UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)
MATEMÁTICA

JULIANA DA SILVA RUZ

A IDENTIDADE DE LOCKWOOD E SUA RELAÇÃO COM RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

CURITIBA

2021

JULIANA DA SILVA RUZ

A IDENTIDADE DE LOCKWOOD E SUA RELAÇÃO COM RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática .

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

CURITIBA

2021

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R987i Ruz, Juliana da Silva
A identidade de Lockwood e sua relação com recorrências lineares de segunda ordem [recurso eletrônico] / Juliana da Silva Ruz. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2021.

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Sequências (Matemática). 2. Pascal, Triângulo de. 3. Sistemas lineares. 4. Fibonacci, Números de. 5. Identidade de Lockwood. I. Universidade Federal do Paraná. II. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. III. Título.

CDD: 515.24

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **JULIANA DA SILVA RUZ** intitulada: **A IDENTIDADE DE LOCKWOOD E SUA RELAÇÃO COM RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 08 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica
09/02/2021 21:16:39.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
09/02/2021 22:49:10.0
CRISTIAN SCHMIDT
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANA)

Assinatura Eletrônica
09/02/2021 22:26:34.0
PAULA ROGÉRIA LIMA COUTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

À minha família por todo o apoio e, principalmente, por terem compreendido a minha ausência em muitos momentos. Um agradecimento especial à minha mãe, que me inspirou a seguir seus passos de professora de Matemática. Gratidão à tia Márcia, minha maior incentivadora, que juntamente com meu tio Geraldo, formaram a minha maior torcida e não me deixaram desistir.

À minha querida amiga Cláudia, minha companheira do período intenso de estudo para a qualificação, gratidão por todo o incentivo e parceria, por não me deixar desanimar, além da ajuda técnica com o LaTeX.

Aos meus amigos de longa data, por vibrarem com minhas conquistas e compreenderem a ausência.

Ao meu querido professor orientador, Luiz, gratidão por fazer possível a realização deste trabalho, pelas inúmeras contribuições positivas, disponibilidade e paciência.

Aos professores e colegas de curso, por todas as experiências e cafés compartilhados.

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuiram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar ao leitor um estudo sobre a Identidade de Lockwood e sua relação com sequências definidas recursivamente. Essa identidade, que ainda é pouco conhecida, fornece resultados interessantes aplicados aos números de Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, permitindo que qualquer termo de tais sequências seja exibido por meio de um somatórios de binomiais, somatório este que também pode ser visualizado no triângulo de Pascal.

Palavras-chaves: Identidade de Lockwood, Fibonacci, Recorrências lineares, Lucas, Pell-Lucas, Triângulo de Pascal.

ABSTRACT

The present work aims to present to the reader a study on the Lockwood's Identity and its relation to sequences defined recursively. This identity, which is not well known, yields interesting results applied to Fibonacci, Lucas, Pell and Pell-Lucas numbers, allowing every term of these sequences to be expressed as a sum of binomial numbers, which the latter ones can also be displayed in Pascal's Triangle.

Key-words: Lockwood's Identity, Fibonacci, Linear recurrence relations, Lucas, Pell-Lucas, Pascal's triangle.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a Identidade de Lockwood e suas aplicações nas sequências de Fibonacci, Lucas, Pell e Pell-Lucas.

O objetivo deste trabalho é tornar a Identidade de Lockwood mais conhecida, bem como apresentar ao leitor algumas de suas aplicações.

Inicialmente, o estudo apresenta resultados preliminares que contribuem para melhor compreensão da aplicação da Identidade nas recorrências lineares homogêneas de segunda ordem.

Em seguida, a apresentação da demonstração da Identidade de Lockwood, chave principal que norteia esse trabalho, pois permite alcançar um ambiente pouco explorado por professores e estudantes, como caminho para chegar à solução de problemas que envolvem recorrências lineares de segunda ordem.

Através de exemplos da aplicação da Identidade nas sequências mais conhecidas, de Fibonacci e de Lucas, e também nas menos conhecidas, Pell e Pell-Lucas, podemos verificar a facilidade de exibir qualquer termo dessas sequências por meio da Identidade de Lockwood.

Por fim, sendo o objetivo do estudo ampliar e enriquecer os caminhos algébricos que facilitam a resolução de problemas que envolvem esse mecanismo de resolução, a relação da Identidade foi generalizada a qualquer recorrência linear de segunda ordem.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, vamos abordar alguns conceitos básicos que serão úteis no que vem a seguir.

2.1 FATORIAL

Definimos o fatorial de um número natural n, $n \geq 2$, e representamos por $n!$ o produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por convenção, para os casos $n = 1$ e $n = 0$ temos $1! = 1$ e $0! = 1$ (MORGADO, 2015).

2.2 NÚMERO BINOMIAL

Sejam n e p dois números naturais com $n \geq p$. Definimos número binomial de numerador n e denominador p e representamos por $\binom{n}{p}$ a seguinte expressão:

$$\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Se $n < p$ ou p um inteiro menor que zero, definimos $\binom{n}{p} = 0$.

