



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

A Característica de Euler

Denis Vanucci Gisoldi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2013

514.2 Gisoldi, Denis Vanucci
G535c A Característica de Euler/ Denis Vanucci Gisoldi- Rio Claro,
2013.
49 f.: il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Topologia algébrica. 2. Poliedros. 3. Superfícies. 4. Classificação de Superfícies. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Denis Vanucci Gisoldi
A CARACTERÍSTICA DE EULER

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
IGCE/UNESP/Rio Claro(SP)

Profa. Dra. Evelin Menegusso Barbaresco
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto(SP)

Rio Claro, 15 de Julho de 2013

Dedico este trabalho, principalmente, a minha amável e adorável avó Adelaide Bortolotto Vanucci, que faleceu durante a realização deste, a qual por toda minha vida, orientou, aconselhou com palavras sábias que as levarei para sempre. Dedico a minha esposa Érica e meu filho Nicolas, pela motivação, o entendimento e as horas de diversão, que muito me ajudaram. Por fim, aos meus pais, Onofre e Clara, e ao meu irmão Régis, pelo apoio imensurável e irrestrito.

Agradecimentos

Agradeço ao Governo Federal, ao MEC e à Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa pioneira de realização desse projeto em rede nacional, a CAPES pelo financiamento de bolsas de estudos, pois não seria possível sua efetivação sem este apoio e a todos os envolvidos na Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" por não terem medido esforços para fazer parte deste projeto. Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, em particular, à coordenadora local, Suzinei Marconato, por sempre me motivar nos momentos mais difíceis no curso.

Aos meus amigos de curso, principalmente, Leandro Tezotto e Maurício Evandro Eloy, pelo comprometido grupo de estudo, os momentos descontraídos e pela amizade verdadeira, fortalecida ao longo do curso.

À todos os professores envolvidos no projeto, principalmente aqueles que ministraram cursos para a turma PROFMAT 2011, em especial, à minha orientadora, Prof^a Dr^a Alice Kimie Miwa Libardi, pelo apoio, paciência, profissionalismo, ética e atenção dispensada para elaboração desse trabalho.

Euler calculava sem esforço aparente, tal como os homens respiram e as àguias se sustentam no ar. François Arago (1786-1853), matemático, físico, astrónomo e político francês.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da característica de Euler de poliedros, superfícies e de soma conexa de superfícies. É provado que se duas superfícies tem a mesma característica de Euler, então elas são homeomorfas. A recíproca é também verdadeira, porém sua demonstração foge ao escopo deste trabalho. Para o desenvolvimento da atividade para alunos do ensino médio, foram construídos materiais didáticos com o objetivo de motivar e mostrar triangulações de algumas superfícies, necessárias para o cálculo das características de Euler.

Palavras-chave: Topologia algébrica, Poliedros, Superfícies, Classificação de Superfícies.

Abstract

The main goal of this work is the study of the Euler characteristic of polyhedron, surfaces and of connected sum of surfaces. It is also proved that if two surfaces have the same Euler characteristic then they are homeomorphic. The converse is also true, but it is not proven in this work. For the development of an activity for high school students were made didactic materials in order to motivate and show the triangulations of some surfaces, necessary to calculate the Euler characteristics.

Keywords: Algebraic Topology, Polyhedrons, Surfaces, Surfaces Classification.

Sumário

1	Introdução	15
2	Preliminares	17
2.1	Espaços Métricos	17
2.1.1	Continuidade e Homeomorfismos	20
2.1.2	Propriedades elementares das aplicações contínuas	22
2.1.3	Homeomorfismos	24
3	Característica de Euler	29
3.1	Superfícies	29
3.1.1	Soma Conexa	33
4	Atividade relacionada ao Ensino Médio	39
4.1	Plano de ensino	39
4.1.1	Metodologia	39
4.1.2	Processo de Triangulação de uma superfície	41
4.1.3	Um pouco da história-Encerramento da sexta aula	47
	Referências	49
	Referências	49

1 Introdução

A Característica de Euler é um dos mais importantes invariantes topológicos, com a qual obtemos uma classificação das superfícies compactas, conexas e sem bordo. Seu estudo em áreas mais específicas dá uma condição à existência de campos vetoriais não nulos, porém trata-se de um assunto que pode ser abordado em diversos níveis de aprofundamento. Nosso objetivo é fazer uma apresentação que possa motivar docentes e alunos do ensino médio a ter uma visão mais geral, interessante, porém acessível.

Muitos livros didáticos atualmente, listados no PNLEM (de vários anos), trazem assuntos prontos, de maneira direta e com pouco fundamento, não incentivando a pensar ou imaginar uma possibilidade diferente.

Um desses assuntos, que aprofundaremos nesse trabalho, trata-se da relação de Euler ou como é mais conhecido, Teorema de Euler.

Alguns livros didáticos são breves com respeito ao assunto. Desde um "vamos calcular $V - A + F$ para ver quanto dá" e completar tabelas com vários exemplos de poliedros, em particular convexos, para fazer com que o aluno perceba que a relação vale para poliedro convexos. Há outros que, instigam o aluno a também verificar que a relação pode até valer para poliedros não-convexos. Porém, há livros que observam que nem todo poliedro não-convexo segue a relação de Euler, ou até demonstram de maneira elegante e inteligível.

A Relação/Teorema de Euler tem sido estudada e ensinada há décadas, desde Descartes até os dias atuais, demonstrando seu desafio e sua importância, observados em diversos trabalhos perdidos na história e, por fim, seu verdadeiro significado nas mãos de Poincaré.

No capítulo 2, daremos base para estrutura desse trabalho, definindo e exemplificando conceitos importantes sobre espaços métricos, subespaços, bolas abertas e esferas. Introduziremos o conceito de continuidade e homeomorfismo que sustentará todo o trabalho, pois será o tipo de deformação que usaremos em nosso objeto de estudo. Também serão vistos espaços topológicos e suas propriedades, no intuito de definir a característica de Euler para espaços mais gerais.

No capítulo 3 iniciaremos o objeto de nosso estudo, de tão simples e até mesmo apresentado no ensino fundamental, se mostrou frutífero em estudos mais aprofundados, merecendo seu destaque. Introduziremos o processo para obtenção dos elementos

da fórmula para uma superfície qualquer, usando a noção de triangulação. Na última seção, utilizaremos superfícies conhecidas para efetuar uma operação, chamada soma conexa, para obtenção de novas superfícies. Daremos destaque a três teoremas, sendo o principal deles a classificação de superfícies fechadas, via característica de Euler.

No capítulo 4 abordaremos o assunto através de uma atividade a ser desenvolvida no ensino médio, não apenas para poliedros convexos, como é de praxe nos livros didáticos, mas também calcular o valor da característica de Euler para poliedros não-convexos e também para algumas superfícies. Utilizaremos recursos computacionais, como o programa gratuito MathSoliD, disponibilizado pelo departamento de matemática PUC-Rio e animação da construção da garrafa de Klein. No caso específico das superfícies, foram construídos materiais didáticos concretos de apoio, para o professor mostrar o processo de triangulações, utilizado para a contagem do número de vértices, arestas e faces.

2 Preliminares

Como o objetivo principal deste trabalho é o estudo de um invariante topológico, precisamos introduzir o conceito de homeomorfismo, uma aplicação bijetora, contínua e com inversa contínua. Desse modo, neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários ao desenvolvimento do trabalho.

2.1 Espaços Métricos

Na Geometria Euclidiana, define-se a distância entre dois pontos distintos como sendo o comprimento do segmento determinado por eles. Posteriormente, na Geometria Analítica, introduzindo-se um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a distância entre os pontos do plano cartesiano $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é dada por $d(P, Q) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$. A distância entre dois pontos de uma cidade pode não ser o segmento de reta determinado por eles, pois muitas vezes este caminho não é possível. Caminhando pelas ruas, voce terá uma outra noção de distância. E se definirmos a distância entre dois pontos, como sendo 1, se eles forem diferentes e zero se forem iguais? O que todas estas definições tem em comum? A resposta é que todas satisfazem as condições abaixo que definiremos como sendo uma métrica ou uma distância.

Definição 2.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M . Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.

Definição 2.2. Seja (M, d) um espaço métrico. Todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como um espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar para os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M . Nessas condições, dizemos que S é um *subespaço* de M e a métrica de S diz-se *induzida* pela de M .

Vamos apresentar alguns exemplos de métricas. A primeira delas é a que já mencionamos, a *métrica "zero-um"*. Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Pela definição de métrica, as condições *i, ii* são verificadas pela própria definição da métrica "zero-um" e para a condição *iii* consideremos primeiramente $x \neq y$ e $y = z$. Temos assim $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 1$ e $d(y, z) = 0$. Logo, neste caso, $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$. Se $x \neq y$ e $y \neq z$ temos, $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 1$ e $d(y, z) = 1$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$. Os demais casos recaem nestes.

Um exemplo importante de espaço métrico é o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Os pontos de \mathbb{R}^n são n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Podemos definir a distância entre dois pontos no \mathbb{R}^n de três modos. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, escrevemos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i)^2]^{1/2} ,$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

e

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas. A métrica d é chamada *euclidiana*.

No caso particular do conjunto \mathbb{R} dos números reais a distância entre dois pontos $x, y, \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. Verifica-se imediatamente as condições de *i* à *iii* pelas propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada *"métrica usual"*.

Definida uma métrica em um conjunto M , isto é, tendo agora a noção de distância entre os pontos, o próximo objetivo é definir continuidade de funções. Portanto, veremos alguns elementos essenciais para sua definição.

