

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT**

**MARIA LÚCIA ABBOTT JACOB**

**ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE RISCO DE INVESTIMENTOS NO BRASIL  
DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19**

**CURITIBA**

**2021**

**MARIA LÚCIA ABBOTT JACOB**

**ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE RISCO DE INVESTIMENTOS NO BRASIL  
DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19**

**Investment Risk Management Strategies in Brazil during the COVID-19 Pandemic**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Ronie Peterson Dario

Coorientador: Prof. Dr. João Luis Gonçalves

**CURITIBA**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



**Ministério da Educação**  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Câmpus Curitiba**



MARIA LUCIA ABBOTT JACOB

**ESTRATÉGIAS DE GESTÃO DE RISCO DE INVESTIMENTOS NO BRASIL DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 19 de Fevereiro de 2021

Prof Ronie Peterson Dario, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Marcio Rostirolla Adames, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Moiseis Dos Santos Ceconello, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso (Ufmg)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/02/2021.

*Dedico este trabalho à minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus que me guiou e fortaleceu ao longo dessa jornada de estudo.

À minha família pelo apoio que sempre me deram durante toda a minha vida, especialmente meu marido pela paciência e compreensão demonstradas durante este projeto.

Aos professores do PROFMAT, que contribuíram com minha formação acadêmica sempre com muita dedicação e qualidade. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Ronie Peterson Dario e meu coorientador Prof. Dr. João Luis Gonçalves pelas contribuições e ajudas constantes durante todo o período de produção desse trabalho.

Aos meus colegas do PROFMAT 2018, pelos momentos de descontração e incentivo mútuo durante nosso curso, em especial ao meu colega Patrik Borges de Miranda que estudou e trabalhou comigo no decorrer do último ano.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

*"Que todos os nossos esforços estejam sempre focados no desafio à impossibilidade. Todas as grandes conquistas humanas vieram daquilo que parecia impossível."  
(Charles Chaplin).*

## RESUMO

JACOB, Maria Lúcia Abbott. **Estratégias de Gestão de Risco de Investimentos no Brasil durante a Pandemia de COVID-19.** (48 pg) Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

Analizamos o desempenho dos métodos de Mínima Variância de Markowitz e da Paridade de Risco em estratégias de gestão de risco de uma carteira de investimentos em ações de empresas brasileiras listadas na Bolsa de Valores de São Paulo. O período de análise compreende os meses da crise econômica causada pela pandemia de COVID-19. Os resultados indicam melhor desempenho destas estratégias em comparação com a alocação uniforme do capital entre os ativos da carteira. Em especial, a Mínima Variância mostrou resultados significativos na redução do risco da carteira durante o mês mais afetado pela crise, março de 2020. Desenvolvemos a estrutura matemática dos métodos e propomos simplificações práticas visando sua aplicabilidade. A aplicação de gestão de carteiras na educação financeira, a nível de ensino médio, foi ilustrada por meio de exemplos de carteiras contendo dois ativos e utilizando funções quadráticas, matrizes e noções básicas de estatística.

**Palavras-chave:** Gestão de Carteiras; Mínima Variância; Paridade de Risco; COVID-19.

## ABSTRACT

JACOB, Maria Lúcia Abbott. **Investment Risk Management Strategies in Brazil during the COVID-19 Pandemic**. (48 pg) Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

We analyzed the performance of the Markowitz Minimum Variance and Risk Parity methods in risk management strategies for a portfolio of investments in Brazilian companies shares listed on the São Paulo Stock Exchange. The analysis period comprises the months of the economic crisis caused by the COVID-19 pandemic. The results indicate a better performance of these strategies compared to the uniform allocation of capital among the portfolio's assets. In particular, the Minimum Variance showed significant results in reducing the portfolio's risk during the most affected month by the crisis, March 2020. We developed the mathematical structure of the methods and proposed practical simplifications aiming at its applicability. The application of portfolio management in financial education, at the high school level, was illustrated through examples of portfolios containing two assets and using quadratic functions, matrices and basic statistics.

**Keywords:** Portfolio Management; Minimum Variance; Risk Parity; COVID-19.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Rentabilidade NCH × ALASKA no primeiro semestre de 2020. . . . .	11
Figura 1.2 – Rentabilidade NCH × ALASKA em 3 anos. . . . .	12
Figura 3.1 – Fronteira Eficiente e carteira de mínima variância. . . . .	28
Figura 5.1 – Percentual dos retornos acumulados das estratégias, IBOVESPA e Tesouro SELIC. . . . .	36
Figura 5.2 – Percentual dos riscos das estratégias. . . . .	37
Figura 5.3 – Percentual dos retornos obtidos pelas estratégias, IBOVESPA e Tesouro SELIC durante as semanas de crise. . . . .	38

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Retornos mensais de duas ações. . . . .	27
Tabela 3.2 – Carteiras obtidas com os métodos $1/n$ , MV e PR e seus respectivos retornos e riscos. . . . .	31
Tabela 4.1 – Ações que fazem parte da carteira. . . . .	33
Tabela 5.1 – Retornos e riscos obtidos pelas três estratégias . . . . .	35
Tabela 5.2 – Carteiras obtidas com as estratégias MV e PR nas principais semanas da crise. . . . .	37
Tabela A.1 – Retornos semanais das ações e do Ibovespa . . . . .	43
Tabela B.1 – Percentual semanal dos retornos das três estratégias. . . . .	46

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA MODERNA DAS CARTEIRAS</b>	<b>15</b>
2.1	Fundamentos de Estatística . . . . .	15
2.2	Retorno e Risco de Ativos . . . . .	18
2.3	Retorno e Risco de Carteiras de Investimentos . . . . .	20
<b>3</b>	<b>MÉTODOS DE GESTÃO DE RISCO DE INVESTIMENTOS</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1	Mínima Variância de Markowitz (MV) . . . . .	25
3.2	Paridade de Risco (PR) . . . . .	29
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1	Montagem da Carteira . . . . .	32
4.2	Dados e Periodicidade . . . . .	33
4.3	Matriz de Covariância . . . . .	33
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>40</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>42</b>
	<b>APÊNDICE A – RETORNOS SEMANAIS</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>APÊNDICE B – RETORNOS DAS CARTEIRAS × IBOVESPA</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>APÊNDICE C – PROGRAMAÇÃO NO MATLAB</b> . . . . .	<b>47</b>

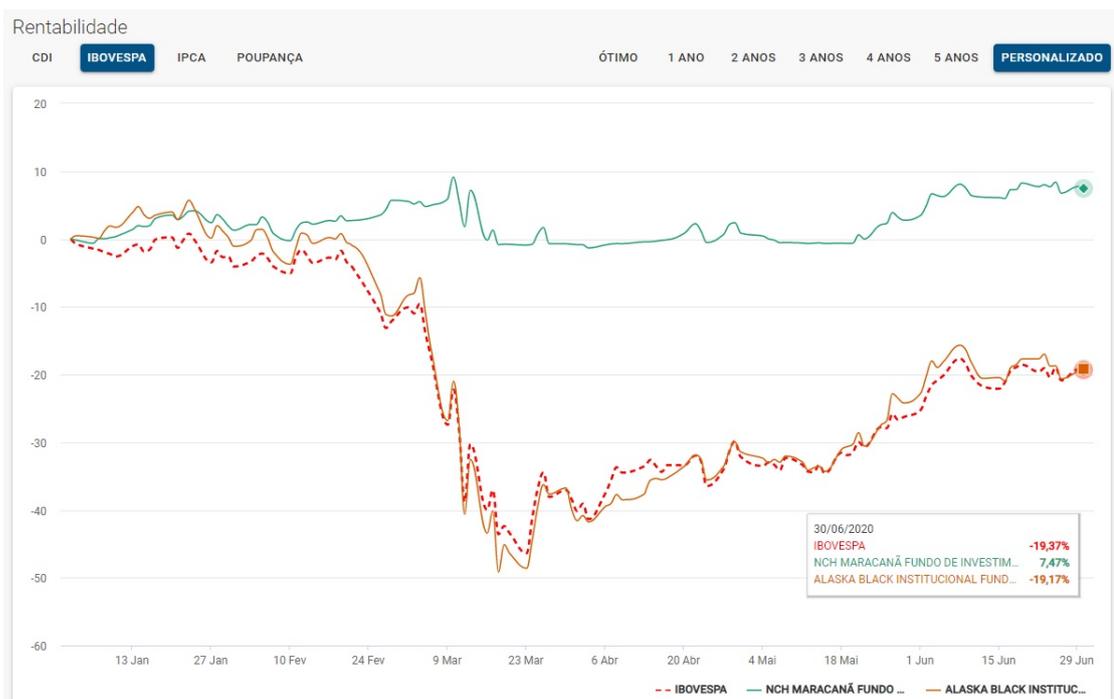
# 1 INTRODUÇÃO

O ano de 2020 ficará marcado na história mundial pelos grandes impactos sociais e econômicos causados pelo novo coronavírus, SARS-CoV-2. A COVID-19 é a doença infecciosa causada pelo vírus, identificado em dezembro de 2019 após a notificação de um surto em Wuhan, na China, de acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS). A doença se espalhou rapidamente pelo mundo e fez com que a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarasse pandemia em 11 de março de 2020.

As medidas tomadas após a declaração da pandemia tiveram reflexos econômicos no mundo todo, gerando uma crise global no mercado de ações e impactando fortemente as bolsas de valores. O Índice Bovespa (IBOVESPA), principal referência de desempenho das ações negociadas na Bolsa de Valores (B<sup>3</sup>), fechou o mês de março com queda acumulada de 36,86% no ano.

A maioria dos fundos de investimento em ações (FIA's) também tiveram grandes quedas em suas rentabilidades. Por exemplo, o Alaska Black Institucional FIA chegou a ter mais de 50% de desvalorização acumulada do início de 2020 até o mês de março. No entanto, alguns fundos conseguiram amenizar os impactos e passaram pelo primeiro semestre de 2020 sem quedas muito significativas em sua rentabilidade, ou mesmo valorizaram, como o caso do NCH Maracanã FIA (NCH), conforme a Figura 1.1.

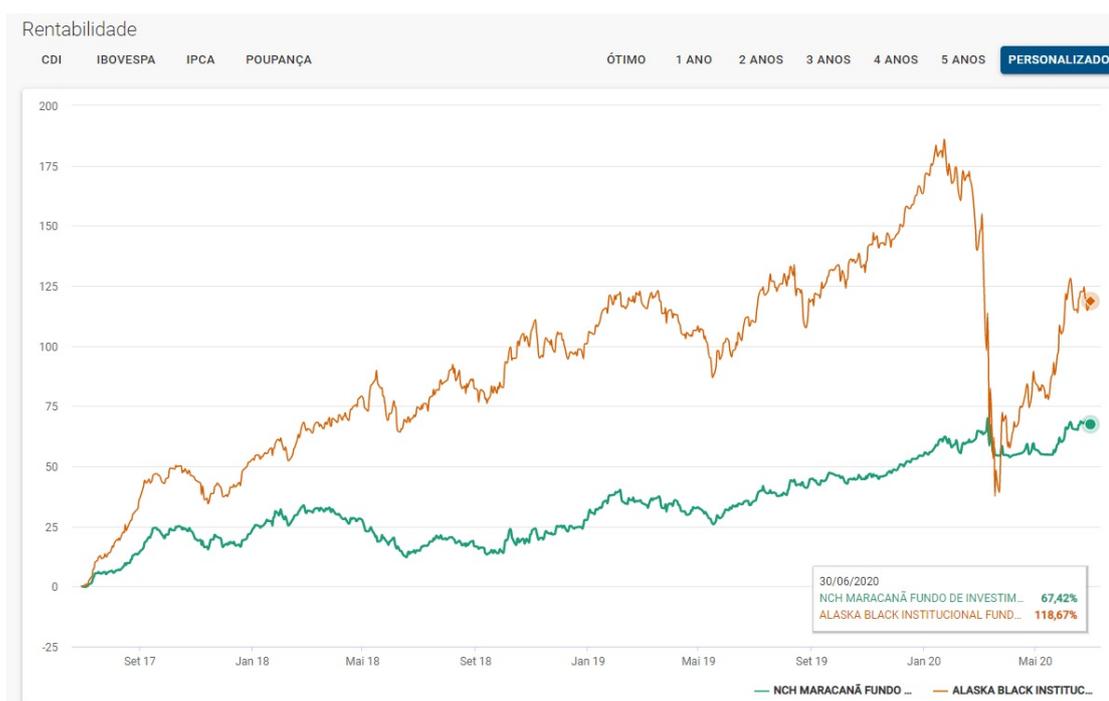
Figura 1.1 – Rentabilidade NCH × ALASKA no primeiro semestre de 2020.



Fonte: Site: [www.comparadordefundos.com.br](http://www.comparadordefundos.com.br)

Fica evidente que o fundo NCH utilizou-se de mecanismos de proteção contra a volatilidade do mercado de ações, visando minimizar o risco de sua carteira. Muitas vezes, tais mecanismos utilizam derivativos como as opções de venda (PUTS), por exemplo. Porém, o custo elevado de mantê-las em carteira pode comprometer a rentabilidade acumulada quando analisados intervalos de tempo ampliados, como ilustrado na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Rentabilidade NCH × ALASKA em 3 anos.



Fonte: Site: [www.comparadordefundos.com.br](http://www.comparadordefundos.com.br)

A estratégia com opções também tem algumas complicações operacionais, como a complexidade dos modelos matemáticos envolvidos e a dificuldade no gerenciamento e alocação destes ativos. Estes fatores dificultam a utilização deste e outros métodos de proteção, especialmente por praticantes não profissionais do mercado de ações.

Neste sentido, mostra-se oportuna a reanálise do desempenho, durante uma grande crise, de métodos que utilizem modelos matemáticos que promovam redução de risco e que possam ser aplicados sem grandes dificuldades técnicas. Ainda, sem ter de arcar com os elevados custos de manutenção de ativos de proteção. Convém, então, compreendermos um pouco mais sobre risco associado aos ativos financeiros.

