MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPP
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

JOGOS DE MATEMÁTICA VOLTADOS PARA A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL: PROPOSTAS A PARTIR DA CLASSIFICAÇÃO ESAR

BRENDA PAVÃO GARCEZ

Dourados - MS
2021

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PROPP
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

JOGOS DE MATEMÁTICA VOLTADOS PARA A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL: PROPOSTAS A PARTIR DA CLASSIFICAÇÃO ESAR

BRENDA PAVÃO GARCEZ

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela UEMS, sob orientação do professor Dr. Aguinaldo Lenine Alves como exigência para a conclusão do curso.

Dourados – MS
2021

G197j Garcez, Brenda Pavão
Jogos de matemática voltados para a aprendizagem de números inteiros no ensino fundamental : proposta à partir da classificação ESAR / Brenda Pavão Garcez. – Dourados, MS: UEMS, 2021.
50p.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Matemática em Rede Nacional – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves.

1. Ensino fundamental 2. Jogos 3. Matemática 4. Números I. Alves, Aguinaldo Lenine II. Título

CDD 23. ed. – 372.7

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos dezoito dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e um, às nove horas, na defesa realizada por videoconferência síncrona (todos os participantes online), na Unidade Universitária de Dourados, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "JOGOS DE MATEMÁTICA VOLTADOS PARA A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL: PROPOSTAS A PARTIR DA CLASSIFICAÇÃO ESAR" de autoria da aluna: **BRENDA PAVÃO GARCEZ**, CPF 326.850.878-26, sob a orientação de AGUINALDO LENINE ALVES do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: AGUINALDO LENINE ALVES **(Presidente)**, Tatiane Tambarussi Thomaz (participação à distância por videoconferência) (UTFPR) e Alberny Alves Ferreira (participação à distância por videoconferência). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

[X] Aprovação [ ] Aprovação com revisão [ ] Reprovação

EXAMINADOR	**ASSINATURA**
Dr. AGUINALDO LENINE ALVES	
Dra. Tatiane Tambarussi Thomaz (participação à distância por videoconferência) (UTFPR)	
Dr. Alberny Alves Ferreira (participação à distância por videoconferência)	

OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:

Presidente da Banca Examinadora   Aluna

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRENDA PAVÃO GARCEZ

JOGOS DE MATEMÁTICA VOLTADOS PARA A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL: PROPOSTAS A PARTIR DA CLASSIFICAÇÃO ESAR

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 18 de janeiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Alberny Alves Ferreira (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
(participação realizada à distância por videoconferência)

Profa. Dra. Tatiane Tambarussi Thomaz (UTFPR)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(participação realizada à distância por videoconferência)

Dedico primeiramente a Deus que me encorajou, fortaleceu e protegeu durante esses três anos de curso, ao meu marido Agnaldo Nogueira Turina e ao filho Enzo Garcez Turina pela paciência, dedicação, companheirismo e compreensão. Agradeço pelo total incentivo proporcionado desde a prova inicial para ingresso no programa, até a conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus, que está sempre ao meu lado, me guiando, iluminando cada passo dado e me abençoando, obrigado por me dar à saúde necessária, a fé, e a força que me manteve de pé quando as dificuldades insistiam em me derrubar, permitindo assim que eu chegasse ao fim desta jornada.

Aos meus pais Neilton e Dolores que me deram a vida e sempre incentivaram meus estudos. Ao meu marido Agnaldo Turina e ao meu filho Enzo Turina, que com muita paciência puderam perdoar e aceitar minha ausência em determinados períodos em que me dediquei aos estudos para conclusão deste projeto (sonho), agradeço pelo apoio incondicional. Agradeço a minha irmã Janaina que me apresentou alguns cursos que me fizeram focar e aprender lidar comigo mesma. Não poderia deixar de citar o nome de uma pessoa guerreira, que me mostrou o que é força e determinação, ensinado sempre através de exemplos, conseguiu me mostrar a importância de seguir o caminho certo e não desistir: minha sogra Elza Nogueira Turina (*in memoriam*).

Às minhas amigas e parceiras nessa empreitada, Carolina, Edineia e Raissa, agradeço pelo companheirismo e por fazerem o papel de "família" nas semanas de aulas de janeiro, onde todas nós, deixávamos de lado a família de sangue e formávamos uma nova família, convivendo juntas discutindo matemática, seja na Universidade ou no quarto do hotel.

Aos meus professores, agradeço pela dedicação e empenho dispensado para nos ajudar a concluir com êxito este período, cada um deles conseguia transmitir sua mensagem e seu conhecimento, que por fim resultou no trabalho aqui descrito. Não poderia deixar de agradecer minha companheira de viagem, Juliane, que através de sua simplicidade, permitiu que nossa trajetória se tornasse mais curta e rápida.

Preciso mencionar minhas cachorras, agradeço os momentos de distração e companheirismo nas caminhadas da madrugada, momentos importantes dedistração, onde umas lambidas na cara, me faziam esquecer os problemas e entendercomo é simples ser feliz.

Ao meu orientador Aguinaldo Lenine, por todo apoio e paciência ao longo da elaboração desse projeto. Agradeço por ter acreditado e depositado confiança em mim durante este trabalho.

RESUMO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do 1° ao 4° ano do ensino fundamental reconhecem a importância dos números inteiros para a instrumentalização eficiente da resolução de problemas na matemática do cotidiano. Contudo, professores e pareceres governamentais alertam para a baixa efetividade no aprendizado dos alunos em matemática que inclui, relevantemente, os números inteiros. Diante de desta realidade, este estudo objetiva propor jogos que utilizem materiais concretos e que potencializem o processo de ensino-aprendizagem em números inteiros voltados para crianças e adolescentes do Ensino Fundamental. Para tanto, no aspecto metodológico, realizou-se uma revisão bibliográfica - que resultou na apresentação da teoria dos números inteiros. Na sequência, conheceu-se a relação entre a teoria da aprendizagem e o desenvolvimento humano, a partir dos conceitos de Piaget, Vygotsky, Wallon e Gardner. Por conseguinte, apresentou-se classificações e sistematizações de jogos. Em etapa metodológica posterior, foram propostos jogos matemáticos em números inteiros a partir da sistematização de Exercícios, Simbólicos, de Acoplagem e de Regras (ESAR). Com a apresentação de conteúdo por meio de vídeos via QR Code, foi proposta uma revista com cinco jogos manipuláveis: Escopa Zero, Régua Mágica, Jogo dos sinais, Caminhando na Reta Numérica e Elastisque.

Palavras-chaves: Ensino Fundamental. Jogos. Matemática. Números inteiros.

ABSTRACT

The National Curriculum Parameters from the 1st to the 4th year of elementary school recognize the importance of integers for the efficient instrumentalization of problem solving in everyday mathematics. However, teachers and governmental advisors warn of the low effectiveness in students' learning in mathematics, which includes, relevantly, whole numbers. In view of this reality, this study aims to propose games that use concrete materials and that enhance the teaching-learning process in whole numbers aimed at children and adolescents in elementary school. For this, in the methodological aspect, a bibliographic review was carried out - which resulted in the presentation of the whole number theory. Then, the relationship between the theory of learning and human development was discovered, based on the concepts of Piaget, Vygotsky, Wallon and Gardner. Consequently, the classification and systematization of games was presented. In a later methodological stage, mathematical games in whole numbers were proposed based on the systematization of Exercises, Symbolic, Coupling and Rules (ESAR). With the presentation of content through videos via QR Code, a magazine was proposed with five manipulable games: Escopa Zero, Régua Mágica, Jogo dos signals, Caminhando na Reta Numerica and Elastisque.

Keywords: Elementary School. Games. Mathematics. Whole Numbers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do 1° ao 4° ano do ensino fundamental, quando se trata do bloco de conteúdo números e operações sinalizam como essencial o conhecimento numérico construído e assimilado para instrumentalizar eficientemente a resolução de problemas, considerando as propriedades, as relações e a maneira histórica de configuração. Ou seja, o aluno deverá dominar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisãocom números inteiros (BRASIL, 1997).

Dando continuidade a este estudo, os PCNs do 5° ao 9° ano ampliam os conhecimentos em relação aos números inteiros, já que a resolução de novas situações-problemas faz se necessário (BRASIL, 1998). Todavia, observa-se elevada e complexa dificuldade dos alunos em resolver tais problemas, uma vez que o domínio de suas operações e propriedades ainda estão sendo construídas.

De acordo com o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2017, aproximadamente 33% dos alunos do 5º ano e 63% do 9° ano do ensino fundamental apresentaram níveis insuficientes em Matemática, de acordo com os seus programas (BRASIL, 2018). A deficiência matemática observada nas séries do ensino básico ecoa também no ensino superior visto o alto grau de reprovações em disciplinas de exatas.

A dificuldade em associar a matemática ao seu cotidiano, faz com que a grande maioria dos estudantes a considerem como uma das disciplinas mais difíceis do currículo escolar. Estudos realizados por Bordin e Bisognin (2011), identificaram a complexidade das operações com números inteiros para estudantes do 7° ano, principalmente quando o assunto são os números negativos.

A metodologia utilizada no ensino da Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, sempre de forma expositiva e apoiada apenas em livros e cadernos, fortalece ainda sua complexidade, embora existam outros fatores envolvidos no rendimento escolar, tais como, fatores pessoais, intelectuais e socioeconômicos. Portanto, para amainar esta barreira, torna-se necessário o estabelecimento de novas estratégias que viabilizem a simplificação do processo de ensino-aprendizagem de números inteiros. Uma boa estratégia poderia ser a utilização de jogos educativos, já que segundo o documento oficial curricular brasileiro, alguns jogos tem a capacidade de articular o conhecimento e o imaginado para o desenvolvimento do autoconhecimento (BORDIN; BISOGNIN, 2011; SOARES, 2016).

Sabe-se que os jogos educativos possuem funções essenciais no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, principalmente na infância, assim, devem ser considerados como metodologias promissoras no ensino da matemática possibilitando o resgate de princípios e procedimentos de seus variados assuntos, dentre eles, os números inteiros.

Neste trabalho, pretende-se ressaltar a importância dos jogos educativos como recurso auxiliar na facilitação do processo de ensino e aprendizagem da matemática, mais especificamente dos números inteiros ao aluno das séries iniciais. Os jogos educativos aqui propostos, poderão ser utilizados como ferramentas atrativas que favoreçam e possibilitem a criatividade do estudante na construção de estratégias para as resoluções de possíveis problemas matemáticos.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Propor jogos matemáticos voltados para a aprendizagem de números inteiros no ensino fundamental a partir da classificação Exercícios, Simbólicos, Acoplagem e Regras (ESAR).

2.2 ESPECÍFICOS

- Compreender os números inteiros sob o aspecto histórico, de propriedades matemáticas e de apresentação nas retas;
- Contextualizar a teoria da aprendizagem e do desenvolvimento humanos com os teóricos Piaget, Vygotsky, Wallon e Gardner;
- Apresentar as classificações e sistematizações dos jogos, bem como seus requisitos e cuidados;
- Apresentar jogos com números inteiros na perspectiva ESAR.

3 METODOLOGIA

No aspecto metodológico, realizou-se uma revisão bibliográfica desenvolvida com base em materiais já elaborados, sistematizados e publicados, tais como, livros, teses, dissertações e artigos científicos na área da Educação, através das seguintes bases de dados eletrônicas 'Scielo' e 'Google Acadêmico', utilizando os descritores 'jogos', 'ensino fundamental', 'matemática' e 'números inteiros'.