Definição 2.3. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

i) A *bola aberta* de centro a e raio r é definida da seguinte maneira:

$$B(a, r) := \{x \in M, d(x, a) < r\},$$

ou seja, é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r .

ii) A *bola fechada* ou disco de centro a e raio r é definido por:

$$D(a, r) := \{x \in M, d(x, a) \leq r\},$$

ou seja, é o conjunto formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a .

iii) A *esfera* de centro a e raio r é definida por:

$$S(a, r) := \{x \in M, d(x, a) = r\}.$$

Observe que todo espaço vetorial normado E é um espaço métrico, com a métrica d proveniente da norma, i.e. $d(x, y) = \|x - y\|$. Então escrevemos:

$$B(a, r) := \{x \in E, |x - a| < r\}$$

$$D(a, r) := \{x \in E, |x - a| \leq r\}$$

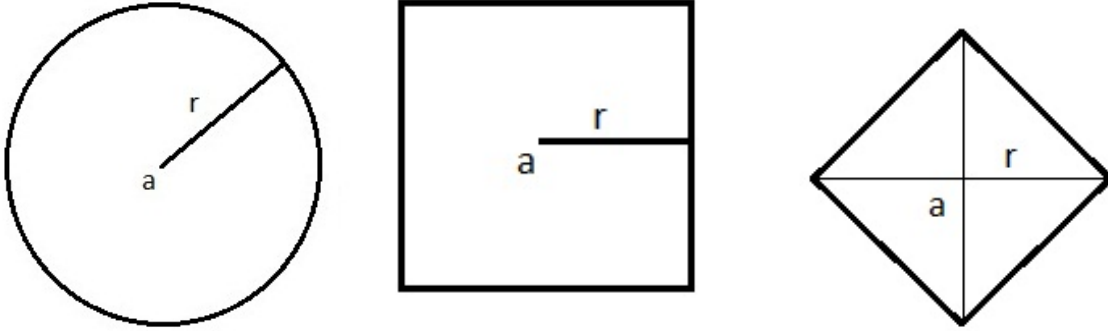
$$S(a, r) := \{x \in E, |x - a| = r\}$$

Se X é um subespaço do espaço métrico M , então para cada $a \in X$ e cada $r > 0$, podemos definir a $B_X(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio r , relativamente à métrica induzida em X . Neste caso, tem-se $B_X(a, r) = B(a, r) \cap X$ onde $B(a, r)$ é a bola aberta de centro a e raio r no espaço M . Analogamente temos: $D_X(a, r) = D(a, r) \cap X$ e $S_X(a, r) = S(a, r) \cap X$.

As bolas abertas dependem da métrica que se usa, por exemplo, se M está munido da métrica *zero-um* então, para todo $a \in M$, tem-se $B(a, r) = D(a, r) = M$ se $r > 1$ e $B(a, r) = D(a, r) = a$ se $r < 1$. Por outro lado, $B(a, 1) = a$ e $D(a, 1) = M$. Tem-se também $S(a, r) = \emptyset$ se $r \neq 1$ e $S(a, 1) = M - a$.

Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, pois a condição $|x - a| < r$ equivale $a - r < x - a < r$, ou seja: $a - r < x < a + r$. Analogamente, $D(a, r)$ é o intervalo $[a - r, a + r]$ e a esfera $S(a, r)$ tem apenas dois pontos: $a - r$ e $a + r$.

No plano \mathbb{R}^2 , a bola aberta $B(a, r)$ é o interior de um círculo de centro a e raio r ou o interior de um quadrado de centro a e lados de comprimentos $2r$, paralelos aos eixos, ou então o interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, ambas de comprimentos $2r$. Estes casos correspondem ao usarmos em \mathbb{R}^2 as métricas d , d' ou d'' respectivamente. A esfera $S(a, r)$ é o bordo da figura correspondente e $D(a, r)$, evidentemente, é igual a $B(a, r) \cup S(a, r)$.



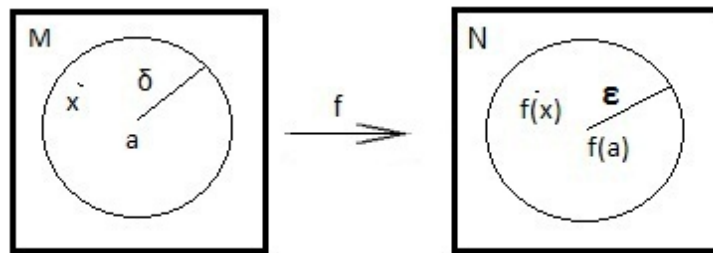
(a) $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2$. (b) $|x - a_1| < r$ e $|y - a_2| < r$. (c) $|x - a_1| + |y - a_2| < r$.

2.1.1 Continuidade e Homeomorfismos

Um dos objetivos do trabalho é mostrar que se duas superfícies possuem a mesma característica de Euler, então elas são homeomorfas, ou seja, existe um homeomorfismo entre elas. Na realidade, este conceito é utilizado entre espaços topológicos, que veremos a seguir. Começamos com a definição de homeomorfismos entre espaços métricos, que é um caso particular, mas não menos importante.

Definição 2.4. Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é *contínua no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

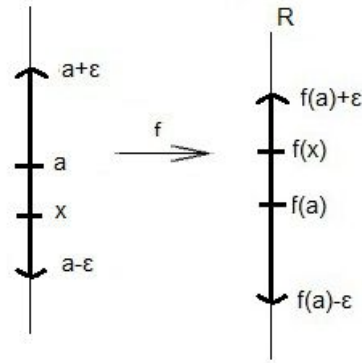
Diz-se que $f : M \rightarrow N$ é *contínua* quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.



Equivalentemente, $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a); \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, de centro a , tal que $f(B) \subset B'$.

No importante caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Observação: A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em



M uma bola B , de centro a , tal que $f|_B$ seja contínua no ponto a , então $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a . Segue daí que, se para toda parte limitada $X \subset M$, $f|_X$ for contínua, então $f : M \rightarrow N$ é contínua.

Exemplo 2.1. Dada $f : M \rightarrow N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada *constante de Lipschitz*) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma *aplicação lipschitziana*. Neste caso, f é contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Então $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \varepsilon$. Se $c = 1$, dizemos que f é uma *contração fraca*. São exemplos de contrações fracas, portanto contínuas, a norma $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço vetorial normado E ; a projeção $p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \rightarrow M_i$ definida por $p_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$ e a operação soma $s : E \times E \rightarrow E$, $s(x, y) = x + y$ em um espaço vetorial normado E , quando se toma em $E \times E$ a norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.

Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se *localmente lipschitziana*, quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = B(a, r)$, tal que a restrição $f|_B$ é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é, evidentemente, contínua.

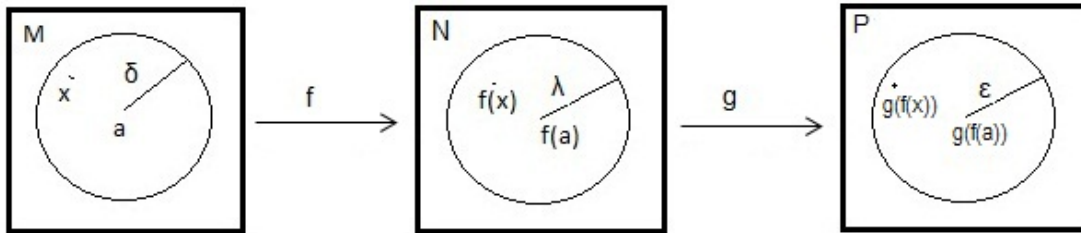
Exemplo 2.2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$, (n inteiro positivo) é lipschitziana em cada parte limitada de \mathbb{R} , pois se $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ então $|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}| \leq |x - y| (|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \cdots + |y|^{n-1}) \leq c \cdot |y - x|$, onde $c = n \cdot a^{n-1}$. Segue-se que um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ cumpre a condição de Lipschitz em cada intervalo limitado $[a, b]$. Concluimos, em particular, que todo polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. De modo análogo, podemos mostrar que a função $r : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $r(x) = \frac{1}{x}$, é contínua. Provamos primeiro que, para cada $k > 0$, r é lipschitziana no conjunto $X_k = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq k\}$. Ora, se $|x| \geq k$ e $|y| \geq k$, então $|r(x) - r(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|x \cdot y|} \leq c \cdot |x - y|$, onde $c = \frac{1}{k^2}$. Segue daí que cada número real $a \neq 0$ é centro de um intervalo, restrito ao qual r é contínua. Logo r é contínua.

2.1.2 Propriedades elementares das aplicações contínuas

Proposição 2.5. A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a .

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N$, $d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ tal que $x \in M$, $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$.



Corolário 2.6. A restrição de uma aplicação contínua é contínua. Mais exatamente, se $f : M \rightarrow N$ é contínua e $X \subset M$, então $f|_X : X \rightarrow N$ é contínua.

Demonstração: Com efeito, $f|_X = f \circ i$, onde $i : X \rightarrow M$ é a inclusão, definida por $i(x) = x, x \in X$.

Exemplo 2.3. *Continuidade da multiplicação.* Seja E um espaço vetorial normado. Considere a aplicação $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, onde $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$. Se $[\lambda], [\mu], [x], [y]$ são $\leq a$ então $d[m(\lambda, x), m(\mu, y)] = \|\lambda \cdot x - \mu \cdot y\| = \|\lambda \cdot x - \mu \cdot x + \mu \cdot x - \mu \cdot y\| \leq |\lambda - \mu| \cdot \|x\| + |\mu| \cdot \|x - y\| \leq a(|\lambda - \mu| + \|x - y\|) = a \cdot d[(\lambda, x), (\mu, y)]$. Segue-se que m é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R} \times E$ e, por conseguinte, $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ é contínua. Em particular, a multiplicação de números reais, $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, m(x, y) = x \cdot y$, é uma função contínua.

Dados os espaços métricos M, N_1 e N_2 , dar uma aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ equivale a um par de aplicações $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$, chamadas as *funções coordenadas* de f , tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ para todo $x \in M$. Escreve-se $f = (f_1, f_2)$. Considerando-se as projeções $p_1 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$ e $p_2 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$, tem-se $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$. A proposição seguinte, embora de simples demonstração, é fundamental.

Proposição 2.7. A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é contínua (no ponto $a \in M$) se, e somente se, suas funções coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas (no ponto a).

Demonstração: Se f é contínua então o mesmo ocorre com $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ porque as projeções p_1 e p_2 são contínuas. Para provar a recíproca, usamos em $N_1 \times N_2$ a métrica $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max \{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Dado $\varepsilon > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a , existem δ_1 e δ_2 tais que $d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$ e $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon$. Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Então $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max \{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon$. Logo f é contínua no ponto a .

Corolário 2.8. Se $f_1 : M_1 \rightarrow N_1$ e $f_2 : M_2 \rightarrow N_2$ são contínuas, então também é contínua a aplicação

$$\varphi = f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$$

definida por

$$\varphi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Com efeito, considerando as projeções

$$p_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \text{ e } p_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$$

vemos que as funções coordenadas de φ são

$$f_1 \circ p_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \text{ e } f_2 \circ p_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_2$$

Segue da proposição anterior que φ é contínua.

