UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

José Railton da Silva Dantas

Matemática Discreta abordada nas questões e material da OBMEP

Campina Grande - PB
Fevereiro/2021

D192m Dantas, José Railton da Silva.
Matemática discreta abordada nas questões e material da OBMEP / José Railton da Silva Dantas. - Campina Grande, 2021.
130 f. : il. Color

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer".
Referências.

1. Probabilidades Combinatórias. 2. Programas - Matemática. 3. Recorrência - Matemática. 4. Progressões - Matemática. I. Nemer, Rodrigo Cohen Mota. II. Título.

CDU 519.212.2(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO D. DO NASCIMENTO CRB-15/515

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

José Railton da Silva Dantas

Matemática Discreta abordada nas questões e material da OBMEP

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer

Campina Grande - PB
Fevereiro/2021

José Railton da Silva Dantas

Matemática Discreta na OBMEP

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 11 de fevereiro de 2021:

Rodrigo Cohen Nemer

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer - UFCG

Orientador

José A. F.

Prof. Dr. José Arimatéa Fernandes - UFCG

Convidado 1

Vandenberg Lopes Vieira

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira - UEPB

Convidado 2

Campina Grande - PB

Fevereiro/2021

Dedico à minha família e a todos que contribuíram para que eu pudesse realizar esse sonho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido forças para que eu chegasse ao término deste mestrado.

Aos meus pais, Dionice de Souza Dantas e Josefa da Silva Dantas, por todo apoio que me deram durante a minha vida. E aos meus irmãos, Rodrigo da Silva Dantas, Raquel da Silva Dantas, Maria Renata da Silva Dantas e Rubiana da Silva Dantas, pelo apoio e incentivo.

Ao professor Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer por ter me orientado neste trabalho e por todo conhecimento transmitido durante o curso.

Às gestoras da escola que trabalho Maria Emília da Nóbrega Souto e Rubenice Macedo da Silva, pelo apoio recebido.

Aos meus amigos Diana Cristina Garcia Brandão, Irineu Barbosa da Silva Neto, Mozart Moisés da Silva, Rosane Dantas Silva, Simone Nóbrega Catão, Wagner Dias de Araújo e Wesklemyr Pereira de Lacerda pelo apoio e incentivo.

Agradeço à UFCG por ofertar o PROFMAT, e a todos os professores dessa universidade, em especial, aos professores Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros e Dr. Romildo Nascimento Pereira, bem como, aos funcionários dessa instituição.

Agradeço ao professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho pela contribuição e disponibilidade.

Agradeço aos professores que compuseram a Banca Examinadora deste trabalho, Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira e Prof. Dr. José Arimatéia Fernandes, pela disponibilidade e considerações feitas para melhoria do nosso trabalho.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT - UFCG 2019, pelo apoio e incentivo durante todo o curso.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Mestrado em Rede Nacional.

"Tudo posso naquele que me fortalece."
(Bíblia Sagrada, Filipenses 4, 13)

Resumo

O ensino da Matemática é algo que deve ser questionado sempre pelo professor, de modo a refletir sobre o ensino e aprendizado dessa disciplina para garantir uma aprendizagem sólida aos alunos. Nesse sentido, pensamos que a inserção dos discentes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP contribui para o melhor desempenho nessa disciplina. Assim, neste trabalho, abordamos um breve histórico sobre a OBMEP e os programas a ela vinculados, além de trazer informações sobre o Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM. Apresentamos o conceito de Indução, destacando o axioma da Indução; relatamos sobre Recorrência Matemática; expusemos definições e demonstrações associadas aos conteúdos Progressões Aritméticas e Geométricas; desenvolvemos tópicos da Análise Combinatória e Probabilidade. Em todos os conteúdos, apresentados exemplos de aplicação dos temas trabalhados. Por fim, dedicamo-nos à resolução de questões da OBMEP de edições anteriores e problemas voltados ao treinamento para a OBMEP.

Palavras-chave: OBMEP. Programas. Indução. Recorrência. Progressões. Combinatória. Probabilidade.

Abstract

The teaching of mathematics is something that should always be questioned by the teacher, in order to reflect on the teaching and learning of this discipline to ensure solid learning for students. In this sense, we think that the inclusion of students in the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools - OBMEP contributes to the best performance in this discipline. Thus, in this paper, we cover a brief history of OBMEP and the programs linked to it, in addition to providing information about the Program for the Improvement of High School Mathematics Teachers - PAPMEM. We introduce the concept of Induction, highlighting the axiom of Induction; we report on Mathematical Recurrence; we exposed definitions and demonstrations associated with the Arithmetic and Geometric Progressions content; we develop Combinatorial Analysis and Probability topics. In all contents, examples of application of the themes worked are presented. Finally, we are dedicated to solving OBMEP issues from previous editions and issues related to training for OBMEP.

Keywords: OBMEP. Software. Induction. Recurrence. Progressions. Combinatory. Probability.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O direito à educação está estabelecido pela Declaração Universal dos Direitos Humanos para todos os cidadãos. No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases - LDB é quem normativa a educação, assegurando-a ao povo brasileiro. Embora este direito esteja estabelecido em lei, a população brasileira ainda convive com problemas nessa área, a exemplos da falta de estrutura das escolas, desvalorização dos professores e a não participação da família na formação escolar dos filhos. Pensamos que a melhoria da educação pública requer o comprometimento dos governantes, da equipe escolar, da família e da sociedade em geral. O cumprimento deste dever, por parte deles, é condição necessária para obter uma educação de qualidade.

Para uma educação pública de qualidade, é necessário o investimento em política públicas, tais como: melhoria do ambiente escolar, investimento na formação e valorização do professor, ensino em tempo integral para o aluno, participação da família e o envolvimento da escola em atividades que vão além das desenvolvidas pela própria instituição. Vale destacar o exemplo da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP como atividade que a escola pode envolver-se. Esse evento promove melhorias para a educação pública do Brasil, possibilitando aos estudantes o acesso aos materiais de qualidade e estimulando o ingresso à universidade.

Através da educação é possível melhorar a qualidade de vida das pessoas, uma vez que ela possibilita o acesso ao mercado de trabalho; o acesso aos estudos no ensino superior (ingresso em universidades e faculdades) e o acesso aos processos seletivos simplificados ou efetivos. E um cidadão que consegue realizar tais conquistas, muda sua vida socioeconômica e de seus familiares.

A OBMEP está de acordo com a LDB quando esta fala sobre os princípios da Educação Nacional em seu 3° artigo o qual orienta sobre os princípios em que o ensino deve ser ministrado. Destacamos o seu segundo princípio: a "liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber" (EDUCACAO, 1996).

Em relação aos conteúdos que fazem partem do nosso trabalho, seguimos as Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio, referentes aos conhecimentos de Matemática que os alunos precisam desenvolver:

> Compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações (EDUCACAO, 2006, p. 69).

A OBMEP teve a sua primeira realização no ano de 2005, promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, composta por duas fases e destinada aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A participação nessa olimpíada é gratuita em suas duas fases para alunos da rede pública de ensino em todo o país, mediante inscrição. Os conteúdos que são trabalhados nas provas são aqueles propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A participação na OBMEP estimula o aprendizado dos alunos. De acordo com (IMPA, 2017), quando os discentes pertencem às escolas envolvidas com a Olimpíada, o aproveitamento deles em avaliações, como: o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM; a Prova Brasil e o Pisa, é melhor do que o de alunos pertencentes às escolas menos envolvidas com essa competição.

A valorização e o incentivo ao professor é algo característico da OBMEP, pois promove cursos e programas voltados à formação de professores e licenciandos, conforme podemos ver:

> Mais recentemente, concebemos o 'OBMEP na Escola', talvez o mais ambicioso programa depois da competição. Professores de matemática e áreas afins e alunos de licenciatura são selecionados por prova e recebem bolsas para ensinar a alunos de escolas públicas. De fato, se o país não conseguir atrair imediatamente para os cursos de licenciatura os jovens talentosos de cada corte, não melhoraremos a qualidade do ensino público da próxima geração (IMPA, 2017, p. 19).

Os profissionais envolvidos com a OBMEP percebem as diversas oportunidades que a competição proporciona aos jovens estudantes por todo o Brasil. Além de que o investimento em programas da própria Olimpíada pode mudar o futuro do aluno, conforme afirma o professor piauiense Antônio Cardoso do Amaral: "Na nossa cidade, os R$100 da bolsa do PIC fazem muita diferença. Para muitos, será a fronteira entre passar a vida na roça ou conquistar um futuro melhor"(IMPA, 2017).

A OBMEP possibilita que vários jovens consigam realizar seus sonhos por meio dos estudos. Temos no (IMPA, 2017) relatos de alunos premiados nessa Olimpíada (NOTA DE RODAPÉ: recomendamos ao leitor à leitura dos relatos na íntegra), como o de Ricardo Oliveira:

> Até participar da OBMEP, Ricardo sempre que pensava no futuro imaginava que os obstáculos seriam grandes. 'Subir na vida, ter um emprego... Eu buscava as possibilidades, mas não encontrava. Sabia que só havia um caminho: o estudo'. Dos pais e do irmão, ele também sempre ouvia: 'Segurar uma caneta é bem melhor do que uma enxada' (IMPA, 2017, p. 39).

Ricardo é um dos tantos estudantes que realizaram seus sonhos motivados pela OBMEP. É possível encontrar trabalhos acadêmicos voltados para Olimpíadas de Matemática, a exemplo do trabalho de (ARAUJO, 2018), o qual abordou conceitos de Aritmética e que também sugerimos a leitura.

Com o objetivo de propor nossa contribuição ao ensino e aprendizado da Matemática e ao incentivo discente e docente para a participação na OBMEP, desenvolvemos este trabalho para que alunos e professores possam ter mais um material de apoio no desenvolvimento de atividades voltadas para a Olimpíada.

Nesse trabalho, relatamos sobre a OBMEP e os programas que apoiam a sua realização, preparando alunos para a participação e proporcionando incentivos para medalhistas no decorrer da vida acadêmica. Desenvolvemos conteúdos de Matemática Discreta: Indução e Recorrência Matemática, Progressões, Análise Combinatória e Probabilidades, bem como algumas aplicações. Além disso, trabalhamos questões de edições anteriores da OBMEP e apresentamos sugestão de solução para esses problemas, como também questões resolvidas destinadas ao treinamento para o evento.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: este capítulo, o primeiro, é composto pela Introdução e os objetivos; o segundo capítulo traz um breve histórico sobre a OBMEP, apresentamos os programas que apoiam o evento e incentivam a participação dos alunos; no terceiro capítulo, abordamos conceitos de Indução e Recorrência Matemática; no quarto capítulo, trabalhamos as Progressões Aritméticas e Geométricas, onde apresentamos definições sobre os conteúdos abordados, bem como demonstrações de fórmulas comumente manipuladas no decorrer do estudo, clássicas neste contexto; em seguida desenvolvemos, no quinto capítulo, conceitos de Análise Combinatória, como: Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutações, Arranjos Simples, Combinações Simples e Combinações Completas ou com Repetições, Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton; no sexto capítulo, apresentamos e desenvolvemos Noções de Probabilidade, Probabilidade Condicional, Probabilidade de Eventos Independentes e Distribuição Binominal; no sétimo capítulo, trazemos questões e soluções de provas da OBMEP de edições anteriores a 2020, bem com questões de apostilas e de Banco de Questões destinados ao treinamento para a Olimpíada; por fim, o oitavo capítulo contém a Conclusão do nosso trabalho.

Os exemplos apresentados ao longo do texto, ora foram de autoria própria; ora foram selecionados de livros ou materiais utilizados como referências da pesquisa. Trazemos uma escrita própria para a solução dos problemas, e procuramos ser claros para o público alvo deste trabalho, ou seja, alunos da fase final do ensino fundamental e do ensino médio da educação básica.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O trabalho tem como objetivo elaborar um material de apoio acerca da Matemática Discreta direcionada aos professores de Matemática e aos estudantes da educação básica interessados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Dar suporte à melhoria do ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática;
- Estimular a participação dos alunos nas Olimpíadas de Matemática, apresentando apoio que diversos programas dão aos alunos medalhistas da OBMEP;
- Desenvolver o conceito de Indução Matemática, apresentando situação-problema, bem como sua utilidade para demonstrações Matemáticas, em particular, no contexto de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas;
- Trabalhar conceitos de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, por meio da resolução de questões da OBMEP que tenham esses assuntos como foco;
- Apresentar e desenvolver Recorrências Matemáticas;
- Compreender a importância do estudo de Análise Combinatória a utilidade para resolução de questões Olímpicas;
- Aprimorar conceitos de Probabilidade e utilizá-los para resolver questões da OBMEP;
- Treinar a escrita matemática através da resolução de problemas olímpicos.

2 OBMEP, Programas e Portais

A primeira Olimpíada de Matemática ocorreu na Hungria em 1894. Após 65 anos dessa competição, foi realizada na Romênia a 1ª Olimpíada Internacional de Matemática. No Brasil, o primeiro evento, desse tipo, foi realizado em 1979, com a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM. Além da OBM, temos a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que, segundo o (IMPA, 2017), é a maior Olimpíada de Matemática do Mundo, ocorrendo anualmente.

Como forma de incentivar e facilitar o acesso aos conteúdos de Matemática, a OBMEP gerencia portais virtuais e programas. Alguns destes programas são destinados ao treinamento de alunos para a Olimpíada e antecedem a aplicação das provas da OBMEP; além disso, há projetos que são dedicados aos alunos que já se submeteram às provas da OBMEP em edições anteriores (OBMEP, 2020c).

Há programas que oferecem incentivo financeiro aos seus participantes. Esses recursos são provenientes do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES ou do Instituto Tim.

2.1 Sobre a OBMEP

A primeira realização da OBMEP, destinadas aos alunos de escolas públicas, foi em 2005. Promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, desenvolvida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC, conta com a colaboração de coordenadores regionais, secretarias de educação e as instituições escolares.

De acordo com a página do programa (OBMEP, 2020a), a OBMEP tem os seguintes objetivos:

> Estimular e promover o estudo da Matemática;
>
> Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
>
> Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
>
> Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
>
> Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;

> Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (OBMEP, 2020a).

Sabemos que a OBMEP ocorre anualmente e sua realização dá-se em duas fases, distribuída em três níveis. Podemos observar na Tabela 1 como é feita a distribuição dos alunos por nível.

Tabela 1 – Níveis da OBMEP

Nível	**Alunos**
1	6° e 7° anos do Ensino Fundamental
2	8° e 9° anos do Ensino Fundamental
3	Ensino Médio

Fonte: Elaborada pelo autor

Na primeira edição da OBMEP em 2005, foram inscritos 10.520.831 alunos de 31.031 escolas, alcançando 93,5% dos municípios brasileiros na primeira fase; na segunda fase, 29.074 escolas continuaram na competição, com um total de 457.725 alunos de 91,9% dos municípios brasileiros.

Em 2019, a OBMEP contou com 54.831 escolas inscritas, 18.158.775 alunos, abrangendo 99,71% dos municípios, na fase inicial dessa competição. Na fase final desse mesmo ano, permaneceram inscritas 50.663 escolas, com o número de 942.240 alunos, representando um total de 99,03% dos municípios brasileiros.

Para a primeira fase em 2020, a OBMEP conta com 51.935 colégios inscritos, 17.730.304 discentes, abrangendo 99,84% dos municípios brasileiros. No ano de 2020, a aplicação das provas da OBMEP 2020 foi adiada, sem data prevista de realização, em função da pandemia de COVID19.

Comparando os dados da OBMEP de 2005 e 2019, percebe-se que, tanto na primeira como na segunda fase, o número de participação de escolas, alunos e municípios aumentou.

De acordo com (CGEE., 2011), a OBMEP possui o entendimento de universalização do ensino por meio de seus planejamentos e que são justificado por:

> O processo de inscrição aberta e democrática na primeira fase das Olimpíadas, acessível a todas as escolas públicas;
>
> A gratuidade dessa primeira inscrição e também da inscrição da segunda fase;
>
> A distribuição gratuita de material didático elaborado especificamente para a matemática e de acordo com o desenho das Olimpíadas;
>
> A acessibilidade eletrônica de informações, imagens, banco de provas, entre outros documentos e materiais que, apesar de dependerem de um acesso digital (computador e internet), estão disponíveis no endereço eletrônico da OBMEP;

> A premiação honorífica que distingue os alunos vencedores com base em símbolos de reconhecimento científico (certificados, honrarias, medalhas, bolsas de iniciação científica para medalhistas). Ainda que existam outros incentivos como, por exemplo, o sorteio de viagens para o premiado e um acompanhante, estes também se relacionam ao campo científico da matemática: as viagens ocorrem com o intuito de conhecer alguma instituição na área, como o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa)(CGEE., 2011, p. 34-35).

Desde 2014, a OBMEP faz a premiação de 6.500 medalhas aos alunos da rede pública, sendo 500 medalhas de ouro, 1.500 medalhas de prata e 4.500 medalhas de bronze. Em 2017, as escolas particulares foram convidadas a integrarem o evento, com participação condicionada ao pagamento de uma taxa. O número de medalhas destinadas às escolas da rede pública permaneceu o mesmo; e para as escolas privadas foram destinadas 75 medalhas de ouro, 225 medalhas de pratas e 675 medalhas de bronze. Esses números de distribuição de medalhas permanecem o mesmo, de acordo com o regulamento da OBMEP 2020.

2.1.1 Medalhista da OBMEP

Impulsionados por (IMPA, 2017), fomos conhecer a história do medalhista da OBMEP, o jovem Rodrigo Marques Faustino da Silva. Tudo começou quando o aluno iniciou seus estudos no IFPB, na cidade de Campina Grande e conheceu o professor Ronaebson Carvalho, que o motivou para a Olimpíada, e criou uma rotina de estudos voltadas para o evento. Em sua primeira participação, o medalhista conta que ficou na 13ª posição da menção honrosa. No ano seguinte, em 2013, ele participou do PIC na UFCG, onde conseguiu ser bolsista desse Programa. Em seu último ano do ensino médio, ele conseguiu medalha de prata na OBMEP.

Em 2016, o estudante ingressou no curso de Matemática da UFCG. Ainda no primeiro período, participou da seleção do Programa de Educação Tutorial - PET, por ser medalhista da OBMEP. Além de participar do programa PICME de 2016 a 2019. No entanto, com a extinção das bolsas desse Programa, ele migrou para o PET para conseguir manter seus estudos. O jovem estudante faz crítica aos órgãos governamentais responsáveis, por não estarem oferecendo a bolsa do PICME, que prejudica o seu ingresso no mestrado. Com isso, Rodrigo é um dos vários estudantes que tiveram suas oportunidades ampliadas através da OBMEP. Os programas citados, neste relato, pelo aluno, será detalhado nos próximos capítulos.

2.2 Sobre os Programas e Portais da OBMEP

Com o objetivo de democratizar o acesso aos conteúdos matemáticos de qualidade e incentivar e facilitar a preparação de docentes e discentes para provas da Olimpíada, a OBMEP promoveu a criação de programas e portais.

2.2.1 Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)

A Matemática, assim como outras áreas do conhecimento, possui rigor, resultados, técnicas e métodos. A iniciação científica em Matemática visa preparar alunos para se envolverem e adquirirem conhecimentos da cultura matemática por meio de programas financiados pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq; dentre eles temos o PIC.

O Programa de Iniciação Científica Jr - PIC, conforme orientações disponíveis em (PIC, 2020), é voltado para alunos premiados a cada edição da OBMEP, com a finalidade de ampliar o conhecimento matemático desses estudantes, bem como prepará-los para o seu desenvolvimento acadêmico e profissional. Esse programa funciona com uma equipe formada por Professores Orientadores, Moderadores de fórum, Coordenadores de fórum e Coordenadores Orientadores. Cada membro da equipe do PIC possui atribuições específicas:

> Professores Orientadores - orientam os alunos sobre seu desenvolvimento e a participação no programa nos encontros presencias.
>
> Moderadores de fórum - acompanham e estimulam as discussões e resolução de problemas entre os alunos em suas salas virtuais no fórum HH [1].
>
> Coordenadores de fórum - articulam os moderadores de fórum em relação à qualidade das intervenções realizadas nas discussões e acompanham a frequência e o cumprimento das regras estabelecidas pelo Comitê Acadêmico para o fórum.
>
> Coordenadores Orientadores - orientam e acompanham todas as atividades realizadas pelos professores Orientadores e premiados da OBMEP no PIC em sua região(PIC, 2020).

O PIC é oferecido de duas formas: presencial, geralmente com aulas aos sábados, e a distância, em que as aulas são virtuais. O estudante, apto para participar do PIC, pode optar pelo presencial, desde que exista um Polo de Iniciação Científica próximo a sua residência. As atividades do PIC são desenvolvidas em Fóruns virtuais, a exemplo do fórum da OBMEP, e no portal da OBMEP.

Os programas vinculados à OBMEP possuem objetivos. No caso do PIC, tem-se seis objetivos principais, a saber:

[1] Hotel de Hilbert

> Despertar nos alunos o gosto pela Matemática e pela ciência em geral;
>
> Motivar os alunos na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas;
>
> Aprofundar o conhecimento matemático dos alunos, por meio de resolução e redação de soluções de problemas, leitura e interpretação de textos matemáticos e estudo de temas de modo mais aprofundado e com maior rigor matemático;
>
> Desenvolver nos alunos algumas habilidades tais como: sistematização, generalização, analogia e capacidade de aprender por conta própria ou em colaboração com os demais colegas;
>
> Incentivar o aprimoramento matemático dos professores, em especial dos professores dos alunos bolsistas;
>
> Estimular uma articulação entre as escolas e as universidades (PIC, 2020).

O aluno participante, desse programa, recebe uma bolsa mensal no valor de R$100, 00, durante 12 meses, pagas pelo CNPq.

2.2.2 Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

De acordo com o Relatório Técnico Final (KAMPHORST, 2015), esse programa teve início com abrangência nacional em setembro de 2009. O Instituto de Matemática Pura e Aplicada é a instituição que coordena acionalmente o Programa de Iniciação Científica e Mestrado, que é ofertado por diversas instituições do país por meio de Programas de Pós-Graduação em Matemática e/ou Matemática Aplicada, recomendados pela CAPES.

O PICME, conforme consta em (PICME, 2020), é voltado para alunos que foram medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas ou na Olimpíada Brasileira de Matemática, com duração bienal. Nesse período, o aluno pode cursar disciplinas ou desenvolver atividades sob orientação de um pesquisador que é indicado pelo Programa.

O ingresso do estudante no PICME se faz por meio de seleção, tendo como pré-requisito ser medalhista na OBMEP ou na OBM. Assim, o aluno deve estar regularmente matriculado em curso de nível superior de instituições públicas ou privadas. Além disso, o aluno deve possuir disponibilidade para o acompanhamento das atividades, pois são realizadas de modo presencial.

De acordo com o relatório Técnico Final do PICME, destacam-se os seguintes objetivos:

> Propiciar o acesso a uma sólida formação matemática que enriqueça o desenvolvimento profissional dos estudantes universitários que se destacaram nas olimpíadas escolares de matemática (OBM ou OBMEP);

> Oferecer a oportunidade de ingressar no Mestrado em Matemática, até mesmo para estudantes ainda na graduação;
>
> Elevar o nível de conhecimento em matemática como ciência básica para o fortalecimento das áreas tecnológicas e científicas;
>
> Inserção acadêmica e econômica de alunos de meio social desfavorecido(KAMPHORST, 2015, p. 4).

Os alunos participantes desse programa recebem bolsas por meio do CNPq, quando são aluno de iniciação científica, e da CAPES, quando estão no mestrado. A bolsa de doutorado PICME/CAPES é concedida ao aluno, obedecendo o critério de ser medalhista da OBMEP ou OBM, aceito em Programa de Pós-Graduação participante.

Em 2008, quando foi feito o primeiro convênio com o CNPq, foram concedidas 650 bolsas para a iniciação científica. A vigência dessas bolsas foi de março de 2009 a setembro de 2011, foram prorrogadas até julho de 2011. Após acordo entre o IMPA e o CNPq, as 650 bolsas ficaram mantidas de setembro de 2011 até agosto de 2015; após ajustes em 2012, essas bolsas, a cada ano, passaram a ter vigência de agosto a julho do ano subsequente, e foram mantidas no ano de 2019, conforme o Relatório Técnico Final do PICME disponível em (KAMPHORST, 2015).

Na Figura 1, a seguir, temos dados atuais referentes à distribuição das bolsas desde de 2009, nos programas de iniciação científica e mestrado, e referentes à distribuição de bolsas de Doutorado a partir de 2013.

Figura 1 – Quadro de distribuição de bolsas

Desde 2009	Iniciação Científica	Mestrado	Doutorado
Participações	2.820	172	44 (desde 2013)
Bolsas concluídas	1.693	74	-

Fonte: http://www.obmep.org.br/picme

De acordo com (KAMPHORST, 2015), o número de alunos participantes da Iniciação Científica do Programa de Matemática da UFCG, desde 2009, foi de 48 participantes; participantes de mestrado, ainda nessa instituição, foram 2.

2.2.3 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo - POTI

Esse programa é destinado aos alunos do 8° e 9° ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio. De acordo com (IMPA, 2020a), seu objetivo é de treinar seus participantes para melhorar desempenho em competições matemáticas e tem como foco, treinar para a OBMEP e a Olimpíada Brasileira de Matemática. A equipe do POTI é formada por Ricardo Misturini (Coordenador), e por alguns professores que ministram Videoaulas: Alex Corrêa Abreu, Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, Francisco Bruno de Lima Holanda, Luciano Guimarães Monteiro de Castro, Nicolau

Corção Saldanha. Na página do programa [2] é possível ter acesso às videoaulas, aos materiais teóricos e aos simulados.

Existem POTI presenciais e virtuais. Conforme (IMPA, 2020b), o POTI Presencial é realizado com professores da região, emite certificado para os alunos participantes, possui encontros semanais e avaliações presenciais. De acordo com (IMPA, 2020b) e (IMPA, 2020c), os Polos virtuais são voltados para alunos de estados e municípios que não possuem Polo presencial, para alunos que não foram selecionados para o presencial ou que não podem ir às reuniões presenciais. O POTI Virtual não define número de vagas, isso permite a participação de qualquer pessoa interessada; Além de possuir orientador online e videoaulas, é disponibilizado materiais com conteúdos e exercícios. No entanto, essa modalidade do POTI não emite certificação.

2.2.4 O Portal OBMEP do Saber

O objetivo desse programa é disponibilizar material de ensino para as disciplinas Matemática e de Física. Esse portal dispõe de conteúdo para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio, dependendo do assunto a ser escolhido. Além disso, dispõe de tópicos adicionais que contemplam outros assuntos que não são comumente trabalhados no Ensino Fundamental ou Ensino Médio como, por exemplo, Introdução à Lógica e Indução Matemática, conforme podemos encontrar em (OBMEP, 2020b).

Os alunos poderão aprimorar seus conhecimentos no Portal fazendo uso dos recursos que nele são disponibilizados, como: módulos, material teórico, videoaula, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, aplicativo, teste da aula e avaliação geral.

No Portal, o campo Painel do Aluno traz orientações e permite que o discente monitore seu desempenho. Caso um professor queira, pode cadastrar sua turma, mesmo já sendo docente dela presencialmente, para desenvolverem atividades complementares com seus alunos. No Portal, ele terá o apoio do responsável pelo estudante para o acompanhamento das atividades realizadas.

