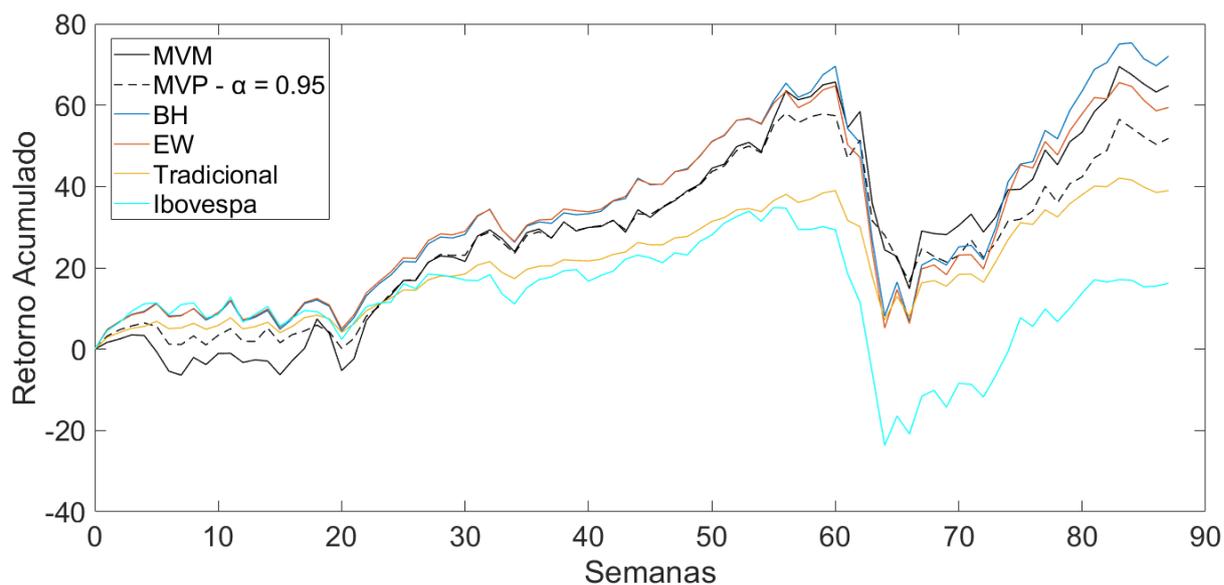
O parâmetro $\alpha = 0.5$ torna a *MVP* pouco comparável com as demais, pois riscos e retornos são maiores. Além disso, o risco da estratégia apresenta oscilações que estão associadas a concentração dos investimentos em poucos ativos, tendo alocado mais de 90% do capital em apenas um ativo na maioria das semanas.

Assim, modificamos o parâmetro α para 0.95, equiparando assim os riscos e retornos da *MVP* com as demais estratégias, conforme podemos ver nas Figuras 5.3 e 5.4, reduzindo a concentração dos investimentos.

Com $\alpha = 0.95$ a MVP faz melhor jus à denominação de Penalizada, pois uma penalização de 50%, ou seja $\alpha = 0.5$, como impomos anteriormente, acaba por equiparar em prioridade o risco e o retorno na função objetivo.

Podemos constatar também na Figura 5.3 que o comportamento do retorno acumulado da MVP com $\alpha = 0.95$ oscila muito menos que com $\alpha = 0.5$.

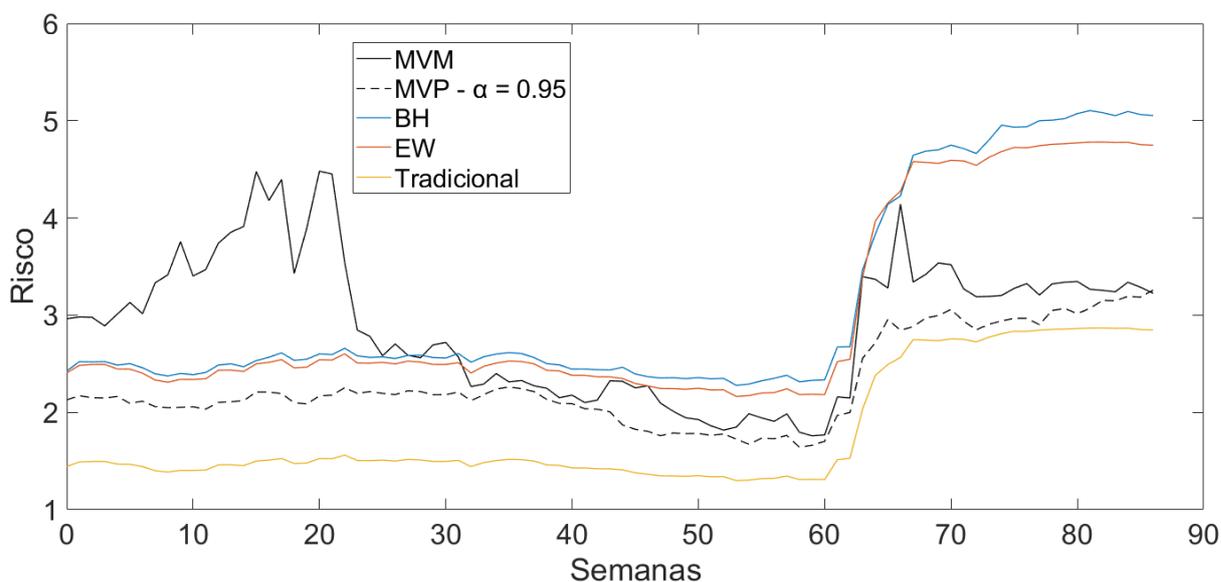
Figura 5.3 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias ao longo do período.



Fonte: Do autor.

No risco, a diferença é ainda mais perceptível, como podemos ver na Figura 5.4. O risco da MVP foi maior apenas que o da estratégia Tradicional e não apresentou oscilações significativas. Apesar disso, em grande parte do período o nível de retorno está próximo dos demais, sendo inferior no período posterior a crise.

Figura 5.4 – Riscos (em porcentagem) das estratégias ao longo do período.



Fonte: Do autor.

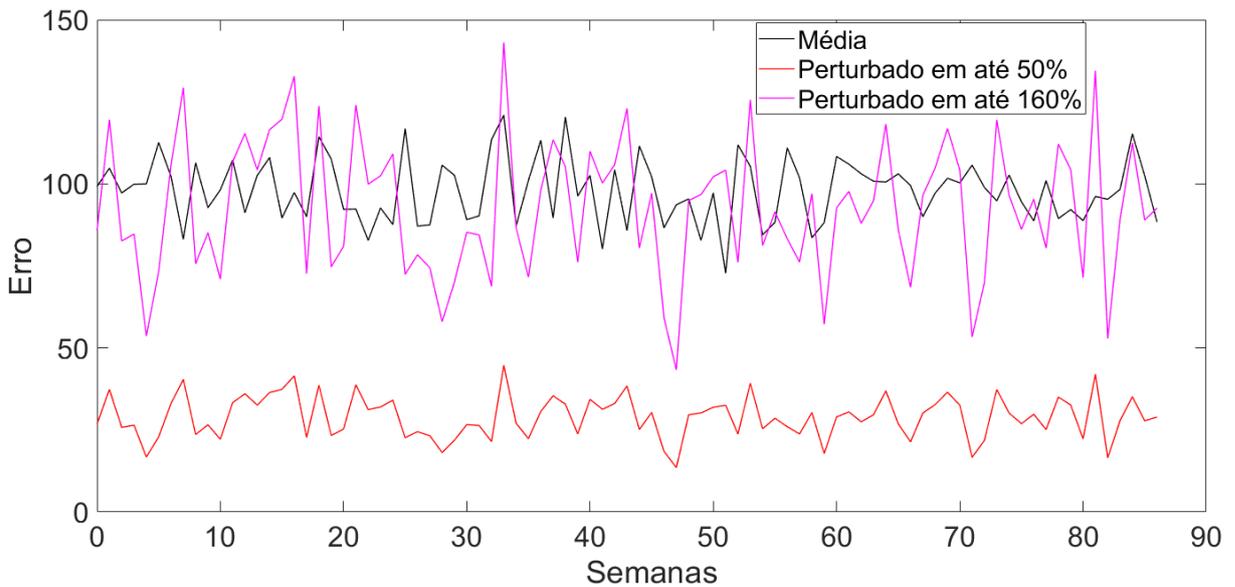
5.2 QUALIDADE DAS ESTIMATIVAS DE RETORNOS \times DESEMPENHO DAS ESTRATÉGIAS

Até este ponto, a estratégia que apresenta melhor custo benefício é a *BH* e isso é contraintuitivo, pois *MVM* e *MVP* aplicam otimizações. A explicação para esse fato está na falta de precisão das estimativas para o retorno esperado. Para comprovar essa afirmação precisamos medir o nível de erro da estimativa considerada, propor uma com menor nível de erro e verificar se com ela os resultados são melhores.

Para isso, construímos tal estimativa com base no retorno real com o objetivo de validar as estratégias *MVM* e *MVP*, ou seja mostrar que elas funcionam bem quando atreladas a boas estimativas. É importante notar que não podemos usar esse tipo de estimativa em aplicações reais, pois estamos utilizando dados cronologicamente posteriores aos rebalanceamentos das carteiras, desta forma é uma estimativa injusta, mas que serve para a validação das estratégias.

Na Figura 5.5, apresentamos os erros relativos, conforme Equação 4.2, para a estimativa que considera a média das 52 semanas anteriores e para as estimativas reais perturbadas, conforme Equação 4.1, com perturbação de até 50% e de até 160%.

Figura 5.5 – Erros relativos (em porcentagem) das estimativas dos retornos esperados.

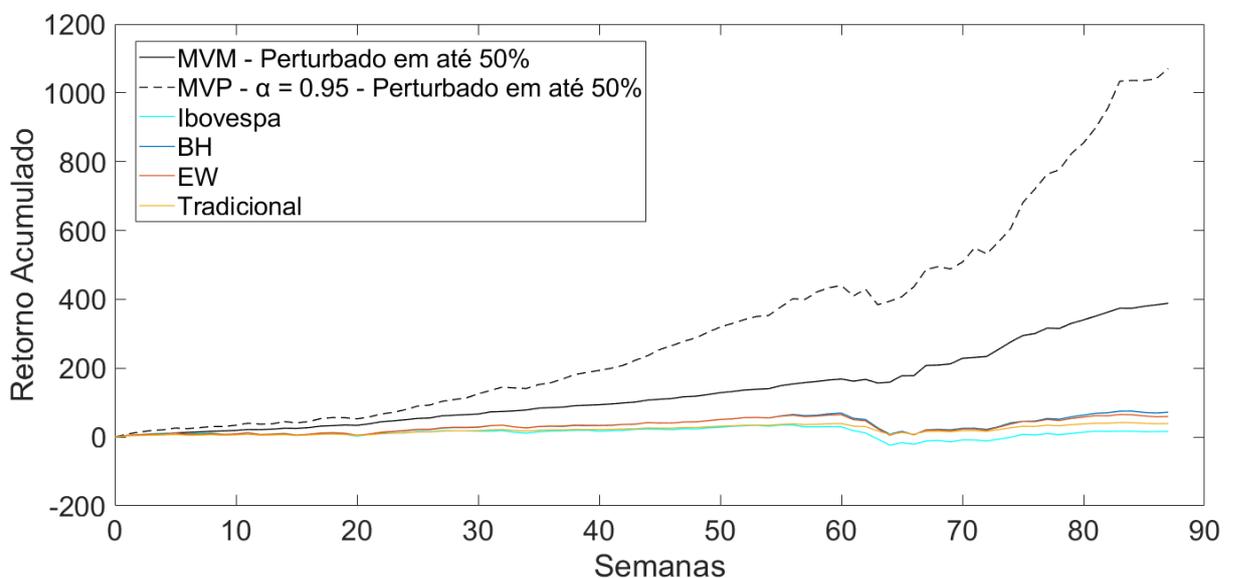


Fonte: Do autor.