Proposição 2.9. Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e $f, g : M \rightarrow E, \alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f + g : M \rightarrow E, \alpha \cdot f : M \rightarrow E$ e $\alpha/\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x),$$

e

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração: Foi visto que as aplicações $r : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, s : E \times E \rightarrow E$ e $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, dadas por $r(x) = 1/x, s(x, y) = x + y$ e $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, são contínuas.

Considere as seguintes composições:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{(f,g)} E \times E \xrightarrow{s} E \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x) \end{array} \right\} f + g = s \circ (f, g) \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{(\alpha,f)} \mathbb{R} \times E \xrightarrow{m} E \\ x \mapsto (\alpha(x), f(x)) \mapsto \alpha(x) \cdot f(x) \end{array} \right\} \alpha \cdot f = m \circ (\alpha, f) \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{(\alpha, \beta)} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{(id \times r)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R} \\ x \mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \mapsto \left(\alpha(x), \frac{1}{\beta(x)}\right) \mapsto \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{array} \right\} \frac{\alpha}{\beta} = m \circ (id \times r) \circ (\alpha, \beta) \quad (2.3)$$

Os esquemas acima (onde $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação identidade) mostram que $f + g$, $\alpha \cdot f$ e α/β são contínuas, em virtude das proposições acima.

Corolário 2.10. Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com valores reais, então $f + g$, $f \cdot g$ e (caso $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$) f/g são funções contínuas.

2.1.3 Homeomorfismos

Diferente do que ocorre em Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas $f : M \rightarrow N$ tais que $f^{-1} : N \rightarrow M$ é descontínua. O seguinte exemplo é um clássico exemplo desta situação.

Exemplo 2.4. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano euclidiano. A função $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é bijetora, e é contínua, pois suas funções coordenadas, \cos e \sin o são. A aplicação inversa, $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ é descontínua no ponto $P = (1, 0)$.

Definição 2.11. Sejam M e N espaços métricos. Um *homeomorfismo* de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \rightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são *homeomorfos*.

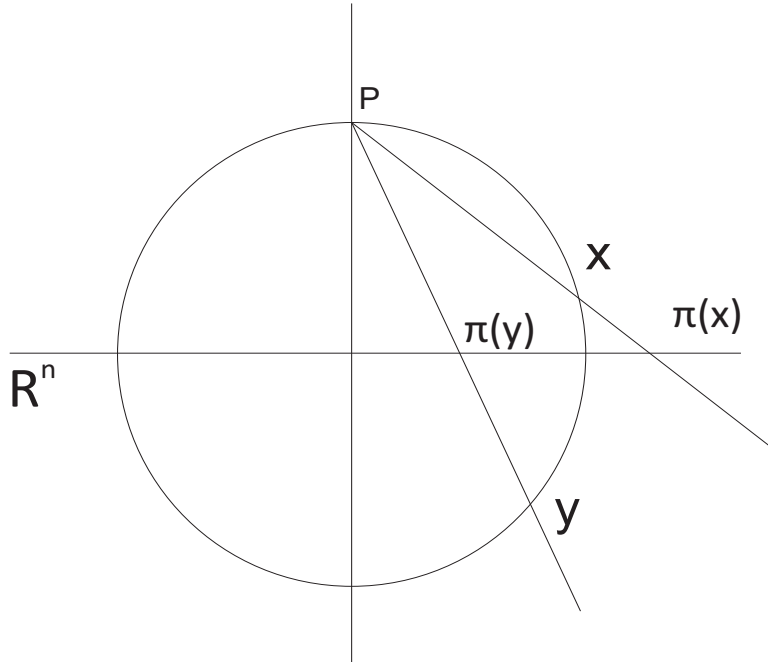
Se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são homeomorfismos então $g \circ f : M \rightarrow P$ também é um homeomorfismo.

Exemplo 2.5. *Homeomorfismo entre bolas.* Seja E um espaço vetorial normado. Para todo $a \in E$ e para todo real $\lambda \neq 0$, a *translação* $t_a : E \rightarrow E$ e a *homotetia* $m_\lambda : E \rightarrow E$, definidas por $t_a(x) = x + a$ e $m_\lambda(x) = \lambda \cdot x$, são homeomorfismos de E . De fato, t_a e m_λ são contínuas e possuem inversas: ($t_a^{-1} = t_{-a}$) e ($m_\lambda^{-1} = m_\mu, \mu = 1/\lambda$), as quais também são contínuas. Duas bolas abertas $B(a, r)$ e $B(b, s)$ em E são homeomorfas. Mais precisamente, a composta $\varphi = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$ define um homeomorfismo $\varphi : E \rightarrow E$. Para cada $x \in E$, temos $\varphi(x) = b + s/r(x - a)$. Isto mostra que φ consiste em:

- 1.) Transladar $B(a; r)$ de modo a pôr seu centro na origem;
- 2.) Multiplicar todos os vetores por s/r de modo que vetores de comprimento $< r$ passem a ter comprimento $< s$. Isto transforma $B(0; r)$ em $B(0; s)$;
- 3.) Transladar $B(0; s)$ de modo a pôr seu centro no ponto b .

Assim o homeomorfismo $\varphi : E \rightarrow E$ é tal que $\varphi(B(a; r)) = B(b; s)$. Da mesma maneira se mostra que duas bolas fechadas quaisquer em E são homeomorfas. Convém observar que, num espaço métrico arbitrário, duas bolas abertas podem não ser homeomorfas. O exemplo mais simples é o de um espaço métrico M , que possui um ponto isolado a e um ponto não isolado b . Existe um bolas $B(a; r) = \{a\}$, a qual não pode ser homeomorfa a uma bola aberta de centro b pois, para todo $s > 0$, $B(b; s)$ é um conjunto infinito.

Exemplo 2.6. *A projeção estereográfica.* Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ o seu pólo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi-reta \vec{px} encontra o hiperplano $x_{n+1} = 0$, que identificamos com \mathbb{R}^n . A fim de se obter uma fórmula para π , observemos que os pontos da semi-reta \vec{px} têm a forma $p + t \cdot (x - p)$, onde $t > 0$. Tal ponto pertence ao hiperplano \mathbb{R}^n quando sua última coordenada $1 + t(x_{n+1} - 1)$ é zero. Daí tiramos $t = 1/(1 - x_{n+1})$. Convecionemos por $x' = (x_1, \dots, x_n)$ quando $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Então, sendo $\pi(x) = p + (x - p)/(1 - x_{n+1})$, mostra-se que $\pi(x) = x'/(1 - x_{n+1})$. A expressão $\pi(x) = x'/(1 - x_{n+1})$ mostra que $\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.



(Note que $x \in S^n - \{p\}$ exclui a possibilidade $x_{n+1} = 1$). Para verificar que π é um homeomorfismo, basta considerar a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{p\}$, definida por $\varphi(y) = x$, onde, na notação acima, $x' = 2y/(|y|^2 + 1)$ e $x_{n+1} = (|y|^2 - 1)/(|y|^2 + 1)$. Constata-se sem dificuldade que $\varphi(\pi(x)) = x'$ para todo $x \in S^n - \{p\}$ e $\pi(\varphi(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Os elementos mais importantes de um espaço métrico são os conjuntos abertos, que darão a motivação para a definição de espaço topológico.

Definição 2.12. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $a \in X$ diz-se um *ponto interior* a X quando é centro de um bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se o *interior* de X em M ao conjunto $\text{int}X$ formado pelos pontos interiores a X .

Um subconjunto de A de um espaço métrico M diz-se *aberto* em M quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\text{int} A = A$. Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M , devemos obter, para cada $x \in A$, um raio $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$.

Proposição 2.13. Seja \mathbb{U} a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M . Então:

- (1) $M \in \mathbb{U}$ e $\emptyset \in \mathbb{U}$. (*O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.*)
- (2) Se $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{U}$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathbb{U}$. (*A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*)
- (3) Se $A_\lambda \in \mathbb{U}$ para todo $\lambda \in L$ então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathbb{U}$. (*A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*)

Demonstração:

- 1) O espaço métrico M é evidentemente, aberto em M . Isto mostra como a propriedade " X é aberto" é relativa, isto é, depende do espaço M em que se considera X imerso: X é sempre aberto no próprio espaço X . Para um exemplo menos trivial, observemos que $X = [0, 1)$ é um subconjunto aberto do espaço $M = [0, 1]$: basta notar que cada intervalo do tipo $[0, \varepsilon)$, com $0 < \varepsilon \leq 1$, é aberto na reta \mathbb{R} . Também o intervalo aberto $(0, 1)$ do eixo das abscissas em \mathbb{R}^2 é aberto nesse eixo mas não é aberto em \mathbb{R}^2 . Um conjunto que é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha é o conjunto vazio \emptyset . Com efeito, para provar que um conjunto X não é aberto, deve-se exibir um ponto $x \in X$ que não seja interior a X . Isto é evidentemente impossível de fazer quando $X = \emptyset$. Logo \emptyset é aberto.
- 2) Suponhamos que $a \in A_1, \dots, a \in A_n$. Como estes conjuntos são abertos, existem $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ tais que $B(a, r_1) \subset A_1, \dots, B(a, r_n) \subset A_n$. Seja r o menor dos números r_1, \dots, r_n . Então

$$B(a; r) \subset B(a; r_1) \subset A_1, \dots, B(a; r) \subset B(a; r_n) \subset A_n$$

e daí

$$B(a; r) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$$

Logo $A_1 \cap \dots \cap A_n$ é aberto.

3) Seja $a \in A$. Então, existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como este conjunto é aberto, há uma bola $B(a; r)$ contida em A_λ . Logo $B(a; r) \subset A$.

Vamos apresentar agora uma caracterização de funções contínuas usando conjuntos abertos.

Proposição 2.14. Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação entre espaços métricos. Então f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de qualquer aberto A de N é um subconjunto aberto de M .

Demonstração 2.15. Suponhamos f contínua e consideremos A um subconjunto aberto qualquer de N . Para cada $a \in f^{-1}(A)$, tem-se $f(a) \in A$, que por ser aberto, contém uma bola aberta com centro $f(a)$ e raio r . Da continuidade de f , existe $B(a, s) \subset M$ tal que $f(B(a, s)) \subset B(f(a), r) \subset A$. Portanto, $B(a, s) \subset f^{-1}(B(f(a), r)) \subset f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(A)$ é aberto de M . Reciprocamente, seja $a \in M$ qualquer. Dada $B(f(a), \varepsilon)$, que é um conjunto aberto, por hipótese, a imagem inversa $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ é aberto em M e contém a . Portanto, existe uma bola aberta $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Segue que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$, ou seja f é contínua.

