UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JÂMIA JURICH PILLATI

DISCUTINDO OS CONCEITOS DE MULTIPLICAÇÃO E EXPONENCIAL

CURITIBA

2021

JÂMIA JURICH PILLATI

DISCUTINDO OS CONCEITOS DE MULTIPLICAÇÃO E EXPONENCIAL

A discussion on the concepts of multiplication and exponential

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Orientador: Roy Wilhelm Probst
Coorientador: Mateus Bernardes

CURITIBA

2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JAMIA JURICH PILLATI

DISCUTINDO OS CONCEITOS DE MULTIPLICAÇÃO E EXPONENCIAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 10 de Fevereiro de 2021

Prof.a Elisandra Bar De Figueiredo, Doutorado - Fundação Universidade do Estado de Santa Catarina (Udesc)

Prof Mateus Bernardes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Nara Bobko, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 10/02/2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro, família e amigos pela compreensão e apoio durante este período. Em especial ao meu pai, que mesmo não mais fisicamente presente, sempre foi um grande incentivador da continuidade de meus estudos.

Aos meus colegas e às minhas colegas de trabalho, que me incentivaram e sempre que preciso me ajudaram da forma que fosse possível, bem como às unidades de ensino em que lecionei nestes três anos.

Às minhas parceiras de viagens e de estudos nesta caminhada, bem como à todos os colegas e professores que contribuíram em meu trajeto. Em especial aos professores orientador e coorientador pela paciência, persistência, compreensão e conhecimentos compartilhados.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

E à CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

RESUMO

PILLATI, Jâmia Jurich. **Discutindo os conceitos de multiplicação e exponencial**. 50 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

As operações matemáticas podem ser trabalhadas de algumas formas diferentes. Dentro do ensino básico, temos duas operações que são apresentadas de maneira, em maioria das vezes, padronizada: são estas operações a multiplicação e a exponenciação ou potenciação. Traz-se, através de artigos do matemático Keith Devlin, uma situação problema em relação a forma como estas operações são costumeiramente definidas. Nestes artigos afirma que as operações de multiplicação e de exponenciação não devem ser consideradas, respectivamente, como uma adição e uma multiplicação repetidas, pois, segundo o autor, isto gera uma discordância em relação a forma de ensinar e a definição matemática formal das operações. Referências que concordem ou discordem do autor são apresentadas, e em seguida trazemos os argumentos matemáticos formais com as definições das operações e dos entes matemáticos necessários para o estudo de tal situação. Apresentam-se também algumas atividades que venham a exemplificar uma outra forma de trabalhar as operações e a forma costumeiramente utilizada, quando necessário. Ressalta-se também a importância de observar o contexto em que as operações são apresentadas, para avaliar qual a melhor colocação para tal.

Palavras-chave: multiplicação; exponencial; soma repetida; multiplicação repetida.

ABSTRACT

PILLATI, Jâmia Jurich. **A discussion on the concepts of multiplication and exponential**. 50 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

Mathematical operations can be worked on in a few different ways. Within basic education, we have two operations that are presented, most of the time, in a standardized manner, these operations are multiplication and exponentiation or potentiation. Through the articles of the mathematician Keith Devlin, a problem situation is brought up in relation to the way these operations are usually defined. In these articles it is stated that the multiplication and exponentiation operations should not be considered, respectively, as a repeated addition and multiplication, because, according to the author, this generates a disagreement in relation to the way of teaching and the formal mathematical definition of operations. References that agree or disagree with the author are presented in this article, and then we bring the formal mathematical arguments with the definitions of the operations and the mathematical elements necessary for the study of such a situation. Some activities are also presented that will exemplify another way of working with operations and the usual way used, when necessary. It is important to considerer the context in wich operations are presented to assess the best placement for them.

Keywords: multiplication; exponential; repeated sum; repeated mulplication.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Aproximações por falta e excesso. 27
Figura 2 – Operação 2+3 transladando a reta 29
Figura 3 – Operação 2.3 ampliando a reta 30
Figura 4 – Operação $a^2.a^3$ ampliando a reta 30
Figura 5 – Ambiente coberto por folhas de jornal de mesmo tamanho 33
Figura 6 – Ambiente coberto com folhas de jornal que também foram cortadas para cobrir o espaço 33
Figura 7 – Retângulo formado pelos valores relacionados à multiplicação 34
Figura 8 – Retângulo com as dimensões divididas 34
Figura 9 – 15 unidades de área 35
Figura 10 – Dimensões em vermelho 35
Figura 11 – A área desejada (avermelhada) representa duas partes de 15 partes 36
Figura 12 – Elástico em seu estado natural 36
Figura 13 – Elástico durante a ação de esticar 37
Figura 14 – Elástico marcado após ser esticado 37
Figura 15 – Elástico em seu estado natural 38
Figura 16 – Mola em seu estado natural 38
Figura 17 – Mola esticada 39
Figura 18 – Mola comprimida 39
Figura 19 – Tabela preenchida pelos alunos após o processo de dobras. 41
Figura 20 – Eixos coordenados 43
Figura 21 – Tela do vídeo: Entendendo e elevado a πi. 45
Figura 22 – Tela do vídeo: Fórmula de Euler com uma Introdução à Teoria de Grupos. . 45

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**8**
2	**REFERENCIAL TEÓRICO**	**11**
3	**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS**	**18**
3.1	Operações nos Conjuntos Numéricos	18
3.1.1	Números Naturais	18
3.1.2	Números inteiros	19
3.1.3	Números Racionais	20
3.2	Anéis, Corpos e Grupos	22
3.2.1	Anel	23
3.2.2	Corpo	24
3.2.3	Grupo	24
3.3	Multiplicação	25
3.4	Exponenciais	25
3.4.1	Definição	25
3.4.2	Interpretação	28
4	**ATIVIDADES SUGERIDAS**	**32**
4.1	Multiplicação	32
4.1.1	Atividade dos jornais	32
4.1.2	Multiplicação e área	34
4.1.3	Atividade do elástico	36
4.1.4	Atividade da Mola	38
4.1.5	Receitas e multiplicação de frações	40
4.2	Exponenciação	41
4.2.1	Atividade da dobradura de papel	41
4.2.2	Resolução de problemas	42
4.2.3	Utilizando calculadora	42
4.2.4	Usando Teoria de Grupos	44
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**47**
	REFERÊNCIAS	**49**

1 INTRODUÇÃO

Ao observarmos livros didáticos de matemática do segundo ao quinto ano do Ensino Fundamental, podemos notar que, no primeiro destes anos, inicia-se o que se descreve nos livros como introdução à multiplicação. Neste momento, os alunos são submetidos a resolução de vários problemas simples, onde a forma de resolvê-los é adicionar, repetidas vezes, a mesma quantia. A partir de então, de terceiro ano em diante, prossegue-se um processo que, de modo geral, pode ser denominado como definição de multiplicação e introdução da tabuada, onde os alunos relacionam o fato de a adição repetida ser a definição de multiplicação e a partir deste ponto, passam a construir os resultados básicos da multiplicação, denominados de tabuada, utilizando-se desta definição (a qual veremos que é uma definição bastante particular, válida somente para um conjunto específico, ainda que a forma de relacionar o resultado à multiplicação possa ser adequada para o momento).

A partir deste ponto até o final desta primeira etapa educacional, que são os anos iniciais do ensino fundamental, este conceito de multiplicação se aplica perfeitamente às necessidades dos alunos, pois até o momento, os mesmos seguem utilizando apenas o conjunto dos números naturais, no que diz respeito às necessidades escolares. Ao findar esta etapa escolar e iniciar os anos finais do Ensino Fundamental, os alunos passam a se deparar com outros conjuntos numéricos, e consequentemente a realizar operações nestes conjuntos. No entanto, ao utilizarmos a bagagem adquirida pelo aluno na compreensão das mesmas operações que ele estava realizando anteriormente, não há possibilidade de relacionar a multiplicação à uma adição repetida nos demais conjuntos numéricos. Inicia-se um impasse devido à uma definição limitada no que diz respeito aos conjuntos numéricos.

São então apresentados novos conceitos de multiplicação, onde mostra-se ao aluno uma outra forma de realizar a mesma operação, sem desfazer o fato de que com os naturais ela seja uma adição repetida. Logo, o aluno precisa trabalhar com o fato de que a multiplicação é uma adição repetida, conforme lhe é informado há aproximadamente quatro anos, mas deve se lembrar que ela pode ser outra coisa que não adição repetida, dependendo de qual conjunto numérico ele está trabalhando. Além de que, o fato de estarmos falando de números reais não nos permite dar mais de uma definição para a operação aplicada no conjunto, estamos fazendo com que, no parecer do estudante, o que é dito em matemática pode ser "desdito", e não conseguimos criar uma conexão confiável. Este pode ser ou não, segundo Devlin (DEVLIN, 2008b), um dos fatos de, atualmente existir imensa dificuldade de compreensão da matemática e de seus conceitos.

Não obstante, ainda neste mesmo período em que colocamos para o aluno a multiplicação como um conceito diferente para estes 'novos números' dos quais acabou de se apropriar, surge uma nova operação, denominada de potência, que inicia mais um impasse, quando em termos de definição. Assim como a multiplicação é apresentada como uma adição repetida, a potenciação é apresentada como uma multiplicação repetida. O que neste momento, não ocasiona maiores problemas, uma vez que o trabalho inicial será feito dentro de um conjunto que permita que isto ocorra.

Mais adiante, quando estes conceitos de potência estão bem definidos, os alunos, geralmente já no Ensino Médio, passam a trabalhar com funções, e mais especificamente com a função exponencial. Para tanto, lhes é introduzida a exponencial focada no conceito de potência. Pois bem, acontece que neste momento já estamos trabalhando com outros conjuntos numéricos mais abrangentes, como os números racionais e irracionais, ou seja, como multiplicar um número uma quantia fracionária ou irracional de vezes ($3/4$ ou π por exemplo). Não há mais sentido na definição que foi apresentada. E novamente, será necessário refutar o que foi anteriormente escrito para apresentar uma definição diferente, mas que se adapte ao contexto trabalhado.

Com base neste contexto de indefinição de conceitos matemáticos, o intuito é estudarmos alguns meios de como a multiplicação e exponencial são apresentadas e quais as definições mais adequadas. Que fique claro que o objetivo trabalho não é sugerir que sejam apresentados na escola conceitos de educação superior, e sim mostrar que é possível visualizar tanto a multiplicação quanto a exponencial de uma forma alternativa, que não se baseia simplesmente na ideia de que seriam apenas repetições de operações mais simples (soma, no caso da primeira e produto, para a segunda).

Para alcançar este objetivo, este trabalho está dividido da forma como se segue. No Capítulo 2 mostramos a discussão que motivou este trabalho: afinal, a multiplicação é uma soma repetida? E a exponencial? Relaciona-se apenas a repetição da operação de produto? Veremos que a grande maioria dos autores tem uma opinião comum em relação às operações, porém há sutis diferenças em suas falas que fazem com que estejam em grupos distintos no que diz respeito às operações serem definidas ou não como soma e multiplicação repetidas.

No Capítulo 3, iniciamos trazendo uma compilação dos fundamentos matemáticos que são essenciais para o aprofundamento da discussão originada no capítulo anterior: números naturais, números inteiros, números racionais, anéis, corpos e grupos. Estas definições serão necessárias para a formalização dos conceitos de multiplicação e exponenciação, buscando compreender se resumem-se apenas a adição e multiplicação repetidas, respectivamente. Ao leitor que sentir-se seguro com as definições dos fundamentos citados, a leitura dos itens 3.1 (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3) e 3.2 (3.2.1, 3.2.2, 3.2.3), pode ser suprimida, uma vez que são de fácil acesso em referências tradicionais como (BASSALO, 2008), (MILIES; COELHO, 2001), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), (LIMA, 2013), (LIMA, 2018), (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Já no Capítulo 4 são mostradas algumas sugestões de atividades que estejam de acordo com as definições das operações apresentadas no capítulo anterior, mas que sejam de possível aplicação no Ensino Básico (no caso da multiplicação). Algumas delas são simples e lúdicas e ilustram a forma como esta operação pode ser trabalhada de maneira mais abrangente. No caso da exponencial será apresentada uma definição de acordo com o Ensino Superior, além de algumas atividades a serem aplicadas no ensino básico, porém isso ficará claro. Por fim, reservamos o Capítulo 5 para as considerações finais, onde faremos a ligação entre os capítulos apresentados e a similaridade ou não dos meios de se apresentar multiplicação e exponencial como soma e multiplicação repetidas, compreendendo se estas estão de acordo com o formalismo matemático apresentando anteriormente.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

“Livrar-se desses balões flutuantes seria um primeiro passo valioso! Parar os professores dizendo que a multiplicação é uma soma repetida seria um segundo” (DEVLIN, 2007). Foi com esta pequena declaração em sua coluna mensal, em setembro de 2007 que Devlin iniciou, uma pequena série sobre a multiplicação como sendo, ou não, uma adição repetida.