Os erros relativos das estimativas por médias está em torno de 100%. O valor de perturbação de até 160% foi o que resultou em um erro relativo mais parecido com o erro da estimativa usando médias, e por isso o consideramos.

Considerando a estimativa real perturbada em 50%, o impacto nos métodos MVM e MVP é enorme, como podemos ver na Figura 5.6. O MVM chega a 400% de retorno acumulado e o MVP passa de 1000%.

Figura 5.6 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 50%.



Fonte: Do autor.

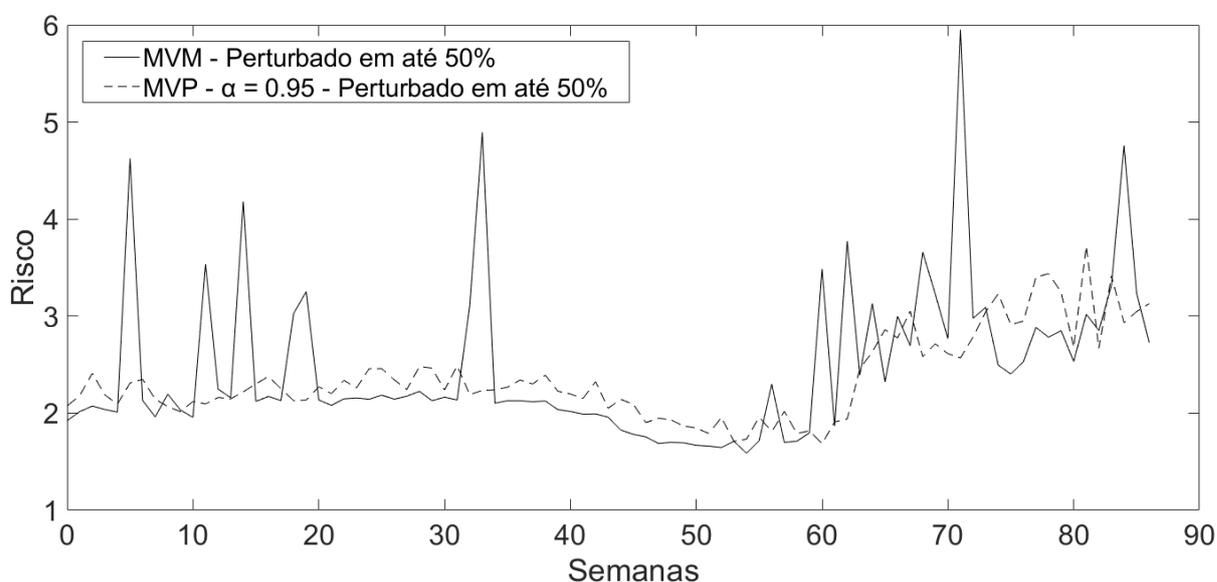
Quanto ao risco, conforme Figura 5.7, podemos dizer que o nível de risco diminuiu.

Contudo para o MVM, surgiram picos de risco associados a concentração dos investimentos. Esses picos ocorrem por imposição de um retorno muito alto a carteira, e esse nível de retorno só é esperado em poucos ativos.

Mas mesmo com os picos o nível de risco não está muito maior do que o apresentado na Figura 5.4. O risco associado ao MVP está excelente, com baixo nível e poucas oscilações. Em conjunto com o desempenho do retorno acumulado esse fato mostra a superioridade do MVP sobre MVM.

Esses resultados comprovam que com uma estimativa melhor para o retorno esperado dos ativos, os métodos MVM e MVP funcionam muito bem.

Figura 5.7 – Riscos (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 50%.

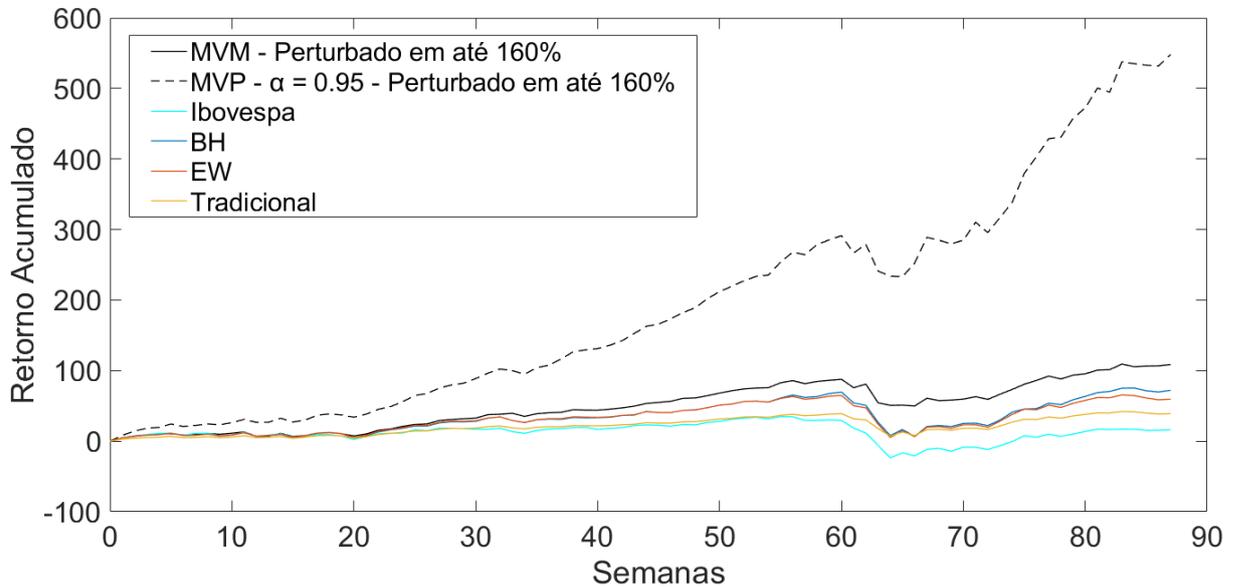


Fonte: Do autor.

Com a estimativa com perturbação de até 160% do retorno real, o desempenho do retorno acumulado, Figura 5.8, foi muito bom, mas inferior ao com até 50% de perturbação.

Embora a estimativa com até 160% de perturbação do retorno real tenha erros relativos similares aos das estimativas com médias, o fato da perturbação ser centrada no retorno real, uniforme e de média zero a tornam uma estimativa melhor.

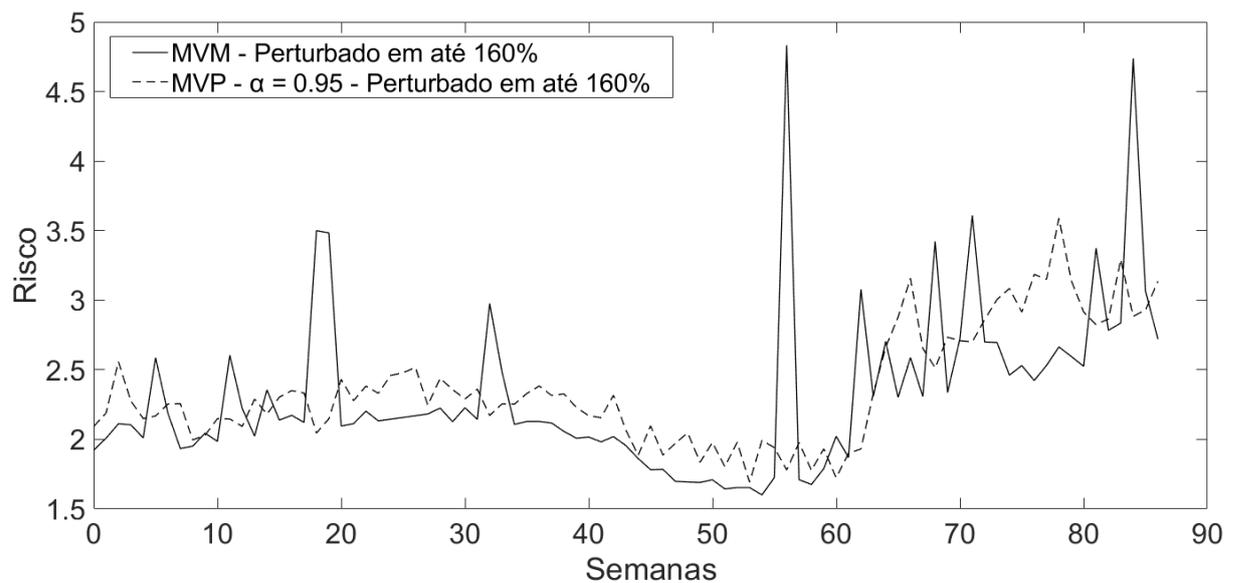
Figura 5.8 – Retornos acumulados (em porcentagem) das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 160%.



Fonte: Do autor.

O aumento na perturbação da estimativa não tem grande impacto nos riscos, que mantêm essencialmente o mesmo nível e o mesmo comportamento quanto a oscilações, como podemos ver na Figura 5.9.

Figura 5.9 – Riscos das estratégias com estimativas dos retornos esperados perturbadas em até 160%.



Fonte: Do autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos o clássico método de Média Variância de Markowitz e uma variação na qual a restrição que impunha o retorno é substituída por uma penalização associada ao retorno na função objetivo.

Exemplificamos a possibilidade de aplicar esses métodos no contexto de educação financeira para o ensino médio, abordando conteúdos como funções quadráticas, vetores, matrizes e estatística. Esses exemplos podem servir de motivação para o ensino destes conteúdos por meio de projetos.

Propomos a utilização desses métodos através de estratégias de investimento autofinanciáveis, isto é, em que existe o aporte inicial e cada rebalanceamento utiliza apenas o capital da carteira atual.

Aplicamos essas estratégias com o histórico de retornos dessas ações como base para a estimativa dos retornos esperados, utilizando dados de janeiro de 2018 a agosto de 2020 e analisando o período de janeiro de 2019 a agosto de 2020, considerando sempre um período de 52 semanas para o cálculo das matrizes de covariância e a estimativa dos retornos esperados de cada período. Por este período incluir a crise causada pela COVID-19, naturalmente os retornos oscilaram bastante e esse cenário tornou mais interessante a análise das estratégias.

Comparamos as estratégias MVM e MVP com as mais ingênuas e simples de serem implementadas, *BH*, *EW* e Tradicional, quanto a retornos acumulados e riscos.

Começamos por ajustar o parâmetro α no MVP de modo a obter uma certa equivalência com o MVM, quanto a retorno e risco, e também visando reduzir a concentração de investimento.

As estratégias *BH* e *EW* tiveram desempenho um pouco superior quando consideramos as estimativas de retorno esperado por médias para a MVM e a MVP. Além disso, a *BH* tem a vantagem fiscal e operacional da não movimentação dos recursos. Por outro lado, as piores semanas da crise impactaram menos o desempenho das estratégias MVM e MVP.

Analisamos o efeito da qualidade das estimativas de retorno esperado nas estratégias MVM e MVP. Utilizar a média como estimativa traz uma imprecisão muito alta e que afeta muito ambos os métodos. Para testar a sensibilidade dos métodos, quanto a qualidade das estimativas de retorno esperado, utilizamos estimativas que eram perturbações do retorno real. As estratégias MVM e MVP usando as estimativas perturbadas apresentaram resultados muito superiores aos com estimativa por média, quanto a retorno acumulado e risco, mostrando assim que com boas estimativas de retorno esperado a MVM e a MVP têm grande vantagem sobre as demais. Porém, estimar o retorno esperado com menor nível de erro é um problema muito difícil e envolve muitas questões econométricas.