Essa proposição motiva-nos a definir um espaço mais geral, onde para se falar de proximidade, não há necessidade do conceito de uma métrica.

Definição 2.16. Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é um subconjunto τ de subconjuntos de X satisfazendo as propriedades:

- (1) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$.
- (2) Se $A_1, \dots, A_n \in \tau$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.
- (3) Se $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$ então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

O par (X, τ) é chamado um espaço topológico. Os elementos de τ são chamados conjuntos abertos do espaço topológico X . Diremos também que um subconjunto de X é fechado se seu complementar é um subconjunto aberto de X .

Observe que desta forma, uma função $f : X \longrightarrow Y$, entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer aberto de Y é um aberto de X . Trabalharemos com espaços topológicos especiais, a saber espaços de Hausdorff, conexos, compactos e quocientes, cujas definições apresentamos a seguir.

Definição 2.17. Um espaço topológico X é de Hausdorff se, dados dois pontos distintos a e b de X , existem abertos disjuntos A contendo a e B contendo b .

Observe que todo espaço métrico é de Hausdorff.

Definição 2.18. Um espaço topológico X é conexo se os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados são o próprio X e o conjunto vazio.

Definição 2.19. Um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de X , i.e. se toda família de abertos cuja reunião é X , admite uma subcobertura finita, ou seja, existe um número finito de abertos desta família cuja reunião é ainda o X .

Suponha agora que tenhamos A um conjunto qualquer e $f : X \rightarrow A$ uma função onde X é um espaço topológico. Podemos definir em A uma topologia, chamada topologia quociente, definindo-se que subconjuntos U são abertos de A se, e somente se, $f^{-1}(U)$, são abertos de X .

Definição 2.20. Com a topologia acima, dizemos que A é um espaço quociente.

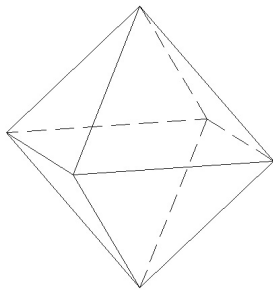
Uma outra maneira de definir espaços quocientes é definir uma relação de equivalência em um determinado conjunto e dar a ele a topologia quociente.

3 Característica de Euler

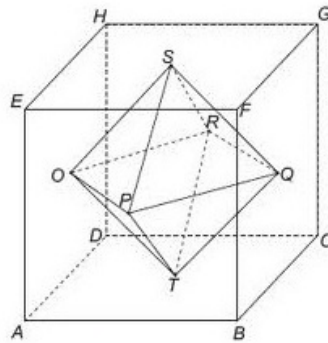
Dentre os invariantes topológicos: conexão, grupo fundamental, grupos de homologia simplicial e característica de Euler, escolhemos o último para confecção deste trabalho. Ressaltamos que a *característica de Euler* descreve e classifica importantes espaços topológicos, através apenas de um número inteiro.

Definição 3.1. Seja P um poliedro e denotemos por v , o número de vértice, f o número de faces e e o número de arestas de P . O número $\chi(P) = v - e + f$ é chamado de *característica de Euler* de P .

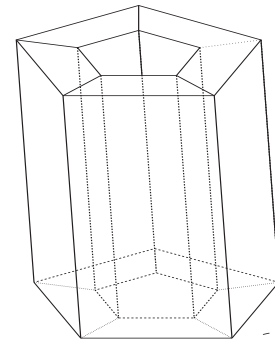
Exemplo 3.1. O número de vértices, arestas, faces e a característica de Euler dos seguintes poliedros:



(d) Figura 1



(e) Figura 2



(f) Figura 3

d) $V = 6, a = 12, f = 8, \chi = 2$

d) $V = 14, a = 24, f = 14, \chi = 4$

d) $V = 20, a = 40, f = 20, \chi = 0$

3.1 Superfícies

Definição 3.2. Uma superfície é um espaço de Hausdorff, compacto e conexo, tal que para cada ponto, existe um aberto que o contém e que é homeomorfo a uma bola aberta do \mathbf{R}^2 .

Na sequência iremos determinar a característica de Euler de superfícies. Neste processo, como dependemos do números de vértices, arestas e faces, efetuaremos o cálculo considerando uma triangulação da superfície e aplicaremos a fórmula. Uma superfície é triangulável (não é fácil de provar), quando podemos decompô-la em um número finito de vértices, faces e arestas. Por exemplo, podemos triangular a esfera em quatro vértices, seis arestas e 4 triângulos (arestas e triângulos curvos), de modo que o modelo correspondente é um tetraedro. Às vezes, é mais fácil decompor em polígonos, mas se pudermos decompor em polígonos, podemos decompor em triângulos. Essa decomposição será chamada de triangulação. Uma triangulação tem as seguintes propriedades:

- Qualquer aresta é aresta de exatamente dois triângulos;
- Dados dois triângulos, existe uma sequência de triângulos começando em um deles e terminando no outro, de modo que quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência tem uma aresta em comum.

Técnicas de Topologia Algébrica são usadas para provar que a característica de Euler não depende da triangulação.

Exemplo 3.2. Vamos apresentar alguns exemplos de superfícies. Denotemos por I o intervalo fechado $[0, 1]$.

1. Cilindro: é o espaço quociente $C = \frac{I \times I}{\sim}$, onde " \sim " é a relação definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$.

2. Toro: é o espaço quociente $T^2 = \frac{I \times I}{\sim}$, onde " \sim " é a relação definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$.

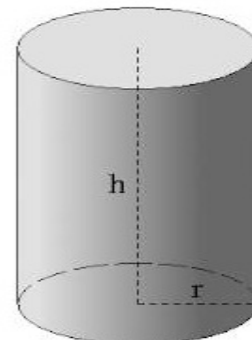
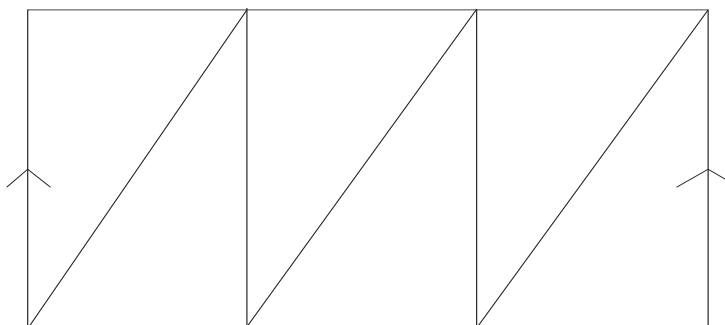
3. Faixa de Moebius: é o espaço quociente $C = \frac{I \times I}{\sim}$, onde " \sim " é a relação definida por $(x, 0) \sim (1, 1 - x)$.

4. Garrafa de Klein: é o espaço quociente $KB = \frac{I \times I}{\sim}$, onde " \sim " é a relação definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, 1 - y)$.

5. Plano Projetivo: é o espaço quociente $P^2 = S^2 / \sim$ onde $x \sim -x$.

Iniciaremos neste capítulo, o processo de triangulação de algumas das principais superfícies e calcularemos suas respectivas características de Euler:

1) O Cilindro



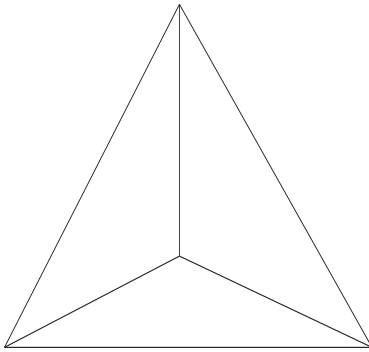
Vértice: 6, Arestas: 12, Faces: 6

$$\chi(C) = v - a + f$$

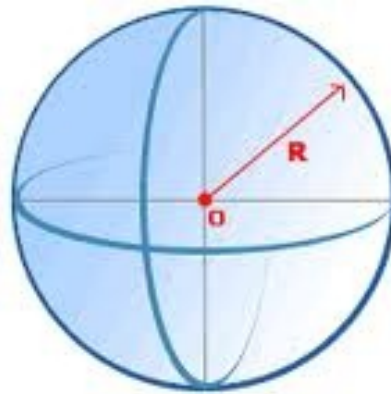
$$\chi(C) = 6 - 12 + 6$$

$$\chi(C) = 0$$

2) *A esfera S^2 .*



(g) Triangulação Esfera



(h) Esfera

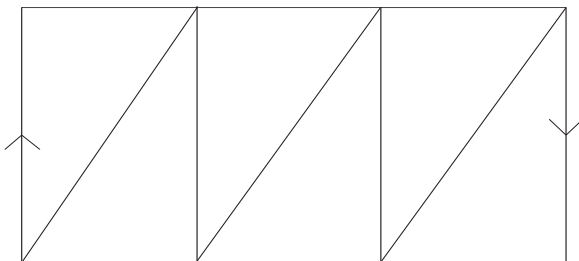
Vértice: 4, Arestas: 6, Faces: 4

$$\chi(S^2) = v - a + f$$

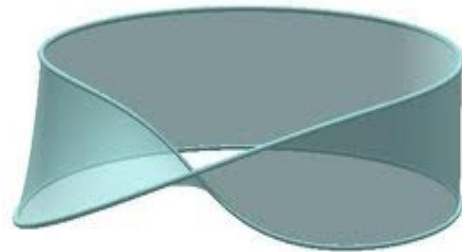
$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4$$