Em seu trabalho seguinte (DEVLIN, 2008a), após receber diversos e-mails e correspondências o indagando a respeito de sua declaração e mesmo refutando tal afirmação, o matemático nos expõe que justamente o fato de que uma grande quantia de educadores veio a defender veementemente a ideia de que a multiplicação seja, sem sombra de dúvidas, uma adição repetida, justifica sua preocupação em relação ao assunto. Ele alega que a multiplicação não é adição repetida pelo principal fato de que, desta forma, a operação somente seria válida para o conjunto dos números naturais, e não para os demais conjuntos numéricos. Para ele, deve-se tratar as operações de multiplicação e adição como elas são: duas operações distintas. O fato de que algumas multiplicações coincidem com o resultado de soma repetidas pode ser um truque ensinado ou mesmo algo descoberto pelo próprio aluno. Há necessidade de deixar isto claro desde o início, pois caso contrário, o aluno pode vir a pensar que existe uma regra diferente para cada tipo de conjunto em relação à multiplicação, ou ainda, ao ter um conceito incompleto, criar suas próprias definições errôneas à respeito de tal. Em alguns exemplos em que deixa clara a diferença entre as operações, é que, no cotidiano, utiliza-se a adição relacionada à coleções, já a multiplicação é mais utilizada em termos de dimensões. Praticidades em relação a isto, afirma, podem ser mostradas aos alunos. Deixa claro que pode haver um receio por parte dos educadores, mas que é necessário trabalhar a matemática em sua parte abstrata também, afinal, a matemática é abstrata.

Ao contrário do que esperava, sua coluna não convenceu aos professores, e voltou a receber mais cartas e emails, escrevendo então um novo texto à respeito do assunto, desta vez um tanto mais extenso. Neste contexto, explicou que muitos não tinham domínio dos conceitos básicos de aritmética, e talvez por isso fosse um tanto complicado compreender que as operações se relacionam, mas são independentes. Para, como o próprio autor escreveu, “persuadir” os professores, um dos exemplos que descreveu em sua coluna foi o seguinte:

> “Imagine seu filho aprendendo a dirigir um carro. Você paga um curso com as lições, e ao final da primeira semana você pergunta como está indo. ‘Como assim você está aprendendo a engatar o cavalo na carroça? Eu pensei que você estava aprendendo a dirigir!’ ‘Sim, nós estamos. Mas o professor disse que devemos levar em conta o fato de que as carroças vieram antes dos automóveis. As duas formas de transporte têm muito em comum, quatro rodas, um chassi, bancos e assim por diante, mas a forma anterior é mais básica, pois o ‘motor’ e o combustível ocorrem

naturalmente (cavalos e fenos) e não precisava ser desenhado e construído por pessoas. Então meu professor acredita que o melhor caminho para aprender como dirigir é primeiro mostrar o mais básico, o método mais antigo, que as pessoas usaram há milhões de anos atrás, e então mostraremos como modificar o que aprendemos no caso de automóveis. Vamos aprender a entender carros e como os dirigir através da interpretação de seus termos para a carroça, que são mais básicos". (DEVLIN, 2008a)

A partir daí, Devlin comenta que por mais que desde muito tempo explica-se a multiplicação da mesma forma, e por mais que em algum momento da história ela pode ter sido definida como dependente da adição, não há necessidade de dificultar as coisas sendo que é possível facilitá-las. Assim como o exemplo da carroça, atualmente é mais viável que se aprenda a dirigir diretamente o automóvel com suas particularidades e desafios. Para ele, o mesmo é feito com a operação de multiplicação, onde através deste caminho mais longo, antigo e talvez antiquado, podem-se acarretar erros irreversíveis que venham a dificultar a vida escolar do aluno, daí a importância de se tratar de forma individual cada uma destas operações. Ainda, utilizando exemplos na natureza que comprovam a individualidade de ambas, exemplos que mostram as operações como criadas de acordo com a necessidade da evolução humana. Defende que um dos problemas para esta necessidade de se definir as operações como independentes, é esta ânsia criada por mostrar a operação de forma concreta, "mas a matemática é abstrata, é de onde ela mantém a sua força". Respondendo à pergunta de o que é, então, a multiplicação, recorre a própria aritmética ao afirmar que a operação é definida de forma axiomática, onde sabe-se o que a operação faz, e não exatamente 'o que' ela é. Ou seja, observar a atividade realizada dentro de um conjunto numérico, que como explica, é o conjunto dos números reais, aquele que abrange a necessidade do mundo real e que portanto é o básico, sendo a multiplicação de números naturais nada mais que um caso particular. O que deixa bem claro é que, o autor não está sugerindo que a multiplicação seja ensinada da forma como é ensinada no Ensino Superior, mas que seja de forma a não contradizer os conceitos matemáticos.

Para deixar ainda mais claro que a multiplicação não é uma adição repetida, Devlin (DEVLIN, 2011) faz mais um apelo em sua coluna com a intenção de que a multiplicação não seja explicada como uma soma repetida, para que não hajam meias verdades no processo educacional ou uma falsa crença. Buscando convencer os educadores, usa argumentos matemáticos, afirmando que para ele, a multiplicação "é uma função binária em números, cujo comportamento é descrito por axiomas". Para mostrar que no mundo real a multiplicação tida como adição repetida não é comutativa (o que vai contra uma propriedade de multiplicação), ele nos diz:

"Além disso, as duas coleções adicionadas precisam ter as mesmas unidades. Você pode adicionar 3 maçãs a 5 maçãs para obter 8 maçãs, mas não pode adicionar 3 maçãs a 5 laranjas. Para adicionar, você precisa alterar as unidades para torná-las iguais, digamos, classificando ambas como frutas, de modo que 3 frutas mais 5 frutas sejam 8 frutas. Mas para a multiplicação, as duas coleções são de natureza muito diferentes e necessariamente têm unidades diferentes . Com a multiplicação você tem um multiplicando (escrito em segundo) multiplicado por um multiplicador (escrito em primeiro lugar). A unidade para o multiplicador deve ser conjunto da unidade para o multiplicando. Por exemplo, se você tiver 3 sacos cada um contendo 5 maçãs, poderá multiplicar para dar

$$3 \text{ sacos} \times 5 \text{ maçãs}/\text{saco} = 15 \text{ maçãs}.$$

Observe como as unidades são canceladas:

$$\text{saco} \times \text{maçãs}/\text{saco} = \text{maçãs}.$$

Neste exemplo, existe a possibilidade de realizar uma adição repetida: você espia cada bolsa uma por vez e adiciona. Como alternativa, você esvazia os 3 sacos e conta o número de maçãs. De qualquer maneira, você determinará que existem 15 maçãs. Claro que você obtém a mesma resposta se multiplicar. É um fato sobre a multiplicação inteira que fornece a mesma resposta que a adição repetida. Mas dar a mesma resposta não torna as operações iguais.

A falácia de que multiplicação é adição repetida se torna muito aparente quando você considera um segundo exemplo, onde tomo uma faixa elástica de 7,5 polegadas e a estico por um fator de 3,8. O comprimento final da banda é de 28,5 polegadas. Mas quais são as unidades? O que se passa após o número 3,8 no cálculo

$$3{,}8 \ \times 7{,}5 \text{ polegadas} = 28{,}5 \text{ polegadas?}$$

A resposta não é nada. Não possui unidades. Nesse caso, o 3,8 é um fator de escala sem dimensão. Aliás, mesmo quando o comprimento inicial da banda e o fator de escala são números inteiros positivos, não faz sentido ver este exemplo como uma adição repetida. Se eu pegar uma faixa elástica de 7 polegadas e esticá-la por um fator de 3, seu comprimento final será

$$3 \ \times 7 \text{ polegadas} = 21 \text{ polegadas}.$$

Mas eu não tirei 3 cópias de uma banda de 7 polegadas e as juntei (adição), mas escalei (estiquei) a banda de 7 polegadas por um fator de 3.

E quando você usa a multiplicação para calcular a área de um retângulo? Se o retângulo é π polegadas por e polegadas (onde e é a base dos logaritmos naturais), sua área é

$$\pi \text{ polegadas} \times e \text{ polegadas} = \pi \ e \times \text{polegadas}^2,$$

ou, em termos numéricos aproximados

$$3{,}14 \text{ polegadas} \times 2{,}72 \text{ polegadas} \;=\; 8{,}54 \text{ polegadas}^2.$$

Mais uma vez, observe as unidades (Observe também que a adição repetida não vai muito longe com este exemplo)”. (DEVLIN, 2011)

Com isto pode-se observar a afirmação do autor de que, para ele a multiplicação é multifacetada, porém está construída em seu ser sempre relacionada a escalas, mesmo que seja este um conceito físico, também não muito simples de se abstrair. Deixa a sugestão que tente-se tratar desta questão de maneira simplória, porém diferenciada desde o início do processo educacional, para que facilite a compreensão geral da operação.

Dentre tantos apontamentos que Devlin (DEVLIN, 2008a; DEVLIN, 2008b) fez nos trabalhos em sua coluna à respeito da multiplicação como não sendo uma adição repetida, ele afirma ainda que são três as operações básicas da aritmética: adição, multiplicação e exponenciação. E que, multiplicação não é adição repetida, bem como exponenciação não é multiplicação repetida.

Uma publicação da Revista Cálculo (SÔNEGO; DREHER; SIMÕES, 2014b), referenciando os artigos escritos por Keith Devlin aqui citados, também afirma que a multiplicação não é adição repetida, uma vez que ambas são definidas por conjuntos de axiomas diferentes. Ainda, para nos mostrar o porquê de não podermos utilizar este fato simplesmente por ser assertivo no conjunto dos números naturais, nos explica que isto dá-se ao fato deste conjunto com a multiplicação usual não ser um grupo, logo as operações não estariam bem definidas, em especial, a multiplicação, que não possui inverso multiplicativo dentro deste conjunto. Para ilustrar, usa o exemplo do elástico (vide Capítulo 4) inclusive ao contrário, como uma atividade que pode ser mostrada em sala de aula (percepção de que há aumento e diminuição em relação à multiplicação), como exemplo de que os valores coincidem (adição repetida e multiplicação), o exemplo dos potes de arroz (pois é trabalhoso contarmos os grãos de arroz um por um, porém é nítido que é uma soma repetida e não uma multiplicação na realidade dos fatos), e ainda sugere que sejam usados outros exemplos para demonstrar que na vida real, no concreto, percebe-se que as operações são distintas. O artigo nos mostra elementos que justificam a distinção tanto em relação à matemática de Ensino Superior, quanto em relação ao ensino de matemática básica.

Por outro lado, temos os autores que defendem a definição de soma repetida. Quando falamos sobre a multiplicação e a relação com a tabuada, o que pode-se perceber é que a grande maioria dos autores de artigos, creem que a definição de multiplicação dá-se nos números naturais (embora a maioria se utilize dos inteiros, somente exemplificam no primeiro dos conjuntos), e que, a tabuada nada mais é que a tábua de comprovação de tal definição. Cunha (CUNHA, 1997), uma das fontes mais citadas nos artigos de professores de anos iniciais e de matemática que escreveram sobre o tema, afirma que a melhor definição de multiplicação é dada no conjunto dos inteiros, a soma repetida, com base em referências que variam de 1300 à 1550. Souza (SOUZA, 2010), escreve que a adição repetida é um dos conceitos de multiplicação, em um trecho, diz que os alunos "passam a calcular por meio de adição de parcelas iguais e, consequentemente, recorrem à multiplicação". Em sites de estudos para os alunos do Ensino Básico, como *Brasil Escola* (MOREIRA, 2020), há textos que afirmam que a multiplicação, nada mais é que "uma evolução natural da adição".

Lima e Maranhão (LIMA; MARANHÃO, 2014), trazem uma abordagem histórica da relação de multiplicação e tabuada. Segundo os autores, a matemática no Brasil pautava-se em especial na matemática francesa, onde, até os anos 70, a multiplicação era tratada especificamente como adição repetida. Já deste período em diante, na França, passou-se a relacionar a multiplicação à áreas de figuras retangulares, dispondo-se da ideia de que as operações de multiplicação e adição repetida obtiam o mesmo resultado. Deste momento em diante os autores pautam a definição de multiplicação, principalmente no seguinte trecho:

> "primeiramente deve surgir a multiplicação, como forma abreviada de realizar adições de um grande número de parcelas iguais, para somente então, surgir a necessidade de criação da tabuada, como maneira de se possibilitar economia em cálculos envolvidos nos problemas." (LIMA; MARANHÃO, 2014, p. 06)

Por mais que, assim como em sua citação, defendessem a ideia de que a multiplicação é uma adição repetida, para Lima e Maranhão (LIMA; MARANHÃO, 2014), não há necessidade de memorização, pois sendo esta uma adição repetida, basta que se realize a soma para encontrar o resultado que se procurava.