Ao ter uma estimativa de retorno esperado dos ativos mais precisa, a MVM obteve resultados bons mesmo com a imprecisão do retorno imposto à carteira. Porém, em nossa análise, a MVP mostrou-se superior a MVM. Para a MVM é necessário impor um retorno à carteira, que mantenha o problema solúvel, e esta é uma dificuldade significativa. Na MVP é necessário definir o parâmetro α , que deve variar conforme a carteira e o perfil do investidor. Contudo, uma vez definido α , o problema está bem posto e não teremos incompatibilidades nas restrições do problema.

Um problema de otimização mais fácil e implementação numérica mais estável são outros pontos positivos da MVP. Ainda, sob as mesmas condições que a MVM, a MVP não obteve picos tão altos de risco e, se a estimativa de retorno esperado for boa, os retornos são excelentes.

Propomos como possíveis trabalhos futuros, a imersão no campo de econometria com o objetivo de fazer estimativas de retornos utilizando as ferramentas mais apropriadas e assim fazer uma análise mais completa dos métodos. Também pode-se explorar melhor o comportamento da ponderação do parâmetro α do método de Média Variância Penalizada e assim fazer uma análise concisa de qual parâmetro utilizar conforme o objetivo do investidor.

REFERÊNCIAS

- ALVES, D. P. **A Estatística como Auxílio na Seleção de Carteiras de Investimentos**: Uma aplicação por meio do modelo de markowitz. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2020. PROFMAT.
- BLUM, E.; OETTLI, W. Technical note – direct proof of the existence theorem for quadratic programming. **Operations Research**, v. 20, n. 1, p. 165–167, 1972.
- BORTOLUZZO, M. M. et al. Comparação do desempenho de carteiras utilizando os métodos paridade de risco, mínima variância e equal weighting: um estudo no mercado brasileiro em períodos pré, durante e pós a crise de 2008. **Revista Evidenciação Contábil & Finanças**, v. 6, n. 3, p. 36–53, 2018.
- CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**. London: Springer-Verlag London Limited, 2003.
- CESARONE, F.; SCOZZARI, A.; TARDELLA, F. Portfolio selection problems in practice: a comparison between linear quadratic optimization models. 2010.
- CHAGUE, F.; GIOVANETTI, B. É possível viver de day-trade em ações? **Brazilian Review of Finance (Online)**, v. 18, n. 3, p. 1–4, 2020.
- DARIO, R. et al. Estratégias de gestão de risco de investimentos no brasil durante a pandemia de covid-19 - *preprint*. 2021.
- FRANK, M.; WOLFE, P. An algorithm for quadratic programming. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 3, p. 95–110, 1956.
- JACOB, M. L. A. **Estratégias de Gestão de Risco de Investimentos no Brasil durante a Pandemia de COVID-19**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. PROFMAT.
- KRULIKOVSKI, E. H. M. **Análise Teórica de Máquinas de Vetores Suporte e Aplicação a Classificação de Caracteres**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Master thesis.
- MAILLARD, S.; THIERRY, R.; TEILETCHE, J. On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, v. 36, n. 4, p. 60–70, 2010.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MORETTIN, P.; BUSSAB, W. **Estatística Básica**. Brasil: Editora Saraiva, 2010.
- NETO, F. F. et al. Saving markowitz: A risk parity approach based on the cauchy interlacing theorem. n. 25, 2020.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. [S.l.]: Springer, 2006.
- WANG, S.; XIA, Y. **Portfolio Selection and Asset Pricing**. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES

Das definições vistas no Capítulo 2, vamos demonstrar as seguintes propriedades:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (\text{A.1})$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) \quad (\text{A.4})$$

Esta primeira demonstração resulta da Definição 3 e do segundo item da Definição 2.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum (ax_i + b)p(x_i) && \text{(usando Def. 3)} \\ &= \sum [ax_i p(x_i) + bp(x_i)] \\ &= a \sum x_i p(x_i) + b \sum p(x_i) \\ &= aE(X) + b. && \text{(usando Def. 2)} \quad \square \end{aligned}$$

Antes de introduzirmos a próxima demonstração, vamos denotar por $p(x_i, y_j)$ a probabilidade conjunta, ou seja, a probabilidade de ocorrer x_i e y_j . A probabilidade conjunta tem a seguinte propriedade

$$p(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j). \quad (\text{A.5})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j)p(x_i, y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i p(x_i, y_j) + \sum_i \sum_j y_j p(x_i, y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i p(x_i, y_j) + \sum_j \sum_i y_j p(x_i, y_j) \\ &= \sum_i x_i p(x_i) + \sum_j y_j p(y_j) && \text{(usando A.5)} \\ &= E(X) + E(Y). \quad \square \end{aligned}$$

Por indução, prova-se a generalização do resultado acima para n variáveis aleatórias. Da generalização do caso acima e de (A.1), temos que

$$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n).$$

Este resultado, mencionado no Capítulo 2, é denominada-se linearidade do valor esperado.

A próxima demonstração mostra uma forma simplificada de obter a variância.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\
 &= E\left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right) \\
 &= E(X^2) + E(-2XE(X)) + E\left((E(X))^2\right) \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
 &= E(X^2) - (E(X))^2.
 \end{aligned}$$

□

O resultado abaixo finaliza as primeiras propriedades apresentadas envolvendo valor esperado e variância.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(aX + b) &= E\left((aX + b)^2\right) - (E(aX + b))^2 \\
 &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\
 &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2(E(X))^2 - 2abE(X) - b^2 \\
 &= a^2\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) \\
 &= a^2\text{Var}(X)
 \end{aligned}$$

□

Estas próximas 4 propriedades envolvem a definição de covariância também apresentadas no Capítulo 2.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X). \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X). \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y). \quad (\text{A.9})$$

Assim como vimos nas propriedades de valor esperado e variância, a covariância tem uma forma simplificada.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
&= E(XY - XE(Y) - YE(Y) + E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(Y)E(X) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

É intuitivo pensar que a covariância entre duas variáveis independe da ordem de como é obtida. É isso que a demonstração abaixo comprova.

Demonstração.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(YX) - E(Y)E(X) = \text{Cov}(Y, X). \quad \square$$

A covariância de uma variável aleatória com ela mesma é a sua própria variância.

Demonstração.

$$\text{Cov}(X, X) = E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \text{Var}(X). \quad \square$$

Por fim, demonstramos que a covariância entre duas variáveis aleatórias é bilinear.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\
&= abE(XY) - aE(Y)bE(X) \\
&= ab(E(XY) - E(X)E(Y)) \\
&= ab\text{Cov}(X, Y). \quad \square
\end{aligned}$$

A generalização para n variáveis aleatórias deste resultado foi demonstrado no Capítulo 2.

APÊNDICE B – RETORNOS DE CADA ESTRATÉGIA

Tabela B.1 – Retornos semanais de cada ativo

| Semana | MVM | MVP | BH | EW | Tradicional | Ibovespa |
|---------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------------|-----------------|
| 30.12.18 | 0.0166 | 0.0322 | 0.0484 | 0.0478 | 0.0290 | 0.0450 |
| 06.01.19 | 0.0081 | 0.0149 | 0.0187 | 0.0187 | 0.0117 | 0.0198 |
| 13.01.19 | 0.0102 | 0.0093 | 0.0165 | 0.0160 | 0.0101 | 0.0260 |
| 20.01.19 | -0.0018 | 0.0065 | 0.0070 | 0.0060 | 0.0041 | 0.0164 |
| 27.01.19 | -0.0384 | -0.0074 | 0.0184 | 0.0189 | 0.0118 | 0.0019 |
| 03.02.19 | -0.0483 | -0.0418 | -0.0286 | -0.0292 | -0.0170 | -0.0257 |
| 10.02.19 | -0.0102 | -0.0008 | 0.0013 | 0.0026 | 0.0021 | 0.0229 |
| 17.02.19 | 0.0464 | 0.0210 | 0.0154 | 0.0167 | 0.0105 | 0.0037 |
| 24.02.19 | -0.0179 | -0.0214 | -0.0255 | -0.0240 | -0.0139 | -0.0335 |
| 03.03.19 | 0.0283 | 0.0235 | 0.0138 | 0.0151 | 0.0093 | 0.0080 |
| 10.03.19 | 0.0004 | 0.0157 | 0.0299 | 0.0281 | 0.0175 | 0.0396 |
| 17.03.19 | -0.0225 | -0.0296 | -0.0447 | -0.0431 | -0.0254 | -0.0545 |
| 24.03.19 | 0.0065 | -0.0002 | 0.0093 | 0.0084 | 0.0055 | 0.0179 |
| 31.03.19 | -0.0031 | 0.0324 | 0.0153 | 0.0160 | 0.0102 | 0.0178 |
| 07.04.19 | -0.0347 | -0.0346 | -0.0422 | -0.0409 | -0.0241 | -0.0436 |
| 14.04.19 | 0.0372 | 0.0196 | 0.0247 | 0.0240 | 0.0148 | 0.0183 |
| 21.04.19 | 0.0314 | 0.0089 | 0.0350 | 0.0336 | 0.0206 | 0.0175 |
| 28.04.19 | 0.0717 | 0.0136 | 0.0077 | 0.0083 | 0.0054 | -0.0024 |
| 05.05.19 | -0.0332 | -0.0157 | -0.0139 | -0.0143 | -0.0081 | -0.0182 |
| 12.05.19 | -0.0880 | -0.0390 | -0.0551 | -0.0525 | -0.0310 | -0.0452 |
| 19.05.19 | 0.0311 | 0.0249 | 0.0319 | 0.0325 | 0.0200 | 0.0404 |
| 26.05.19 | 0.0958 | 0.0527 | 0.0494 | 0.0498 | 0.0304 | 0.0363 |
| 02.06.19 | 0.0357 | 0.0216 | 0.0257 | 0.0240 | 0.0149 | 0.0082 |
| 09.06.19 | 0.0221 | 0.0309 | 0.0193 | 0.0213 | 0.0132 | 0.0022 |
| 16.06.19 | 0.0316 | 0.0270 | 0.0277 | 0.0285 | 0.0175 | 0.0405 |
| 23.06.19 | -0.0001 | 0.0018 | -0.0009 | -0.0011 | -0.0002 | -0.0102 |
| 30.06.19 | 0.0385 | 0.0356 | 0.0364 | 0.0356 | 0.0219 | 0.0309 |
| 07.07.19 | 0.0127 | 0.0168 | 0.0137 | 0.0133 | 0.0085 | -0.0018 |
| 14.07.19 | -0.0021 | -0.0019 | -0.0018 | -0.0016 | -0.0005 | -0.0044 |
| 21.07.19 | -0.0087 | 0.0003 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0045 | -0.0061 |
| 28.07.19 | 0.0511 | 0.0363 | 0.0346 | 0.0300 | 0.0185 | -0.0014 |
| 04.08.19 | 0.0120 | 0.0098 | 0.0132 | 0.0110 | 0.0070 | 0.0129 |
| 11.08.19 | -0.0169 | -0.0196 | -0.0380 | -0.0376 | -0.0221 | -0.0403 |