4 NÚMEROS INTEIROS

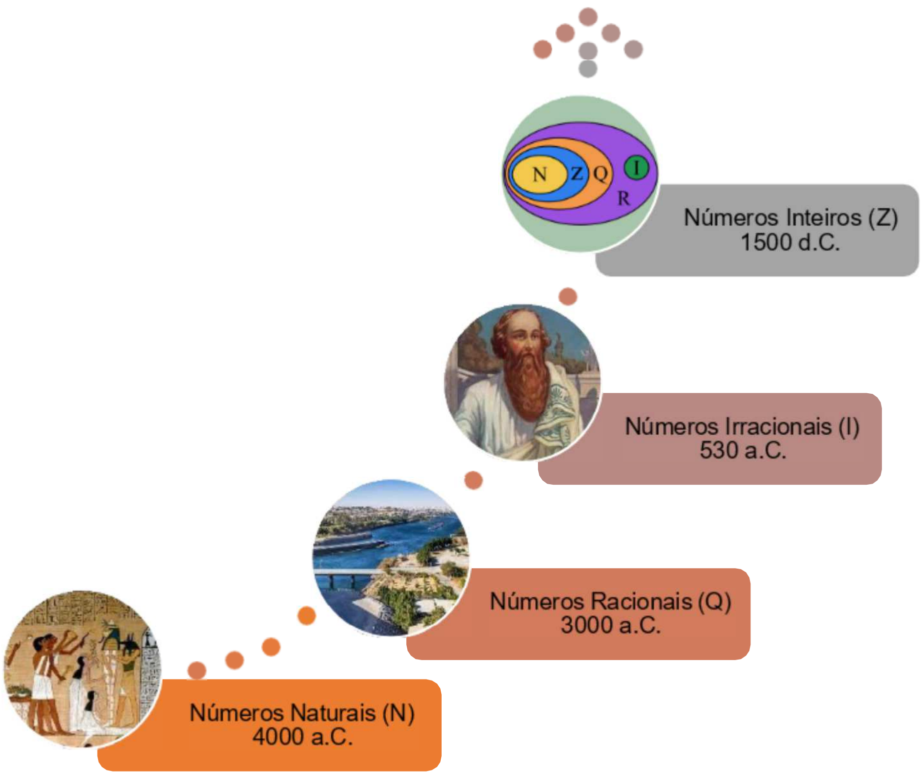
De acordo com Iezzi e Murakami (2013), a história dos números inteiros é explicada a partir da necessidade do homem em representar quantidades como metodologia de contagem. Segundo Roque (2012), o primeiro conjunto numérico, o conjunto dos números naturais, surgiu há aproximadamente 4000 a.C. O seu desenvolvimento ocorreu pela necessidade dos egípcios em desenvolver seu comércio, já que nesta época, produtos não consumidos eram vendidos ou trocados, sendo seu controle necessário. Launay (2019) complementa que com o objetivo de contagem, os egípcios criaram alguns símbolos para representar números que indicavam quantidades, criando-se assim, o primeiro conjunto numérico, o conjunto dos números naturais.

Com a necessidade de mensurar e repartir terras as margens do Rio Nilo, mil anos mais tarde, por um decreto do faraó, surge então o segundo conjunto numérico, o conjunto dos números racionais (BOYER; MERZBACH, 2012). Segundo Roque (2012), caso o rio levasse qualquer parte do lote de uma pessoa, o faraó mandava funcionários examinar e determinar por medida, a extensão da perda". Para isto, seus funcionários utilizavam uma corda de tamanho pré-definido, mas que nem sempre resultava numa quantidade exata, sendo assim necessária à sua divisão em partes não inteiras.

Por muitos anos, o homem acreditou que os conjuntos dos números naturais e racionais, eram suficientes para a resolução de todos os problemas (LAUNAY, 2019). No entanto, por volta de 530 anos a.C., estudiosos, conhecidos como pitagóricos, descobriram os números 'estranhos', denominados de irracionais. Salienta-se que nesse momento foi definido o Teorema de Pitágoras, com números de representação decimal sem período (ROQUE, 2012). Assim, os conjuntos dos números naturais, racionais e irracionais ficaram conhecidos como conjuntos dos números reais (BOYER; MERZBACH, 2012).

O movimento renascentista iniciado na Itália durante os séculos XV e XVI, marcou a passagem de tradições medievais para um mundo totalmente moderno onde as revoluções econômicas, artísticas/culturais, políticas e cientificas trouxeram a busca por atualizações, pelo prazer, algo que pudesse caracterizar o homem individualista e sua liberdade, otimismo e racionalidade. Assim sendo, no campo da matemática, sentiram a necessidade de inclusão de uma nova classe de números, mas que não se enquadrassem nos conjuntos já existentes (ROQUE, 2012). Dando prosseguimento a esta demanda, estudiosos da área começaram a escolher uma representação para o novo conjunto numérico, que não indicasse apenas uma quantidade, mas também ganhos e perdas. Assim, nascia o conjunto dos números inteiros, conforme a Figura 1, denotado pela letra Z, com sinais $(-)$ negativos ou $(+)$ positivos que em 1500, passou a integrar o conjunto dos números reais.

Figura 1 – Ordem cronológica de descoberta dos conjuntos numéricos.



Fonte: elaborada pela autora (2021).

Bezerra (2018) explica que nesse conjunto Z, deve-se conhecer os subconjuntos dos números inteiros não-nulos, não-negativos, não-positivos, negativos e positivos, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Representação de Z em subconjuntos.

Subconjuntos	**Conjunto Z**
Não-nulos	$Z^* = \{x \in Z \mid x \neq 0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
Não-negativos	$Z_+ = \{x \in Z \mid x \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Não-positivos	$Z\_ = \{x \in Z \mid x \leq 0\} = \{0, -1, -2, -3, ...\}$
Positivos	$Z_+^* = \{x \in Z \mid x > 0\} = \{1, 2, 3, ...\}$
Negativos	$Z_-^* = \{x \in Z \mid x < 0\} = \{-1, -2, -3, ...\}$

Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

Segundo Iezzi e Murakami (2013), os números inteiros positivos também podem ser chamados de naturais, sendo assim, também designado pela letra N, ou seja ($N = Z_+^*$).

4.1 PROPRIEDADES

Em Z, estão bem definidas duas operações: a operação de adição, ou soma, denotada por (+) e a operação de multiplicação, ou produto, denotada por *(.)*, ou seja:

4.1.1 Adição

$$\forall\ (a, b) \mid a \in Z \text{ e } b \in Z \ \Rightarrow (a + b) \in Z$$

4.1.2 Multiplicação

$$\forall\ (a, b) \mid a \in Z \text{ e } b \in Z \ \Rightarrow (a.b) \in Z$$

Segundo Bezerra (2018), a multiplicação $a.\ b$ pode ser apresentada apenas por ab, sem o ponto.

As operações, adição e multiplicação, no conjunto Z, possuem propriedades axiomáticas, ou seja, propriedades que podem ser assumidas como verdadeiras, não havendo a necessidade de demonstrá-las algebricamente. O Quadro 2 exibe tais propriedades definidas como fundamentais, onde $a, b\ e\ c \in Z$ (BEZERRA, 2018).

Quadro 2 – Propriedades fundamentais dos números inteiros.

	Axiomas	Adição $(+)$	Multiplicação $(.)$
1	**Comutação**	$(a + b) = (b + a)$	$(a.b) = (b.a)$
2	**Associação**	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a.b).c = a.(b.c)$
3	**Existência e Unicidade de elemento neutro**	$0 + a = a$	$a.1 = a$
4	**Existência e Unicidade de Oposto**	$a + (-a) = 0$	-
5	**Distributividade**	$a(b + c) = (a.b) + (a.c)$	
6	**Sem divisores de 0**	-	$Se\ a.b = 0, então,$ $a = 0\ ou\ b = 0$

Fonte: Bezerra (2018).

Note que as propriedades de comutação, associação e existência e unicidade do elemento neutro são definidas tanto para a operação de adição quanto para a de multiplicação, sendo o zero o elemento neutro da adição, e o um o elemento neutro da multiplicação. A propriedade que trata da existência e unicidade do termo oposto é apresentada apenas para a adição, a distributividade utiliza simultaneamente as operações da adição e da multiplicação e a inexistência dos divisores de zero é explicitada apenas na multiplicação (BEZERRA, 2018).

Torna-se importante destacar a existência de uma relação de ordem entre números inteiros denotada pelo sinal “menor que (<)” com as propriedades apresentadas no Quadro 3, desde que sejam $a, b, c \in Z$.

Quadro 3 – Relação de ordem dos números inteiros.

	Se	*Então*
1	$a \neq 0$	$a < 0\ ou\ 0 < a$
2	$a < b\ e\ b < c$	$a < c$
3	$a < b$	$a + c < b + c$
4	$a < b\ e\ 0 < c$	$a.c < b.c$

5	$a < b \; e \; c < 0$	$b.c < a.c$

Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

Implica-se dizer que as propriedades apresentadas nos Quadros 2 e 3 oferecem a dedução de várias outras para números inteiros, conforme mostram os exemplos a seguir. No exemplo 1, ao utilizar as definições nos quadros anteriores para $-(a + b) = (-a) + (-b)$ tem-se, como efeito, sucessivamente:

$-(a + b) = (-1).(a + b) \Rightarrow$ **Existência e Unicidade de Oposto**

$= (-1).a + (-1).b \Rightarrow$ **Distributividade**

$= (-a) + (-b) \Rightarrow$ **Existência e Unicidade de Oposto**

No exemplo 2, ao demonstrar que $se \; x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2$, tem-se, como demonstrações:

$$Se \; x \neq 0, logo \; x < 0 \; ou \; x > 0$$

Para $x > 0$, tem-se:

$x > 0 \Rightarrow$ **Comutação**

$xx > 0x \Rightarrow$ **Distributividade**

$x^2 > 0 \Rightarrow$ **Sem divisores de 0**

Para $x < 0$, tem-se:

$x < 0 \Rightarrow$ **Comutação**

$xx > 0x \Rightarrow$ **Distributividade**

$x^2 > 0 \Rightarrow$ **Sem divisores de 0**

Em suma, tem-se:

$Se \; x \neq 0 \Rightarrow x < 0 \; ou \; 0 < x \Rightarrow$ **Comutação**

$Se \; x < 0 \;\; \Rightarrow 0.x < x.x \Rightarrow$ **Distributividade**

$Se \; x < 0 \;\; \Rightarrow 0 < x^2 \Rightarrow$ **Sem divisores de 0**

De forma análoga, se $a < b \Rightarrow b > a, se \; a < b \; ou \; a = b \Rightarrow a \leq b, se \; a \leq b \; e \; b \leq c \Rightarrow a \leq b \leq c$.

4.2 VALOR ABSOLUTO

Um número inteiro a pode ter um valor absoluto, caracterizado por $|a|$, de forma que:

$$|a| = \{ \begin{matrix} a, se\ a \geq 0 \\ -a, se\ a < 0 \end{matrix}$$

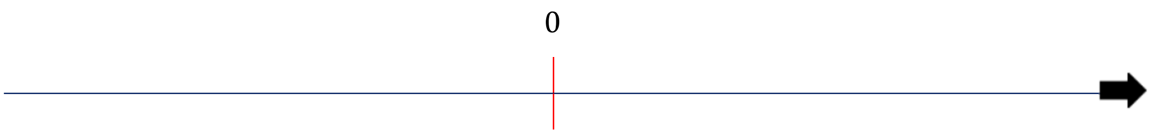
Logo, deve ser reconhecido, por exemplo: $|4| = 4$ *e* $|-7| = -(-7) = 7$. De acordo com a definição apresentada de $|a|$, para qualquer inteiro a, deve ser reconhecido também $|a| \geq 0$, $|a|^2 = \mathrm{a}^2$, $|-a| = |a|$ e $a \leq |a|$. Para tanto, o valor absoluto $|a|$ de um inteiro a também pode ser definido por igualdades $|a| = \sqrt{\mathrm{a}^2}$, $|a| = \mathrm{máx.}(-\mathrm{a}, \mathrm{a})$, onde $\sqrt{\mathrm{a}^2}$ representa uma raiz quadrada não-negativa de a^2 e $máx.(-a, a)$, indicando maior dos dois inteiros $-a$ e a. A partir do exemplo $|-4| = \sqrt{(-4)^2}$, observa-se $\sqrt{16} = 4$ e $|-6| = máx.(-6, 6) = 6$.

Além disso, se a e b são dois números inteiros, então $|a.b| = |a|.|b|$. Com efeito, deve ser reconhecido: $|a.b| = \sqrt{(a.b)^2} = \sqrt{(a^2.b^2)} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a|.|b|$. Bem como, se a e b são dois números inteiros, assim: $|a + b| \leq |a| + |b|$; com efeito, deve ser reconhecido, por definição de $|a|$: $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$. Somando-se ordenadamente as desigualdades, verifica-se: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, implicando em $|a + b| \leq |a| + |b|$.