2.2.1 Relação de Stifel-Pascal

Dentre as várias propriedades que valem para os números binomiais, uma que será muito útil adiante e que serve até para escrever de maneira rápida as entradas do triângulo aritmético é a Relação de Stifel-Pascal (MORGADO, 2015), descrita abaixo:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \\
&= \frac{(p+1)}{(p+1)} \cdot \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{n! \cdot (p+1) + n!(n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot [(n+1)-(p+1)]!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$

2.3 SOMATÓRIO

Dada uma sequência a_k, com $k \in \mathbb{N}$, representa-se o somatório dos termos dessa sequência desde o índice m até o índice n, chamados de limites inferior e superior, respectivamente, com $m, n \in \mathbb{N}$; $m \leq n$ por:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n, & n \geq m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

2.3.1 Propriedade Aditiva

A propriedade aditiva do somatório, descrita a seguir, será útil na demonstração da Identidade de Lockwood:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Demonstração:
Se $m \geq n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n) \\
&= a_m + b_m + a_{m+1} + b_{m+1} + \cdots + a_n + b_n \\
&= \underbrace{(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)}_{\sum_{k=m}^{n} a_k} + \underbrace{(b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)}_{\sum_{k=m}^{n} b_k} \\
&= \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.
\end{aligned}$$

Se $m > n$,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = 0 = 0 + 0 = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

2.3.2 Proposição

Seja p um número inteiro, temos:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}.$$

Demonstração:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$$

$$= a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + a_{m+p+2-p} + ... + a_{n+p-p}$$

$$= \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}.$$

2.4 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEAS

Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, são da forma $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$, com $q \neq 0$. A cada recorrência desse tipo, associa-se uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada de *equação característica* (LIMA, 2016). Se r_1 e r_2 são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$, quaisquer que sejam C_1 e C_2.

Demonstração: Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos:

$$C_1 r_1^n \left(r_1^2 + pr_1 + q\right) + C_2 r_2^n \left(r_2^2 + pr_2 + q\right) = C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0.$$

2.5 SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI E LUCAS

Os números de Fibonacci, F_n, e os números de Lucas, L_n, podem apresentar diferentes maneiras de serem explorados na matemática (KOSHY, 2011). Essas sequências podem ser definidas recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &F_1 = 1 && L_1 = 1 \\ &F_2 = 1 && L_2 = 3 \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3; && L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Os números de Fibonacci e Lucas satisfazem a mesma relação de recorrência. Observe que a equação característica dessas recorrências é $x^2 - x - 1 = 0$, cujas as raízes são

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

O termo geral dessas sequências pode ser obtido aplicando a Fórmula de Binet. Assim, o termo geral da sequência de Fibonacci é dado por $F_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, com $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ e α e β raízes reais da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Logo,

$$\begin{cases} F_1 = C_1\alpha^1 + C_2\beta^1 \\ \\ F_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\alpha + C_2\beta = 1 \\ \\ C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = 1 \end{cases}.$$

Multiplicando por constantes convenientes e somando as equações obtidas, temos:

$$\beta C_2(-\alpha + \beta) = -\alpha + 1.$$

Como $\alpha + \beta = 1$,

$$\beta C_2(-\alpha + \beta) = \beta,$$

isto é,

$$C_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Substituindo C_2 na primeira equação, temos:

$$C_1 = -\frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Então,

$$\begin{aligned} F_n &= C_1\alpha^n + C_2\beta^n \\ &= -\frac{1}{\beta - \alpha}\alpha^n + \frac{1}{\beta - \alpha}\beta^n \\ &= \frac{-\alpha^n + \beta^n}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por -1,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{2.1}$$

O termo geral da sequência de Lucas é dado por $L_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, com $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ e α e β raízes reais da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Logo,

$$\begin{cases} L_1 = C_1\alpha^1 + C_2\beta^1 \\ \\ L_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\alpha + C_2\beta = 1 \\ \\ c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 = 3 \end{cases}$$

De modo análogo ao anterior, podemos escrever o termo geral da sequência de Lucas da seguinte forma:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{2.2}$$

2.6 SEQUÊNCIAS DE PELL E PELL-LUCAS

Os números de Pell, P_n, e os números de Pell-Lucas, Q_n, são definidos recursivamente da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = 1 && Q_1 = 1\\
&P_2 = 2 && Q_2 = 3\\
&P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 3; \qquad && Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n \geq 3.
\end{aligned}
$$

Os cinco primeiros números de Pell são $1, 2, 5, 12$ e 29; e os cinco primeiros números de Pell-Lucas são $1, 3, 7, 17$ e 41.

Essas sequências possuem a mesma equação característica $x^2 - 2x - 1 = 0$, cujas as raízes são $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta = 1 - \sqrt{2}$. Note que $\gamma + \delta = 2$, $\gamma - \delta = 2\sqrt{2}$ e $\gamma\delta = -1$. Utilizando a fórmula de Binet, como foi feito anteriormente para a sequência de Fibonacci, podemos obter uma fórmula direta para as sequências de Pell e Pell-Lucas (KOSHY, 2011):

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}, \tag{2.3}$$

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}. \tag{2.4}$$

2.7 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ (MORGADO, 2015).

2.7.1 Princípio da Indução Forte

O Princío Forte de Indução Finita é uma variante do Princípio de Indução. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(k)$, para todo $k \leq n$, implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ (MORGADO, 2015).

Demonstração:

Considere a sentença aberta $Q(n)$: "$P(k)$ é valida para todo natural $k \leq n$". Como $P(1)$ é válida por i), $Q(1)$ também é. Suponha que $Q(n)$ é válida, isto é, $P(k)$ é valida para todo $k \leq n$, o que implica na validade de $P(k+1)$ por ii), que, por sua vez, implica na validade de $P(k)$ para todo $k \leq n+1$. Logo, $Q(n+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio de Indução, $Q(n)$ é verdadeira para todo natural n e, consequentemente, $P(n)$ é válida para todo natural n.