| Semana | MVM | MVP | BH | EW | Tradicional | Ibovespa |
|---------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------------|-----------------|
| 18.08.19 | -0.0248 | -0.0217 | -0.0233 | -0.0217 | -0.0125 | -0.0214 |
| 25.08.19 | 0.0377 | 0.0353 | 0.0314 | 0.0319 | 0.0196 | 0.0355 |
| 01.09.19 | 0.0069 | 0.0075 | 0.0079 | 0.0099 | 0.0064 | 0.0178 |
| 08.09.19 | -0.0176 | -0.0118 | -0.0027 | 0.0008 | 0.0009 | 0.0055 |
| 15.09.19 | 0.0316 | 0.0301 | 0.0197 | 0.0195 | 0.0121 | 0.0127 |
| 22.09.19 | -0.0171 | -0.0152 | -0.0034 | -0.0031 | -0.0014 | 0.0025 |
| 29.09.19 | 0.0067 | 0.0058 | 0.0020 | -0.0020 | -0.0008 | -0.0240 |
| 06.10.19 | 0.0018 | 0.0032 | 0.0042 | 0.0046 | 0.0032 | 0.0125 |
| 13.10.19 | 0.0120 | 0.0094 | 0.0190 | 0.0158 | 0.0099 | 0.0086 |
| 20.10.19 | -0.0225 | -0.0168 | 0.0047 | 0.0075 | 0.0049 | 0.0252 |
| 27.10.19 | 0.0429 | 0.0303 | 0.0366 | 0.0307 | 0.0188 | 0.0077 |
| 03.11.19 | -0.0139 | -0.0016 | -0.0115 | -0.0082 | -0.0045 | -0.0052 |
| 10.11.19 | 0.0185 | 0.0141 | 0.0011 | -0.0004 | 0.0001 | -0.0100 |
| 17.11.19 | 0.0125 | 0.0140 | 0.0217 | 0.0218 | 0.0135 | 0.0200 |
| 24.11.19 | 0.0177 | 0.0128 | 0.0054 | 0.0039 | 0.0027 | -0.0042 |
| 01.12.19 | 0.0113 | 0.0123 | 0.0205 | 0.0230 | 0.0142 | 0.0267 |
| 08.12.19 | 0.0283 | 0.0241 | 0.0255 | 0.0239 | 0.0147 | 0.0130 |
| 15.12.19 | 0.0070 | 0.0096 | 0.0091 | 0.0109 | 0.0069 | 0.0227 |
| 22.12.19 | 0.0297 | 0.0260 | 0.0247 | 0.0236 | 0.0145 | 0.0123 |
| 29.12.19 | 0.0069 | 0.0075 | 0.0024 | 0.0035 | 0.0024 | 0.0101 |
| 05.01.20 | -0.0149 | -0.0108 | -0.0075 | -0.0099 | -0.0056 | -0.0187 |
| 12.01.20 | 0.0534 | 0.0460 | 0.0363 | 0.0334 | 0.0204 | 0.0258 |
| 19.01.20 | 0.0446 | 0.0190 | 0.0267 | 0.0180 | 0.0112 | -0.0009 |
| 26.01.20 | -0.0134 | -0.0153 | -0.0209 | -0.0243 | -0.0143 | -0.0390 |
| 02.02.20 | 0.0049 | 0.0097 | 0.0080 | 0.0092 | 0.0059 | 0.0001 |
| 09.02.20 | 0.0177 | 0.0043 | 0.0259 | 0.0179 | 0.0111 | 0.0054 |
| 16.02.20 | 0.0042 | -0.0029 | 0.0124 | 0.0062 | 0.0041 | -0.0061 |
| 23.02.20 | -0.0676 | -0.0666 | -0.0905 | -0.0881 | -0.0527 | -0.0837 |
| 01.03.20 | 0.0256 | 0.0306 | -0.0224 | -0.0204 | -0.0119 | -0.0593 |
| 08.03.20 | -0.1435 | -0.1313 | -0.1592 | -0.1571 | -0.0940 | -0.1563 |
| 15.03.20 | -0.0834 | -0.0268 | -0.1474 | -0.1521 | -0.0910 | -0.1888 |
| 22.03.20 | -0.0130 | -0.0456 | 0.0779 | 0.0899 | 0.0542 | 0.0948 |
| 29.03.20 | -0.0646 | -0.0462 | -0.0835 | -0.0727 | -0.0434 | -0.0530 |
| 05.04.20 | 0.1237 | 0.0704 | 0.1304 | 0.1267 | 0.0762 | 0.1171 |
| 12.04.20 | -0.0050 | -0.0155 | 0.0131 | 0.0077 | 0.0049 | 0.0168 |
| 19.04.20 | -0.0019 | -0.0111 | -0.0128 | -0.0198 | -0.0117 | -0.0463 |
| 26.04.20 | 0.0175 | 0.0135 | 0.0367 | 0.0410 | 0.0248 | 0.0687 |
| 03.05.20 | 0.0212 | 0.0312 | 0.0032 | 0.0006 | 0.0006 | -0.0030 |

| Semana | MVM | MVP | BH | EW | Tradicional | Ibovespa |
|---------------|------------|------------|-----------|-----------|--------------------|-----------------|
| 10.05.20 | -0.0328 | -0.0344 | -0.0279 | -0.0285 | -0.0169 | -0.0337 |
| 17.05.20 | 0.0287 | 0.0290 | 0.0645 | 0.0720 | 0.0434 | 0.0595 |
| 24.05.20 | 0.0504 | 0.0430 | 0.0867 | 0.0744 | 0.0448 | 0.0636 |
| 31.05.20 | 0.0011 | 0.0033 | 0.0309 | 0.0539 | 0.0326 | 0.0828 |
| 07.06.20 | 0.0179 | 0.0156 | 0.0041 | -0.0053 | -0.0030 | -0.0195 |
| 14.06.20 | 0.0504 | 0.0454 | 0.0526 | 0.0450 | 0.0272 | 0.0407 |
| 21.06.20 | -0.0243 | -0.0290 | -0.0134 | -0.0217 | -0.0128 | -0.0283 |
| 28.06.20 | 0.0389 | 0.0343 | 0.0458 | 0.0402 | 0.0243 | 0.0312 |
| 05.07.20 | 0.0155 | 0.0119 | 0.0303 | 0.0272 | 0.0165 | 0.0338 |
| 12.07.20 | 0.0332 | 0.0332 | 0.0326 | 0.0253 | 0.0153 | 0.0286 |
| 19.07.20 | 0.0191 | 0.0122 | 0.0097 | -0.0023 | -0.0012 | -0.0049 |
| 26.07.20 | 0.0498 | 0.0513 | 0.0268 | 0.0249 | 0.0151 | 0.0052 |
| 02.08.20 | -0.0117 | -0.0134 | 0.0016 | -0.0054 | -0.0031 | -0.0013 |
| 09.08.20 | -0.0139 | -0.0141 | -0.0222 | -0.0209 | -0.0124 | -0.0138 |
| 16.08.20 | -0.0119 | -0.0123 | -0.0102 | -0.0160 | -0.0095 | 0.0017 |
| 23.08.20 | 0.0096 | 0.0099 | 0.0140 | 0.0052 | 0.0033 | 0.0061 |

Fonte: Do Autor

APÊNDICE C – CÓDIGO MATLAB

```

R=[ABEV3' EQTL3' IGTA3' ITUB4' MGLU3' PETR4' RADL3' RENT3'...
... SBSP3' VALE3' VIVT4' WEGE3' SELIC_S' Ibovespa'];

for i=1:88
C(:, :, i)=cov(R(89-i:140-i, 1:12));

Q=orth(R(89-i:140-i, 1:12)');
[mmm, nnn] = size(Q);
if nnn<12
disp('problem')
else
condicao=cond(Q);
end

%Retornos Randomizados em 160%
if i<88
MM(i, :)=R(88-i, 1:12).*RAND(:, i)'+1.6+R(88-i, 1:12);
%RAND(i, :)=(2*rand(1, 12)-1);
end

%Para 52 semanas
ndsm=51;
M(i, :)= [mean(R(89-i:89+ndsm-i, 1)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 2))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 3)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 4))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 5)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 6))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 7)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 8))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 9)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 10))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 11)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 12))
          mean(R(89-i:89+ndsm-i, 13)) mean(R(89-i:89+ndsm-i, 14))];

%MVM - MÉDIAS

if i<88
Mu_v(i)=max(0.01, mean(M(i, 1:12)));
ExitFlag1=-0.5;
while ExitFlag1<=0

```

```

H=C(:, :, i);
f=zeros(12,1);
A = -1*eye(12);
b = zeros(12,1);
Aeq = [ones(1,12);M(i,1:12)];
beq = [1;Mu_v(i)];
LB = zeros(12,1);
UB = ones(12,1);
temp=linsolve(Aeq,beq);
k=1;
while k<13
if temp(k)>1 || temp(k)<0
k=13;
Mu_v(i)= Mu_v(i)-0.0001;
end
k=k+1;
end
if k<14
[X_1(:, i), FVAL1(i), ExitFlag1]=quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, LB, UB);
if ExitFlag1<=0
disp('Problemas na convergencia')
Mu_v(i)= Mu_v(i)-0.0001;
end
end
end
Risco_1(i)=sqrt(X_1(:, i)'*C(:, :, i)*X_1(:, i));
Retorno_Esperado_1(i)=M(i, 1:12)*X_1(:, i);
Retorno_1(i)=R(88-i, 1:12)*X_1(:, i);

end

%Média Variância Ponderada alpha=0.5 Estimada por Médias

if i<88
alpha=0.05;
ExitFlag2=-0.5;
while ExitFlag2<=0
H=(1-alpha)*2*(1/norm(C(:, :, i), inf))*C(:, :, i);
f=-1*(alpha)*(1/norm(M(i, :), inf))*M(i, 1:12)';

```

```

A = -1*eye(12);
b = zeros(12,1);
Aeq = ones(1,12);
beq = ones(1,1);
LB = zeros(12,1);
UB = ones(12,1);

[X_2(:,i),FVAL2(i),ExitFlag2]=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq, LB,UB);
if ExitFlag2<=0
disp('Problemas na convergencia')
end

end

Risco_2(i)=sqrt(X_2(:,i)'*C(:, :, i)*X_2(:,i));
Retorno_Esperado_2(i)=M(i,1:12)*X_2(:,i);
Retorno_2(i)=R(88-i,1:12)*X_2(:,i);

end

% MVM - PERTURBADO

if i<88
%Mu_v(i)=max(0.005,R(88-i,13)+(M(i,14)-M(i,13)));
Mu_v(i)=max(0.01,mean(MM(i,1:12)));
ExitFlag3=-0.5;
while ExitFlag3<=0
H=C(:, :, i);
f=zeros(12,1);
A = -1*eye(12);
b = zeros(12,1);
Aeq = [ones(1,12);MM(i, :)];
beq = [1;Mu_v(i)];
LB = zeros(12,1);
UB = ones(12,1);
temp=linsolve(Aeq,beq);
k=1;
while k<13
if temp(k)>1 || temp(k)<0
k=13;

```

```

Mu_v(i)= Mu_v(i)-0.0001;
end
k=k+1;
end
if k<14
[X_3(:,i),FVAL3(i),ExitFlag3]=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq, LB,UB);
if ExitFlag3<=0
disp('Problemas na convergencia')
Mu_v(i)= Mu_v(i)-0.0001;
end
end
end
Risco_3(i)=sqrt(X_3(:,i)'*C(:, :, i)*X_3(:,i));
Retorno_Esperado_3(i)=MM(i,1:12)*X_3(:,i);
Retorno_3(i)=R(88-i,1:12)*X_3(:,i);

end

%MVP alpha=0.5 PERTURBADO

if i<88
alpha=0.05;
ExitFlag4=-0.5;
while ExitFlag4<=0
H=(1-alpha)*2*(1/norm(C(:, :, i), inf))*C(:, :, i);
f=-1*(alpha)*(1/norm(MM(i, :), inf))*MM(i,1:12)';
A = -1*eye(12);
b = zeros(12,1);
Aeq = ones(1,12);
beq = ones(1,1);
LB = zeros(12,1);
UB = ones(12,1);

[X_4(:,i),FVAL4(i),ExitFlag4]=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq, LB,UB);
if ExitFlag4<=0
disp('Problemas na convergencia')
end