Após realizar todas as atividades de um módulo, o aluno que obtiver pontuação igual ou acima de setenta por cento recebe certificado de participação.

2.2.5 OBMEP na Escola

Realizado pelo IMPA, com apoio da SBM, o Programa OBMEP na Escola é voltado para professores de Matemática de escolas públicas de todo o país, que visa estimular os professores a obterem conhecimentos mais aprofundados de Matemática e a levarem

[2] https://poti.impa.br/index.php/site/material

para a sala de aula novas práticas didáticas, assim como também trabalhar com o material didático produzido pelo IMPA para a OBMEP.

Conforme o regulamento de seleção para o Programa OBMEP na Escola 2020, disponível no site da OBMEP, a primeira etapa do programa é a aplicação da prova para a habilitação dos professores conforme regras e critérios estabelecidos pelo regulamento da seleção. A segunda etapa é quando a Coordenação de Programas de Extensão Acadêmica do IMPA faz a implementação do Programa OBMEP na Escola.

Até o presente momento, foram aplicadas apenas três provas de habilitação, ocorridas nos anos de 2014, 2016 e 2019. Em 2019, de acordo com (OBMEP, 2019b), o estado da Paraíba teve um total de 23 professores habilitados para este programa, 15 deles foram selecionados para o OBMEP na Escola (OBMEP, 2019c).

2.2.6 Bolsa Instituto Tim OBMEP

O Instituto Tim é um dos parceiros das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas. A Bolsa Instituto tem como objetivo dar apoio financeiro aos jovens que foram medalhistas em alguma das edições da OBMEP, destinada para alunos que estão em cursos nas áreas de: astronomia, Biologia, Computação, Economia, Engenharia, Estatística, Física, Matemática, Medicina e Química.

Conforme (OBMEP, 2020b), desde 2015 até o ano de 2020, 50 bolsas, no valor de 1.200,00 cada, vêm sendo ofertadas anualmente, podendo ser renovada no limite máximo de 48 meses. As bolsas são distribuídas para várias Instituições de Ensino Superior do país, no estado da Paraíba, por exemplo, temos as seguintes Instituições que são contempladas: O IFPB - Instituto Federal da Paraíba com uma bolsa; a UFCG - universidade Federal da Campina Grande com três bolsas e a UFPB - Universidade Federal da Paraíba também com três bolsas.

2.2.7 Clubes de Matemática da OBMEP

Os Clubes de Matemática da OBMEP apresentam como objetivos: disseminar conhecimentos da Matemática, desmistificando ideias construídas sem fundamentação sobre a Matemática. Além de incentivar a análise crítica dos participantes sobre seus resultado, bem com o resultado de outros participantes do clube, visando, assim, o desenvolvimento intelectual de todos os envolvidosclubes. Os participantes dos clubes, são: os alunos do Ensino Fundamental e Médio, de escolas públicas ou privadas; alunos universitários e professores de Matemática. Alunos do Ensino Fundamental e Médio podem participar dos Clubes de Matemática da OBMEP. Tanto estudantes de escolas públicas ou privadas podem participar. Inclusive alunos universitários e professores de Matemática.

Para a criação de um Clube Olímpico, deve-se ter: de cinco a dez alunos que podem ou não pertencer à mesma escola, com possibilidade de serem em níveis de escolaridade diferentes; um responsável, este maior de dezoito anos, que pode ser alguém da comunidade escolar e de um orientador, porém não é condição obrigatória. O orientador pode ser um professor; um aluno de Licenciatura em Matemática, universitários do PICME, ou alguém que tenha bons conhecimentos em Matemática.

Os participantes do Clube de Matemática da OBMEP desenvolverão suas atividades em dois ambientes virtuais, que são o blog e o fórum de discussões. No blog, é possível encontrar referências bibliográficas como indicação para estudos, resolução de problemas, provas de competições de Matemática, dentre outras informações. Já o Fórum é voltado para desenvolver atividades específicas a exemplos de gincanas, aprender a utilizar o GeoGebra [3] e o LaTeX[4].

2.2.8 Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM

O PAPMEM não é um programa olímpico e não está vinculado à OBMEP como os Clubes de Matemática. No entanto, apresentamos esse programa devido a sua importância para o aperfeiçoamento de professores de matemática da educação básica. Conforme (IMPA, 2020d), o PAPMEM vem sendo realizado desde 1990, buscando capacitar professores de Matemática do Ensino Médio, através de uma formação gratuita, durante os meses de janeiro e julho.

Inicialmente, apenas o IMPA oferecia o PAPMEM e era chamado de Curso de Capacitação para Professores de Matemática do Ensino Médio - CAPMEM. Ao longo dos anos, foi expandido por meio de polos em outras Instituições de Ensino Superior do Brasil. Em sua trajetória, o programa já contou com o apoio do Projeto Insituto do Milênio Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira e Contribuição à Região; da Financiadora de Estudos e Projetos; da VITAE Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social; da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro e da CAPES.

Através do PAPMEM, foram publicados pela SBM, na Coleção do Professor de Matemática, livros voltados para professores do Ensino Médio. De acordo com (IMPA, 2001), essa coleção de livros é tida como a melhor referência para o professor de Matemática do Ensino Médio. Os livros dessa coleção possuem os seguintes títulos: Análise Combinatória e Probabilidade; Medida e Forma em Geometria; Logaritmos; Trigono-

[3] *Software* de matemática dinâmica que pode ser usado em todos os níveis de ensino, em apenas um pacote reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos.

[4] *Software* que processa textos e permite a edição deles.

metria e Números Complexos; Coordenadas no Plano; Coordenadas no Espaço; Introdução à Geometria Espacial; Progressões e Matemática Financeira; Construções Geométricas.

Na fase de publicação dos livros citados, a maior parte deles contou com o patrocínio da VITAE. Em uma segunda fase, com o patrocínio do programa CAPES – FAPERJ, foram publicados os livros A Matemática do Ensino Médio, em três volumes. Esses livros trazem maior proximidade com a sala de aula, pois discutem a postura e atuação do professor ao ensinar cada conteúdo.

O PAPMEM, nos anos de 2001 e 2002, foi desenvolvido em dois módulos que abrangiam conteúdos das três séries do Ensino Médio. Esses dois módulos foram desenvolvidos ao longo de dois semestres: o primeiro semestre de janeiro a junho e o segundo semestre de julho a novembro.

Na primeira semana de cada semestre, eram desenvolvidas atividades presenciais em tempo integral no IMPA. Após essa semana, eram realizadas reuniões mensais aos domingos, por três meses, para que fossem discutidas presencialmente propostas de trabalhos a serem desenvolvidas. Os professores participantes eram avaliados no início e no fim de cada semestre.

A equipe responsável por esses módulos foi composta por: Elon Lages Lima (coordenador), Augusto César Morgado, Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Maria Celano Maia (secretária executiva) e Priscilla Fernades Pomateli (secretária). Esse grupo atuava em atividades voltadas ao Ensino de Matemática, como: A Revista do Professor de Matemática; as Olimpíadas de Matemática (regionais, nacionais e internacionais); a autoria de diversos livros de matemática e a criação e execução do PAPMEM.

No PAPMEM, realizado em julho 2002, de acordo com (IMPA, 2002), havia a previsão da partições de outras instituições. Nesse momento, o PAPMEM passou a ser realizado durante uma semana, nos meses de janeiro e julho, de forma integral. As aulas eram transmitidas pelo IMPA para as demais instituições, utilizando a infraestrutura da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP). Elas ocorriam no período da manhã e, durante a tarde, as atividades do curso eram desenvolvidas sob a supervisão de professores das instituições parceiras.

Em janeiro de 2020, o PAPMEM teve como coordenador do programa o professor Eduardo Wagner; em outras edições, teve como coordenador o professor Elon Lages Lima. Nesse ano, contou com 70 polos e 3000 professores participantes. No IMPA, o número de vagas para participação dessa edição foi 150 professores por módulo e nos demais polos variaram de 50 a 100 professores.

2.2.8.1 O PAPMEM NA UFCG

Em julho de 2006, a UFCG teve a sua primeira participação na edição do PAPMEM. Nessa época, foi chamado de Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio – CAPMEM.. Na primeira edição do curso na UFCG, de acordo com (FILHO, 2006), o programa contou com os professores locais: Daniel Cordeiro de Morais Filho (Coordenador Local), Alciônio Saldanha de Oliveira, Antônio José da Silva, José de Arimatéia Fernandes, José Lindomberg Possiano Barreiro, Marco Aurélio Soares Souto e Luiz Mendes Albuquerque Neto; com apoio secretarial de Maria Salete Araújo; apoio de informática com Marcelino Antero e Valdir da Cruz Silva e teve o apoio de Francisco David de Lima Neto e Sóstenes Ferreira Torquato.

Nessa primeira edição na UFCG, de acordo com (FILHO, 2006), o curso contou com 148 professores inscritos, 131 professores de 32 cidades paraibanas, com frequência superior a 99%. Para atingir esse público, utilizou-se os seguintes meios:

> Fizemos divulgação do curso para os professores de Campina Grande e região. Para este fim, usamos a Imprensa, os Correios e a 3ª Região de Ensino, ligada à Secretaria de Educação e Cultura do Estado (vide Anexo 2- Folder)(FILHO, 2006, p. 2).

O curso foi realizado durante uma semana, de 24 a 28 de julho de 2006. Os professores receberam material para realizar o curso, os 100 primeiros professores receberam o livro Temas e Problemas Elementares, utilizado durante o evento. No período da manhã, as aulas eram transmitidas do IMPA para a UFCG e mais 23 universidades do Brasil; durante a tarde, eram realizadas resolução de problemas em grupo.

De acordo com informações disponíveis em (UFCG, 2014) e (UAMAT, 2018), já foram coordenadores do PAPMEM — UFCG, os professores Braulio Maia Júnior e Leomaques Francisco Silva Bernardo. Dessa forma, o PAPMEM — UFCG tem como público alvo professores do Ensino Médio e alunos de licenciatura em Matemática, geralmente são oferecida de 50 a 100 vagas em cada edição do programa.

3 Indução e Recorrência Matemática

As provas da OBMEP têm histórico de abordar temas que envolvem raciocínio recursivo – ver Questões 3 e 4 do Capítulo 7, por exemplo. Não à toa, Indução e Recorrência estão presentes em apostilas de preparação para esta Olimpíada. Por isso, neste terceiro capítulo, trabalhamos tais conceitos, à luz de (MORGADO; CARVALHO, 2015), apresentando exemplos e demonstrações.

3.1 Indução Matemática

Giuseppe Peano (1858 - 1932) propôs uma lista de quatro axiomas que caracterizam os números naturais, os chamados *Axiomas de Peano*. A saber:

1. Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n+1$;
2. Se $m+1 = n+1$, então $m = n$;
3. O número 1 é o único natural que não é sucessor de nenhum outro número, ou seja, $n+1 \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
4. Seja X um subconjunto do conjunto dos números naturais, ou seja, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, $n+1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Esses quatro axiomas são fundamentais para a caracterização dos números naturais, porém o último, chamado *Axioma da Indução*, destaca-se pelo modo que é apresentado.

Na maneira como o quarto axioma está proposto, ele permite apenas para mostrar que $X = \mathbb{N}$, ou seja, dado um subconjunto X de números naturais, em que $1 \in X$, o sucessor do 1 pertence a X, o sucessor, do sucessor de 1 também pertencem a X, e assim sucessivamente, concluí-se que o $X = \mathbb{N}$.

Faremos manipulações no quarto axioma de modo a servir para, por exemplo, mostrarmos que uma dada propriedade ou afirmativa de números naturais é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ – são os princípios de indução. Iremos enunciar e demonstrar três formas do princípio de indução: Teorema 3.1, 3.2 e 3.3.

Neste capítulo, quando referirmos às propriedades ou afirmativas, utilizaremos como notação a letra P, lemos do seguinte modo: a propriedade P.

Seja P uma propriedade e $P(n)$ uma sentença aberta que depende da variável n, $n \in \mathbb{N}$. Assim, quando uma sentença contém n e ao substituir n por $a \in \mathbb{N}$, obtêm-se $P(a)$ que é verdadeira ou falsa (VIEIRA, 2015). Desse modo, a propriedade P será verdadeira ou falsa.

Teorema 3.1. *Seja P uma propriedade sobre números naturais. Suponhamos que P é tal que*

(i) *$P(1)$ é válida;*

(ii) *para cada natural $k \geq 1$, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Demonstração. Considere X o conjunto dos números naturais para os quais P é válida; em símbolos,

$$X = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ é válida}\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $X = \mathbb{N}$, a partir do Axioma de Indução. Deste modo, precisamos mostrar que as condições do Axioma são satisfeitas.

Por (i), $P(1)$ é verdadeira; assim, $1 \in X$. Agora, se $k \in X$, então $P(k)$ é verdadeira. Portanto, por (ii), $P(k+1)$ também é verdadeira. Logo, $k+1 \in X$. Daí, como estamos sob as condições do Axioma de Indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$, ou seja, que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

■

Este axioma pode ser escrito de maneira ligeiramente mais geral, de modo a ser aplicável a mais situações.

Teorema 3.2. *Sejam $a \in \mathbb{N}$ e P uma propriedade sobre números naturais maiores ou iguais do que a. Suponhamos que P é tal que*

(i) *$P(a)$ é válida;*

(ii) *para cada natural $k \geq a$, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Antes de demonstrarmos este Teorema, faremos um pequeno comentário: como na demonstração do Teorema 3.1, nosso objetivo é mostrar que a propriedade é válida para todo número natural a partir de a. Podemos pensar de modo análogo e definir um conjunto $\tilde{Y}$, cujos elementos são números naturais, os quais P é verdadeira, ou seja,

$$\tilde{Y} = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ é válida}\}.$$

No entanto, com essa definição do conjunto $\tilde{Y}$, teremos problema para concluir, por exemplo, que $1 \in Y$. Utilizaremos a ideia da demonstração do Teorema 3.1, mas com um conjunto diferente, que faz sentido ao nosso objetivo. Vejamos:

Demonstração. Considere o conjunto Y composto pelos números naturais para os quais P é verdadeira, ou seja,

$$Y = \{k \in \mathbb{N} | P(k + a - 1) \text{ é válida}\}.$$

Por (i), $1 \in Y$, pois $P(1+a-1) = P(a)$ é válida. Agora, se $k \in Y$, então $P(k+a-1)$ é válida. Desse modo, por (ii), $P(k+1+a-1)$ também é válida, logo, $k+1 \in Y$, pelo *Axioma de Peano*, $Y = N$. Consequentemente, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

■

Os Teoremas 3.1 e 3.2 são chamados *Princípio de Indução Finita* ou *de Indução Matemática* e permite mostrar que uma propriedade P é válida para todo n natural.

O Princípio de Indução, além de ser um método de demonstração, é também usado para construir definições. Por exemplo, em termos gerais, uma dada atribuição $A(n)$ fica estabelecida por meio da definição de $A(1)$ e de um modo de obter-se $A(n+1)$ a partir de $A(n)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ – aqui usa-se o Teorema 3.1 para garantir que este procedimento assegure a validade da definição de $A(n)$ para todo $n \geq 1$.

Para provarmos propriedades utilizando Indução, procedemos do seguinte modo:

- verificamos a validade da *base de indução*, isto é, de $P(a)$;
- supõe-se que P é válida para $k \geq a$ – esta suposição é chamada de *hipótese de indução*;
- mostra-se que $P(k+1)$ é verdadeira a partir da hipótese de indução – processo conhecido como *passo de indução*.

Exemplo 1. *Demonstre, por indução, a seguinte identidade:*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Solução: Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a seguinte propriedade, a qual denotaremos por P: *$P(n)$ é verdadeira se vale a igualdade*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Em outras palavras, $P(n)$ é verdadeira se a soma $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)$ tem resultado dado pela expressão $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Iniciemos mostrando a validade da nossa base de indução. Com efeito, como

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3},$$

então $P(1)$ é verdadeira, isto é, $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

A seguir, para algum $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Usando a hipótese de indução, vejamos que $P(k+1)$ é verdadeira: em outras palavras, mostraremos que se vale $P(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, então vale $P(k+1)$. A validade de $P(k)$ nos dá

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1)(k+2) &= \\
[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1)] + (k+1)(k+2) &= \\
\left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right] + (k+1)(k+2) &= \\
(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é válida. Sendo assim, pelo Princípio da Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a identidade

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

é válida para todo $n \geq 1$.

■

Com base em (MILIES; COELHO, 2006), enunciaremos a seguir outra versão do Princípio de Indução, conhecido como *Princípio de Indução Completa.*

Teorema 3.3. *Suponhamos que para cada natural $n \geq 1$ está dada uma afirmativa $P(n)$ de forma que*

(*i*) *$P(1)$ é verdadeira;*

(*ii*) *Se $P(k)$ é verdadeira para todo natural k tal que $1 \leq k \leq m$, então $P(m+1)$ é verdadeira.*

Então $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$.

Demonstração. Considere Y o conjunto dos números naturais n para os quais $P(1)$, $P(2), \ldots, P(n)$ é verdadeira – em outros termos,

$$Y = \{n \in \mathbb{N} | P(k) \text{ é verdadeira para } 1 \leq k \leq n\}.$$

Por (i), $P(1)$ é verdadeira, isto é, $1 \in Y$.

Agora, se $n \in Y$, então $P(k)$ é verdadeira para $1 \leq k \leq n$, pela definição do conjunto Y. Daí, por (ii), $P(n+1)$ é válida. Assim, $P(k)$ é verdadeira para $1 \leq k \leq n+1$, ou seja, $n+1 \in Y$. Pelo quarto axioma de Peano, $Y = \mathbb{N}$.

■

Exemplo 2. *Vamos definir uma sequência da seguinte forma: os dois primeiros termos são $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$; cada um dos termos subsequentes define-se como a soma dos dois anteriores, isto é, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Assim, os primeiros termos dessa sequência são:* $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$ *(MILIES; COELHO, 2006).*

Demonstre que, para cada n, vale a desigualdade $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Solução: Seja P a propriedade definida pela desigualdade

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Observe que $P(1)$ e $P(2)$ são válidas, pois para $n = 1$ temos que $1 < \frac{7}{4}$ e para $n = 2$ temos que $3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$.

Agora, suponhamos que $P(m)$ é válida, para todo $m \leq k$, $k \geq 2$. Mostraremos que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$. Temos que $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$.

Por hipótese de indução, $P(k)$ e $P(k-1)$ são verdadeiras. Assim, temos

$$a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k \text{ e } a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} a_{k+1} &< \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{7}{4} + 1\right)\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Observe que $\frac{11}{4} < \left(\frac{7}{4}\right)^2$. Desse modo,

$$a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Completa, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

■

Para demonstração de desigualdades que estão associadas aos somatórios ou produtórios, em geral, é necessário mostrar uma desigualdade adicional, pois não é possível concluir a resolução apenas com a situação apresentada.

Exemplo 3. *Vamos mostrar, por indução, a desigualdade* $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ *(MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade definida pela desigualdade

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Tal propriedade é válida quando $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ for igual a um valor menor ou igual a $\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Note que $P(1)$ é verdadeira, pois $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4}}$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum k natural, $k \geq 1$. Provaremos que $P(k+1)$ é válida.

Multiplicando os dois membros da desigualdade por $\dfrac{2k+1}{2(k+1)}$, obtemos

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)}.$$

Para que possamos concluir a demonstração, é necessário mostrarmos também que a desigualdade $\dfrac{2k+1}{\sqrt{3k+1} \cdot 2(k+1)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$ ocorre, e uma alternativa para isso é estudar a diferença entre os termos. Para eliminarmos as raízes, elevamos ao quadrado, os dois membros da desigualdade, e obtemos:

$$\frac{(2k+1)^2}{(3k+1)(2(k+1))^2} \leq \frac{1}{3k+4}.$$

que é equivalente a primeira, pois k é um número positivo.

$$\frac{(2k+1)^2}{(3k+1)(2(k+1))^2} - \frac{1}{3k+4} = -\frac{k}{(3k+1)(2k+2)^2(3k+4)} < 0.$$

De fato, $\dfrac{2k+1}{\sqrt{3k+1} \cdot 2(k+1)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$ é verdadeira e, concluímos que

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot (2(k+1)-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k \cdot 2(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}},$$

o que mostra que a desigualdade é válida para $k+1$. Portanto, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, por causa do Princípio de Indução.

$\blacksquare$

Exemplo 4. *Demonstre, por indução, que* $2^n > n$*, onde* n *é um número natural arbitrário (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Considere $P(n)$, a propriedade definida pela desigualdade $2^n > n$.

Note que, $P(1)$ é verdadeira, pois $2^1 > 1$.

Agora, para algum k natural, $k \geq 1$, suponhamos que $P(k)$ é válida. Desse modo, $2^k > k$. Usando a hipótese de indução, provaremos que vale $P(k+1)$. De fato,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k.$$

Note que, $2k > k+1$. Daí, $2^{k+1} > k+1$.

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio de Indução $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$\blacksquare$

A seguir, mostraremos a clássica desigualdade de Bernoulli.

Lema 3.4. *Para qualquer n natural e h real, $h > -1$ é válida a desigualdade*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Demonstração. Seja $P(n) : (1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo n natural e $h > -1$.

Mostraremos que a propriedade P é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Verificando para $n = 1$ temos $(1+h)^1 \geq 1 + 1 \cdot h = 1 + h$ é válida. Suponhamos por hipótese de indução que $P(n)$ é válida para todo $n \geq 1$. Assim,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Provaremos que $P(n+1)$ é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n \cdot (1+h) \\ &\geq (1+nh) \cdot (1+h) \\ &\geq 1 + h + nh + nh^2. \end{aligned}$$

Note que $nh^2 \geq 0$, $1 + h + nh + nh^2 \geq 1 + h + nh = 1 + (n+1)$. Daí,

$$(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h.$$

Logo, pelo Princípio de Indução concluímos que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$\blacksquare$

3.2 Recorrências

O conceito de Recorrências pode ser utilizado para construir definições, a exemplo da de somatório, conforme (MORGADO; CARVALHO, 2015) apresenta. Em nosso trabalho, aplicamos este conceito quando abordamos o conteúdo de Progressões no Capítulo 4.

Em um contexto não matemático, é comum nos deparamos com situações em que os elementos que as compõem possuem determinada ordem, como, por exemplo, dos dias da semana, os meses do ano e as vogais do nosso alfabeto. Essas situações possuem uma continuidade, e é comum referir-se a elas como sequência dos dias da semana, dos meses do ano e das vogais.

No âmbito da Matemática, temos sequências que são definidas por sentença matemática, e também sequências de números reais. Com relação às sequências de números reais, temos as definições a seguir:

Definição 3.1. *Chama-se sequência de números reais infinita uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, em que cada número natural n é associado a um número real x_n, denominado o n–ésimo termo da sequência.*

Usaremos $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (a_n) para nos referirmos a uma sequência.

Exemplo 5. *Encontre os três primeiros termos da sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{3^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: Para $n = 1$, temos $x_1 = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$; para $n = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$; para $n = 3$, $x_1 = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$. Logo, os três primeiros termos de (x_n) são $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}$ e $\dfrac{1}{27}$.

■

Em relação ao exercício anterior, se quiséssemos nos referir à sequência em questão, colocaríamos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dots, \dfrac{1}{3^n}, \dots\right)$.

Definição 3.2. *Chama-se sequência numérica finita, uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.*

Denotaremos sequências finitas por $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ou por (a_n). Para esta notação, o contexto deixará claro que trata-se de uma sequência finita ou infinita.

Exemplo 6. *Escreva a sequência (a_n), que possui como termo geral $a_n = 2n - 1$, $n \in \{1, 2, 3\}$.*

Solução: Para $n = 1$, temos $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$;para $n = 2$, temos $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; para $n = 3$, temos $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Portanto, temos a sequência $(1, 3, 5)$.

■

Definição 3.3. *Uma relação de recorrência é uma equação que expressa cada elemento de uma sequência em função dos anteriores. Mais precisamente, no caso em que apenas o elemento imediatamente anterior está envolvido, uma relação de recorrência tem a forma*

$$x_n = \varphi(n, x_{n-1}) \text{ para } n > 1,$$

onde, $\varphi : \mathbb{N} \times X \to X$ *é uma função, e* X *é um conjunto ao qual os elementos de uma sequência devem pertencer. Para qualquer* $x_0 \in X$, *isso define uma sequência única com* x_0 *como seu primeiro elemento, chamado de valor inicial.*

Para que uma recorrência fique bem definida, é preciso ter conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s). Utilizando o processo recursivo, é possível determinar, por exemplo, sequências e conjuntos.

O termos de uma recorrência pertencem ao que dela foi gerado. Se gerar uma sequência, são termos pertencentes a esta, por exemplo.

Podemos compreender a Definição 3.3 como sendo recorrência de um método matemático que permite, a partir de uma regra matemática, calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediatos.

A *solução da recorrência*, também chamada de *termo geral*, é a fórmula matemática que permite calcular qualquer um dos seus termos.

Para nos referirmos ao termo geral de uma recorrência, utilizaremos a notação x_n.

Exemplo 7. *A recorrência* $x_{n+1} = x_n + 2$ *com* $n \geq 0$, $x_0 = 0$, *determina a sequência de números inteiros pares não negativos* $(0, 2, 4, \ldots, x_n, \ldots)$.

No contexto do nosso trabalho, podemos ver sequências que são definidas por recorrências. Neste caso, além da equação de recorrência, são fornecidos também o(s) primeiro(s) termo(s) da recorrência.

Exemplo 8. *A sequência* $(1, 1, 2, 3, 5, \ldots, F_n, \ldots)$ *é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$ *com* $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1$.

Definição 3.4. *Uma recorrência é dita de primeira ordem quando expressa cada termo em função do seu antecessor imediato.*

Exemplo 9. *A recorrência* $x_{n+1} = x_n q$, *com* $n \geq 1$, $x_1 = 2$ *e* q *uma constante real, é de primeira ordem.*

Definição 3.5. *As recorrências de primeira ordem são lineares se a recorrência* x_{n+1} *em função de* x_n *for uma função polinomial do primeiro grau.*

Definição 3.6. *Uma recorrência* x_{n+1} *é chamada homogênea quando sua equação não possui termo independente de* x_n. *Além disso, é dita não-homogênea, quando sua equação possui termo independente de* x_n.

Exemplo 10. *A Recorrência* $x_{n+1} = nx_n$, *com* $n \geq 1$, *e* $x_1 = 10$, *é linear homogênea, pois não possui termo independente de* x_n.

Exemplo 11. *A Recorrência* $x_{n+1} = nx_n + 3n^3$, *com* $n \geq 1$, $x_1 = 5$, *é linear não-homogênea, pois possui termo independente de* x_n, *neste caso,* $3n^3$.

Exemplo 12. *A Recorrência* $x_{n+1} = nx_n^2$, *com* $n \geq 1$, $x_1 = 2$, *é não-linear, pois possui o termo* x_n^2.