3 IDENTIDADE DE LOCKWOOD

Sejam x e y números reais quaisquer. Então, pelo Teorema binomial (MORGADO, 2015), temos

$$\begin{aligned}
x^1 + y^1 &= (x+y)^1,\\
x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy,\\
x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3(xy)(x+y),\\
x^4 + y^4 &= (x+y)^4 - 4(xy)(x+y)^2 + 2(xy)^2,\\
x^5 + y^5 &= (x+y)^5 - 5(xy)(x+y)^3 + 5(xy)^2(x+y).
\end{aligned}$$

Nesse caso, a expressão $x^n + y^n$ é expressa como a soma de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ termos em xy e $x+y$, onde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ representa o maior inteiro, menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

De modo geral, a Identidade, descoberta por E. H. Lockwood em 1967 (KOSHY, 2014) é expressa da seguinte forma:

$$x^n + y^n = (x+y)^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{n-2k}, \qquad (3.1)$$

quando $n \geq 1$.

Demonstração: Pelo príncipio forte de indução Matemática, a Identidade é válida para $n = 1$ e $n = 2$. De fato:

Quando $n = 1$,

$$\begin{aligned}
&(x+y)^1 + 0 \cdot (xy)^k (x+y)^{1-2k}\\
&= (x+y) + 0 = x + y.
\end{aligned}$$

Quando $n = 2$,

$$\begin{aligned}
&(x+y)^2 + \sum_{k=1}^{1} (-1)^k \left[\binom{2-k}{k} + \binom{1-k}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{2-2k}\\
&= (x+y)^2 - \left[\binom{1}{1} + \binom{0}{0} \right] (xy)(x+y)^0\\
&= (x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Agora, assumindo que afirmação dada é verdadeira para todo número inteiro positivo menor ou igual a n, quando n é um número inteiro qualquer maior ou igual a 2, provaremos que essa afirmação também vale para o natural seguinte, $n+1$. Assim, temos:

$$(x+y)^n = x^n + y^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{n-2k}.$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por $(x+y)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} = {} & x^{n+1}+y^{n+1}+x^n y+xy^n - \\
& \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n+1-2k}.
\end{aligned}
$$

Como o limite superior da soma acima depende da paridade de n, vamos separar a demonstração em duas partes, a saber:

Caso 1: Consideremos inicialmente n um número par, ou seja, $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. Então:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = {} & x^{2m+1}+y^{2m+1}+x^{2m}y+xy^{2m} - \\
& \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Vamos inserir a seguinte soma nula $-(xy)(x+y)^{2m-1}+(xy)(x+y)^{2m-1}$ para facilitar a fatoração:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = {} & x^{2m+1}+y^{2m+1} \\
& -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k} \\
& +(xy)(x+y)^{2m-1}+x^{2m}y+xy^{2m}-(xy)(x+y)^{2m-1}.
\end{aligned}
$$

Colocando xy em evidência nos três últimos termos, teremos:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = {} & x^{2m+1}+y^{2m+1} \\
& -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k} \\
& +(xy)(x+y)^{2m-1}+xy\left[x^{2m-1}+y^{2m-1}-(x+y)^{2m-1}\right].
\end{aligned}
$$

Por hipótese de indução, a Identidade é válida para $2m-1$, assim podemos escrever $x^{2m-1}+y^{2m-1}-(x+y)^{2m-1}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{2m-1}{2} \rfloor}(-1)^k\left[\binom{2m-k-1}{k}+\binom{2m-k-2}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k-1} \\
& =\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\left[\binom{2m-k-1}{k}+\binom{2m-k-2}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k-1}.
\end{aligned}
$$

Retornando à expressão principal (3.2), temos:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = {} & x^{2m+1}+y^{2m+1} \\
& -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k} \\
& +(xy)(x+y)^{2m-1} \\
& +\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\left[\binom{2m-k-1}{k}+\binom{2m-k-2}{k-1}\right](xy)^{k+1}(x+y)^{2m-2k-1}.
\end{aligned}
$$

Destacando a primeira parcela do primeiro somatório e aumentando em uma unidade os limites inferior e superior do segundo, obtemos:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = x^{2m+1} &+ y^{2m+1} \\
&+ \left[\binom{2m-1}{1} + \binom{2m-2}{0}\right](xy)(x+y)^{2m-1} \\
&- \sum_{k=2}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k} + \binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k} \\
&+ (xy)(x+y)^{2m-1} \\
&- \sum_{k=2}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k-1} + \binom{2m-k-1}{k-2}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+1}.
\end{aligned}
$$

Agrupando os somatórios e aplicando a relação de Stifel, temos:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} &= x^{2m+1} + y^{2m+1} \\
&\quad + \left[\binom{2m-1}{1} + \binom{2m-2}{0}\right](xy)(x+y)^{2m-1} \\
&\quad + (xy)(x+y)^{2m-1} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+1} \\
&= x^{2m+1} + y^{2m+1} \\
&\quad + \left[\binom{2m-1}{1} + \binom{2m-2}{0} + 1\right](xy)(x+y)^{2m-1} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+1}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que

$$\binom{2m-2}{0} = 1 = \binom{2m-1}{0},$$

e

$$\binom{2m-1}{1} + 1 = (2m-1) + 1 = 2m = \binom{2m}{1}.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+1} = x^{2m+1} &+ y^{2m+1} \\
&+ \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0}\right](xy)(x+y)^{2m-1} \\
&- \sum_{k=2}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+1} \quad = x^{2m+1} + y^{2m+1} \\
&- \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m+1-k}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+1-2k}.
\end{aligned}
$$