> "Para construírem uma tabela de multiplicação de números naturais de zero a dez, por exemplo, sabendo fazer adição com estes números, inicialmente os alunos precisam saber que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais." (LIMA; MARANHÃO, 2014, p. 16)

Hobold e Rosa (HOBOLD; ROSA, 2017) trazem uma visão mais abrangente sobre o assunto, tratam a multiplicação, em primeira apresentação como relacionada a áreas de retângulos, mostrando ao leitor com maior domínio em matemática, que a tabuada apresenta-se como uma progressão aritmética, onde a soma repetida é uma tática para obter-se os resultados almejados. Tratam que é necessário trabalhar as propriedades da multiplicação, como distributividade e associatividade, ao montar-se a tabuada, diferenciando a operação de multiplicar do instrumento que facilita este processo (tabuada). Pires, Abrantes e Borba (PIRES; ABRANTES; BORBA, 2015), compactuam da ideia de que a adição repetida nada mais é que uma tática para encontrar os resultados utilizados na construção da tabuada, sendo que a multiplicação é um conceito lógico e que se deve escolher a melhor estratégia para se obter o resultado.

Costa e Holanda (HOLANDA; COSTA, 2018) em um estudo de campo buscando verificar se, em acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), os alunos do sétimo ano já dominavam a multiplicação, conferiram que no cenário real, não é isto que ocorre. Mesmo sem definir a multiplicação, os mesmos acreditam que é necessário que a tabuada seja memorizada, mas não de forma vazia, e sim considerando-se a compreensão das propriedades multiplicativas para agilizar os demais processos matemáticos que os alunos venham a aprender em seu desenvolvimento educacional. Relacionam a multiplicação às suas propriedades, e não à uma definição específica da operação.

No próprio Currículo Base da Educação Infantil e do Ensino Fundamental de Santa Catarina (SED/SC, 2019), quando em fase de se mostrar que um exemplo pode ser utilizado para apropriação de diversos conceitos matemáticos, menciona-se que "A operação da multiplicação define-se como uma soma de parcelas iguais". Utilizando-se da palavra definição, considera-se que é esta a maneira matemática formal de se desenvolver a multiplicação. Tal fato apresenta-se no contexto do Ensino Fundamental, no item a que se refere à disciplina de matemática, como sugestão a ser utilizada em sala de aula. Podemos observar a partir daí que, por mais que no Ensino Fundamental vamos trabalhar com o conjunto dos números racionais, apresenta-se uma técnica de multiplicação que não abrange este conjunto. Através destes instrumentos, podemos perceber que falta uma definição formal e abrangente desta operação.

No que se refere à potência, temos em alguns livros de Ensino Fundamental, como no livro didático de Dante e Viana (DANTE; VIANA, 2018), definições como "Cada multiplicação que aparece nessa situação tem fatores iguais. Multiplicações desse tipo caracterizam a operação potenciação". De forma generalizada, relaciona-se a potência como uma multiplicação de fatores iguais.

Paias (PAIAS, 2009), insere o conceito de potências da seguinte maneira:

> "Podemos considerar na aritmética, no Conjunto dos Números Naturais, além das quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, outras três relacionadas; potenciação, radiciação, logaritmação. A potência a^n, com $a \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida como um produto de fatores iguais no qual $a^n = a.a.a.a$ (n vezes). Temos também que $a^1 = a$ e $a^0 = 1$. Ao número a damos o nome de base, ao número n chamamos de expoente e o resultado de potência." (PAIAS, 2009, p. 38)

Ainda utilizando-nos de uma linguagem mais destinada ao nível de escolaridade do Ensino Fundamental, Longen (LONGEN, 2018), descreve o seguinte "Vimos que a potenciação pode representar uma multiplicação com fatores iguais." Nesta pequena frase podemos observar que o autor utiliza a multiplicação de potências iguais como uma forma de alcançar o resultado de uma potência, mas não utiliza esta forma como definição para a operação de potência.

Ainda segundo o mesmo artigo da Revista Cálculo (SÔNEGO; DREHER; SIMÕES, 2014b), assim como não é certo vincularmos a ideia de multiplicação à adição repetida, não é correto relacionarmos a ideia de potência à multiplicação repetida. Pois, seguindo esta lógica, potência é multiplicação e multiplicação é soma, logo, potência é soma, portando não enxergam-se três operações distintas, e sim uma operação: somente a soma.

Apresentamos alguns autores que venham a concordar com a ideia de que uma operação é dependente de outra, bem como autores que não concordem com esta ideia e ainda que combinem ambas as definições. Considerando os pontos colocados neste capítulo, para que possamos ter uma visão mais ampliada sobre o assunto em relação a formalidade de definições e propriedades sobre as operações de soma, multiplicação e exponenciação, trataremos de conceitos e definições mais sofisticados.

3 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo introduzimos conceitos fundamentais para a formalização das operações básicas dentro dos conjuntos numéricos usualmente trabalhados no Ensino Básico. Para esta apresentação nos baseamos na bibliografia tradicional para este assunto, tanto a do Ensino Básico quanto a do Superior, como citado na introdução. Desta forma, a leitura pode ser suprimida num primeiro momento para aqueles que já tem familiaridade e segurança sobre o assunto. A motivação para apresentação destes conceitos matemáticos formais, vem de artigos publicados na Revista Cálculo (SÔNEGO; DREHER; SIMÕES, 2014b; SÔNEGO; DREHER; SIMÕES, 2014a), e vídeos confeccionados pelo canal do YouTube 3Blue1Brown, que também serão apresentados.

3.1 OPERAÇÕES NOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Nesta seção trataremos das operações básicas de soma e produto nos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

3.1.1 NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) pode ser definido de maneira axiomática pelos Axiomas de Peano, listados abaixo (LIMA, 2013):

Ax 1 Todo número natural tem um único sucessor;

Ax 2 Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

Ax 3 Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

Ax 4 Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in \mathbb{X}$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Neste conjunto, definem-se duas operações, denominadas de fundamentais, são as mesmas as operações de soma e multiplicação. Estas operações associarão a cada par de números $(m; n)$, a soma, representada por $m+n$ e a multiplicação por $m.n$, seguindo os seguintes axiomas (LIMA, 2018; MILIES; COELHO, 2001):

N1 $m + 1 = s(m)$;

N2 $m + s(n) = s(m + n)$, isto é $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, com $s(n) = n + 1$;

N3 $m \cdot 1 = m$;

N4 $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.

3.1.2 NÚMEROS INTEIROS

Lima (LIMA, 2018), representa os números inteiros partindo da definição dos números naturais representados como pontos de uma reta, onde são inseridos também àqueles a esquerda de zero. Utilizando estes elementos, dá-se que o conjunto é definido por:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

onde $-\mathbb{N}$ é o conjunto que permite a validade da propriedade $Z3$ dada adiante.

Milies e Coelho (MILIES; COELHO, 2001) nos trazem um conceito diferenciado deste conjunto, no qual o definem através das operações nele efetuadas, sendo estas as operações de soma (também representada por $+$) e a operação de multiplicação (representada também por $\cdot$). Ainda, neste conjunto é possível comparar todos os seus elementos através da relação de maior que ou igual a, representada pelo símbolo $\geq$. Vejamos abaixo as propriedades para as operações nos inteiros:

Z1 *Propriedade Associativa da Soma*: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

Z2 *Existência do Elemento Neutro da Soma*: Para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe um único elemento, denominado neutro aditivo ou zero, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a;$$

Z3 *Existência do Oposto para Soma*: Para cada inteiro a existe um único elemento que chamaremos oposto de a e indicaremos por $-a$, tal que:

$$a + (-a) = 0;$$

Z4 *Propriedade Comutativa da Soma*: Para todo par a, b de inteiros tem-se:

$$a + b = b + a;$$

Z5 *Propriedade Associativa do Produto*: para toda terna a, b, c de inteiros, tem-se que:

$$a(bc) = (ab)c$$

Z6 *Existência do Neutro para o Produto*: Existe um único elemento, diferente de zero, denominado *neutro multiplicativo*, que indicaremos por 1, tal que

$$1 \cdot a = a,$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$;

Z7 *Propriedade Cancelativa do Produto*: Para toda terna a, b, c de inteiros, com $a \neq 0$, tem-se que

$$\text{se } ab = ac, \text{ então } b = c;$$

Z8 *Propriedade comutativa do Produto*: Para todo par a, b de inteiros, tem-se que:

$$ab = ba;$$

Z9 *Propriedade Distributiva do Produto*: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Trabalhando com os axiomas e as propriedades nestes conjuntos, podemos perceber que não tem-se a existência do elemento inverso na multiplicação. Somente com os conjuntos naturais e inteiros não apresenta-se a prerrogativa de que se $a \cdot b = 1$, então $b = 1/a$ ou $a = 1/b$. Para tanto é necessário que tomemos um conjunto mais abrangente, como o dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

3.1.3 NÚMEROS RACIONAIS

Segundo Lima (LIMA, 2018) temos que este conjunto é formado pelas abcissas dos pontos x do eixo real, sendo o segmento Ox mensurável. Este conjunto é formado por frações da forma m/n, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

Sabemos que frações diferentes podem representar o mesmo número, e uma das formas de restringir o conjunto dos números racionais apenas às frações irredutíveis aparece na definição deste conjunto e de suas operações, que aparece em Coelho e Milies (MILIES; COELHO, 2001), onde parte-se do conjunto quociente, denotado por ($\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}^*$)/$\equiv$ e determinado pela relação:

$$\frac{m}{n} \equiv \frac{x}{y} \Longleftrightarrow m \cdot y = n \cdot x, \tag{3.1}$$

de tal forma que cada número racional a/b é uma classe de equivalência dada por:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \{(x; y) \in \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^* \mid (x; y) \equiv (a; b)\} = \{(x; y) \in \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^* \mid xb = ya\}. \tag{3.2}$$

Esta definição permite criar aquele que é justamente o conjunto dos números racionais, denotado a partir daí por $\mathbb{Q}$. Para este conjunto, vejamos as definições das operações de soma e produto, relacionando suas propriedades.

Definição de Soma: Seja $\alpha = \dfrac{a}{b}$ e $\beta = \dfrac{c}{d}$ com (a, b), $(c, d) \in \mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}^*/\equiv$, definimos $\alpha + \beta$ como o racional:

$$\alpha + \beta = \frac{ad + bc}{bd}.$$

A operação de soma seguirá as seguintes propriedades:

Q1 *Associatividade para Soma*: para toda terna α, β e γ de números racionais tem-se:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma;$$

Q2 *Existência do Elemento Neutro para a Soma*: Existe um único elemento que chamaremos de neutro aditivo ou zero que será representado por 0, tal que:

$$\alpha + 0 = \alpha, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{Q};$$

Q3 *Existência do Oposto para Soma*: Para cada racional α existe um único elemento, que chamaremos de oposto de α e representaremos por $-\alpha$, tal que:

$$\alpha + (-\alpha) = 0;$$

Q4 *Comutatividade da Soma*: Para todo par (α, β) de racionais, tem-se que:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Já a operação de multiplicação, na qual o resultado é denominado produto, é definida da seguinte maneira:

Seja $\alpha = \dfrac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ o produto $\alpha\beta$ (é possível suprimir o ponto quando representamos a multiplicação), é dado por:

$$\alpha\beta = \frac{ac}{bd}.$$

Para esta operação valem as seguintes propriedades:

Q5 *Associatividade do Produto*: Para toda terna, α, β, γ de números racionais, temos que:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma;$$

Q6 *Existência de Neutro para o Produto*: Existe um único elemento, que chamaremos de neutro multiplicativo e será indicado por 1, tal que, para $\alpha \in \mathbb{Q}$:

$$1 \cdot \alpha = \alpha;$$

Q7 *Existência de inverso multiplicativo*: Para cada racional α diferente de zero, existe um único elemento que chamaremos de inverso de α e será denotado por α^{-1}, tal que:

$$\alpha\alpha^{-1} = 1;$$

Q8 *Comutatividade do Produto*: Para todo par (α, β) de racionais tem-se que:

$$\alpha\beta = \beta\alpha;$$

Q9 *Propriedade Cancelativa do Produto*: Dada uma terna de números racionais α, β, γ, com $\alpha \neq 0$, tem-se:

$$\text{Se } \alpha\beta = \alpha\gamma, \text{ então } \beta = \gamma;$$

Q10 *Distributividade*: Para toda terna de números racionais α, β, γ tem-se que:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Assim, nestes conjuntos se definem estas operações independentes uma da outra (soma e multiplicação) e que gozam destas propriedades descritas, isto é, o mais importante aqui é que as operações são caracterizadas mais pelo que elas fazem do que pelo que elas são.

3.2 ANÉIS, CORPOS E GRUPOS

Para que possamos dar continuidade às considerações em relação às operações de multiplicação e exponenciação nos conjuntos numéricos citados, precisamos de mais algumas definições de entes matemáticos, como anel, corpo e grupo.