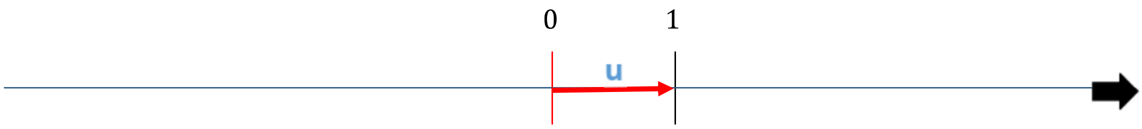
E se a e b são dois inteiros, então: $|a - b| \leq |a| + |b|$. Dessa forma, deve-se reconhecer, com efeito: $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

4.3 OS NÚMEROS INTEIROS E A RETA

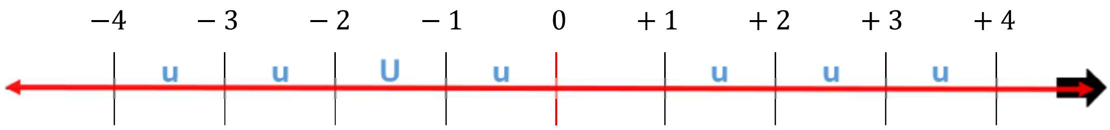
Iezzi e Murakami (2013) explicam que os números inteiros podem ser dispostos em reta orientada, utilizando três etapas. Como representado abaixo, a primeira etapa consiste em elaborar uma reta e estabelecer um sentido de ordem positiva (da esquerda para a direita), definindo como ponto de origem o número inteiro 0 (zero).



Na segunda etapa, considerando o sentido positivo definido acima, a partir de 0, marca-se um seguimento unitário $(u \neq 0)$ com origem em zero e extremidade representada pelo inteiro 1.



Por fim, na terceira etapa, para cada número inteiro positivo n a partir de 0, marca-se um segmento de medida igual a u para a direita e, para cada número inteiro negativo $-n$, marca-se um seguimento de medidas igual a u para a esquerda.



4.4 DIVISIBILIDADE

Conforme os exemplos do Quadro 4, Iezzi e Murakami (2013) explicam o conceito de divisor como importante para números inteiros, a partir do entendimento que um número inteiro a é divisor de um número inteiro b (símbolo $a\ I\ b$), quando existe um outro inteiro c tal como $ca = b$.

Quadro 4 – Exemplificação de divisibilidade dos números inteiros.

$\mathbf{a\ I\ b}$	$(\exists\, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{Z}\ \mathbf{I}\ \boldsymbol{ca} = \boldsymbol{b})$
$4\ \mathrm{I}\ 24$	$6\,.\,4 = 24$
$6\ \mathrm{I} - 36$	$(-6)\,.\,6 = -36$
$-5\ \mathrm{I}\ 20$	$(-4)\,.\,(-5) = 20$
$-4\ \mathrm{I} - 28$	$7\,.\,(-4) = -28$
$7\ \mathrm{I}\ 0$	$0\,.\,7 = 0$
$0\ \mathrm{I}\ 0$	$1\,.\,0 = 0$

Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

Nesse aspecto, concebe-se o seguinte: quando a é divisor de b, b é divisível por a ou b é múltiplo de a. Além disso, conforme representado no

Quadro 5, para um inteiro qualquer a, indica-se com $D(a)$ o conjunto de divisores, e com $M(a)$ o de múltiplos.

Quadro 5 – Exemplificação de divisibilidade dos números inteiros.

Conjunto de divisores	Conjunto de múltiplos
$D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$	$M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$
$D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$	$M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$
$D(0) = Z$	$M(0) = \{0\}$

Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

Salienta-se que um número p inteiro é primo se $p \neq 0$, 1 e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 7\ e - 7$ são, dessa forma, primos.

5 A APRENDIZAGEM E O DESENVOLVIMENTO HUMANO

A pedagogia possui pilares que legitimam e embasam o conhecimento da educação que matemáticos educadores desenvolvem na construção da práxis cotidiana. Essas bases psicológicas são importantes pois amparam os processos humanos no ambiente escolar. Esse universo teórico, base para a educação, associa a pedagogia com a psicologia ao contribuir significativamente para o aprimoramento do ensino do docente.

Nas bases psicológicas da aprendizagem estão as teorias da psicologia do desenvolvimento: o inatismo ou apriorismo; o ambientalismo ou empirismo; o behaviorismo ou comportamentalismo; o interacionismo; o de Gestalt; e o humanista. O inatismo refere-se a uma concepção advinda de conteúdos mentais presentes desde o nascimento e não adquiridas ou aprendidas, mas herdadas. Essa corrente, sobretudo, não é mais utilizada nas práticas pedagógicas, já que a construção do conhecimento considera outros elementos que participam da construção do processo de ensino e aprendizagem, além do fator genético (VYGOTSKY; LURIA; LEONTIEV, 2010).

No empirismo ou no ambientalismo, a fonte do conhecimento é a experiência geralmente adquirida em seu meio físico, sendo mediada por sentidos. Essa escola de pensamento filosófico ressalta a importância da educação e da instrução para a formação do indivíduo. O filósofo inglês John

Locke (1632-1704) foi um dos estudiosos que defendeu essa corrente voltada para a experiência (MEYERS, 2016).

Já no behaviorismo, estuda-se o comportamentalismo e possui como principais estudiosos, Watson (1878-1958) e Skinner (1904-1990). Surgida nos Estados Unidos, o behaviorismo reconheceu o método de aprendizado que utiliza recompensas e punições para o comportamento. Logo, o indivíduo associa determinado comportamento a sua respectiva consequência. Ressalta-se que essa ciência é base para uma tendência mais técnica com comportamentos mensuráveis e observáveis, classificando em contingências positivas (comportamentos desejados) e contingências negativas (comportamentos indesejados). Adicionalmente, descreveu-se na teoria de Skinner o condicionamento operante como aquele que prevê a resposta em determinado estímulo (BAUM, 2018).

Na sequência, a teoria de Gestalt propicia a ideia de que não se pode conhecer um todo pelas partes, pois somente é possível conhecer as partes para alcançar o conjunto. Essa ideia central proporciona à aprendizagem a gradação, a diferenciação, a redefinição e o *insight*. Exemplifica-se como gradação a necessidade de se conhecer os números inteiros para posteriormente dominar cálculos complexos. Da mesma forma que é importante a alfabetização para posteriormente os alunos escreverem frases e dominarem redações. Salienta-se que a gradação nessa teoria não ocorre apenas de forma crescente, mas decrescente também. Por conseguinte, enquanto a diferenciação desenvolve percepção de diferenças, a redefinição utiliza novos significados a partir daqueles já conhecidos. Por fim, o *insight* é um processo de esclarecimento e de associação (RODRIGUES, 2011).

O interacionismo, teoria defendida por Vygotsky (1896-1934) reconhece o meio cultural como essencial para o desenvolvimento do indivíduo. Nesse aspecto, o sujeito deve ser compreendido pelas suas relações com a sociedade ou o sujeito com os objetos ou o social com o biológico. Em suma, o indivíduo se insere no meio sociocultural e, consequentemente, o interacionismo fundamenta-se em um equilíbrio entre o ambiente e o biológico. Isso também implica conhecer o desenvolvimento humano em sentido coletivo para individual (VYGOTSKY, 2010).

Aliás, não somente Vygotsky, mas também Piaget e Wallon trouxeram para a educação a interconexão entre a psicologia e a educação, ampliando a compreensão e as necessidades do sujeito em sua totalidade ou integralidade, que envolvem características cognitivas, sociais, afetivas, psíquicas e motoras. Portanto, devem ser reconhecidos processos convergentes em que a escola contribui para o desenvolvimento e a capacidade do aluno, como sujeito de seu próprio aprendizado, alicerçado a uma pedagogia em matemática que deve se apropriar diretamente de teorias da aprendizagem e da psicologia do desenvolvido, para, enfim, compreender de forma adequada o fenômeno da aprendizagem por meio de jogos concretos.

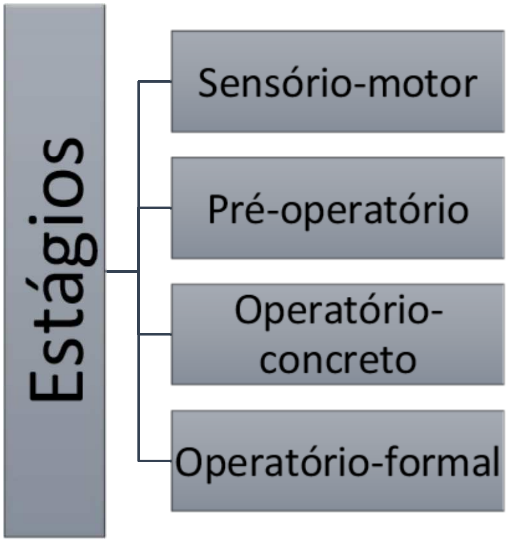
5.1 JEAN PIAGET

O psicólogo e biólogo suíço Jean Piaget (1896-1980) apresentou a aprendizagem a partir de uma perspectiva cognitiva de um indivíduo por estágios de desenvolvimento. Nessa ideia, os processos de desenvolvimento de uma pessoa são representados por um agente de sua própria aprendizagem com alteração qualitativa ao longo do tempo. Isso significa que o indivíduo possui uma herança genética que interfere no processo constitutivo do ser para o meio até chegar na fase e pensamento mais elaborado do adulto (TAILLE; OLIVEIRA; DANTAS, 2019).

É uma teoria de adaptação que não é empirista (transformações a partir do meio), nem inatista (derivações apenas da herança cognitiva genética), mas síntese das duas correntes significando um sujeito e um objeto indissociáveis com cada elemento exercendo o seu papel e, assim, transformando-o mutualmente. Assim, concebeu-se a inteligência como propriedade universal de qualquer ser humano, transformada de forma associada a um meio, e desenvolvida a partir de uma série de estágios sucessivos e qualitativamente diferentes de aprendizagem.

Conforme a Figura 2, entre os estágios estão o sensório-motor (0 a 2 anos), o pré-operatório (2 a 7 anos), o operatório-concreto (7 a 12 anos) e o operatório-formal (acima de 12 anos) (ANTUNES, 2007). Na concepção de Piaget, Veiga (2014) estabelece o estágio sensório-motor, como aquele que ocorre entre os 0 e os 2 anos. Em suma, denominou-se como inteligência prática, alçada em sensações e movimentos, sendo que, até os 8 meses, o mundo é captado de forma atenuada pela visão.

Figura 2 - Estágios do desenvolvimento na concepção de Jean Piaget.



Fonte: Antunes (2007).

No estágio sensório-motor há esquematização de ações a partir de reflexos lógicos básicos e de inteligência prática construída de ação direta com o meio. A imitação diferida ou repetição a partir da observação de movimentos motores similares de pessoas a sua volta. Constrói-se ao final desse nível representações mentais capazes de serem simbolizadas para algo concreto. Taille, Oliveira e Dantas (2019) consideram na ênfase de Piaget, o prazer essencial no jogo de exercício.

Na fase pré-operatória, de 2 a 7 anos, inicia-se a elaboração de relação de causalidade e simbolização. Existe uma capacidade simbólica, com egocentrismo (birra), animismo e pensamento estático e rígido, captadas momentaneamente e sem integração do conjunto. A criança tem a noção do eu, percebendo-se como separado da mãe. Para Taille, Oliveira e Dantas (2019), o jogo simbólico deve fazer parte dessa fase proporcionando não somente prazer, mas de uma linguagem que se baseia em compensações, realizações dedesejos e liquidação de conflitos, envolvendo soma ao prazer e à realidade. Sobretudo, o jogo é uma realidade simbólica, mas com ausência de objeto. Por não seguir regras, Piaget considera essa etapa quanto à evolução das regras como anômica.

No terceiro estágio do desenvolvimento cognitivo, operatório concreto, de 7 a 12 anos, a criança não somente tem a noção de espaço e tempo, como também de abstração de realidade, não se limitando à representação imediata. Salienta-se que há dependência acentuada de mundo concreto para alcançar a abstração (VEIGA, 2014). Para Piaget, o jogo de regras aparece nesse período, provocando à criança o aprendizado das relações sociais e interindividuais, ou seja, coletivas. Nos jogos de regra existem os de exercícios e os simbólicos. Entre nove e dez anos, existe uma subetapa de heteronomia, denominada por Piaget, prevalece no sujeito, indicando regras externas a ele, e predominando temor a respeito à mesma. Nesse período ocorre aumento de interesse às regras (TAILLE; OLIVEIRA; DANTAS, 2019).