Com isso, chegamos à Identidade desejada:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1}+y^{n+1}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^k\left[\binom{n+1-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n+1-2k}.\end{aligned}$$

$Caso\,2$: Considerando agora n um número ímpar, ou seja, $n=2m+1$ e utilizando mais uma vez a Identidade:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1}+y^{n+1}+x^ny+xy^n\\ &\quad -\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n+1-2k},\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}(x+y)^{2m+2} &= x^{2m+2}+y^{2m+2}+x^{2m+1}y+xy^{2m+1}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2m+1}{2}\rfloor}(-1)^k\left[\binom{2m+1-k}{k}+\binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2}.\end{aligned}$$

Inserindo a soma nula $-(xy)(x+y)^{2m}+(xy)(x+y)^{2m}$ para facilitar a fatoração:

$$\begin{aligned}(x+y)^{2m+2} &= x^{2m+2}+y^{2m+2}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m+1-k}{k}+\binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k}\\ &\quad + x^{2m+1}y+xy^{2m+1}-(xy)(x+y)^{2m}+(xy)(x+y)^{2m}\\ &= x^{2m+2}+y^{2m+2}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k+1}{k}+\binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k}\\ &\quad + xy\left[x^{2m}+y^{2m}-(x+y)^{2m}\right]+(xy)(x+y)^{2m-1}.\end{aligned}$$

Por hipótese de indução, a Identidade de Lockwood é válida para $2m$, assim podemos escrever $x^{2m}+y^{2m}-(x+y)^{2m}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{2m}{2}\rfloor}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k}\\ &=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k}{k}+\binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k}.\end{aligned}$$

Dessa forma, a expressão

$$\begin{aligned}(x+y)^{2m+2} &= x^{2m+2}+y^{2m+2}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{2m-k+1}{k}+\binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k}\\ &\quad + xy\left[x^{2m}+y^{2m}-(x+y)^{2m}\right]+(xy)(x+y)^{2m-1},\end{aligned}$$

pode ser reescrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+2} = x^{2m+2} &+ y^{2m+2} \\
&- \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k} \\
&+ (xy)(x+y)^{2m} \\
&+ \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \left[\binom{2m-k}{k} + \binom{2m-k-1}{k-1}\right](xy)^{k+1}(x+y)^{2m-2k}.
\end{aligned}
$$

Destacando a primeira parcela do primeiro somatório e aumentando em uma unidade os limites inferior e superior do segundo:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+2} = x^{2m+2} + y^{2m+2} &+ \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0}\right](xy)(x+y)^{2m} \\
&- \sum_{k=2}^{m}(-1)^k \left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k} \\
&+ (xy)(x+y)^{2m} \\
&- \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+1}{k-1} + \binom{2m-k}{k-2}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2}.
\end{aligned}
$$

Note que o termo geral do primeiro somatório se anula para $k = m+1$, assim:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+2} = x^{2m+2} + y^{2m+2} &+ \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0}\right](xy)(x+y)^{2m} \\
&- \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+1}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k} \\
&+ (xy)(x+y)^{2m} \\
&- \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+1}{k-1} + \binom{2m-k}{k-2}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2}.
\end{aligned}
$$

Agrupando os somatórios e aplicando a relação de Stifel:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{2m+2} &= x^{2m+2} + y^{2m+2} \\
&\quad + \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0}\right](xy)(x+y)^{2m} + (xy)(x+y)^{2m} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+2}{k} + \binom{2m-k+1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2} \\
&= x^{2m+2} + y^{2m+2} \\
&\quad + \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m-1}{0} + 1\right](xy)(x+y)^{2m} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+2}{k} + \binom{2m-k+1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2}.
\end{aligned}
$$

Como

$$\binom{2m-1}{0} = \binom{2m}{0}$$

e

$$\binom{2m}{1} + 1 = \binom{2m+1}{1},$$

então

$$\begin{aligned}
(x+y)^{2m+2} &= x^{2m+2} + y^{2m+2} \\
&\quad + \left[\binom{2m+1}{1} + \binom{2m}{0}\right](xy)(x+y)^{2m} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m-k+2}{k} + \binom{2m-k+1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m-2k+2} \\
&= x^{2m+2} + y^{2m+2} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k \left[\binom{2m+1-k}{k} + \binom{2m-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{2m+2-2k} \\
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + y^{n+1} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(-1)^k \left[\binom{n+1-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n+1-2k}.
\end{aligned}$$

Portanto, a Identidade

$$x^n + y^n = (x+y)^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n-2k}$$

é válida para todo n natural.

Nessa Identidade, podemos observar que $(x+y)^n$ é o valor que o somatório assume quando $k=0$, logo podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$x^n + y^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](xy)^k(x+y)^{n-2k}. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1 *Para* $n = 7$*,*

$$
\begin{aligned}
x^7 + y^7 &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \left[\binom{7-k}{k} + \binom{7-k-1}{k-1} \right] (xy)^k (x+y)^{7-2k} \\
&= \left[\binom{7}{0} + \binom{6}{-1} \right] (x+y)^7 - \left[\binom{6}{1} + \binom{5}{0} \right] (xy)(x+y)^5 \\
&\quad + \left[\binom{5}{2} + \binom{4}{1} \right] (xy)^2 (x+y)^3 - \left[\binom{4}{3} + \binom{3}{2} \right] (xy)^3 (x+y) \\
&= [1+0]\,(x+y)^7 - [6+1]\,(xy)(x+y)^5 \\
&\quad + [10+4]\,(xy)^2(x+y)^3 - [4+3]\,(xy)^3(x+y) \\
&= (x+y)^7 - 7(xy)(x+y)^5 + 14(xy)^2(x+y)^3 - 7(xy)^3(x+y).
\end{aligned}
$$