3.2.1 ANEL

Define-se anel como um conjunto não vazio no qual estejam bem definidas as operações de adiçãoe e multiplicação, denotadas respectivamente por $+$ e $\cdot$. Se A é um conjunto não vazio, estas duas operações são fechadas dentro deste conjunto, isto é,com soma e produto de dois elementos do anel, obtém-se elementos ainda pertencentes ao anel, ou, formalmente:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (a; b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\to A \\ (a; b) &\mapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Assim, $(A, +, \cdot)$ é um anel se as seis propriedades seguintes são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in A$:

A1 *Associatividade da Soma*

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

A2 *Existência do Elemento Neutro para a Soma*;

$$\exists\, 0 \in A, \text{ tal que}, a + 0 = 0 + a = a;$$

A3 *Existência do Elemento Oposto da Soma*: Para todo $x \in A$ existe um único $y \in A$ denotado por $y = -x$, tal que:

$$x + y = y + x = 0;$$

A4 *Comutatividade da Soma*:

$$a + b = b + a;$$

A5 *Associatividade do Produto*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

A6 *Distributividade à Esquerda e à Direita*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Dada a definição de anel, o próximo passo será definir o que será um *corpo*.

3.2.2 CORPO

Tomemos o conjunto A munido de duas operações, como o anel citado na subsecção anterior $(A, +, \cdot)$, portanto, seguindo as seis propriedades citadas anteriormente. Para que este anel seja um corpo, além das propriedades acima, é necessário que satisfaça ainda as seguintes propriedades complementares:

C1 *Anel com Unidade 1*: Existe $1 \in A$, tal que:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

C2 *Anel Comutativo*: Para todo $x, y \in A$:

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

C3 *Anel sem divisores de Zero*: Para todo $x, y \in A$ tem-se:

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0;$$

C4 *Existência de Inverso Multiplicativo*: Se $x \in A$, com $x \neq 0$, $\exists y \in A$ tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Logo, se um anel satisfaz as quatro propriedades descritas acima, ele é um corpo.

3.2.3 GRUPO

Compreendido o que é um anel e o que é um corpo, vejamos agora a definição de grupo, que será um definição fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

Um conjunto G munido de uma operação representada por *, e representado por $(G;^*)$ é chamado de grupo, se esta operação sobre seus elementos satisfazem as seguintes propriedades:

G1 *Fechamento*: Existem $a, b, c \in G$, para os quais tem-se:

$$a^*b = c;$$

G2 *Associatividade*: Existem $a, b, c \in G$, para os quais tem-se:

$$(a^*b)^*c = a^*(b^*c);$$

G3 *Elemento Unidade*: Existe $e \in G$ tal que:

$$\forall a \in G, a^*e = e^*a = a;$$

G4 *Elemento Inverso*: Para todo $a \in G$, existe a^{-1}, tal que:

$$a^*a^{-1} = a^{-1*}a = e.$$

A partir destas definições e considerações, vejamos o que podemos observar à respeito da multiplicação.

3.3 MULTIPLICAÇÃO

Segundo artigo publicado na Revista Cálculo (2014), citado anteriormente, pode-se notar que a operação de multiplicação não possui elemento inverso no conjunto dos números naturais, e, nem mesmo para o conjunto dos números inteiros, logo, ambos não são grupos fechados para multiplicação (anéis), ou sequer um grupo. Observa-se que a propriedade A3 já não é verificada no conjunto dos números naturais, logo o mesmo, não pode ser um anel, portanto não existe a possibilidade de ser um corpo. Então, vemos que torna-se inviável utilizarmos de uma definição que se mostra insuficiente em um conjunto (não caracterizado como grupo).

Vejamos agora, algumas das definições formais em relação a exponenciação, tratada também como potenciação.

3.4 EXPONENCIAIS

No que diz respeito a operação de exponenciação, teremos, primeiramente as definições formais encontradas em (LIMA, 2013), (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 1977), (GADIOLI, 2015). Em seguida, uma interpretação da operação dada através de vídeos (SANDERSON, 2015a), (SANDERSON, 2017) e explicada posteriormente na forma de artigo (SANDERSON, 2015b).

3.4.1 DEFINIÇÃO

Em relação à exponenciação, ou potenciação, no livro texto utilizado na disciplina de funções do PROFMAT, Lima (LIMA, 2013) traz uma definição na qual levaremos em consideração que a base a será um número real, já o expoente n será considerado somente como um número natural, e a definição intuitiva de a^n é o produto de n fatores iguais a a, tal que:

$$\begin{aligned} &a^1 = a, \text{ e} \\ &a^{(n+1)} = a \cdot a^n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Já segundo Iezzi, Murakami e Machado (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 1977) e Gadioli (GADIOLI, 2015), ainda considerando o fato de a base a ser um número real ($a \in \mathbb{R}$) e o expoente n um número natural ($n \in \mathbb{N}$), bem como o fato de a^n ser o produto de a, n vezes, complementam com o seguinte:

$$\begin{aligned} &a^0 = 1 \\ &a^n = a^{n-1}\, a, \text{para todo } n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sendo que, destas definições, tomando-se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ e o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$), decorrem as seguintes propriedades de potência:

P1 $a^m\, a^n = a^{m+n}$;

P2 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

P3 $(ab)^n = a^n b^n$;

P4 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$;

P5 $(a^m)^n = a^{mn}$;

P6 $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = 1$;

P7 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Abrangendo um pouco mais os valores para os expoentes, e utilizando as propriedades apresentadas acima, Gadioli (GADIOLI, 2015) nos traz, agora com $m, n \in \mathbb{Z}$:

P8 $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Indo mais além em relação ao expoente, e considerando um expoente $r \in \mathbb{Q}$ onde $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, obtém-se:

P9 $(a^r)^m = a^r \cdot a^r ... \cdot a^r = (a^n)^{m/n} = a^m$;

P10 $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

P11 $a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Em relação aos expoentes irracionais, sugere-se que seja considerada uma aproximação por falta ou excesso de números racionais. Ou seja, que a potência a^n agora com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ seja considerada como limite de sequências de números racionais.

Gostaríamos de determinar, por exemplo, o valor de $2^{\sqrt{3}}$ (caso o expoente seja negativo, basta utilizarmos a propriedade P11). Iniciemos verificando que $\sqrt{3}$ é o limite da sequência de números racionais:

$$(1{,}7; 1{,}73; 1{,}732; \cdots).$$

Logo, $2^{\sqrt{3}}$ será o limite da sequência:

$$(2^{1{,}7}; 2^{1{,}73}; 2^{1{,}732}; \cdots).$$

Utilizando as propriedades para racionais, podemos calcular itens dessa sequência. O primeiro item, por exemplo será dado por:

$$2^{1{,}7} = 2^{17/10} = \sqrt[10]{2^{17}} = 2\ \sqrt[10]{2^7},$$

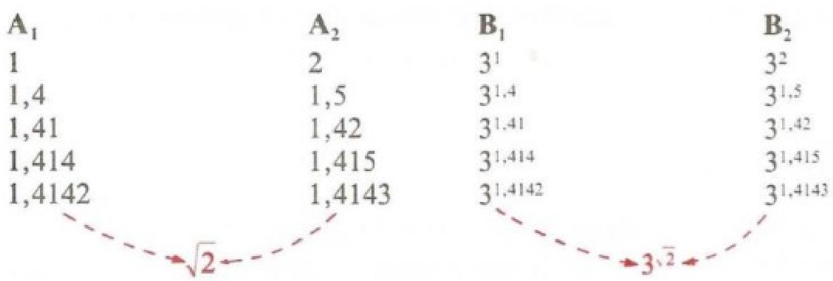
que pode ser calculado através de uso de uma calculadora científica (o intuito aqui é trabalhar através da sequência, por isso sugere-se o uso da calculadora somente neste momento):

$$2^{1{,}7} \approx 3{,}25.$$

Podemos então considerar que, quanto mais casas decimais o expoente possuir, mais precisa será a aproximação. Este caso vale para bases de qualquer natureza. É bom lembrar que pode-se calcular $2^{\sqrt{3}}$ utilizando a tecla de raiz quadrada na calculadora, dando a sensação de que é possível calcular seu valor exato. Trata-se então de uma boa oportunidade para lembrar que mesmo a calculadora trabalha com valores aproximados para raiz quadrada de três.

Temos ainda uma definição, bem semelhante a anterior, retirada do livro Fundamentos da Matemática (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 1977), no que diz respeito à expoentes irracionais (uma vez que para racionais e inteiros o livro faz uma análise semelhante às definições acima citadas). Estamos considerando que a base seja um número real ($a \in \mathbb{R}$) e que o expoente seja um número irracional ($n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Também iremos utilizar as aproximações por falta e excesso. Um exemplo trazido no livro é o cálculo da potência $3^{\sqrt{2}}$. As aproximações por falta e excesso são calculadas conforme Figura 1:

Figura 1 – Aproximações por falta e excesso.



Fonte: (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977)

Podemos observar que em A_1 temos a aproximação por falta de $\sqrt{2}$ e em A_2 as por excesso, sendo que o valor de $\sqrt{2}$ ficará entre estes valores. Já nas colunas B_1 e B_2, tem-se as aproximações por falta e excesso de $3^{\sqrt{2}}$, respectivamente, sendo que o valor da potência está entre eles.

Formalizando o exemplo apresentado, lembrando que estamos calculando a^n com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, consideram-se os conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < n\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > n\}.$$

Vejamos que todo elemento de A_1 é menor que todo elemento de A_2 e que existem os elementos r, s com, $r < n < s$, tais que dado um positivo arbitrário, a diferença $s - r$ entre eles deve ser menor que este positivo. De forma análoga e correspondente, temos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Onde ocorre que qualquer elemento de B_1 é menor que qualquer elemento de B_2. De fato, se $a > 0$ existem a^r e a^s de forma que $a^r < a^n < a^s$, logo, dado um positivo arbitrário, a diferença $a^s - a^r$ é menor que este positivo. Para $0 < a < 1$ os fatos ocorrem de forma análoga. Já, para $a = 0$ e $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ teremos a seguinte definição:

$$0^n = 0. \tag{3.5}$$

Porém se $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é um número negativo, 0^n não tem significado (pois o zero seria colocado como denominador). Sem significado também se tornam, as potências em que $a < 0$ e $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ positivo (ex: $(-3)^{\sqrt{5}}$).

Dadas definições formais em relação à exponenciação e multiplicação, vejamos uma interpretação gráfica relacionada as operações de adição, multiplicação e exponenciação.

3.4.2 INTERPRETAÇÃO

Uma interpretação diferenciada sobre exponenciais, aparece num vídeo do canal do YouTube 3Blue1Brown (ver Capítulo 4), criado e mantido por Grant Sanderson. Especificamente em *How to Think About Exponentials* (SANDERSON, 2015b), aparece a explicação a respeito de um de seus vídeos, sobre a Fórmula de Euler.

Em relação à definição de números reais, o autor nos sugere que todo número natural é simultaneamente três coisas:

1. Um ponto na reta;
2. Um "somador", ou seja uma ação que desliza ao longo da própria reta;

3. Um “multiplicador”: uma ação que alonga ou comprime a reta.

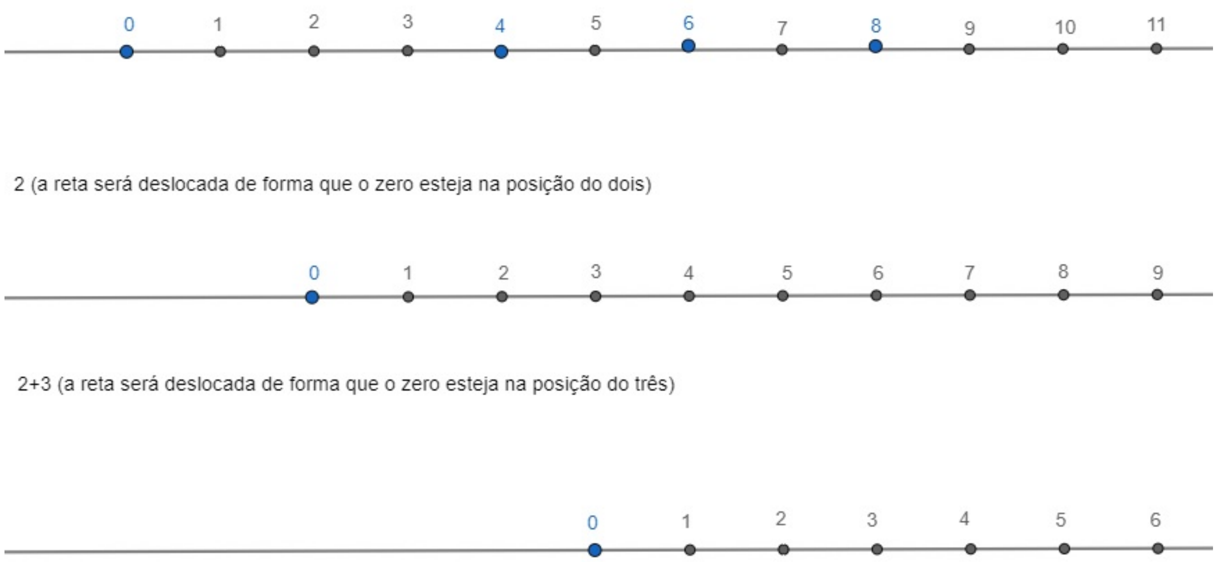
Tomemos a exponenciação como uma ação que toma um elemento como entrada e resulta em um elemento como saída, isto é, na linguagem escolar corrente uma função definida em $\mathbb{R}$. Usando destas definições, teremos que a exponenciação toma como entrada um “somador” e nos entrega como saída um “multiplicador”, ou seja, ela é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \tag{3.6}$$

onde x e y podem ser quaisquer números para os quais multiplicar e somar fazem sentido. Geometricamente, esta função que transforma soma em produto corresponde à mostrar a que ação de deslizar sobre a reta (translação) em uma ação de ampliação ou contração sobre esta mesma reta.