```

```

end
Risco_4(i)=sqrt(X_4(:,i)'*C(:, :, i)*X_4(:,i));
Retorno_Esperado_4(i)=MM(i,1:12)*X_4(:,i);
Retorno_4(i)=R(88-i,1:12)*X_4(:,i);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Erros
Erro_1(i)=norm((M(i,1:12)-R(88-i,1:12)))/norm(R(88-i,1:12));
Erro_2(i)=norm((MM(i,:) -R(88-i,1:12)))/norm(R(88-i,1:12));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Demais Estratégias

%Buy and Hold
if i<88
X0=(1/12)*ones(12,1);
if i>1
X_5(:,i)=(X_5(:,i-1).*(1+R(89-i,1:12)))'./(X_5(:,i-1)'*(1+R(89-i,1:12)))
else
X_5(:,i)=(X0'.*(1+R(89-i,1:12)))/(X0'*(1+R(89-i,1:12)))';
end
Retorno_5(i)=R(88-i,1:12)*X_5(:,i);
Risco_5(i)=sqrt(X_5(:,i)'*C(:, :, i)*X_5(:,i));
end

%Equal Weights

if i<88
X_6(:,i)=(1/12)*ones(12,1);
Retorno_6(i)=R(88-i,1:12)*X_6(:,i);
Risco_6(i)=sqrt(X_6(:,i)'*C(:, :, i)*X_6(:,i));
end

%Tradicional

if i<88
X_7(:,i)=(1/12)*ones(12,1)*0.6;
Retorno_7(i)=R(88-i,1:12)*X_7(:,i)+0.4*R(88-i,13);

```

```
Risco_7(i)=sqrt(X_7(:,i)'*C(:, :, i)*X_7(:,i));
end
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Retornos Acumulados
```

```
for i=2:88
```

```
Retorno_Acumulado_1(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_1(i)=(1+Retorno_Acumulado_1(i-1))*
    *(1+Retorno_1(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_2(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_2(i)=(1+Retorno_Acumulado_2(i-1))*
    *(1+Retorno_2(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_3(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_3(i)=(1+Retorno_Acumulado_3(i-1))*
    *(1+Retorno_3(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_4(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_4(i)=(1+Retorno_Acumulado_4(i-1))*
    *(1+Retorno_4(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_5(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_5(i)=(1+Retorno_Acumulado_5(i-1))*
    *(1+Retorno_5(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_6(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_6(i)=(1+Retorno_Acumulado_6(i-1))*
    *(1+Retorno_6(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_7(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_7(i)=(1+Retorno_Acumulado_7(i-1))*
    *(1+Retorno_7(i-1))-1;
```

```
Retorno_Acumulado_8(1)=0;
```

```
Retorno_Acumulado_8(i)=(1+Retorno_Acumulado_8(i-1))*
    *(1+Ibovespa(89-i))-1;
```

```
end
```

Tabela C.1 – Matriz formada pelo comando $\text{RAND}(i, :) = (2 * (1, 12) - 1)$, utilizada para perturbar o retorno

| ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.8027 | 0.9908 | 0.3063 | -0.7831 | -0.9278 | 0.2362 | 0.1343 | 0.9239 | 0.4922 | 0.3250 | 0.0466 | -0.4802 |
| 0.9240 | 0.0804 | -0.9395 | 0.3926 | 0.0394 | -0.8819 | 0.7801 | -0.3396 | -0.5406 | -0.7721 | -0.3782 | -0.5431 |
| 0.3040 | -0.8677 | -0.4491 | -0.4364 | 0.7601 | -0.1113 | 0.5118 | 0.2066 | 0.5665 | -0.7721 | 0.9571 | 0.6972 |
| -0.8987 | -0.0676 | -0.3487 | 0.2604 | -0.5394 | 0.1598 | 0.2063 | 0.1998 | -0.1031 | -0.9292 | 0.0276 | -0.1845 |
| -0.7839 | -0.0802 | -0.0982 | 0.1023 | 0.6108 | 0.4017 | 0.7445 | -0.8956 | -0.5606 | -0.0807 | 0.9171 | 0.5801 |
| -0.0963 | -0.3331 | -0.8818 | 0.4818 | 0.0136 | -0.6001 | -0.1456 | -0.6626 | 0.5034 | -0.2633 | 0.8836 | -0.9657 |
| 0.6581 | 0.2532 | 0.0775 | 0.3010 | 0.4533 | -0.8110 | 0.7551 | -0.9713 | -0.4114 | -0.6402 | 0.8526 | -0.8636 |
| 0.1622 | 0.2743 | 0.3025 | 0.7292 | -0.8881 | 0.6337 | 0.0578 | 0.3887 | -0.5752 | 0.0866 | 0.4050 | 0.9129 |
| -0.1109 | -0.8292 | -0.8853 | 0.2589 | 0.5924 | 0.3824 | -0.3094 | 0.8936 | 0.0404 | 0.9076 | -0.8528 | -0.5859 |
| 0.5501 | 0.8284 | 0.5651 | -0.4089 | -0.6963 | 0.6958 | 0.5697 | -0.4583 | -0.5444 | -0.3580 | 0.6591 | 0.6444 |
| 0.1414 | 0.1437 | -0.4280 | 0.3983 | 0.5925 | -0.1168 | -0.1076 | -0.0687 | -0.4419 | 0.3508 | 0.8073 | 0.8171 |
| 0.4944 | -0.4790 | 0.3793 | -0.7363 | -0.7530 | -0.6182 | -0.7085 | 0.1701 | -0.8533 | 0.6447 | 0.4458 | 0.8517 |
| -0.0147 | 0.3098 | 0.7802 | 0.0771 | -0.4356 | 0.9519 | -0.9271 | -0.3475 | 0.9460 | -0.2699 | -0.3817 | -0.7582 |
| 0.8315 | -0.7290 | -0.3358 | 0.7950 | -0.0007 | 0.2306 | 0.1663 | 0.3965 | -0.9413 | 0.0558 | -0.9359 | 0.6543 |
| -0.3200 | 0.6934 | -0.5079 | 0.1630 | 0.8754 | -0.9044 | -0.8920 | -0.9588 | 0.3630 | 0.1973 | -0.7719 | 0.5925 |
| 0.2357 | -0.8596 | -0.8614 | -0.7280 | 0.5778 | -0.8152 | -0.5243 | -0.5127 | -0.7904 | 0.7167 | 0.3964 | 0.4675 |
| 0.3011 | 0.0325 | -0.3472 | 0.3236 | -0.7649 | -0.7044 | -0.9605 | 0.9286 | 0.9407 | -0.7523 | -0.0652 | 0.3134 |
| -0.4196 | 0.5091 | 0.1162 | -0.1444 | -0.4656 | 0.5075 | 0.7968 | 0.4569 | -0.1863 | 0.8766 | -0.4891 | 0.0663 |
| 0.9095 | -0.4645 | -0.4998 | 0.8553 | -0.8628 | -0.4012 | 0.1832 | -0.5934 | 0.2718 | 0.5967 | 0.0034 | 0.3016 |
| 0.5919 | -0.5333 | 0.2017 | -0.7751 | 0.0315 | 0.6757 | 0.8416 | -0.0035 | -0.4448 | 0.3050 | 0.8346 | 0.0197 |
| 0.9484 | -0.6054 | -0.7776 | -0.4053 | -0.2072 | -0.1585 | -0.3770 | 0.3877 | -0.8163 | -0.1958 | -0.4096 | -0.3870 |
| -0.7889 | 0.1877 | -0.4345 | -0.6896 | -0.9987 | -0.4328 | 0.1016 | 0.7418 | -0.9155 | 0.8094 | -0.7381 | 0.6675 |

| ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.6009 | 0.8358 | -0.7254 | 0.0095 | -0.1901 | -0.6529 | 0.1504 | 0.2124 | -0.5711 | 0.0399 | 0.9784 | -0.0202 |
| 0.3897 | -0.1772 | -0.9304 | -0.4143 | 0.6029 | -0.3070 | -0.8334 | 0.0222 | -0.2663 | 0.4790 | 0.0495 | 0.6090 |
| 0.6338 | -0.6211 | -0.7526 | 0.6420 | 0.2758 | -0.9678 | 0.7919 | 0.0308 | 0.0890 | 0.2129 | 0.5209 | 0.7107 |
| -0.2343 | -0.8307 | 0.4677 | -0.3360 | 0.6795 | -0.2566 | 0.6564 | -0.6470 | -0.7410 | 0.7598 | -0.9118 | 0.3734 |
| 0.4675 | -0.1257 | -0.2403 | 0.9593 | -0.2020 | -0.1196 | -0.6864 | -0.3479 | -0.3719 | 0.7890 | -0.5060 | -0.3786 |
| -0.1823 | 0.4160 | -0.7127 | 0.7426 | -0.8337 | -0.0765 | -0.9392 | 0.5064 | 0.4001 | -0.5710 | 0.3598 | 0.1146 |
| 0.7014 | 0.1171 | 0.8035 | -0.1610 | -0.2837 | -0.0220 | -0.4881 | 0.8583 | -0.0665 | -0.4920 | -0.1376 | 0.4051 |
| -0.1953 | -0.6363 | 0.7125 | 0.1684 | -0.2528 | -0.5566 | -0.5620 | 0.0445 | -0.1332 | 0.4826 | -0.8591 | 0.6947 |
| 0.3598 | -0.7267 | 0.7168 | -0.6003 | 0.2147 | 0.0861 | -0.6754 | -0.9887 | 0.5430 | 0.5296 | -0.1579 | -0.8864 |