Por fim, no quarto estágio de desenvolvimento cognitivo, operatório formal, acima de 12 anos, a criança ou o adolescente passa a pensar em relações possíveis ou hipóteses, mesmo sem observação da realidade. Isso significa a representação da abstração total de um organismo que atinge o equilíbrio. Batista e Dias (2012) adicionam ainda que o desenvolvimento moral se caracteriza como essencial nesse processo de desenvolvimento, mas surgindo internamente, fazendo com que a criança apresente sua própria regra moral. Esse quarto estágio de desenvolvimento cognitivo corrobora-se com a autonomia ou à concepção de um adulto sobre o jogo, uma vez que as crianças jogam seguindo e respeitando regras, mas criando outras novas.

Piaget destacou que até os seis anos, na área da matemática, devem ser reconhecidos valorosos estímulos com relação a conjuntos, grandezas, percepção de grande e pequeno, alto e baixo, maior e menor, largo e estreito, fino e grosso, frente e trás, meio e inteiro, importantes para compreensão de grandezas. Mas em crianças dos seis aos doze anos, Piaget salientou a existência de condições para o regimento de sistemas matemáticos: composições, reversões, associações, anulação e tautologia (ANTUNES, 2014).

Piaget ainda considerou os jogos em grupo como essenciais para o estabelecimento de cooperação entre os indivíduos. Além disso, o jogo passa a assumir papel essencial nos intercâmbios afetivos entre crianças e com adultos (professores e pais, por exemplo). Para Batista e Dias (2012), no desenvolvimento afetivo, a criança interage com o meio e com o grupo, construindo, assim, a sua identidade e personalidade.

Na evolução desses estágios, esquemas simples e concretos transformam-se em complexos e abstratos, manifestando-se em momentos de assimilação e acomodação. A assimilação é desenvolvida quando o indivíduo capta uma nova informação através das ações do sujeito com o meio em que vive. Contudo, essas informações novas encaixam-se nas existentes, não mudando-as. Por sua vez, a acomodação altera o pensamento original ao incluir um novo conhecimento (ANTUNES, 2014).

Nesse processo existem alterações nos esquemas existentes e nas antigas formas de pensar ou agir, quebrando um paradigma. Embora a distinção de definições, tanto a assimilação quanto a acomodação possuem como base princípios que se conectam: a adaptação e o equilíbrio (ANTUNES, 2007). A adaptação é resultado da interação entre a assimilação e a acomodação, evoluindo a cognição adaptando cada vez mais o sujeito ao meio. Já o equilíbrio regula os processos de assimilação e acomodação, preparando-os e adequando-os.

Luiz et al. (2015), na opinião de Piaget, esclarecem que o jogo é "uma assimilação que se sobressai à acomodação, e que a inteligência leva ao equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, sendo a última prorrogada pela imitação". A partir da socialização da criança, o jogo adquire regras, e a imaginação simbólica vai se adaptando à realidade. Ademais, o símbolo da assimilação individual faz com que regras coletivas e objetivos adquiram espaço acompanhando o desenvolvimento da inteligência em seus estágios. Assim, na atividade lúdica infantil deve ser reconhecido o assimilamento e a acomodação de novas informações nas estruturas mentais, sendo o jogo constituindo-se, assim, "quando a assimilação é produzida antes da acomodação, sendo então o jogo considerado um complemento da imitação".

5.2 LEV SEMIONOVITCH VYGOTSKY

Para o bielorrusso Lev Semionovitch Vygotsky (1896-1934), ou simplesmente Vygotsky, a psicologia proporciona para a aprendizagem aspecto sociointeracionista a qual defende um plano mais intersubjetivo entre pessoas.

Diferente de Piaget que reconhecia um processo de maturação do 'eu' com o envolvimento da herança genética, influenciando a constituição do sujeito e da aprendizagem para um 'meio' à medida que amadurece, Vygotsky defende o contrário: uma aprendizagem derivada do meio, das interações ou do plano intersubjetivo. Além disso, no plano interno não há um inatismo ou uma predefinição ou preexistência (VYGOTSKY, 2008).

Outra questão importante apresentada por Vygotsky (2008) é sobre os elementos mediadores: os instrumentos e o signo. Os instrumentos se inserem entre o homem e o mundo ao ampliar as possibilidades de transformação da natureza, enquanto o signo é exclusivamente humano e refere-se aos objetos, às formas e aos fenômenos que representam algo diferente de si mesmos. Por exemplo, o número cinco (5) é representado por um símbolo número no cotidiano, mas possui correlação com cinco canetas ou o V em algarismo romano que se parece com a vigésima letra do alfabeto. Assim, para Vygotsky (2010), o signo contribui para a significação de objetos os quais os indivíduos interagem, viabilizando a interlocução e a compreensão dos sujeitos.

A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDPr) foi um importante conceito apresentado por Vygotsky ao considerar a mediação da zona entre os níveis da Zona de Desenvolvimento Real (ZDR) e a Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDPo). Explica-se que o nível ZDR refere-se ao saber atual ou real ou efetivo do educando, ou seja, o que o aluno é capaz de saber e fazer sozinho. Já o nível ZDPo relaciona-se o que o educando está para alcançar, ou seja, uma projeção de algo que é capaz de saber e fazer com a ajuda dos outros. Por sua vez, o nível ZDPr é a distância entre o real e o potencial ou o caminho que o indivíduo deve percorrer para o desenvolvimento de funções em processo de amadurecimento: algo que o estudo é capaz de aprender ou fazer hoje e que deve conseguir fazer no outro dia (VEIGA, 2014).

Cardoso (2010) citou que Vygotsky demonstrou a influência do jogo na ZDPr ao serem atividades especiais para infância (0 a 12 anos), pois além do indivíduo criar a realidade com sistemas simbólicos, promove a socialização, em seu contexto social e cultural. Acrescenta-se ainda que Vygotsky classificou o brincar em três fases: uma primeira, em que se distancia da mãe, seu primeiro meio social para movimentar-se e contatar com outras pessoas e coisas. Um segunda, em que a criança imita e tem o adulto como modelo; e a terceira e última quando se associa a normas e regras. Diante disso, Vygotsky também considera o brinquedo e o jogo como influência essencial para o desenvolvimento da criança ao agir em uma esfera cognitiva.

Desse modo, considerando as inter-relações e as interdependências entre os aspectos físicos, cognitivos, sociais e emocionais presentes nas atividades de jogos, o desenvolvimento de crianças e adolescentes passa a ser integral quando se faz uma inserção no mundo da cultura e das relações sociais. Assim, os espaços educacionais que inserem jogos devem ser, por excelência, campos de exercício da intersubjetividade. Para Viana e Francishini (2016), ao confrontarem com modos de vida e de existências singulares, decorrentes das condições de vida desses sujeitos, viabiliza-se o diálogo e a tolerância, considerando a diversidade, característica da sociedade, de modo geral, e que se reflete nesses espaços.

Assim, a linguagem explorada pelos jogos passa a cumprir papel essencial nas relações sociais ao promover o intercâmbio social e estabelecer a comunicação entre os sujeitos e ao compartilhar e organizar o mundo real e social, entre os sujeitos, por meio de conceitos, bases linguísticas e significações dentro de um universo amplo de realidades socioculturais (VIANA; FRANCISHINI, 2016). Segundo Vygotsky (2007), tanto o ato de brincar como o de jogar permite a busca de novos caminhos, estratégias e soluções, individualmente e coletivamente, auxiliando o estudante na socialização. Vygotsky (2007) ainda acrescenta as atividades de jogar e brincar como habituais para a idade escolar, ampliando o seu desenvolvimento, tornando a criança autora do seu processo de aprendizagem e ativa. Assim, os conhecimentos em números inteiros proporcionariam não somente uma inteligência prática, mas analítica e criativa.

5.3 HENRI PAUL HYACINTHE WALLON

Assim como Vygotsky, o Filosofo francês Henri Paul Hyacinthe Wallon (1879-1962) defende que a linguagem apresenta uma dupla função: a primeira, de intercâmbio social e a segunda como organizadora do mundo social, significando e representando a realidade objetiva, isto é, como condição do pensamento. Entretanto, diferentemente de Vygotsky, para Wallon a linguagem estabelece principalmente no início da vida, uma relação íntima e interdependente com as emoções (VIANA; FRACISCHINI, 2016).

Na perspectiva de Wallon, Gratiot-Alfandéry (2010) explica que o jogo se insere em um contexto formativo mais globalizado, incluindo a inteligência, a socialização e a afetividade. De corrente denominada sociocognitivista ou socioafetiva, apesar de Wallon não conceber a inteligência como principal fator de desenvolvimento, conjuga a vida psíquica em motora, afetiva e cognitiva que atual de forma conjunta. Isso significa que uma não é menos importante que a outra, pois são integradas.

Para tanto, Wallon apresentou cinco estágios de desenvolvimento: o impulsivo-emocional (0 a 1 ano); sensório-motor e projetivo (1 a 3 anos); personalismo (3 a 6 anos); categorial (6 a 11 anos); e, puberdade e adolescência (11 anos ou mais). Justifica-se que ao associar um recurso didático (jogo) com as características de cada etapa do desenvolvimento, proporciona-se, assim, uma mediação docente mais eficiente e que respeita o ritmo de aprendizagem dos alunos (BACICH; MORAN, 2018).

No estágio impulsivo-emocional, de 0 a 1 ano, a coordenação motora e os movimentos são desorientados. No estágio sensório-motor e projetivo, de 1 a3 anos, predomina-se a inteligência, mas com o exterior prevalecendo sobre os fenômenos cognitivos. Adiciona-se ainda que no sensório-motor são presentes a inteligência prática (interação com objetos utilizando o corpo) e a inteligência discursiva (imitação e apropriação de linguagem) com pensamentos projetados em atos motores. Na fase do personalismo, de 3 a 6 anos, nota-se a promoção da personalidade e da autoconsciência, e na fase categorial, de 6 a 11 anos, mesmo com a continuação do desenvolvimento afetivo e motor, predomina-se acentuadamente a cognição. A partir da puberdade e da fase da adolescência, a partir dos 11 anos, busca-se a autoafirmação com características acentuadas de desenvolvimento sexual e de conflitos internos e externos.

Para Pedroza (2005), Wallon esclareceu que o jogo implica em reproduzir a posterior ação de trabalho do indivíduo no futuro, demandando energia e, dependendo do seu nível, dificuldade na execução e compreensão. Mas vale destacar que Wallon não descreve determinado jogo para se alcançar um objetivo, pois considera o motivo e a finalidade a própria ação. Nesse aspecto, pode-se compreender que Wallon caracterizou a primeira fase de jogo, referente à pré-escolar, mas que é importante ser explicada para fins de compreensão didática neste trabalho de ênfase para o Ensino Fundamental.

Todavia, ao referenciar Wallon, Gratiot-Alfandéry (2010) explica que os jogos passam a comprovar o desenvolvimento de funções e experiências variadas que incluem a socialização, a memorização, a articulação, a sensorial e a enumeração. Tanto a experiência sensorial quanto a de enumeração são importantes para serem consideradas nesse trabalho, pois a utilização de materiais concretos em jogos matemáticos de números inteiros viabiliza o desenvolvimento complexo do estudante.