Existem dois tipos de risco, a saber, o risco sistêmico e o não sistêmico. O primeiro é atrelado à ocorrência de eventos de grande impacto negativo e não previsíveis, e que atingem a economia como um todo, fazendo com que praticamente todos os ativos de risco percam grande parte do seu valor. Foi o caso da pandemia de COVID-19.

O risco não-sistêmico, por outro lado, afeta um ativo individualmente, ou um setor

específico. Em uma carteira de investimentos, o maior risco está em concentrar todo o capital em ações de poucas empresas, ou ainda, em um único ou em poucos setores da economia. O desempenho de uma carteira concentrada pode ser muito prejudicado na hipótese de uma ou mais destas empresas terem um desempenho muito abaixo do esperado. Portanto, a fim de promover redução de risco é natural montar-se uma carteira de ativos diversificada.

Depois da diversificação, deve-se buscar a alocação ótima destes ativos na carteira, isto é, determinar os percentuais mais adequados que cada ativo deve representar. Alguns métodos matemáticos se propõem a calcular tais percentuais de forma a minimizar riscos.

No contexto de crise sistêmica, estratégias de gestão de carteiras baseadas nos métodos de Mínima Variância de Markowitz (MV) e da Paridade de Risco (PR) mostraram bons resultados quando comparados com a distribuição uniforme dos ativos na carteira (estratégia  $1/n$ ), durante a crise de 2008 (Bortoluzzo *et al.*, 2018).

Ambos os métodos tratam risco de um ativo como a variância de seus retornos, conforme (2.13) e o risco de uma carteira de investimentos conforme (2.21).

No pioneiro artigo *Portfolio Selection*, Harry Markowitz (1952) propôs o modelo Média-Variância, no qual assumem-se as hipóteses de racionalidade do investidor e da eficiência dos mercados. Nesse modelo, busca-se as carteiras eficientes, nas quais para um determinado risco tem-se o maior retorno ou para um determinado nível de retorno tem-se o menor risco. O conjunto das carteiras eficientes é denominado Fronteira Eficiente. O trabalho de Markowitz deu origem à Teoria Moderna das Carteiras e juntamente com suas variações e refinamentos, continua sendo bastante utilizado pelos praticantes do mercado.

Do modelo Média-Variância decorre o método Mínima Variância (MV), que busca a alocação dos ativos na carteira visando o menor risco.

O método de Paridade de Risco (PR) utiliza os mesmos conceitos da Média-Variância e busca atribuir os percentuais dos ativos na carteira de maneira que o risco de cada ativo contribua igualmente no risco total da carteira. Este método tem ganho importância e maior aplicabilidade no mercado. Por exemplo, há fundos de investimentos que utilizam estratégias baseadas na Paridade de Risco, como o AQR - Risk Parity Fund. O método foi estruturado em (Maillard; Thierry; Teiletche, 2010) e estudado no mercado brasileiro em (Bortoluzzo *et al.*, 2018) e em (Souza *et al.*, 2017).

Estratégias que utilizam os métodos MV e PR consistem de aplicações recorrentes destes métodos na atualização de carteiras de investimento.

Neste trabalho analisamos o desempenho das estratégias MV e PR durante a crise causada pela pandemia de COVID-19, principalmente no mês de março de 2020. A comparação dos resultados foi feita com a estratégia  $1/n$ , que não se utiliza de métodos de otimização. As carteiras foram rebalanceadas semanalmente.

Com o intuito de aumentar a aderência deste tipo de trabalho às situações reais de investimentos em ações por parte de investidores pessoas físicas, não profissionais do mercado financeiro, impomos algumas restrições à análise. Não trabalhamos com todas as ações do Índice Bovespa, como faz (Bortoluzzo *et al.*, 2018), ou ainda, não escolhemos índices como ativos, como o trabalho de (Souza *et al.*, 2017). Buscamos doze ações representativas dos diversos setores da economia, listadas na Bolsa de Valores de São Paulo (B<sup>3</sup>) e que compunham o Índice Bovespa em janeiro de 2019. Conforme (Oliveira; Paula, 2008) este número de ações é adequado ao investidor pessoa física para fins de diversificação. Utilizamos uma base de dados aberta e gratuita (br.investing.com) para buscar preços das ações e cálculo dos retornos das ações. Utilizamos o software MATLAB na versão R2015a para a implementação das estratégias.

No período afetado pela pandemia de COVID-19, os resultados obtidos usando as diferentes estratégias refletem a teoria e validam a eficiência das mesmas no que se propõem quanto a gestão de riscos.

A educação financeira é parte importante da formação dos estudantes, em especial do ensino médio. O trabalho (Alves, 2020), do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), mostra a importância da estatística como ferramenta na seleção de carteiras de investimentos e apresenta planos de aula nesse sentido com auxílio computacional.

Nos Exemplos 3 e 4 apresentamos cálculos para os pesos de carteiras compostas por duas ações e que podem ser realizados sem ajuda computacional. O objetivo destes exemplos é produzir aplicações no ensino de educação financeira, utilizando funções quadráticas, noções básicas de estatística, assim como operações com matrizes.

Os dois primeiros capítulos deste trabalho apresentam alguns conceitos e métodos de alocação de ativos. Outros dois capítulos são dedicados para a parte prática, com aplicação desses métodos em carteiras de ações no mercado brasileiro no período especificado.

O Capítulo 2 contém noções gerais da Teoria Moderna das Carteiras, incluindo estatística básica, retorno e risco de ativos e de carteiras de investimentos. No Capítulo 3 apresentamos a estrutura teórica e matemática dos métodos de Mínima Variância e Paridade de Risco. A metodologia é apresentada no Capítulo 4. Os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 5. Finalmente, o último capítulo trata das considerações finais.

Parte deste trabalho e do artigo (Dario *et al.*, 2021b) resultou de contribuições de um grupo de estudos de educação financeira da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), focado inicialmente na Teoria Moderna das Carteiras. Neste grupo também foram desenvolvidos trabalhos utilizando o método clássico de Média Variância, (Dario *et al.*, 2021a) e (Miranda, 2021). Assim como nosso trabalho, foi utilizada a mesma carteira de ações rebalanceada semanalmente no período de janeiro de 2019 a agosto de 2020.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA MODERNA DAS CARTEIRAS

Existem várias opções de ativos financeiros para se investir no mercado brasileiro. Há ativos de renda fixa, quando a remuneração do investimento é definida no momento da aplicação e ativos de renda variável, quando o rendimento não é definido *a priori*. A expectativa de retorno financeiro do investimento num determinado ativo é conhecida como retorno esperado e depende do tipo de ativo.

Exemplos de ativos de renda fixa incluem títulos do Tesouro Direto, Debêntures, Letra de Crédito Imobiliário (LCI) e Letra de Crédito Agronegócio (LCA), entre outros. Por outro lado, ativos de renda variável incluem fundos de investimentos imobiliários (FII), ouro, fundos cambiais, derivativos e ações.

Estamos particularmente interessados no investimento em ações. Uma ação de uma empresa representa uma fração da sua propriedade, sendo que a negociação das ações ocorre nas bolsas de valores. Sendo ativo de renda variável, a ação oferece ganhos ou perdas dependendo de diversos fatores ligados ao desempenho da empresa e à economia do país. Uma forma de rendimento de uma ação se dá pela valorização ou desvalorização de seu preço de mercado.

O risco de um ativo financeiro está diretamente relacionado com a incerteza que o investidor tem com relação ao rendimento esperado para o ativo. Quanto maior a incerteza, maior o risco. Por essa razão os ativos de renda variável possuem risco maior do que os de renda fixa.

A fim de reduzir o risco, é indicado que o investidor diversifique seus investimentos, isto é, divida seu capital entre diferentes tipos de ativos, montando uma carteira de investimentos. Normalmente, tal carteira é rebalanceada periodicamente através da venda e compra de ativos.

A Teoria Moderna das Carteiras foi iniciada por Harry Markowitz (1952) e utiliza matemática e estatística para otimizar os percentuais de alocação de ativos numa carteira, a fim de obter o menor risco para um dado nível de retorno esperado, ou o maior retorno esperado para um dado nível de risco.

Especificamente, noções básicas de estatística e probabilidade são utilizadas para calcular retorno e risco de ativos, conforme veremos na Seção 2.1.

Nas Seções 2.2 e 2.3 estudamos os conceitos de risco e retorno de ativos, e de carteiras, respectivamente.

### 2.1 FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

Nesta seção fazemos uma breve revisão dos conceitos de estatística e probabilidade necessários ao nosso trabalho. Os detalhes omitidos podem ser encontrados em (Morettin;

Bussab, 2010) ou (Foyrsyth, 2018).

Consideramos uma **variável aleatória discreta**  $X$ , isto é, uma variável cujos possíveis valores que ela pode assumir formam um conjunto enumerável  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Este é o caso dos preços futuros de uma ação na bolsa de valores, por exemplo. A cada valor  $x_i$  corresponde a **probabilidade**  $p(x_i) \geq 0$  de ocorrer  $X = x_i$ , sendo que  $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$ .

O **valor esperado** (ou esperança) de  $X$  é denotado por  $E(X)$  ou  $\mu_X$  e definido por

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \quad (2.1)$$

quando esta série for convergente.

A **variância** de  $X$  é denotada por  $\text{Var}(X)$  ou  $\sigma_X^2$  e definida como

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]. \quad (2.2)$$

Note que  $\text{Var}(X) \geq 0$ . Outra medida de dispersão calculada em relação ao valor esperado é o **desvio padrão**, denotado por  $\sigma_X$  e definido por

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (2.3)$$

Outras propriedades básicas do valor esperado e da variância são listadas na proposição abaixo.

**Proposição 2.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias discretas, para as quais existam  $E(X)$  e  $E(Y)$ , e seja  $k \in \mathbb{R}$ . Tem-se que:

- (a)  $E(k) = k$ .
- (b)  $E(kX) = kE(X)$ .
- (c)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .
- (d)  $\text{Var}(k + X) = \text{Var}(X)$ .
- (e)  $\text{Var}(kX) = k^2 \text{Var}(X)$ .

**Demonstração.** Sejam  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  os possíveis valores para  $X$  e  $p(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , suas respectivas probabilidades. Utilizando (2.1), temos  $E(k) = k \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = k$ , o que mostra o item (a). Para

(b), temos  $E(kX) = \sum_{i=1}^{\infty} kx_i p(x_i) = kE(X)$ . Agora consideremos  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  os possíveis valores para  $Y$  e  $p(x_i, y_j)$  a probabilidade de ocorrer  $X = x_i$  e  $Y = y_j$ . Para a demonstração de (c), temos  $E(X + Y) =$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} x_i p(x_i, y_j) + \sum_{i,j=1}^{\infty} y_j p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = E(X) + E(Y),$$

pois para  $i$  fixo,  $\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = p(x_i)$  e para  $j$  fixo,  $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = p(y_j)$ . Para os itens (d) e (e) precisamos de (2.2) e os itens (a), (b) e (c) já demonstrados. Assim, temos que  $\text{Var}(k + X) = E[(k + X - E(k + X))^2] = E[(X - E(X))^2] = \text{Var}(X)$ , concluindo a demonstração de (d). Finalmente, para o item (e) temos  $\text{Var}(kX) = E[(kX - E(kX))^2] = E[(kX - kE(X))^2] = E[(k(X - E(X)))^2] = k^2 \text{Var}(X)$ .  $\square$

Utilizando novamente as propriedades de valor esperado listadas na Proposição 2.1, obtemos uma fórmula alternativa para variância:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (2.4)$$

que demonstramos a seguir. Por (2.2) e (a), (b) e (c) da Proposição 2.1 e por  $E(X)$  ser uma constante, temos

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Dado um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , o valor esperado do produto dos desvios de  $X$  e  $Y$  em relação aos seus respectivos valores esperados é chamado de **covariância**, que é denotada por  $\text{Cov}(X, Y)$  ou  $\sigma_{XY}$ . Precisamente, define-se

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]. \quad (2.5)$$

Alternativamente, temos

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (2.6)$$

De fato, de (2.5) e da Proposição 2.1 segue que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

É conveniente restringir os resultados mencionados para o caso de **variáveis aleatórias finitas**, isto é, aquelas que assumem um número finito de valores.

Suponha que os possíveis valores para a variável aleatória  $X$  sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com respectivas probabilidades  $p(x_1), \dots, p(x_n)$ , e que a variável aleatória  $Y$  possa assumir os valores  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , com probabilidades  $p(y_1), \dots, p(y_n)$ . Ainda, que  $p(x_i, y_j)$  seja a probabilidade de ocorrer  $X = x_i$  e  $Y = y_j$ . Então, (2.1), (2.2) e (2.5) são escritas como

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i),$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p(x_i),$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - E(X))(y_j - E(Y))p(x_i, y_j).$$

Se além disso a distribuição das probabilidades para os valores de  $X$  for uniforme, isto é,  $x_1, \dots, x_n$  tiverem a mesma probabilidade  $p(x_i) = \frac{1}{n}$ , então o valor esperado será a média aritmética simples ( $\bar{x}$ ) desses valores e a variância e covariância serão conforme segue

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.7)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.8)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (2.9)$$

sendo que na última igualdade assumimos que a distribuição das probabilidades dos possíveis valores de  $Y$  também é uniforme.

Algumas propriedades da variância e covariância são listadas na proposição seguinte.

**Proposição 2.2.** Sejam  $X, Y, Z$  variáveis aleatórias discretas, para as quais existam  $E(X)$ ,  $E(Y)$  e  $E(Z)$ , e seja  $k \in \mathbb{R}$ . Tem-se que

- (a)  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ .
- (b)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .
- (c)  $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$ .
- (d)  $\text{Cov}(kX, Y) = k\text{Cov}(X, Y)$ .