4 NÚMEROS DE LUCAS

A Identidade de Lockwood do capítulo anterior será útil para apresentar Identidades relacionadas aos Números de Lucas, representados da seguinte forma:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Considere $x = \alpha$ e $y = \beta$ na Identidade de Lockwood, com $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, obtendo (KOSHY, 2011):

$$\alpha^n + \beta^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (\alpha\beta)^k (\alpha+\beta)^{n-2k}$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (-1)^k (1)^{n-2k}$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right]. \tag{4.1}$$

Exemplo 4.1 *Calcule L_5.*

$$\begin{aligned}
L_5 &= \sum_{k=0}^{2} \left[\binom{5-k}{k} \right] + \left[\binom{4-k}{k-1} \right] \\
&= \left[\binom{5}{0} + \binom{4}{-1} \right] + \left[\binom{4}{1} + \binom{3}{0} \right] + \left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1} \right] \\
&= (1+0) + (4+1) + (3+2) \\
&= 1 + 5 + 5 \\
L_5 &= 11.
\end{aligned}$$

Devido a estrutura dos binomiais, os números de Lucas podem ser obtidos através de uma soma no triângulo de Pascal. Note que a soma

$$\left[\binom{5}{0} + \binom{4}{-1} \right] + \left[\binom{4}{1} + \binom{3}{0} \right] + \left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1} \right],$$

obtida no cálculo de L_5, é equivalente a soma das entradas em destaque na Figura 1.

FIGURA 1 – NÚMEROS DE LUCAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL

$$
\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
$$

FONTE: Adaptado de (KOSHY, 2011, p. 128)

De fato:

$$(1+0)+(4+1)+(3+2) = 11 = L_5.$$

A Identidade de Lockwood permite encontrar qualquer número da sequência de Lucas.

Exemplo 4.2 *Calcule* L_8.

$$
\begin{aligned}
L_8 &= \sum_{k=0}^{4} \left[\binom{8-k}{k}\right] + \left[\binom{7-k}{k-1}\right] \\
&= \overbrace{\left[\binom{8}{0} + \binom{7}{-1}\right]}^{k=0} + \overbrace{\left[\binom{7}{1} + \binom{6}{0}\right]}^{k=1} + \overbrace{\left[\binom{6}{2} + \binom{5}{1}\right]}^{k=2} \\
&+ \overbrace{\left[\binom{5}{3} + \binom{4}{2}\right]}^{k=3} + \overbrace{\left[\binom{4}{4} + \binom{3}{3}\right]}^{k=4} \\
&= (1+0)+(7+1)+(15+5)+(10+6)+(1+1) \\
&= 1+8+20+16+2 \\
L_8 &= 47.
\end{aligned}
$$

No triângulo de Pascal, o cálculo de L_8 pode ser feito por meio da soma das entradas em destaque na Figura 2.

De fato:

$$(1+0)+(7+1)+(15+5)+(10+6)+(1+1) = 47 = L_5.$$

FIGURA 2 – NÚMEROS DE LUCAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

FONTE: Adaptado de (KOSHY, 2011, p. 128)

É possível encontrar outra expressão para a Identidade de Lockwood, reescrevendo os binomiais do somatório da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right] &= \left[\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}+\frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\right] \\
&= \left[\frac{(n-k)(n-k-1)!}{k(k-1)!(n-2k)!}+\frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\right] \\
&= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\left(\frac{n-k}{k}+1\right) \\
&= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\left(\frac{n}{k}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $k(n-k)$, temos:

$$\begin{aligned}
\left[\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}\right] &= \left[\frac{k(n-k)}{k(n-k)}\frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!}\right]\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= \frac{(n-k)(n-k-1)!}{k(k-1)!(n-2k)!}\left(\frac{n}{n-k}\right) \\
&= \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a Identidade pode ser escrita assim,

$$x^n+y^n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(xy)^k(x+y)^{n-2k}. \tag{4.2}$$

Consequentemente,

$$L_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}.$$

Logo, o L_5 se confirma,

$$\begin{aligned} L_5 &= \sum_{k=0}^{2} \frac{5}{5-k}\binom{5-k}{k} \\ &= \frac{5}{5}\binom{5}{0} + \frac{5}{4}\binom{4}{1} + \frac{5}{3}\binom{3}{2} \\ &= 1 + 5 + 5 \\ L_5 &= 11. \end{aligned}$$

5 NÚMEROS DE PELL-LUCAS

De modo análogo ao capítulo anterior, a Identidade de Lockwood será utilizada para apresentar identidades relacionadas aos Números de Pell-Lucas, que são representados da seguinte forma (KOSHY, 2014):