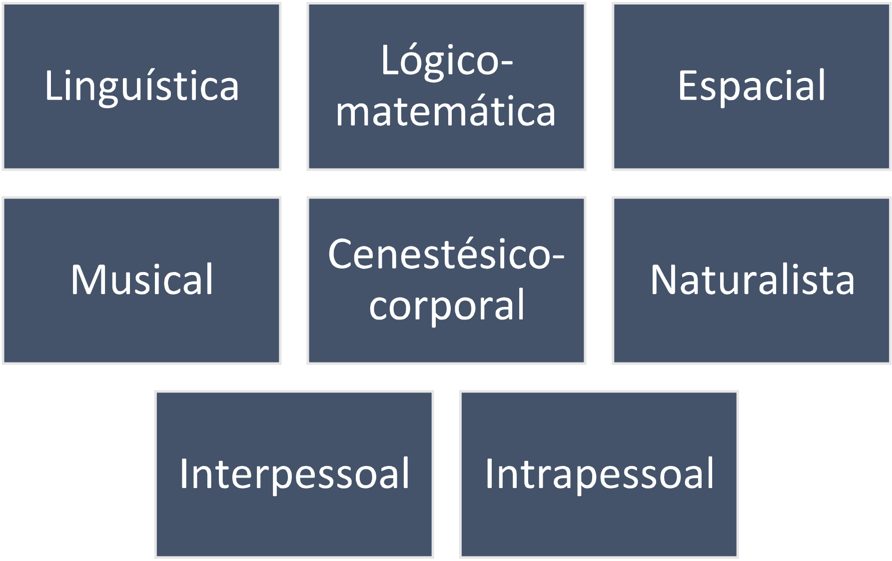
Ao se deparar com alunos adultos no Ensino Fundamental, na concepção de Wallon, o jogo passa a ter representação inversa, pois se desliga de ações lúdicas para atingir necessidades de existência produtivas. Wallon ao considerar as teorias do psicanalista Freud, reconhece o papel catártico das atividades lúdicas ao promover manifestações da libido transferindo a própria realidade do estudante no jogo (GRATIOT-ALFANDÉRY, 2010). Para Pedroza (2005), no jogo, a criança pode reproduzir experiências, imitando-as e repetindo-as. Desse modo, decrescente com a idade, o jogo liberta as ações habituais do sujeito, mas torna-se necessária a imposição de regras para a sua adequada manutenção.

Nesse contexto, e ainda na perspectiva de Wallon, Viana e Francishini (2016) abordaram as emoções e suas exteriorização de afetividades. Assim, os jogos possibilitam a ligação entre a emoção e as atividades motoras com o meio e os centros nervosos. Portanto, o autor reconheceu as emoções como reações organizadas que possuem no sistema nervoso centros reguladores de coordenação de manifestação; e isso, estaria implicitamente o jogo capaz de desenvolver o raciocínio lógico-matemático.

5.4 HOWARD EARL GARDNER

O norte-americano Howard Gardner (1995) propôs uma nova forma de considerar a inteligência ao explicar que as pessoas possuem um conjunto de dimensões ou competências que funcionam de forma independente. Conforme a Figura 3, estão entre as dimensões da inteligência a linguística, a lógico-matemática, a espacial, a musical, a cinestésico-corporal, a naturalista, a intrapessoal e a interpessoal. Ramos e Faria (2011) consideram que esses tipos de inteligência são potenciais para serem ativadas de acordo com determinada cultura, oportunidades e decisões pessoais ou grupais que integram indivíduos, famílias e professores.

Figura 3 - Tipos de inteligências propostas por Howard Gardner.



Fonte: Gardner (1995).

Quanto à inteligência lógico-matemática, é definida pela capacidade de utilizar números de modo eficiente e racional, incluindo geometria dos espaços. Mais acentuada em profissionais cientistas, matemáticos, contadores, engenheiros e analistas de sistema, são representados por indivíduos que se aproximam de cálculos números com mais entusiasmo. Para Antunes (2014), essa inteligência não é exclusiva de letrados, porque existem analfabetos que exercem atividades matemáticas no dia a dia de forma eficiente. Piaget, apesar da ilustre contribuição, chegou a considerar essa inteligência como geral.

Antunes (2014) explica no contexto de Gardner que a inteligência lógico-matemática começa cedo, quando um bebê consegue entender a permanência de um objeto entre as pernas ou mesmo, aos seis anos, quando aprende, decifra e compara objetos grandes e pequenos, grossos ou finos, largos ou estreitos, distantes ou próximos. Nesse aspecto, Antunes (2014) é enfático quando diz que um aluno entenderá melhor os números e as operações matemáticas, bem como os seus fundamentos se apalpá-los. Assim, seriam os materiais concretos, como, moedas, tampinhas, conchas, pedrinhas, blocos, caixas de fósforos, cordas ou cordões necessários para o estímulo do raciocínio abstrato.

Os estímulos para o desenvolvimento lógico-matemático devem ser estruturados nos alunos com novas formas de pensar e apurar elementos referentes à grandeza, à distância, ao peso e ao tempo, introduzidos no conceito de números inteiros. Isso também significa desenvolver áreas cerebrais, como, o lobo parietal esquerdo e algumas outras funções matemáticas no hemisfério direito. Mas Antunes (2007) esclarece que jogos só possuem sentido se forem transformados em experiência de aprendizado construídos. No caso, as regras podem até serem ensinadas, porém a estratégia, a coordenação e as reflexões serão feitas pelo estudante.

Ainda, no contexto de Gardner, implica-se dizer como importante para a matemática, não somente o desenvolvimento da inteligência lógica, mas também a espacial. A inteligência espacial é representada pela capacidade com que o indivíduo consegue perceber as formas iguais ou diferentes e em variados ângulos, com eficácia de precisão. Para Antunes (2014), a inteligência espacial possui características de parte da matemática, ao mesmo tempo que envolve o sentido da lateralidade na criança: esquerda, direita, embaixo, acima, próximo e distante, dentro, fora, igual ou diferente, em volta ou entre, com objetos concretos - fósforos, garrafas, copos plásticos e outros recursos palpáveis.

6 CARACTERIZAÇÃO DOS JOGOS

Sabe-se que a brincadeira é uma necessidade do ser humano, independentemente da idade. Tanto o brincar como o jogar são caracterizadas por expressão e comunicação desde o nascimento. Nessa perspectiva, é uma atividade humana social com contexto cultural com indivíduos que utilizam a fantasia e a imaginação para interagir com a realidade que o cerca ou mesmo em um mundo intrassubjetivo produzindo, dessa forma, novas possibilidades. Contudo, também deve ser reconhecido que na infância, o ato de brincar não deve ser compreendido apenas pelo aspecto da diversão, mas também, pelas potencialidades do desenvolvimento humano.

Aliás, nesse ponto de estudo, torna-se importante diferenciar o brincar, o jogar, a brincadeira e o jogo. O ato de brincar corresponde a um comportamento que altera um contexto e o próprio indivíduo, não sendo uma resposta a determinado estímulo. Já o termo jogar*,* apesar de referenciar atividades lúdicas, é mais empregado em atividades ou jogos sujeitos a um sistema de regras identificáveis e evidentes. Nos jogos existem uma sequência de regras que os diferenciam e variam de acordo com a época e o meio cultural.

De acordo com Vygotsky, Luria e Leontiev (2010), ao brincar, atribui-se uma função social e humana que desempenham ações. Ao passo que as regras vão se tornando explícitas com situação imaginária e papel latentes, identificam-se os jogos limítrofes, localizados entre os brinquedos clássicos e os jogos. Os jogos possuem caráter didático mais focalizado, com conteúdo fixo, objetivos e regras bem definidas, e ludicidade em segunda instância. Esses jogos, também conhecidos como de regra fixa possui objetivos mais definidos.

6.1 CLASSIFICAÇÕES E SISTEMATIZAÇÕES

O jogo é um gênero que pode ser classificado em várias formas e, assim, as classificações de jogos e brinquedos são diversas. Apesar da variedade, de forma geral, dividem-se em etnológicas ou sociológicas, filogenéticas, psicológicas e pedagógicas. Enquanto as classificações do tipo etnológicas identificam os brinquedos de acordo com o papel atribuído em contexto social, as classificações filogenéticas analisam os brinquedos de acordo com a evolução da humanidade e a reprodução pela criança do jogo. Por conseguinte, as classificações psicológicas possuem como base o desenvolvimento infantil e as hierarquias de jogos, e as classificações pedagógicas de acordo com as metodologias educativas (DINIZ; KERBEJ, 2020).

Sob a ótica de Diniz e Kerbej (2020), quando se analisa um jogo com peteca ou cabo de força, a classificação pode ser estabelecida como do tipo etnológica ou sociológica, uma vez que são originados dos povos indígenas. Por outro lado, um jogo de xadrez que podia apenas ser jogado em tabuleiros no início do século XX, passaram a estar disponíveis em *softwares* decomputadores no início do século XXI e, posteriormente, em aplicativos de *smartphones*. Esses últimos, tendo a classificação do tipo filogenética, variam com o tempo, o conhecimento ou a geração do indivíduo.

Em contrapartida, quando se exemplificam os jogos do tipo psicológico, podem ser citados aqueles de psicomotricidade. Se há o desejo de desenvolvimento motor estimula-se funções mais complexas com atividades que envolvam o equilíbrio (amarelinha) ou o pulo (pula corda). No caso do tipo pedagógico, podem ser citados os jogos com finalidade educativa (Escopa Zero, Régua Mágica, Jogo dos sinais, Caminhando na Reta Numérica e Elastisque).

Entre as variadas sistematizações utilizadas nos jogos pedagógicos em escolas, destacam-se três: *Internacional Council for Children's Play* (ICCP), *Classement des Objets Ludiques* (COL) e de jogos de Exercícios, Simbólicos, de Acoplagem e de Regras (ESAR).

O primeiro, ICCP, aplica a classificação de jogos e brinquedos baseada em observação direta apoiada em uso cotidiano. Entre critérios que consideram a funcionalidade, a estruturação, a experimentação e a relação, o ICCP considera ainda as fases primeira idade, de 0 a 15 meses, maternal, de 15 meses a 3 anos, pré-escolar, de 3 a 6 anos, escolar, de 6 a 12 anos e adolescência, de 12 a 16 anos. Adicionalmente, integram-se à análise, as áreas da personalidade do aluno, sendo, sensório-motor, inteligência, afetividade, criatividade e sociabilidade. Não obstante, e conforme a Figura 4, ao final do cruzamento dos critérios, das faixas etárias e personalidades, inclui-se a categoria dos brinquedos (NASCIMENTO, 2010).

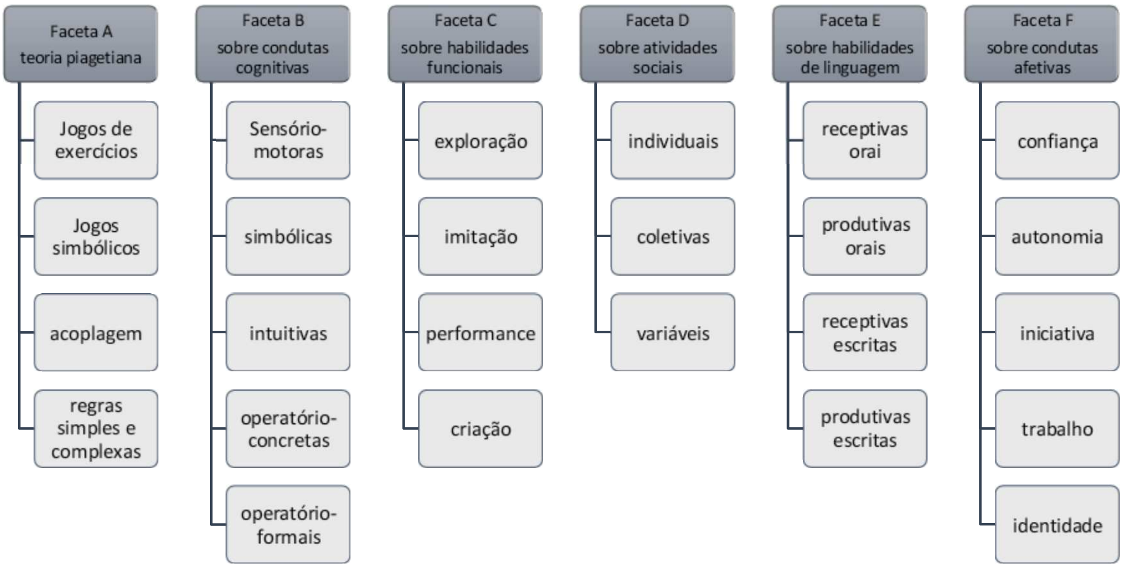
Figura 4 – Cruzamento de critérios da classificação ICCP.

Fonte: Nascimento (2010).