**Demonstração.** Os itens (a) e (b) seguem de (2.2) e (2.5). Vamos demonstrar o item (c). Pela Equação 2.6, temos  $\text{Cov}(X+Y, Z) = E((X+Y)(Z)) - E(X+Y)E(Z) = E(XZ) + E(YZ) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$ , onde na penúltima igualdade utilizamos a Proposição 2.1 (c). Para o item (d) utiliza-se a Equação 2.6 e o item (b) da Proposição 2.1. Assim,  $\text{Cov}(kX, Y) = kE(XY) - kE(X)E(Y) = k\text{Cov}(X, Y)$ .  $\square$

## 2.2 RETORNO E RISCO DE ATIVOS

Nesta seção definimos taxa de retorno, retorno esperado e risco de um ativo de renda variável. Veremos que o retorno esperado é entendido formalmente como o valor esperado da taxa de retorno e trata-se de uma expectativa de retorno. Quanto a isso, (Ross *et al.*, 2015) explica que tal expectativa pode ser o retorno médio por período que uma ação tenha obtido no passado ou, alternativamente, pode basear-se numa análise detalhada das perspectivas da empresa em questão.

Denotamos por  $P(t)$  o preço de um ativo no tempo  $t$ , isto é, sua cotação de mercado neste tempo. A **taxa de retorno** ou simplesmente **retorno**  $R(s, t)$  de um ativo no intervalo de tempo  $[s, t]$  é definida como a variável aleatória

$$R(s, t) = \frac{P(t) - P(s)}{P(s)}. \quad (2.10)$$

Apesar de importante na definição acima, não mais utilizaremos a variável temporal, a menos quando estritamente necessário. Assim, vamos denotar apenas por  $R$  a variável aleatória que representa o retorno de um ativo em um dado período. Sejam também  $r_1, \dots, r_n$  os possíveis valores para  $R$  e  $p(r_1), \dots, p(r_n)$  as respectivas probabilidades destes valores ocorrerem. Definimos o **retorno esperado de um ativo** como

$$\mu = E(R) = \sum_{i=1}^n r_i p(r_i). \quad (2.11)$$

Note que esta definição é o conceito estatístico de valor esperado (2.1) aplicado ao contexto da teoria das carteiras.

As probabilidades em (2.11) são estimadas de acordo com as perspectivas individuais de cada investidor sobre os possíveis cenários futuros para cada empresa, ou ainda, quanto à perspectiva geral de mercado, tais como *bull market* (mercado em alta), estagnação ou *bear market* (mercado em baixa).

Dada a dificuldade em realizar análises de mercado, é usual estimar tais retornos esperados por meio do cálculo da média dos retornos históricos do ativo, adotando probabilidades iguais para cada um destes retornos. Desta forma, para os retornos históricos  $r_1, \dots, r_n$  e respectivas probabilidades  $p(r_i) = \frac{1}{n}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , a definição de retorno esperado (2.11) pode ser escrita como a média

$$\mu = E(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i. \quad (2.12)$$

Para concluir esta seção, vamos definir matematicamente o risco de um ativo.

Em geral, a noção de risco está associada à possibilidade de perda devido à tomada de decisões de investimento em um ambiente de incerteza com relação às empresas ou o mercado em geral.

Conforme (Neto, 2014), risco pode ser entendido pela capacidade de se mensurar o estado de incerteza de uma decisão mediante o conhecimento das probabilidades associadas à ocorrência de determinados resultados em relação ao seu valor esperado.

A definição formal de risco de um ativo é obtida através do grau de dispersão das taxas de retorno em relação ao seu retorno esperado. Quanto maior a dispersão, maior o risco. Assim sendo, a forma mais utilizada para medir o risco de um ativo financeiro é a variância, ou quando conveniente, o desvio padrão. A própria interpretação da variância como forma de medir a

dispersão dos dados em relação ao valor esperado de um determinado conjunto de valores tornou natural sua utilização como tal parâmetro.

Desta forma, seguindo a notação anterior, o **risco** de um ativo é definido como

$$\sigma^2 = \text{Var}(R) = \sum_{i=1}^n p(r_i)(r_i - E(R))^2. \quad (2.13)$$

Caso as probabilidades sejam iguais para todos os  $n$  cenários, o risco do ativo é

$$\sigma^2 = \text{Var}(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - E(R))^2, \quad (2.14)$$

e  $E(R)$  é dado pela média aritmética conforme (2.12).

### 2.3 RETORNO E RISCO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

Na seção anterior definimos retorno esperado e risco de ativos de renda variável, como é o caso do preço das ações. O retorno esperado de uma carteira de ações também é uma variável aleatória e será definido nessa seção, assim como será definido o risco de uma carteira.

Uma **carteira de investimentos**, ou simplesmente **carteira**, é composta por um conjunto finito de ativos financeiros, tais como ações, derivativos, títulos, etc, juntamente com seus respectivos pesos, conforme segue.

Suponha que uma carteira  $x(t)$  é formada pelos ativos  $1, \dots, n$  no tempo  $t$ . O **peso** do ativo  $i$  em  $x(t)$  é definido como o percentual do capital da carteira alocado em  $i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , e é denotado por  $x_i(t)$ . Especificamente, denotando por  $P_1(t), \dots, P_n(t)$  os respectivos preços dos ativos e  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  suas respectivas quantidades, podemos definir

$$x_i(t) = \frac{q_i(t)P_i(t)}{V(t)}, \quad (2.15)$$

onde  $V(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t)P_i(t)$  é o valor da carteira. Desta forma, a carteira  $x$  no tempo  $t$  é formalmente representada pelo vetor

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (2.16)$$

e satisfaz a condição

$$x_1(t) + \dots + x_n(t) = 1. \quad (2.17)$$

Os pesos podem ser negativos no caso da venda a descoberto de ativos (*short selling*). Trata-se da operação de venda de um ativo que não se tem na carteira e posterior compra do mesmo. Nesse trabalho não vamos considerar este caso, assumindo sempre  $x_i \geq 0$ , com  $i = 1, \dots, n$ .

Uma **estratégia de investimento** é uma sequência de carteiras, indexada por  $t$ .

Cada passo da sequência corresponde a um ajuste, ou **rebalanceamento**, periódico da carteira anterior de acordo com a estratégia definida. Sempre assumiremos tais ajustes auto-financeáveis, isto é, utiliza-se somente o capital da carteira anterior, sem novos aportes.

Uma estratégia básica, e muito utilizada por não envolver critérios de otimização, atribui o mesmo peso para todos os ativos da carteira e é denominada **estratégia  $1/n$** , ou ainda *equal weighting*.

**Exemplo 1.** A divisão igualitária do capital disponível entre os  $n$  ativos da carteira  $x$  produz a sequência constante  $x(t) = (1/n, \dots, 1/n)$ , isto é,

$$x_i(t) = \frac{1}{n}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ e todo } t.$$

### Retorno esperado de uma carteira

Primeiramente definimos o **retorno da carteira**  $x = (x_1, \dots, x_n)$  como

$$R_x = \sum_{i=1}^n x_i R_i, \quad (2.18)$$

onde  $R_i$  é o retorno do ativo  $i$ , conforme (2.10). Pela linearidade do retorno esperado (Proposição 2.1, itens (b) e (c)), segue que o **retorno esperado da carteira**  $x$  é

$$\mu(x) = E(R_x) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i). \quad (2.19)$$

Organizando os retornos esperados  $\mu_i = E(R_i)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , na matriz linha  $\mathbf{m} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$ , nos será útil representar matricialmente o retorno esperado da carteira  $x$  como

$$\mu(x) = E(R_x) = \mathbf{m}x^T, \quad (2.20)$$

onde  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  e  $x^T$  é a transposta de  $x$ .

### Risco de uma carteira

O **risco da carteira**  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é definido como o desvio padrão de  $R_x$  e denotado por  $\sigma(x)$ . Assim,

$$\sigma^2(x) = \text{Var}(R_x). \quad (2.21)$$

Enquanto o retorno esperado de uma carteira é dado pela simples combinação linear dos retornos esperados dos ativos que a compõem, o cálculo do risco da carteira não depende apenas do risco individual de cada ativo. Com relação a isso, (Neto, 2014) afirma que o risco de uma carteira depende também da forma com que seus ativos se relacionam entre si. Assim, precisa ser levada em conta a covariância entre os retornos dos ativos da carteira, conforme segue.

**Proposição 2.3.** Considere a carteira  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Seja  $\sigma_i$  o risco do ativo  $i$  e  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$  a covariância entre os retornos dos ativos  $i$  e  $j$  da carteira  $x$ . O risco da carteira  $x$  é dado por

$$\sigma^2(x) = \text{Var}(R_x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}.$$

**Demonstração.** Temos  $\sigma^2(x) = \text{Var}(R_x) = E((R_x)^2) - [E(R_x)]^2$ , por (2.4). Utilizando (2.18) e a linearidade do retorno esperado, temos

$$\begin{aligned} E((R_x)^2) - [E(R_x)]^2 &= E \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (x_i^2 R_i^2 + 2x_i x_j R_i R_j) \right] - \left[ \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i^2 E(R_i^2) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j E(R_i R_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n [x_i^2 E(R_i)^2 + 2x_i x_j E(R_i) E(R_j)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i^2 (E(R_i^2) - E^2(R_i)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j (E(R_i R_j) - E(R_i) E(R_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

□

Denotando  $c_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , a **matriz de covariância** de  $x$  é a matriz  $C$ , quadrada de ordem  $n$ , dada por

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

A forma matricial do risco da carteira, conforme Proposição 2.3, é dada por

$$\sigma^2(x) = x C x^T. \quad (2.23)$$

A matriz  $C$  é simétrica, pois  $\text{Cov}(R_i, R_j) = \text{Cov}(R_j, R_i)$ , para todo  $i$  e  $j$ . Os elementos da diagonal são as variâncias dos retornos, isto é,  $c_{ii} = \text{Var}(R_i) = \text{Cov}(R_i, R_i)$ . Também, por ser uma matriz de covariância, é semi definida positiva, isto é,  $x C x^T \geq 0$ , para todo  $x$ . Além disso, se os retornos dos ativos da carteira forem um conjunto de vetores linearmente independente, então  $C$  é definida positiva, e portanto inversível (Wang; Xia, 2002).

Para finalizar este capítulo, veremos um exemplo de uma carteira fictícia de duas ações, para a qual vamos calcular retorno e risco utilizando dados de retornos históricos anuais.

**Exemplo 2.** Suponha que uma carteira  $x$  é composta pelas ações 1 e 2 e que estas possuem histórico de retornos anuais conforme a tabela abaixo.

Ano	Retornos da ação 1	Retornos da ação 2
2016	-0,20	-0,05
2017	0,18	0,30
2018	0,30	-0,15
2019	0,07	0,08
2020	-0,10	0,02

Como retorno esperado de cada ação vamos utilizar a média dos retornos históricos, conforme Equação 2.12. Assim,

$$\mu_1 = E(R_1) = \frac{1}{5}(-0,2 + 0,18 + 0,3 + 0,07 - 0,10) = 0,05,$$

$$\mu_2 = E(R_2) = \frac{1}{5}(-0,05 + 0,3 - 0,15 + 0,08 + 0,02) = 0,04.$$

Para os riscos utilizamos a Equação 2.14. Desta forma,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  são dados por

$$\frac{1}{5}((-0,2-0,05)^2+(0,18-0,05)^2+(0,3-0,05)^2+(0,07-0,05)^2+(-0,10-0,05)^2) \approx 0,03296,$$

$$\frac{1}{5}((-0,05-0,04)^2+(0,3-0,04)^2+(-0,15-0,04)^2+(0,08-0,04)^2+(0,02-0,04)^2) \approx 0,02276,$$

respectivamente.

Portanto, de acordo com os dados considerados, a ação 1 possui retorno esperado de 5% e risco de  $\sigma_1 = \sqrt{0,03296} \approx 18,15\%$ , enquanto a ação 2 possui 4% de retorno esperado com risco de  $\sigma_2 = \sqrt{0,02276} \approx 15,09\%$ .

Agora calculamos as covariâncias entre os ativos 1 e 2,

$r_1$	$r_2$	$r_1 - \mu_1$	$r_2 - \mu_2$	$(r_1 - \mu_1)(r_2 - \mu_2)$
-0,20	-0,05	-0,25	-0,09	0,0225
0,18	0,30	0,13	0,26	0,0338
0,30	-0,15	0,25	-0,19	-0,0475
0,07	0,08	0,02	0,04	0,0008
-0,10	0,02	-0,15	-0,02	0,0030

e obtemos  $\sigma_{12} = \sigma_{21} \approx \frac{1}{5}(0,0225 + 0,0338 - 0,0475 + 0,0008 + 0,003) \approx 0,00252$ .

Utilizando (2.19) e a Proposição 2.3, temos que tanto o retorno esperado quanto o risco da carteira  $x$  dependem do capital investido em cada ação e são obtidos como

$$\mu(x) \approx 0,05x_1 + 0,04x_2,$$

$$\sigma^2(x) \approx 0,03296x_1^2 + 2(0,00252)x_1x_2 + 0,02276x_2^2.$$

### 3 MÉTODOS DE GESTÃO DE RISCO DE INVESTIMENTOS

Neste capítulo estudamos dois métodos de gestão de risco de carteiras, o método de Mínima Variância de Markowitz (MV) e o de Paridade de Risco (PR). Estes definem os percentuais de cada ativo na carteira com base em minimização de risco e risco igualitário dos ativos, respectivamente. Ambos utilizam conceitos do método de Média Variância de Markowitz.

Conforme já mencionamos, o clássico trabalho de Markowitz (1952) deu início à Teoria Moderna das Carteiras, que tem como premissa básica a racionalidade do investidor. Entre as carteiras com mesmo retorno esperado, supõe-se que o investidor racional prefira aquela de menor risco. Analogamente, que ele opte pela de maior retorno esperado entre as carteiras de mesmo risco. Tais escolhas correspondem às chamadas **carteiras eficientes**, que no plano risco  $\times$  retorno correspondem aos pontos da curva denominada **Fronteira Eficiente**.