$$\chi(S^2) = 2$$

3) *Faixa de Moebius*



(i) Triangulação Faixa de Moebius



(j) Faixa de Moebius

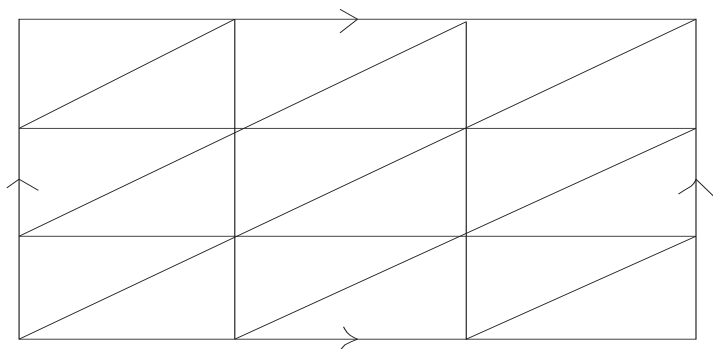
Vértice: 6, Arestas: 12, Faces: 6

$$\chi(M) = v - a + f$$

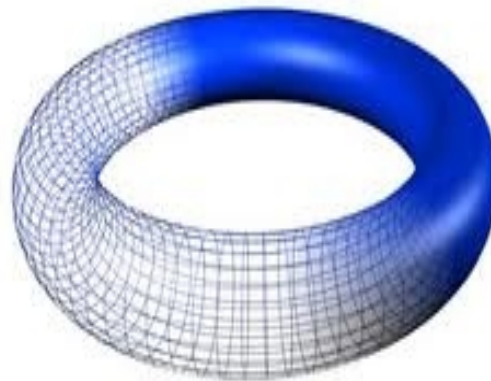
$$\chi(M) = 6 - 12 + 6$$

$$\chi(M) = 0$$

4) **O Toro** T^2



(k) Triangulação Toro



(l) Toro

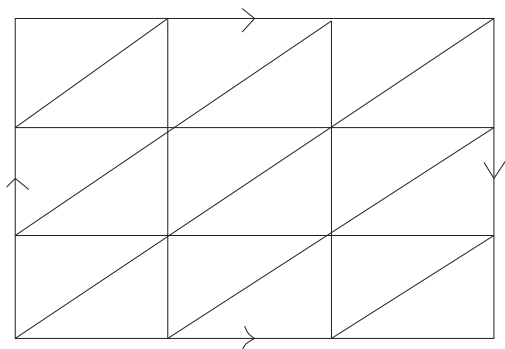
Vértice: 9, Arestas: 27, Faces: 18

$$\chi(T^2) = v - a + f$$

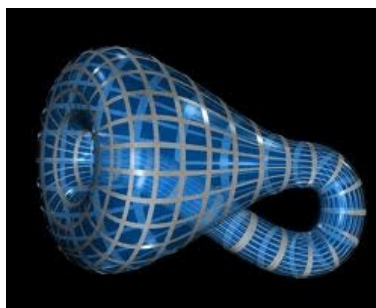
$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(T^2) = 0$$

5) **A Garrafa de Klein**



(m) Triangulação Garrada de Klein



(n) Garrafa de Klein

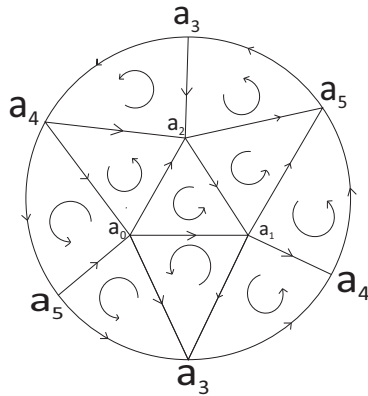
Vértice: 9, Arestas: 27, Faces: 18

$$\chi(KB) = v - a + f$$

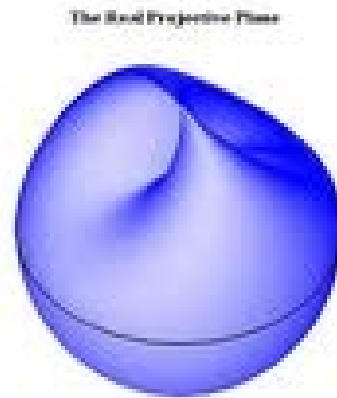
$$\chi(KB) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(KB) = 0$$

6) *O Plano Projetivo*



(o) Triangulação Plano Projetivo



(p) Plano Projetivo

Vértice: 6, Arestas: 15, Faces: 10

$$\chi(P^2) = v - a + f$$

$$\chi(P^2) = 6 - 15 + 10$$

$$\chi(P^2) = 1$$

A característica de Euler não depende da triangulação, dependendo apenas da superfície a ser analisada. Outras superfícies serão calculadas através dos exemplos dados, tomando uma operação chamada *soma conexa*.

3.1.1 Soma Conexa

De maneira intuitiva, a soma conexa de duas superfícies S_1 e S_2 é a superfície $S_1 \# S_2$ obtida retirando-se o interior de dois discos, um em cada superfície, e identificando-os pelos bordos.

Definição 3.3. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies, compactas e sem bordo. Escolhemos $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$, subconjuntos homeomorfos ao disco D^2 e sejam $h_1 : D_1 \rightarrow D^2$ e $h_2 : D_2 \rightarrow D^2$, os respectivos homeomorfismos. Definimos a *soma conexa* de S_1 e S_2 , e denotamos por $S_1 \# S_2$, como sendo o conjunto

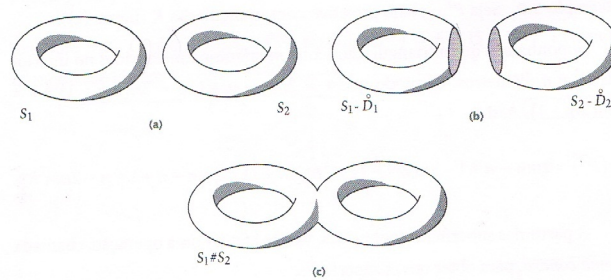
$$\frac{(S_1 - \text{int}D_1) \cup (S_2 - \text{int}D_2)}{\sim}$$

onde a relação $x \sim y$ é dada por:

- i) Se x, y estão no complementar de $\partial D_1 \cup \partial D_2$ então $x \sim y \Leftrightarrow x = y$;
- ii) Caso contrário, $x \sim y \Leftrightarrow h_1(x) = h_2(y)$.

A soma conexa não depende da escolha dos subconjuntos D_1 e D_2 , é uma superfície, com a topologia quociente.

Exemplo 3.3. Escrevendo $S_1 = S_2 = T^2$ então $S_1 \# S_2 = T^2 \# T^2$ é dada pela figura abaixo:



conexa1.jpg

Proposição 3.4. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies fechadas (compactas e sem bordo). Então $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

Demonstração:

Denotemos por K_1 e K_2 triangulações de S_1 e S_2 , respectivamente. Sejam $\chi(S_1) = v_1 - e_1 + f_1$ e $\chi(S_2) = v_2 - e_2 + f_2$. $K'_1 = K_1 - \Delta\{a_0a_1a_2\}$ é uma triangulação de $S_1 - \text{int}D^2$, onde $\{a_0a_1a_2\}$ são os vértices de um triângulo e $K'_2 = K_2 - \Delta\{b_0b_1b_2\}$ é uma triangulação de $S_2 - \text{int}D^2$, onde $\{b_0b_1b_2\}$ são os vértices de um triângulo. Tomemos $T = \frac{T'_1 \cup T'_2}{\sim}$, onde $a_i \sim b_i$, $i = 0, 1, 2$ e $\overline{a_i a_j} \sim \overline{b_i b_j}$, $i, j = 0, 1, 2$. Como T é uma triangulação para $\chi(S_1 \# S_2)$, então

$$\chi(S_1 \# S_2) = (v_1 + v_2 - 3) - (e_1 + e_2 - 3) + (f_1 + f_2 - 2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Para efetuarmos o cálculo da característica de Euler de superfícies fechadas aplicaremos o seguinte teorema, que classifica as superfícies por homeomorfismos.

Teorema 3.5. Toda superfície fechada S é homeomorfa à esfera ou à soma conexas de toros ou a soma conexa de planos projetivos, sendo a esfera e a soma conexas de toros orientáveis e a soma conexa de planos projetivos não orientável.

Teorema 3.6. A característica de Euler da esfera é 2, da soma conexa de n -toros é $2 - 2n$, da soma conexa de n -planos projetivos é $2 - n$, da soma de um plano projetivo e n -toros é $1 - 2n$ e por fim, da soma conexa de uma garrafa de Klein e n -toros é $2n$.

Demonstração:

i) Sabemos que $\chi(S^2) = 2$.

ii) Consideremos $S = T^2 \# \cdots \# T^2$ a soma conexa de n -toros, $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(T^2) = 2 - 2(1) = 0$. Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n e seja $S = T^2 \# \cdots \# T^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ -toros, que pode ser vista como $S = (T^2 \# \cdots \# T^2) \# T^2$, a soma conexa de n -toros e um toro. Logo

$$\begin{aligned} \chi(S) &= \chi((T^2 \# \cdots \# T^2) \# T^2) = \chi(T^2 \# \cdots \# T^2) + \chi(T^2) - 2 \\ &= 2 - 2n + 0 - 2 = -2n = 2 - 2(n + 1) \end{aligned}$$

.

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros é $\chi(T^2 \# \cdots \# T^2) = 2 - 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Recordando que $\chi(P^2) = 1$ e $\chi(KB) = 0$.

iii) Consideremos $S = P^2 \# \cdots \# P^2$ a soma conexa de n -planos projetivos, $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(P^2) = 2 - 1 = 1$. Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n e seja $S = P^2 \# \cdots \# P^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ -planos projetivos, que pode ser vista como $S = (P^2 \# \cdots \# P^2) \# P^2$, a soma conexa de n -planos projetivos e um plano projetivo. Logo

$$\begin{aligned} \chi(S) &= \chi((P^2 \# \cdots \# P^2) \# P^2) = \chi(P^2 \# \cdots \# P^2) + \chi(P^2) - 2 \\ &= 2 - n + 1 = -n + 1 = 2 - (n + 1) \end{aligned}$$

.