Vejamos um exemplo abaixo. Primeiramente, vejamos um exemplo de soma, utilizando as definições (Figura 2):

Figura 2 – Operação 2+3 transladando a reta

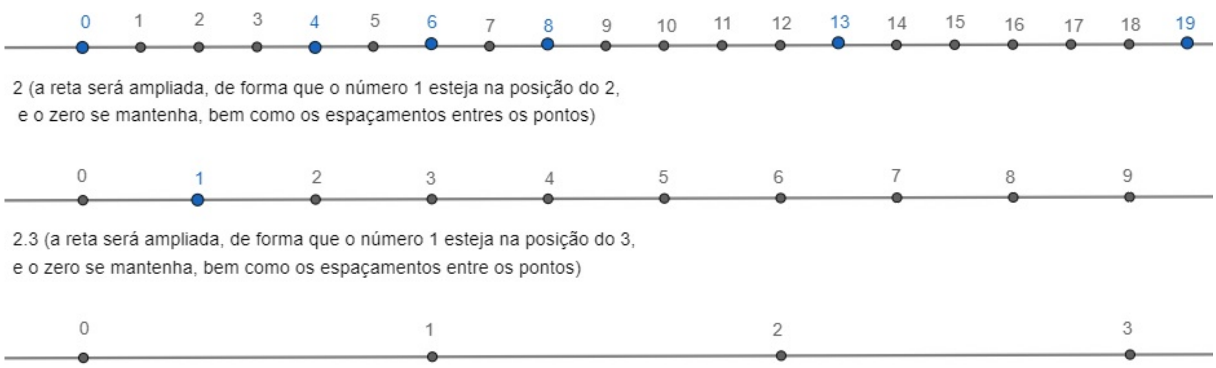


Fonte: Autoria própria

Observemos que o zero, ao final, estará na posição do número 5, então $3 + 2 = 5$.

Façamos então a operação $2 \cdot 3$, como forma de exemplificar a multiplicação (Figura 3):

Figura 3 – Operação 2.3 ampliando a reta



Fonte: Autoria própria

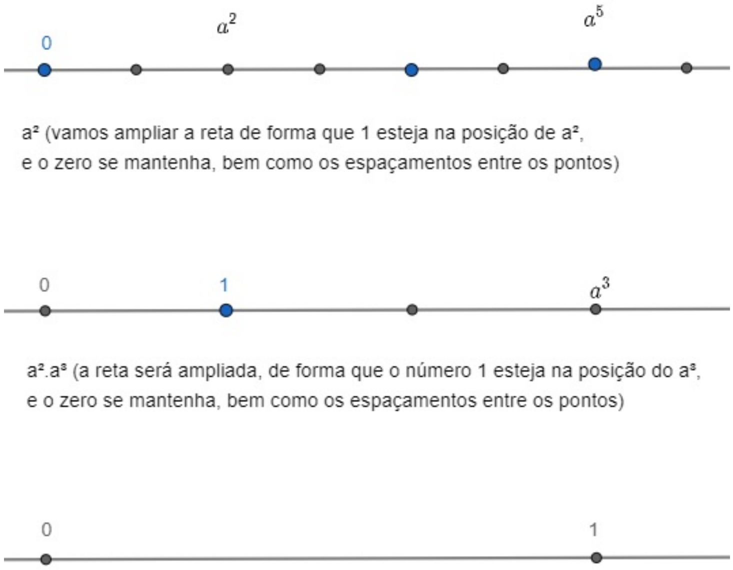
Observa-se que o número 1, após a operação realizada, ficará na posição que era originalmente do número 6, ou seja, $2 \cdot 3 = 6$.

Sabendo como é feita a soma e a multiplicação, isto significa que neste exemplo, para a operação de exponenciação, queremos encontrar o seguinte:

$$f(5) = f(2+3) = f(2).f(3).$$

Consideremos uma base $a \in \mathbb{R}$, queremos $a^5 = a^2 \cdot a^3$. Geometricamente, representamos conforme Figura 4 :

Figura 4 – Operação $a^2.a^3$ ampliando a reta



Fonte: Autoria própria

Para funções f satisfazendo a relação (3.6) obteremos a^x, onde $a = f(1)$, notação esta descendente da relação com as multiplicações repetidas. Então, se x é um inteiro positivo ($x \in \mathbb{N}$)

pode-se escrever $1 + 1 + 1 + 1 + 1...$, x vezes, portanto:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdots f(1). \tag{3.7}$$

Para construir uma série para e^x sobre a definição de $f(x)$ dada anteriormente, que satisfaz a propriedade de transformar soma em produto, atentando-se ao fato de que esta função seja diferente de zero (o que corresponde a 0^x) e considerando-se saber apenas as operações de soma e multiplicação, as únicas funções que podem ser definidas implicitamente são polinomiais. Logo assume-se que f é da forma:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n, \tag{3.8}$$

para $c_0, \cdots, c_n$ constantes. De início, adicionamos zero como entrada, não poderemos escolher a saída, que pela nossa propriedade significa:

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) \cdot f(0), \tag{3.9}$$

mas presumindo que $f(x)$ não é sempre zero, isto implica:

$$f(0) = 1. \tag{3.10}$$

E temos então que $e^0 = 1$.

Existem alternativas para que multiplicação e exponencial (ou potenciação), sejam representadas de formas diferenciadas, que utilizem as suas definições nos mais diversos conjuntos numéricos, e que tragam uma outra perspectiva. Dentre as preocupações, está a possibilidade de se compreender a multiplicação como não sendo somente uma soma repetida, bem como a exponenciação como não sendo somente multiplicação repetida.

No próximo capítulo, serão apresentadas algumas atividades que podem auxiliar no processo de introdução da multiplicação sem a utilização de soma repetida e da exponenciação como não sendo multiplicação repetida. Leva-se em consideração o entendimento da atividade em relação ao Ensino Básico.

4 ATIVIDADES SUGERIDAS

Neste capítulo, vamos apresentar algumas atividades que podem auxiliar neste processo de observar as operações de formas variadas, ampliando o seu significado e utilidades para os alunos de nível de Ensino Básico.

4.1 MULTIPLICAÇÃO

Para introduzir o conceito de multiplicação sugerimos algumas atividades onde a operação aparece como aplicação necessária para o seu desenvolvimento. Usando material concreto do dia a dia como jornal, elástico, entre outros, teremos a oportunidade de visualizar a multiplicação a partir de um outro viés.

A primeira definição que utilizaremos em relação à multiplicação é a de medida de superfície, denominada de área. Uma atividade que auxilia na introdução de tal, é o que chamaremos de atividade dos jornais.

4.1.1 ATIVIDADE DOS JORNAIS

Indica-se esta atividade para alunos de sexto ano escolar, no momento em que se trabalha a área de retângulos (havendo aqui a necessidade de o aluno ter conhecimento do que é um retângulo e que o mesmo possui duas dimensões).

Escolhamos um ambiente, ou parte de um ambiente (a própria sala de aula, ou outro menor e com menos objetos), para que possamos colocar a quantia de jornais necessários para cobrir todo o chão (é importante utilizarmos folhas todas de mesmo tamanho).

Neste caso (Figura 5), temos 9 folhas de jornal utilizadas, ou seja, a área de nossa superfície é de 9 folhas de jornal. Partimos da observação que nas laterais temos 3 jornais de comprimento e 3 jornais de largura, então uma superfície 3 jornais x 3 jornais possui uma área de 9 jornais^2.

$$3 \text{ jornais} \times 3 \text{ jornais} = 9 \text{ jornais}^2.$$

O fato de a palavra ‘jornais’ estar elevada ao quadrado no resultado, se deve pela multiplicação $\text{jornais} \cdot \text{jornais}$. O que pode ser utilizado para explicitar o fato de a área expressar uma medida de unidade bidimensional.

Vejamos um exemplo onde foram necessárias folhas de jornais particionadas para ocupar o ambiente. Observando as laterais (Figura 6), temos 2 e $\frac{1}{2}$ folhas de comprimento e 1 e $\frac{1}{2}$ folha de largura. Contando conseguimos notar a utilização de $\frac{15}{4}$ de folhas de jornais, considerando a

Figura 5 – Ambiente coberto por folhas de jornal de mesmo tamanho

Fonte: Autoria própria

menor partição da folha, que foi em 4 partes. Para realizarmos o cálculo, colocando ambas as medidas em frações, teremos $\frac{5}{2}$ folhas por $\frac{3}{2}$ folhas. Para encontrarmos a área:

$$\frac{5}{2}\text{ jornais} \times \frac{3}{2}\text{ jornais} = \frac{15}{4}\text{ jornais}^2.$$

Figura 6 – Ambiente coberto com folhas de jornal que também foram cortadas para cobrir o espaço

Fonte: Autoria própria

Assim torna-se prático mostrar que a área é uma multiplicação e já inicia-se com o símbolo matemático de medida de uma dimensão por medida da outra dimensão ($\times$), como o primeiro símbolo que representa a operação de multiplicação.

Tendo ideia de superfície com material concreto, podemos agora formalizar o cálculo da área. É possível que montemos até mesmo a tabuada considerando-se esta ideia. A atividade a seguir pode ser usada como complementar a atividade dos jornais, ou até mesmo como substituta caso não seja possível encontrar espaço ou material. Chamaremos esta segunda atividade de Multiplicação e Área.

4.1.2 MULTIPLICAÇÃO E ÁREA

Utilizando o conceito de que a área será a região interna do retângulo, o que coincidirá com a multiplicação das medidas de seus lados, podemos apresentar as multiplicações mais básicas, que compõe a tabuada por exemplo (observe que este processo facilitará futuramente o aprendizado da raiz quadrada, uma vez que quando multiplicarmos números iguais, a superfície retangular coincidirá com um quadrado).

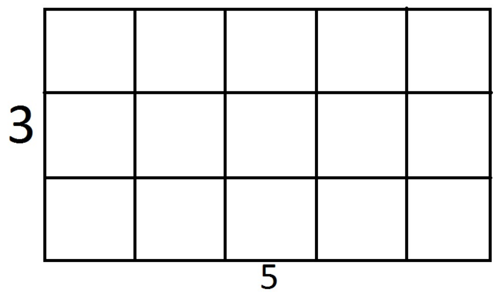
Vamos supor que queremos realizar a multiplicação 3×5, faremos então um retângulo com as dimensões 3 e 5 (Figura 7).

Figura 7 – Retângulo formado pelos valores relacionados à multiplicação

Fonte: Autoria própria

Em seguida, iremos dividir a largura (dimensão onde se encontra o número 3) em três partes, e o comprimento (dimensão onde se encontra o número 5) em 5 partes (Figura 8).

Figura 8 – Retângulo com as dimensões divididas



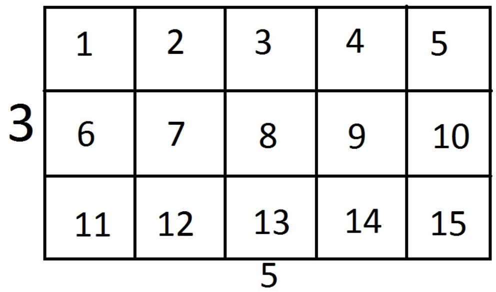
Fonte: Autoria própria

Em seguida, assim como na atividade anterior, onde contamos a quantia de folhas de jornal que foram utilizadas, aqui contaremos quantos novos retângulos foram construídos (Figura 9). Observe que caso seja utilizada a medida real em centímetros ou milímetros ou qualquer outra unidade de medida, é interessante mostrarmos a unidade de medida ao quadrado na medida final da área).