O método clássico de Média Variância de Markowitz tem o objetivo de encontrar a carteira eficiente para os parâmetros fornecidos, isto é, encontrar o vetor de pesos dos ativos dessa carteira que possua o menor risco para um determinado retorno esperado da carteira. Este método é estudado com mais detalhes em (Miranda, 2021), do PROFMAT, como já citado na introdução deste trabalho.

Conforme vimos na Proposição 2.3 do Capítulo 2, o risco de uma carteira  $x$  é definido como uma função  $\sigma(x)$  de seus pesos, e depende da covariância dos retornos dos ativos. Por outro lado, o retorno esperado da carteira depende dos retornos esperados dos ativos que a compõem, conforme a Equação 2.19.

Na sequência, nos serão úteis as representações matriciais para retorno e risco da carteira (Equações 2.20 e 2.23).

O método de Média Variância, portanto, resolve o problema de otimização de encontrar a carteira de menor risco, dado um certo nível de retorno esperado  $\mu_0$  da carteira, isto é

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \frac{1}{2} x C x^T \\ \text{s.a. } & \mathbf{m} x^T = \mu_0, \\ & \mathbf{1} x^T = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $\mathbf{m} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$ ,  $C$  é a matriz de covariância e  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]$  é o vetor com  $n$  entradas iguais a 1.

Uma limitação do método de Média Variância é a estimativa das taxas de retornos esperados para a carteira. Pequenos erros na estimação dos retornos esperados podem causar forte impacto nos pesos da carteira. Se retirarmos a imposição de nível de retorno esperado

da carteira, ou seja, a restrição da primeira igualdade no Problema 3.1, obtemos o problema correspondente ao método de Mínima Variância (MV), conforme veremos em detalhes na Seção 3.1.

O método de Paridade de Risco (PR) produz carteiras em que todos os ativos possuem a mesma contribuição para o risco total da carteira. Assim como o MV, para o método PR não é necessário estimar o retorno esperado da carteira.

A Paridade de Risco foi matematicamente estruturada no trabalho de (Maillard; Thierry; Teiletche, 2010), o qual servirá de referência para nossa abordagem. Cabe observar que o método PR tem sido bastante utilizado por investidores por produzir carteiras mais diversificadas e riscos intermediários entre os métodos MV e  $1/n$ .

De forma simplista, o método MV produz os pesos dos ativos para a carteira de menor risco, enquanto o método  $1/n$  (Exemplo 1) divide o capital igualmente entre os ativos da carteira. Em ambos os métodos, os riscos dos ativos podem contribuir de forma irregular no risco total da carteira. No método PR, por outro lado, os riscos dos ativos contribuem de forma igual.

Os trabalhos de (Souza *et al.*, 2017) e de (Bortoluzzo *et al.*, 2018) analisam estratégias de gestão baseadas no método PR no mercado brasileiro. Em especial, mostrou-se uma boa opção em ambientes de crise, como na ocorrida em 2008. O método PR será estudado na segunda seção deste capítulo.

### 3.1 MÍNIMA VARIÂNCIA DE MARKOWITZ (MV)

Denotando por  $C$  a matriz de covariância, conforme (2.22) associada à carteira  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , o método de **Mínima Variância de Markowitz** pode ser definido como o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} x C x^T \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{1} x^T = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  é o vetor com  $n$  entradas iguais a 1.

Nesse problema, a função objetivo é quadrática e limitada inferiormente por zero, pois  $C$  é simétrica e semi definida positiva. Além disso, as restrições de igualdade e de desigualdade são lineares e, em particular, as restrições de desigualdade são convexas.

A prova da existência de um minimizador global para o Problema 3.2 segue do Teorema 3.1, que foi apresentado em (Frank; Wolfe, 1956) e em (Blum; Oettli, 1972), e cuidadosamente demonstrado em (Krulikowski [Teorema 1.34], 2017).

**Teorema 3.1.** *Considere o problema quadrático*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ \text{s.a. } Ax + b \leq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

com  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Suponha que o seu conjunto viável seja não vazio e que a função objetivo seja limitada inferiormente neste conjunto. Então o problema tem um minimizador global.

Outra forma de garantir a existência de solução para o Problema 3.2 é o resultado apresentado em (Kreyszig [Corolário 2.5-7, pg. 81], 1978), que afirma que uma função contínua em um conjunto compacto sempre assume máximo e mínimo nesse conjunto. Veja que a função objetivo no Problema 3.2 é contínua em  $\mathbb{R}^n$  e as restrições formam um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$  (fechado e limitado).

Conforme veremos no Capítulo 4, na resolução numérica deste problema usamos o *toolbox* de otimização do Matlab, em particular o método *quadprog*.

Desconsiderar as restrições de desigualdade no Problema 3.2 equivale a permitir vendas a descoberto de ativos. Matematicamente significa poder considerar pesos negativos na carteira. Neste caso, é possível explicitar a solução analítica. Conforme apresentado e demonstrado em (Capinski; Zastawniak, 2003), a solução é dada por  $x = \frac{\mathbf{1}C^{-1}}{\mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T}$ , desde que o denominador seja diferente de zero.

O exemplo a seguir considera uma carteira com duas ações e mostra como encontrar a carteira de mínima variância analiticamente, podendo ser um projeto de ensino para estudantes de ensino médio. Para encontrar esta carteira utilizaremos os conceitos de média, variância, desvio padrão, covariância, mínimo de função quadrática e operações com matrizes.

**Exemplo 3.** Vamos considerar que as ações 1 e 2 possuem retornos mensais no período de novembro de 2019 a novembro de 2020 conforme a Tabela 3.1. Queremos encontrar a carteira  $x = (x_1, x_2)$  de menor risco dentre as possíveis carteiras conforme o método MV.

Tabela 3.1 – Retornos mensais de duas ações.

Mês	Retorno da Ação 1	Retorno da Ação 2
Nov 2019	0,0799	0,0090
Dez 2019	0,0867	0,0587
Jan 2020	-0,0023	0,1706
Fev 2020	-0,0871	-0,0940
Mar 2020	-0,1469	-0,2282
Abr 2020	0,1208	0,2741
Mai 2020	0,0916	0,2949
Jun 2020	0,0296	0,1133
Jul 2020	0,0072	0,1280
Ago 2020	0,2857	0,1546
Set 2020	-0,0648	0,0429
Out 2020	-0,0475	0,1045
Nov 2020	-0,0042	-0,0037
<b>Média</b>	0,0268	0,0722
<b>Variância</b>	0,0121	0,0211
<b>Covariância</b>	0,0107	0,0107

Fonte: da autora

De acordo com os dados, o retorno esperado e risco da ação 1 são  $\mu_1 \approx 2,68\%$  e  $\sigma_1 \approx \sqrt{0,0121} = 11\%$ , respectivamente. Para a ação 2 temos  $\mu_2 \approx 7,22\%$  e  $\sigma_2 \approx \sqrt{0,0211} \approx 14,52\%$ .

O retorno esperado da carteira que contém as duas ações pode ser expresso em função dos pesos das ações e seus retornos esperados, conforme (2.12) ou na forma matricial, com  $\mathbf{m} = [\mu_1 \ \mu_2]$  e  $x = [x_1 \ x_2]$ , conforme (2.20). Assim,

$$\mu(x) = \mathbf{m}x^T = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \approx 0,0268x_1 + 0,0722x_2, \text{ com } x_1 + x_2 = 1.$$

Sendo  $C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$  a matriz das covariâncias dos retornos dos ativos, temos que o risco da carteira, calculado através de (2.23), é

$$\sigma^2(x) = xCx^T = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12}.$$

Substituindo os valores de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  obtemos

$$\sigma^2(x) \approx 0,0121x_1^2 + 0,0211x_2^2 + 0,0214x_1x_2.$$

Fazendo  $x_2 = 1 - x_1$ , obtemos retorno e risco das carteiras como funções de uma variável

$$\mu(x_1) \approx -0,0454x_1 + 0,0722, \quad (3.4)$$

$$\sigma^2(x_1) \approx 0,0118x_1^2 - 0,0208x_1 + 0,0211. \quad (3.5)$$

Nosso objetivo é obter a carteira com risco mínimo, isto é, minimizar  $\sigma(x)$ . Como a função  $\sigma^2(x)$  é quadrática e seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, seu ponto de mínimo encontra-se no vértice da parábola, sendo a abscissa  $x_1 \approx \frac{-(-0,0208)}{2(0,0118)} \approx 0,8814$  e a ordenada  $\sigma^2(x_1) \approx 0,01193$ .

Substituindo o valor de  $x_1$  em (3.4), obtemos o retorno da carteira  $\mu(x) \approx 0,0322$ . O risco da carteira é o desvio padrão  $\sigma(x) \approx \sqrt{0,01193} \approx 0,1092$ .

Concluimos assim que a carteira de mínima variância é  $x = (0,8814 \ 0,1186)$ , isto é, aquela que alocar 88,14% do capital na ação 1 e 11,86% na ação 2.

Como citamos na introdução deste capítulo, a Fronteira Eficiente é obtida como parte da fronteira da região do plano risco  $\times$  retorno representada pelas carteiras viáveis. Das equações (3.4) e (3.5) obtemos

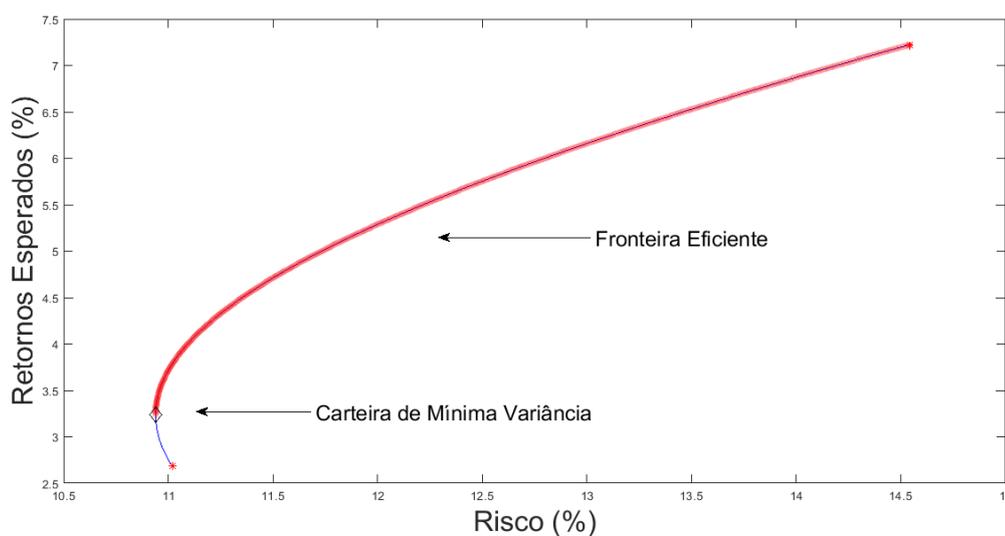
$$5,7249\mu^2 - \sigma^2 - 0,3685\mu + 0,0178 = 0,$$

representada pela hipérbole na Figura 3.1. Esta curva corresponde à fronteira da região das carteiras viáveis.

Neste exemplo, a carteira de mínima variância possui retorno esperado 3,22% e risco 10,92% e está representada na extremidade da Fronteira Eficiente conforme a Figura 3.1.

As carteiras com retorno esperado maior ou igual a 3,22% e risco mínimo formam a Fronteira Eficiente, destacada em vermelho na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Fronteira Eficiente e carteira de mínima variância.



Fonte: da autora

### 3.2 PARIDADE DE RISCO (PR)

O método da **Paridade de Risco** busca encontrar uma carteira de tal forma que o risco de cada ativo contribua igualmente no risco da carteira.

Sendo  $\sigma_i^2$  a variância do ativo  $i$  e  $\sigma_{ij}$  a covariância dos ativos  $i$  e  $j$ , lembramos que o risco total da carteira  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é dado por

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n x_i x_j \sigma_{ij}},$$

conforme a Proposição 2.3. Definimos a **contribuição marginal do risco do ativo  $i$**  como

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(x)}, \quad (3.6)$$

e sua **contribuição de risco** como

$$\sigma_i(x) = x_i \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i}. \quad (3.7)$$

Vamos mostrar que o risco total da carteira é a soma das contribuições de risco dos ativos.

**Teorema 3.2.** *Com as notações acima, para  $x \in [0, 1]^n$ , a função  $\sigma$  decompõe-se como*

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x).$$

O Teorema 3.2 foi apresentado em (Maillard; Thierry; Teiletche, 2010) e sua demonstração é uma aplicação direta do Teorema de Euler para funções homogêneas (Spivak [p.34], 1965), conforme segue.

Lembramos que dado um número inteiro  $m$ , uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **homogênea de grau  $m$**  se  $f(tx) = t^m f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Restringindo a mesma definição para  $t > 0$ , dizemos que  $f$  é **positivamente homogênea de grau  $m$** , como é o caso da função  $\sigma$  com  $m = 1$ .

**Teorema 3.3** (Euler). *Se  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positivamente homogênea de grau  $m \geq 1$  e continuamente diferenciável, então*

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \text{para todo } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

**Demonstração.** Dado  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , vamos definir a função real  $g(t) = f(tx)$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pela Regra da Cadeia, temos  $g'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ , para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Por outro lado, como  $f$  é homogênea de grau  $m$ , temos  $g(t) = t^m f(x)$  e agora  $g'(t) = mt^{m-1} f(x)$ . Portanto, o resultado segue calculando  $g'(1)$  nas duas fórmulas para a derivada de  $g$ .  $\square$

Como mencionado, a ideia da paridade de risco é buscar pesos na carteira de modo que a contribuição dos riscos dos ativos seja a mesma para todos os ativos da carteira. Assim, para  $i \neq j$ , precisamos fazer

$$\sigma_i(x) = x_i \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = x_j \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_j} = \sigma_j(x).$$

De acordo com (Maillard; Thierry; Teiletche, 2010), impor a paridade de risco para obter uma carteira equivale a resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i(x) - \sigma_j(x))^2 \\ \text{s.a } \mathbf{1}x^T = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O valor mínimo da função objetivo deve ser zero, para que as contribuições de risco sejam iguais. Assim como no Problema 3.2, a função objetivo em (3.8) é quadrática (variância das contribuições de risco) e tem restrições lineares. Portanto, cabe exatamente a mesma análise quanto a existência de solução global.