A solução de recorrências homogêneas do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n$ é obtida do seguinte modo: tem-se, a partir da fórmula, as seguintes igualdades $x_2 = f(1)x_1$, $x_3 = f(2)x_2$, $\ldots$, $x_n = f(n-1)x_{n-1}$. Daí, multiplicando-as na ordem apresentada, obtemos:

$$\begin{aligned} x_2x_3\ldots x_n &= f(1)x_1f(2)x_2\ldots f(n-1)x_{n-1} \\ &= x_1x_2\ldots x_{n-1}\left[f(1)f(2)\ldots f(n-1)\right], \end{aligned}$$

donde, cancelando os termos $x_2\ldots x_{n-1}$ em ambos os lados da igualdade,

$$x_n = x_1f(1)f(2)\ldots f(n-1).$$

Assim,

$$x_n = x_1\prod_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Apresentaremos a seguir um exemplo de uma sequência linear homogênea. Outro exemplo é apresentado no Exercício 3, do Capítulo 7, em que temos uma sequência linear homogênea.

Exemplo 13. *Determine o termo geral da recorrência:*

$$x_{n+1} = 2x_n \ e \ x_1 = 3.$$

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 2\cdot 3 \\ x_3 &= 2\cdot 2\cdot 3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2^{n-1}\cdot 3. \end{aligned}$$

Portanto, o termo geral da recorrência é dado por $x_n = 3\cdot 2^{n-1}$.

■

As recorrências não-homogêneas que apresentamos são da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$, cuja solução é obtida do seguinte modo: tem-se, a partir da fórmula, as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + f(1) \\
x_3 &= x_2 + f(2) \\
x_4 &= x_3 + f(3) \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + f(n-1).
\end{aligned}$$

Somando as igualdades na ordem apresentada, temos:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n &= x_1 + f(1) + x_2 + f(2) + x_3 + f(3) + \cdots \\
&\cdots + x_{n-1} + f(n-1) \\
x_n &= x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \\
&= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i).
\end{aligned}$$

Portanto, $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$.

■

O problema a seguir tem como solução uma recorrência linear não-homogênea, assim como o exemplo apresentado no Capítulo 7, Exercício 4.

Exemplo 14. *Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0? (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Vamos determinar o valor procurado a partir da contagem dos elementos de conjunto adequados e das relações entre estes conjuntos. Este raciocínio nos levará a uma recorrência, cuja solução dará a resposta para o problema.

Primeiramente, seja $C = \{0, 1, 2\}$. Para cada n, seja, também, S_n o conjunto de sequências de n termos, todos pertencentes a C. Observe que há dois tipos de elementos em S_n: as sequências que possuem uma quantidade par de zeros e as que possuem uma quantidade ímpar de zeros; denotaremos por X_n o subconjunto de S_n formado pelas sequências do primeiro tipo e por Y_n o subconjunto constituído pelas demais. Por exemplo, para $n = 4$, as sequências $(0, 1, 2, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$ pertencem a S_4, com as duas primeiras em X_4 e as duas últimas em Y_4.

Com base no que foi dito acima, temos $S_n = X_n \cup Y_n$. Além disso, como C possui três elementos, então S_n tem 3^n elementos. Denotando por α_n a quantidade de elementos de X_n, concluímos que Y_n possui $3^n - \alpha_n$ elementos.

Queremos saber quantos elementos há em X_{n+1}, ou seja, quantas são as sequências que possuem $n + 1$ termos todos em C e que possuem uma quantidade ímpar de zeros. Seguindo a notação fixada inicialmente, consideraremos que X_{n+1} possui α_{n+1} elementos.

Os elementos de X_{n+1} são de três tipos, no que diz respeito ao seu último termo: ou a sequência termina com o número 1, ou com 2, ou com 0. Sejam $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ e $\tilde{X}_0$, os conjuntos formados pelas sequências de $n+1$ termos que terminam em, respectivamente, 1, 2 e 0.

Se uma sequência em X_{n+1} termina com 1, então seus n primeiros termos é uma sequência que possui uma quantidade ímpar de zeros – em outras palavras, podemos dizer que cada elemento de $\tilde{X}_1$ subentende um elemento diferente de X_n. Logo, $\tilde{X}_1$ tem a mesma quantidade de elementos que X_n, isto é, α_n. Analogamente, $\tilde{X}_2$ tem α_n elementos. Com relação a $\tilde{X}_0$, seus n primeiros termos é uma sequência que possui uma quantidade par de zeros; daí, raciocinando como nos casos anteriores, $\tilde{X}_0$ tem a mesma quantidade de elementos de Y_n, isto é, $3^n - \alpha_n$ elementos.

Tendo em vista as considerações feitas, $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + (3^n - \alpha_n)$, ou seja, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 3^n$.

Utilizaremos o raciocínio recursivo para concluir a solução da situação problema. Quando $n = 1$, as sequências de um termo são: $(0), (1)$ e (2). Apenas a sequência (0) possui um número ímpar de termo igual a zero. Desse modo, $\alpha_1 = 1$.

Agora,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + 3^1 \\
\alpha_3 &= \alpha_2 + 3^2 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \alpha_{n-1} + 3^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Somando as n equações, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1 + \alpha_1 + 3^1 + \alpha_2 + 3^2 + \cdots + \alpha_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Dai,

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} \\
\alpha_n &= \frac{3^n - 1}{2}.
\end{aligned}
$$

■

Além das Recorrências Lineares de Primeira Ordem, existem as Recorrências Lineares de Segunda Ordem, no entanto, apresentaremos apenas as de primeira ordem, por atender à necessidade do desenvolvimento teórico do nosso trabalho, caso o leitor tenha interesse pelo assunto, sugerimos (LIMA et al., 2006b) e (MORGADO; CARVALHO, 2015).

4 Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Os conteúdos de Matemática no Ensino Médio estão agrupados em cinco competências específicas, conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Os assuntos Progressões Aritmética e Progressões Geométricas fazem parte da Competência Específica 5 da Área de Matemática e suas Tecnologias e orienta que:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2018, p. 540).

De modo a atender esta competência, a BNCC elenca as seguintes habilidades:

> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BNCC, 2018, p. 541).

Os assuntos de progressões são abordados nas provas da OBMEP, no Banco de Questões dessa Olimpíada e nas apostilas voltadas para a preparação de alunos para esse evento.

Desenvolvemos os conceitos dos conteúdos desse capítulo, o Capítulo 4, com base na Competência Específica 5, nas habilidades propostas, à luz de (MORGADO; CARVALHO, 2015).

4.1 Progressões Aritméticas

Diversas são as situações do cotidiano que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais. Temos, como exemplo de Progressões Aritméticas, as horas de um dia, a sequência cujos termos são os números naturais e a sequência dos números inteiros.

Apresentaremos a seguir, com base em (LIMA, 2010a), a definição de Progressões Aritméticas, determinamos a fórmula do termo geral e a da soma dos termos de uma PA e fizemos algumas aplicações ao longo deste capítulo. No Capítulo 7, trabalhamos os conceitos de PA nas Questões 3 e 6.

Definição 4.1. *Chama-se Progressão Aritmética (PA) uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa constante é chamada de razão da PA e é representada pela letra r.*

Exemplo 15. *A sequência $(2, 4, \ldots, 2n, \ldots)$ representa uma PA infinita de razão $r = 2$.*

Exemplo 16. *A sequência $(-3, 0, 3, 6, 9)$ representa uma PA finita de razão $r = 3$.*

Utilizando o raciocínio recursivo e o fato de que para calcular um termo, a partir do anterior, basta somar a razão. Temos,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando as igualdades na ordem apresentada, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)r. \tag{4.1}$$

Subtraindo $a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$ dos dois membros da igualdade (4.1), obtemos a expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$ que é o termo geral da PA.

O processo apresentado é um argumento heurístico que podemos chegar na fórmula do termo geral da Progressão Aritmética.

Teorema 4.1. *Seja a progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r. A fórmula do termo geral da PA é dada por $a_n = a_1 + (n-1)r$.*

Demonstração. Provaremos por indução que $a_n = a_1 + (n-1)r$ é válida para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$ temos, $a_1 = a_1 + (1-1)r$, o que é válido. Agora, supondo que é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, mostraremos que é válida para $n+1$. De fato,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + r \\ &= [a_1 + (n-1)r] + r \\ &= a_1 + ((n+1)-1)r. \end{aligned}$$

Logo, $a_{n+1} = a_1 + ((n+1)-1)r$. Pelo Princípio de Indução, a fórmula do termo geral da PA é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Sabemos que o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. Considerando o caso em que a razão $r \neq 0$ e desenvolvendo o produto presente no segundo membro dessa igualdade, temos $a_n = a_1 + nr - r$, donde $a_n = nr + (a_1 - r)$. Veja que $nr + (a_1 - r)$ é um polinômio do primeiro grau na variável n. Por esse fato, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de *progressões aritméticas de ordem 1.* Quando $r = 0$, a progressão é *estacionária.*

Definição 4.2. *Chama-se Progressão Aritmética de ordem k, $k > 2$, uma sequência em que as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$.*

Exemplo 17. *A sequência $(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois fazendo a diferença entre cada termo e o anterior, obtemos uma PA não-estacionária a qual representaremos por $(b_n) = (3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$.*

Sabemos que uma sequência é definida por uma função, e vimos que uma progressão aritmética é uma sequência. Desse modo, uma PA é também uma função. Quando uma função representa uma PA o domínio é o conjunto dos números naturais, e o contradomínio o conjunto do números reais.

Existem situações, como o Exemplo 19, em que é possível representar o primeiro termo por a_0, que seria o tempo inicial, já que a situação está relacionada a anos. Em situações semelhantes ou que exijam o mesmo raciocínio, podemos representar o termo geral de uma PA de razão r e primeiro termo a_0 por

$$a_n = a_0 + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = a_n$, para todo n natural. Então $f(n) = a_0 + rn$, ou seja, f é uma função afim de variável n – esta é a função que, de modo geral, está associada a uma PA de ordem 1.

Exemplo 18. *Se $3-x$, $-x$, $\sqrt{9-x}$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, determine o valor de x e calcule o quinto termo (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Vamos determinar o valor de x. Como temos uma progressão aritmética, então podemos escrever

$$a_1 = 3 - x, a_2 = -x \text{ e } a_3 = \sqrt{9-x}. \tag{4.2}$$

Daí,

$$r = a_2 - a_1 = -x - (3-x) = -3 \tag{4.3}$$

e

$$r = a_3 - a_2 = \sqrt{9-x} - (-x) = \sqrt{9-x} + x. \tag{4.4}$$

Igualando os valores de r obtidos em (4.3) e (4.4), temos

$$\sqrt{9-x}+x=-3, \tag{4.5}$$

ou seja,

$$-x-3=\sqrt{9-x}.$$

Elevando ao quadrado os dois membros da última equação e fazendo as manipulações necessárias, obtemos

$$x(x+7)=0,$$

cujas soluções são $x=0$ ou $x=-7$. Note que:

- $x=0$ não convém, pois não é solução de (4.5);
- $x=-7$ satisfaz (4.5); desse modo, fazendo $x=-7$ em (4.2), obtemos $a_1=10, a_2=7$ e $a_3=4$, que representa uma PA de razão $r=-3$.

Por fim, sabe-se que $a_5=a_1+4r$. Assim, $a_5=10+4(-3)$. Logo, $a_5=-2$. Portanto, temos $x=-7$ e $a_5=-2$.

■

Exemplo 19. *Um bem, cujo valor hoje é de R\$* 8.000, 00*, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R\$* 2.000, 00*. Supondo que o valor do bem cai segundo uma linha reta, determine o valor do bem daqui a 3 anos (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Temos uma progressão aritmética decrescente em que $a_0=8.000$, $n=4$ e $a_4=2.000$. Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA $a_4=a_0+nr$, segue que $2.000=8.000+4r$, donde $4r=-6.000$ e $r=\frac{-3.000}{2}$.

Calculando o valor de a_3.

$$\begin{aligned} a_3 &= a_0+3r \\ &= 8.000+3\left(\frac{-3.000}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o valor do bem daqui a 3 anos é de R\$ 3.500, 00.

■

4.1.1 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

Mostraremos a seguir como calcular a soma dos temos de uma Progressão Aritmética.

A soma a seguir, representa a soma dos termos de uma PA de n termos.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \tag{4.6}$$

Podemos escrever ainda do seguinte modo:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \tag{4.7}$$

Somando as equações (4.6) e (4.7) obtemos:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1 + r) + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n). \end{aligned}$$

Observe que temos n parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Desse modo, $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Logo, $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Isto é um argumento heurístico que podemos chegar na soma dos termos de uma PA.

Teorema 4.2. *Seja a Progressão Aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de n termos. A soma dos n primeiros termos dessa PA é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Mostraremos por indução finita que a fórmula é válida para todo n. Para $n = 1$ é válida pois $S_1 = a_1$. Suponhamos por hipótese de indução que a fórmula da soma dos termos da PA é válida para todo $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Mostraremos que tal fórmula é verdadeira para $n + 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_1 + nr \\ &= \frac{(a_1 + a_n)n + 2a_1 + 2nr}{2} \\ &= \frac{a_1 n + a_1 + a_n n + a_1 + nr + nr}{2} \\ &= \frac{a_1(n+1) + (a_n + r)n + a_1 + nr}{2} \\ &= \frac{a_1(n+1) + a_{n+1}n + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Isto prova o resultado para todo n natural, $n \geq 1$.

■

Exemplo 20. *Determine qual o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos n primeiros termos é dada por* $S_n = 2n^2 + n$, *para todo* n *natural (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Para $n = 1$, obtemos $S_1 = 3$. S_1 é igual ao primeiro termo da PA, ou seja, $S_1 = a_1$. Logo, $a_1 = 3$. Agora, $S_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 = 10$. Como, $S_2 = a_1 + a_2$ segue que, $a_2 = S_2 - a_1 = 10 - 3 = 7$. Daí, como $r = a_2 - a_1$, obtemos $r = 7 - 3 = 4$. Portanto, o primeiro termo e a razão da PA são:

$$a_1 = 3 \text{ e } r = 4.$$

■

No exemplo anterior, temos $a_1 = 3$, $r = 4$ e o termo geral é $a_n = 3 + (n-1)4 = -1 + 4n$. Calculando a soma dos n primeiros termos e utilizando a fórmula da soma de uma PA, temos $S_n = \frac{(3 - 1 + 4n)n}{2} = \frac{4n^2 + 2n}{2} = 2n^2 + n$, ou seja, os valores encontrados são, de fato, correspondentes a situação apresentada no problema.

Exemplo 21. *Uma bobina de papel tem raio interno* 5 *cm, raio externo* 10 *cm e a espessura do papel é* 0,01 *cm. Qual é o comprimento da bolina desenrolada? (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Como o raio interno da bobina é de 5 cm e o raio externo é de 10 cm, temos 5 cm de espessura de papel enrolados. Calcularemos quantas voltas foram dadas para obtermos uma bonina de espessura de 5 cm a partir de um papel cuja espessura é 0,01 cm. Seja x o número total de voltas dadas. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{0,01}{5} &= \frac{1}{x} \\ 0,01x &= 5 \\ x &= 500 \text{ voltas.} \end{aligned}$$

Como cada volta é um círculo, os raios dos círculos forma uma PA de razão 0,01 são:

$$r_1 = 5,01, r_2 = 5,02, r_3 = 5,03, \ldots, r_{500} = 10.$$

Calculando o comprimento de cada círculo, temos:

$$C_1 = 2\pi \cdot 5,01, C_2 = 2\pi \cdot 5,02, C_3 = 2\pi \cdot 5,03, \ldots, C_{500} = 2\pi \cdot 10.$$

Somando o comprimento desses círculos.

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{500} = 2\pi(5,01 + 5,02 + 5,03 + \cdots + 10).$$

A soma do parêntese à direita trata-se da soma de uma PA, cujo valor é obtido do seguinte modo:

$$\frac{(5,01+10)500}{2} = 3.752,5.$$

Daí,

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{500} = 2\pi \cdot 3.752,5 = 7.505\pi \text{ cm}.$$

Ainda, 7.505π cm é aproximadamente $236m$.

Portanto, o comprimento da bobina desenrolada é aproximadamente 236 m.

■

4.2 Progressões Geométricas - PG

Definição 4.3. *Chama-se Progressão Geométrica toda sequência na qual o quociente da divisão de cada termo pelo anterior é constante. Essa constante é chamada de razão da PG e representa-se pela letra q.*

Exemplo 22. *A sequência formada pelos números inteiros pares positivos* $(2, 4, \ldots, 2n, \ldots)$ *é uma Progressão Geométrica cuja razão é igual a* 2.

Usando o raciocínio recursivo e o fato de que em Progressões Geométricas cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} q. \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades na ordem apresentada, temos:

$$\begin{aligned} a_n \cdots a_3 a_2 &= a_1 q a_2 q \cdots a_{n-1} q \\ a_n(a_{n-1} \cdots a_3 a_2) &= (a_2 a_3 \cdots a_{n-1}) a_1 q^{n-1}, \end{aligned}$$

que resulta $a_n = a_1 q^{n-1}$. Portanto, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

O processo apresentado é um argumento heurístico que podemos chegar a fórmula do termo geral da PG.

Teorema 4.3. *Considere a sequência* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, *que representa uma Progressão Geométrica. A fórmula do termo geral da PG é dada por*

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Demonstração. Provaremos por indução que a fórmula do termo geral da PG é válida para todo $n \geq 1$. É imediato verificar que a fórmula é verdadeira para $n = 1$.

Agora, suponhamos que a fórmula do termo geral da PG é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Mostraremos que é válida para $n + 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n q \\ &= a_1 q^{n-1} q \\ &= a_1 q^{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

Logo, $a_{n+1} = a_1 q^{(n+1)-1}$. Portanto, a fórmula do termo geral da PG é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Existem problemas de PG em que é possível enumerar seus termos a partir do zero, permitindo reescrever a fórmula do termo geral do seguinte modo:

$$a_n = a_0 q^n.$$

No exemplo a seguir, podemos ver a aplicação da utilidade dessa fórmula.

Exemplo 23. *Um carro novo custa R\$* $18.000,00$ *e, com 4 anos de uso, vale \$* $12.000,00$. *Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com um 1 ano de uso (LIMA et al., 2006a).*

Solução: A situação problema representa um caso de PG. Temos $a_0 = 18.000$, $n = 4$ e $a_4 = 12.000$.

Calcularemos a razão q dessa PG utilizando a seguinte fórmula: $a_4 = a_0 q^4$, assim $12.000 = 18.000q^4$. Desse modo, $q^4 = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$, logo, $q = \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$. Como,$a_1 = a_0 q$, temos $a_1 = 18.000\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$. Portanto, o valor do carro com um ano de uso é de aproximadamente R\$ $16.272,00$.

■

Exemplo 24. *Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Um modo de resolver este problema é considerando uma sequência crescente $(x/q, x$ e $xq)$. Os termos dessa sequência formam uma PG crescente de razão igual a q, $q \geq 1$. E representam também a medida dos lados do triângulo retângulo da situação problema. Desse modo, pelo Teorema de Pitágoras, temos $(xq)^2 = x^2 + \left(\dfrac{x}{q}\right)^2$. Daí,

$q^2 = 1 + \dfrac{1}{q^2}$, de onde obtemos $q^4 - q^2 - 1 = 0$, que é uma equação biquadrada. A solução é feita a partir de uma mudança de variáveis do tipo $q^2 = y$ donde,

$$y^2 - y - 1 = 0.$$

Que é um polinômio do segundo grau cujas raízes são $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como $q^2 > 0$, $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é solução da equação (4.2), tendo em vista que q > 0,

$$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Portanto, a razão da PG é $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

■

A utilização da sequência $(x/q, x$ e $xq)$, no exemplo anterior, foi uma questão de escolha, uma alternativa mais natural seria (x, xq, xq^2). Já no Exemplo 30, essa sequência é importante, pois permite que a solução seja de forma mais simples.

Exemplo 25. *Uma vitória régia encontra-se em um tanque de água. Sabendo que ela dobra de área a cada dia e que, no final de* 20 *dias, ocupa toda a superfície do tanque, em qual dia ela ocupará a metade da superfície do tanque? (HEFEZ, 2009).*

Solução: Seja a_n uma progressão geométrica que representa a área que a vitória régia ocupa na superfície do tanque, ao logo de vinte dias, e x, a área da superfície do tanque.

O valor da área ocupada pela vitória régia após 20 dias é igual a x, ou seja, $a_{20} = x$. Como a área ocupada dobra a cada dia, temos uma PG de razão $q = 2$. Como $a_{20} = a_1 q^{19}$, fazendo a substituição dos valores de a_{20} e q, temos $x = a_1 2^{19}$. Desse modo, $a_1 = x2^{-19}$.

Sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, determinaremos em qual dia a vitória régia ocupará a metade da superfície do tanque, ou seja, $a_n = \dfrac{x}{2}$. Assim, $\dfrac{x}{2} = x2^{-19}2^{n-1}$, ou ainda, $1 = 2^{-18}2^{n-1}$ que é uma equação exponencial cuja solução é $n = 19$.

Portanto, a vitória régia ocupará a metade da superfície do tanque no 19º dia.

■

Tomando como base (DANTE, 2000a), estudemos o seguinte problema: suponhamos que uma população de coelhos cresce a uma taxa percentual i ao mês, e que a população inicial é de x_0 coelhos. Qual é o número da população de coelhos após um semestre?

Essa situação representa uma progressão geométrica. De acordo com (DANTE, 2000a), um termo de uma PG é igual ao anterior multiplicado por $1 + i$, em que i é a taxa de crescimento de seus termos, assim razão é dada por: $q = 1 + i$. Após um mês, a população de coelhos é de $x_0 + x_0 \cdot i = x_0 \cdot (1 + i)$.

No segundo mês o número de coelhos é

$$\begin{aligned} x_0(1+i) + x_0(1+i)i &= x_0(1+i+i+i^2) \\ &= x_0(1+2i+i^2) \\ &= x_0(1+i)^2. \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo, temos:

- Número da população de coelhos no terceiro mês: $x_0(1+i)^3$;
- Número da população de coelhos no quarto mês: $x_0(1+i)^4$;
- Número da população de coelhos no quinto mês: $x_0(1+i)^5$;
- Número da população de coelhos no sexto mês: $x_0(1+i)^6$.

Logo, a população de coelhos após um semestre é de $x_0(1+i)^6$.

Ainda em relação a este problema, de modo geral, representando por x_n, a população de coelhos n meses após o início do experimento, então $x_n = x_0(1+i)^n$. Dito isto, assim como fizemos uma conexão entre progressões aritméticas com funções, as progressões geométricas permitem relacionar com as funções exponenciais, restringindo o domínio dessas funções ao conjunto dos números naturais, e contradomínio o conjunto dos números reais. Caso o leitor tenha interesse, sugerimos (DANTE, 2000a) para o estudo de funções.

4.2.1 Fórmula das Taxas Equivalentes

Nesta seção, estudamos a fórmula das taxas equivalentes, que é uma aplicação de PG, e resolveremos exercícios que abordam tal fórmula.

Exemplo 26. *A população de um país cresce* 2% *ao ano. Em* 25 *anos, essa população cresce aproximadamente* $64,06\%$ *(LIMA et al., 2006a).*

Solução: Após 25 anos, a população será denotada por x_{25}. Usando a fórmula do termo geral da PG, onde o primeiro termo é x_0 e a razão é $q = 1 + i$, $i = 0,02$. Temos $x_{25} = x_0(1 + 0,02)^{25} = 1,6406x_0$. Portanto, em relação à população inicial x_0, x_{25} teve um aumento de $64,06\%$.

No exemplo anterior, 2% representa a taxa relativa anual, e $64,06\%$ a taxa relativa a 25 anos.

Teorema 4.4. *Se I é a taxa relativa de crescimento de uma grandeza em um período de tempo T e i a taxa de crescimento relativa a um tempo t, em que $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$.*

Demonstração. Seja x_0 o valor inicial da grandeza. Ao passar um período de tempo igual a T com taxa de crescimento igual a I, o valor dessa grandeza será de

$$x_0(1 + I)^1. \tag{4.8}$$

Posto de outro modo, após n períodos de tempo t, com taxa de crescimento i, temos:

$$x_0(1 + i)^n. \tag{4.9}$$

Agora, como $T = nt$, comparando as equações (4.8) e (4.9)

$$x_0(1 + I) = x_0(1 + i)^n.$$

Daí, concluímos que $1 + I = (1 + i)^n$.

■

Exemplo 27. *Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica? (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Observe que o dinheiro de Verônica está investido a uma taxa relativa mensal de 6%, ou seja, $i = 6\% = 0,06$. Além disso, $n = 12$ meses. Pela fórmula de taxas equivalentes, temos:

$$\begin{aligned} 1 + I &= (1 + 0,06)^{12} \\ &= (1,06)^{12} = 2,012. \end{aligned}$$

Daí, I é aproximadamente $1,012$, isto é, $101,2\%$.

■

Exemplo 28. *Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto? (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Sejam i a taxa de crescimento mensal e I a taxa de crescimento anual. Sabemos que $i = -5\% = -0,05$ e $n = 12$ meses. Pela fórmula das taxas equivalentes temos, $1 + I = (1 - 0,05)^{12}$, ou ainda, $I = (0,95)^{12} - 1$. Resulta aproximadamente $I = -0,46$. Portanto, a taxa de decrescimento anual é de aproximadamente 46%.

■

4.2.2 Soma dos termos de uma progressão geométrica finita

Com base em (DANTE, 2000a), temos na Tabela 4.2.2 a seguir, a representação da produção mensal de pães de uma padaria no primeiro semestre de 2020.

Tabela 2 – Produção mensal de pães

Mês	**Número de pães**
Janeiro	1.200
Fevereiro	2.400
Março	4.800
Abril	9.600
Maio	19.200
Junho	38.400

Fonte: Elaborada pelo autor

O número total de pães produzidos no primeiro semestre de 2020 é de

$$1.200 + 2.400 + 4.800 + 9.600 + 19.200 + 38.400 = 75.600 \text{ pães.}$$

Note que, a segunda parcela da soma é o dobro da primeira parcela, a terceira parcela é o dobro da segunda e assim, sucessivamente, até a sexta parcela, que é o dobro da quinta. O que temos é uma PG com seis termos, cuja razão é $q = 2$ e a soma de seus termos $S = 75.600$.

Consideremos a soma dos termos da Progressão Geométrica de n termos é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{4.10}$$

Multiplicando os dois membros da equação (4.10) pela razão q segue que:

$$\begin{aligned} qS_n &= q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_n \\ &= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, fazendo a subtração das equações (4.10) e (4.11), temos:

$$S_n(1-q) = S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n).$$

Logo,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Isto é um argumento heurístico para a determinação da soma de uma PG de n termos.

Teorema 4.5. *A soma dos termos de uma Progressão Geométrica* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ *de* n *termos e razão* $q \neq 1$ *é dada por*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração. Provaremos por indução que a fórmula da soma dos termos de uma PG com um número finito de termos é válida para todo n.

Para $n = 1$, é imediato verificar. Suponhamos por hipótese de indução que a fórmula da soma dos termos da PG é válida para algum $n \geq 1$.

Mostraremos que tal fórmula é verdadeira para $n + 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} + a_1 q^n \\ &= \frac{a_1 - a_1 q^n + a_1 q^n - a_1 q^{n+1}}{1 - q} \\ &= a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Axioma de Indução, a fórmula da soma da PG $S_n = a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ é válida para todo $n \geq 1$.

■

Agora, faremos alguns exercícios para melhor compreensão do conceito de soma de uma PG, aplicando os resultados apresentados.