O segundo sistema, COL, apresentado por Kobayashi (2009) preocupa-se com a simplicidade de utilização, ganho de tempo e valorização dos objetos lúdicos. Em 1997, o sistema COL foi adaptado por Odile Périno, tendo como base os trabalhos de Denise Garon sobre o ESAR (NICOLIELO; SOMMERHALDER; KOBAYASHI, 2014). O terceiro sistema, ESAR, criado por Garon (1998), classifica os brinquedos de acordo com as teorias Piagetianas. O acrônimo ESAR refere às classes evolutivas do jogo: E de Exercício; S de Simbólico; A de Acoplagem ou Construção; e R de Regras.

De acordo com a Figura 5, considera-se ainda, a partir dessa classificação, 6 facetas: A, B, C, D, E e F. A faceta A relaciona-se diretamente à teoria piagetiana e a B, às condutas cognitivas. Na sequência, a faceta C promove habilidades funcionais, a faceta D, atividades sociais, a faceta E, habilidades de linguagem, e a F às condutas afetivas.

Figura 5 – Facetas da classificação do sistema ESAR.



Fonte: Garon (1998).

Conforme o Quadro 6, a faceta A da classificação ESAR divide-se em jogos de Exercícios, jogos Simbólicos, jogos de Acoplagem e jogos de Regras simples e complexas.

Quadro 6 – Ênfases e atividades lúdicas da faceta A da classificação ESAR.

ÊNFASES	ATIVIDADES LÚDICAS
Jogos de Exercícios	Jogo sensorial sonoro
	Jogo sensorial visual
	Jogo sensorial tátil
	Jogo sensorial olfativo
	Jogo sensorial gustativo
	Jogo motor
	Jogo de manipulação
Jogos Simbólicos	Jogo de faz-de-conta
	Jogo de papéis
	Jogo de representação
Jogos de Acoplagem	Jogo de construção
	Jogo de ordenação
	Jogo de montagem mecânica
	Jogo de montagem eletrônica
	Jogo de montagem eletromecânica
	Jogo de acoplagem científica
	Jogo de acoplagem artística
Jogos de Regras Simples	Jogo de loto
	Jogo de dominó
	Jogo de sequência
	Jogo de circuito
	Jogo de destreza
	Jogo esportivo elementar
	Jogo de estratégia elementar
	Jogo de sorte
	Jogo elementar de pergunta e resposta
	Jogo de vocabulário
	Jogo de matemática
	Jogo de teatro
	Jogo de reflexão

Jogos de Regras Complexas	Jogo esportivo complexo
	Jogo de estratégias complexas
	Jogo complexo de pergunta e resposta
	Jogo de vocabulário complexo
	Jogo de análise matemática
	Jogo de acoplagem complexa
	Jogo de representação complexa
	Jogo de cena

Fonte: Garon (1998).

Na sequência, e de acordo com o Quadro 7, a faceta B sobre condutas cognitivas, divide-se em ênfases sensório-motoras, simbólicas, intuitivas, operatório-concretas e operatório-formais.

Quadro 7 – Ênfases e condutas cognitivas da faceta B da classificação ESAR.

ÊNFASES	CONDUTAS COGNITIVAS
Sensório-Motoras	Repetição
	Reconhecimento sensório-motor
	Generalização sensório-motora
	Raciocínio prático
Simbólicas	Evocação simbólica
	Ligação imagem-palavra
	Expressão verbal
	Pensamento representativo
Intuitivas	Triagem
	Emparelhamento
	Diferenciação de cores
	Diferenciação de dimensão
	Diferenciação de formas
	Diferenciação de texturas
	Diferenciação temporal
	Diferenciação espacial
	Associação de ideias
	Raciocínio intuitivo
	Classificação
	Seriação
	Correspondência

Operatório-concretas	Relação imagem-palavra
	Numeração
	Operações numéricas
	Conservação de quantidades físicas
	Relações espaciais
	Relações temporais
	Coordenação simples
	Raciocínio concreto
Operatório-formais	Raciocínio hipotético
	Raciocínio dedutivo
	Raciocínio indutivo
	Raciocínio combinatório
	Sistemas de representações complexas
	Sistemas de coordenadas complexas

Fonte: Garon (1998).

Na sequência, e de acordo com o Quadro 8, a faceta C sobre habilidades funcionais, divide-se em ênfases de exploração, de imitação, de performance e de criação.

Quadro 8 – Ênfases e habilidades funcionais da faceta C da classificação ESAR.

ÊNFASES	**HABILIDADES FUNCIONAIS**
Exploração	Percepção visual
	Percepção auditiva
	Percepção tátil
	Percepção gustativa
	Percepção olfativa
	Referenciação visual
	Referenciação auditiva
	Preensão
	Deslocamento
	Movimento dinâmico no espaço
	Reprodução de ações
	Reprodução de objetos
	Reprodução de acontecimentos
	Reprodução de papéis
	Reprodução de modelos
	Reprodução de palavras
	Reprodução de sons
	Aplicação de regras

Imitação	Atenção visual
	Atenção auditiva
	Discriminação visual
	Discriminação auditiva
	Discriminação tátil
	Discriminação gustativa
	Discriminação olfativa
	Memória visual
	Memória auditiva
	Memória tátil
	Memória gustativa
	Memória olfativa
	Coordenação olho-mão
	Coordenação olho-pé
	Orientação espacial
	Orientação temporal
	Organização espacial
	Organização temporal
Performance	Acuidade visual
	Acuidade auditiva
	Destreza
	Leveza
	Agilidade
	Resistência
	Força
	Rapidez
	Precisão
	Paciência
	Concentração
	Memória
Criação	Criatividade de expressão
	Criatividade produtiva
	Criatividade inventiva

Fonte: Garon (1998).

Por conseguinte, e conforme o Quadro 9, a faceta D sobre atividades sociais, divide-se em ênfases individuais, coletivas e variáveis.

Quadro 9 – Ênfases e atividades sociais da faceta D da classificação ESAR.

ÊNFASES	ATIVIDADES SOCIAIS

Atividade Individual	Atividade solitária
	Atividade paralela
Participação Coletiva	Atividade associativa
	Atividade competitiva
	Atividade cooperativa
Participação Variável	Atividade solitária ou paralela
	Atividade solitária ou associativa
	Atividade solitária ou competitiva
	Atividade solitária ou cooperativa

Fonte: Garon (1998).

Na sequência, conforme o Quadro 10, a faceta E sobre habilidades de linguagem, divide-se em ênfases receptivas orais, produtivas orais, receptivas escritas e produtivas escritas.

Quadro 10 - Ênfases e habilidades de linguagem da faceta E da classificação ESAR.

ÊNFASES	HABILIDADES DE LINGUAGEM
Receptivas Orais	Discriminação verbal
	Emparelhamento verbal
	Decodificação verbal
Produtivas Orais	Expressão pré-verbal
	Reprodução verbal de sons
	Nomeação verbal
	Sequência verbal
	Expressão verbal
	Memória fonética
	Memória semântica
	Memória léxica
	Consciência da linguagem
	Reflexão sobre a língua
	Discriminação de letras

Receptivas Escritas	Correspondência letra-som
	Decodificação silábica
	Decodificação de palavras
	Decodificação de frases
	Decodificação de mensagens
Produtivas Escritas	Memória ortográfica
	Memória gráfica
	Memória gramatical
	Memória sintática
	Expressão escrita

Fonte: Garon (1998).

Na sequência, conforme o Quadro 11, a faceta F sobre condutas afetivas, divide-se em ênfases de confiança, autonomia, iniciativa, trabalho e identidade.

Quadro 11 – Ênfases e condutas afetivas da faceta F da classificação ESAR.

ÊNFASES	CONDUTAS AFETIVAS
Confiança	Não diferenciação
	Sorriso como resposta
	Apego a objeto transicional
	Angústia face ao desconhecido
Autonomia	Consciência do não
	Consciência do corpo
	Reconhecimento de si próprio
Iniciativa	Diferenciação de sexos
	Identificação paterna
	Aprendizagem dos papéis sociais
Trabalho	Curiosidade intelectual
	Reconhecimento social
	Identificação extrafamiliar
Identidade	Busca de personalidade
	Aprendizagem em organização social

Fonte: Garon (1998).

6.2 REQUISITOS E CUIDADOS

Também denominados requisitos, para Silva (2017), os princípios subjetivos fundamentais dos jogos baseiam-se em quatro pontos: inclusão, coletividade, igualdade e desenvolvimento humano. A inclusão refere-se à oportunidade de participação e interação entre todas as pessoas, independentemente de suas limitações, e a coletividade, ao respeito à participação do grupo. Enquanto a igualdade expressa os direitos e os deveres dos integrantes, com estímulo à responsabilidade dos participantes nas decisões, o desenvolvimento humano expressa a condição de indivíduo na sociedade com processualidade e cooperação em busca de recursos e melhorias.

Bordin e Bisognin (2011) esclarecem a necessidade de o professor mediar a interação dos objetos, questionando e estimulando os alunos a formularem hipóteses e conclusões do conceito apreendido. Outros cuidados devem ser preservados nas atividades de jogos, segundo Brasil (1998) devem ser analisados e avaliados previamente pelo professor:

- compreensão: facilidade de compreensão do processo do jogo, considerando autocontrole e respeito;
- facilidade: possibilidades de se construir estratégias vencedoras;
- descrição: capacidade de esclarecer os objetivos e os procedimentos de atuação;
- estratégias: capacidade de apresentar variadas hipóteses.

Por sua vez, Antunes (2014) esclarece que é essencial o uso de jogos que conectem a matemática da sala de aula com as resoluções de problemas do cotidiano. Rodrigues et al. (2014) complementam que os jogos e a sua característica objetiva essencial – regra, deve ter duas característicasessenciais: a suficiência e a consistência. A suficiência requer o estabelecimentode diretrizes para o que é permitido ao jogador fazer, enquanto a consistência apresenta regras que não podem ser contraditórias.

Silva (2017) estabeleceu três princípios básicos para o desenvolvimento de jogos cooperativos nas propostas pedagógicas: a vivência; a reflexão; e a transformação. Enquanto a vivência apoia-se na inclusão e no incentivo de todos os alunos e participantes, a reflexão posterior aos jogos podem promover a melhoria ou modificação para novas partidas, melhorando a aprendizagem dos envolvidos. A transformação, por sua vez, representa o diálogo e o poder de decisão do consenso entre os participantes. Logo, teriam os jogos cooperativos não somente o poder de estímulo de ação e reflexão, mas de melhorar, continuar e sentir o prazer de continuar jogando.

No trabalho docente com a utilização de um determinado jogo, em um primeiro momento, o conteúdo de ensino é o próprio jogo, ou seja, as atividades do jogo devem prevalecer, mesmo que em algumas situações conceitos e princípios matemáticos sejam utilizados. Em um segundo momento, por meio de problematizações propostas a partir das atividades do jogo, o professor poderá relacioná-lo com assuntos da Matemática. Em outras palavras, talvez não devessem existir jogos associados explicitamente a certos conteúdos matemáticos, mas sim jogos que, por meio de problematizações de suas atividades, permitissem ao professor trabalhar conceitos e princípios matemáticos (RODRIGUES et al., 2014).

Assim, preocupações como “Para que conteúdo matemático serve esse jogo?” ou “Para que faixa etária esse jogo é indicado?” devem ser relativizadas. Podemos inventar um jogo que envolva dois dados e utilizá-lo tanto para um trabalho com as operações fundamentais como também para uma atividade relacionada a probabilidade. Vale ressaltar que quem for utilizar o jogo em sala de aula deve tê-lo jogado bastante, pois assim poderá participar, intervir e vivenciar as atividades e as situações. Além disso, em muitas oportunidades, será necessário voltar ao jogo para analisar e discutir as estratégias utilizadas, assim como os conhecimentos matemáticos envolvidos. Outra preocupação com os jogos é que eles levam à competição. Mesmo que isso constituísse um problema, se os competidores fossem formados por duplas, a derrota seria suavizada (RODRIGUES et al., 2014).