O Problema 3.8 também pode ser escrito com a função objetivo parecida com a do Problema 3.2, contudo isso implica a perda de linearidade das restrições, como apresentado em (Maillard; Thierry; Teiletche, 2010).

Como veremos no Capítulo 4, na programação linear de (3.8) usamos o *toolbox* de otimização do Matlab em particular o método *fmincon*.

O Exemplo 4 possui os mesmos dados do Exemplo 3, porém neste caso, serão obtidos os pesos da carteira conforme o método PR.

**Exemplo 4.** Sejam as mesmas ações 1 e 2 do Exemplo 3 e os mesmos retornos dos preços históricos no período de novembro de 2019 a novembro de 2020. Queremos encontrar a carteira  $x = (x_1, x_2)$  de acordo com o método PR.

Utilizaremos os mesmos resultados obtidos na Tabela 3.1, isto é,  $\sigma_1^2 = 0,0121$ ,  $\sigma_2^2 = 0,0211$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0,0107$ .

Para encontrar a carteira de acordo com o método Paridade de Risco, precisamos igualar as contribuições de risco (3.7) das duas ações, isto é, fazer

$$x_1 \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1} = x_2 \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_2}.$$

Utilizando a Equação 3.6, obtemos

$$x_1 \frac{x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_{12}}{\sigma(x)} = x_2 \frac{x_2 \sigma_2^2 + x_1 \sigma_{21}}{\sigma(x)},$$

isto é,  $x_1^2\sigma_1^2 = x_2^2\sigma_2^2$ . Fazendo  $x_2 = 1 - x_1$  e reescrevendo em função de  $x_1$ , temos

$$x_1^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 2x_1\sigma_2^2 - \sigma_2^2 = 0.$$

As raízes desta equação quadrática são  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  e  $-\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$ , sendo a primeira a única positiva. Sendo assim

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Substituindo os valores  $\sigma_1 \approx \sqrt{0,0121}$  e  $\sigma_2 \approx \sqrt{0,0211}$ , encontramos os pesos  $x_1 \approx 0,5690$  e  $x_2 = 1 - x_1 \approx 0,4310$ . Portanto, a carteira com 56,90% investido na ação 1 e 43,10% na ação 2 é a carteira que tem paridade de risco entre as ações.

Para concluir este capítulo, vamos coletar os resultados dos Exemplos 3 e 4, obtidos respectivamente através dos métodos de Mínima Variância (MV) e de Paridade de Risco (PR), juntamente com a carteira que aloca o mesmo capital para cada ação da carteira (método  $1/n$ ), isto é,  $x = (0,50 \ 0,50)$ .

Tabela 3.2 – Carteiras obtidas com os métodos  $1/n$ , MV e PR e seus respectivos retornos e riscos.

Método	Pesos das ações		Retorno Esperado	Risco
	$x_1$	$x_2$		
$1/n$	0,5000	0,5000	0,0495	0,1168
PR	0,5690	0,4310	0,0464	0,1144
MV	0,8810	0,1190	0,0322	0,1092

Fonte: da autora

## 4 METODOLOGIA

Os métodos MV e PR apresentados no Capítulo 3, assim como o método  $1/n$ , serão aplicados para o rebalanceamento das carteiras, formando assim três estratégias de investimento, para as quais manteremos a mesma nomenclatura.

Vamos considerar os pesos não negativos, entre 0 e 1, isto é, sem utilizar venda a descoberto de ações para as estratégias MV e PR. A carteira obtida pela estratégia  $1/n$  possui os pesos positivos por definição.

Para a resolução dos problemas de otimização, referentes aos métodos de Mínima Variância e Paridade de Risco, utilizamos o software MATLAB em sua versão R2015a.

Na resolução numérica do Problema 3.2 usamos o *toolbox* de otimização do MATLAB, em particular o método *quadprog* e na programação linear do Problema 3.8 usamos o *fmincon*. A programação em MATLAB encontra-se no Apêndice C.

Um aspecto prático importante é que a função objetivo do Problema 3.8, por ser uma soma de quadrados de números de magnitude pequena, em geral, assume valores pequenos. Esse fato pode fazer com que as tolerâncias dos métodos numéricos usados para resolver o problema sejam atingidas sem que a solução numérica seja suficientemente precisa. Para contornar esse tipo de situação, multiplicamos a função objetivo por um número grande. Este ajuste de escala melhora a precisão dos métodos sem afetar sua eficiência computacional.

Nesse capítulo vamos expor a montagem da carteira de ações, definir a periodicidade de análise e a forma de estimação da matriz de covariância. Estes são os aspectos principais para a comparação das estratégias.

### 4.1 MONTAGEM DA CARTEIRA

De acordo com (Oliveira; Paula, 2008), o número ideal de ações a ser mantido numa carteira é 12, levando em conta as tarifas cobradas de pessoas físicas pelas corretoras e os benefícios da diversificação.

Escolhemos 12 ações entre aquelas listadas na Bolsa de Valores que compunham o IBOVESPA em janeiro de 2019. Também, que representassem os diversos setores da economia classificados pela própria B<sup>3</sup>.

Na Tabela 4.1 estão listados as ações escolhidas.

Tabela 4.1 – Ações que fazem parte da carteira.

<b>N.</b>	<b>Ticker</b>	<b>Nome</b>	<b>Setor/Subsetor ou Segmento</b>
1	ABEV3	Ambev S.A.	Consumo não Cíclico/Bebidas
2	EQTL3	Equatorial Energia S.A.	Utilidade Pública/Energia Elétrica
3	IGTA3	Iguatemi E. S. S.A.	Financeiro/Exploração de Imóveis
4	ITUB4	Itaú Unibanco S.A.	Financeiro/Bancos
5	MGLU3	Magazine Luiza SA	Consumo Cíclico/Eletrrodomésticos
6	PETR4	PETROBRÁS S.A.	Petróleo, Gás e Biocombustíveis
7	RADL3	Raia Drogasil S.A.	Saúde/Medicamentos e Outros Produtos
8	RENT3	Localiza R.C. S.A.	Consumo Cíclico/Aluguel de Carros
9	SBSP3	SABESP S.A.	Utilidade Pública/Água e Saneamento
10	VALE3	Vale S.A.	Materiais Básicos/Mineração
11	VIVT4	Telefônica Brasil S.A.	Comunicações/Telecomunicações
12	WEGE3	WEG S.A.	Bens Industriais/Máquinas e Equipamentos

Fonte: da autora

## 4.2 DADOS E PERIODICIDADE

Foram coletados do site ([br.investing.com](http://br.investing.com)) os preços históricos das ações acima listadas, cotações do Tesouro SELIC 2021 e do IBOVESPA, entre 28 de dezembro de 2017 a 28 de agosto de 2020. Trata-se de uma base aberta e gratuita de dados. Portanto, é acessível ao público em geral. Esta escolha está alinhada à abordagem proposta neste trabalho. A partir desses preços coletados, de acordo com a Equação 2.10, foram calculados os retornos nesse período de 139 semanas. Os dados completos encontram-se no Apêndice A.

A periodicidade escolhida foi semanal. Isto vale tanto para o cálculo dos retornos, construção das matrizes de covariância, rebalanceamento das carteiras e para exposição de resultados. Acreditamos que o rebalanceamento semanal permite capturar a possível necessidade de atualização mais frequente de carteiras de investimentos em períodos de crise, além de ser adequada ao investidor não profissional.

## 4.3 MATRIZ DE COVARIÂNCIA

Um objeto central para o cálculo do risco nos métodos discutidos é a matriz de covariância. Diferentes formas de estimação dessa matriz foram estudadas em (Souza *et al.*, 2017) e não apresentaram grandes variações no aspecto da redução de risco.

As matrizes de covariância que consideramos são construídas calculando a covariância, conforme a Equação 2.5, entre os retornos semanais dos ativos nas 52 semanas anteriores ao rebalanceamento das carteiras e é atualizada semanalmente. Analisamos 87 semanas. A primeira delas é a primeira semana de janeiro de 2019. A semana 87 corresponde à última semana de agosto de 2020.

Observe que dessa forma usamos apenas dados do "passado", para no "presente" fazer o ajuste da carteira. Ou seja, não estamos usando informação que não estivesse disponível até o respectivo momento do ajuste (*out-of-sample*).

Como as matrizes de covariância são semi definidas positivas, seus autovalores são não negativos. Em particular, a escolha das ações dos diversos setores da economia, apresentada na Tabela 4.1, favorece que a matriz de covariância tenha autovalores maiores e seja melhor condicionada.

Uma vez calculados os pesos da carteira de acordo com cada método, calcula-se o retorno real dessa carteira utilizando os retornos reais das ações na semana. Por exemplo, para calcular os pesos da primeira carteira usamos dados das semanas 1 até 52. Na semana 53 verifica-se o retorno real de cada ação para calcular o retorno real dessa carteira. Para o cálculo do retorno da próxima carteira, utilizamos os dados da semana 2 até a semana 53 e verifica-se o retorno real na semana 54 e assim por diante.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos e discutimos os resultados das estratégias de gestão descritas previamente.

Destacamos as semanas de 61 a 64 na Tabela 5.1. Elas correspondem ao período de 23 de fevereiro a 20 de março de 2020, que foi o período de maior impacto da crise causada pela pandemia de COVID-19. Na Tabela 5.1 são apresentados os retornos e os riscos das estratégias. Os retornos das carteiras obtidos com as estratégias e retorno do IBOVESPA nas semanas 1 a 54 e 71 a 87 encontram-se no Apêndice B.

Notamos que a menor exposição ao risco da estratégia MV resultou em uma menor queda nos retornos em comparação com as estratégias  $1/n$  e PR.

Tabela 5.1 – Retornos e riscos obtidos pelas três estratégias

Semana	Retornos				Riscos		
	EW	MV	PR	IBOV	EW	MV	PR
55	3,34	3,87	3,55	2,58	2,17	1,58	1,96
56	1,80	0,36	1,35	-0,09	2,20	1,64	2,01
57	-2,43	-2,67	-2,58	-3,90	2,20	1,64	2,01
58	0,92	0,97	0,98	0,01	2,24	1,70	2,06
59	1,79	-0,46	1,26	0,54	2,18	1,60	1,98
60	0,62	-0,93	0,21	-0,61	2,19	1,61	1,98
61	-8,81	-6,82	-8,44	-8,37	2,18	1,62	1,99
62	-2,04	2,47	-1,14	-5,93	2,52	1,86	2,32
63	-15,71	-11,10	-14,59	-15,63	2,55	1,87	2,32
64	-15,21	-4,17	-13,25	-18,88	3,39	2,23	3,00
65	8,99	-4,11	5,03	9,48	3,97	2,25	3,32
66	-7,27	-1,03	-5,53	-5,30	4,15	2,30	3,28
67	12,67	4,31	9,59	11,71	4,28	2,25	3,28
68	0,77	-2,66	-0,77	1,68	4,58	2,27	3,41
69	-1,98	-3,01	-2,72	-4,63	4,57	2,30	3,42
70	4,10	0,83	3,00	6,87	4,56	2,33	3,47

Fonte: da autora

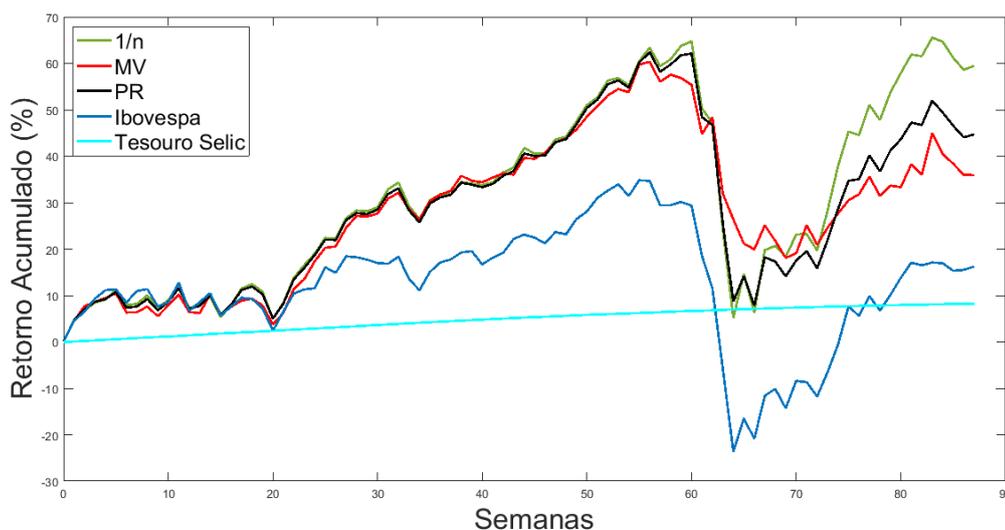
Na Figura 5.1 são apresentados os retornos acumulados das estratégias ao longo das 87 semanas. Destacamos que no período anterior à crise, todas as estratégias têm retornos próximos e que gradualmente superam o IBOVESPA.

Naturalmente, nas semanas mais críticas da crise, os retornos das três estratégias e o do IBOVESPA caem muito. Considerando o período do início da crise até a semana 87, o IBOVESPA tem o piso do retorno acumulado em  $-23,7\%$ . Já para as estratégias  $1/n$  e PR os pisos foram  $5,2\%$  e  $7,8\%$ , respectivamente. A estratégia MV conseguiu amortecer melhor a

queda causada pela crise e teve como piso do retorno acumulado de 19,8%.