Exemplo 29. *(FILHO; SILVA, 2000) Em uma PG de termos positivos, a diferença entre o quarto e o primeiro termo é* 21*, e a diferença entre o terceiro termo e o primeiro termo é* 9*. Podemos afirmar que a soma dos oito primeiros termos dessa progressão é igual a:*

(a) 550
(b) 1.024
(c) 856
(d) 765
(e) 800

Solução: Sabemos que $a_4 - a_1 = 21$, a partir dessa igualdade, obtemos

$$a_1(q^3 - 1) = 21. \tag{4.12}$$

Além disso, é dado no problema que $a_3 - a_1 = 9$. Daí, tendo em vista que $a_3 = a_1 q^2$,

$$a_1 = \frac{9}{q^2 - 1}. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.13) em (4.12), obtemos o polinômio de grau três $3q^3 - 7q^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $q = 1$, $q = 2$ e $q = -\frac{1}{3}$.

Note que, $q = 1$ não convém, pois não se trata de uma PG estacionária; ou do mesmo modo $q = -\frac{1}{3}$ não serve pois forma um PG de termos não positivos. Assim, $q = 2$ é a solução. Sendo assim,

$$a_1 = \frac{9}{q^2 - 1} = \frac{9}{2^2 - 1} = 3.$$

Logo,

$$S_8 = 3\frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 765.$$

Portanto, a soma dos oito primeiros termos é 765.

A solução corresponde à letra (d).

∎

Exemplo 30. *A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Seja $x/q, x$ e xq os três termos da PG, e $\frac{x}{q} - 1, x$ e xq os termos da PA. Sabemos que a soma dos três termos da PG é igual a 19, isto é

$$\frac{x}{q} + x + xq = 19. \tag{4.14}$$

Pela fórmula da soma dos termos de uma PA, temos

$$\frac{3\left(\frac{x}{q} - 1 + xq\right)}{2} = 18.$$

Daí,

$$\frac{x}{q} - 1 + xq = 12. \tag{4.15}$$

Agora, subtraindo as equações (4.14) e (4.15), obtemos $x + 1 = 7$. Logo, $x = 6$.

Substituindo $x = 6$ na equação (4.14), tem-se

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 19, \tag{4.16}$$

ou seja,

$$6q^2 - 13q + 6 = 0, \tag{4.17}$$

que é um polinômio do segundo grau, cujas raízes são, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Logo, quando a razão da progressão geométrica for $q = \dfrac{3}{2}$, seus termos são $4, 6$ e 9, e formam uma PG crescente. Subtraindo 1 do primeiro termo, obtemos a PA de termos $3, 6$ e 9.

Quando razão da progressão geométrica é $q = \dfrac{2}{3}$, seus termos são $9, 6$ e 4, que é uma PG decrescente. Subtraindo 1 do primeiro termo, neste caso, o 9 obtemos a PA de temos $8, 6$ e 4.

■

4.2.3 Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

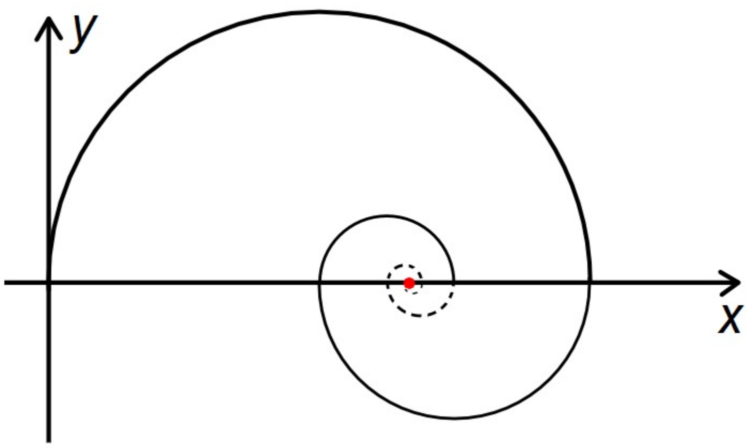
Considerando a sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ que define uma progressão geométrica infinita, a fórmula que permite calcular a soma de uma PG infinita, quando $|q| < 1$ é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

A demonstração dessa fórmula exige conceitos de Análise Real, indo além do objetivo deste trabalho. Porém, apresentaremos sua demonstração no Apêndice A deste trabalho.

Exemplo 31. *Na Figura 2, temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine comprimento da espiral (LIMA et al., 2006a).*

Figura 2 – Imagem fora de escala



Fonte: Autoral

Solução: Sabemos que o raio do primeiro semicírculo é $r_1 = 1$, do segundo semicírculo $r_2 = \dfrac{1}{2}$ e assim sucessivamente. O comprimento dos semicírculos são:

primeiro semicírculo $= \pi$, segundo semicírculo $= \dfrac{\pi}{2}$, assim sucessivamente, formando uma PG infinita de razão $q = \dfrac{1}{2}$. Deste modo, usando o Teorema A.1, o comprimento da espiral é

$$S = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi.$$

■

Em uma espiral, o ponto de assíntota é, intuitivamente, ponto do qual a espiral se aproxima à medida em que se percorre a espiral; na Figura 2, se percorrermos a espiral no sentido horário, nos aproximaremos de seu ponto assíntota, representado em vermelho.

Uma outra maneira de abordar o Exemplo 31, é determinarmos a abscissa do ponto de assíntota. Com efeito,

$$\begin{aligned} x_p &= 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \\ &= \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Além disso, as expressões nos parenteses são somas de PG Infinitas cujas razões são iguais a $\dfrac{1}{4}$ em ambos os casos. Assim, os valores das somas no primeiro e no segundo parêntese são, respectivamente,

$$\frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Daí,

$$x_p = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Portanto, a abscissa do ponto P é $\dfrac{4}{3}$.

A manipulação das séries envolvidas só foi possível porque estamos trabalhando com séries absolutamente convergentes (LIMA, 2010a).

5 Análise Combinatória

De acordo com a reformulação da grade curricular da Educação Básica brasileira, implantada com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, na etapa do Ensino Médio, o conteúdo Análise Combinatória faz parte da Competência Específica 3 da Área de Matemática e suas Tecnologias e orienta:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, 2018, p. 535).

Para esta competência, a BNNC apresenta a seguinte habilidade a serem desenvolvida:

> **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (BNCC, 2018, p. 537).

Seguindo a orientação e a habilidade proposta por esta Competência, através de (LIMA et al., 2006a), (FILHO; SILVA, 2000) e (MORGADO et al., 1991), desenvolvemos este conteúdo. O conteúdo Análise Combinatória é recorrente nas provas da OBMEP, nas apostilas de preparação para este evento e no Portal da OBMEP.

5.1 Princípio Fundamental da Contagem

Vamos começar esta seção apresentando dois conceitos básicos, o *Princípio Aditivo* e o *Princípio Fundamental da Contagem*, que são essenciais para a resolução de problemas de Análise Combinatória e, até mesmo, para a construção de fórmulas. Vamos enunciar tais princípios:

- O *Princípio Aditivo*: considera os conjuntos P e Q disjuntos, onde n_1 e n_2 representam o número de elementos dos conjuntos P e Q, respectivamente. O número de elementos da união dos conjuntos P e Q é $n_1 + n_2$.

- O *Princípio Fundamental da Contagem - PFC* ou *Princípio Multiplicativo*: uma decisão D_1 pode ser tomada de n_1 maneiras, tomada a decisão D_1, há outra decisão D_2 que pode ser obtida de n_2 maneiras, então o número total de maneiras de tomarmos as decisões D_1 e D_2 será de $n_1 \cdot n_2$.

A seguir, os Exemplos 32 e 33 ilustram o *Princípio Aditivo*.

Exemplo 32. *Numa classe existem* 18 *rapazes e* 12 *garotas. De quantas maneiras podemos selecionar* 1 *estudante?*

Solução: Observe que $18 + 12 = 30$ é o número de estudantes. Portanto, podemos selecionar 1 estudante de 30 maneiras.

■

Exemplo 33. *Numa confeitaria há* 5 *sabores de picolés e* 3 *sabores de salgados. Suponha que Maria só tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?*

Solução: Sabemos que Maria pode escolher 1 sabor de picolé dentre os 5 sabores ou 1 tipo de salgado dentre os 3. Logo, Maria pode fazer $5 + 3 = 8$ pedidos.

■

Problemas como os apresentados nos Exemplos 32 e 33 possuem resoluções triviais, mas existem situações mais complexas como nos Exemplos 44 e 45 que necessitam de outros artifícios matemáticos, mas para que se possa concluir a solução temos que usar o Princípio Aditivo.

Os Exemplos 34 e 35, a seguir, ilustram o *Princípio Fundamental da Contagem*.

Exemplo 34. *Uma churrascaria possui um cardápio que apresenta escolhas de carnes (picanha, frango, cupim ou linguiça), saladas (maionese, comum, portuguesa ou mista) e bebidas (refrigerante, suco, coquetel ou vinho). De quantos maneira se pode fazer um pedido com um tipo de carne, um tipo de salada e um tipo de vinho?*

Solução: Podemos resolver o problemas por meio da aplicação do Princípio Fundamental da Contagem. Para a escolha da carne, temos 4 opções, para a escolha da salada 4 opções, e para a escolha da bebida temos também 4 opções. Logo, temos

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Portanto, os pedidos podem serem feitos de 64 maneiras diferentes.

■

Exemplo 35. *Quantos são os números de três algarismos distintos?*

Solução: Para formarmos números com 3 algarismos distintos, o primeiro algarismo da esquerda não pode ser igual a zero, pois se fosse teríamos números com dois algarismos e não com três como pede a situação. Procedendo da esquerda para direita, para a escolha do primeiro algarismos temos 9 possibilidades, para escolha do segundo temos 9 possibilidades, pois agora voltamos a contar o zero, visto que o segundo algarismo pode ser zero, assim como também o terceiro. Para escolha do terceiro, temos 8 possibilidades. Desse modo, temos

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 \text{ números com três algarismos.}$$

■

A resolução de problemas de Análise Combinatória nem sempre possuem uma resolução trivial, nem um modelo único de solução. Apresentaremos três fatos importantes que devem ser verificados, quando diante de um problema de combinatória para que possam ser seguidos de acordo com (LIMA et al., 2006a).

> Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisão devemos tomar; Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformarem em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar (LIMA et al., 2006a, p. 86 - 87).

Nesse sentido, temos as seguintes situações: nos Exemplos 34 e 35, nos colocamos no papel da pessoa que resolve o problema, decidindo as ações que serão realizadas; Logo, tomamos uma postura. Ainda em relação aos exemplos citados, fizemos a divisão dos procedimentos a serem adotados. No Exemplo 34, escolhemos como montar a refeição e aplicamos o *Princípio Multiplicativo*; no Exemplo 35, a divisão das decisões foram feitas com relação a quais números utilizar para ocupar a primeira posição. No Exemplo 34 não houve dificuldades, pois o problema exigia a aplicação direta do *Princípio Fundamental da Contagem*; Já no segundo exemplo, a principal estratégia era restringir a primeira posição para algarismos diferentes de zero. Logo, para a resolução dos Exemplos 34 e 35, mantivemos postura, fizemos divisão de decisões e não adiamos dificuldades.

5.2 Permutações

Temos na Figura 3, dois senhores sentados em um sofá, conforme podemos ver a seguir.

Figura 3 – Imagem ilustrativa

Fonte: Imagens do Google

O senhor está sentado à esquerda e a senhora à direita, eles poderiam sentar no mesmo sofá de uma maneira diferente, mudando os seus assentos. Assim, a mulher sentaria à esquerda e o homem à direita. Ao fazer isso, o local onde ambos estavam sentados no sofá sofre alteração, esta alteração é o que chamamos em Análise Combinatória de *Permutação*.

Apresentaremos nessa seção dois tipos de Permutações, que são Permutações Simples e Permutações com Repetições. Em uma outra Seção, a Seção 5.5 falaremos sobre Permutações Circulares.

A seguir, definimos uma ferramenta que permeará todo o nosso estudo.

Definição 5.1. *Seja n natural, $n \geq 2$. Definimos o fatorial de um número n, indicando por $n!$, pelo produto de n pelos seus antecessores naturais até o 1, ou seja, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ e por convenção $1! = 1$ e $0! = 1$.*

Exemplo 36. *Qual o fatorial do número 3, ou seja, $3!$?*

Solução: De acordo com a Definição 5.1, o fatorial de 3 é dado por $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

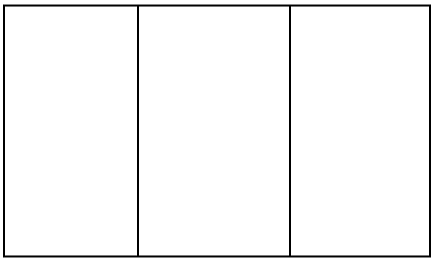
■

5.2.1 Permutações Simples

Em Permutações Simples, os agrupamentos se diferenciam pela ordem que ocupam, ou seja, de acordo com as alterações realizadas nas posições de seus elemento. Consideremos a situação a seguir em que queremos pintar uma bandeira.

Exemplo 37. *De quantas maneiras podemos pintar a bandeira a seguir, de modo que, cada listra da bandeira seja colorida de uma cor diferente, sabendo-se que dispomos das cores amarelo, azul e verde?*

Figura 4 – Bandeira



Fonte: Autoral

Solução: Sabemos que temos 3 cores para colorir as listras da bandeira, cada listra de uma cor distinta. Desse modo, ao escolher a primeira listra a ser pintada teremos 3 possibilidades de cores, para a segunda listra escolhida temos 2 possibilidade de cores e para a terceira listra apenas 1 possibilidade. Logo, pelo *Princípio Fundamental da Contagem* o número de maneiras que podemos pintar esta bandeira é dado por $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras.

■

Exemplo 38. *Seja n o número de objetos que queremos ordenar em uma fila. De quantas maneiras podemos ordená-los?*

Solução: Pode-se adotar o seguinte raciocínio: para ocupar a primeira posição temos n modos de escolha do objeto, para a segunda posição $n-1$, para a terceira posição $n-2$ e assim sucessivamente, conforme fizemos no exercício 34, aplicando o *Princípio Multiplicativo*. Logo, para a escolha do objeto que ocupa a antepenúltima posição têm-se 2 modos e para a última posição apenas 1 modo de escolha do objeto. Assim, o número de maneiras que podemos ordenar n objetos em fila é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

■

Definição 5.2. *Chamamos de Permutações Simples a maneira de organizarmos n objetos distintos em uma fila, e o número total de Permutações Simples é obtido por $P_n = n!$.*

Observe que esta fórmula é obtida usando-se o *Princípio Fundamental da Contagem.*

Exemplo 39. *Vera, Marcos, Helena, Pedro e mais quatro pessoas estão em uma fila. De quantos modos é possível organizar esta fila de modo que:*

(*a*) *Helena e Pedro permaneçam juntos?*

(*b*) *Vera e Marcos permaneçam juntos, e Helena e Pedro também fiquem juntos?*

(c) *Vera e Marcos, não fiquem juntos e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntos? (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Iniciemos pelo item (a), para este item, para melhor visualização, imaginemos que Helena e Pedro estão de mãos dadas, e podemos ilustrar do modo a seguir.

Figura 5 – Helena e Pedro

Fonte: Autoral

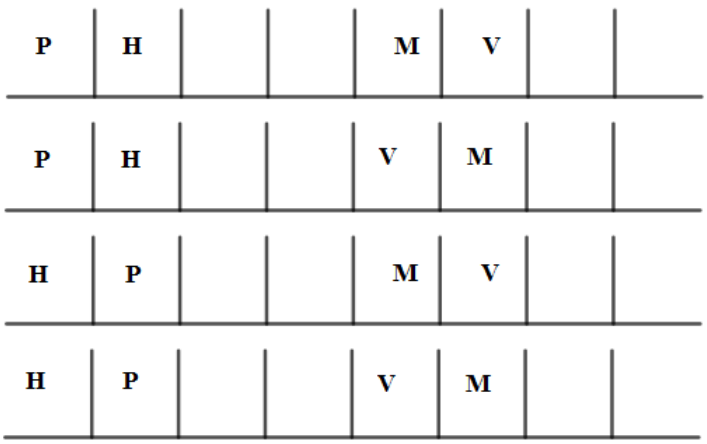
Figura 6 – Pedro e Helena

Fonte: Autoral

Assim, podemos imaginá-los como uma pessoa só, no que diz respeito à sua posição na fila. Desse modo, "há" 7 pessoas na fila, donde 7! possibilidades para a ordem em que estão enfileirados. Agora, em uma fila qualquer dentre as 7!, podemos ter, nesta ordem, Pedro e Helena ou Helena e Pedro, isto é, 2! possibilidades. Portanto, há 2!7! possibilidades de enfileirar as pessoas mantendo-se Pedro e Helena juntos.

No item (b) queremos que Vera e Marcos e Helena e Pedro fiquem juntos. Conforme a seguinte ilustração.

Figura 7 – Helena, Pedro, Marcos e Vera



Fonte: Autoral

Pelo item (a) para Helena e Pedro ficarem juntos temos 2! modos; analogamente, há, também, 2! modos de Vera e Marcos ficarem juntos. Como temos a restrição de Vera e Marcos e Helena e Pedro ficarem juntos, para fins de cálculo consideraremos que não temos 8, mas 6 pessoas na fila. Como não existem restrições para estas, temos 6! maneiras de organizá-las. Portanto, temos $2!2!6! = 2.880$ modos de Vera e Marcos e Helena e Pedro ficarem juntos.

No item (c), Vera e Marcos não devem ficar juntos e Helena e Pedro devem permanecer juntos, desse modo, pelos itens (a) e (b) obtemos

$$2!7! - 2!2!6! = 10.080 - 2.880 = 7.200 \text{ possibilidades.}$$

■

A localização de Pedro, Helena, Vera e Marcos na fila apresentada nas ilustrações, desse problema, foi uma escolha pessoal do autor, existem outras localizações para eles na fila e que podem ser ilustradas.

5.3 Arranjos Simples

Quando queremos contar as possibilidade de dispormos n objetos em p posições, com $n \geq p$, em uma situação onde as posições dos objetos importam – por exemplo, determinar o número de maneiras de agrupar 10 livros em uma estante com espaço para apenas 5 –, estamos diante de uma situação que denominamos de *Arranjos Simples*.

Definição 5.3. *Chamamos de Arranjos Simples de n elementos tomados p a p, com n, p naturais e $n \geq p$, o qual denotamos por $A_{n,p}$, todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.*

Os arranjos simples são diferentes das permutações simples, apenas no que diz respeito às posições que temos para ocupar: em permutações, a quantidade de posições coincide com a dos objetos, o que não acontece em arranjos. Vale observar que em ambas as situações, as posições diferentes dos objetos determinam agrupamentos diferentes. Apresentaremos a fórmula para o cálculo do número de Arranjos Simples conforme (FILHO; SILVA, 2000).

Seja o conjunto A com n elementos, e sejam os números $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,p}$ o número de agrupamentos ordenados, com $1, 2, \ldots, p$ elementos, respectivamente. Com efeito,

$$\begin{aligned}
A_{n,1} &= n \text{ agrupamentos,}\\
A_{n,2} &= n \cdot (n-1) \text{ agrupamentos,}\\
A_{n,3} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \text{ agrupamentos,}\\
&\vdots\\
A_{n,p} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1) \text{ agrupamentos.}
\end{aligned}$$

Agora multiplicando o segundo membro da última igualdade por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos

$$\begin{aligned}
A_{n,p} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}\\
&= \frac{n!}{(n-p)!},
\end{aligned}$$

que é a fórmula utilizada para o cálculo do número de arranjos simples.

Para a determinação do número de agrupamentos, foi utilizado o Princípio Fundamental da Contagem, aquele variando de acordo com o número de elementos.

Na leitura acima demonstramos o Teorema 5.1, o qual enunciamos a seguir.

Teorema 5.1. *Seja A um conjunto com n elementos, o número de arranjos simples com p elementos é dado por*

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, n \geq p.$$

No exemplo a seguir, temos uma aplicação do Teorema 5.1.

Exemplo 40. *Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis), uma numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar? (SOUZA; GARCIA, 2016).*

Solução: Podemos resolver o problema através do produto de dois arranjos simples, que são o número de agrupamentos que podemos formar com duas letras distintas e o número de agrupamentos que podemos formar com cinco algarismos distintos, conforme as informações fornecidas no problema, temos:

$$A_{26,2} \cdot A_{10,5} = \frac{26!}{24!} \cdot \frac{10!}{5!} = 19.656.000.$$

Logo, essa biblioteca pode cadastrar 19.656.000 livros.

∎

5.4 Combinações Simples

Situações que exigem a contagem de agrupamentos, onde a ordem dos objetos é irrelevante, são chamadas de *Combinações Simples.* Por exemplo, colocar 5 bombons em um saquinho, tendo 10 tipos em mãos, ou formar uma comissão de 3 pessoas, tendo 6 pessoas à disposição. Nesses casos, temos mais objetos do que posições, mas a ordem com que os ocupantes são colocados não determina agrupamentos diferentes.

Definição 5.4. *Chama-se combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, com n, p naturais e $n \geq p$, e denotamos por $C_{n,p}$, todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.*

Vale ressaltar que existe um notação diferente da nossa expressa por C_n^p.

As combinações simples diferem dos arranjos simples pelo fato de a ordem dos elementos não importar. No exemplo a seguir temos um problema de combinação simples, em que ilustramos por meio de subconjuntos o fato da ordem dos elementos não importarem.

Exemplo 41. *De quantos modos podemos selecionar subconjuntos de dois elementos do conjunto $B = \{a, b, c\}$?*

Solução: Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o modo como contamos os subconjuntos que podem ser formados é: 3 possibilidades para a primeira escolha e 2 para a segunda; assim, $3 \cdot 2 = 6$ modos distintos. Porém, este argumento considera que os subconjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são distintos, o que não é verdade. Assim, contamos mais possibilidades do que deveríamos. Para corrigirmos este ponto, devemos levar em consideração os modos com que, por exemplo, o subconjunto $\{a, b\}$ pode aparecer "disfarçado" na contagem: são $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ – em verdade, são as permutações de dois objetos (os elementos a e b) em duas posições, isto é, 2! maneiras. Note que isto acontece com todos os demais subconjuntos: mesmo $\{a, c\} = \{c, a\}$ e $\{c, b\} = \{b, c\}$, estes foram contados 2 vezes cada. Desse modo, como todas as possibilidades foram contadas em dobro, o resultado correto é dado por $\dfrac{6}{2!} = 3$.

■

Vale ressaltar que não é errado usar o PFC para resolver o problema, a questão é que o princípio é uma parte da solução. No exemplo anterior, cada subconjunto deveria ser composto por 2 elementos. Daí, no final, tivemos que dividir a contagem inicial por 2!, uma vez que cada subconjunto, tendo dois elementos, pode se *disfarçar* na contagem com uma simples permutação na ordem – daí o número 2!. Porém, nesta situação, sabemos que esta ordem não é relevante e, por isso, tivemos que fazer o ajuste na contagem.

Para reforçar as ideias de ajuste da contagem e como fazê-lo, temos os exemplos a seguir.

Exemplo 42. *De quantos modos podemos selecionar subconjuntos de* 3 *elementos de um conjunto* A *com* 10 *elementos?*

Solução: O conjunto A possui 10 elementos. Assim, para a escolha do primeiro elemento do subconjunto, temos 10 possibilidades, para a escolha do 2º, 9 possibilidades e para o 3º, 8 possibilidades. Daí, pelo princípio multiplicativo,

$$10 \cdot 9 \cdot 8.$$

Como para subconjuntos, a ordem dos elementos não é importante, um dado subconjunto foi contado 3! vezes a mais, já que, por exemplo, o subconjunto {elemento 1, elemento 2, elemento 3} foi contado também quando apareceu como {elemento 3, elemento 2, elemento 1}, {elemento 3, elemento 1, elemento 2}, ..., com um total de $3! = 6$ "disfarces". Desse modo, temos:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120 \text{ subconjuntos.}$$

■

Exemplo 43. *De quantos modos podemos selecionar subconjuntos de* 4 *elementos do conjunto* A *com* 10 *elementos?*

Solução: Sabemos que o conjunto A possui 10. Desse modo, para escolha do 1º elemento do subconjunto, temos 10 possibilidades, para a escolha do 2º, 9 possibilidades, para a escolha do 3º, 8 possibilidades e para escolha do 4º elemento 7 possibilidades. Desse modo, temos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Sabemos quem em combinações, a ordem dos elementos não é importante. Assim, os subconjuntos foram contados 4! a mais. Desse modo, obtemos:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ subconjuntos.}$$

■

Apresentamos, no Teorema 5.2 a seguir, a generalização dos três exemplos vistos anteriormente.

Teorema 5.2. *Seja* C *um conjunto com* n *elementos distintos, o número de maneiras que podemos selecionar* p *elementos distintos dentre os* n *elementos de* C *é dado por*

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Demonstração. Sabemos que o conjunto C possui n elementos; para selecionarmos p elementos distintos procedemos do seguinte modo, temos n possibilidades para escolha do 1º elemento, $n-1$ possibilidades para escolha do 2º elemento, $n-2$ possibilidades para escolha do 3º elemento até obtermos sucessivamente, assim, $n-p+1$ possibilidades para escolha do p-ésimo elemento. Desse modo, temos:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Multiplicando este produto por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtemos:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Pelo fato de que a ordem dos elementos, em combinações simples, não ser importante, os p elementos foram contados $p!$ vezes a mais. Daí,

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\frac{(n-p)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Portanto, o número de maneiras que podemos selecionar p elementos distintos dentre n elementos dados, é

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

■

Uma maneira de resolver problemas como os Exemplos 44 e 45, comuns na literatura, é fazer a contagem do número de possibilidades de homens e de mulheres por equipes, aplicar o *princípio multiplicativo* e em seguida o *princípio aditivo*. Esse processo funciona porque dentre o universo de possibilidades, tomamos dois conjuntos disjuntos, calculamos a quantidade de elementos deles usando *princípio multiplicativo* e depois aplicamos o *princípio aditivo*.

Exemplo 44. *Com 3 homens e 2 mulheres, quantas equipes com 3 pessoas com pelo menos 2 homens, podemos formar?*

Solução: Uma maneira de resolver este problema é quebrar o conjunto das equipes e considerar aquelas de 3 homens ou 2 homens e 1 mulher. Inicialmente, determinamos o número de equipes que possuem 2 homens e 1 mulher. Com efeito,

$$C_{3,2} \cdot C_{2,1} = 6 \text{ equipes}.$$

Agora, calculamos o número de equipes com 3 homens e nesse momento com ausência de mulheres, temos

$$C_{3,3} \cdot 1 = 1 \text{ equipe}.$$

Observe que o conjunto composto pelas equipes formadas por 2 homens e 1 mulher e o conjunto das equipes de 3 homens é disjunto. Portanto, pelo princípio aditivo, o número de equipes com no mínimo 2 homens é igual a $6 + 1 = 7$.

■

Uma forma de resolução de questões desse tipo que conduz ao erro, é quando se procede do seguinte modo: calcula-se o número mínimo de homens na equipe, no caso do Exemplo 44, temos $C_{3,2} = 3$. Para a escolha da terceira pessoa da equipe, considera o fato que restam 3 pessoas para ocupar uma vaga, e faz isto calculando $C_{3,1} = 3$. Aplica o *Princípio Multiplicativo*, obtendo

$$C_{3,2} \cdot C_{3,1} = 9 \text{ equipes.}$$

Esse processo está errado porque a maneira como é "quebrado" o conjunto não forma subconjuntos disjuntos. Foi calculado o número de possibilidades do subconjunto com 2 homens dentre os 3 disponíveis e o número de possibilidades do subconjunto formado por uma terceira pessoa a ser incluída na equipe, dentre as 3 pessoas restantes.