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -planos projetivos é $\chi(P^2 \# \cdots \# P^2) = 2 - n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv) Consideremos $S = (T^2 \# \cdots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de n -toros e um plano projetivo, $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(T^2 \# P^2) = 1 - 2(1) = -1$. Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n e seja $S = (T^2 \# \cdots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ -toros e um plano projetivo, que pode ser vista como $S = \underbrace{(T^2 \# \cdots \# T^2)}_n \# T^2 \# P^2$. Logo

$$\chi(S) = \chi(\underbrace{((T^2 \# \cdots \# T^2) \# T^2)}_{\chi((n+1)\text{-toros})} \# P^2) = \chi(\underbrace{(T^2 \# \cdots \# T^2)}_{\chi((n+1)\text{-toros})} + \chi(T^2) - 2) \# P^2$$

$$= \overbrace{2 - 2(n+1)}^{\chi(\text{Soma Conexa})} + \underbrace{1}_{\chi(P^2)} - 2 = 2 - 2n - 2 + 1 - 2 = -1 - 2n = 1 - 2n - 2 = 1 - 2(n+1)$$

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros e um planos projetivos é $\chi((T^2 \# \cdots \# T^2) \# P^2) = 1 - 2n, \forall n \in \mathbb{N}$.

v) Consideremos $S = ((T^2 \# \cdots \# T^2) \# KB)$ a soma conexa de n -toros e uma garrafa de Klein, $n \geq 1$. Se $n = 1$ então $\chi(S) = \chi(T^2 \# KB) = -2(1) = -2$. Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n e seja $S = \underbrace{((T^2 \# \cdots \# T^2) \# KB)}_{(n+1)}$

a soma conexa de $(n+1)$ -toros e uma garrafa Klein, que pode ser vista como $S = ((T^2 \# \cdots \# T^2) \# T^2) \# KB$, a soma conexa de $(n+1)$ -toros e uma garrafa de Klein. Logo

$$\begin{aligned} \chi(S) &= \chi(\underbrace{((T^2 \# \cdots \# T^2) \# T^2)}_n \# KB) = \chi(\underbrace{(T^2 \# \cdots \# T^2)}_n + \chi(T^2) - 2) \# KB \\ &= \overbrace{2 - 2(n+1)}^{\chi(\text{Soma Conexa})} + \underbrace{0}_{\chi(KB)} - 2 = 2 - 2n - 2 + 0 - 2 = -2 - 2n = -2(n+1) \end{aligned}$$

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n -toros e uma garrafa de Klein é $\chi((T^2 \# \cdots \# T^2) \# KB) = -2n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para provarmos que a característica de Euler é um invariante topológico, teríamos que provar que superfícies homeomorfas possuem a mesma característica. No entanto, a demonstração deste resultado envolve a definição de característica de Euler, via homologia, que foge aos objetivos deste trabalho. Neste sentido, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.7. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies fechadas. Se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e ambas são orientáveis ou ambas são não orientáveis, então S_1 é homeomorfa a S_2 .

Demonstração:

Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas, ambas orientáveis, tais que $\chi(S_1) = \chi(S_2)$. Desta forma, considere os casos: $S_1 = T^2 \# \cdots \# T^2$ é a soma conexa de n -toros ou $S_1 = S^2$ e $S_2 = T^2 \# \cdots \# T^2$ é a soma conexa de n -toros ou $S_2 = S^2$. Se $S_1 \neq S_2$ então:

- i) se uma delas é a esfera, por exemplo, $S_1 = S^2$ então $S_2 = T^2 \# \cdots \# T^2$ é a soma conexa de n -toros. Mas $\chi(S_1) = \chi(S_2)$. Logo $2 = 2 - 2n$ o que implica $n = 0$. Absurdo.
- ii) se uma delas é a soma conexa de n -toros, $S_1 = T^2 \# \cdots \# T^2$ então $S_2 = T^2 \# \cdots \# T^2$ é a soma conexa de m -toros com $m \neq n$. Ora, se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ então $2 - 2n = 2 - 2m$, o que implica $m = n$. Contradição.

Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas, ambas não orientáveis, tais que $\chi(S_1) = \chi(S_2)$. Desta forma, considere os casos: $S_1 = P^2 \# \cdots \# P^2$ é a soma conexa de n -planos projetivos e $S_2 = P^2 \# \cdots \# P^2$ é a soma conexa de m -planos projetivos com $n \neq m$. Ora, se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ então $2 - n = 2 - m$, o que implica $m = n$. Contradição.

4 Atividade relacionada ao Ensino Médio

4.1 Plano de ensino

Público Alvo: Segundo ano do Ensino Médio

Conteúdo a ser trabalhado: Elementos de sólidos geométricos e a característica de Euler.

Objetivos: Consolidar os elementos de um sólido geométrico: vértices, arestas e faces. Desenvolver os sólidos convexos e a relação entre seus elementos (Relação de Euler $\rightarrow V - A + F = 2$). Introduzir sólidos não convexos e calcular a característica de Euler de alguns casos especiais. Por fim, investigar através do processo de triangulação, o valor de $\chi(P) = V - A + F$, para superfícies, por exemplo, a faixa de Moebius, cilindro, esfera, toro e garrafa de Klein.

4.1.1 Metodologia

Todo o desenvolvimento do conteúdo será apresentado em 6 aulas de 50 minutos.

Primeira aula

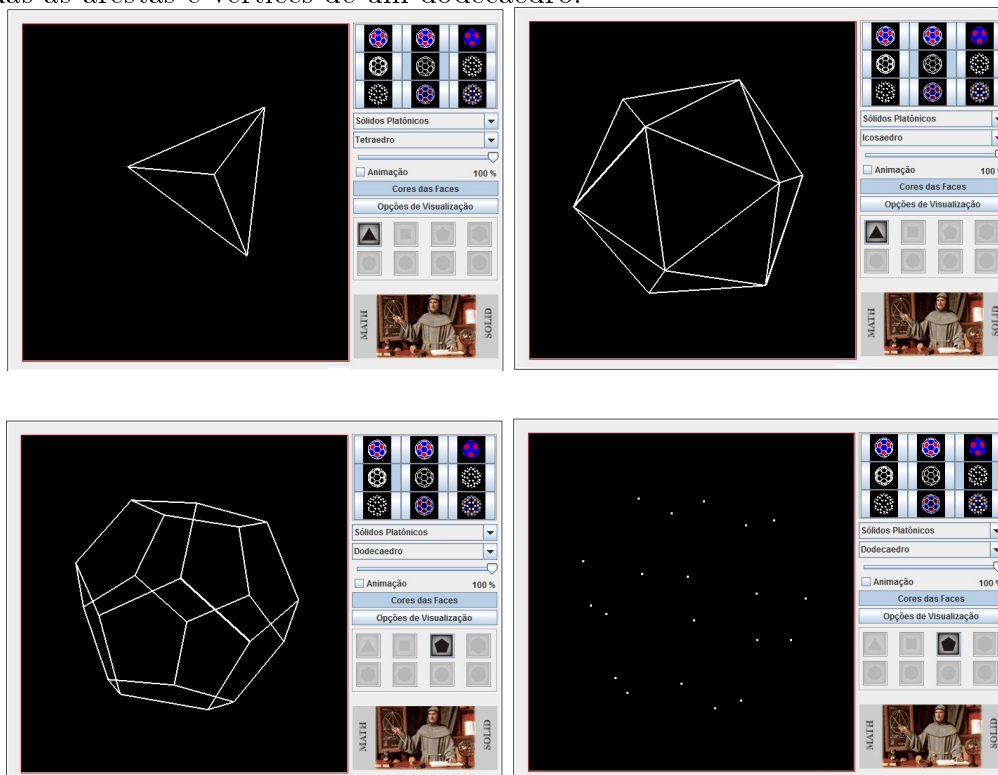
Nesta primeira aula, dar destaque a atividade de apresentação dos sólidos geométricos (alunos separados em grupos), o que são, como são formados, tipos de sólidos e discuta com o alunos, como são encontrados em nosso dia a dia (objetos que, de alguma maneira, possam representar sólidos geométricos como por exemplo: caixa de sapato, dado, caixa de creme dental, bola, etc). Ao término da aula, os grupos ficarão encarregados de trazer objetos da discussão para próxima aula.

Segunda e terceira aula

Nesta aula, os alunos se reunirão na sala de informática, com seus objetos. Inicie consolidando os elementos (vértices, faces e arestas) que envolvem os sólidos. Também com o apoio da ferramenta MathSoliD(software gratuito) pode-se classificar os sólidos

platônicos e arquimedianos. A ferramenta permite que os alunos visualizem e escolham vários tipos de sólidos e entre os destacados, façam manipulações, intervenções e observações, conforme selecionam as opções que o programa permite (mostrar somente os vértices ou somente as arestas, entre outras mais).

Nas observações, os alunos devem escolher um sólido qualquer do programa e fazer anotações sobre as arestas, vértices e faces conforme eles selecionam a caixa de opções de cada elemento. Segue abaixo modelo de alguns sólidos, destacando nos dois primeiros as faces do tetraedro e icosaedro; no terceiro e quarto, mostrando, respectivamente, todas as arestas e vértices de um dodecaedro.



Como exercício, solicite que cada aluno construa uma tabela como a descrita abaixo no Excel.

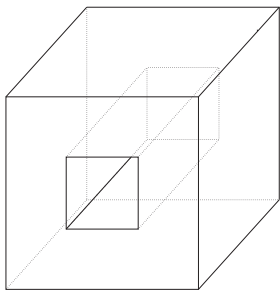
Poliedro Regular	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	Número de Faces (F)	Valor de $V - A + F$
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Ao término do exercício descrito acima, questione-os se existe relação entre os vértices, as aresta e as faces. Após responderem corretamente, apresente a característica

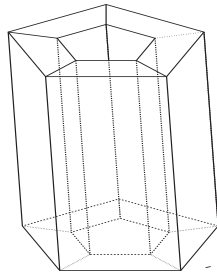
de Euler para poliedros convexos.

Quarta aula

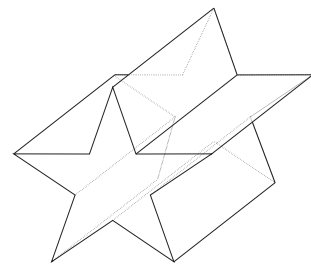
Na sequência, comece uma discussão do valor da característica de Euler em casos em que o poliedro não é mais convexo, e preencha uma nova tabela. Peça que observem os resultados obtidos e relacionem com outros sólidos para que possam tentar observar se alguns possuem estrutura parecida, mesmo que sofram um tipo de deformação. Segue alguns exemplos de sólidos:



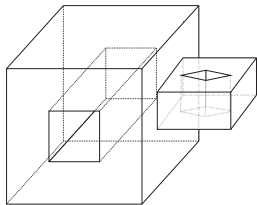
(q) Cubo



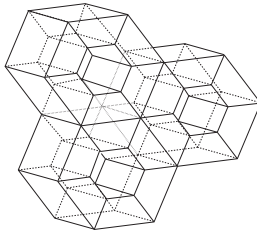
(r) Prisma Pentagonal



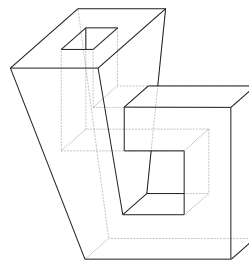
(s) Estrela



(t) Sólido não convexo



(u) Sólido não convexo



(v) Sólido não convexo

Depois da discussão com poliedros não-convexos, comece a calcular a característica de Euler para uma superfície qualquer, com exemplos simples, através do processo de triangulação.