No período posterior às semanas mais críticas, as estratégias  $1/n$  e PR demonstram maiores retornos, superando a estratégia MV em retornos acumulados. Contudo, lembramos que a estratégia MV tem como único objetivo minimizar riscos e não impõe qualquer objetivo de performance quanto às taxas de retorno.

Figura 5.1 – Percentual dos retornos acumulados das estratégias, IBOVESPA e Tesouro SELIC.

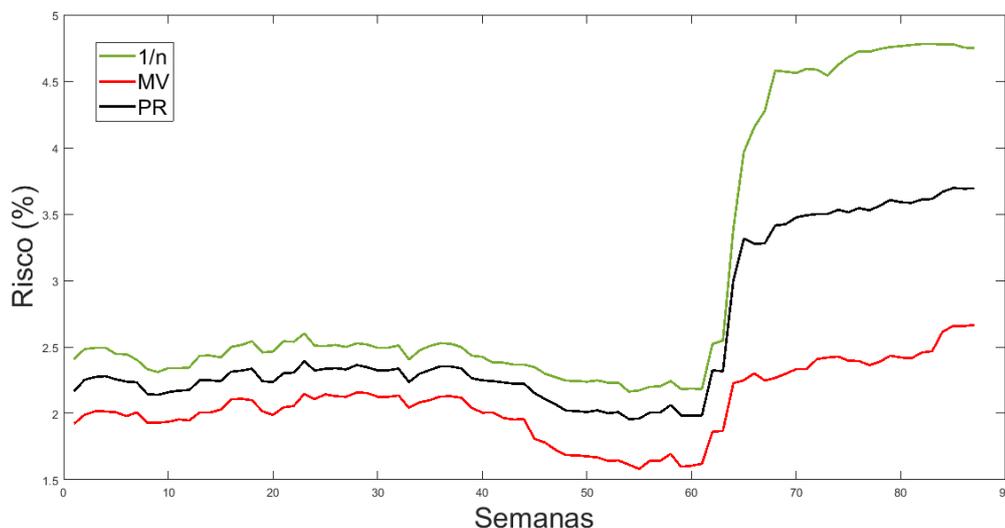


Fonte: da autora

O risco estimado de cada estratégia é apresentado na Figura 5.2. Observamos que os riscos estão de acordo com a teoria (Maillard; Thierry; Teiletche [Apêndice A.3], 2010), que prevê que o risco da estratégia MV é menor ou igual que o da PR, que por sua vez é menor ou igual que o risco da  $1/n$ . O risco da estratégia MV foi, em média, 88% do risco da estratégia PR e 81% do risco da estratégia  $1/n$  no período anterior a crise, até a semana 60.

A partir da semana 61, o risco da estratégia MV passa para 70% do risco da estratégia PR e 55% da estratégia  $1/n$ . Devido à crise, o risco aumenta em todas as estratégias. Porém, relativamente à estratégia PR, o risco da estratégia MV diminui. Em relação à estratégia  $1/n$ , o risco da estratégia MV aumenta pouco.

Figura 5.2 – Percentual dos riscos das estratégias.



Fonte: da autora

Os resultados apresentaram os comportamentos que esperávamos das estratégias. Em particular, a estratégia MV conseguiu reduzir muito o risco e amortecer as quedas causadas pela crise, em comparação com as demais estratégias.

No período mais crítico da crise, as estratégias MV e PR identificaram os mesmos ativos como sendo os de menor risco e aumentaram os pesos dos mesmos.

Na semana 64, a carteira correspondente à estratégia MV dividiu o capital em apenas 4 das 12 ações que fazem parte da carteira, obtendo assim uma carteira pouco diversificada.

Por outro lado, a estratégia PR mantém maior diversificação dos investimentos, mesmo durante a crise, como podemos ver na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Carteiras obtidas com as estratégias MV e PR nas principais semanas da crise.

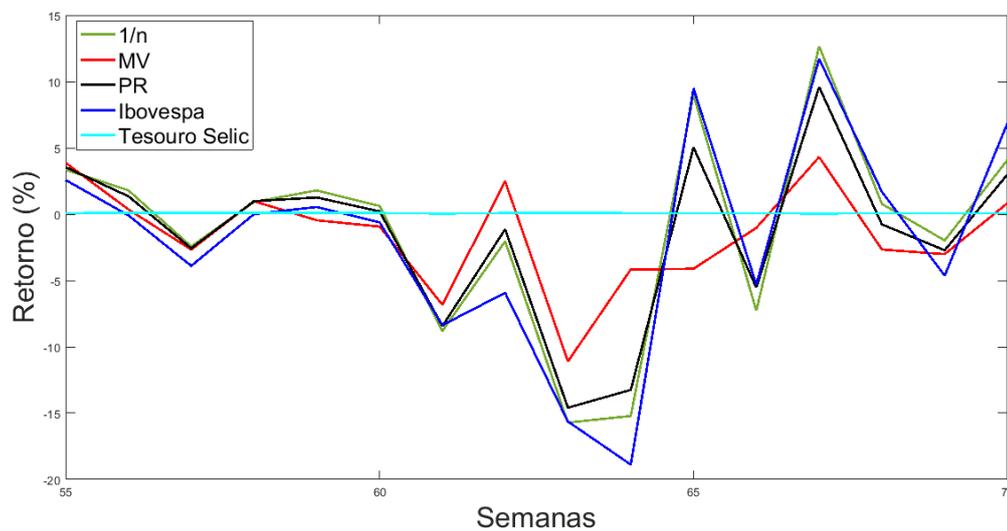
	t	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
MV	61	5,67	23,41	0,00	0,07	0,00	0,00	16,66	3,10	0,00	17,23	33,87	0,00
	62	1,74	23,66	0,00	10,14	0,00	0,00	16,70	0,01	0,00	7,47	40,28	0,00
	63	0,07	22,99	0,00	12,39	0,00	0,00	17,24	1,83	0,00	8,43	37,03	0,00
	64	0,00	0,00	0,00	13,01	0,00	0,00	12,95	0,00	0,00	18,01	56,03	0,00
PR	61	8,32	10,66	5,98	7,46	5,52	6,93	9,42	7,86	5,11	12,36	13,59	6,81
	62	8,35	10,75	6,24	9,70	5,59	6,51	9,75	7,77	5,39	10,10	13,56	6,30
	63	8,56	10,73	6,15	9,42	5,38	6,24	9,98	7,41	5,32	10,30	14,20	6,30
	64	7,78	8,07	5,61	9,60	6,90	4,84	8,76	6,54	6,55	13,67	15,98	5,70

Fonte: da autora

Na Figura 5.3 destacamos os retornos obtidos pelas carteiras nas semanas de 55 a 70.

Entre as semanas 60 e 65 notamos que a estratégia MV apresentou a menor perda e as outras duas também ficaram melhores que o IBOVESPA.

Figura 5.3 – Percentual dos retornos obtidos pelas estratégias, IBOVESPA e Tesouro SELIC durante as semanas de crise.



Fonte: da autora

## 6 CONCLUSÃO

Apresentamos os métodos de Mínima Variância e de Paridade de Risco e os aplicamos em estratégias de gestão de carteiras de investimento, com ajuste semanal. Além da aplicação prática dos métodos, também detalhamos os aspectos matemáticos dos mesmos.

Aplicamos as estratégias em um período que inclui a crise causada pela COVID-19 e assim pudemos testar o desempenho das estratégias diante de grandes instabilidades para os investimentos. Os experimentos foram da forma *out-of-sample* no sentido que não foram utilizados dados que não eram conhecidos até a época em que os ajustes foram aplicados. Os experimentos são reproduzíveis, pois usamos dados abertos e descrevemos os detalhes.

Os resultados do método de Mínima Variância foram bastante positivos na propriedade para a qual ele foi desenvolvido, redução de risco. Assim como discutido nos resultados, a redução de risco converteu-se em menor queda nos retornos frente a momentos de grandes quedas.

Embora o retorno da estratégia MV esteja abaixo das demais ao fim do período, isso não contradiz os resultados positivos da estratégia, pois nela não há qualquer comprometimento com desempenho dos retornos. O método de Média Variância oferece a possibilidade de gestão risco  $\times$  retorno.

O comportamento de menor variância apresentado pela estratégia MV é vantajoso pois permite tomadas de decisão com maior perspectiva sobre a crise que se enfrenta. Por exemplo, uma venda de ativos em uma grande baixa, devido a sensação de que haverá mais quedas, pode ser uma realização de prejuízos desnecessária.

A estratégia PR é intermediária quanto a gestão de risco, quando comparada com a MV e  $1/n$ . Ela tem sido usada recentemente por alguns fundos de investimentos, por sua gestão de risco que preserva a diversificação, ao contrário da MV.

Um aspecto importante do trabalho é sua aplicabilidade por investidores que não dispõem de dados e suporte especializados. Mesmo para uma aplicação parcial, as estratégias apresentadas permitem ao investidor gerir sua carteira com maior consciência dos riscos. Também, a aplicação considerando o mercado de ações nacional aproxima os métodos da prática dos investidores no Brasil.

Apresentamos dois exemplos acessíveis ao nível de ensino médio. Neles mostramos como obter os pesos das carteiras de acordo com os métodos estudados utilizando funções quadráticas, matrizes e conceitos estatísticos. Estes exemplos podem ser ferramentas didáticas para o ensino desses conceitos. Futuros estudos poderão explorar mais a possibilidade de ensino de Teoria das Carteiras para jovens estudantes.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, D. P. **A Estatística como Auxílio na Seleção de Carteiras de Investimentos**: Uma aplicação por meio do modelo de markowitz. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2020. PROFMAT.
- BLUM, E.; OETTLI, W. Technical note – direct proof of the existence theorem for quadratic programming. **Operations Research**, v. 20, n. 1, p. 165–167, 1972.
- BORTOLUZZO, M. M. et al. Comparação do desempenho de carteiras utilizando os métodos paridade de risco, mínima variância e equal weighting: um estudo no mercado brasileiro em períodos pré, durante e pós a crise de 2008. **Revista Evidenciação Contábil & Finanças**, v. 6, n. 3, p. 36–53, 2018.
- CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**. London: Springer-Verlag London Limited, 2003.
- DARIO, R. et al. Estratégias de gestão de carteiras de investimentos no mercado brasileiro - *preprint*. 2021.
- DARIO, R. et al. Estratégias de gestão de risco de investimentos durante a pandemia de covid-19 - *preprint*. 2021.
- FORSYTH, D. **Probability and Statistics for Computer Science**. USA: Springer, 2018.
- FRANK, M.; WOLFE, P. An algorithm for quadratic programming. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 3, p. 95–110, 1956.
- KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S.l.]: Jonh Wiley & Sons Inc, 1978.
- KRULIKOVSKI, E. H. M. **Análise Teórica de Máquinas de Vetores Suporte e Aplicação a Classificação de Caracteres**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Master thesis.
- MAILLARD, S.; THIERRY, R.; TEILETCHE, J. On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, v. 36, n. 4, p. 60–70, 2010.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- MIRANDA, P. de. **Estratégias de Gestão de Carteiras de Investimentos no Mercado Brasileiro**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. PROFMAT.
- MORETTIN, P.; BUSSAB, W. **Estatística Básica**. Brasil: Editora Saraiva, 2010.
- NETO, A. A. **Mercado Financeiro**. São Paulo: Editora Atlas S A, 2014.
- OLIVEIRA, F. N.; PAULA, E. L. Determinando o grau ótimo de diversificação para investidores usuários de home brokers. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 6, n. 3, p. 437–461, 2008.
- ROSS, S. et al. **Administração Financeira**. Brasil: Editora AMGH Ltda, 2015.

SOUZA, P. O. et al. Risk parity in the brazilian market. **Economics Bulletin**, v. 37, n. 3, p. 1555–1566, 2017.

SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

WANG, S.; XIA, Y. **Portfolio Selection and Asset Pricing**. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – RETORNOS SEMANAIS