Então, de acordo com as figuras e o procedimento apresentado, poderemos dizer que:

$$3 \times 5 = 15.$$

Figura 9 – 15 unidades de área

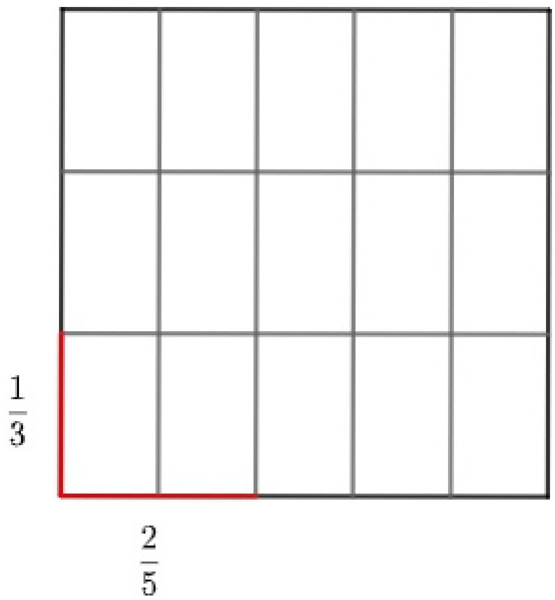


Fonte: Autoria própria

Vejamos um exemplo em que utilizamos dois valores racionais, somente para que fique claro que tal atividade cabe em qualquer momento de estudo dos conjuntos. Façamos a multiplicação entre os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, ou seja $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ (como vale a propriedade comutativa para multiplicação, fazermos $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ é o mesmo que $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$, o que mostra ao aluno que é indiferente a ordem para os valores do comprimento e da largura, pois a área será a mesma).

Primeiramente façamos um quadrado de lado 1, e sobre os lados, em vermelho, criemos as medidas de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, conforme Figura 10.

Figura 10 – Dimensões em vermelho



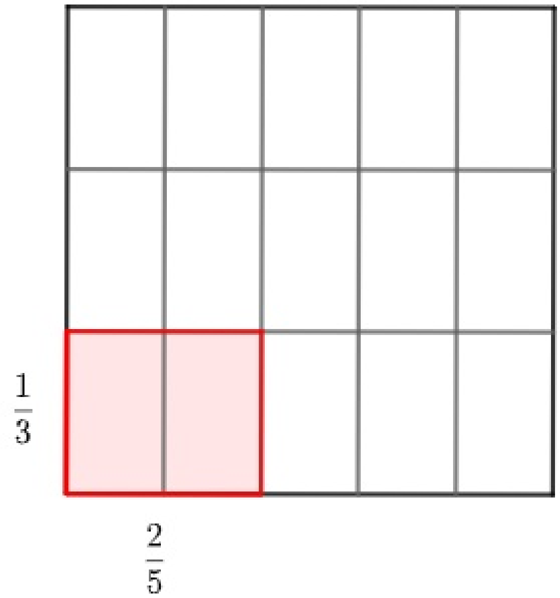
Fonte: Autoria própria

Fechando o retângulo formado pelas dimensões expressas em vermelho, de lados $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, podemos calcular a área apenas contando a quantia de retângulos menores utilizados em relação a quantia total de retângulos desenhados (Figura 11).

O resultado da contagem será o mesmo que o resultado da multiplicação:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Figura 11 – A área desejada (avermelhada) representa duas partes de 15 partes



Fonte: Autoria própria

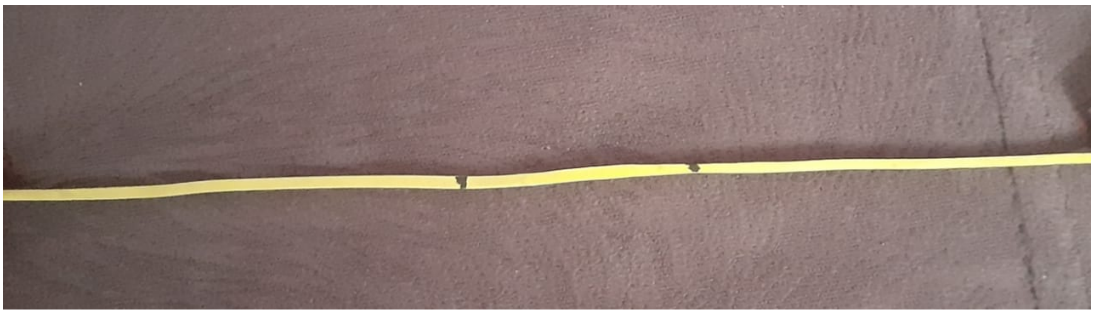
Com isto conseguimos observar que é possível utilizarmos esta técnica para o conjunto dos números racionais. Lembrando que é necessário conhecimento prévio em relação aos polígonos, dimensões e noção de área.

4.1.3 ATIVIDADE DO ELÁSTICO

Esta atividade foi sugerida na reportagem da Revista Cálculo (2014). Mostra a utilidade da multiplicação como operação de ampliação e redução, deixando claro que a multiplicação não representa somente um aumento de quantidades. É interessante ser aplicada no sétimo ano escolar, quando se está aprofundando as operações com os racionais.

Inicialmente mostraremos como a multiplicação age no caso de uma ampliação. Para a atividade, peguemos um elástico em seu estado inicial, sem sofrer qualquer força externa. Marquemos neste elástico dois pontos, conforme Figura 12:

Figura 12 – Elástico em seu estado natural



Fonte: Autoria própria

Em seguida esticaremos este elástico e observaremos o que ocorre com os pontos desenhados sobre ele. Especialmente o que acontece com a distância entre os dois, medindo com uma régua a distância antes e depois da aplicação da força para mudar o estado do elástico, conforme Figura 13.

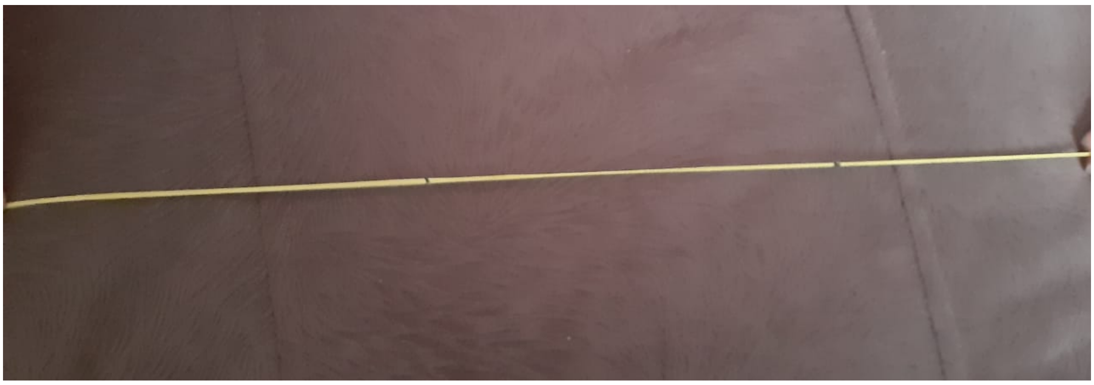
Figura 13 – Elástico durante a ação de esticar

Fonte: Autoria própria

É observado que a distância entre as marcas aumentou. Por exemplo, na Figura 12 a distância entre elas era de 2 cm, e na Figura 13 passou a ser 3 cm, significa que ouve uma ampliação de 1,5 vezes. Ou seja, o comprimento do elástico foi multiplicado por 1,5, pois $2 \times 1,5 = 3$.

Podemos utilizar ainda o elástico para uma situação em que a multiplicação representa uma redução. Nosso estado inicial do elástico neste procedimento é quando uma força está agindo de forma a esticá-lo. Neste momento, façamos também duas marcas neste elástico, também medindo o espaço entre as duas marcas, conforme Figura 14.

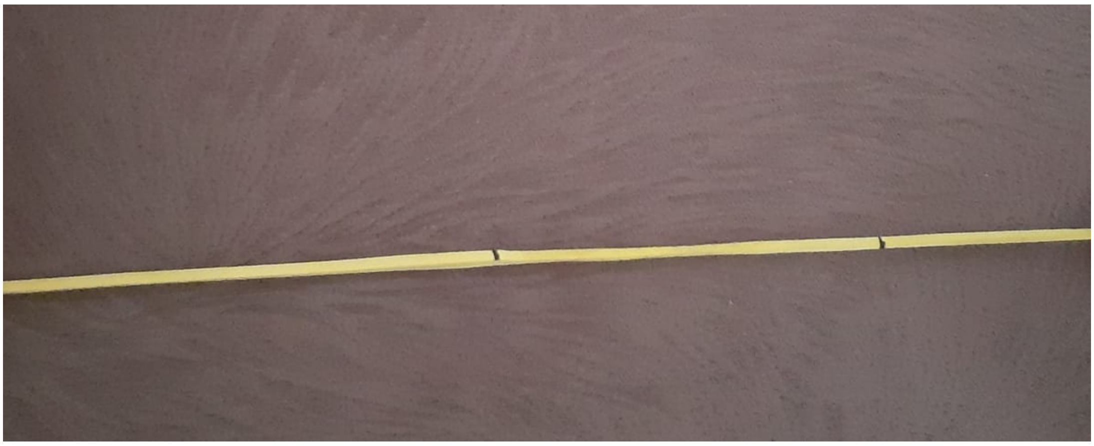
Figura 14 – Elástico marcado após ser esticado



Fonte: Autoria própria

Faremos em seguida o mesmo procedimento feito anteriormente, mas pararemos de realizar uma força no elástico para que ele volte ao seu estado natural (Figura 15), e em seguida mediremos novamente a distância entre as duas marcas. Podemos observar que agora esta distância diminuiu. Se na primeira medida era de, por exemplo, 3 cm e passou a ser, na segunda medida de 1,5 cm, agora poderemos dizer que o elástico passou a ser multiplicado por 0,5, pois $3 \times 0,5 = 1,5$.

Figura 15 – Elástico em seu estado natural



Fonte: Autoria própria

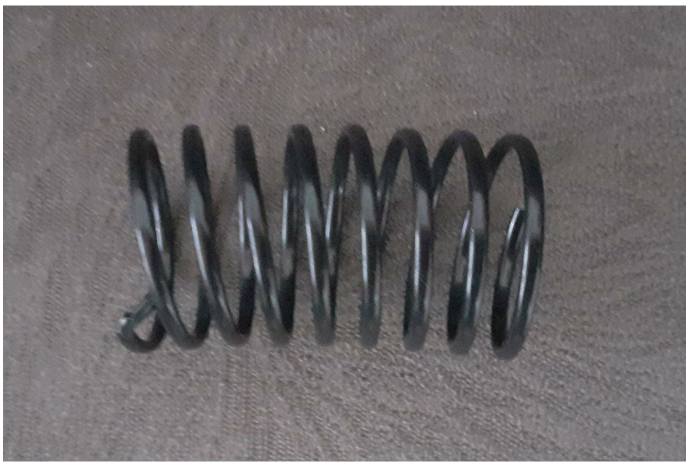
Nesta atividade fica bem visível que a multiplicação não é uma operação de soma, pois os valores podem vir a diminuir. Ainda, pode-se observar de forma concreta que não se pega outro elástico para adicionar ao inicial, nem mesmo corta-se o elástico para que ele diminua de tamanho. Trabalhamos sempre com o mesmo objeto fazendo modificações em sua estrutura através de uma operação.

Uma outra ferramenta que pode ser utilizada para realizar tal atividade é a mola. Vejamos a seguir.

4.1.4 ATIVIDADE DA MOLA

Iniciaremos primeiramente com a mola em seu estado natural, medindo seu comprimento, conforme Figura 16.

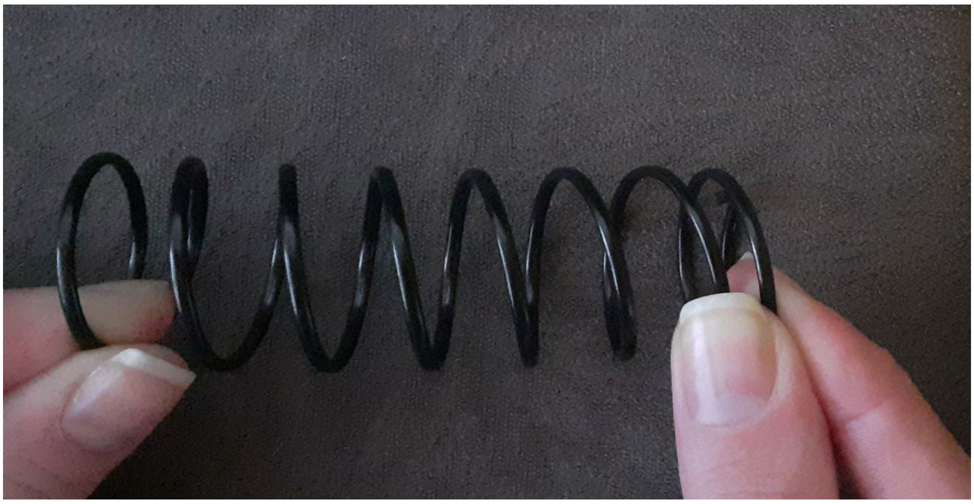
Figura 16 – Mola em seu estado natural



Fonte: Autoria própria

Em seguida esticamos a mola e a medimos novamente (Figura 17). Através do quociente entre as medidas, poderemos notar que houve aumento do valor, uma ampliação do comprimento.