Por exemplo, seja H_1, H_2 e H_3 os homens, e M_1 e M_2 as mulheres. Considere o mínimo de homens selecionados para cada equipe: H_1H_2, H_1H_3 e H_2H_3, ou seja, há três possibilidades. Ao inserir a terceira pessoa podemos obter as equipes: $H_1H_2M_1$, $H_1H_2M_2$, $H_1H_2H_3$, $H_1H_3M_1$, $H_1H_3M_2$, $H_1H_3H_2$, $H_2H_3M_1$, $H_2H_3M_2$ e $H_2H_3M_{H1}$. Perceba que a equipe formada pelos homens H_1, H_2 e H_3 foram contadas três vezes, isto aconteceu porque o argumento não gera subconjuntos disjuntos: há homens compondo a primeira parte (duas posições) e homens na segunda parte (última posição).

Exemplo 45. *Qual é o erro da solução abaixo? "Com* 5 *homens e* 4 *mulheres, quantas comissões de* 5 *pessoas com pelo menos* 3 *homens, podem ser formadas? Solução: Primeiramente vamos escolher* 3 *homens para a comissão, e que pode ser feito de* $C_{5,3} = 10$ *modos. Agora devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as* 6 *pessoas restantes, o que pode ser feito de* $C_{6,2} = 15$*. A resposta é* $10 \cdot 15 = 150$*" (LIMA et al., 2006a).*

Solução: A solução apresentada errou porque procedeu conforme o comentário que fizemos anteriormente.

Procedeu-se do seguinte modo, foi calculado o número mínimo de homens na comissão que foi $C_{5,3} = 10$, escolhendo 3 dos 5 homens presentes. A condução ao erro, ocorre na escolha das duas outras pessoas da comissão, pois foi calculado $C_{6,2} = 15$. Seguindo esse raciocínio, teremos comissões com pelos um homem que foi contado para compor os três primeiros homens da equipe, e irá ser repetido na contagem, ou seja, teremos membros repetidos em uma equipe, o que não faz sentido.

Propomos a resolução desse problema seguindo o mesmo raciocínio utilizado no Exemplo 44. Calculando o número de comissões formadas por 3 homens e 2 mulheres, temos

$$C_{5,3} \cdot C_{4,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ comissões.}$$

Agora o número de comissões formadas por 4 homens e 1 mulher é dado por

$$C_{5,4} \cdot C_{4,1} = \frac{5}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ comissões.}$$

Por fim, o número de comissões formadas por 5 homens é

$$C_{5,5} \cdot c_{4,0} = 1 \text{ comissões.}$$

Portanto, o total de comissões formadas com pelo menos 3 homens é de $60+20+1 = 81$ comissões.

■

5.4.1 Permutações com Repetições

Quando um conjunto possui n elementos que se repetem, estaremos diante de uma situação de *permutação com repetições*. Ao permutarmos as letras da palavra ALA, por exemplo, podemos fazer do seguinte modo: AAL, ALA ou LAA.

Em análise combinatória, a forma de reorganizarmos as letras de uma palavra, de modo a ter significado ou não na Língua Portuguesa, é chamada de anagrama. Nos Exemplos 46 e 47, abordamos o conceito de anagramas, o primeiro resolvemos através dos anagramas da palavra, o segundo solucionamos através do raciocínio algébrico.

Exemplo 46. *Quantos anagramas podemos formar com a palavra VIVE?*

Solução: Com a palavra VIVE, podemos formar os seguintes anagramas: VVIE, VVEI, IVVE, EVVI, IEVV e EIVV, VIVE, VEVI, VEIV, VIEV, EVIV e IVEV. Assim temos um total de 12 anagramas.

■

O Exemplo 47, a seguir, representa um caso particular do Teorema 5.3, este possui uma demonstração rebuscada, pois, é a generalização dos casos de Permutações com Repetições.

Exemplo 47. *Quantos anagramas podemos formar com a palavra TATA?*

Solução: Temos quatro posições para colocarmos estas letras, __ __ __ __. Devemos escolher duas das quatro posições para colocarmos os dois T, esse número de escolhas é dado por

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}.$$

Agora, restaram duas opções de escolhas para colocarmos os dois A, e o número de escolhas é

$$C_{2,2} = \frac{2!}{2!}.$$

O número de anagramas da palavra TATA é dado pelo produto

$$C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ anagramas.}$$

Poderíamos resolver o Exemplo 46, conforme resolvemos o Exemplo 47. De fato, temos quatro espaços para colocarmos as letras da palavra VIVE, __ __ __ __. Escolhemos dois espaços para colocarmos os dois V, e o número de possibilidades de escolhas pode ser obtido do seguinte modo

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}.$$

Para colocarmos o I nos resta dois espaços, o número de escolhas é

$$C_{2,1} = \frac{2!}{1!}.$$

Agora resta apenas um espaço para colocar o E, ou seja, $C_{1,1} = 1$. Assim o número de anagrama da palavra VIVE é dado por

$$C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot C_{1,1} = \frac{4!}{2!} = 12\text{anagramas.}$$

■

Faremos a seguir, no Teorema 5.3, a generalização dos casos de permutações com repetições.

Teorema 5.3. *Seja P um conjunto com n elementos, dos quais n_1 são iguais a A_1, n_2 iguais a A_2, ..., n_m elementos iguais a A_m. O número de permutações com repetições é dado*

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

Onde $n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1} + n_m = n$.

Demonstração. Calculando as possibilidades de colocarmos os n_1 elementos iguais A

$$C_{n,n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}.$$

Agora determinarmos o número de possibilidades de organizarmos os n_2 elementos iguais a B

$$C_{n-n_1,n_2} = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}.$$

Prosseguimos este raciocínio até determinarmos o número de possibilidades de organizarmos os n_m elementos iguais a R

$$C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1},n_m} = \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}-n_m)!}.$$

Multiplicando estas possibilidades, temos:

$$C_{n,n_1}C_{n-n_1,n_2}C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1},n_m} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots$$
$$\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}-n_m)!}.$$

Simplificando os termos semelhantes no numerador e no denominador das frações, e considerando o fato de $n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+n_m=n$, obtemos

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

Portanto, o número de permutações com repetições é

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

■

Exemplo 48. *Quantos são os anagramas da palavra ESTRELADA? (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Na palavra ESTRELADA as letras A e E repetem-se duas vez. Observe o anagrama SETRELADA: note que ao trocarmos a posição da letra E, contaríamos o mesmo anagrama duas vezes, ou seja, 2! vezes a mais. O mesmo ocorre com a letra A. O número de anagramas caso as letras fossem todas distintas seria 9!, como duas letras repetem-se, calculamos o número da permutação com repetição do seguinte modo:

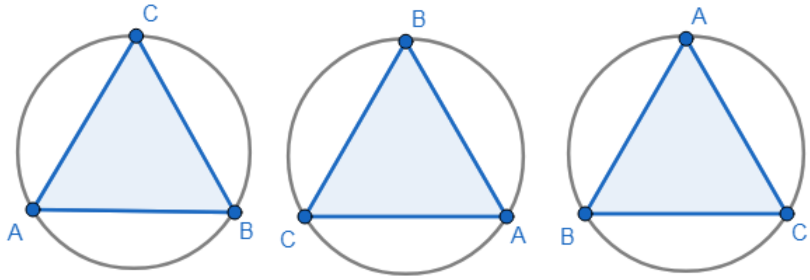
$$\frac{9!}{2!2!}=\frac{362.880}{4}=90.720 \text{ anagramas.}$$

■

5.5 Permutações Circulares

Quando objetos são colocados em ordem cíclica, de tal modo que suas disposições ao coincidirem por rotação são consideradas iguais, estaremos diante de uma permutação circular. Temos, por exemplo, os vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência, conforme podemos ver na Figura 8 a seguir.

Figura 8 – Triângulos “Iguais”

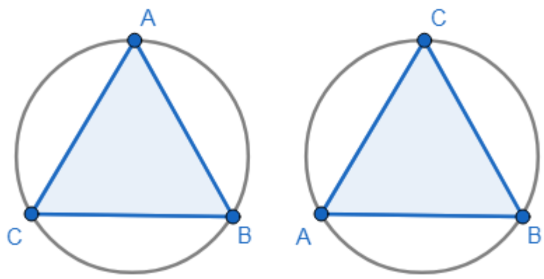


Fonte: Autoral

Os triângulos da Figura 8 são considerados “iguais”, pois foram obtidos rotacionando de um ângulo de 60º, no sentido anti-horário, o triângulo localizado à esquerda. Vale notar que o sentido de rotação não é relevante: se girarmos o círculo no sentido horário, ainda obteremos as três disposições ilustradas.

Na Figura 9 os triângulos são considerados diferentes, pois não há como obter um a partir do outro por meio de uma rotação plana.

Figura 9 – Triângulos Diferentes



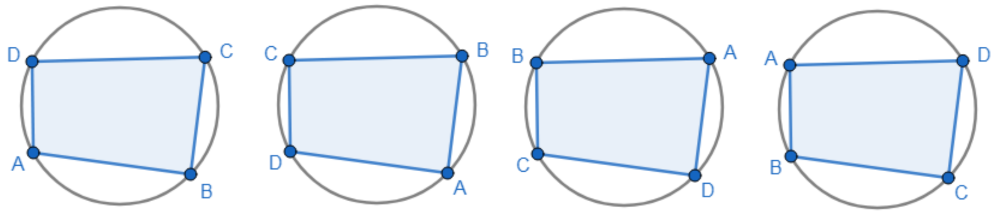
Fonte: Autoral

O número de triângulos da Figura 9, é o número de permutações circulares que podemos obter. Nesse caso, igual a 2.

Definição 5.5. *Chama-se permutação circular quando a permutação é composta por um ou mais elementos em ordem cíclica, considerando disposições idênticas aquelas que coincidem por rotação.*

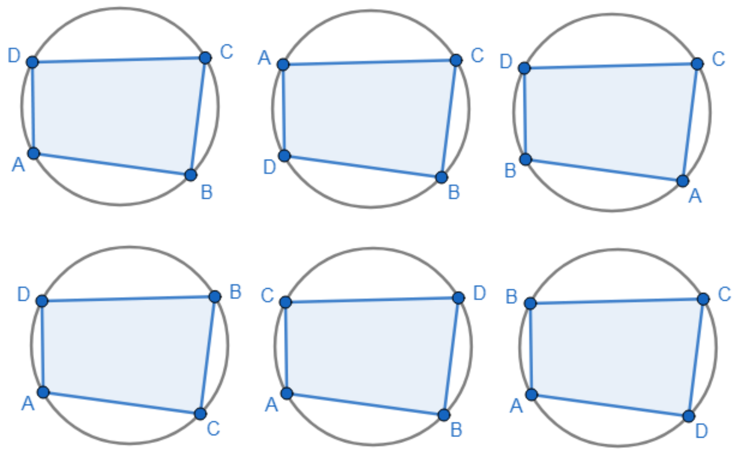
Por definição, os casos de permutações circulares obtidas ao rotacionar um círculo são equivalentes. Voltando à situação do triângulo, a Figura 8 traz os três “disfarces” da disposição à direita na Figura 9: são três, porque há três pontos dispostos na circunferência e, assim, três pequenas rotações na circunferência geram as três disposições que, no que diz respeito às permutações circulares, representam o mesmo agrupamento. Se tivermos uma situação similar, com os pontos A, B, C e D, ou seja, um quadrilátero, seriam necessários quatro pequenas rotações para descobrirmos todos os "disfarces" do agrupamento $ABCD$, conforme podemos ver na Figura 10 a seguir. Assim, temos $\dfrac{4!}{4} = 6$ agrupamentos de fato distintos, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 10 – Quadriláteros idênticos



Fonte: Autoral

Figura 11 – Quadriláteros distintos



Fonte: Autoral

De modo geral, suponhamos uma situação em que n objetos estão dispostos sobre uma circunferência. Repetindo-se o argumento empregado acima, o número de permutações circulares de um conjunto com n objetos é dado por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

Exemplo 49. *De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com:*

(a) 2 meninos e 2 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

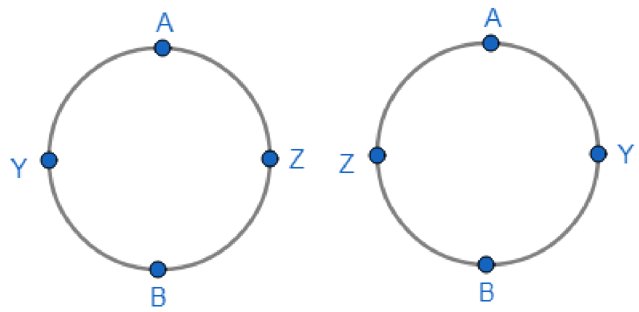
(b) 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas? (LIMA et al., 2006a).

Solução: Para a resolução do item (a), procedemos do seguinte modo, imagine a formação da roda de ciranda formada inicialmente por meninos, nesse caso temos uma permutação circular com 2 elementos. Desse modo, $(PC)_2 = (2-1)! = 1$. É interessante perceber que este resultado está correto e, mais do que isso, faz sentido!

Agora iremos inserir as meninas na roda de ciranda. Como os meninos estão posicionados equiespaçados e existem dois espaços para inserirmos as duas meninas, isso pode ser feito de $2!$ modos. Logo, o número total de rodas de cirandas é de $1 \cdot 2! = 2$.

Na figura seguir, ilustramos esta situação, os meninos são representados por A e B e as meninas por Y e Z.

Figura 12 – Roda de ciranda

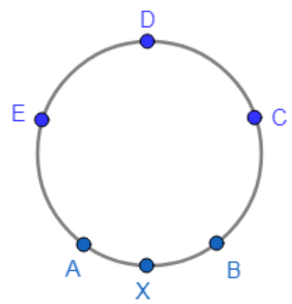


Fonte: Autoral

Para a resolução do item (b), imagine a formação da roda de ciranda inicialmente composta apenas por meninas, teríamos uma permutação circular com 5 elementos, assim $(PC)_5 = (5-1)! = 4! = 24$ rodas de ciranda apenas com meninas.

Se as meninas forem A, B, C, D, E, colocar o menino X entre A e B, é diferente de colocar entre B e C, a Figura 13 ilustra essa situação – ou seja, estamos em uma situação de permutação simples.

Figura 13 – Roda de ciranda



Fonte: Autoral

Agora introduzindo os meninos na roda de ciranda, lembrando que pessoas do mesmo sexo não podem ficar juntas. Como existem cinco espaços entre as meninas, podemos colocar os meninos do seguinte modo: o 1º a ser colocado possui 5 possibilidades de escolha, o 2º possui 4 possibilidades, o 3º possui 3 possibilidades, o 4º possui

2 possibilidades e o 5º possui 1 possibilidade, ou seja, os meninos terão $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ modos de serem colocados na roda de ciranda. Logo, o número total de rodas de ciranda que podem ser formadas é de $4! \cdot 5! = 2.880$.

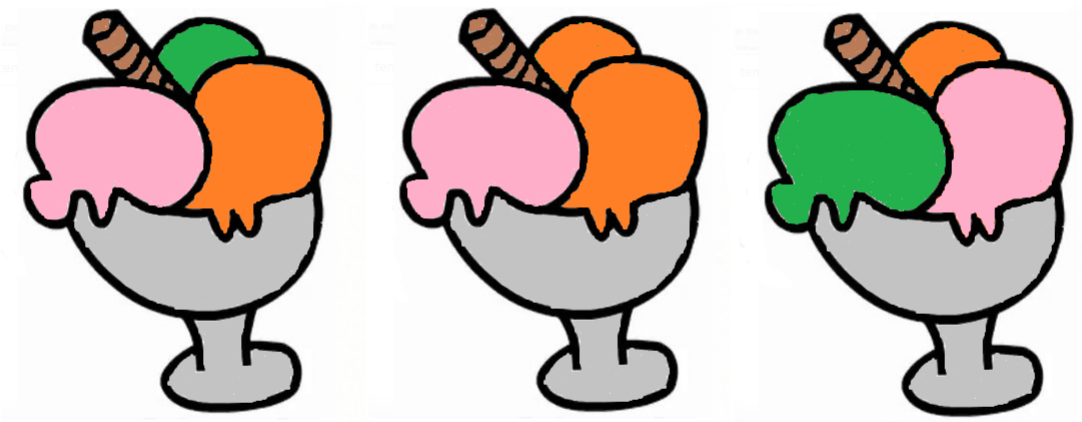
■

Generalizando o problema anterior, ou seja, com n meninos e n meninas, o número de rodas de cirandas que podem ser formadas é dado por $(n-1)!n!$.

5.6 Combinações Completas ou com Repetições

Em situações que temos n possibilidades, podemos fazer p escolhas dentre elas, de modo que cada escolha pode ser feita de várias formas e de modo que a ordem da escolha não importa, estaremos, assim, diante de uma situação de *Combinações Completas ou com Repetições*. Suponha, por exemplo, que uma pessoa queira comprar um pote pequeno de sorvete, a sorveteria permite que se escolha três sabores e há 6 diferentes disponíveis. Note que a ordem com que os sabores são escolhidos é irrelevante e, além disso, um mesmo sabor pode ser selecionado mais de uma vez.

Figura 14 – Potes de sorvete



Fonte: Imagem do Google adaptada pelo autor

De quantos modos podemos montar o pote? O fato de a ordem não ser importante, nos remete à situações de combinação simples. Porém, a possibilidade de repetirmos a seleção não condiz com este tópico. Então, para resolvermos este problema, precisamos de outra ferramenta: combinações com repetições ou combinações completas.

Em combinações simples, seus elementos não podem se repetir e podemos obter o seu número, conforme visto, por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, n \geq p.$$

A seguir apresentamos a definição para combinações completas.

Definição 5.6. *Dado um conjunto de n objetos (distintos), o número de maneiras de escolher p dentre eles, onde podemos escolher várias vezes o mesmo elemento e de forma que a ordem em que os p elementos são escolhidos não é importante, é chamado de número de combinações completas de n escolhe p, sendo denotado por $CR_{n,p}$.*

Ressaltamos que não existe relação de ordem entre n e p, ilustramos esse fato no Exemplo 50. No entanto, precisamos, antes de uma definição auxiliar a qual apresentamos a seguir.

Definição 5.7. *Uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

é chamada equação diofantina linear, em que $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros dados, chamados coeficientes, c que também é um inteiro dado, é chamado termo constante e $x_1, \ldots, x_n$ são as incógnitas.

Todo problema de combinação com repetição pode ser modelado como uma equação diofantina de coeficientes unitários e cujas soluções são inteiras não-negativos. Contar o número de soluções de uma equação diofantina, que possuem estas características, é mesmo que resolver uma combinação completa.

Agora ilustramos, no exemplo a seguir, o fato de n e p não possuir relação de ordem.

Exemplo 50. *Como podemos escolher 4 cores entre:*

(a) 5 *disponíveis.*

(b) 2 *disponíveis.*

Solução: Em cada item deve-se escolher 4 cores, de acordo com a Definição 5.6, um mesmo elemento poder ser escolhido várias vezes, neste caso, a mesma cor pode ser escolhida até 4 vezes.

Podemos modelar este problema utilizando equações diofantinas. Para o item (a), considere x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 o número de vezes que cada cor aparece, como são 4 cores que podemos escolher, temos a equação diofantina $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$.

Agora, para o item (b) considere x_1 e x_2 o número de vezes que cada cor aparece, como podemos escolher 4 cores, temos a equação diofantina $x_1 + x_2 = 4$.

■

Já sabemos que todo problema de combinação com repetição pode ser modelado com uma equação diofantina. Então é natural imaginar que contar de quantos modos uma dada situação de combinação completa pode ser executada, é o mesmo que contar a quantidade de soluções da equação diofantina correspondente. Nosso próximo exemplo é dedicado à contagem de soluções de equações diofantinas com coeficientes iguais a 1.

Exemplo 51. *Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação*

$$x_1 + x_2 = 2?$$

Solução: Os pares ordenados $(1,1)$, $(2,0)$ e $(0,2)$, onde a primeira coordenada representa o valor de x_1 e a segunda, de x_2, são soluções desta equação já que $1+1=2$, $2+0=2$ e $0+2=2$. Observe que o importante são as expressões do lado esquerdo da igualdade, pois elas carregam os números 1 e 1, 2 e 0 e 0 e 2, respectivamente, que são as soluções procuradas. Agora, usando | para representar uma unidade, um espaço vazio para o número zero e mantendo o símbolo + para a adição, reescreveremos estas expressões do seguinte modo:

- $1+1$ será representada por "| + |";
- $0+2$, por " + ||";
- $2+0$, por "|| + ".

Assim, podemos encarar as expressões como filas de objetos – barras e sinais de adição –, o que nos permite usar o maquinário apresentado no decorrer deste capítulo, pois as soluções serão, então, representadas pelos vários agrupamentos distintos envolvendo os símbolos usados.

No lado esquerdo de cada igualdade, tem-se uma fileira com um sinal de mais e duas barras, totalizando três espaços na fila. Destes três, como são duas barras, escolheremos dois espaços para colocá-las. O número de maneiras de fazer isso pode ser obtido por

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

O valor desta combinação representa o número de soluções inteiras não-negativas da equação.

Portanto, a equação $x_1 + x_2 = 2$ possui 3 soluções inteiras não-negativas.

■

Exemplo 52. *Quantas são as soluções inteiras não-negativas da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7?$$

Solução: Aproveitando o que foi posto no exemplo anterior, temos, aqui, 7 barras e 2 sinais de adição. As soluções são, então, todos os agrupamentos distintos destes 9 objetos. Das 9 posições que temos para colocarmos estes objetos, selecionaremos 7 para colocarmos as barras. Assim, a quantidade procurada é dada pela combinação de 9 tomados 7 a 7, ou seja,

$$C_{9,7} = \frac{9!}{7!2!} = 36.$$

O valor obtido é o número de soluções da equação. Portanto, a equação possui 36 soluções inteiras não-negativas.

■

O problema anterior poderia ser resolvido por permutações com repetições, pois temos a disposição de 9 objetos dos quais são 7 barras e 2 sinais de +. Desse modo, temos

$$P_9^{2,7} = \frac{9!}{7!2!} = 36.$$

Obtemos o mesmo resultado da solução apresentada no problema.

Agora, faremos a generalização dos Exemplos 51 e 52, determinando o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p, \tag{5.1}$$

cuja solução, é a fórmula de combinações com repetições.

Cada solução da Equação 5.1 será representada por uma fila de $n-1$ sinais de + e por p barras. Sabemos do Exemplo 52 que os sinais de + separam as incógnitas, e as barras indicam o valor de cada incógnita.

Temos $n+p-1$ lugares nesta fila, dos quais queremos selecionar p lugares para serem colocadas as barras. Logo, teremos

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Denotaremos combinações completas ou com repetições, por CR. Desse modo,

$$CR = C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemplo 53. *Uma indústria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricados? (LIMA et al., 2006a).*

Solução: Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 os cinco tipos de balas, assim

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20.$$

Podemos resolver esta equação usando diretamente a fórmula de Combinação Completas, temos $n = 5$ e $p = 20$. Com efeito,

$$C_{n+p-1,p} = C_{24,20} = \frac{24!}{20!4!} = 10.626.$$

Portanto, podem ser fabricados 10.626 tipos diferentes de caixas.

■

5.7 O Triângulo de Pascal

Apresentaremos a seguir o Triângulo de Pascal, também conhecido como triângulo aritmético de Tartaglia - Pascal.

$$\begin{array}{llll} C_{0,0} & & & \\ C_{1,0} & C_{1,1} & & \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\ \vdots & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \vdots & & & \end{array}$$

Observe que no Triângulo de Pascal, as linhas e colunas foram enumeradas a partir do zero. É importante sabermos que no triângulo de Pascal somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela, que é a *Relação de Stifel* a qual apresentamos a seguir.

Relação de Stifel: Para todos n e p inteiros $0 \leq p \leq n$, temos

$$C_{n-1,p} + C_{n-1,p-1} = C_{n,p}.$$

Demonstração. Considere A um conjunto não-vazio com n elementos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

O número de subconjuntos de A com p elementos é dado por $C_{n,p}$.

Tomando o subconjunto de A, $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, o número de subconjuntos de A' com p e $p-1$ elementos são $C_{n-1,p}$ e $C_{n-1,p-1}$, respectivamente.

Os subconjuntos de A com p elementos, contém o elemento a_n, são formados pela união de $\{a_n\}$ com os subconjuntos de A' que possuem $p-1$ elementos, fazendo isso, obtemos $C_{n-1,p-1}$ subconjuntos.

E os subconjuntos de A com p elementos que não contém a_n, tem $C_{n-1,p}$ elementos. Desse modo,

$$C_{n-1,p} + C_{n-1,p-1} = C_{n,p}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
C_{n-1,p} + C_{n-1,p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)(n-p)} + \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= C_{n,p}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.4. *A soma da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é dada por* 2^n*, ou seja,*

$$S_n = C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n.$$

Demonstração. Faremos a demonstração usando Indução Finita. Para $n = 0$ a verificação é imediata.

Suponhamos por hipótese que a propriedade é válida para $n \geq 0$, isto é,

$$S_n = C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n.$$

Mostraremos que é verdade para $n + 1$. Logo, nosso objetivo é mostrar que

$$S_{n+1} = C_{n+1,0} + C_{n+1,1} + C_{n+1,2} + \cdots + C_{n+1,n+1} = 2^{n+1}.$$

Usando o fato de que $C_{n,0} = C_{n+1,0}$ e $C_{n,n} = C_{n+1,n+1}$ e aplicando a relação de Stifel, temos

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= C_{n+1,0} + C_{n+1,1} + C_{n+1,2} + \cdots + C_{n+1,n+1} \\
&= C_{n,0} + (C_{n,0} + C_{n,1}) + (C_{n,1} + C_{n,2}) + \cdots + (C_{n,n-1} + C_{n,n}) + C_n^n \\
&= (C_{n,0} + C_{n,0}) + (C_{n,1} + C_{n,1}) + \cdots + (C_{n,n} + C_{n,n}) \\
&= 2C_{n,0} + 2C_{n,1} + \cdots + 2C_{n,n} \\
&= 2 \cdot (C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,n}) \\
&= 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo n natural.

■

Exemplo 54. *Com 7 frutas diferentes, quantos sucos de duas ou mais frutas podemos formar?*

Solução: Sabemos pelo teorema das linhas que

$$C_{7,0} + C_{7,1} + C_{7,2} + \cdots + C_{7,7} = 2^7 = 128.$$

Como os sucos devem ter duas ou mais frutas, assim o número de sucos diferentes é de:

$$128 - C_{7,0} - C_{7,1} = 128 - 1 - 7 = 120 \text{ sucos}.$$

■

5.8 O Binômio de Newton

Suponhamos n natural, potências da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, é chamada de Binômio de Newton.