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}.$$

Aplicando a Identidade de Lockwood na sequência de Pell-Lucas, temos:

$$\begin{aligned}
Q_n &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (\gamma\delta)^k (\gamma+\delta)^{n-2k} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (-1)^k (2)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] 2^{n-2k-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.1 *Calcule* Q_5*.*

$$\begin{aligned}
Q_5 &= \sum_{k=0}^{2} \left[\binom{5-k}{k} + \binom{4-k}{k-1}\right] 2^{4-2k} \\
&= \left[\binom{5}{0} + \binom{4}{-1}\right] 2^4 + \left[\binom{4}{1} + \binom{3}{0}\right] 2^2 + \left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\right] 2^0 \\
&= 1 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^0 \\
&= 16 + 20 + 5 \\
&= 41.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.2 *Calcule* Q_8*.*

$$\begin{aligned}
Q_8 &= \sum_{k=0}^{4} \left[\binom{8-k}{k}\right] + \left[\binom{7-k}{k-1}\right] \cdot 2^{7-2k} \\
&= \overbrace{\left[\binom{8}{0} + \binom{7}{-1}\right] \cdot 2^7}^{k=0} + \overbrace{\left[\binom{7}{1} + \binom{6}{0}\right] \cdot 2^5}^{k=1} + \overbrace{\left[\binom{6}{2} + \binom{5}{1}\right] \cdot 2^3}^{k=2} \\
&+ \overbrace{\left[\binom{5}{3} + \binom{4}{2}\right] 2^1}^{k=3} + \overbrace{\left[\binom{4}{4} + \binom{3}{3}\right] \cdot 2^{-1}}^{k=4} \\
&= (1+0) \cdot 128 + (7+1) \cdot 32 + (15+5) \cdot 8 + (10+6) \cdot 2 + (1+1) \cdot \frac{1}{2} \\
&= 128 + 256 + 160 + 32 + 1 \\
Q_8 &= 577.
\end{aligned}$$

Também é possível obter os números de Pell-Lucas através das entradas do triângulo de Pascal.

FIGURA 3 – NÚMEROS DE PELL-LUCAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

FONTE: Adaptado de (KOSHY, 2011, p. 130)

Tomando como base o Exemplo 5.1, ao multiplicar a soma das entradas destacadas na Figura 3, a partir de $\left[\binom{5}{0}+\binom{4}{-1}\right]$ por 2^4, 2^2 e 2^0, respectivamente, obtém-se 41 que corresponde ao valor Q_5.

FIGURA 4 – NÚMEROS DE PELL-LUCAS NO TRIÂNGULO DE PASCAL

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

FONTE: Adaptado de (KOSHY, 2011, p. 130)

De maneira análoga, tomando como base o Exemplo 5.2, o produto da soma das entradas destacadas na Figura 4, a partir de $\left[\binom{8}{0}+\binom{7}{-1}\right]$ por 128, 32, 8, 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente, obtém-se $577 = Q_8$.

6 NÚMEROS DE FIBONACCI DE ORDEM ÍMPAR

A Identidade de Lockwood também pode ser utilizada para obter os números da sequência de Fibonacci de grau ímpar (KOSHY, 2014). Considere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

sendo α e β suas raízes. Trocando y por $-y$ na Identidade, sendo n um número ímpar, temos:

$$x^n - y^n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (-xy)^k (x-y)^{n-2k}.$$

Substituindo x por α e y por β, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta) F_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (\alpha - \beta)^{n-2k} \\
F_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (\sqrt{5})^{n-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] 5^{(n-2k-1)/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 5^{(n-2k-1)/2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.1

$$\begin{aligned}
F_5 &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \left[\binom{5-k}{k} + \binom{5-k-1}{k-1} \right] 5^{(5-2k-1)/2} \\
&= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \left[\binom{5-k}{k} + \binom{4-k}{k-1} \right] 5^{2-k} \\
&= \left[\binom{5}{0} + \binom{4}{-1} \right] 5^2 - \left[\binom{4}{1} + \binom{3}{0} \right] 5^1 + \left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1} \right] 5^0 \\
&= (1+0)25 - (4+1)5 + (3+2)1 \\
&= 25 - 25 + 5 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

7 NÚMEROS DE PELL DE ORDEM ÍMPAR

Analogamente ao capítulo anterior, a Identidade de Lockwood será útil para representar um número de ordem ímpar da sequência de Pell (KOSHY, 2014). Para isso, considere $x = \gamma$ e $y = \delta$, então:

$$\begin{aligned}(\gamma - \delta)P_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (-\gamma\delta)^k (\gamma - \delta)^{n-2k}\\ P_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (2\sqrt{2})^{n-2k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] 8^{(n-2k-1)/2}.\end{aligned}$$

Exemplo 7.1

$$\begin{aligned}P_5 &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \left[\binom{5-k}{k} + \binom{5-k-1}{k-1}\right] 8^{\frac{5-2k-1}{2}}\\ &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \left[\binom{5-k}{k} + \binom{4-k}{k-1}\right] 8^{2-k}\\ &= \overbrace{\left[\binom{5}{0} + \binom{4}{-1}\right] 8^2}^{k=0} - \overbrace{\left[\binom{4}{1} + \binom{3}{0}\right] 8^1}^{k=1} + \overbrace{\left[\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\right] 8^0}^{k=2}\\ &= (1+0)64 - (4+1)8 + (3+2)1\\ &= 64 - 40 + 5\\ P_5 &= 29\end{aligned}$$

8 A IDENTIDADE DE LOCKWOOD EM RECORRÊNCIAS LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM

Nessa seção, veremos como expressar recorrências lineares de segunda ordem homogêneas através da Identidade de Lockwood, dadas as condições inicias a seguir.

8.1 RECORRÊNCIAS DO TIPO $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$ COM CONDIÇÕES INICIAIS $x_0 = 2$ E $x_1 = \sigma_1 + \sigma_2$

Considere a recorrência linear de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$; $q \neq 0$; $n \geq 2$ e condições iniciais $x_0 = 2$ e $x_1 = \sigma_1 + \sigma_2$, onde σ_1 e σ_2 são soluções da equação característica $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$. Vamos mostrar que a solução geral de tal recorrência pode ser expressa através da Identidade de Lockwood. Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$.