Quinta e sexta aula

4.1.2 Processo de Triangulação de uma superfície

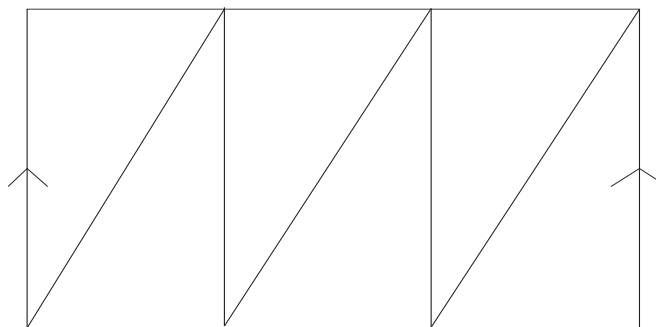
Nessa etapa, como a característica de Euler depende do número de vértices, arestas e faces, a maneira de efetuar o cálculo é considerar uma triangulação da superfície e aplicar a fórmula. Apresente a triangulação de algumas superfícies através do Power-Point e objetos concretos, com suas arestas identificadas e calcule suas respectivas características de Euler:

Materiais utilizados para construção dos objetos:

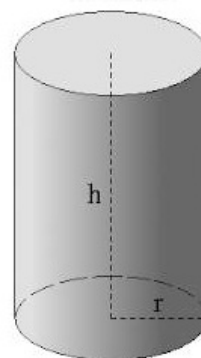
- Folha de E.V.A.(cor à escolha)
- Velcro
- Tecido em Lycra (cor à escolha)
- Zíper
- Esfera de Isopor ($\phi 25cm$)
- Fita adesiva
- 6 varetas de bambu(construção tetraedro)
- Cola quente(fixar vértices do tetraedro)
- Espaguete flutuador para piscina
- Canetinha ponta grossa

Segue abaixo fotos dos materiais confeccionados. Estes materiais são sugestões de montagem e podem ser alterados. Caso a turma tenha mais aulas durante a semana do que o normal(4), os materiais podem ser confeccionados em sala com o auxílio do professor da disciplina de artes.

1) O Cilindro



(w) Triangulação Cilindro



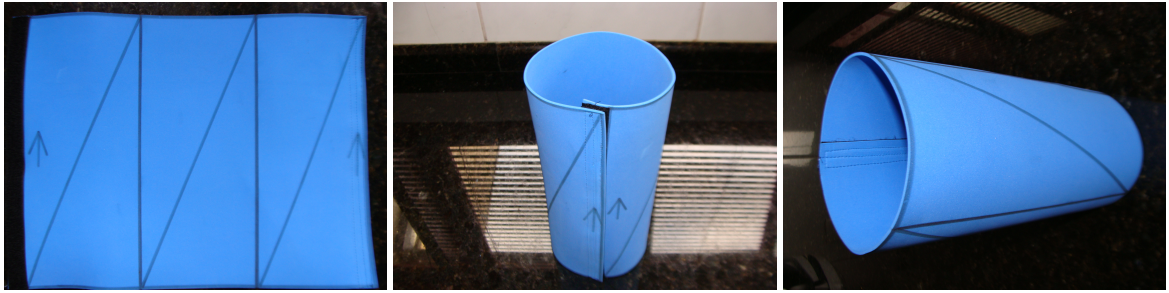
(x) Cilindro

Vértice: 6, Arestas: 12, Faces: 6

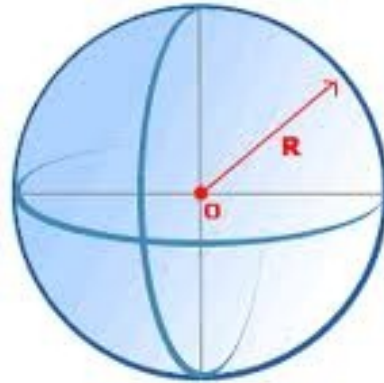
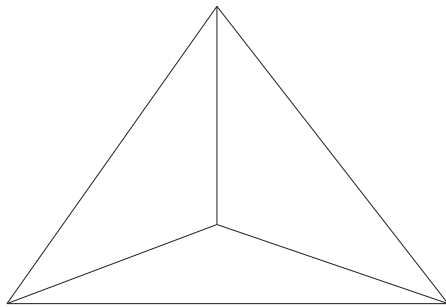
$$\chi(C) = v - a + f$$

$$\chi(C) = 6 - 12 + 6$$

$$\chi(C) = 0$$



2) A esfera S^2 .



Vértice: 4, Arestas: 6, Faces: 4

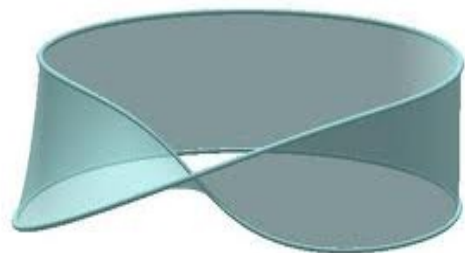
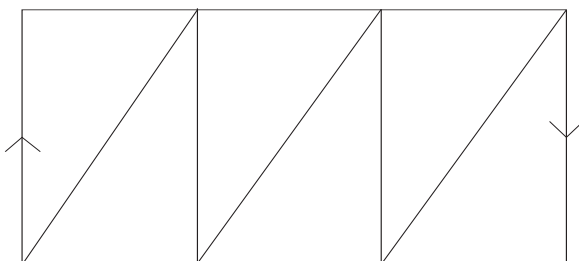
$$\chi(S^2) = v - a + f$$

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4$$

$$\chi(S^2) = 2$$



3) Faixa de Moebius



Vértice: 6, Arestas: 12, Faces: 6

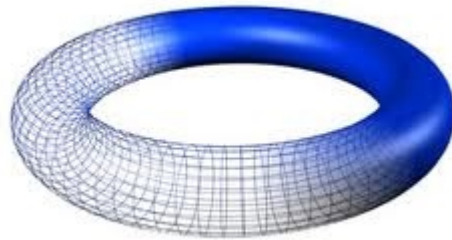
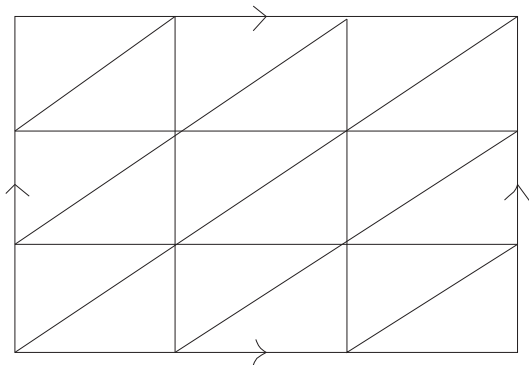
$$\chi(M) = v - a + f$$

$$\chi(M) = 6 - 12 + 6$$

$$\chi(M) = 0$$



4) O Toro T^2

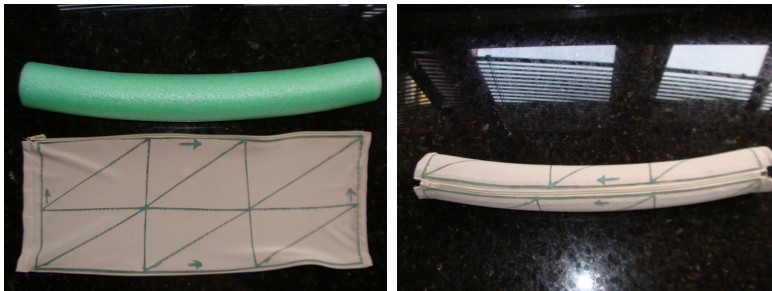


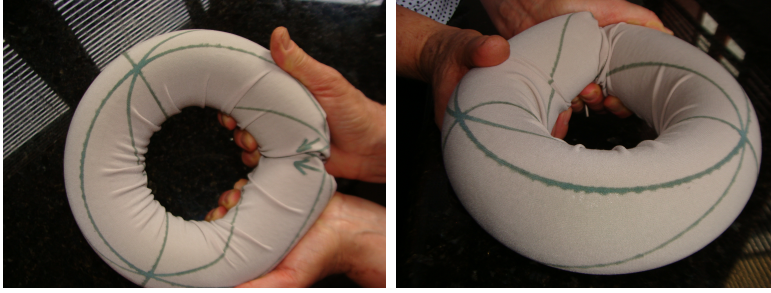
Vértice: 9, Arestas: 27, Faces: 18

$$\chi(T^2) = v - a + f$$

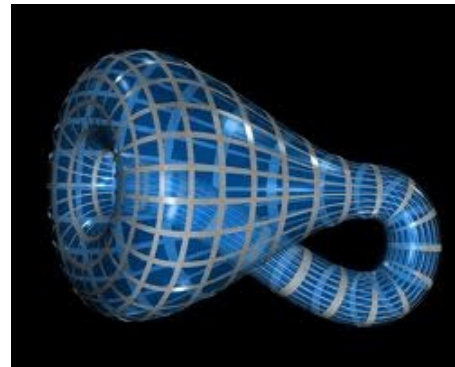
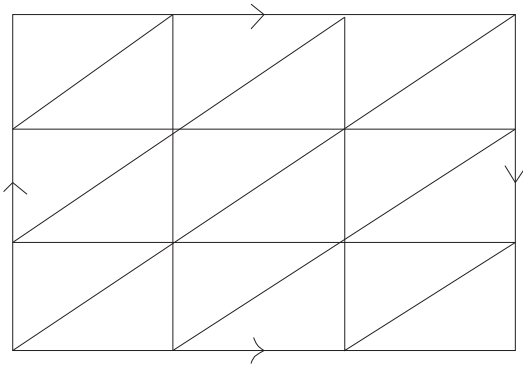
$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18$$