Podemos desenvolver o Binômio de Newton do seguinte modo:

$$(x+y)^n = C_{n,0} \cdot x^n + C_{n,1} \cdot y^1 \cdot x^{n-1} + \cdots + C_{n,n} \cdot y^n \cdot x^0.$$

Designemos o i-ésimo termo do desenvolvimento por T_i. Assim, T_1 é dado por $C_{n,0} \cdot x^n$, T_2 por $C_{n,1} \cdot y^1 \cdot x^{n-1}$ e assim sucessivamente, de modo que, T_{n+1} é obtido por $C_{n,n} \cdot y^n \cdot x^0$.

Seguindo esse raciocínio, o termo geral é dado por:

$$T_{p+1} = C_{n,p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p.$$

Exemplo 55. *Determine o valor da soma $C_{n,0} + 3C_{n,1} + 3^2C_{n,1} + \cdots + 3^nC_{n,n}$ (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Faremos a comparação da expressão com o desenvolvimento do Binômio de Newton. Com efeito,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C_{n,0} \cdot x^n y^0 + C_{n,1} \cdot y^1 \cdot x^{n-1} + \cdots + C_{n,n} \cdot y^n \cdot x^0 \\ &= C_{n,0} + 3C_{n,1} + 3^2C_{n,1} + \cdots + 3^nC_{n,n}.\end{aligned}$$

Obtemos, $x = 1$ e $y^n = 3^n$, segue que $y = 3$. Logo, o valor da soma é de $(1+3)^n = 4^n = 2^{2n}$.

■

Exemplo 56. *Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton segue que:

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= C_{n,p} \cdot X^{n-p} \cdot Y^p \\ &= C_{10,p} \cdot (x^3)^{10-p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p \\ &= C_{10,p} \cdot x^{30-3p} \cdot x^{-2p} \cdot (-1)^p \\ &= C_{10,p} \cdot (-1)^p \cdot x^{30-5p}. \end{aligned}$$

Devemos ter $30 - 5p = 0$ para encontrarmos o termo independente de x. Assim, ao resolvermos a equação $30 - 5p = 0$ obtemos $p = 6$. Daí,

$$T_{6+1} = C_{10,6} \cdot x^{30-5\cdot 6} = 210 \cdot 1 = 210.$$

Portanto, o termo independente de x é igual a 210.

■

6 Probabilidade

A reformulação curricular da Educação Básica brasileira, implantada com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, no 9° Ano do Ensino Fundamental, possui como objeto de conhecimento a análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes. Para esse conteúdo, temos a seguinte habilidade a ser desenvolvida nesse ano de ensino:

> **(EF09MA20)**Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos (BNCC, 2018, p. 319).

Na etapa do Ensino Médio, o conteúdo Probabilidade faz parte da Competência Específica 3, da Área de Matemática e suas Tecnologias deste documento, e orienta a

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, 2018, p. 535).

Para esta competência, a BNNC apresenta as seguintes habilidades a serem desenvolvidas.

> **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (BNCC, 2018, p. 537).

Seguindo a orientação estabelecida para o 9° ano do Ensino Fundamental, a Competência Específica 3, as habilidade propostas e baseado em (LIMA et al., 2006a), (FILHO; SILVA, 2000) e (MORGADO et al., 1991), desenvolvemos o conteúdo Probabilidade. Apresentamos aplicações de probabilidades ao longo deste capítulo e, no Capítulo 7, nos Exercícios 14, 15, 17 e 18.

Com relação à OBMEP, o tópico Probabilidade foi abordado em provas, em apostilas voltadas para a preparação deste evento e em Banco de Questões destinado ao treinamento para esta Olimpíada.

6.1 Noções inicias de Probabilidade.

Em probabilidade, quando os experimentos são realizados sobre as mesmas condições e produzem resultados essencialmente idênticos são chamados de *experimentos determinísticos*. Temos a seguir exemplos de *experimentos determinísticos*.

Exemplo 57. *O etanol aquecido a 78,37ºC, sob pressão normal, entra em ebulição.*

Exemplo 58. *Qual a distância percorrida por um automóvel, no movimento retilíneo uniforme, com velocidade média de* $80km/h$ *após* $4h$ *de viagem?*

Quando experimentos realizados com as mesmas condições, gerarem resultados, que muitas vezes não são iguais, são chamados de *experimentos aleatórios*.

Apresentaremos a seguir exemplos de situações que são *experimentos aleatórios*.

Exemplo 59. *Qual será o número de ganhadores da Mega-Sena?*

Exemplo 60. *Joga-se um dado até se obter um seis e conta-se o número de lançamentos.*

Exibimos a seguir a definição de *espaço amostral* de um experimento aleatório.

Definição 6.1. *Chama-se Espaço Amostral, o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória e denotaremos pela letra* S.

O exemplo a seguir ilustra o conceito de *espaço amostral*.

Exemplo 61. *Lançar um dado não viciado e observar a face voltada para cima. Qual o espaço amostral?*

Solução: Seja S o espaço amostral dessa situação, os números que podem aparecer na face volta para cima são: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Logo, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

■

Definição 6.2. *Chama-se de Evento, os subconjuntos de um Espaço Amostral S.*

Neste trabalho, denotaremos os *eventos* por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Ao longo deste Capítulo, o sexto, faremos uso de algumas simbologias as quais apresentamos a seguir com seus respectivos significados. Seja S, o espaço amostral de um experimento aleatório qualquer e A e B, eventos deste espaço amostral.

- $A \cup B$: representa a união de dois eventos, ou seja, representa o evento formado por elementos dos eventos A ou B;
- $A \cap B$: representa a interseção de dois eventos, ou seja, é o evento formado por elementos dos eventos A e B;

- $A - B$: representa a diferença entre dois eventos, ou seja, é o evento formado por elementos do evento A que não pertencem ao evento B;
- $A \subset B$: quando o evento A é um subconjunto do evento B, ou seja, todos os elementos do evento A pertencem ao evento B;
- $\overline{A} = S - A$: representa o complementar do evento A, ou seja, é o evento formado pelos elementos do espaço amostral S que não são elementos do evento A.

A seguir, expomos a definição de *Evento* de um *Espaço Amostral*.

Exemplo 62. *No lançamento de um dado, determine o evento: obter na face voltada para cima um número primo.*

Solução: Como vimos no Exemplo 61, o espaço amostral do experimento "lançamento de um dado" é dado por $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De S, o subconjunto que satisfaz o problema – o de números primos – é dado por $A = \{2, 3, 5\}$. Portanto, o evento procurado é o conjunto A.

■

De acordo com (MORGADO et al., 1991), os elementos de A são os casos favoráveis, e os elementos do espaço amostral S são os casos possíveis. Denotaremos o número de elementos do *evento* A e do *espaço amostral* S, respectivamente, por $n(A)$ e $n(S)$. Mostramos a seguir a definição de probabilidade a luz de (FILHO; SILVA, 2000).

Definição 6.3. *Considerando um espaço amostral S, não vazio, e um evento A, sendo $A \subset S$, a probabilidade de ocorrer o evento A é o número $P(A)$, tal que:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},$$

Sendo $0 \leq P(A) \leq 1$ e S um conjunto equiprovável, ou seja, todos os elementos têm a mesma "chance" de acontecer.

Entendemos ainda que a probabilidade de um evento A ocorrer é dado por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

No Exemplo 63, a seguir, trabalhamos o conceito de probabilidade.

Exemplo 63. *Dois dados, um amarelo e outro azul, são lançados e observa-se a soma de suas faces voltadas para cima.*

(*a*) *Quais são os possíveis resultados para esta soma?*

(*b*) *Esses resultados são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma chance de ocorrer? Caso contrário, que resultado é mais provável? Com que probabilidade? E o menos provável?*

(*c*) *Qual é a probabilidade de cada resultado possível?*

Solução: Resolvemos inicialmente o item (a) e representaremos os números das faces obtidas por um par ordenado, onde a abscissa representa o valor da face do dado amarelo e a ordenada o valor da face do dado azul. Como são lançados dois dados, obtemos o seguinte espaço amostral:

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \end{aligned}$$

Analisando os pares ordenados de S, percebemos que os possíveis resultados obtidos para as somas são:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ e } 12.$$

Agora responderemos o item (b), os resultados das somas obtidas, não são equiprováveis, pois as somas não possuem a mesma chance de ocorrer, por exemplo, a soma 2 pode ocorrer apenas uma vez e a soma 7 seis vezes, isso em um universo de 36 possibilidades. O resultado mais provável é ocorrer soma 7, pois podem ser obtidos os pares $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)$ ou $(6,1)$, cuja probabilidade é de

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Os resultados menos prováveis de ocorrerem são as somas 2 e 12, que podem ocorrer quando obtemos os pares ordenados $(1,1)$ e $(6,6)$, respectivamente. Assim, possuem probabilidade igual a

$$\frac{1}{36}.$$

Agora apresentamos a solução do item (c). Temos na Tabela 3, os valores das somas e a probabilidade de cada uma ocorrer.

Tabela 3 – Somas e Probabilidades

Valor da Soma	Probabilidade
2	1/36
3	1/18
4	1/12
5	1/9
6	5/36
7	1/6
8	5/36
9	1/9
10	1/12
11	1/18
12	1/36

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na primeira coluna da tabela temos o valor da soma e na segunda coluna a probabilidade de cada resultado da soma ocorrer.

■

Em um evento aleatório de espaço amostral S, a probabilidade de um evento $A \subset S$ ocorrer pode ser vista como uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, pensando assim, apresentamos a definição a seguir para probabilidade.

Definição 6.4. *Uma Probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$, de forma que:*

1. *Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.*
2. *$P(S) = 1$.*
3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

O Teorema 6.1, a seguir mostra algumas propriedades de probabilidade.

Teorema 6.1. *Se A e B são eventos de um experimento aleatório com espaço amostral S, então:*

1. *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, isto é, a probabilidade do evento complementar de A é igual a 1 menos a probabilidade do evento A;*
2. *$P(\varnothing) = 0$, isto é, a probabilidade do evento vazio é igual a zero;*
3. *$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, isto é, a probabilidade da diferença entre os eventos A e B é igual a probabilidade do evento A menos a probabilidade da interseção entre os eventos A e B;*

4. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ou seja, a probabilidade da união dos eventos A e B é igual a soma das probabilidades dos eventos A e B menos a probabilidade da interseção dos eventos A e B;*

5. *$A \supset B$ então $P(A) \geq P(B)$, isto é, a probabilidade do evento A é maior ou igual a probabilidade do evento B, quando o evento B é subconjunto do evento A*

Demonstração. Para a demonstração do item 1, considere S o espaço amostral e $\overline{A}$ o evento complementar de A, ou seja, o evento em que ocorre quando o evento A não pode ocorrer. Assim, $S = A \cup \overline{A}$. Daí, $P(S) = P(A \cup \overline{A})$.

Como os eventos A e $\overline{A}$ são mutuamente excludentes, temos pela Definição 6.4 (3), $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Desse modo, $P(S) = P(A) + P(\overline{A})$. Logo, $P(\overline{A}) = P(S) - P(A)$. Como $P(S) = 1$, concluímos que

$$P(\overline{A}) = 1 - P(S).$$

No item 2, temos $P(\varnothing) = 0$. Note que $S = S \cup \varnothing$. Assim,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \ \cup \varnothing) \\ &= P(S) + P(\varnothing). \end{aligned}$$

Daí, $P(S) = P(S) + P(\varnothing)$. Logo, $P(\varnothing) = P(S) - P(S)$, portanto, $P(\varnothing) = 0$.

Agora para o item 3, observe que $A - B$ e $A \cap B$ são eventos mutuamente excludentes pois, $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$. Ainda, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Daí,

$$\begin{aligned} P(A) &= P\big((A - B) \cup (A \cap B)\big) \\ &= P(A - B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

Donde $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Para o item 4, note que $A - B$ e B são eventos mutuamente excludentes, desse modo $(A - B) \cap B = \varnothing$. Ainda, $A \cup B = (A - B) \cup B$. Daí,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\big((A - B) \cup B\big) \\ &= P(A - B) + P(B). \end{aligned}$$

Assim, $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$. Pelo item 3, temos $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Para o quinto e último item, temos pelo item 3 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. Se $B \subset A$, temos $P(A \cap B) = P(B)$. Daí, $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geq 0$, temos $P(A) - P(B) \geq 0$, portanto, $P(A) \geq P(B)$.

■

6.2 Probabilidade Condicional

Quando a probabilidade de um evento é modificada pela presença de um evento condicionante, estamos diante de uma situação de *Probabilidade Condicional*. Por exemplo, quando uma moeda é lançada três vezes e temos um evento A: o resultado do primeiro lançamento foi cara. Ao desejar a obtenção da probabilidade do evento B: sair cara exatamente duas vezes. Nesse caso, o evento A é o evento condicionante e o evento B é o que terá a sua probabilidade modificada, (DANTE, 2000b).

Apresentaremos a seguir a definição de *Probabilidade Condicional*.

Definição 6.5. *Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B na certeza de A é dada por*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Nos Exemplos 64 e 65, a seguir aplicamos o conceito de *probabilidade condicional*.

Exemplo 64. *Joga-se um dado não-viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foram 7 (MORGADO; CARVALHO, 2015).*

Solução: Temos um caso de probabilidade condicional. Fazemos o espaço amostral do seguinte modo

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \end{aligned}$$

O evento "a soma dos resultados foram 7" é condicionante, chamaremos de evento A. Desse modo, $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. O evento "obter 3 na primeira jogada" é o evento que tem a probabilidade modificada, chamaremos de evento B. Assim, $B = \{(3,4)\}$. Note que $A \cap B = \{(3,4)\}$. Com efeito,

$$P(A) = \frac{6}{36} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Substituindo estes valores em $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, obtemos

$$P(A \cap B) = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}.$$

■

Uma outra forma de resolvermos esse problema, seria reduzir o espaço amostral S, considerando um espaço amostral

$$S' = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

Dai, a probabilidade de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foram 7, é de $\frac{1}{6}$.

Exemplo 65. *Duas máquinas A e B produzem 5.000 peças em um dia. A máquina A produz 3.000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2.000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A? (PROFMAT, 2014).*

Solução: O evento "uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa" é o evento condicionante e o chamaremos de D. O evento "tenha sido produzida pela máquina A" é o evento que tem a probabilidade modificada e chamaremos de D_A. Com efeito,

$$P(D) = \frac{80}{5000} \text{ e } P(D_A \cap D) = \frac{60}{5000}.$$

Agora, substituímos estes valores em $P(D_A|D) = \dfrac{P(D_A \cap D)}{P(D)}$, obtemos

$$P(D_A|D) = \frac{60/5000}{80/3000} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a probabilidade de que a peça defeituosa tenha sido produzida pela máquina A é $\frac{3}{4}$.

■

Apresentaremos a seguir um outro modo de resolução para o Exemplo 65.

Com base nas informações do problema, elaboramos a Tabela 4 a seguir.

Tabela 4 – Número de peças defeituosas por máquina.

Máquina	Número de peças defeituosas
A	60
B	20
Total	80

Fonte: Elaborada pelo autor

Fizemos uma redução do espaço amostral de 5.000 para 80 elementos. Agora, com base nos dados da Tabela 4, ao examinar que a peça é defeituosa, a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina A é de:

$$P(A) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}.$$

6.3 Probabilidade de Eventos Independentes

Quando a ocorrência de um evento não influência na ocorrência de outro evento, são chamados de *eventos independentes*. Por exemplo, lançar dois dados simultaneamente e obter o número 5 na face voltada para cima de cada dado. A probabilidade de eventos independentes é obtida pelo produto da probabilidade de cada evento, a probabilidade de obter 5 no lançamento sucessivo dos dois dados é de $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. A seguir apresentamos a definição de *Eventos Independentes*.

Definição 6.6. *Dois eventos A e B de um espaço amostral S com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$ são independentes se $P(A|B) = P(A)$ ou de modo equivalente:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

No exemplo a seguir, ilustramos o conceito de probabilidade de eventos independentes.

Exemplo 66. *Num conjunto de 100 parafusos, 90 deles estão em boas condições. Dois deles são retirados, sucessivamente, ao acaso, sem reposição. Qual é a probabilidade de que o primeiro parafuso defeituoso seja encontrado na 2^a retirada? (DANTE, 2000b).*

Solução. Sabemos que 100 é o número total de parafusos. O número de parafusos em boas condições é de 90 e de parafusos defeituosos é igual a 10. Assim, a probabilidade do primeiro parafuso retido ser em boas condições é de:

$$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}.$$

Agora, a probabilidade do segundo parafuso retirado ser defeituoso é de

$$\frac{10}{99}.$$

Logo, a probabilidade do segundo parafuso defeituoso ser encontrado na $2^{\underline{a}}$ retirada é de:

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{99} = \frac{1}{11}.$$

■

6.4 Distribuição Binomial

Os Ensaios de Bernoulli são experimentos em que a probabilidade de um ensaio não depende do outro, como no lançamento de um dado, por exemplo, a obtenção ou não da face 6 voltada para cima. Os resultados possíveis são dois, chamamos de *sucesso* ou *fracasso*, os quais denotamos por p e q, respectivamente. Podemos escrever $q = 1 - p$, pois a soma dos valores de p e q é igual a 1.

No lançamento do dado, obter a face 6 voltada para cima é o sucesso, e não obter tal face é fracasso.

Um ensaio de Bernoulli é realizado n vezes. Para determinarmos a probabilidade de obtermos k sucessos nessas n repetições do experimento, que chamamos de *provas independentes*, procedemos do seguinte modo: como nessas n provas a probabilidade de obtermos k sucessos e $n-k$ fracassos em uma ordem pré-definida, por exemplo, os sucessos "p" nas k primeiras provas e fracasso "q" nas demais, ou seja, temos de k fatores iguais a p e de $n-k$ fatores iguais a q. Com efeito,

$$ppp \cdots pqqq \cdots q = p^k q^{n-k},$$

pois as provas são independentes.

Em outra ordem, a probabilidade seria a mesma, visto que apenas a ordem dos fatores se alteram. Para a escolha de uma ordem, deve-se escolher em quais das n provas ocorrerão os k sucessos.

O número de ordens possíveis é dado por $C_{n,k}$. Logo, a probabilidade de obtermos k sucessos e $n-k$ fracassos em qualquer ordem é dado por

$$C_{n,k} p^k q^{n-k}.$$

Na explanação realizada, demonstramos o Teorema 6.2 a seguir.

Teorema 6.2. *A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p e a de fracasso é q, é igual a*

$$C_{n,k} p^k q^{n-k}.$$

No Exemplo 67, na sequência traz uma aplicação do Teorema 6.2, é aplicado, vejamos.

Exemplo 67. *Em 3 ensaios de Bernoulli, a probabilidade de Sucesso em cada um é $p = 0,7$. Qual a probabilidade de obter exatamente 2 sucessos?*

Solução: Sabemos que a probabilidade de ocorrer sucesso é $p = 0,7 = \dfrac{7}{10}$ e a de fracasso é de $q = 0,3 = \dfrac{3}{10}$. Com efeito,

$$C_{3,2} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{49}{100} \cdot \frac{3}{10} = \frac{441}{1000} = 0,441.$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer exatamente 2 sucessos é de $0,441$.

■

7 Problemas olímpicos e soluções

Conforme análises feitas em provas aplicadas na OBMEP, percebemos que são trabalhados assuntos de Matemática Discreta, como percebemos nos exemplos anteriores. Neste Capítulo, apresentaremos problemas extraídos de provas da OBMEP, do Banco de Questões da OBMEP e de apostila de preparação para esta Olimpíada. O critério utilizado para selecionarmos estas questões foi a relação com os conteúdos de Matemática Discreta, em especial, os abordados neste trabalho.

As soluções das questões abordadas neste capítulo são de autoria própria, e foram construídas de modo que transmita boa compreensão ao leitor. Algumas questões possuem comentários sobre o modo como foram resolvidas, justificando o porquê de não proceder a resolução de outra maneira.

1. **Problema (Questão 1. 1. 2- (a) - Apostila OBMEP)(HEFEZ, 2009).** Mostre, por indução, a validade da seguinte fórmula.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Solução. Mostraremos por Indução Finita que a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Para $n = 1$, a verificação da igualdade é imediata.

Suponhamos por hipótese de indução que a igualdade é válida para $n = k$, $k \geq 1$, ou seja,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

Mostraremos que a igualdade é válida para $k+1$. Temos,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}.$$

Substituindo a hipótese de indução na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\frac{k+1}{2k+3}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

■

2. **Problema (Questão 1. 1. 4 - Apostila OBMEP)(HEFEZ, 2009).** Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9. Sugestão: Considere a sentença aberta:

$$P(n) : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ é divisível por } 9,$$

e mostre, por indução, que ela é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução. Resolveremos esta situação problema, utilizando o Princípio de Indução e a sugestão dada na questão.

É imediato verificar que a afirmação, para $n = 1$, é válida, pois $P(1) = 36$ é divisível por 9.

Suponhamos por hipótese de Indução Finita que $P(k)$ é válida para algum $k \geq 1$. Assim, $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ é divisível por 9. Desse modo, existe um $t \in \mathbb{N}$ que é o valor da divisão daquela expressão por 9. Em outros termos, temos que

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t, t \in \mathbb{N},$$

ainda, $(k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t - k^3$.

Mostraremos que a propriedade é válida para $k+1$, ou seja, $P(k+1)$ é divisível por 9. Temos

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3.$$

Como $(k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t - k^3$, obtemos

$$\begin{aligned} & 9t - k^3 + (k+3)^3 \\ &= 9t - k^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= 9t + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= 9(t + k^2 + 3k + 3). \\ &= 9t'. \end{aligned}$$

A ultima igualdade foi obtida igualando toda a expressão $t + k^2 + 3k + 3$ a um valor $t' \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9t'.$$

Logo, $P(k+1)$ é divisível por 9. Desse modo, pelo Princípio de Indução Finita, $P(n)$ é divisível por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

■

3. **Problema (OBMEP 2012, Questão 9, Primeira Fase, Nível 2)(OBMEP, 2012).** Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na Figura 15. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

   (a) 6

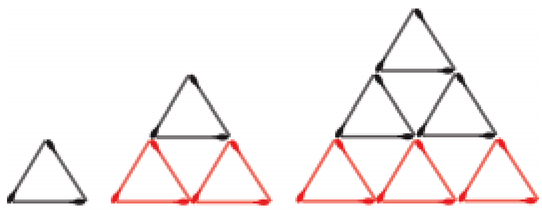
   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

   (e) 10

Figura 15 – OBMEP 2012 - Questão 9



Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2012

Solução: Perceba que a posição ocupada por cada triângulo, é igual ao número de palitos do lado do triângulo. Seja (a_n), a sequência formada pelo número de palitos de fósforo de cada triângulo. Temos,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= a_1 + 3 \cdot 2 \\
a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3n.
\end{aligned}$$

Somando as igualdades na ordem apresentada, segue que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 3 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 3n.$$

Subtraindo $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ dos dois membros da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
a_n &= 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3n \\
&= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots n).
\end{aligned}$$

Como $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$, o termo geral da sequência (a_n) é dado por

$$a_n = \frac{3(1+n)n}{2}.$$

Com a expressão do termo geral, obtemos o número de palitos de fósforo em cada montagem dos triângulos.

Sabemos que um triângulo foi construído com 135 palitos de fósforo. Assim, $a_n = 135$. Daí,

$$\frac{3n^2+3n}{2} = 135$$

que resulta no polinômio de segundo grau $n^2 + n - 90 = 0$, cujas raízes são $n = -10$ e $n = 9$. Note que n deve ser positivo, pois representa a posição dos triângulos. Assim, $n = -10$ não serve e $n = 9$ é solução.

A posição ocupada pelo triângulo é igual ao número de palitos de cada um dos seus lados. Desse modo, o triângulo construído com 135 palitos de fósforo ocupa a nona posição. Logo, concluímos que o lado do triângulo tem 9 palitos. Portanto, a alternativa correta é a (d).

■

4. **Problema, (OBMEP 2014, Questão 8, Primeira Fase, Nível 3)(OBMEP, 2014).** Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?

   (a) 88 cm

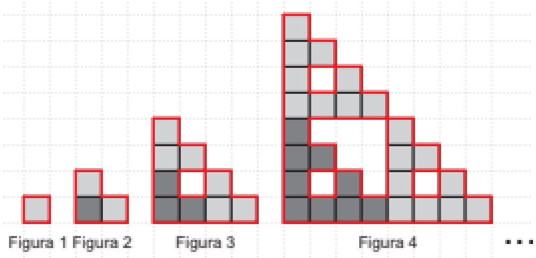
   (b) 164 cm

   (c) 172 cm

   (d) 488 cm

   (e) 492 cm

Figura 16 – OBMEP 2014 - Questão 8



Fonte: Prova da primeira fase da OBMEP 2014

Solução: Para resolvermos este exercício, utilizaremos o raciocínio recursivo. Considere (F_n) a sequência formada pela medida do contorno de cada figura.

A partir da análise da segunda Figura 16, ao unirmos uma a outra, dois lados unidos passam a ser um lado comum na figura. Por exemplo, na segunda figura, temos a união de três quadrados. Perceba que os lados que não estão destacados em vermelho representavam 4 lados antes. Assim, a medida do contorno desta figura é dado pelo produto entre o número de figuras sobrepostas e o número de lados destacados em vermelho, neste caso 4, menos 4. Análise semelhante pode ser feita para o contorno das demais figuras. Desse modo, temos

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 4 \\
F_2 &= 3 \cdot 4 - 4 = 8 \\
F_3 &= 3 \cdot 8 - 4 = 20 \\
F_4 &= 3 \cdot 20 - 4 = 56 \\
F_5 &= 3 \cdot 56 - 4 = 164 \\
F_6 &= 3 \cdot 164 - 4 = 488.
\end{aligned}
$$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede $F_6 = 488$ cm. Temos como alternativa correta a letra (d). Além disso, perceba a conexão desta questão com recorrências matemática, pois

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 4 \\
F_2 &= 3 \cdot F_1 - 4 = 8 \\
F_3 &= 3 \cdot F_2 - 4 = 20 \\
F_4 &= 3 \cdot F_3 - 4 = 56 \\
F_5 &= 3 \cdot F_4 - 4 = 164 \\
&\vdots \\
F_n &= 3 \cdot F_{n-1} - 4.
\end{aligned}
$$

Desse modo, temos a seguinte recorrência $F_n = 3 \cdot F_{n-1} - 4$ e $F_1 = 4$.

■

5. **Problema (OBMEP 2017, Questão 9, Primeira Fase, Nível 2)(OBMEP, 2017).** Um livro, com páginas numeradas em sequência, está dividido em três capítulos. Cada um dos capítulos tem a mesma quantidade de páginas. A primeira página do Capítulo 1 tem o número 1. A soma do número da primeira página do Capítulo 2 com o número da primeira página do Capítulo 3 é 1.052. Qual é o número da primeira página do Capítulo 3?

(a) 699

(b) 700

(c) 701

(d) 702

(e) 703

Solução: A numeração das páginas do livro formam um PA de razão 1. Além disso, cada capítulo do livro tem a mesma quantidade de páginas. Sabendo disso, elaboramos a Tabela 5 a seguir.

Tabela 5 – Estrutura do livro

Livro	Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3
Numeração da primeira página	1	$x+2$	$2x+3$
Numeração da última página	$x+1$	$2x+2$	$3x+3$

Fonte: Elaborada pelo autor

Como a soma do número da primeira página, do Capítulo 2, com o número da primeira página, do Capítulo 3, é 1.052. Daí, obtemos a equação polinomial do primeiro grau assim

$$x + 2 + 2x + 3 = 1052,$$

cuja raiz é $x = 349$.