APÊNDICE D – RETORNOS SEMANAIS DE CADA ATIVO

Tabela D.1 – Retornos semanais das ações, do TESOIRO SELIC 2021 e do IBOVESPA

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 28/08/2020 | -0.0170 | 0.0273 | -0.0149 | 0.0145 | 0.0828 | -0.0009 | 0.0014 | 0.0210 | -0.0330 | -0.0177 | 0.0049 | -0.0061 | 0.0004 | 0.0061 |
| 21/08/2020 | -0.0219 | -0.0237 | -0.0181 | -0.0263 | 0.0684 | -0.0049 | -0.0485 | -0.0123 | -0.0803 | 0.0139 | -0.0160 | -0.0227 | 0.0004 | 0.0017 |
| 14/08/2020 | -0.0038 | -0.0260 | -0.0301 | -0.0294 | -0.0454 | -0.0053 | -0.0507 | -0.0242 | -0.0516 | 0.0149 | -0.0099 | 0.0105 | 0.0004 | -0.0138 |
| 07/08/2020 | -0.0424 | -0.0345 | 0.0686 | -0.0524 | 0.0612 | 0.0266 | -0.0410 | -0.0022 | -0.0224 | -0.0043 | -0.0387 | 0.0163 | 0.0004 | -0.0013 |
| 31/07/2020 | -0.0690 | 0.0361 | -0.0039 | 0.0159 | 0.0142 | -0.0233 | 0.0872 | 0.1391 | -0.0112 | 0.0360 | 0.0686 | 0.0096 | 0.0004 | 0.0052 |
| 24/07/2020 | 0.0544 | -0.0069 | -0.0547 | -0.0276 | -0.0284 | -0.0004 | 0.0139 | -0.0272 | -0.0366 | -0.0400 | -0.0222 | 0.1484 | 0.0004 | -0.0049 |
| 17/07/2020 | -0.0465 | 0.0151 | -0.0249 | 0.0007 | 0.0227 | 0.0102 | 0.0179 | 0.0554 | 0.0879 | 0.0714 | 0.0315 | 0.0620 | 0.0004 | 0.0286 |
| 10/07/2020 | 0.0502 | 0.0083 | 0.0604 | 0.0264 | 0.1136 | 0.0241 | -0.0351 | 0.0197 | 0.0145 | 0.0309 | 0.0000 | 0.0130 | 0.0004 | 0.0338 |
| 03/07/2020 | 0.0136 | 0.0778 | 0.0414 | 0.0315 | 0.0383 | 0.0547 | 0.0562 | 0.0609 | 0.0281 | -0.0065 | 0.0064 | 0.0800 | 0.0004 | 0.0312 |
| 26/06/2020 | 0.0079 | 0.0153 | -0.0808 | -0.0848 | -0.0287 | -0.0293 | -0.0500 | -0.0394 | -0.0236 | 0.0082 | -0.0369 | 0.0820 | 0.0004 | -0.0283 |
| 19/06/2020 | 0.0199 | 0.0255 | 0.0061 | 0.0780 | 0.1165 | 0.0422 | 0.0548 | 0.0400 | 0.0686 | 0.0331 | 0.0114 | 0.0443 | 0.0005 | 0.0407 |
| 12/06/2020 | -0.0342 | 0.0506 | -0.0431 | -0.0441 | 0.0758 | -0.0679 | -0.0243 | -0.0135 | 0.0183 | -0.0222 | 0.0431 | -0.0018 | 0.0005 | -0.0195 |
| 05/06/2020 | 0.1258 | 0.0254 | 0.1473 | 0.1838 | -0.0762 | 0.0865 | 0.0143 | 0.0613 | -0.0245 | 0.0304 | 0.0134 | 0.0598 | 0.0006 | 0.0828 |
| 29/05/2020 | 0.0630 | 0.1120 | -0.0037 | 0.0035 | 0.1164 | 0.0894 | 0.0368 | 0.0633 | 0.2298 | 0.0543 | 0.0043 | 0.1233 | 0.0006 | 0.0636 |
| 22/05/2020 | 0.0086 | 0.0244 | 0.1497 | 0.0616 | 0.0456 | 0.0886 | 0.0265 | 0.1983 | 0.1685 | 0.0462 | 0.0227 | 0.0228 | 0.0006 | 0.0595 |
| 15/05/2020 | -0.0332 | 0.0000 | -0.0094 | -0.0310 | -0.0074 | -0.0720 | -0.0177 | 0.0185 | -0.0780 | -0.0164 | -0.0475 | -0.0479 | 0.0006 | -0.0337 |
| 08/05/2020 | 0.0617 | -0.0398 | -0.1276 | -0.0194 | 0.1176 | 0.0238 | -0.0010 | -0.1328 | 0.0230 | 0.0889 | 0.0556 | -0.0426 | 0.0007 | -0.0030 |
| 01/05/2020 | 0.0207 | 0.0217 | 0.0179 | 0.0907 | 0.0488 | 0.1317 | 0.0023 | 0.0367 | 0.0612 | 0.0251 | 0.0031 | 0.0318 | 0.0006 | 0.0687 |
| 24/04/2020 | -0.0422 | -0.0558 | 0.0267 | -0.1009 | 0.0626 | -0.0112 | 0.0061 | 0.0297 | -0.1043 | -0.0055 | -0.0493 | 0.0065 | 0.0006 | -0.0463 |
| 17/04/2020 | -0.0413 | 0.0366 | 0.0257 | -0.0119 | 0.0707 | -0.0410 | 0.0191 | 0.0624 | 0.0093 | 0.0166 | -0.0577 | 0.0042 | 0.0007 | 0.0168 |

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 10/04/2020 | 0.0623 | 0.1543 | 0.0656 | 0.1377 | 0.1718 | 0.0965 | 0.0733 | 0.2934 | 0.2224 | 0.0686 | 0.0097 | 0.1645 | 0.0005 | 0.1171 |
| 03/04/2020 | -0.0881 | -0.0405 | -0.1702 | -0.1000 | -0.0888 | 0.1534 | -0.1135 | -0.2557 | -0.1470 | 0.0100 | 0.0373 | -0.0699 | 0.0007 | -0.0530 |
| 27/03/2020 | 0.0365 | -0.0417 | 0.2404 | 0.0418 | 0.2724 | 0.1083 | -0.0463 | 0.1368 | 0.1887 | 0.1395 | -0.0914 | 0.0934 | 0.0007 | 0.0948 |
| 20/03/2020 | -0.0512 | -0.1493 | -0.2443 | -0.1588 | -0.2701 | -0.2208 | 0.0702 | -0.2328 | -0.3301 | -0.1797 | 0.0039 | -0.0626 | 0.0008 | -0.1888 |
| 13/03/2020 | -0.1710 | -0.1847 | -0.2270 | -0.1225 | -0.0735 | -0.3254 | -0.1475 | -0.2009 | -0.1229 | -0.0383 | -0.0563 | -0.2156 | 0.0008 | -0.1563 |
| 06/03/2020 | 0.0536 | 0.0097 | -0.0381 | -0.0661 | -0.1027 | -0.0991 | 0.0271 | -0.0907 | -0.0235 | 0.0068 | 0.0574 | 0.0202 | 0.0008 | -0.0593 |
| 28/02/2020 | -0.1052 | -0.0641 | -0.1060 | -0.0209 | -0.1052 | -0.1304 | -0.0226 | -0.0894 | -0.1054 | -0.1161 | -0.0610 | -0.1307 | 0.0005 | -0.0837 |
| 21/02/2020 | -0.0098 | 0.0154 | 0.0190 | -0.0040 | 0.0021 | -0.0095 | 0.0040 | -0.0108 | 0.0191 | -0.0171 | -0.0269 | 0.0930 | 0.0008 | -0.0061 |
| 14/02/2020 | -0.0301 | 0.0310 | 0.0211 | 0.0031 | 0.0388 | 0.0169 | 0.0139 | 0.0390 | 0.0169 | -0.0211 | -0.0230 | 0.1087 | 0.0008 | 0.0054 |
| 07/02/2020 | -0.0521 | 0.0558 | 0.0089 | 0.0274 | -0.0282 | 0.0169 | -0.0299 | -0.0131 | 0.0389 | 0.0364 | 0.0067 | 0.0428 | 0.0008 | 0.0001 |
| 31/01/2020 | -0.0600 | -0.0242 | -0.0291 | -0.0414 | -0.0062 | -0.0290 | 0.0018 | 0.0433 | -0.0235 | -0.0656 | -0.0092 | -0.0487 | 0.0009 | -0.0390 |
| 24/01/2020 | 0.0155 | -0.0033 | -0.0146 | -0.0201 | 0.0332 | -0.0184 | 0.0719 | 0.0387 | 0.0386 | -0.0561 | 0.0054 | 0.1258 | 0.0009 | -0.0009 |
| 17/01/2020 | -0.0101 | 0.0255 | 0.0139 | 0.0099 | 0.0493 | -0.0139 | 0.0536 | 0.0344 | 0.0477 | 0.0682 | 0.0404 | 0.0824 | 0.0007 | 0.0258 |
| 10/01/2020 | -0.0021 | 0.0271 | 0.0029 | -0.0805 | 0.0596 | -0.0059 | -0.0220 | -0.0215 | -0.0353 | -0.0106 | -0.0071 | -0.0228 | 0.0009 | -0.0187 |
| 03/01/2020 | -0.0120 | 0.0238 | 0.0248 | 0.0092 | 0.0039 | -0.0023 | 0.0214 | 0.0196 | -0.0375 | 0.0062 | 0.0012 | -0.0156 | 0.0007 | 0.0101 |
| 27/12/2019 | 0.0132 | 0.0184 | 0.0322 | 0.0221 | 0.0029 | 0.0224 | 0.0247 | 0.0530 | 0.0360 | 0.0041 | 0.0107 | 0.0439 | 0.0007 | 0.0123 |
| 20/12/2019 | 0.0211 | -0.0154 | 0.0316 | 0.0051 | -0.0098 | 0.0095 | 0.0024 | 0.0232 | 0.0219 | 0.0193 | 0.0271 | -0.0047 | 0.0009 | 0.0227 |
| 13/12/2019 | 0.0300 | 0.0409 | 0.0107 | 0.0139 | 0.0810 | -0.0124 | 0.0214 | 0.0247 | -0.0009 | 0.0470 | -0.0093 | 0.0402 | 0.0009 | 0.0130 |
| 06/12/2019 | 0.0222 | 0.0552 | 0.0428 | 0.0304 | 0.0080 | 0.0414 | -0.0714 | 0.0148 | 0.0183 | 0.0273 | 0.0108 | 0.0760 | 0.0010 | 0.0267 |
| 29/11/2019 | -0.0073 | 0.0005 | 0.0030 | -0.0261 | -0.0099 | -0.0277 | -0.0067 | 0.0174 | 0.0421 | -0.0010 | 0.0154 | 0.0471 | 0.0010 | -0.0042 |
| 22/11/2019 | 0.0424 | -0.0120 | 0.0179 | 0.0015 | 0.0278 | 0.0092 | 0.0137 | 0.0604 | 0.0617 | 0.0370 | 0.0093 | -0.0069 | 0.0010 | 0.0200 |
| 15/11/2019 | 0.0083 | 0.0414 | -0.0130 | -0.0163 | 0.0101 | -0.0174 | 0.0063 | 0.0048 | -0.0375 | -0.0443 | 0.0166 | 0.0360 | 0.0008 | -0.0100 |
| 08/11/2019 | -0.0018 | -0.0104 | -0.0388 | -0.0023 | -0.0715 | -0.0136 | -0.0144 | -0.0404 | -0.0236 | 0.0153 | 0.0120 | 0.0913 | 0.0010 | -0.0052 |
| 01/11/2019 | -0.0152 | 0.0379 | 0.0408 | -0.0118 | 0.1236 | 0.0403 | 0.0553 | 0.0366 | 0.0494 | -0.0025 | -0.0046 | 0.0186 | 0.0010 | 0.0077 |
| 25/10/2019 | -0.0572 | -0.0279 | -0.0004 | 0.0747 | -0.0233 | 0.0598 | 0.0330 | -0.0704 | 0.0267 | 0.0550 | -0.0230 | 0.0429 | 0.0010 | 0.0252 |
| 18/10/2019 | 0.0050 | -0.0079 | 0.0255 | 0.0107 | 0.0619 | 0.0126 | 0.0262 | 0.0378 | 0.0159 | -0.0537 | 0.0260 | 0.0293 | 0.0010 | 0.0086 |