7 JOGOS COM NÚMEROS INTEIROS NA PERSPECTIVA DA ESAR

A escolha dos jogos a partir da classificação ESAR ocorreu com base na leitura das tabelas ou facetas. No caso do Jogo dos Sinais, por exemplo, verificou-se que sua área na faceta A pertence de forma atenuada à ênfase Jogos de Regras Simples (Jogo de Matemática). Caracterizou-se como jogo de regra simples devido aos conceitos de números inteiros aplicado nesse jogo se enquadrarem como descomplicados em comparação a outras teorias matemáticas.

Continuando a leitura das tabelas, verificou-se que a área B, de conduta cognitiva, também pertence às ênfases Operatório-Concretas (Operações Numéricas) e Operatório-Formais (Indutivas). Como já é sabido, no terceiro estágio do desenvolvimento cognitivo, operatório concreto, de 7 a 12 anos, a criança não somente tem a noção de espaço e tempo, como também de abstração de realidade, não se limitando à representação imediata. Isso significa que a representação de operações numéricas por meio da quantidade de cartas e cores é suficiente para a noção relacional. Quanto à ênfase operatório-formal refere-se à capacidade de um estudante de números inteiros, de 12 anos ou mais, conseguir por meio da indução, pensar em relações possíveis ou hipóteses.

Quanto aos outros jogos – Régua Mágica, Elastique, Caminhando na Reta Numérica e Escopa Zero, apresentados na cartilha em anexo a este estudo, estabeleceu-se as seguintes classificações:

- Régua Mágica: área A (atividade lúdica) de regra simples (matemática e de manipulação); área B (conduta cognitiva) operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutiva);
- Elastique: área A (atividade lúdica) de regra simples (matemática e de manipulação); área B (conduta cognitiva) operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutiva);
- Caminhando na Reta Numérica: área A (atividade lúdica) de regra simples (matemática e de manipulação); área B (conduta cognitiva) operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutiva);
- Escopa Zero: área A (atividade lúdica) de regra simples (matemática e de manipulação); área B (conduta cognitiva) operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutiva).

8 CONCLUSÃO

Concluiu-se que o objetivo geral deste estudo foi alcançado, ao apresentar de forma clara, concisa e objetiva, uma revisão de literatura sobre jogos de matemática voltados para a aprendizagem dos números inteiros no Ensino Fundamental, a partir da classificação ESAR.

Conforme o primeiro objetivo específico, compreender os números inteiros sob o aspecto histórico, de propriedades matemáticas e de apresentação nas retas, verificou-se que a origem dos números inteiros $(\mathbb{Z})$ ocorreu por volta de 1500 d.C., depois das descobertas dos números naturais $(\mathbb{N})$ pelos egípcios em 4000 a.C., racionais (Q) em 3000 a.C. e irracionais (I) em 530 a.C. Além disso, soube-se que o conjunto dos números inteiros possui propriedades de adição e multiplicação com os axiomas comutação, associação, existência e unicidade de elementos neutro e/ou oposto, distributividade e sem divisores de zero. Salienta-se que um número inteiro a pode ser absoluto e disposto em uma reta real, podendo ser positivo ou negativo a depender de sua localização em relação à posição 0 (zero).

Na sequência, de acordo com o segundo objetivo específico, contextualizar a teoria da aprendizagem e do desenvolvimento humanos com os teóricos Piaget, Vygotsky, Wallon e Gardner, compreendeu-se que as bases psicológicas da aprendizagem devem ser desenvolvidas pela disciplina da matemática na sala de aula. Em perspectiva histórica, notou-se variadas teorias, como, inatismo (em desuso, já que considera apenas o fator genético), empirismo (experiências como fontes de conhecimento), behaviorismo (comportamentalismo), interacionismo (defendida por Vygotsky, reconhece o meio cultural, os elementos mediadores - signo e instrumentos, e as zonas de desenvolvimento) e a de Gestalt (aprendizagem por gradação, diferenciação, redefinição e insight).

Além da valorosa contribuição de Vygotsky para o ensino da matemática mediada por jogos, torna-se relevante destacar os estudos de Piaget (perspectiva cognitiva a partir de estágios do desenvolvimento), Wallon (assim como Vygotsky, dupla função da linguagem – intercâmbio social e organizadora do mundo, mas com ênfase nas emoções) e Gardner (inteligência múltipla que inclui a lógico-matemática).

Por conseguinte, conforme o terceiro objetivo específico, apresentar as classificações e sistematizações dos jogos, bem como seus requisitos e cuidados, verificou-se que um jogo pode ter a modalidade etnológica ou sociológica (contexto social), filogenética (considera a evolução da humanidade), psicológica (considera o desenvolvimento infantil e as hierarquias de jogos) e pedagógico (de acordo com metodologias educativas). Paralelamente às modalidades, surgiram três sistemas de aplicação de jogos: ICCP, COL e ESAR. Enquanto o sistema ICCP considera a idade, as áreas de personalidade do aluno e as cores, o COL classifica de acordo com as teorias piagetianas, e o ESAR, objeto deste estudo, considera as classes evolutivas dos jogos e a determinadas facetas.

O sistema ESAR é um acrônimo referente às classes evolutivas ou às ênfases E de exercício, S de símbolo, A de acoplagem ou construção, e R de regras. Considera-se ainda, a partir dessas classes, 6 facetas: A, B, C, D, E e F. A faceta A se relaciona diretamente à teoria piagetiana, a B às condutas cognitivas, a C às habilidades funcionais, a D às atividades sociais, a E às habilidades de linguagem e a F às condutas afetivas.

Logo, de acordo com o quarto objetivo específico, compreender o processo de classificação ESAR de jogos sobre números inteiros apresentados na cartilha em anexo, constatou-se que a escolha deve ocorrer com base na leitura das tabelas ou facetas. No caso do Jogo dos Sinais, por exemplo, verificou-se que sua área na faceta A pertence de forma atenuada à ênfase nos Jogos de Regras Simples (Jogo de Matemática); enquanto a área B, de conduta cognitiva, pertencente às ênfases Operatório-Concretas (Operações Numéricas) e Operatório-Formais (Indutivas). A partir dessa sistemática, conforme os jogos em anexo (Escopa Zero, Régua Mágica, Jogo dos Sinais, Caminhando na Reta Numérica e Elastique), observou-se que outros jogos podem desenvolver habilidades com números inteiros em alunos do Ensino Fundamental.

O professor pode, de acordo com a classificação ESAR, elaborar um planejamento de jogos para matemática diversificado a partir da realidade do ambiente escolar, dos materiais e infraestrutura geral, bem como da escolha dos alunos, preferencialmente com diagnóstico prévio. Dessa forma, o trabalho contribui para o professor buscar práticas docentes criativas, por meio de materiais acessíveis e de baixo custo, além de embasar teoricamente e introduzir a importância de preparo de materiais motivados por grandes estudiosos, possibilitando que um jogo colabore em diferentes aspectos sobre os estudantes envolvidos.

Além disso, recomenda-se o fortalecimento e a continuação de estudos sobre a classificação de jogos em matemática a partir do método ESAR em Instituições de Ensino, a nível de graduação e pós-graduação e em centros de pesquisa. Torna-se importante também estudos com aplicação e prática em atividades presenciais. Deve-se destacar aqui, a grande dificuldade na realização deste estudo, já que com a pandemia do COVID-19 não foi possível verificar *in loco* a real efetividade desses jogos. Não obstante, baseado em estudos teóricos, acredita-se que os mesmos tem a capacidade de beneficiar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental no que tange ao ensino dos números inteiros.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **Novas maneiras de ensinar, novas formas de aprender.** 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 172 p.

ANTUNES, Celso. **O jogo e a educação infantil**: falar e dizer, olhar e ver, escutar e ouvir. 15 ed. Petrópolis: Vozes, 2014. 88 p.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora.** Porto Alegre: Penso, 2018. 260 p.

BATISTA, Drielly Andrean; DIAS, Carmen Lúcia Dias. O processo de ensino e de aprendizagem através dos jogos educativos no Ensino Fundamental. **Colloquium Humanarum**, v. 9, n. especial, jul./dez, 2012. Disponível em: www.unoeste.br/site/enepe/2012/suplementos/area/Humanarum/Ciências%20Humanas/Educação/O%20PROCESSO%20DE%20ENSINO%20E%20DE%20APRENDIZAGEM%20%20ATRAVÉS%20DOS%20JOGOS%20EDUCATIVOS%20NO%20ENSINO%20FUNDAMENTAL.pdf. Acesso em: 10 abr. 2020.

BAUM, William. **Compreender o Behaviorismo:** comportamento, cultura e evolução. São Paulo: Artmed, 2018. 312 p.

BEZERRA, Nazaré. **Teoria dos números inteiros:** um curso introdutório. Belém: AEDI/UFPA, 2018. Disponível em: https://livroaberto.ufpa.br/jspui/handle/prefix/479. Acesso em: 11 abr. 2020.

BORDIN, Laura Moreira; BISOGNIN, Eleni. **Os materiais manipuláveis e a utilização de jogos pedagógicos no processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros**. Trabalho apresentado no 2° Congresso Nacional de Educação Matemática, 2011 Ijuí. Disponível em: www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE80.pdf. Acesso em: 10 abr. 2020.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da Matemática.** 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 508 p.

BRASIL. **Resultado Saeb**: ano 2017. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/resultados. Acesso em: 13 abr. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC; SEF, 1998. 142 p. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 11 abr. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC; SEF, 1997. 142 p. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 11 abr. 2020.

CARDOSO, Eliete Lemos. **A importância do brincar e do jogo para o desenvolvimento da criança.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/39541. Acesso em: 3 abr. 2020.

DINIZ, Luciene; KERBEJ, Maria Helena Aita. **Brinquedoteca e suas diferentes dimensões.** São Paulo: Cruzeiro do Sul, 2020.

GARDNER, Howard. **Inteligências múltiplas:** a teoria na prática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 356 p.

GARON, Denise. **O direito de brincar**: a brinquedoteca. *In*: FRIEDMANN, Adriana. 4. ed. São Paulo: Scritta, 1998. 269 p.

GRATIOT-ALFANDÉRY, Hélène. **Henri Wallon.** Tradução: Patrícia Junqueira. Recife: Fundação Joaquim Nabuco; Massangana, 2010. 134 p.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar.** 7. ed. Bela Vista: Atual, 2013. 416 p.

KOBAYASHI, Maria do Carmo Monteiro. Classificação dos objetos lúdicos. **Revista Direcional Educador**, n. 5, v. 50, mar. 2009. Disponível em: http://www.labrimp.fe.usp.br/index.php?action=artigo&id=8. Acesso em: 20 abr. 2020.

LAUNAY, Mickael. **A Fascinante História da Matemática:** da Pré-História aos dias de hoje. São Paulo: Difel, 2019. 264 p.

LUIZ, Jéssica Martins Marques et al. As concepções de jogos para Piaget, Wallon e Vygotski. **Revista Digital**, Buenos Aires, v. 19, n. 195, ago. 2015. Disponível em: https://www.efdeportes.com/efd195/jogos-para-piaget-wallon-e-vygotski.htm. Acesso em: 17 abr. 2020.

MEYERS, Robert. **Empirismo.** Petrópolis: Vozes, 2016. 254 p.

NASCIMENTO, Helena Aparecida Botelho de Freitas do. Jogos e brinquedos e suas classificações. *In:* JORNADA PEDAGÓGICA DO LALUPE, 2., Ponta Grossa, **Anais** [...] Ponta Grossa: UEPG - Laboratório Lúdico Pedagógico. Disponível em: www.joped.uepg.br/2010/anais/painel/20187_1_FINAL.pdf. Acesso em: 29 abr. 2020.

NICOLIELO, Maria Elisa; SOMMERHALDER, Aline; KOBAYASHI, Maria do Carmo Monteiro. Brinquedos e Jogos na Educação Infantil: Saberes e Práticas Pedagógicas de Professoras. *In:* **Didática e Prática de Ensino na relação com a Escola.** EdUECE: Fortaleza, 2014.

PEDROZA, Regina Lúcia Sucupira. Aprendizagem e subjetividade: uma construção a partir do brincar. **Revista do Departamento de Psicologia UFF**, v. 17, n. 2, jul./dez. 2005. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0104-80232005000200006. Acesso em: 23 nov. 2020.

RAMOS, Maria Beatriz Jacques; FARIA, Elaine Turk. **Aprender e ensinar**: diferentes olhares e práticas. Porto Alegre: PUCRS, 2011. 228 p.