Sabemos que o número da primeira página, do Capítulo 3, é dada por $2x + 3$. Como $x = 349$, obtemos que o número da primeira página do Capítulo 3 é igual a 701. Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

■

6. **Problema, (OBMEP 2007, Questão 17, Primeira Fase, Nível 3)(OBMEP, 2007).** Paula escreveu os números $1, 2, 3, \ldots$ em uma folha de papel

quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Os números que aparecem ao logo da flecha formam uma sequência $1, 3, 13, 31, \ldots$. Qual é o 30° termo dessa sequência?

(a) 3.301

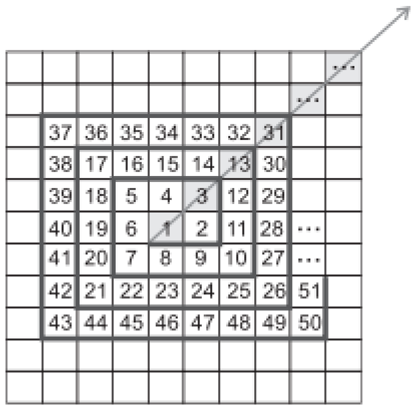
(b) 3.303

(c) 3.307

(d) 3.309

(e) 3.313

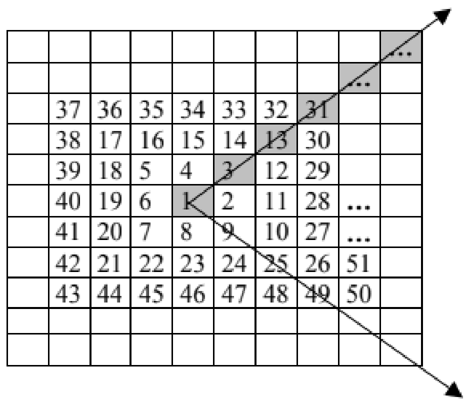
Figura 17 – OBMEP 2007 - Questão 17



Fonte: Prova da primeira fase da OBMEP 2007

Solução: Na Figura 18 a seguir, observe a flecha direcionada para baixo.

Figura 18 – OBMEP 2007 - Questão 17



Fonte: Prova da primeira fase da OBMEP 2007

Note que, a flecha que aponta para baixo passa pelo quadrado dos números ímpares $1^2 = 1, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49$ e assim sucessivamente.

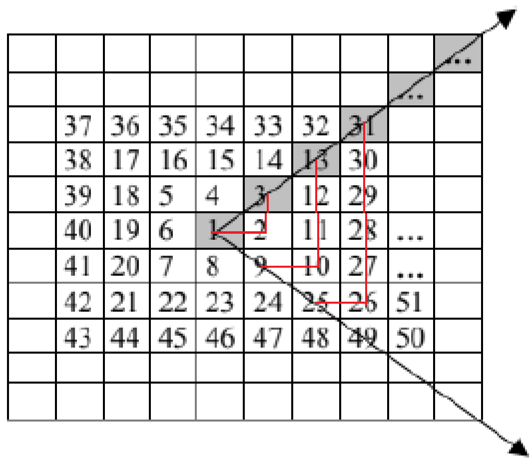
Seja (a_n) a sequência de temos $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 13, a_4 = 31$, ou seja, os números que aparecerem na flecha que aponta para cima pertencem a (a_n). Queremos determinar o a_{30} dessa sequência. Observe que $a_1 = 1$.

Agora, 1^2+ (1 casa para a direita) $= 1 + 1 = 2$. Somando mais uma casa para cima, temos $1^2 + 1 + 1 = 3$, assim $a_2 = 3$.

Para obtermos a_3, fizemos 3^2+ (1 casa para a direita) $= 9 + 1 = 10$. Somando mais 3 casas para cima, $3^2 + 1 + 3 = 13 = a_3$

Em relação a a_4, fizemos 5^2+ (1 casa para a direita) $= 5^2 + 1 = 26$. Somando 5 casas para cima, temos $5^2 + 1 + 5 = 31 = a_4$. Na Figura 19 a seguir, a linha em vermelho ilustra o processo utilizado para obter os termos da sequência.

Figura 19 – OBMEP 2007 - Questão 17



Fonte: Prova da primeira fase da OBMEP 2007 - Adaptada

Procedendo de modo análogo, obtemos os demais valores dos elementos da sequência. Desse modo, temos

$$a_2 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$
$$a_3 = 3^2 + 1 + 3 = 13$$
$$a_4 = 5^2 + 1 + 5$$
$$a_5 = 7^2 + 1 + 7 \text{ e assim sucessivamente.}$$

Perceba que

$$
\begin{aligned}
a_2 &= (1^\circ \text{ número ímpar})^2 + 1 + (\ 1^\circ \text{ número ímpar }) \\
a_3 &= (2^\circ \text{ número ímpar})^2 + 1 + (\ 2^\circ \text{ número ímpar }) \\
a_4 &= (3^\circ \text{ número ímpar})^2 + 1 + (\ 3^\circ \text{ número ímpar }) \\
&\ \vdots \\
a_n &= ((n-1)\text{-ésimo número ímpar})^2 + 1 + ((n-1)\text{-ésimo número ímpar}).
\end{aligned}
$$

Considere (b_n) a sequência de números positivos. Usando a fórmula do termo geral da PA, determinamos o 29º número ímpar $b_{29} = 1 + 28 \cdot 2 = 57$.

Caso queiramos obter o $(n-1)$-ésimo número ímpar, utilizamos, ainda, a fórmula do termo geral da PA. Desse modo,

$$b_{n-1} = 1 + (n-1-1)2 = 2n - 3.$$

Agora, calcularemos o 30º termo da sequência (a_n).

$$
\begin{aligned}
a_{30} &= (\ 29^{\underline{o}} \text{ número ímpar })^2 + 1 + (\ 29^{\underline{o}} \text{ número ímpar }) \\
&= 57^2 + 1 + 57 \\
&= 3.249 + 1 + 57 \\
&= 3.307.
\end{aligned}
$$

Logo, o 30º termo da sequência é 3.307. Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

■

7. **Problema (Banco de Questões 2015 da OBMEP, Questão 6, Nível 3)(OBMEP, 2015).** Termos esquecidos da P.A. Uma progressão aritmética, costumeiramente chamada de P.A., é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \ldots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i.

(a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

(b) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= 207 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= 553. \end{aligned}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

Solução: Faremos inicialmente a resolução do item (a). Sabemos que $a_1 = 2$, a diferença comum é igual a 3, a razão desta progressão aritmética é $r = 3$. Usando a fórmula do termo geral da PA, temos

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + 3r \\ &= 2 + 3 \cdot 3 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Logo, o quarto termo da PA é igual a 11.

Agora resolveremos o item (b). Temos $a_4+a_7+a_{10} = 207$. Pela fórmula do termo geral da PA, cada termo do primeiro membro da igualdade pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + 3r \\ a_7 &= a_1 + 6r \\ a_{10} &= a_1 + 9r. \end{aligned}$$

Somando as igualdades na ordem apresentada, obtemos $a_4+a_7+a_{10} = 3a_1+18r$. Desse modo, $3a_1 + 18r = 207$, ou ainda, $a_1 + 6r = 69$. Sabemos ainda que, $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 553$, pela fórmula do termo geral, temos

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4r \\ a_6 &= a_1 + 5r \\ a_7 &= a_1 + 6r \\ a_8 &= a_1 + 7r \\ a_9 &= a_1 + 8r \\ a_{10} &= a_1 + 9r \\ a_{11} &= a_1 + 10r. \end{aligned}$$

Somando as igualdade na ordem que são expostas, obtemos

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 7a_1 + 49r.$$

Assim, $7a_1 + 49r = 553$.

A partir das igualdades $a_1 + 6r = 69$ e $7a_1 + 49r = 553$, formamos o sistema de equações do primeiro grau.

$$\begin{cases} a_1 + 6r = 69 \\ 7a_1 + 49r = 553. \end{cases}$$

Neste sistema, as incógnitas são a_1 e r, ou seja, o primeiro termo e a razão da PA. Resolvendo-o, encontramos $a_1 = 9$ e $r = 10$. Como queremos obter a_{11}, procedemos do seguinte modo, $a_{11} = a_1 + 10r$. Substituindo os valores de $a_1 = 9$ e $r = 10$, obtemos $a_{11} = 109$. Portanto, o décimo primeiro termo da PA é 109.

■

8. **Problema (Banco de Questões 2020, OBMEP, Nível 3, Questão 13)(ASSIS; FEITOSA, 2020).** As progressões geométricas $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ e $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ possuem a mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Encontre o valor de a_3.

Solução: Sabemos que as progressões geométricas possuem a mesma razão, a qual chamaremos de q. Como $a_{15} = b_{11}$, pela fórmula do termo geral da PG, temos

$$a_{15} = a_1 q^{14} \text{ e } b_{11} = b_1 q^{10}.$$

Desse modo, $a_1 q^{14} = b_1 q^{10}$. Dividindo esta igualdade por q^{10} e substituindo $a_1 = 27$ e $b_1 = 99$, obtemos, $27q^4 = 99$, ou ainda, $q^4 = \dfrac{33}{9}$.

Agora determinaremos o valor de a_9. Com efeito,

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 q^8 \\ &= a_1 \left(q^4\right)^2 \\ &= 27 \left(\frac{33}{9}\right)^2 \\ &= 363. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de $a_9 = 363$.

■

9. **Problema (OBMEP 2016, questão 6, primeira fase, nível 3)(OBMEP, 2016).** A figura mostra os cartões com as respostas de Ana, Beatriz e Cecília para uma prova de múltipla escolha com cinco questões de alternativas A, B, C, D e E. Ana acertou quatro, Beatriz acertou uma e Cecília acertou três. Qual foi a questão que Ana errou?

(*a*) 1

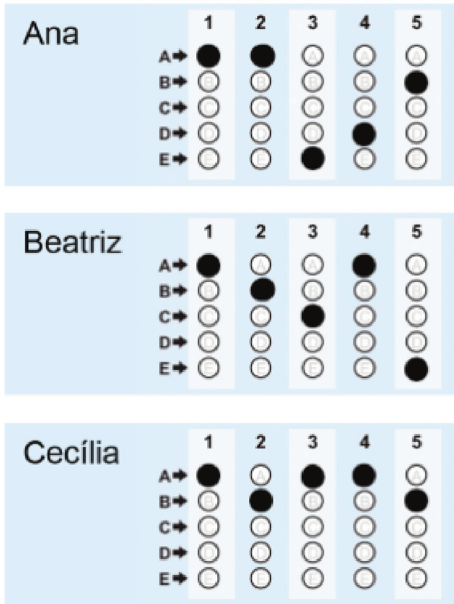
(*b*) 2

(*c*) 3

(*d*) 4

(*e*) 5

Figura 20 – OBMEP 2016 - Questão 6



Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2016

Solução: Suponha que a questão que Ana errou foi a Questão 1, e acertou as demais. Ao comparar o cartão resposta de Ana com o de Beatriz, esta não teria acertado nenhuma questão, mas sabemos que Beatriz acertou uma questão.

Logo, a Questão 1 foi uma das quatro questões que Ana acertou, consequentemente foi a questão que todas acertaram, pois todas marcaram a letra A.

Como Beatriz só acertou uma questão, então ela errou as questões 2, 3, 4 e 5. Enquanto Cecília marcou as mesmas respostas que Beatriz para as questões 2 e 4 que são erradas. Assim, Cecília acertou as questões 1, 3 e 5.

Ao comparar o cartão resposta de Cecília com o cartão resposta de Ana, percebemos que a resposta da questão 3 de Ana diverge da resposta de Cecília que está correta. Logo a questão que Ana errou foi a 3. Portanto, a alternativa correta é a letra (*c*).

■

Este problema não possui uma relação direta com o conteúdo de análise combinatória, porém pensamos no fato de que nem todo problema de combinatória precisa de uma fórmula para determinarmos a sua solução.

10. **Problema (OBMEP 2016, questão 18, primeira fase, nível 3)(OBMEP, 2016).** O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

(*a*) 24

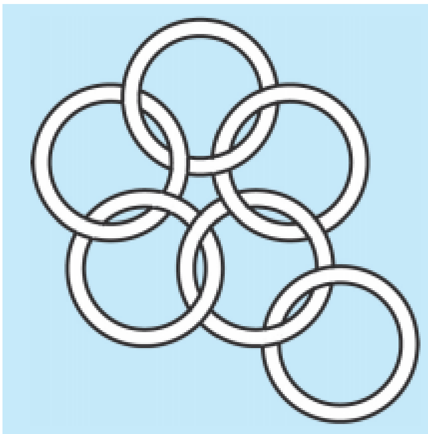
(*b*) 36

(*c*) 48

(*d*) 60

(*e*) 72

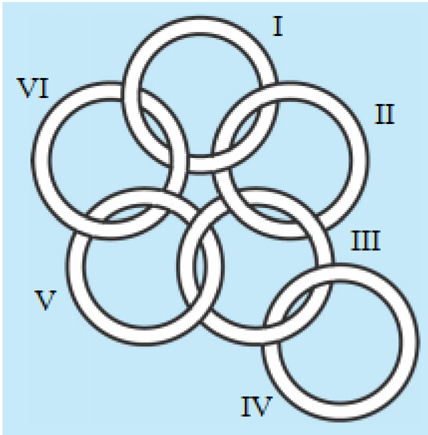
Figura 21 – OBMEP 2016 - Questão 18



Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2016

Solução: Para resolvermos o problema, iniciaremos enumerando os anéis conforme ilustrado na Figura 22 a seguir.

Figura 22 – OBMEP 2016 - Questão 18



Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2016 - Adaptada.

Dividiremos esta solução em dois casos.

1º Caso. Iniciamos a pintura pelo anel II, teremos 3 possibilidades para o colorir. Para o círculo I, temos 2 possibilidades, pois o anel I está entrelaçado com o anel II. Considere o anel V colorido com a cor diferente da cor do anel I e do anel II, teremos 1 possibilidade. Observe que o anel VI está entrelaçado com o círculo I e V. Logo possui apenas 1 possibilidade de ser colorido. O anel III está entrelaçado com o anel II e V, possuindo 1 possibilidade para ser colorido. E o anel IV por só está entrelaçado com o anel III, possui 2 possibilidades para ser colorido. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ maneiras de colorir o símbolo.

2º Caso: Iniciando a pintura pelo anel II, teremos 3 possibilidades para o colorir. Para o círculo I, temos 2 possibilidades, pois o anel I está entrelaçado com o anel II. Agora, considere o anel V colorido com a cor do círculo I ou com a cor do anel II, teremos 2 possibilidades para colorir o anel V. Podemos prosseguir de duas maneiras:

- Supondo que o anel V tenha sido colorido com a mesma cor do anel II, temos 2 possibilidades para colorir o anel III, pois este está entrelaçado com o anel III e V. Como o anel VI está entrelaçado com o anel I e V, podemos colorir o anel VI de 1 maneira. O anel IV está entrelaçado apenas com anel III, assim temos 2 possibilidades de o colorir. Logo, temos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ maneiras de colorir o símbolo.
- Supondo que o anel V tenha a mesma cor do anel I, teríamos 2 possibilidades para colori-lo, para o anel VI 2 possibilidades pois está entrelaçado com os anéis I e V, 1 possibilidade para o anel III por está entrelaçado com os anéis

V e II e 2 possibilidades para o anel IV, pois está entrelaçado com o anel III. Logo, temos também $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ maneiras de colorir o símbolo.

O número de maneiras de colorir o símbolo no primeiro caso são diferentes das obtidas no segundo caso. Logo, esses casos são disjuntos, pelo princípio aditivo temos $12 + 48 = 60$ maneiras de colorir o símbolo.

Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

$\blacksquare$

11. **Problema (OBMEP 2016, Questão 19, primeira fase, Nível 3)(OBMEP, 2016).** Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele que fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

(a) 110

(b) 120

(c) 200

(d) 201

(e) 210

Figura 23 – OBMEP 2016 - Questão 19

Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2016

Solução: Para determinarmos o número de maneiras que Bruno pode fazer esse pacote de figurinhas, analisemos como podemos formar tais pacotes.

- Pode ter o pacote de figurinhas com 1, 2, 3, 4, 5 ou nenhuma figurinha com a bandeira da Alemanha, ou seja, 6 possibilidades;

- Pode ter o pacote de figurinhas com 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou nenhuma figurinha com a bandeira do Brasil, ou seja, 7 possibilidades;
- Pode ter o pacote de figurinhas com 1, 2, 3, 4 ou nenhuma figurinha com a bandeira da Colômbia, ou seja, 5 possibilidades.

  Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ maneiras.

  Mas, esse valor ainda não é a solução do problema, pois devemos retirar o número de pacotes contados que não satisfaz ao problema, que são:
- Pacote com nenhuma figurinha: 1 pacote.
- Pacotes com apenas uma figurinha:

  Pode ter um pacote com uma figurinha com a bandeira da Alemanha (A);

  Um pacote com uma figurinha com a bandeira do Brasil (B);

  Um pacote com uma figurinha com a bandeira da Colômbia (C).

  Assim, temos 3 pacotes com uma figurinha.
- Pacotes com apenas duas figurinhas.

Podemos ter um pacote com duas figurinhas com a bandeira da Alemanha (AA);

Um pacote com duas figurinhas com a bandeira do Brasil (BB);

Um pacote com duas figurinhas com a bandeira da Colômbia (CC);

Um pacote com duas figurinhas: uma com a bandeira da Alemanha e outra com a bandeira do Brasil (AB);

Um pacote com duas figurinhas: uma com a bandeira da Alemanha e outra com a bandeira do Colômbia (AC);

Um pacote com duas figurinhas: uma com a bandeira da Brasil e outra com a bandeira do Colômbia (BC);

Assim, temos 6 pacotes com duas figurinhas.

Logo, o número de maneiras que Bruno pode fazer o pacote com essas figurinha é de $210 - 1 - 3 - 6 = 200$ maneiras.

Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

■

Poderíamos nos interrogar se este problema 11 seria resolvido por combinações completas, a resposta para isso é não, pois a quantidade de bandeiras da Alemanha, do Brasil e da Colômbia são 5, 6 e 4, respectivamente. Ao formar pacotes com 5 figurinhas, utilizando o raciocínio de combinação completa, consideramos

x_1, x_2 e x_3 o número de bandeiras da Alemanha, do Brasil e da Colômbia, respectivamente. Como podemos modelar problemas de combinação completa por uma equação diofantina, com soluções inteiras não-negativas, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

Uma solução para esta equação é a tripla ordenada $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5)$. Assim, $x_3 = 5$, mas, x_3 representa o número de bandeiras da Colômbia, e o número máximo de bandeiras que temos disponíveis para esse país é igual a 4. Logo, não conseguimos resolver este problema aplicando combinação com repetição.

12. **Problema, (OBMEP 2015, questão 6, segunda fase, Nível 1)(OBMEP, 2015).** Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

Figura 24 – OBMEP 2016 - Questão 6

Fonte: Prova da 2ª fase da OBMEP 2015

(a) Quantas são as senhas que começam com 20152015?

(b) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?

(c) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Solução: Iniciaremos pelo item (a). Sabe- se que a senha que Pedro cria tem 11 algarismos, determinaremos quantas senhas começam com 20152015. Observe que dos 11 algarismos que formam a senha já têm-se 8 predefinidos. Resta determinarmos de quantas maneiras podemos completar os 3 algarismos restantes. Como podem ser algarismos de 0 a 9, pelo Princípio Multiplicativo temos,

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.$$

Logo, podemos formar 1.000 senhas que começam com 20152015.

Agora faremos o item (b). Sabe-se que os algarismos utilizados são de 0 a 9.

Podemos ter dois tipos de senhas e são dos seguintes modo:

- Os primeiros algarismos são 0123456789 nessa ordem, e para a escolha do último algarismo temos 10 maneiras. O que nos dá 10 senhas.
- Os últimos algarismos são 0123456789 nessa ordem, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 10 maneiras. O que nos dá 10 senhas.

Portanto, pelo princípio aditivo o total de senhas que contém o bloco 0123456789 é de 20 senhas.

Faremos agora o Item (c), temos como exemplos de senhas possíveis 80123456789 e 01234456789. Enquanto senha não possível, temos 01234456789.

Podemos determinar o número de senhas possíveis nas condições do problema do seguinte modo, entre os números 0123456789, temos 11 espaços que podem ser preenchidos com algarismos de 0 a 9, assim pelo Princípio Multiplicativo, teremos $11 \cdot 10 = 110$ senhas.

Ao fazemos a contagem de senhas, nesse caso,foram feitas contagem repetidas, a exemplo de 01123456789, pois o 1 pode ser colocado a esquerda ou a direita do 1 já existente. O mesmo ocorre com os demais algarismos. O que nos dá um total de 10 senhas repetidas.

Logo, o numero de senhas possíveis é de $110 - 10 = 100$ senhas.

■

13. **Problema, (OBMEP 2014, questão 10, primeira fase, Nível 3)(OBMEP, 2014).** Gustavo possui certa quantidade de moedas de 1, 10, 25 e 50 centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente 1 real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?

    (a) 86 centavos

    (b) 1 real e 14 centavos

    (c) 1 real e 19 centavos

    (d) 1 real e 24 centavos

    (e) 1 real e 79 centavos

    Solução: A condição do problema é que possamos combinar as moedas de $1, 10, 25$ e 50 centavos de modo que não seja obtido 1 real exato.

Gustavo possui apenas uma moeda de 50 centavos, pois se tivermos duas ou mais moedas de 50 centavos poderia formar com duas delas um real exato; Apenas uma moeda de 25, pois se tivesse duas ou mais moedas de 25 centavos poderia combiná-las do seguinte modo: 2 moedas de 25 centavos e a moeda de 50 centavos, e formaria um real exato;

Ele possui apenas 4 moedas de 10 centavos, pois se possuísse 5 ou mais moedas de 10 centavos formaria um real exato com 5 moedas de 10 centavos e a moeda de 50 centavos.

Possui apenas 4 moedas de um centavo, pois se tivesse 5 ou mais moedas de um centavo, poderia formar um real fazendo a seguinte combinação de moedas: Uma moeda de 50 centavos, uma moeda de 25 centavos, duas moedas 10 centavos e cinco moedas de 1 centavos.

Logo, Gustavo possui 1 moeda de 50 centavos, 1 moeda de 25 centavos, 4 moedas de 10 centavos e 4 moedas de 1 centavo. Totalizando 1 real e 19 centavos.

Portanto, temos como alternativa correta é a alternativa (c).

■

Este problema é importante porque para resolvê-lo é necessário mantermos uma postura e divisão de etapas, que é um processo utilizado para solucionar problemas de análise combinatória

14. **Problema (OBMEP 2019, questão 3, segunda fase, Nível 3)(OBMEP, 2019a).** As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

    (a) Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?

    (b) Qual é a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas?

    (c) Qual é a probabilidade de que cada menina receba uma bola?

    Solução: Item (a). Calculando o número total de possibilidades das amigas realizarem o jogo, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

    $$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81 \text{ maneiras de realizarem o jogo.}$$

    Tem-se que 81 é número de elementos do espaço amostral, ou seja, o número de casos para o cálculo da probabilidade em questão. Ana receberá a bola de suas amigas, Beatriz, Cláudia e Diana, assim o número de casos possíveis é de 3. Logo pela definição de probabilidade, temos que:

    $$\frac{3}{81} = \frac{1}{27} \text{ é a probabilidade de Ana receber as três bolas.}$$

Item (b). A probabilidade de Ana receber a bola de cada uma das suas amigas é $\frac{1}{3}$ e a de probabilidade de não receber é de $\frac{2}{3}$. Dividiremos a resolução em 3 casos. *Primeiro caso.* Ana recebe a bola de Beatriz e de Cláudia, e não recebe a bola de Diana. Assim a probabilidade disso ocorrer é de:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

Segundo Caso. Ana recebe a bola de Beatriz e de Diana, e não recebe de Cláudia. A probabilidade desse fato ocorrer é igual ao do primeiro caso.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

Terceiro Caso. Ana recebe a bola de Cláudia e de Diana, e não recebe de Beatriz. A probabilidade é calculada de modo análogo aos casos anteriores.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

Portanto, a probabilidade de Ana receber exatamente duas bolas é igual a soma das probabilidades dos três casos, pois representa a probabilidade da união de eventos. Temos

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Item (c). Sabemos do item (a) que o número de possibilidades das amigas trocarem as bolas entre si é igual a 81.

Analisemos esse problema a partir de dois casos.

Primeiro Caso. Comecemos por Ana, ela tem 3 possibilidades de passar a bola para uma de suas amigas. Admitindo-se que Beatriz recebeu a bola de Ana e também passou sua bola para Ana, assim ela teve 1 possibilidade. Agora Cláudia e Diana trocarão entre si seus objetos, ou seja, elas terão uma possibilidade de passar a bola. Temos

$$3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \text{ possibilidades.}$$

Segundo Caso. Iniciemos por Ana, ela tem 3 possibilidades para passar a bola para as amiga. Vamos admitir que Beatriz recebeu a bola de Ana, e Beatriz não passou a sua para Ana. Assim, Beatriz tem 2 possibilidades para passar sua bola, que é para Cláudia ou para Diana. Quem receber a bola de Beatriz terá apenas 1 possibilidade para passar a sua, para não ocorrer o risco de alguém ficar sem participar. Suponhamos que Cláudia recebeu a bola de Beatriz, então Cláudia passará a bola para Diana. E, por fim, Ana recebe de Diana a bola, pois Diana tinha apenas essa única possibilidade. Logo, teremos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6 \text{ possibilidades.}$$

Assim, o número de casos favoráveis é igual a $3 + 6 = 9$.

Portanto, a probabilidade de que cada uma das meninas recebam uma bola é de:

$$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

■

15. **Problema (OBMEP 2018, questão 5, segunda fase, Nível 3)(OBMEP, 2018)** Em uma caixa há 6 barbantes idênticos. Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó. O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres.

(a) Quantos nós são feitos até o final do processo?

(b) Qual a probabilidade de que, na primeira etapa, sejam amarradas as duas pontas de um mesmo barbante?

(c) Qual é a probabilidade de que, na última etapa, sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais?

(d) Qual é a probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço?

Figura 25 – OBMEP 2018 - Questão 5

Fonte: Prova da 2ª fase da OBMEP 2018

Solução: Item (a). Observe que temos um total de 6 barbantes idênticos, inicialmente temos 12 extremidades livres. A partir do momento em que é dado o primeiro nó entre dois barbantes, duas extremidades são diminuídas, com o segundo nó, unido mais um barbante, diminui-se mais duas extremidades, seguindo o raciocínio até o final obtemos um total de 6 nós.

Item (b). Cada etapa é realizada unindo duas extremidades do barbante. Desse modo, para escolha da primeira extremidade, temos 12 possibilidades disponíveis e a probabilidade de ser escolhida é certa, ou seja, $12/12 = 1$.