A solução geral da recorrência é da forma $x_n = R_1\sigma_1^n + R_2\sigma_2^n$, $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$. Das condições iniciais, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 2 \\ \\ R_1 \cdot \sigma_1 + R_2. \cdot \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases},$$

cujas soluções são $R_1 = R_2 = 1$. Portanto, a solução geral pode ser reescrita como $x_n = \sigma_1^n + \sigma_2^n$. Fazendo $x = \sigma_1$ e $y = \sigma_2$ na Identidade de Lockwood, temos:

$$\sigma_1^n + \sigma_2^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (\sigma_1\sigma_2)^k (\sigma_1 + \sigma_2)^{n-2k}.$$

Como σ_1 e σ_2 são soluções da equação $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$, segue que $\sigma_1 + \sigma_2 = -p$ e $\sigma_1\sigma_2 = q$. Consequentemente:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] (q)^k (-p)^{n-2k}. \tag{8.1}$$

Exemplo 8.1 *Dada a recorrência $x_{n-2} + 5x_{n-1} + 6x_n = 0$, vamos calcular x_4 por meio da Equação 8.1. Substituindo $n = 4$ na equação, obtemos:*

$$x_4 = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k \left[\binom{4-k}{k} + \binom{3-k}{k-1}\right](6)^k(-5)^{4-2k}$$
$$= \left[\binom{4}{0} + \binom{3}{-1}\right](-5)^4 - \left[\binom{3}{1} + \binom{2}{0}\right]6\cdot(-5)^4 + \left[\binom{2}{2} + \binom{1}{1}\right]6^2\cdot(-5)^0$$
$$= 625 - 600 + 72$$
$$= 97.$$

Exemplo 8.2 *Seja $x_{n-2} - 8x_{n-1} + 12x_n = 0$, uma recorrência linear de segunda ordem, cujas condições inicias são $x_0 = 2$ e $x_1 =$. Vamos calcular x_3 por meio da Equação 8.1. Substituindo $n = 3$ na equação, obtemos:*

$$x_3 = \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \left[\binom{3-k}{k} + \binom{2-k}{k-1}\right](12)^k(8)^{3-2k}$$
$$= \left[\binom{3}{0} + \binom{2}{-1}\right]\cdot(12)^0\cdot 8^3 - \left[\binom{2}{1} + \binom{1}{0}\right]12^1\cdot 8^1$$
$$= (1+0)\cdot 8^3 - (2+1)\cdot 12\cdot 8$$
$$= 512 - 288.$$
$$x_3 = 224.$$

Caso 2: $\sigma_1,\, \sigma_2 \in \mathbb{C}$.

Sejam σ_1 e $\sigma_2 = \overline{\sigma_1}$ raízes complexas da equação característica $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$, reescrevendo-as na forma trigonométrica, obtemos $\sigma_1 = |\sigma_1|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $\sigma_2 = \overline{\sigma_1} = |\overline{\sigma_1}|(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$. Dessa forma, a solução geral da recorrência $x_n = \sigma_1^n + \sigma_2^n$ fica

$$x_n = |\sigma_1|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) + |\overline{\sigma_1}|^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta);$$

$|\sigma_1| = |\overline{\sigma_1}|$ e, portanto:

$$x_n = 2|\sigma_1|^n \cos n\theta.$$

Por outro lado, utilizando a Identidade de Lockwood, temos:

$$2|\sigma_1|^n \cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](\sigma_1\bar{\sigma_1})^k(\sigma_1 + \bar{\sigma_1})^{n-2k};$$

multiplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{2|\sigma_1|^n}$, temos:

$$\cos n\theta = \frac{1}{2|\sigma_1|^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](\sigma_1\bar{\sigma_1})^k(\sigma_1 + \bar{\sigma_1})^{n-2k}. \quad (8.2)$$

Exemplo 8.3 *A recorrência* $x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$ *tem equação característica* $\sigma^2 - 2\sigma + 2 = 0$*, cujas raízes complexas são* $\sigma_1 = 1 + i$ *e* $\sigma_2 = 1 - i$*. Note que* $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sqrt{2}$*,* $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2$ *e* $\sigma_1 + \sigma_2 = 2$*. Fazendo* $n = 4$ *e* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *na Equação 8.2, temos:*

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{4\pi}{4} &= \frac{1}{2\cdot 2^2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left[\binom{4-k}{k} + \binom{3-k}{k-1}\right](2)^k\cdot(2)^{4-2k} \\
\cos\pi &= \frac{1}{8}\left\{\left[\binom{4}{0} + \binom{3}{-1}\right]2^0\cdot 2^4 - \left[\binom{3}{1} + \binom{2}{0}\right]2^1\cdot 2^2 + \left[\binom{2}{2} + \binom{1}{1}\right]2^2\cdot 2^0\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left(2^4 - 4\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 2^2\right) \\
&= \frac{1}{8}(16 - 32 + 8) \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

8.2 RECORRÊNCIAS DO TIPO $y_n + py_{n-1} + qy_{n-2}$ COM CONDIÇÕES INICIAIS $y_0 = 0$ E $y_1 = 1$

Nesta seção vamos seguir um procedimento de cálculo similar ao da seção anterior, no sentido de que vamos expressar a solução geral, considerando n ímpar, de recorrências do tipo $y_n + py_{n-1} + qy_{n-2}$; $q \neq 0$; $n \geq 2$, com condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$, por meio da Identidade de Lockwood. Sejam λ_1 e λ_2 soluções da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