$$\chi(T^2) = 0$$





5) A Garrafa de Klein



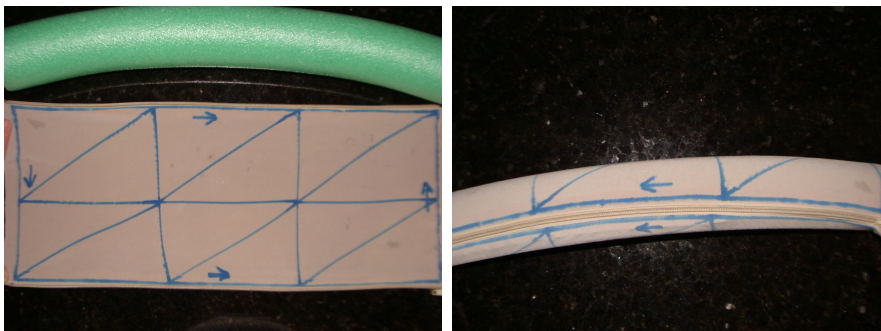
Vértice: 9, Arestas: 27, Faces: 18

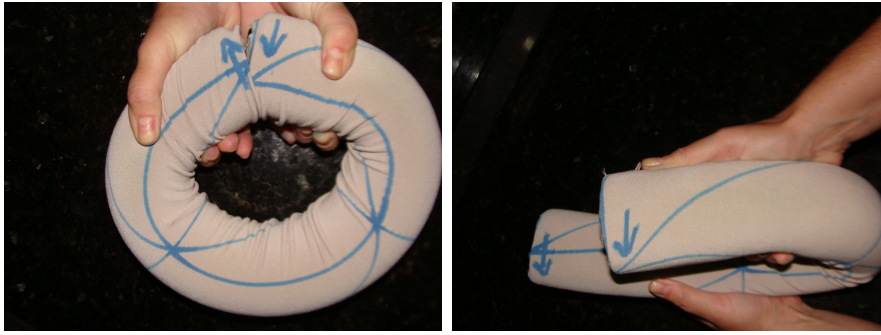
$$\chi(KB) = v - a + f$$

$$\chi(KB) = 9 - 27 + 18$$

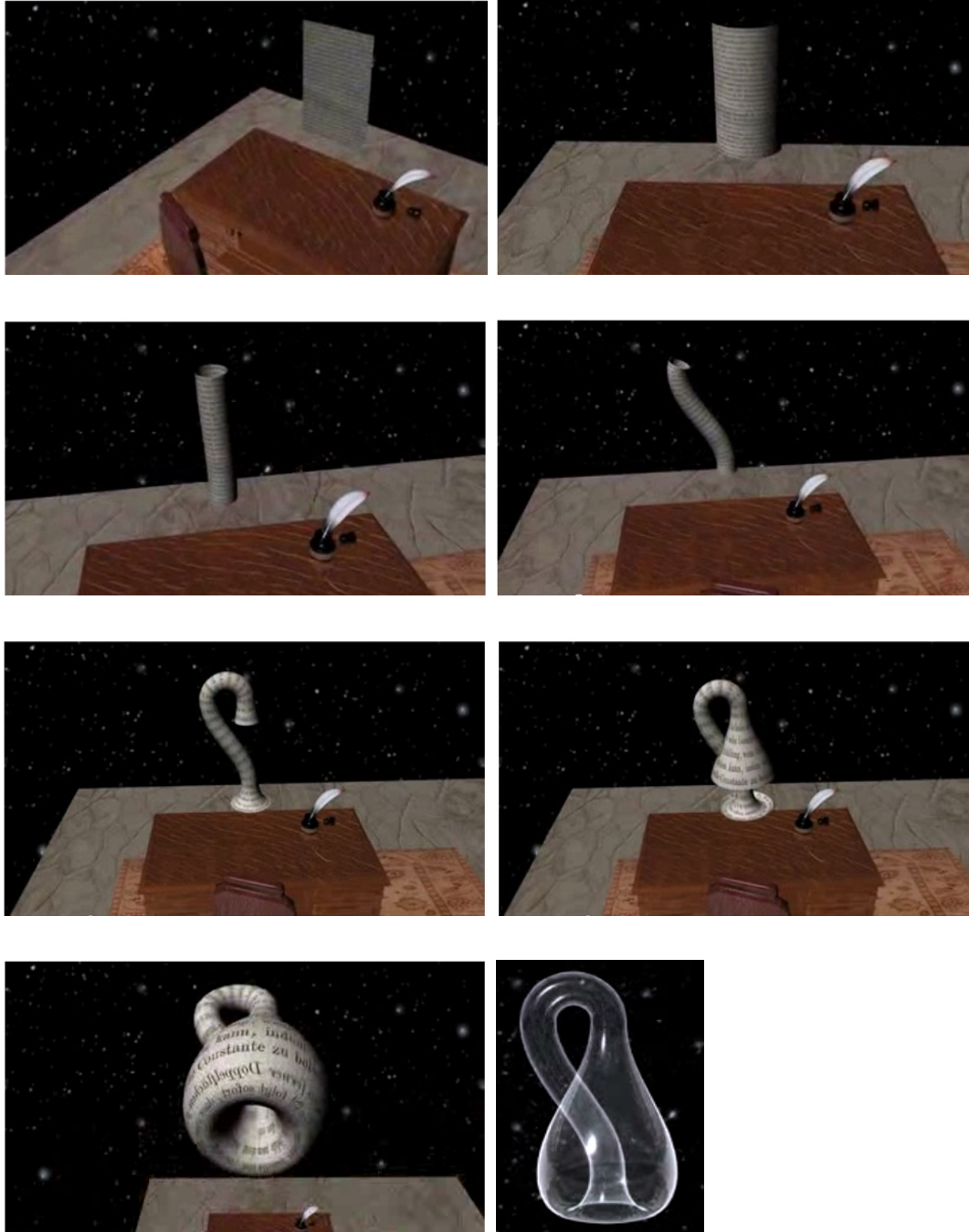
$$\chi(KB) = 0$$

Para que os alunos possam visualizar melhor o processo de deformação da folha de papel na construção da garrafa de Klein, passe o vídeo que está disponível no site <http://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4> e mostre através do material abaixo que o único modo de identificar os lados invertidos é introduzir pelo interior do cilindro formado, assim terão uma visualização do procedimento.





Segue abaixo uma parte da construção feita no vídeo passo a passo:



4.1.3 Um pouco da história-Encerramento da sexta aula

Leonhard Euler - O maior matemático de todos os tempos.



Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707, em Basileia, filho de Paul Euler, um pastor da Igreja Reformada, e Marguerite Brucker, filha de um pastor. Paul Euler era um amigo da família Bernoulli, Johann Bernoulli, que era considerado o mais importante matemático da Europa, acabaria por ser a mais importante influência sobre o jovem Leonhard. A educação formal de Euler começou em Basileia, onde ele foi enviado para viver com sua avó materna. Com 13 anos, ele se matriculou na Universidade de Basel e, em 1723 aos dezesseis anos, recebeu seu mestrado em Filosofia. Johann Bernoulli descobriu, rapidamente, incrível talento de seu novo aluno para a matemática. Euler começou estudar teologia, grego e hebraico, com a insistência de seu pai, a fim de tornar-se um pastor, mas Bernoulli convenceu Paul Euler que Leonhard estava destinado a se tornar um grande matemático. Em 1726, Euler completou uma dissertação sobre a propagação do som. Naquela época, ele procurava obter, mas sem sucesso, uma posição na Universidade de Basel. Em 1727, ele entrou para competir na Academia de Ciências de Paris, a qual o problema naquele ano era encontrar a melhor maneira de colocar os mastros num navio. Ele ganhou o segundo lugar, perdendo apenas para Pierre Bouguer, um homem agora conhecido como "o pai da arquitetura naval". Euler, posteriormente, ganhou este cobiçado prêmio anual doze vezes em sua carreira.

Contribuições para a matemática e física

Euler trabalhou em quase todas as áreas da matemática: geometria, cálculo infinitesimal, trigonometria, álgebra e teoria dos números, bem como teoria lunar e outras áreas da física. Euler é o único matemático que tem dois números em homenagem a ele: número imensamente importante de Euler no cálculo, e , aproximadamente igual a 2,71828, e a Euler-Mascheroni constante γ (gama) por vezes referido apenas como "constante de Euler", aproximadamente igual para 0,57721.

Euler foi o primeiro a chamar a atenção para o número $\chi(P) = V - A + F$ onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de um poliedro. Ele acreditou ter demonstrado que $\chi(P) = 2$ para todo poliedro, provavelmente admitindo como poliedro apenas aqueles que são homeomorfos a esfera, para os quais a igualdade acima é certamente verdadeira. O número $V - A + F$ é, sem sombra de dúvida, um achado de muita sorte. Depois de um longo período de trabalhos perdidos por vários matemáticos na direção de pistas falsas coube, finalmente, a Poincaré descobrir o verdadeiro significado do número que Euler descobriu, e a partir daí, $\chi(P)$ se tornou onipresente e fértil, como parte central de notáveis igualdades e como ponto de partida para importantes generalizações, revelando-se um verdadeiro traço de união entre campos distintos da matemática, como por exemplo a topologia.

Referências

- [1] LIBARDI, A.K.M., Vieira, J.P. e Melo, T. *Invariantes Topológicos*, 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012
- [2] LIMA, E.L. *Espaços Métricos* 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011
- [3] LIMA, E.L. *A Característica de Euler-Poincaré* Rio de Janeiro: IMPA, Artigos, 1985
- [4] LOIBEL, G.F. *Introdução à Topologia* Editora UNESP, 2007.
- [5] MASSEY, W.S. *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt Brace & World, Inc., 1984.
- [6] DOMINGUES, H.H. *Espaços Métricos e Introdução a Topologia*. São Paulo: ATUAL, 1982
- [7] BIANCHINI, E. *Componente Curricular: Matemática* 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004
- [8] PAIVA, M. *Matemática* 1. ed. São Paulo: MODERNA, 2009
- [9] SMOLE, K.C.S. *Matemática(Ensino Médio)* 6. ed. São Paulo: SARAIVA, 2010
- [10] BARROSO, J.M. *Conexões com a Matemática* Obra Coletiva 1. ed. São Paulo: MODERNA, 2010
- [11] DANTE, L.R. *Matemática, volume único* 1. ed. São Paulo: ÁTICA, 2005
- [12] DOLCE, O. *Fundamentos de Matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica* 6. ed. São Paulo: ATUAL, 2005