Tabela A.1 – Retornos semanais das ações e do Ibovespa

Começo da Tabela

Data	ABEV	EQTL	IGTA	ITUB	MGLU	PETR	RADL	RENT	SBSP	VALE	VIVT	WEGE	IBOV
31.12.17	-0,006	0,002	0,031	0,063	-0,020	0,045	-0,015	-0,009	-0,018	0,050	-0,015	-0,004	0,035
07.01.18	-0,005	0,019	-0,014	0,002	-0,013	0,028	-0,044	-0,012	0,005	0,030	0,015	0,044	0,004
14.01.18	0,019	-0,002	0,018	0,038	-0,010	0,055	-0,014	0,053	0,045	-0,015	-0,020	0,013	0,024
21.01.18	-0,005	0,021	0,066	0,129	0,079	0,091	0,005	0,044	0,022	-0,034	0,073	-0,034	0,053
28.01.18	0,009	0,017	-0,022	-0,024	0,013	0,002	-0,049	0,014	-0,022	-0,015	0,010	-0,090	-0,017
04.02.18	-0,024	-0,008	-0,083	-0,027	-0,119	-0,060	-0,021	-0,059	-0,059	0,029	-0,036	-0,037	-0,037
11.02.18	0,044	0,020	0,029	0,052	0,064	0,034	0,026	0,036	0,071	0,096	0,029	0,043	0,045
18.02.18	-0,020	0,008	0,010	0,043	0,106	0,087	-0,014	0,058	0,052	0,001	-0,014	0,043	0,033
25.02.18	0,027	0,021	-0,013	-0,030	0,068	0,019	-0,022	-0,012	0,004	-0,051	-0,013	-0,029	-0,018
04.03.18	0,038	-0,007	-0,004	0,016	-0,024	0,041	0,009	0,137	0,010	-0,027	0,007	-0,003	0,007
11.03.18	0,007	-0,039	-0,016	-0,019	0,022	-0,043	-0,042	-0,058	0,007	0,005	-0,050	0,009	-0,017
18.03.18	0,013	0,035	0,010	-0,021	0,023	0,015	-0,015	0,004	-0,009	-0,017	-0,014	-0,008	-0,006
25.03.18	0,006	0,003	-0,009	0,023	0,032	-0,016	-0,005	0,035	-0,079	0,015	0,036	-0,015	0,012
01.04.18	-0,034	-0,001	-0,058	-0,001	0,002	-0,006	-0,092	0,010	-0,025	0,012	0,004	-0,037	-0,006
08.04.18	0,000	-0,004	-0,004	-0,016	0,001	-0,003	0,027	0,017	0,001	0,052	-0,023	0,013	-0,006
15.04.18	0,007	-0,030	-0,011	0,009	-0,011	0,055	-0,022	-0,007	0,004	0,059	0,017	0,039	0,014
22.04.18	-0,011	0,031	0,005	0,012	0,087	0,016	0,019	-0,040	0,041	0,015	0,017	0,018	0,010
29.04.18	-0,029	-0,019	-0,060	-0,084	-0,072	-0,020	-0,093	-0,056	-0,024	0,028	-0,042	-0,041	-0,038
06.05.18	-0,029	-0,052	-0,005	0,019	0,112	0,143	0,105	-0,020	-0,147	0,059	-0,013	0,035	0,025
13.05.18	-0,056	-0,051	-0,051	-0,060	-0,033	0,008	-0,048	-0,033	-0,087	0,041	-0,030	0,028	-0,025
20.05.18	-0,023	-0,017	0,015	-0,005	0,066	-0,227	-0,066	-0,014	-0,006	-0,060	0,003	0,022	-0,050
27.05.18	-0,010	0,022	0,009	-0,025	0,031	-0,184	0,047	0,049	-0,027	0,025	-0,006	-0,088	-0,021
03.06.18	-0,049	-0,058	-0,044	-0,061	-0,087	-0,056	0,007	-0,077	-0,055	-0,035	-0,005	-0,032	-0,056
10.06.18	-0,013	0,013	-0,053	-0,065	0,136	-0,018	0,059	-0,057	-0,045	-0,035	0,022	-0,044	-0,030
17.06.18	-0,021	-0,038	0,006	0,023	0,025	0,009	-0,019	0,008	-0,010	-0,023	-0,016	-0,022	-0,002
24.06.18	-0,010	-0,004	0,035	0,025	0,042	0,138	-0,019	0,043	0,021	0,033	0,005	0,052	0,030
01.07.18	0,006	0,044	0,039	0,044	-0,049	0,044	0,015	-0,038	0,043	0,015	-0,017	0,008	0,031
08.07.18	0,020	-0,038	0,046	0,052	0,033	0,009	0,109	0,040	-0,015	-0,001	-0,009	0,050	0,021
15.07.18	0,019	0,028	0,006	0,046	0,042	0,065	0,044	0,066	0,041	-0,031	0,000	0,087	0,026
22.07.18	0,054	0,050	-0,009	0,001	-0,009	0,025	-0,039	-0,019	0,025	0,097	-0,046	-0,006	0,016
29.07.18	-0,025	-0,001	0,032	0,011	0,055	0,068	0,030	0,001	0,028	0,012	-0,017	-0,017	0,020
05.08.18	-0,021	-0,061	-0,101	-0,076	0,015	-0,072	-0,009	-0,065	-0,047	-0,016	-0,026	-0,045	-0,060
12.08.18	0,014	0,017	-0,014	-0,006	-0,039	-0,055	-0,010	-0,038	0,006	-0,018	-0,009	0,010	-0,006
19.08.18	-0,005	-0,024	-0,001	-0,014	-0,012	-0,008	0,072	-0,019	-0,014	0,066	0,011	0,011	0,003
26.08.18	-0,012	-0,004	0,003	0,016	-0,013	0,052	-0,052	-0,018	-0,016	-0,010	-0,014	0,082	0,005
02.09.18	-0,028	0,035	-0,019	0,008	-0,039	-0,014	-0,036	0,016	0,004	-0,003	0,024	0,018	-0,003
09.09.18	-0,005	-0,043	-0,032	-0,011	-0,073	-0,010	0,037	-0,033	-0,037	0,032	-0,024	-0,015	-0,013
16.09.18	0,034	0,065	0,023	0,041	0,069	0,072	0,010	0,115	0,042	0,105	0,016	0,013	0,053
23.09.18	-0,027	-0,045	0,044	0,007	-0,012	0,047	-0,066	-0,032	-0,041	-0,020	0,008	0,017	-0,001
30.09.18	-0,038	0,024	0,043	0,071	0,159	0,136	0,004	0,061	0,117	-0,039	-0,001	-0,033	0,038
07.10.18	-0,037	0,000	0,076	0,005	0,061	0,055	-0,072	-0,002	0,032	-0,018	-0,022	-0,035	0,007
14.10.18	-0,007	0,067	0,050	0,009	0,122	0,025	-0,017	0,059	0,027	0,001	-0,012	0,009	0,016
21.10.18	-0,099	0,040	0,024	0,022	-0,013	0,065	-0,005	0,043	-0,004	-0,016	0,004	-0,028	0,018
28.10.18	0,078	0,052	0,035	0,020	0,018	-0,010	-0,043	0,085	0,008	0,034	0,181	0,007	0,031
04.11.18	-0,018	0,008	-0,052	0,017	-0,138	-0,068	0,045	-0,066	-0,034	-0,050	-0,030	0,022	-0,031
11.11.18	0,026	0,033	0,071	0,039	0,069	0,013	0,004	0,029	0,033	0,027	0,055	-0,003	0,034
18.11.18	-0,018	0,013	-0,006	-0,017	0,037	-0,051	-0,053	0,006	-0,010	-0,103	-0,005	-0,047	-0,026
25.11.18	0,044	0,002	-0,002	0,042	0,014	0,045	-0,009	-0,036	0,020	0,049	0,007	0,008	0,038
02.12.18	-0,048	-0,031	-0,011	-0,012	-0,002	-0,027	-0,011	0,006	0,021	-0,029	0,016	-0,007	-0,016
09.12.18	-0,003	0,022	0,018	-0,001	0,038	-0,070	0,019	0,045	0,063	-0,008	0,037	-0,019	-0,008
16.12.18	-0,036	-0,020	-0,010	-0,029	0,071	-0,065	-0,054	0,026	-0,004	0,000	-0,014	-0,001	-0,020

Continuação da Tabela A.1

Data	ABEV	EQTL	IGTA	ITUB	MGLU	PETR	RADL	RENT	SBSP	VALE	VIVT	WEGE	IBOV
23.12.18	0,014	0,057	0,067	0,029	-0,009	0,088	-0,033	0,028	0,032	0,003	-0,017	0,015	0,026
30.12.18	0,076	0,046	0,004	0,042	-0,011	0,090	0,004	0,010	0,202	0,023	0,028	0,060	0,045
06.01.19	0,045	0,043	-0,040	0,017	-0,005	0,011	0,115	-0,019	0,043	0,004	0,006	0,005	0,020
13.01.19	0,041	0,018	0,026	0,002	-0,019	0,016	-0,010	0,058	0,030	0,045	-0,015	0,001	0,026
20.01.19	-0,047	0,014	0,017	-0,004	-0,038	0,006	-0,017	0,033	0,062	0,025	0,014	0,007	0,016
27.01.19	0,056	0,051	0,066	0,035	0,067	0,010	0,003	0,018	0,024	-0,176	0,030	0,043	0,002
03.02.19	0,006	-0,038	-0,010	-0,039	-0,049	-0,026	-0,036	0,015	-0,046	-0,067	-0,029	-0,032	-0,026
10.02.19	0,015	-0,010	-0,015	0,005	-0,036	0,068	-0,028	0,027	-0,060	0,063	0,007	-0,005	0,023
17.02.19	-0,009	0,004	-0,004	0,026	0,085	0,011	0,014	0,014	0,024	0,024	0,004	0,008	0,004
24.02.19	-0,081	-0,022	-0,044	-0,049	-0,015	-0,016	0,076	-0,031	-0,030	-0,005	-0,038	-0,033	-0,034
03.03.19	-0,014	0,001	0,009	0,026	0,032	-0,001	0,046	0,007	-0,005	0,045	0,009	0,025	0,008
10.03.19	0,010	-0,002	0,005	0,029	-0,020	0,059	0,028	0,016	0,116	0,035	0,038	0,024	0,040
17.03.19	-0,002	-0,031	-0,073	-0,088	-0,022	-0,045	-0,033	-0,063	-0,083	-0,010	-0,012	-0,054	-0,054
24.03.19	0,007	0,003	-0,012	0,026	-0,002	0,039	-0,014	0,029	0,021	0,018	-0,004	-0,009	0,018
31.03.19	0,036	0,035	0,002	0,004	-0,017	0,026	0,054	-0,036	-0,038	0,021	0,045	0,059	0,018
07.04.19	-0,022	-0,049	-0,071	-0,046	-0,030	-0,103	-0,041	-0,004	-0,039	-0,010	-0,033	-0,043	-0,044
14.04.19	0,001	0,015	0,033	-0,004	0,039	0,065	-0,014	0,032	0,064	0,021	0,014	0,021	0,018
21.04.19	0,071	0,011	0,026	0,029	0,047	-0,012	0,041	0,095	0,122	-0,041	-0,012	0,024	0,018
28.04.19	-0,020	0,003	0,014	-0,002	0,097	-0,015	0,022	-0,001	0,032	0,000	-0,008	-0,022	-0,002
05.05.19	-0,034	0,011	0,001	-0,039	-0,050	-0,006	-0,017	0,025	-0,019	-0,019	-0,013	-0,012	-0,018
12.05.19	-0,047	-0,018	-0,071	-0,028	-0,095	-0,075	-0,063	-0,051	-0,124	-0,035	-0,008	-0,016	-0,045
19.05.19	0,034	0,021	0,057	0,049	0,048	0,061	0,026	0,043	0,006	0,012	0,030	0,003	0,040
26.05.19	0,029	0,060	0,063	0,059	0,109	-0,021	0,058	0,046	0,095	0,014	0,037	0,047	0,036
02.06.19	0,004	0,023	0,041	0,002	0,012	0,047	0,031	0,020	0,078	-0,007	0,030	0,008	0,008
09.06.19	0,002	0,015	0,049	-0,031	0,066	0,011	0,039	0,015	-0,021	0,056	0,016	0,038	0,002
16.06.19	0,046	0,020	0,030	0,064	0,005	0,045	0,002	0,039	0,002	0,020	-0,008	0,075	0,041
23.06.19	-0,031	0,007	0,021	0,002	-0,007	-0,031	0,024	0,004	0,011	-0,012	0,001	-0,003	-0,010
30.06.19	0,062	0,027	0,034	0,032	0,071	0,000	0,069	0,046	0,036	-0,028	0,028	0,051	0,031
07.07.19	-0,042	0,022	0,029	-0,025	0,027	0,033	-0,015	-0,015	0,059	0,029	0,027	0,031	-0,002
14.07.19	-0,006	-0,022	-0,018	-0,002	0,026	-0,038	-0,033	0,015	0,022	0,018	0,032	-0,013	-0,004
21.07.19	0,094	-0,027	-0,025	0,012	0,059	-0,047	0,065	0,009	-0,008	-0,047	-0,029	0,025	-0,006
28.07.19	0,035	0,033	0,033	-0,052	0,125	0,014	0,067	0,057	0,063	-0,048	0,011	0,020	-0,001
04.08.19	-0,021	0,028	0,002	0,051	0,066	-0,009	0,045	-0,024	0,030	-0,049	-0,008	0,019	0,013
11.08.19	-0,058	-0,005	-0,052	-0,043	-0,006	-0,083	-0,038	0,009	-0,088	-0,040	0,010	-0,057	-0,040
18.08.19	-0,030	-0,023	-0,013	-0,035	-0,101	0,015	0,003	-0,027	-0,001	-0,009	-0,013	-0,026	-0,021
25.08.19	0,021	0,010	0,015	0,024	0,074	0,050	0,034	0,075	-0,014	0,053	0,028	0,013	0,035
01.09.19	0,000	0,018	-0,002	0,037	-0,008	0,040	-0,013	-0,004	-0,002	0,019	0,018	0,015	0,018
08.09.19	0,020	0,027	-0,027	0,020	-0,053	0,014	0,020	-0,062	-0,008	0,072	-0,052	0,038	0,005
15.09.19	0,015	0,020	0,083	-0,031	0,072	0,004	0,011	0,049	-0,042	-0,028	0,052	0,029	0,013
22.09.19	0,003	-0,024	-0,030	0,022	0,007	0,024	0,029	-0,039	-0,011	-0,016	0,008	-0,009	0,002
29.09.19	-0,012	0,007	0,006	-0,058	0,054	-0,042	0,056	-0,007	0,043	-0,022	-0,027	-0,022	-0,024
06.10.19	-0,033	0,008	-0,027	0,013	0,046	0,022	-0,005	-0,013	-0,002	0,044	-0,001	0,003	0,012
13.10.19	0,005	-0,008	0,025	0,011	0,062	0,013	0,026	0,038	0,016	-0,054	0,026	0,029	0,009
20.10.19	-0,057	-0,028	0,000	0,075	-0,023	0,060	0,033	-0,070	0,027	0,055	-0,023	0,043	0,025
27.10.19	-0,015	0,038	0,041	-0,012	0,124	0,040	0,055	0,037	0,049	-0,002	-0,005	0,019	0,008
03.11.19	-0,002	-0,010	-0,039	-0,002	-0,072	-0,014	-0,014	-0,040	-0,024	0,015	0,012	0,091	-0,005
10.11.19	0,008	0,041	-0,013	-0,016	0,010	-0,017	0,006	0,005	-0,037	-0,044	0,017	0,036	-0,010
17.11.19	0,042	-0,012	0,018	0,001	0,028	0,009	0,014	0,060	0,062	0,037	0,009	-0,007	0,020
24.11.19	-0,007	0,000	0,003	-0,026	-0,010	-0,028	-0,007	0,017	0,042	-0,001	0,015	0,047	-0,004
01.12.19	0,022	0,055	0,043	0,030	0,008	0,041	-0,071	0,015	0,018	0,027	0,011	0,076	0,027
08.12.19	0,030	0,041	0,011	0,014	0,081	-0,012	0,021	0,025	-0,001	0,047	-0,009	0,040	0,013
15.12.19	0,021	-0,015	0,032	0,005	-0,010	0,009	0,002	0,023	0,022	0,019	0,027	-0,005	0,023
22.12.19	0,013	0,018	0,032	0,022	0,003	0,022	0,025	0,053	0,036	0,004	0,011	0,044	0,012
29.12.19	-0,012	0,024	0,025	0,009	0,004	-0,002	0,021	0,020	-0,038	0,006	0,001	-0,016	0,010
05.01.20	-0,002	0,027	0,003	-0,081	0,060	-0,006	-0,022	-0,022	-0,035	-0,011	-0,007	-0,023	-0,019
12.01.20	-0,010	0,026	0,014	0,010	0,049	-0,014	0,054	0,034	0,048	0,068	0,040	0,082	0,026
19.01.20	0,016	-0,003	-0,015	-0,020	0,033	-0,018	0,072	0,039	0,039	-0,056	0,005	0,126	-0,001
26.01.20	-0,060	-0,024	-0,029	-0,041	-0,006	-0,029	0,002	0,043	-0,024	-0,066	-0,009	-0,049	-0,039