RODRIGUES, Carolina Innocente et al. **Aprendo com jogos:** conexões e educação matemática. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014. 176 p.

RODRIGUES, Hugo Elídio. **Introdução à Gestalt-Terapia**: conversando sobre os fundamentos da abordagem gestáltica. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 2011. 200 p.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012. 512 p.

SILVA, Maria Gabriela Leão da. **Jogos cooperativos e sua utilização no Ensino Fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia), Centro Universitário de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://repositorio.uniceub.br/jspui/bitstream/235/5880/1/21172230.pdf. Acesso em: 29 mar. 2020.

SOARES, Amanda Juvino. Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros. *In*: **Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor**. Produções didático pedagógicas – PDE, v. 2, Governo do Estado do Paraná 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoe s_pde/2016/2016_pdp_mat_unicentro_solenifilipin.pdf. Acesso em: 30 mar. 2020.

SOUSA, Nagraely dos Prazeres *et al.* Materiais manipuláveis nas aulas de matemática: Um olhar sobre a prática dos professores do ensino fundamental de Bom Jardim. **Braz. J. of Develop.**, Curitiba, v. 6, n. 7, p. 42691-42707, jul. 2020. Disponível em: https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/12552/10521. Acesso em: 5 fev. 2020.

TAILLE, Yves de la; OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: teorias psicogenéticas em discussão. 28 ed. São Paulo: Summus, 2019. 138 p.

VEIGA, Elizabeth Carvalho de. **Psicopedagogia**: da epistemologia convergente à psicopedagogia modular. Curitiba: Universidade Positivo, 2014. 170 p.

VIANA, Meire Nunes; FRANCISCHINI, Rosângela. **Psicologia escolar**: que fazer é esse? Brasília: Conselho Federal de Psicologia, 2016. Disponível em: http://site.cfp.org.br/wp-content/uploads/2016/08/CFP_Livro_PsinaEd_web.pdf. Acesso em: 11 abr. 2020.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A Formação Social da Mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 224 p.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem.** 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008. 212 p.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Psicologia Pedagógica.** 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2010. 215 p.

VYGOTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Dmitry. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem.** 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. 232 p.

Números inteiros

G197n Garcez, Brenda Pavão
Números inteiros / Brenda Pavão Garcez. – Dourados, MS: UEMS, 2021.
15p.

Produção Técnica (Mestrado) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Lenine Alves.
ISBN: 978-65-86308-49-5.

1. Matemática 2. Números inteiros 3. Jogos I. Alves, Aguinaldo Lenine II. Título

CDD 23.ed. – 512.7

Sumário

Jogo dos sinais

Objetivo:

Desenvolver habilidades para efetuar adição e subtração com números positivos e negativos.

Material:

Folhas de cartolinas azul e vermelho, tesoura sem ponta, régua, lápis e caneta hidrográfica a preta.

Metodologia de confecção:

1 – Com o auxílio de um lápis e uma régua fazer 20 quadrados. Sugere-se de 4 cm. 2- Recorte-os com a tesoura; 3- Utilizando a caneta hidrográfica preta, coloque um sinal positivo em cada lado do quadrado azul, e um sinal negativo em cada lado do quadrado vermelho.

Metodologia de resolução

1 – Na lousa, o professor deve colocar a expressão a ser trabalhada. 2- No processo de resolução, uma carta azul representa quantitativamente um valor positivo, enquanto uma carta vermelha representa quantitativamente um valor negativo. 3- Junta-se a carta azul positiva com a carta vermelha negativa. 4- Em uma expressão com resultado positivo, sobra-se uma ou mais cartas azuis; em expressão com resultado negativo, sobra-se uma ou mais cartas vermelhas; quando não se sobra carta alguma, o resultado é zero.

Código QR - Acesso ao Youtube:

Classificação ESAR: Desenvolvimento

A (atividade lúdica): De regra simples (matemático)

B (conduta cognitiva): Operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutivo).

Fonte: Bordim (2011).

Régua Mágica

Objetivo:

Desenvolver habilidades para resolver operações simples com números negativos.

Material:

Folhas sulfites (impressas com a régua), tesoura sem ponta, cola.

Metodologia de confecção:

1 – Baixe a folha disponível em https://drive.google.com/drive/u/0/my-drive. 2 – Imprima em quantidade suficiente para os alunos. 3 - Recorte as réguas, sendo uma com entradas, e outra, incluindo as áreas laterais brancas. 4 - Recorte as figuras ovais e cole a parte amarela nas aberturas dos dois lados. 5 - Recorte os retângulos azuis e dobre-os nas extremidades, colando-as. 6 – Insira a régua amarela dentro de outra com partes laterais brancas, dobrando-as e inserindo o retângulo azul com espaço.

Metodologia de resolução

1 – Considerando a expressão (-5) + (+2), puxe a régua amarela até que o algarismo -5 da parte da régua branca esteja conectado ao 0. 2 – Apenas movendo o retângulo azul, posicione-o com o número +2. 3 – O resultado da expressão é o valor que tiver no mesmo retângulo que o segundo número (+2), só que na parte branca.

Código QR - Acesso ao Youtube:

Classificação ESAR: Desenvolvimento

A (atividade lúdica): De regra simples (matemático).

B (conduta cognitiva): Operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutivo).

Fonte: Material (2020).

Elastique

Objetivo:

Desenvolver habilidades para efetuar adição e subtração com números positivos e negativos.

Material:

Régua, papelão, 42 tampas de garrafas PET, elástico, papel sulfite e caneta hidrocor .

Metodologia de confecção:

Primeira versão: 1 – Com a régua, marque em um papelão um retângulo de 30 cm por 40 cm. 2 – Utilizando cola quente, fixe 42 tampas de garrafas PET no papelão, com espeço de 2 cm entre as peças. 3 – Faça vários retângulos com exercícios de soma e de subtração, utilizando uma caneta hidrocor. 4 – Coloque os exercícios em um copo descartável. Segunda versão: fazer um dado manualmente, a partir do molde apresentado na lousa, recortá-lo e colá-lo. Terceira versão: faça 42 círculos de papel, de tamanho um pouco menor que as tampas, e escreve números de -9 a 9 várias vezes; 2 – Encaixe os círculos nas tampinhas. 3 – Adicionalmente, faça fichas com os resultados de alguns cálculos.

Metodologia de resolução:

Primeira versão: 1 – O aluno deve retirar um exercício do copo. 2 – Com o papel em mãos, o aluno deve colocar o elástico de forma que selecione a quantidade de tampinhas que representa o resultado e, junto, a expressão. Segunda versão: 1 – em dupla ou trio, utilizando elásticos coloridos que representa cada jogador, são selecionadas peças a partir do resultado apresentado no jogo. 2 – Quando não sobrar nenhum elástico em mãos, cada jogador deve somar as tampinhas selecionadas. 3 – Ganha o jogo quem obtiver mais pontos. Terceira versão: 1 – o aluno deve retirar um número do copo. 2 – Procurar no tabuleiro números que somados resultam no valor selecionado. 3 – Coloque o elástico para marcar o resultado e mantenha o número retirado do copo em cima dos números selecionados nas tampas.

Código QR - Acesso ao Youtube:

Classificação ESAR: Desenvolvimento

A **(atividade lúdica):** De regra simples (matemático).

B **(conduta cognitiva):** Operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutivo).

Caminhando na reta numérica

Objetivo:

Realizar cálculos de adição e subtração de números inteiros.

Material:

Cartolinas azul e amarela, folha sulfite tesoura sem ponta, lápis e canetas hidrográficas.

Metodologia de confecção:

1 – Com o auxílio de um lápis e de uma régua, faça vários retângulos nas cartolinas azuis e amarelas. 2 – Recorte os retângulos e escreva números de -6 a 6 nos retângulos de cada cor. 3- Em uma folha sulfite, desenhe uma reta numérica de -10 a 10. 4- Recorte a régua.

Metodologia de resolução

1 – Cada participante deve retirar uma carta amarela para a determinação do ponto inicial a percorrer sobre a reta; 2 – Ao retirar uma carta azul que indica o número de pontos a serem percorridos, o participante deve observar o sinal para caminhar para a esquerda ou para a direta. 3 – número positivo representa andar na régua para a direita e, o número negativo, andar na régua para a esquerda. 4 – Após realizar o trajeto, o aluno deve escrever na folha o ponto inicial, o sinal da trajetória e o valor sorteado (carta azul) para os passos que deve realizar e o ponto final, o número em que parou. 5 – O ganhador de cada rodada é o jogador que tiver maior número para o ponto final. 6 – O ganhador do jogo, será o que venceu o maior número de rodadas. 7 – Em caso de empate, os jogadores realizam mais uma rodada.

Código QR - Acesso ao Youtube:

Classificação ESAR: Desenvolvimento

A **(atividade lúdica):** De regra simples (matemático).

B **(conduta cognitiva):** Operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutivo).

Fonte: Jogos (2018).

Escopa Zero

Objetivo:

Desenvolver habilidades para efetuar adições com números positivos e negativos, compreender o oposto de um número inteiro e desenvolver cálculos mentais com o jogo.

Material:

Cartolinas azuis e amarelas, régua, tesoura sem ponta, lápis e caneta hidrográfica.

Metodologia de confecção:

1 – Risque as cartolinas azuis e amarelas com o lápis e o auxílio de uma régua, visando formar 20 retângulos de 6 cm de base e 9 cm de altura para cada cor de cartolina; 2 – Recorte-os com a tesoura; 3 – Em cada retângulo, escreva 10 números negativos (de −10 a −1) e 10 números positivos (de 1 a 10).

Metodologia de resolução

1 – Escolhe-se um jogador para embaralhar, e outro, para distribuir as cartas; 2 – O jogador-distribuidor vira as 4 primeiras cartas, colocando-as no centro da mesa; 3 – Depois, distribui-se 3 cartas para cada jogador; 4 – O primeiro jogador escolhe uma de suas cartas para descartar, de modo que possa formar, com aquelas da mesa, uma adição com resultado igual a zero. Se na mesa tiver as cartas (−3), (−7), (+6), (+8), ele poderá, com a carta (−3), formar 'zero' com as cartas (−3) e (+6). Nessa hipótese, as três cartas são recolhidas para o monte do primeiro jogador; 5 – O segundo jogador dá sequência ao jogo do mesmo modo, procedendo-se assim, um por vez; 6 – Caso o jogador não consiga combinar uma de suas cartas com aquelas da mesa de modo a obter soma 'zero', o participante da vez descarta uma de suas cartas, dando sequência ao jogo. 7 – Diz-se 'escopa', quem combinar uma de suas cartas com as da mesa resultando em zero. 8 – Não havendo cartas na mesa, o jogador seguinte apenas descarta uma de suas cartas e passa sua vez. 9 – Completada a primeira rodada, ou seja, quando todos os jogadores ficarem sem nenhuma carta na mão, distribui-se mais três cartas para cada jogador. 10 – Contagem de pontos: cada Escopa vale 15 pontos e cada carta recolhida vale 1 ponto.

Código QR - Acesso ao Youtube:

Classificação ESAR: Desenvolvimento

A (atividade lúdica): De regra simples (matemático) e de regras complexas (de análise matemática).

B (conduta cognitiva): Operatório-concreta (operações numéricas) e operatório-formal (indutivo).

Referências

BORDIM, Laura Moreira. Os materiais manipuláveis e os jogos pedagógicos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros. 2011. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2011.

JOGO Escopa Zero adição de números inteiros. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal Gisele Hermann. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ntNNB3fxLdg. Acesso em: 10 set. 2020.

JOGOS com tabuleiro reciclável para estimular a atenção e a concentração. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Taíse Agostini. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ARCICfABFGo&t=3s. Acesso em: 11 set. 2020.

MATERIAL didático para ensino e aprendizagem de números inteiros. [S. l.: s. n.], 2020. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal RASEDU Techer & Student. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=xBIJABZE4q0. Acesso em: 23 set. 2020.

RÉGUA para ensinar operações simples com números negativos. [S. l.: s. n.], 2013. 1 vídeo (2 min). Publicado pelo canal Para Pais e Professores. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Dxl8-CBrnaUY. Acesso em: 9 set. 2020.