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 11/10/2019 | -0.0331 | 0.0085 | -0.0273 | 0.0127 | 0.0463 | 0.0215 | -0.0051 | -0.0125 | -0.0022 | 0.0440 | -0.0006 | 0.0026 | 0.0010 | 0.0125 |
| 04/10/2019 | -0.0121 | 0.0065 | 0.0062 | -0.0581 | 0.0537 | -0.0416 | 0.0556 | -0.0072 | 0.0431 | -0.0225 | -0.0266 | -0.0217 | 0.0010 | -0.0240 |
| 27/09/2019 | 0.0032 | -0.0240 | -0.0304 | 0.0224 | 0.0066 | 0.0244 | 0.0288 | -0.0392 | -0.0114 | -0.0157 | 0.0082 | -0.0095 | 0.0010 | 0.0025 |
| 20/09/2019 | 0.0150 | 0.0200 | 0.0828 | -0.0312 | 0.0721 | 0.0045 | 0.0109 | 0.0486 | -0.0422 | -0.0275 | 0.0522 | 0.0289 | 0.0011 | 0.0127 |
| 13/09/2019 | 0.0203 | 0.0272 | -0.0268 | 0.0200 | -0.0527 | 0.0136 | 0.0197 | -0.0619 | -0.0083 | 0.0719 | -0.0519 | 0.0384 | 0.0011 | 0.0055 |
| 06/09/2019 | 0.0000 | 0.0183 | -0.0015 | 0.0367 | -0.0080 | 0.0400 | -0.0134 | -0.0043 | -0.0019 | 0.0193 | 0.0182 | 0.0152 | 0.0011 | 0.0178 |
| 30/08/2019 | 0.0213 | 0.0100 | 0.0146 | 0.0238 | 0.0743 | 0.0502 | 0.0342 | 0.0749 | -0.0139 | 0.0529 | 0.0282 | 0.0127 | 0.0011 | 0.0355 |
| 23/08/2019 | -0.0304 | -0.0227 | -0.0131 | -0.0350 | -0.1007 | 0.0155 | 0.0034 | -0.0273 | -0.0013 | -0.0094 | -0.0134 | -0.0256 | 0.0011 | -0.0214 |
| 16/08/2019 | -0.0583 | -0.0051 | -0.0516 | -0.0430 | -0.0058 | -0.0832 | -0.0375 | 0.0085 | -0.0884 | -0.0396 | 0.0097 | -0.0571 | 0.0011 | -0.0403 |
| 09/08/2019 | -0.0205 | 0.0285 | 0.0021 | 0.0513 | 0.0660 | -0.0087 | 0.0455 | -0.0243 | 0.0297 | -0.0491 | -0.0075 | 0.0187 | 0.0011 | 0.0129 |
| 02/08/2019 | 0.0353 | 0.0332 | 0.0329 | -0.0516 | 0.1252 | 0.0143 | 0.0667 | 0.0575 | 0.0633 | -0.0476 | 0.0111 | 0.0199 | 0.0012 | -0.0014 |
| 26/07/2019 | 0.0942 | -0.0265 | -0.0252 | 0.0122 | 0.0587 | -0.0474 | 0.0645 | 0.0086 | -0.0075 | -0.0472 | -0.0285 | 0.0253 | 0.0012 | -0.0061 |
| 19/07/2019 | -0.0056 | -0.0218 | -0.0178 | -0.0017 | 0.0256 | -0.0381 | -0.0328 | 0.0145 | 0.0220 | 0.0176 | 0.0320 | -0.0131 | 0.0012 | -0.0044 |
| 12/07/2019 | -0.0421 | 0.0217 | 0.0286 | -0.0250 | 0.0266 | 0.0332 | -0.0146 | -0.0148 | 0.0590 | 0.0288 | 0.0273 | 0.0307 | 0.0012 | -0.0018 |
| 05/07/2019 | 0.0620 | 0.0272 | 0.0342 | 0.0319 | 0.0707 | -0.0004 | 0.0686 | 0.0464 | 0.0360 | -0.0282 | 0.0280 | 0.0507 | 0.0012 | 0.0309 |
| 28/06/2019 | -0.0306 | 0.0066 | 0.0209 | 0.0021 | -0.0072 | -0.0308 | 0.0244 | 0.0044 | 0.0111 | -0.0118 | 0.0006 | -0.0028 | 0.0012 | -0.0102 |
| 21/06/2019 | 0.0460 | 0.0201 | 0.0300 | 0.0643 | 0.0049 | 0.0451 | 0.0020 | 0.0388 | 0.0024 | 0.0202 | -0.0076 | 0.0752 | 0.0010 | 0.0405 |
| 14/06/2019 | 0.0017 | 0.0148 | 0.0492 | -0.0306 | 0.0664 | 0.0112 | 0.0385 | 0.0148 | -0.0212 | 0.0563 | 0.0160 | 0.0380 | 0.0012 | 0.0022 |
| 07/06/2019 | 0.0035 | 0.0226 | 0.0413 | 0.0024 | 0.0123 | 0.0474 | 0.0306 | 0.0201 | 0.0778 | -0.0069 | 0.0295 | 0.0080 | 0.0012 | 0.0082 |
| 31/05/2019 | 0.0289 | 0.0603 | 0.0630 | 0.0595 | 0.1085 | -0.0207 | 0.0584 | 0.0464 | 0.0951 | 0.0143 | 0.0368 | 0.0468 | 0.0012 | 0.0363 |
| 24/05/2019 | 0.0342 | 0.0207 | 0.0570 | 0.0486 | 0.0476 | 0.0610 | 0.0263 | 0.0429 | 0.0057 | 0.0124 | 0.0304 | 0.0034 | 0.0012 | 0.0404 |
| 17/05/2019 | -0.0469 | -0.0179 | -0.0710 | -0.0279 | -0.0947 | -0.0749 | -0.0632 | -0.0511 | -0.1236 | -0.0352 | -0.0077 | -0.0159 | 0.0012 | -0.0452 |
| 10/05/2019 | -0.0344 | 0.0112 | 0.0013 | -0.0388 | -0.0499 | -0.0064 | -0.0172 | 0.0251 | -0.0193 | -0.0187 | -0.0130 | -0.0120 | 0.0012 | -0.0182 |
| 03/05/2019 | -0.0202 | 0.0031 | 0.0143 | -0.0022 | 0.0969 | -0.0147 | 0.0223 | -0.0006 | 0.0318 | -0.0004 | -0.0082 | -0.0223 | 0.0010 | -0.0024 |
| 26/04/2019 | 0.0709 | 0.0114 | 0.0264 | 0.0294 | 0.0475 | -0.0120 | 0.0410 | 0.0948 | 0.1222 | -0.0411 | -0.0116 | 0.0239 | 0.0012 | 0.0175 |
| 19/04/2019 | 0.0012 | 0.0154 | 0.0329 | -0.0035 | 0.0386 | 0.0647 | -0.0139 | 0.0317 | 0.0641 | 0.0214 | 0.0145 | 0.0211 | 0.0010 | 0.0183 |

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 12/04/2019 | -0.0218 | -0.0495 | -0.0715 | -0.0461 | -0.0303 | -0.1026 | -0.0414 | -0.0040 | -0.0390 | -0.0096 | -0.0325 | -0.0430 | 0.0012 | -0.0436 |
| 05/04/2019 | 0.0360 | 0.0354 | 0.0018 | 0.0037 | -0.0168 | 0.0257 | 0.0544 | -0.0356 | -0.0376 | 0.0206 | 0.0450 | 0.0591 | 0.0014 | 0.0178 |
| 29/03/2019 | 0.0068 | 0.0025 | -0.0121 | 0.0263 | -0.0023 | 0.0393 | -0.0142 | 0.0287 | 0.0214 | 0.0176 | -0.0036 | -0.0095 | 0.0012 | 0.0179 |
| 22/03/2019 | -0.0024 | -0.0313 | -0.0732 | -0.0884 | -0.0218 | -0.0450 | -0.0327 | -0.0631 | -0.0830 | -0.0099 | -0.0124 | -0.0538 | 0.0012 | -0.0545 |
| 15/03/2019 | 0.0099 | -0.0018 | 0.0046 | 0.0294 | -0.0205 | 0.0592 | 0.0278 | 0.0163 | 0.1158 | 0.0348 | 0.0379 | 0.0243 | 0.0014 | 0.0396 |
| 08/03/2019 | -0.0140 | 0.0006 | 0.0092 | 0.0262 | 0.0322 | -0.0011 | 0.0463 | 0.0073 | -0.0048 | 0.0451 | 0.0091 | 0.0249 | 0.0007 | 0.0080 |
| 01/03/2019 | -0.0812 | -0.0222 | -0.0436 | -0.0493 | -0.0149 | -0.0158 | 0.0764 | -0.0307 | -0.0298 | -0.0053 | -0.0380 | -0.0332 | 0.0012 | -0.0335 |
| 22/02/2019 | -0.0094 | 0.0036 | -0.0042 | 0.0262 | 0.0849 | 0.0108 | 0.0137 | 0.0143 | 0.0245 | 0.0242 | 0.0040 | 0.0081 | 0.0012 | 0.0037 |
| 15/02/2019 | 0.0152 | -0.0101 | -0.0146 | 0.0051 | -0.0355 | 0.0680 | -0.0285 | 0.0268 | -0.0604 | 0.0630 | 0.0075 | -0.0054 | 0.0012 | 0.0229 |
| 08/02/2019 | 0.0057 | -0.0378 | -0.0099 | -0.0386 | -0.0491 | -0.0260 | -0.0356 | 0.0146 | -0.0461 | -0.0668 | -0.0285 | -0.0317 | 0.0012 | -0.0257 |
| 01/02/2019 | 0.0556 | 0.0506 | 0.0663 | 0.0354 | 0.0673 | 0.0102 | 0.0026 | 0.0182 | 0.0243 | -0.1763 | 0.0298 | 0.0428 | 0.0012 | 0.0019 |
| 25/01/2019 | -0.0468 | 0.0141 | 0.0169 | -0.0044 | -0.0384 | 0.0055 | -0.0169 | 0.0334 | 0.0617 | 0.0254 | 0.0144 | 0.0065 | 0.0012 | 0.0164 |
| 18/01/2019 | 0.0409 | 0.0180 | 0.0261 | 0.0018 | -0.0195 | 0.0164 | -0.0099 | 0.0577 | 0.0299 | 0.0454 | -0.0149 | 0.0005 | 0.0012 | 0.0260 |
| 11/01/2019 | 0.0446 | 0.0428 | -0.0402 | 0.0166 | -0.0045 | 0.0109 | 0.1153 | -0.0191 | 0.0431 | 0.0036 | 0.0064 | 0.0049 | 0.0012 | 0.0198 |
| 04/01/2019 | 0.0761 | 0.0461 | 0.0036 | 0.0422 | -0.0112 | 0.0899 | 0.0040 | 0.0100 | 0.2019 | 0.0233 | 0.0276 | 0.0599 | 0.0007 | 0.0450 |
| 28/12/2018 | 0.0142 | 0.0574 | 0.0673 | 0.0295 | -0.0093 | 0.0878 | -0.0331 | 0.0275 | 0.0321 | 0.0028 | -0.0165 | 0.0147 | 0.0010 | 0.0256 |
| 21/12/2018 | -0.0359 | -0.0197 | -0.0102 | -0.0289 | 0.0710 | -0.0650 | -0.0536 | 0.0260 | -0.0039 | -0.0004 | -0.0136 | -0.0006 | 0.0015 | -0.0200 |
| 14/12/2018 | -0.0033 | 0.0223 | 0.0179 | -0.0009 | 0.0383 | -0.0697 | 0.0195 | 0.0453 | 0.0628 | -0.0080 | 0.0371 | -0.0191 | 0.0012 | -0.0076 |
| 07/12/2018 | -0.0477 | -0.0313 | -0.0113 | -0.0124 | -0.0020 | -0.0268 | -0.0113 | 0.0059 | 0.0213 | -0.0286 | 0.0162 | -0.0075 | 0.0012 | -0.0155 |
| 30/11/2018 | 0.0440 | 0.0021 | -0.0018 | 0.0417 | 0.0144 | 0.0445 | -0.0093 | -0.0355 | 0.0202 | 0.0487 | 0.0070 | 0.0081 | 0.0012 | 0.0380 |
| 23/11/2018 | -0.0178 | 0.0134 | -0.0056 | -0.0169 | 0.0372 | -0.0515 | -0.0534 | 0.0058 | -0.0104 | -0.1033 | -0.0045 | -0.0469 | 0.0012 | -0.0258 |
| 16/11/2018 | 0.0261 | 0.0329 | 0.0710 | 0.0390 | 0.0689 | 0.0130 | 0.0038 | 0.0289 | 0.0333 | 0.0274 | 0.0553 | -0.0028 | 0.0010 | 0.0336 |
| 09/11/2018 | -0.0179 | 0.0081 | -0.0518 | 0.0168 | -0.1383 | -0.0680 | 0.0452 | -0.0661 | -0.0343 | -0.0496 | -0.0296 | 0.0219 | 0.0012 | -0.0314 |
| 02/11/2018 | 0.0779 | 0.0519 | 0.0351 | 0.0199 | 0.0184 | -0.0102 | -0.0427 | 0.0845 | 0.0079 | 0.0342 | 0.1805 | 0.0068 | 0.0010 | 0.0315 |
| 26/10/2018 | -0.0994 | 0.0403 | 0.0239 | 0.0217 | -0.0129 | 0.0649 | -0.0052 | 0.0430 | -0.0039 | -0.0165 | 0.0038 | -0.0281 | 0.0015 | 0.0178 |
| 19/10/2018 | -0.0074 | 0.0671 | 0.0504 | 0.0092 | 0.1217 | 0.0250 | -0.0174 | 0.0593 | 0.0269 | 0.0009 | -0.0123 | 0.0094 | 0.0012 | 0.0157 |