Figura 17 – Mola esticada



Fonte: Autoria própria

Mostrada a ampliação, vamos observar como ocorre a redução. Para que possamos mostrar tal redução através da utilização da mola, vamos voltar a mola ao seu estado natural (a qual já temos a medida) e em seguida iremos pressioná-la em ambos os lados, reduzindo seu tamanho e a medindo novamente (Figura 18).

Figura 18 – Mola comprimida

Fonte: Autoria própria

Através, novamente, do quociente entre as medidas, poderemos observar que ouve uma redução, por mais que a operação aplicada seja de multiplicação.

Uma observação relevante em relação ás atividades do elástico e da mola, é que estas atividades estão relacionadas à definição diferenciada de multiplicação (SANDERSON, 2015b), mencionada na seção 3.4.

4.1.5 RECEITAS E MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Em relação a multiplicação com frações, podemos sugerir uma atividade que envolva uma receita de algum alimento. A depender da realidade em que a atividade for aplicada, será possível ou não cozinhar junto dos alunos (massas de pizzas e bolos geralmente são receitas mais fáceis de serem realizadas por utilizarem apenas o forno dentre os eletrodomésticos). Pode ser trabalhada com alunos de sexto ano escolar ao trabalhar frações sendo que serão alunos em uma idade que demonstram maior interesse na realização prática. Observemos uma sugestão de receita:

Panqueca de Espinafre

- Ingredientes
- $4\frac{1}{2}$ xícaras de espinafre
- 3 colheres de sopa de linhaça
- $\frac{2}{3}$ de xícara de água morna
- $\frac{3}{4}$ de xícara de farinha de arroz
- 1 colher de sopa de fermento em pó
- $\frac{1}{2}$ colher de chá de sal

Modo de preparo: Misture a linhaça com a água morna e reserve por torno de 10 minutos. Quando ela formar um gel, coloque-a no liquidificador com o espinafre e deixe misturar bem. Em seguida, coloque a farinha,o sal e o fermento e bata novamente até que forme uma massa homogênea. Utilize uma frigideira em fogo baixo para fazer as panquecas. Rendimento: 10 unidades.

Neste caso optamos por uma receita que contém algumas frações diferenciadas. Suponhamos que a sala de aula possua 25 alunos, pedimos para que eles descubram quanto de cada ingrediente será necessário para que cada aluno coma uma unidade de panqueca. Podemos também sugerir que uma pessoa gostaria de comer apenas cinco panquecas, e perguntar quanto de cada ingrediente ela precisará.

Utiliza-se neste caso a multiplicação como ampliação e como redução dos ingredientes.

Com estas atividades podemos perceber que é possível desvincular a ideia da multiplicação como dependente da adição. O aluno poderá utilizar da tática de multiplicação que melhor lhe convier.

Observemos também, algumas atividades propostas em relação à exponenciação.

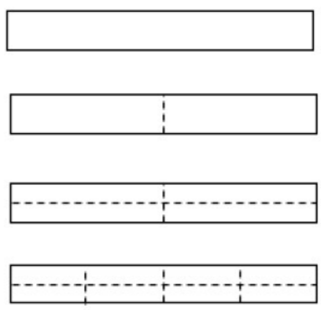
4.2 EXPONENCIAÇÃO

As atividades encontradas são escassas em relação a este assunto. São basicamente atividades em que se utiliza da multiplicação repetida para resolver um problema em questão, quando se considera o expoente como um número natural, ou atividades que se utilize a calculadora quando se considera expoentes racionais e irracionais. Vejamos alguns exemplos.

4.2.1 ATIVIDADE DA DOBRADURA DE PAPEL

Esta atividade foi proposta por Pereira, Puhl e Sivert (SIVERT; PUHL; PEREIRA, 2020) e sugerimos que ela possa ser aplicada com alunos de sexto anos escolar bem como em revisão com o primeiro ano do Ensino Médio. Primeiramente, iniciamos com uma folha de papel, perguntando aos alunos qual a figura geométrica representada. Em seguida dobramos ao meio a folha, e perguntamos quantos são os retângulos formados após esta dobra. Em seguida faremos mais uma dobra e a mesma pergunta, e assim por diante, visando que a tabela seja preenchida conforme Figura 19:

Figura 19 – Tabela preenchida pelos alunos após o processo de dobras.

Representadas das dobras	Número de dobras	Quantidade de retângulos	Representação matemática	Potência
	0	1		
	1	2	2	2^1
	2	4	$2 \cdot 2$	2^2
	3	8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	2^3
	4	16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^4
	...	...	...	...
	x	y	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots 2$	2^x

Fonte: (SIVERT; PUHL; PEREIRA, 2020)

Através do preenchimento desta tabela, segundo autores (SIVERT; PUHL; PEREIRA, 2020), é possível concluir que $2^0 = 1$ e que a potência é uma forma de multiplicação repetida. Ainda podemos trabalhar a propriedade na qual multiplicamos potências de mesma base. Esta atividade serve de gatilho para estudarmos potências com bases e expoentes diferentes.

4.2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta proposta apresentada por Ranghetti e Gesser (RANGHETTI; GESSER, 2009), leva-se em consideração problemas que possam ser resolvidos através de desenhos além da multiplicação repetida, para que em seguida, introduza-se o fato da repetição multiplicativa ser uma potência. Exemplo de situação problema:

> “Vemos 9 aterros;
> Cada aterro com 9 árvores,
> Cada árvore tem 9 ramos,
> Cada ramo tem 9 ninhos,
> Cada ninho tem 9 pássaros,
> Cada pássaro tem 9 filhotes,
> Cada filhote tem 9 penas,
> Cada pena tem 9 cores,
> Quantos há de cada?”
> (RANGHETTI; GESSER, 2009, p. XX)

Deixamos que os alunos procurem formas de resolver o problema, sendo que uma delas se caracteriza pela multiplicação repetida, a qual será representada na forma de uma potência.

Como pudemos observar, é possível resolvermos problemas utilizando outros recursos em relação à potência como desenhos, porém é uma forma muito mais trabalhosa de resolvê-la no que diz respeito ao nível básico de escolaridade com o qual estamos lidando, para aplicação destes exercícios (novamente poderemos trabalhar com sexto ano escolar). Estas atividade de problematização são justamente utilizadas para que perceba-se que é mais simples denotar esta multiplicação na forma de potência.

4.2.3 UTILIZANDO CALCULADORA

Para o Ensino Básico, uma maneira interessante de mostrar de forma subjetiva que a exponenciação não é somente uma multiplicação repetida, é utilizarmos de expoentes irracionais ou decimais (que venham a transformar as potências em raízes). A atividade abaixo foi sugerida por Magro (MAGRO, 2009) e os conteúdos abordados são potenciação, função e equações exponenciais, trabalhados geralmente no primeiro ano do Ensino Médio.

1. De acordo com as expressões definidas por:

   i. $y = 2^x$.

   ii. $y = (-2)^x$.

complete as tabelas (Quadro 1 e Quadro 2) com o auxílio de uma calculadora e utilize o sistema de eixos coordenados dados (Figura 20) para desenhar, se possível, cada gráfico. (Utilize apenas uma casa após a vírgula). Em seguida responda as questões 1 à 5.

Quadro 1 – Valores a serem calculados para a expressão $y = 2^x$.

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

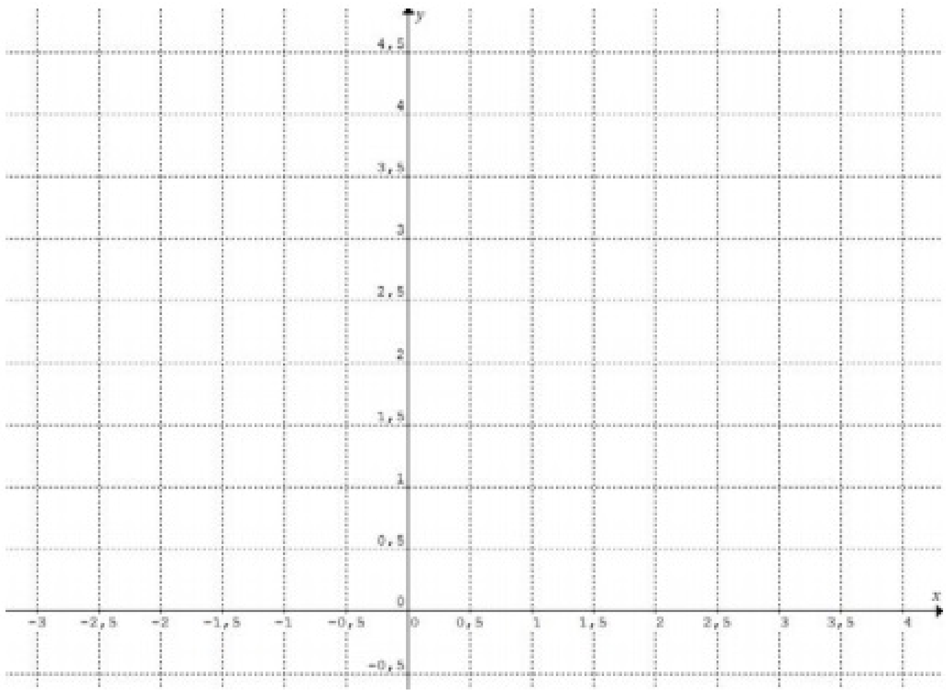
Fonte: Autoria própria

Quadro 2 – Valores a serem calculados para a expressão $y = (-2)^x$.

x	y
0	
-0,25	
0,5	
0,75	
1	

Fonte: Autoria própria

Figura 20 – Eixos coordenados



Fonte: Autoria própria

Olhando para o gráfico, responda:

1. Para qual valor de x temos:

   a) $y = 1$? b) $y = 2$? c) $y = 4$?

2. Mostre algebricamente cada um dos resultados das letras a, b e c, utilizando os seus conhecimentos sobre equações exponenciais.

3. Usando a calculadora e o gráfico tente encontrar para quais valores de x temos:

   a) $y = 0,75$. b) $y = 1,25$.

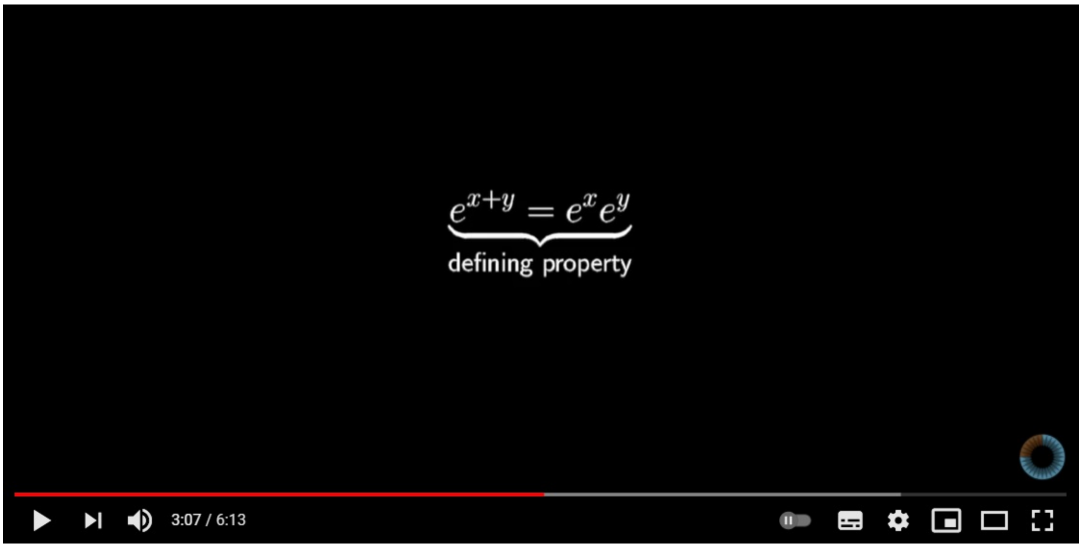
A autora indica que é necessário que os alunos utilizem as definições de potência, em especial para expoentes racionais, transformando-os em frações em seguida calculando a raiz, desta forma também se torna claro o que ocorrerá com a base negativa, sendo que neste caso não é possível formar o gráfico, pois não está definida para uma série de valores, portanto não se trata de uma função exponencial. Uma sugestão seria inserir na tabela valores irracionais conhecidos para x, como $\sqrt{2}$, ou π, para que sejam abrangidos todos os conjuntos numéricos.

As atividades em relação à exponenciação seguem basicamente uma mesma linha de situação problema, ou uso de calculadora, sempre partindo do pressuposto que a operação é uma multiplicação repetida, e não se encontrando uma aplicação ou atividade que diferencie em relação à expoentes racionais ou irracionais. Para o nível de Ensino Básico, em relação ao grau de entendimento, se torna mais complicado encontrarmos uma outra maneira de trabalharmos com a exponenciação.