Continuação da Tabela A.1

Data	ABEV	EQTL	IGTA	ITUB	MGLU	PETR	RADL	RENT	SBSP	VALE	VIVT	WEGE	IBOV
02.02.20	-0,052	0,056	0,009	0,027	-0,028	0,017	-0,030	-0,013	0,039	0,036	0,007	0,043	0,000
09.02.20	-0,030	0,031	0,021	0,003	0,039	0,017	0,014	0,039	0,017	-0,021	-0,023	0,109	0,005
16.02.20	-0,010	0,015	0,019	-0,004	0,002	-0,010	0,004	-0,011	0,019	-0,017	-0,027	0,093	-0,006
23.02.20	-0,105	-0,064	-0,106	-0,021	-0,105	-0,130	-0,023	-0,089	-0,105	-0,116	-0,061	-0,131	-0,084
01.03.20	0,054	0,010	-0,038	-0,066	-0,103	-0,099	0,027	-0,091	-0,023	0,007	0,057	0,020	-0,059
08.03.20	-0,171	-0,185	-0,227	-0,123	-0,074	-0,325	-0,147	-0,201	-0,123	-0,038	-0,056	-0,216	-0,156
15.03.20	-0,051	-0,149	-0,244	-0,159	-0,270	-0,221	0,070	-0,233	-0,330	-0,180	0,004	-0,063	-0,189
22.03.20	0,037	-0,042	0,240	0,042	0,272	0,108	-0,046	0,137	0,189	0,140	-0,091	0,093	0,095
29.03.20	-0,088	-0,040	-0,170	-0,100	-0,089	0,153	-0,113	-0,256	-0,147	0,010	0,037	-0,070	-0,053
05.04.20	0,062	0,154	0,066	0,138	0,172	0,096	0,073	0,293	0,222	0,069	0,010	0,164	0,117
12.04.20	-0,041	0,037	0,026	-0,012	0,071	-0,041	0,019	0,062	0,009	0,017	-0,058	0,004	0,017
19.04.20	-0,042	-0,056	0,027	-0,101	0,063	-0,011	0,006	0,030	-0,104	-0,005	-0,049	0,007	-0,046
26.04.20	0,021	0,022	0,018	0,091	0,049	0,132	0,002	0,037	0,061	0,025	0,003	0,032	0,069
03.05.20	0,062	-0,040	-0,128	-0,019	0,118	0,024	-0,001	-0,133	0,023	0,089	0,056	-0,043	-0,003
10.05.20	-0,033	0,000	-0,009	-0,031	-0,007	-0,072	-0,018	0,019	-0,078	-0,016	-0,048	-0,048	-0,034
17.05.20	0,009	0,024	0,150	0,062	0,046	0,089	0,027	0,198	0,169	0,046	0,023	0,023	0,060
24.05.20	0,063	0,112	-0,004	0,003	0,116	0,089	0,037	0,063	0,230	0,054	0,004	0,123	0,064
31.05.20	0,126	0,025	0,147	0,184	-0,076	0,087	0,014	0,061	-0,024	0,030	0,013	0,060	0,083
07.06.20	-0,034	0,051	-0,043	-0,044	0,076	-0,068	-0,024	-0,013	0,018	-0,022	0,043	-0,002	-0,019
14.06.20	0,020	0,025	0,006	0,078	0,116	0,042	0,055	0,040	0,069	0,033	0,011	0,044	0,041
21.06.20	0,008	0,015	-0,081	-0,085	-0,029	-0,029	-0,050	-0,039	-0,024	0,008	-0,037	0,082	-0,028
28.06.20	0,014	0,078	0,041	0,032	0,038	0,055	0,056	0,061	0,028	-0,006	0,006	0,080	0,031
05.07.20	0,050	0,008	0,060	0,026	0,114	0,024	-0,035	0,020	0,015	0,031	0,000	0,013	0,034
12.07.20	-0,046	0,015	-0,025	0,001	0,023	0,010	0,018	0,055	0,088	0,071	0,032	0,062	0,029
19.07.20	0,054	-0,007	-0,055	-0,028	-0,028	0,000	0,014	-0,027	-0,037	-0,040	-0,022	0,148	-0,005
26.07.20	-0,069	0,036	-0,004	0,016	0,014	-0,023	0,087	0,139	-0,011	0,036	0,069	0,010	0,005
02.08.20	-0,042	-0,034	0,069	-0,052	0,061	0,027	-0,041	-0,002	-0,022	-0,004	-0,039	0,016	-0,001
09.08.20	-0,004	-0,026	-0,030	-0,029	-0,045	-0,005	-0,051	-0,024	-0,052	0,015	-0,010	0,011	-0,014
16.08.20	-0,022	-0,024	-0,018	-0,026	0,068	-0,005	-0,049	-0,012	-0,080	0,014	-0,016	-0,023	0,002
23.08.20	-0,017	0,027	-0,015	0,015	0,083	-0,001	0,001	0,021	-0,033	-0,018	0,005	-0,006	0,006

Fim da Tabela A.1

## APÊNDICE B – RETORNOS DAS CARTEIRAS × IBOVESPA

Tabela B.1 – Percentual semanal dos retornos das três estratégias.

Semana	1/n	MV	PR	IBOV	Semana	1/n	MV	PR	IBOV
01	4,78	4,50	4,65	4,50	45	-0,82	-0,12	-0,40	-0,52
02	1,87	3,07	2,29	1,98	46	-0,04	0,87	0,11	-1,00
03	1,60	0,84	1,52	2,60	47	2,18	1,63	2,05	2,00
04	0,60	0,79	0,48	1,64	48	0,39	0,60	0,41	-0,42
05	1,89	0,92	1,44	0,19	49	2,30	1,34	2,21	2,67
06	-2,92	-3,75	-3,08	-2,57	50	2,39	1,88	2,43	1,30
07	0,26	0,06	0,23	2,29	51	1,09	1,50	1,17	2,27
08	1,67	1,12	1,52	0,37	52	2,36	1,58	2,19	1,23
09	-2,40	-1,93	-2,25	-3,35	53	0,35	0,89	0,54	1,01
10	1,51	2,24	1,76	0,80	54	-0,99	-0,44	-1,03	-1,87
11	2,81	2,09	2,64	3,96	55	3,34	3,87	3,55	2,58
12	-4,31	-3,35	-3,94	-5,45	56	1,80	0,36	1,35	-0,09
13	0,84	-0,24	0,56	1,79	57	-2,43	-2,67	-2,58	-3,90
14	1,60	3,77	2,16	1,78	58	0,92	0,97	0,98	0,01
15	-4,09	-3,89	-3,83	-4,36	59	1,79	-0,46	1,26	0,54
16	2,40	1,53	2,01	1,83	60	0,62	-0,93	0,21	-0,61
17	3,36	1,27	2,97	1,75	61	-8,81	-6,82	-8,44	-8,37
18	0,83	0,37	0,68	-0,24	62	-2,04	2,47	-1,14	-5,93
19	-1,43	-1,32	-1,47	-1,82	63	-15,71	-11,10	-14,59	-15,63
20	-5,25	-3,80	-4,75	-4,52	64	-15,21	-4,17	-13,25	-18,88
21	3,25	2,42	3,04	4,04	65	8,99	-4,11	5,03	9,48
22	4,98	4,85	4,85	3,63	66	-7,27	-1,03	-5,53	-5,30
23	2,40	1,88	2,13	0,82	67	12,67	4,31	9,59	11,71
24	2,13	3,40	2,40	0,22	68	0,77	-2,66	-0,77	1,68
25	2,85	2,48	2,80	4,05	69	-1,98	-3,01	-2,72	-4,63
26	-0,11	0,23	-0,07	-1,02	70	4,10	0,83	3,00	6,87
27	3,56	3,37	3,51	3,09	71	0,06	5,08	1,71	-0,30
28	1,33	2,03	1,21	-0,18	72	-2,85	-3,30	-3,09	-3,37
29	-0,16	-0,10	-0,19	-0,44	73	7,20	2,96	5,26	5,95
30	0,68	0,47	0,79	-0,61	74	7,44	2,47	5,51	6,36
31	3,00	2,55	2,62	-0,14	75	5,39	2,22	4,69	8,28
32	1,10	0,95	0,88	1,29	76	-0,53	0,99	0,25	-1,95
33	-3,76	-2,71	-3,53	-4,03	77	4,50	2,87	3,80	4,07
34	-2,17	-1,73	-2,03	-2,14	78	-2,17	-3,05	-2,46	-2,83
35	3,19	3,19	3,23	3,55	79	4,02	1,69	3,28	3,12
36	0,99	1,07	1,03	1,78	80	2,72	-0,26	1,73	3,38
37	0,08	0,61	0,41	0,55	81	2,53	3,70	2,49	2,86
38	1,95	2,44	1,99	1,27	82	-0,23	-1,64	-0,37	-0,49
39	-0,31	-0,82	-0,33	0,25	83	2,49	6,64	3,60	0,52
40	-0,20	-0,22	-0,40	-2,40	84	-0,54	-3,15	-1,68	-0,13
41	0,46	0,75	0,52	1,25	85	-2,09	-1,47	-1,89	-1,38
42	1,58	0,66	1,29	0,86	86	-1,60	-1,71	-1,71	0,17
43	0,75	-0,18	0,80	2,52	87	0,52	-0,08	0,42	0,61
44	3,07	2,62	2,74	0,77					

## APÊNDICE C – PROGRAMAÇÃO NO MATLAB

```

clear
% As doze ações de 31.12.2017 (5.1.2018) ate 23.08.20 (28.08.20) estão na ordem:
% ABEV3, EQTL3, IGTA3, ITUB4, MGLU3, PETR4,
RADL3, RENT3, SBSP3, VALE3, VIVT4, WEGE3,
SELIC, BVSP.
% D=matriz 14 x 139 preenchida com dados semanais dos retornos das ações,
Tesouro Selic e Ibovespa
% durante as 139 semanas, conforme tabela do apendice 1.
D=[...];
for i=1:87
C=cov(D(i:51+i,1:12));
m(i,:)=[mean(D(i:51+i,1)) mean(D(i:51+i,2)) mean(D(i:51+i,3)) ... mean(D(i:51+i,12))];

X0=(1/12)*ones(12,1);
% implementacao da PR
f = @(W) var(W.*(C*W))*10^14; %Note: The 10^14 is there to increase accuracy
%fmincon(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq)
X_PR(:,i) = fmincon(f,X0,[],[],ones(1,length(X0)),1);
%quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
X_MV(:,i)=quadprog(C,zeros(12,1),-1*eye(12),
zeros(12,1),ones(1,12),ones(1,1),zeros(12,1),
ones(12,1));

RETORNO_1(i)=D(52+i,1:12)*X0;
RETORNO_MV(i)=D(52+i,1:12)*X_MV(:,i);
RETORNO_PR(i)=D(52+i,1:12)*X_PR(:,i);

RISCO_1(i)=sqrt(X0'*C*X0);
RISCO_MV(i)=sqrt(X_MV(:,i)'*C*X_MV(:,i));
RISCO_PR(i)=sqrt(X_PR(:,i)'*C*X_PR(:,i));

IS_1(i)=(RETORNO_1(i)-D(52+i,13))/RISCO_1(i);
IS_MV(i)=(RETORNO_MV(i)-D(52+i,13))/RISCO_MV(i);
IS_PR(i)=(RETORNO_PR(i)-D(52+i,13))/RISCO_PR(i);

IBOVESPA(i)=D(52+i,14);
FIXA(i)=D(52+i,13);
end

%Retornos acumulados
R_ACUMULADO_1(1)=0;
R_ACUMULADO_MV(1)=0;
R_ACUMULADO_PR(1)=0;
%acumulados tesouro selic e ibovespa
R_ACUMULADO_FIXA(1)=0;
IBOVESPA_ACUMULADO(1)=0;

for i=2:88
R_ACUMULADO_1(i)=(1+R_ACUMULADO_1(i-1))*(1+RETORNO_1(i-1))-1;
R_ACUMULADO_MV(i)=(1+R_ACUMULADO_MV(i-1))*(1+RETORNO_MV(i-1))-1;
R_ACUMULADO_PR(i)=(1+R_ACUMULADO_PR(i-1))*(1+RETORNO_PR(i-1))-1;
IBOVESPA_ACUMULADO(i)=(1+IBOVESPA_ACUMULADO(i-1))*(1+IBOVESPA(i-1))-1;
R_ACUMULADO_FIXA(i)=(1+R_ACUMULADO_FIXA(i-1))*(1+FIXA(i-1))-1;
end

```