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 12/10/2018 | -0.0374 | 0.0000 | 0.0763 | 0.0053 | 0.0614 | 0.0554 | -0.0724 | -0.0022 | 0.0319 | -0.0176 | -0.0216 | -0.0354 | 0.0010 | 0.0073 |
| 05/10/2018 | -0.0377 | 0.0238 | 0.0434 | 0.0711 | 0.1589 | 0.1363 | 0.0044 | 0.0614 | 0.1166 | -0.0390 | -0.0014 | -0.0326 | 0.0012 | 0.0375 |
| 28/09/2018 | -0.0272 | -0.0454 | 0.0436 | 0.0065 | -0.0124 | 0.0469 | -0.0659 | -0.0322 | -0.0407 | -0.0195 | 0.0076 | 0.0174 | 0.0012 | -0.0013 |
| 21/09/2018 | 0.0339 | 0.0654 | 0.0228 | 0.0406 | 0.0689 | 0.0718 | 0.0097 | 0.1148 | 0.0419 | 0.1053 | 0.0164 | 0.0128 | 0.0012 | 0.0532 |
| 14/09/2018 | -0.0046 | -0.0428 | -0.0318 | -0.0110 | -0.0729 | -0.0104 | 0.0365 | -0.0332 | -0.0367 | 0.0322 | -0.0244 | -0.0147 | 0.0012 | -0.0129 |
| 07/09/2018 | -0.0283 | 0.0355 | -0.0194 | 0.0079 | -0.0391 | -0.0140 | -0.0357 | 0.0164 | 0.0041 | -0.0026 | 0.0238 | 0.0182 | 0.0010 | -0.0034 |
| 31/08/2018 | -0.0115 | -0.0044 | 0.0026 | 0.0157 | -0.0135 | 0.0522 | -0.0517 | -0.0176 | -0.0157 | -0.0098 | -0.0136 | 0.0823 | 0.0012 | 0.0054 |
| 24/08/2018 | -0.0055 | -0.0241 | -0.0007 | -0.0143 | -0.0121 | -0.0084 | 0.0722 | -0.0191 | -0.0139 | 0.0659 | 0.0114 | 0.0105 | 0.0012 | 0.0031 |
| 17/08/2018 | 0.0144 | 0.0167 | -0.0139 | -0.0059 | -0.0389 | -0.0552 | -0.0101 | -0.0378 | 0.0056 | -0.0176 | -0.0088 | 0.0101 | 0.0012 | -0.0063 |
| 10/08/2018 | -0.0206 | -0.0609 | -0.1014 | -0.0763 | 0.0153 | -0.0720 | -0.0094 | -0.0654 | -0.0469 | -0.0160 | -0.0260 | -0.0447 | 0.0012 | -0.0604 |
| 03/08/2018 | -0.0254 | -0.0008 | 0.0325 | 0.0111 | 0.0554 | 0.0679 | 0.0297 | 0.0009 | 0.0278 | 0.0115 | -0.0171 | -0.0172 | 0.0012 | 0.0196 |
| 27/07/2018 | 0.0541 | 0.0501 | -0.0089 | 0.0007 | -0.0092 | 0.0248 | -0.0391 | -0.0190 | 0.0249 | 0.0969 | -0.0458 | -0.0061 | 0.0012 | 0.0165 |
| 20/07/2018 | 0.0187 | 0.0275 | 0.0060 | 0.0456 | 0.0424 | 0.0649 | 0.0442 | 0.0662 | 0.0405 | -0.0315 | -0.0003 | 0.0870 | 0.0012 | 0.0258 |
| 13/07/2018 | 0.0197 | -0.0376 | 0.0458 | 0.0516 | 0.0325 | 0.0093 | 0.1095 | 0.0398 | -0.0152 | -0.0006 | -0.0092 | 0.0498 | 0.0010 | 0.0211 |
| 06/07/2018 | 0.0058 | 0.0437 | 0.0394 | 0.0437 | -0.0492 | 0.0442 | 0.0147 | -0.0383 | 0.0434 | 0.0151 | -0.0169 | 0.0083 | 0.0015 | 0.0309 |
| 29/06/2018 | -0.0098 | -0.0036 | 0.0354 | 0.0252 | 0.0421 | 0.1377 | -0.0195 | 0.0428 | 0.0215 | 0.0330 | 0.0053 | 0.0521 | 0.0010 | 0.0300 |
| 22/06/2018 | -0.0214 | -0.0376 | 0.0065 | 0.0231 | 0.0249 | 0.0090 | -0.0188 | 0.0081 | -0.0096 | -0.0228 | -0.0162 | -0.0216 | 0.0015 | -0.0017 |
| 15/06/2018 | -0.0128 | 0.0130 | -0.0531 | -0.0653 | 0.1363 | -0.0184 | 0.0592 | -0.0567 | -0.0448 | -0.0346 | 0.0217 | -0.0438 | 0.0012 | -0.0299 |
| 08/06/2018 | -0.0493 | -0.0579 | -0.0443 | -0.0613 | -0.0867 | -0.0560 | 0.0073 | -0.0767 | -0.0549 | -0.0355 | -0.0046 | -0.0321 | 0.0012 | -0.0556 |
| 01/06/2018 | -0.0105 | 0.0217 | 0.0093 | -0.0247 | 0.0310 | -0.1839 | 0.0470 | 0.0489 | -0.0267 | 0.0248 | -0.0060 | -0.0883 | 0.0010 | -0.0210 |
| 25/05/2018 | -0.0230 | -0.0172 | 0.0154 | -0.0045 | 0.0661 | -0.2267 | -0.0655 | -0.0145 | -0.0064 | -0.0601 | 0.0033 | 0.0220 | 0.0012 | -0.0504 |
| 18/05/2018 | -0.0556 | -0.0513 | -0.0511 | -0.0605 | -0.0327 | 0.0082 | -0.0479 | -0.0326 | -0.0869 | 0.0407 | -0.0299 | 0.0284 | 0.0012 | -0.0251 |
| 11/05/2018 | -0.0291 | -0.0523 | -0.0054 | 0.0189 | 0.1116 | 0.1428 | 0.1047 | -0.0202 | -0.1468 | 0.0590 | -0.0126 | 0.0348 | 0.0012 | 0.0253 |
| 04/05/2018 | -0.0292 | -0.0188 | -0.0596 | -0.0837 | -0.0721 | -0.0197 | -0.0934 | -0.0561 | -0.0237 | 0.0279 | -0.0422 | -0.0409 | 0.0007 | -0.0385 |
| 27/04/2018 | -0.0108 | 0.0305 | 0.0053 | 0.0121 | 0.0867 | 0.0159 | 0.0187 | -0.0403 | 0.0411 | 0.0151 | 0.0165 | 0.0176 | 0.0012 | 0.0105 |
| 20/04/2018 | 0.0073 | -0.0296 | -0.0111 | 0.0088 | -0.0107 | 0.0546 | -0.0219 | -0.0069 | 0.0042 | 0.0590 | 0.0165 | 0.0390 | 0.0012 | 0.0144 |

| Data | ABEV | EQTL | IGTA | ITUB | MGLU | PETR | RADL | RENT | SBSP | VALE | VIVT | WEGE | SELIC | IBOV |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 13/04/2018 | 0.0005 | -0.0043 | -0.0039 | -0.0157 | 0.0008 | -0.0034 | 0.0272 | 0.0166 | 0.0009 | 0.0525 | -0.0227 | 0.0129 | 0.0012 | -0.0057 |
| 06/04/2018 | -0.0338 | -0.0014 | -0.0582 | -0.0010 | 0.0025 | -0.0063 | -0.0922 | 0.0101 | -0.0253 | 0.0124 | 0.0038 | -0.0374 | 0.0012 | -0.0064 |
| 30/03/2018 | 0.0062 | 0.0029 | -0.0085 | 0.0229 | 0.0325 | -0.0158 | -0.0047 | 0.0352 | -0.0791 | 0.0148 | 0.0356 | -0.0152 | 0.0010 | 0.0117 |
| 23/03/2018 | 0.0130 | 0.0350 | 0.0102 | -0.0207 | 0.0227 | 0.0151 | -0.0153 | 0.0039 | -0.0094 | -0.0168 | -0.0144 | -0.0081 | 0.0013 | -0.0060 |
| 16/03/2018 | 0.0072 | -0.0387 | -0.0162 | -0.0187 | 0.0223 | -0.0428 | -0.0416 | -0.0581 | 0.0070 | 0.0049 | -0.0504 | 0.0088 | 0.0013 | -0.0172 |
| 09/03/2018 | 0.0384 | -0.0071 | -0.0038 | 0.0160 | -0.0235 | 0.0407 | 0.0088 | 0.1367 | 0.0104 | -0.0269 | 0.0073 | -0.0029 | 0.0013 | 0.0071 |
| 02/03/2018 | 0.0274 | 0.0211 | -0.0134 | -0.0304 | 0.0680 | 0.0188 | -0.0215 | -0.0123 | 0.0036 | -0.0506 | -0.0129 | -0.0294 | 0.0013 | -0.0175 |
| 23/02/2018 | -0.0203 | 0.0081 | 0.0099 | 0.0428 | 0.1061 | 0.0875 | -0.0136 | 0.0582 | 0.0525 | 0.0011 | -0.0136 | 0.0431 | 0.0013 | 0.0328 |
| 16/02/2018 | 0.0438 | 0.0202 | 0.0291 | 0.0517 | 0.0635 | 0.0344 | 0.0264 | 0.0360 | 0.0707 | 0.0961 | 0.0287 | 0.0431 | 0.0011 | 0.0448 |
| 09/02/2018 | -0.0235 | -0.0082 | -0.0835 | -0.0266 | -0.1187 | -0.0600 | -0.0207 | -0.0592 | -0.0587 | 0.0293 | -0.0357 | -0.0368 | 0.0013 | -0.0374 |
| 02/02/2018 | 0.0087 | 0.0166 | -0.0217 | -0.0236 | 0.0127 | 0.0021 | -0.0486 | 0.0137 | -0.0216 | -0.0153 | 0.0096 | -0.0901 | 0.0013 | -0.0174 |
| 26/01/2018 | -0.0053 | 0.0208 | 0.0660 | 0.1288 | 0.0791 | 0.0913 | 0.0047 | 0.0444 | 0.0224 | -0.0337 | 0.0728 | -0.0339 | 0.0013 | 0.0531 |
| 19/01/2018 | 0.0186 | -0.0015 | 0.0184 | 0.0383 | -0.0104 | 0.0554 | -0.0139 | 0.0528 | 0.0453 | -0.0153 | -0.0200 | 0.0127 | 0.0013 | 0.0236 |
| 12/01/2018 | -0.0049 | 0.0188 | -0.0136 | 0.0020 | -0.0134 | 0.0279 | -0.0436 | -0.0121 | 0.0052 | 0.0298 | 0.0146 | 0.0435 | 0.0013 | 0.0035 |
| 05/01/2018 | -0.0063 | 0.0016 | 0.0315 | 0.0626 | -0.0202 | 0.0453 | -0.0147 | -0.0088 | -0.0183 | 0.0504 | -0.0148 | -0.0038 | 0.0011 | 0.0349 |