4.2.4 USANDO TEORIA DE GRUPOS

O canal do YouTube chamado 3Blue1Brown disponibiliza conteúdo matemático (em geral de nível superior) de maneira inovadora, utilizando uma linguagem gráfica bastante atrativa, permitindo acesso aos conteúdos de maneira mais estimulante e interessante. Em um destes vídeos, denominado "Entendendo *e* elevado a πi" (SANDERSON, 2015a), sugere-se que a exponenciação seja tratada como a operação que transforma a soma em produto, e não que esta seja considerada uma propriedade, sim a definição da operação. Este vídeo nos mostra as três representações que um número pode ter, como um ponto na reta, um "somador" ou um "multiplicador". Chama-se "somador" o número que está realizando uma soma, ou seja, esta transladando a reta em relação ao zero, já o "multiplicador" é quando o número está efetuando uma multiplicação, e neste caso está ampliando (ou comprimindo) a reta em relação ao número 1. Logo, o que a operação de exponenciação faz é transformar em multiplicadores os somadores. Ele nos dá uma visão diferenciada da operação o que torna mais fácil compreender que não ocorre a multiplicação repetida nos casos de expoentes racionais por exemplo.

Figura 21 – Tela do vídeo: Entendendo e elevado a πi.

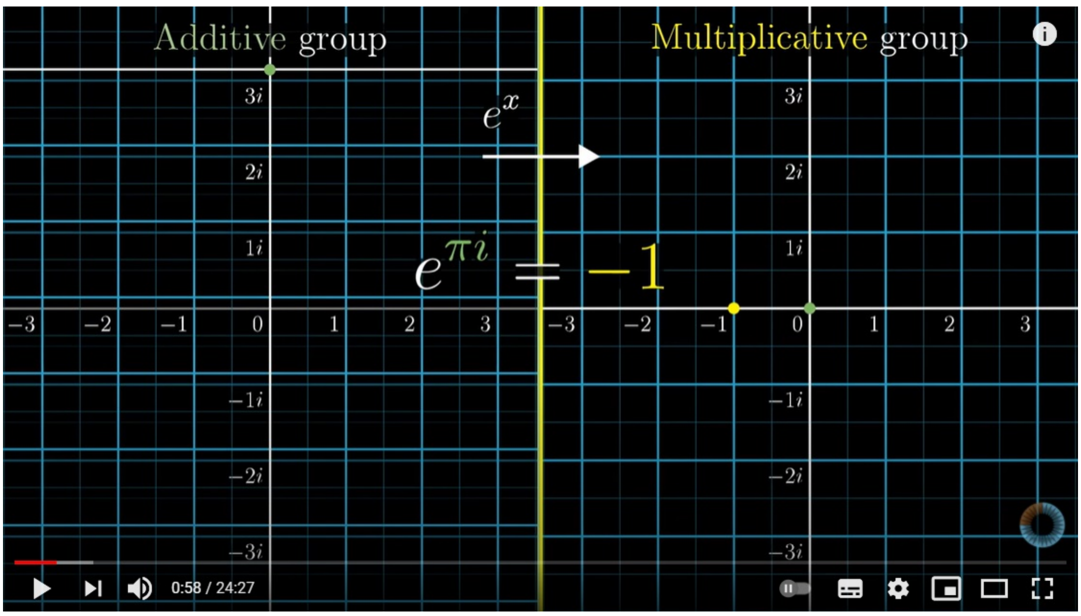


Fonte: (SANDERSON, 2015a)

Num segundo vídeo, chamado “Fórmula de Euler com uma Introdução à Teoria de Grupos” (SANDERSON, 2017) as mesmas ideias voltam a ser exploradas com mais detalhes, incluindo na discussão conceitos sobre Teoria de Grupos e interpretados os números reais sobre a reta real como “ações”, isto é como grupos aditivos (translações) e multiplicativos (contrações/distensão) de números reais. Neste caso, tanto a soma como o produto são tratados como composição de operações seguidas sobre estes grupos, finalizando com uma explicação sobre grupos aditivos e multiplicativos no plano complexo para ilustrar a Fórmula de Euler:

$$e^{\pi i} = -1.$$

Figura 22 – Tela do vídeo: Fórmula de Euler com uma Introdução à Teoria de Grupos.



Fonte: (SANDERSON, 2017)

Embora estes vídeos sejam bastante interessantes, e tenhamos comentado na Seção 3.4 sobre o artigo que foi escrito os explicando, não é uma interpretação de fácil compreensão para nível básico, que é quando se insere o conceito de função exponencial. É necessário mais maturidade matemática para compreendê-lo, não se encaixando para o momento presente como uma atividade, mas sendo bastante interessante para professores de nível básico e estudantes de nível superior, buscando ampliar a visão em relação a estas operações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando o cenário apresentado, podemos perceber que realmente a definição que se coloca da multiplicação como inicial no Ensino Básico, talvez não seja a mais adequada no que diz respeito à definição matemática formal. Percebe-se que a operação é colocada como dependente de uma outra, talvez visando que o aluno se sinta confortável com a nova definição que lhe será apresentada, mas inconscientemente, abrindo brechas para que o indivíduo crie restrições em relação ao que ainda será trabalhado nesta operação.

O fato de se apresentar uma operação como sendo uma ação, algo que transforma, que cria uma nova representação numérica para a combinação feita com outros números, condiz com o fato de, na definição matemática formal, as operações serem justamente ações independentes realizadas dentro dos conjuntos numéricos. Cada operação pode ser representada como uma ação específica em relação aos conjuntos que estão sendo trabalhados no momento. A ideia proposta por Devlin (DEVLIN, 2008b) de relacionar a multiplicação à escalas físicas condiz com as atividades apresentadas no Capítulo 4 (atividade do elástico, da mola e a multiplicação e área). Nesta, tomamos dois valores e os transformamos em valores diferentes através da ação/operação, relacionando com as unidades de medida. Porém, cabe ressaltar que tais definições exigem um conhecimento mais abrangente, que muitas vezes aparece no currículo escolar anos depois da introdução da multiplicação. No momento em que esta operação é apresentada aos alunos, talvez não haja a maturidade necessária para relacionar com a ideia de área por exemplo, que vem a ser introduzida posteriormente, quando já se tem uma segurança maior em relação ao cálculo da multiplicação. Outra situação que ocorre é que a multiplicação é vista em seguida da operação de soma, logo, pode ser considerada como uma forma de dar continuidade ao que foi apreendido anteriormente.

Assim, embora hajam vantagens em se mostrar a operação de forma mais lúdica, como uma ação (esticar ou comprimir, com uso de escalas) que se aproxima mais da formalidade matemática em relação à multiplicação, também há de se considerar o contexto estudantil em que a mesma é apresentada. Ainda que seja possível trabalhar desta forma diferenciada que esteja em maior consonância com a definição formal da operação, atenção deve ser dispensada sobre o momento adequado para isso, que talvez não seja exatamente quando se inicia o uso da operação, e sim em algum momento posterior. Tem-se que estar atento que, assim como a ideia de soma repetida pode resultar em um raciocínio matematicamente simplificado demais para o indivíduo, apresentar estas formas diferenciadas requer trabalho e cuidado extra para não trazer outros prejuízos aos alunos.

No que diz respeito ao estudo da exponencial, temos esta diferença de apresentação da operação em relação ao conjunto numérico trabalhado, em especial no expoente. Formalmente, a potência inteira e positiva de um número real é uma multiplicação repetida deste número, porém, quando tornamos o expoente mais abrangente, incluindo os números racionais e mesmo os inteiros negativos, já temos uma outra definição em que não cabe a multiplicação repetida. Em termos de matemática básica fica mais complicado para exemplificar o que seria. O que é condizente com as palavras de Devlin (DEVLIN, 2011) quando afirma que a matemática também é abstrata e que isso deve ser colocado para os alunos de Ensino Básico também. No momento didático em que é apresentada a operação, não há a possibilidade de mostrá-la através da teoria de grupos, por exemplo. Logo as estratégias utilizadas talvez sejam mesmo as mais viáveis para o momento, ficando a tarefa de detalhar uma definição mais abrangente reservada ao Ensino Superior, quando necessário. Percebemos então que a potência não é somente uma multiplicação repetida, que este é apenas um caso particular quando se restringe esta potência ao conjunto dos números naturais e que talvez a forma como está sendo colocada no Ensino Básico se mostra como a mais adequada para o momento.

Importante salientar entretanto que podemos ampliar a visão em relação a uma determinada operação, velha conhecida a qual nos acostumamos a olhar de uma forma única. Porém, também é necessário considerarmos que muitas vezes, para o momento em que são apresentadas em sala de aula, devido a várias restrições, as definições colocadas são as melhores possíveis. Lembrando-nos também de amadurecer a ideia de que a matemática é uma ciência, então em muitas vezes ela se mostrará essencialmente em sua forma abstrata. Daí a importância de uma formação adequada ao profisional, como a trazida pelo PROFMAT. É necessário que tenhamos um conhecimento muito além daquilo que é repassado aos alunos, para que possamos fazer este tipo de filtragem e seleção da forma como será construída uma informação matemática em relação ao público em questão e o respeito à formalidade dos conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BASSALO, J. M. F. **Teoria de Grupos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2008. 9

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e numeros complexos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005. 9

CUNHA, M. C. C. d. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997. 14

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Teláris Matemática - 9º ano**. São Paulo: Ática Didáticos, 2018. 304 p. 16

DEVLIN, K. What is conceptual understanding. **Mathematics Association of America**, 2007. 11

DEVLIN, K. It ain't no repeated addition. **Devlin's angle**, 2008. 11, 12, 14

DEVLIN, K. It no repeated addition. **Devlin's angle**, 2008. 8, 14, 47

DEVLIN, K. What exactly is multiplication. **Devlin's Angle**, 2011. 12, 14, 48

GADIOLI, A. O. **Função exponencial: Definição, caracterização e aplicações.** Dissertação (Mestrado) — UFES, 2015. 25, 26

HOBOLD, E. S. F.; ROSA, J. E. d. O ensino da tabuada no contexto das ações de estudo propostas por davỳdov e colaboradores. **Revista Brasileira de Educação**, v. 22, n. 71, 2017. 15

HOLANDA, K. H. C. de; COSTA, R. M. Nova perspectiva para o ensino da tabuada: Traços de uma investigação diagnóstica entre professores e alunos. In: **Anais do V CONEDU**. Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/47925>. 16

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. [S.l.]: Atual Editora, 1977. v. 2. 9, 27

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. Fundamentos de matemática elementar. 3 reimp. 8 vol. **São Paulo: Atual**, 1977. 25, 26, 27

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 289 p. 9, 18, 25

LIMA, E. L. **Análise real vol. 1: Funções de uma Variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 p. 9, 18, 19, 20

LIMA, G. L.; MARANHÃO, M. C. S. d. A. O caso da memorização de tabuadas de multiplicação. **Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122)**, v. 1, n. 1, p. 6,16, 2014. 15

LONGEN, A. **Apoema Matemática**. [S.l.]: Editora do Basil, 2018. v. 3. 16

MAGRO, J. Z. **Uso de calculadora na sala de aula: ensino das potências reais**. Monografia (Graduação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul/UFRGS, 2009. 42

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática**. [S.l.]: Edusp, 2001. 9, 18, 19, 20

MOREIRA, L. P. 2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/>. Acesso em: 23 de março de 2020. 15

PAIAS, A. M. **Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio**. 218 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. 16

PIRES, M.; ABRANTES, N.; BORBA, V. Matemática e multiplicação: dificuldades e novos olhares em torno deste ensino. **Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, v. 1, n. 23, p. 87–94, 2015. ISSN 2447-9187. Disponível em: <https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/118>. 15

RANGHETTI, D. S.; GESSER, V. **Metodologia de Ensino de Matemática**. [S.l.: s.n.], 2009. 42

SANDERSON, G. **Entendendo e elevado a pi i**. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=F_0yfvm0UoU>. Acesso em: 08 de julho de 2019. 25, 44, 45

SANDERSON, G. How to think about exponentials. www.3blue1brown.com, 2015. 25, 28, 40

SANDERSON, G. **Fórmula de Euler com uma introdução à Teoria de Grupos**. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mvmuCPvRoWQ>. Acesso em: 08 de julho de 2019. 25, 45

SED/SC. **Currículo Base da Educação e do Ensino Fundamental do Território Catarinense**. Florianópolis: Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2019. 16

SIVERT, C. M. F.; PUHL, C. S.; PEREIRA, E. C. Função exponencial: uma estratégia didática aplicada no ensiono médio. Boletim online de Educação Matemática, 2020. 41

SÔNEGO, D.; DREHER, F.; SIMÕES, M. Grupos, anéis e corpos. **Cálculo: Matemática para Todos**, n. 41, p. 31–34, 2014. 18

SÔNEGO, D.; DREHER, F.; SIMÕES, M. Parados no tempo. **Cálculo: Matemática para Todos**, n. 41, p. 22–30, 2014. 14, 17, 18

SOUZA, K. N. As operações de multiplicação e divisão nas séries iniciais do ensino fundamental. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 10, n. 1, 2010. 15