A solução geral da recorrência é da forma $y_n = M_1\lambda_1^n + M_2\lambda_2^n$, $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$. Das condições iniciais, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{cases}
M_1 + M_2 = 0 \\
\\
M_1\cdot\lambda_1 + M_2.\cdot\lambda_2 = 1
\end{cases},
$$

cujas soluções são $M_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ e $M_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Portanto, a solução geral pode ser reescrita como

$$
y_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.
$$

Fazendo $x = \lambda_1$ e $y = -\lambda_2$ na Identidade de Lockwood e considerando n ímpar, temos:

$$
\lambda_1^n - \lambda_2^n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](-\lambda_1\lambda_2)^k(\lambda_1 - \lambda_2)^{n-2k}
$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (-\lambda_1\lambda_2)^k (\lambda_1 - \lambda_2)^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (-1)^k (\lambda_1\lambda_2)^k (\lambda_1 - \lambda_2)^{n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (\lambda_1\lambda_2)^k (\lambda_1 - \lambda_2)^{n-2k-1}.\end{aligned}$$

Como λ_1 e λ_2 são soluções da equação $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, segue que $\lambda_1\lambda_2 = q$ e $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{p^2 - 4q}$. Consequentemente,

$$y_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (q)^k (p^2 - 4q)^{\frac{n-2k-1}{2}} \tag{8.3}$$

Exemplo 8.4 *Dada a recorrência $y_n - 6y_{n-1} + 8y_{n-2} = 0$, vamos calcular y_3 por meio da Equação 8.3. Substituindo $n = 3$ na equação, obtemos:*

$$\begin{aligned} y_3 &= \left[\binom{3}{0} + \binom{2}{-1}\right] \cdot 8^0 \cdot 4^1 + \left[\binom{2}{1} + \binom{1}{0}\right] \cdot 8^1 \cdot 4^0 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Sejam λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ raízes complexas da equação característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, reescrevendo-as na forma trigonométrica, obtemos $\lambda_1 = |\lambda_1|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ e $\overline{\lambda}_1 = |\overline{\lambda}_1|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$. Dessa forma, a solução geral da recorrência $y_n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ fica

$$y_n = \frac{|\lambda_1|^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) - |\overline{\lambda}_1|^n(\cos n\phi - i \operatorname{sen} n\phi)}{\lambda_1 - \overline{\lambda}_1};$$

como $|\overline{\lambda_1}| = |\lambda_1|$, temos:

$$y_n = \frac{2i|\lambda_1|^n(\operatorname{sen} n\phi)}{\lambda_1 - \overline{\lambda}_1}$$

Por outro lado, utilizando a Identidade de Lockwood:

$$y_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] (\lambda_1\overline{\lambda_1})^k (\lambda_1 - \overline{\lambda_1})^{n-2k-1};$$

multiplicando por $\dfrac{\lambda_1 - \overline{\lambda}_1}{2i|\lambda_1|^n}$, temos:

$$\operatorname{sen} n\phi = \frac{1}{2i|\lambda_1|^n}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](\lambda_1\overline{\lambda_1})^k(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})^{n-2k} \tag{8.4}$$

Exemplo 8.5 *A recorrência $y_n - 2\sqrt{3}y_{n-1} + 4y_{n-2} = 0$ tem equação característica $\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0$, cujas raízes complexas são $\lambda_1 = \sqrt{3} + i$ e $\lambda_2 = \sqrt{3} - i$. Note que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4$ e $\lambda_1 - \lambda_2 = 2i$. Fazendo $n = 3$ e $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ na Equação 8.4, temos:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2i\cdot 2^3}\sum_{k=0}^{1}\left[\binom{3-k}{k} + \binom{2-k}{k-1}\right](4)^k(2i)^{3-2k}\\
\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} &= \frac{1}{16i}\left\{\left[\binom{3}{0} + \binom{2}{-1}\right](4)^0\cdot(2i)^3 + \left[\binom{2}{1} + \binom{1}{0}\right](4)^1\cdot(2i)^1\right\}\\
&= \frac{1}{16i}(-8i + 24i)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O coração desse texto é a Identidade de Lockwood. Através da demonstração dessa Identidade, vimos que podemos relacioná-la à sequência de Fibonacci, Lucas, Pell e Pell-Lucas, bem como a qualquer recorrência linear de segunda ordem, como visto no caso geral. Além disso, mostramos a praticidade que o uso da Identidade possibilita para encontrar qualquer termo dessas sequências. Isso permite aplicar a Identidade de Lockwood em diferentes situações-problemas que envolvam sequências numéricas recursivas de segunda ordem e combinação.

A intenção de apresentar essa Identidade é de torná-la mais conhecida e de utilizá-la como ferramenta para a resolução de problemas deste gênero. Por isso, demonstramos de forma clara a Identidade, de modo a facilitar o entendimento para que possam utilizar a Identidade na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

KOSHY, Thomas. Fibonacci, Lucas, and Pell Numbers, and Pascal's Triangle. **Applied Probability Trust**, p. 125–132, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 13, 15, 24–26, 29.

KOSHY, Thomas. **Pell and Pell – Lucas Numbers with Applications**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 17, 28, 30, 31.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2. Citado 1 vez na página 13.

MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 11, 15–17.

SANTOS, Arlem Atanazio. A fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci a outros conceitos matemáticos. **C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 9, p. 4–22, 2017.