Para concluirmos a etapa, temos que formar o nó, ou seja, deve ser escolhida a extremidade oposta do barbante, neste caso temos apenas 1 caso possível dentre 11 disponíveis, visto que uma extremidade já foi utilizada. Portanto, a probabilidade de na primeira etapa serem amarradas as duas pontas de um mesmo barbante é de

$$1 \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}.$$

Item (c). Os nós podem ser dados em quaisquer das extremidades dos barbante, assim o número de casos possíveis para serem dado é de:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Para obtermos o número de casos favoráveis, observe que para a escolha do primeiro barbante, teremos 6 possibilidades, como cada barbante tem duas extremidades, tem-se 2 possibilidades de escolha para cada um. Escolhido o barbante, teremos 10 possibilidades para escolha da extremidade de um outro barbante para o primeiro nó, depois para segundo nó teremos 9 possibilidades de escolhas de extremidades, para o terceiro nó, 8 possibilidades de extremidades e, assim, sucessivamente. Logo, o número de casos favoráveis é de:

$$6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

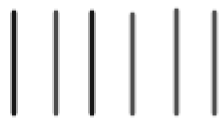
Portanto, a probabilidade de que sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais é de

$$\frac{6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot} = \frac{1}{11}.$$

Item (d). Vamos determinar o número total de possibilidades para a escolha das extremidades que serão dadas o nó sabemos que tem-se um total de 12 pontas dos barbantes. Para a escolha da primeira extremidades, temos 12 possibilidades, para a segunda escolha, 11 possibilidades, e assim sucessivamente. Logo, pelo Princípio fundamental da Contagem, temos $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades, que são o número de casos possíveis.

Agora, determinaremos o número de casos favoráveis para que os barbantes estejam amarrados em um único laço. Para a escolha da primeira extremidade temos 12 possibilidades de escolhas. A figura a seguir ilustra os barbantes.

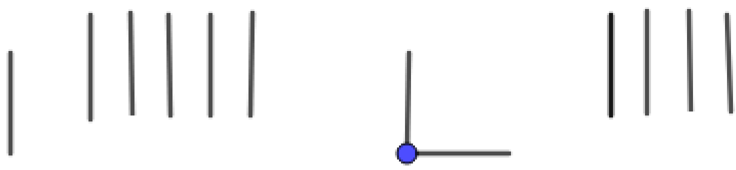
Figura 26 – Barbantes



Fonte: Autoral

Escolhido o primeiro barbante para ser dado o nó não pode ser na outra extremidade do barbante escolhido, assim para segunda escolha teremos 10 possibilidades e será dado o primeiro nó, que terá 10 extremidades possíveis. Os pontos em azul representam os nós.

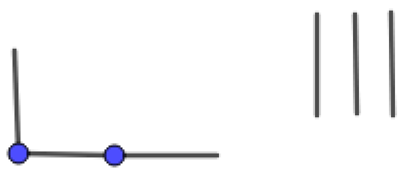
Figura 27 – Primeiro nó



Fonte: Autoral

Para a terceira escolha de extremidades dos barbantes, teremos 8 possibilidades de escolha e será dado o segundo nó, isso resultará em 8 extremidades disponíveis.

Figura 28 – Segundo nó



Fonte: Autoral

Prosseguindo de modo análogo, teremos:

$$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \text{ casos favoráveis.}$$

Portanto, a probabilidade de que os barbantes sejam todos amarrados em um único laço é de:

$$\frac{12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{256}{693}.$$

■

16. **Problema, (OBMEP 2012, questão 5, segunda fase, Nível 1)(OBMEP, 2012).** Vítor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

Figura 29 – OBMEP 2012 - Questão 5

Fonte: Prova da 1ª fase da OBMEP 2012

(a) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

(b) De quantas maneiras Vítor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

(c) De quantas maneiras Vítor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução: As possibilidades de escolher dois cartões azuis, cujas somas são iguais a 9, são 1 e 8, 2 e 7, 3 e 6, e 4 e 5. Logo, Vítor pode escolher dois cartões azuis, cujas somas são iguais a 9 de 4 maneiras.

Agora, resolveremos o item (b). Faremos o estudo de dois casos.

1° Caso: Os dois cartões são da mesma cor.

Pelo item a) em que os dois cartões são azuis, tivemos 4 maneiras de escolha. Assim, se os dois cartões forem da mesma cor, brancos ou verdes, tem-se 4 maneiras de escolha para cada cor. Logo, quando os cartões são da mesma cor, Vítor possui $3 \cdot 4 = 12$ maneiras de escolha.

2° Caso: Os dois cartões são de cores diferentes.

Para a escolha da cor dos cartões, temos 2 maneiras. Escolhida as cores, temos 3 modos: Azul e Branco; Azul e Verde; Branco e Verde. Para a soma ser igual a 9 tem - se 4 possibilidades. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ maneiras.

Portanto, Vítor possui $12 + 24 = 36$ maneiras para a escolha de cartões de cores diferentes cujas somas são iguais a 9.

Faremos agora a resolução do item(c). Dividiremos em três casos:

1° Caso: Os números são diferentes.

Os números dos cartões podem ser organizados em três grupos: 1, 2 e 6; 1, 3 e 5; 2, 3 e 4.

Analisando com relação a cor de cada número, para o primeiro, temos 3 possibilidades de cor, para o segundo, 3 possibilidades e pra o terceiro também temos 3 possibilidades. Como os números podem ser organizados em 3 grupos, pelo Princípio Multiplicativo, temos $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ maneiras.

2° Caso: Dois números são iguais.

Podemos organizar os números em três grupos 1, 1 e 7; 2, 2 e 5; e 4, 4 e 1. O número de escolha de dois cartões com os mesmos números e de cores diferentes é igual a 3. O número de possibilidades de escolha do número com qualquer uma das cores é igual a 3. Como os números foram organizados em 3 grupos, assim pelo Princípio Multiplicativo, temos $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ maneiras.

3° Caso: Os números dos três cartões são iguais.

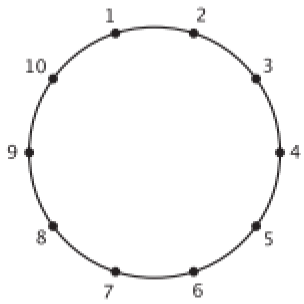
Temos apenas uma possibilidade formada pelo número 3, ou seja, 3, 3 e 3. Isso implica que os três cartões são de cores diferentes.

Portanto, Vítor possui $81 + 27 + 1 = 109$ maneiras de escolher três cartões, cujas somas são iguais a 9.

■

17. **Problema (OBMEP 2011, questão 5, segunda fase, Nível 3)(OBMEP, 2011).** Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da fi gura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

Figura 30 – OBMEP 2011 - Questão 5

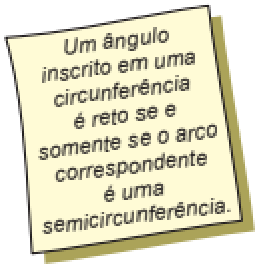


Fonte: Prova da 2ª fase da OBMEP 2011

(a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

(b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

Figura 31 – OBMEP 2011 - Questão 5 - b)



Fonte: Prova da 2ª fase da OBMEP 2011

(c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

Solução: Iniciaremos pelo item (a). Considere S o espaço amostral formado pelas duas bolas retiradas da caixa, o número de elemento do espaço amostral é dado pelo número de possibilidades dessas duas bola saírem, ou seja, $n(S) = 10 \cdot 9 = 90$.

Agora, os pares de pontos, a seguir, formam segmentos que correspondem ao diâmetro da circunferência, pois os mesmos formam dois arcos, cuja medida é $180°$. Os pares de pontos são: 1 e 6; 6 e 1; 7 e 2; 2 e 7; 3 e 8; 8 e 3; 4 e 9; 9 e 4; 5 e 10 ; 10 e 5.

Chamando de A o evento formado por esses pares de elementos, assim o número de elementos do evento A é $n(A) = 10$. Daí, a probabilidade de ocorrer o evento

A é de

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Agora resolveremos o item (b). Seja S_1 o espaço amostral formado pelas três bolas retiradas da caixa, que representam vértices de um triângulo. O número de elementos de S_1 é dado por:

$$n(S_1) = C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Agora, considere que o evento B formado por trios de bolas retiradas e marcadas na circunferência representa vértices de triângulos retângulos. Sabemos que um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência. Desse modo, para o triângulo ser retângulo a hipotenusa é formada por dois pontos que são extremidades do diâmetro, teremos os seguintes pares: 1 e 6; 2 e 7; 3 e 8; 4 e 9; 5 e 10. Para cada um deses diâmetros, obtemos 8 triângulos retângulos. Assim, o número de elemento do evento B é igual a $n(B) = 5 \cdot 8 = 40$ triângulos retângulos.

Assim, a probabilidade de ocorrer o evento B é dada por

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S_1)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

Logo, a probabilidade de que os três pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo é de $\frac{1}{3}$.

Resolveremos o item (c). Para que os pontos formem um retângulo, 3 pontos devem formar um triângulo retângulo. Vimos no item (b) que a probabilidade de 3 pontos formarem um triângulo retângulo é de $\frac{1}{3}$. Ao formar um triângulo retângulo usa-se, 3 dos 10 pontos dispostos na circunferência, restando 7 pontos, destes apenas um é possível para que se possa formar o retângulo, que é o ponto pertencente ao arco que subtende o ângulo inscrito, e que traçando um segmento desse ponto até o vértice do ângulo inscrito tem-se o diâmetro da circunferência. Assim, a probabilidade de os quatro pontos correspondentes as bolas retiradas da caixa sejam de um retângulo é de:

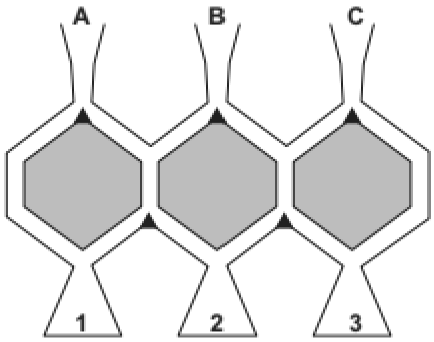
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

■

18. **Problema (OBMEP 2008, questão 5, segunda fase, Nível 3)(OBMEP, 2008).** No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou

3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.

Figura 32 – OBMEP 2008 - Questão 5



Fonte: Prova da 2ª fase da OBMEP 2008

(a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

(b) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

(c) Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual é a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

Solução: Uma bolinha colocada na entrada C pode parar na caixa 2 ou na caixa 3.

Se a bolinha for colocada na entrada B, a bolinha pode parar na caixa 1, na caixa 2 ou na caixa 3.

Resolveremos o item (b). A bolinha depositada na entrada A, ao atingir o primeiro ponto marcado, a chance de a bolinha seguir o percurso em direção a caixa 2 é de $\frac{1}{2}$. A bolinha seguindo o percurso, ao atingir o segundo ponto, a chance de seguir direção para a caixa 2 é também de $\frac{1}{2}$. Daí, a probabilidade da bolinha colocada na entrada A ir parar na caixa 2 é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Se a bolinha for depositada na entrada B, ao atingir o primeiro ponto e seguir pela esquerda tem chance de $\frac{1}{2}$. Ao atingir o segundo ponto e seguir em direção a caixa dois tem chance de $\frac{1}{2}$. Logo, como são eventos independentes temos $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Agora, se a bolinha, ao atingir o primeiro ponto, seguir pela direita tem chance de $\frac{1}{2}$. Ao atingir o segundo ponto e seguir em direção a caixa dois tem chance de $\frac{1}{2}$. Aqui os eventos também são independentes temos $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Assim, a probabilidade da bolinha depositada na entrada B parar na caixa 2 é de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
Agora, resolveremos o item (c). Faremos a análise de três casos.

1° Caso: Ocorrer conforme a Tabela 6 a seguir.

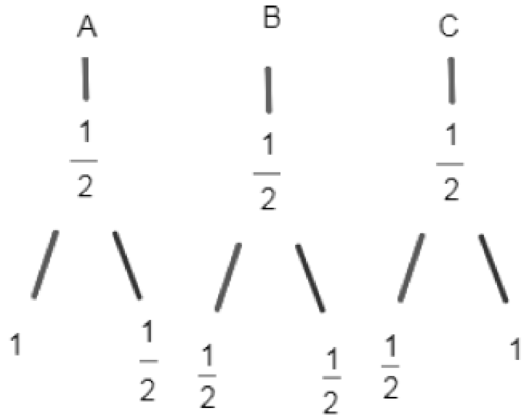
Tabela 6 – 1º Caso

Entrada da bolinha	A	B	C
Caixa em que a bolinha para	1	2	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Representamos na árvore a seguir as possibilidades deste primeiro caso.

Figura 33 – Primeiro caso



Fonte: Elaborada pelo autor

A chance da bolinha depositada na entrada A para na caixa 1 é de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

A bolinha colada na entrada B e para na caixa 2. A probabilidade dessa situação ocorre é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A probabilidade da bolinha colada na entrada B entrar na caixa 2, é:

$$\frac{1}{2}\text{¡}2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A chance da bolinha colocada na entrada C entrar na caixa 3, é de:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o primeiro caso é de

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}.$$

2° Caso: Ocorrer conforme a Tabela 7 seguir.

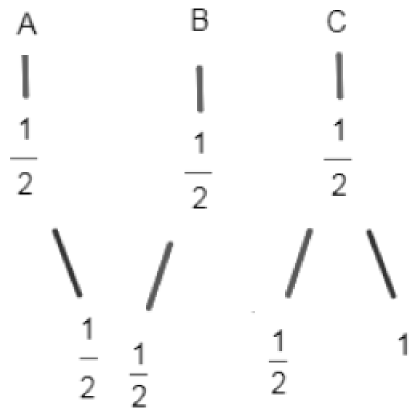
Tabela 7 – 2º Caso

Entrada da bolinha é	A	B	C
Caixa em que a bolinha para	2	1	3

Fonte: Elaborada pelo autor

Na árvore a seguir, temos as possibilidades do segundo caso.

Figura 34 – Segundo caso



Fonte: Elabora pelo autor

A bolinha colocada na entrada A ir para a caixa 2. A chance dessa situação ocorrer é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A bolinha é colocada na entrada B ir para a caixa 1. A chance disso ocorrer é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A bolinha é colocada na entrada C ir para a caixa 3. A chance disso ocorrer é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Logo, a probabilidade de ocorrer o segundo caso é de

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

3° Caso: Ocorrer conforme a Tabela 8 a seguir.

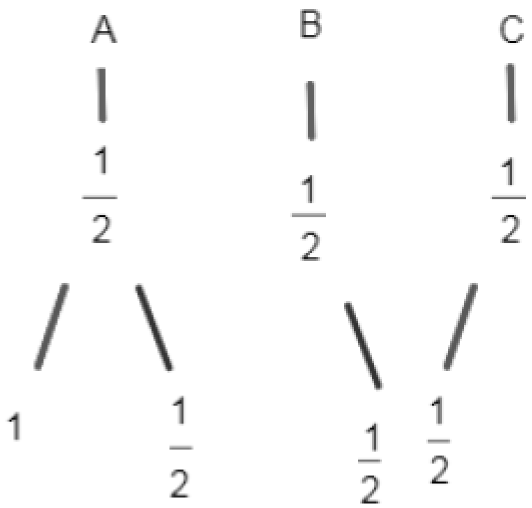
Tabela 8 – 3º Caso

Entrada da bolinha é	A	B	C
Caixa em que a bolinha para	1	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, temos a árvore de possibilidades do terceiro caso.

Figura 35 – Terceiro caso



Fonte: Elaborada pelo autor

A bolinha é colocada na entrada A e entra na caixa 1. A chance disso ocorrer é de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

A bolinha é colocada na entrada B e entra na caixa 3. A chance disso ocorrer é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A bolinha é colocada na entrada C e para na caixa 2. A chance disso ocorrer é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Daí, a probabilidade de ocorrer o terceiro caso é de

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$

Portanto, colada uma bolinha em cada entrada, a probabilidade de no final haver uma bolinha em cada caixa é de

$$\frac{9}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}.$$

$\blacksquare$

8 Conclusões

O nosso trabalho é relevante para professores e alunos da Educação Básica, quando envolvidos na OBMEP ou não. Entendemos que a aprendizagem vai além dos conteúdos ministrados em sala de aula, e que existe a necessidade de melhorar a qualidade da educação pública do nosso país. Para o ensino da Matemática, dentre os programas voltados para melhorar a qualidade do ensino e aprendizado dessa disciplina, temos a OBMEP.

A OBMEP, ao longo de seus 15 anos de existências, busca estimular e promover o estudo da Matemática, o que contribui para a melhoria da educação básica do Brasil. Este evento valoriza o profissional da educação, estimulando a participação de professores em formação continuada.

Nosso trabalho iniciou-se relatando sobre a OBMEP por meio de um breve histórico, desenvolvemos seções que abordaram os programas que apoiam alunos antes da realização desse evento, a exemplo dos Clubes de Matemática. Existem também programas que motiva a participação do aluno na Olimpíada, proporcionando ao aluno medalhista apoio financeiro para que possa desenvolver sua vida acadêmica, a exemplo do PIC e PICME. Vimos ainda, programa que incentiva o aperfeiçoamento de professores de Matemática como o OBMEP na Escola.

O OBMEP na Escola teve a primeira prova de habilitação para professores no ano de 2014, esse programa tem qualificado professores de Matemática e também alunos de licenciatura em Matemática de várias cidade do estado da Paraíba.

Nos conteúdos de Matemática Discreta desenvolvidos, apresentamos demonstrações, fizemos aplicações voltadas aos conteúdos apresentados, quando necessário utilizamos conceitos da Análise Matemática, nesse caso, para demonstrarmos a Soma dos Termos de uma PG Infinita. Trouxemos questões de provas da OBMEP, do Banco de Questões da OBMEP e de material voltado para a preparação deste evento, juntamente com suas soluções. As soluções foram desenvolvidas por meio de uma escrita própria, e sempre que possível fazendo comentários sobre o desenvolvimento de tais soluções.

A motivação para o desenvolvimento, desse trabalho, surgiu da disciplina Matemática Discreta, do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, e do interesse em produzir um material voltado para alunos e professores da educação básica, quando envolvidos com a OBMEP, e também atendesse às orientações da Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Além de fornecer um material de apoio e de fácil acesso para alunos e professores. Com isso, buscamos compreender os objetivos da OBMEP e desenvolver os conteúdos abordados neste trabalho.

Ao término, deste trabalho, concluímos a sua importância para professores e alunos da educação básica, em termos de aprimoramento dos seus conhecimentos relacionados aos conteúdos abordados em nosso trabalho; de motivação na participação em competições olímpicas, além da OBMEP. Ao desenvolver a escrita do nosso trabalho, buscamos orientar o aluno do ensino básico para que tenha um bom aprendizado de Matemática. A OBMEP tem uma contribuição significativa para isso, conforme vimos em seus objetivos.

Percebemos que existem programas que orientam o aluno antes e depois da OBMEP, conforme a classificação do aluno na Olimpíada; conforme o seu desenvolvimento acadêmico, perpassando até o doutorado. Nesse sentido, cabe ao professor e à equipe escolar desenvolver estratégias que possibilite a participação efetiva dos discentes nessa Olimpíada e nos demais programas vinculados a ela. Pensamos que nosso trabalho desperta o interesse tanto dos alunos como de toda equipe escolar em usufruir dos programas vinculados à OBMEP.

Referências

ARAUJO, J. E. de. *Divisibilidade, Congruência e Aritmética Modular em Problemas Olímpicos, Dissertação de Mestado, Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional*. 2018. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2015/10/TCC-Joselito-Elias.pdf>. Acesso em: 09 out 2020. Citado na página 12.

ASSIS, C.; FEITOSA, S. *Banco de Questões 2020*. 2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 100.

BNCC, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. 304, 541, 540 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 12 out 2020. Citado 3 vezes nas páginas 38, 54 e 80.

CGEE., C. de Gestão e E. E. *Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)*. Brasília, 2011. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o>. Acesso em: 03 set 2020. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações. Vol 1*. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 49.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações. Vol 2*. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.

EDUCACAO, M. da. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, n° 9394/96 de 20 de dezembro de 1996*. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 09 out 2020. Citado na página 11.

EDUCACAO, M. da. *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio Vol 2*. 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 09 out 2020. Citado na página 11.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. *Matemática Aula por Aula*. [S.l.]: São Paulo: FTD, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 50, 54, 60, 80 e 82.

FILHO, D. C. de M. *RELATÓRIO FINAL DO CURSO DE APERFEIÇOAMENTO PARA PROFESSORES DE ENSINO MÉDIO*. [S.l.]: Campina Grande: UFCG, 2006. Citado na página 25.

HEFEZ, A. *Indução Matemática*. 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado 3 vezes nas páginas 46, 90 e 91.

IMPA. *Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio*. 2001. Disponível em: <https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/linha-do-tempo-dos-cursos/janeiro-de-2001/>. Acesso em: 27 set 2020. Citado na página 23.

IMPA. *Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio*. 2002. Disponível em: <https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/linha-do-tempo-dos-cursos/julho-de-2002/>. Acesso em: 27 set 2020. Citado na página 24.

IMPA. *OBMEP 12 anos*. 2017. 17, 19, 39, 72 p. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf>. Acesso em: 09 out 2020. Citado 3 vezes nas páginas 12, 15 e 17.

IMPA. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. 2020. Disponível em: <https://poti.impa.br/index.php/site/sobre>. Acesso em: 12 out 2020. Citado na página 20.

IMPA. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. 2020. Disponível em: <https://poti.impa.br/>. Acesso em: 12 out 2020. Citado na página 21.

IMPA. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. 2020. Disponível em: <https://poti.impa.br/index.php/site/virtual>. Acesso em: 12 out 2020. Citado na página 21.

IMPA. *Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio*. 2020. Disponível em: <https://impa.br/ensino/programas-de-formacao/linha-do-tempo-dos-cursos/papmem-janeiro-de-2020>. Acesso em: 21 set 2020. Citado na página 23.

KAMPHORST, S. O. *Relatório Técnico Final Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/picme.htm?fbclid=IwAR0voc86TYIRR5De2eU68YwkQDcekFFDAhXXpj6QESDTNR8927QmG83s1S8>. Acesso em: 02 set 2020. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

LIMA, E. L. *Análise Real*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 53.

LIMA, E. L. *Análise Real. Coleção Matemática Universitária. Vol 1. 10ª edição*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Citado na página 129.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio Vol 2*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 14 vezes nas páginas 40, 41, 43, 45, 47, 52, 54, 56, 59, 65, 68, 70, 75 e 80.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio Volume 2*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado na página 37.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números Uma Introdução à Matemática*. [S.l.]: São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado 10 vezes nas páginas 26, 31, 32, 36, 37, 38, 48, 51, 78 e 86.

MORGADO, A. C. de O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf>. Acesso em: 25 nov 2020. Citado 3 vezes nas páginas 54, 80 e 82.

OBMEP. *OBMEP 2007*. 2007. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 95.

OBMEP. *OBMEP 2008*. 2008. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 116.

OBMEP. *OBMEP 2011*. 2011. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 114.

OBMEP. *OBMEP 2012*. 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 113.

OBMEP. *OBMEP 2014*. 2014. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 107.

OBMEP. *OBMEP 2015*. 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 106.

OBMEP. *OBMEP 2016*. 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado 3 vezes nas páginas 100, 102 e 104.

OBMEP. *OBMEP 2017*. 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 95.

OBMEP. *OBMEP 2018*. 2018. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 110.

OBMEP. *OBMEP 2019*. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 108.

OBMEP. *Programa OBMEP na Escola*. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/exibirCandidatosHabilitados2019.htm#PB>. Acesso em: 30 set 2020. Citado na página 22.

OBMEP. *Programa OBMEP na Escola*. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/exibirCandidatosSelecionados2019.htm#PB>. Acesso em: 30 set 2020. Citado na página 22.

OBMEP. *16ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS*. 2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 03 set 2020. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

OBMEP. *Portal da Matemática OBMEP*. 2020. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/>. Acesso em: 23 ago 2020. Citado na página 21.

OBMEP, E. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2020. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 01 set 2020. Citado na página 15.

PIC. *Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)*. 2020. Disponível em: <//www.obmep.org.br/pic.htm>. Acesso em: 23 ago 2020. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

PICME. *Programa de Iniciação Científica e Mestrado*. 2020. Disponível em: <https://picme.obmep.org.br/>. Acesso em: 21 set 2020. Citado na página 19.

PROFMAT. *Provas Nacionais 2014 - MA12*. 2014. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/provas-nacionais/>. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 87.

SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. da S. R. *Contato Matemática*. [S.l.]: São Paulo: FTD, 2016. Citado na página 61.

STEWART, J. *Cálculo, Volume 1*. [S.l.]: São Paulo: THOMSON, 2006. Citado na página 129.

UAMAT, U. *Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio*. 2018. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/category/papmem/>. Acesso em: 27 set 2020. Citado na página 25.

UFCG. *Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio*. 2014. Disponível em: <http://www.ufcg.edu.br/prt_ufcg/assessoria_imprensa/mostra_noticia.php?codigo=17059>. Acesso em: 30 set 2020. Citado na página 25.

VIEIRA, V. L. *Um Curso Básico em TEORIA DOS NÚMEROS*. [S.l.]: Campina Grande: eduepb, 2015. Citado na página 26.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração da fórmula da soma de uma PG infinita

Apresentaremos alguns conceitos básicos de Sequências e Séries para demonstrarmos a fórmula da soma dos termos de uma pg infinita, para aprofundamento destes conteúdos sugerimos (LIMA, 2010b).

Definição A.1. *Diz-se que o limite de uma sequência* (a_n) *é um número real* L *quando, para todo número real* $\varepsilon > 0$*, dado arbitrariamente, obtêm-se* $n_0 \in \mathbb{N}$ *em que os termos* a_n*,* $n > n_0$ *satisfazem a condição* $|a_n - L| < \varepsilon$*.*

A partir da sequência (a_n) obtém-se outra sequência (S_n) a medida que somamos seus termos, do seguinte modo:

$S_1 = a_1$ é o primeiro termo da sequência; $S_2 = a_1 + a_2$, o segundo termo, prosseguindo desse modo, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, é o n-ésimo e termo, e assim sucessivamente. Os valores de S_n são chamados somas parciais de uma Série.

Definição A.2. *Chama-se série uma soma com infinitas parcelas e denota-se por* $\sum a_n$*.*

As séries são classificadas em convergentes ou divergentes de acordo com a existência do limite $\lim_{n\to\infty} S_n$, que é o limite da sequência (S_n). Quando o limite existe $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, a série $\sum a_n$ é convergente e tem-se $S = \sum a_n$. A série é divergente quando o limite não existe.

Apresentaremos algumas propriedades de limites com base em (STEWART, 2006), que serão utilizadas na demonstração do Teorema seguinte. Seja c uma constante, f e g funções definidas nos números reais. Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existam. Assim,

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a} cf(x) = \lim_{x\to a} cf(x)$.
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Teorema A.1. *A soma S dos termos de uma Progressão Geométrica Infinita* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *de razão* $|q| < 1$*, é dada por:*

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração. Vimos que a soma dos termos de uma Progressão Geométrica de n termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Aplicando o limite e fazendo $n \to \infty$ temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_1(1-q^n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_1 - a_1 \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q)} \\
&= \frac{a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $|q| < 1$. Mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Daí, usando propriedades de potenciação e de módulo de números reais,

$$|q^{n_0} - 0| = |q^{n_0}| < \varepsilon.$$

Assim, se $n \geq n_0$, temos

$$|q^n - 0| \leq |q^{n_0} - 0| < \varepsilon.$$

Portanto, tendo em vista a definição de limite, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Portanto, a soma S de uma PG infinita é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

■