



Universidade Federal
de São João del-Rei

Roberta Pereira Maciel

**Uma reflexão sobre o ensino de
teoremas nas escolas**

São João del-Rei
Março de 2021

Roberta Pereira Maciel

Uma reflexão sobre o ensino de teoremas nas escolas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de São João del-Rei. Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Viviane Pardini Valério

Banca Examinadora

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Viviane Pardini Valério

Prof^a. Dr^a. Andréia Malacarne

Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

São João del-Rei

Março de 2021

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, por sempre estar iluminando e guiando meus caminhos.

Aos meus pais, Zélia e João pela ajuda incondicional, sem vocês não chegaria até aqui.

Aos meus filhos, Miguel e Murilo que nunca foram um obstáculo, mas sim uma motivação.

A meu esposo Leandro pelo amor, incentivo, paciência e compreensão.

A minha irmã Rosiane, por estar sempre ao meu lado.

A todos os meus colegas do curso pela ajuda, incentivo, pelos momentos alegres e descontraídos .

À técnica administrativa Kátia, sempre atenciosa e pela ajuda ao longo do curso.

Aos professores do curso por estimular e aumentar meu conhecimento, contribuindo para o aperfeiçoamento da minha prática docente.

A professora Dra. Viviane por me motivar ao longo do curso, elevando minha autoestima, me ajudando tanto como coordenadora do curso quanto na orientação, pois seu apoio foi de suma importância para a conclusão deste trabalho e minha formação acadêmica.

A CAPES pelo suporte financeiro, tornando mais viável minha formação.

Resumo

Este trabalho trata-se de uma reflexão, uma análise, sobre o Ensino de Matemática nas escolas brasileiras, mas especificamente sobre o ensino de teoremas, como eles são e podem ser trabalhados com os alunos do Ensino Básico . Iniciamos o trabalho estudando as três grandes escolas filosóficas matemáticas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) do final do século XIX e início do século XX, o rigor matemático e os documentos norteadores do Ensino Básico no Brasil (Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular). Selecionamos alguns teoremas trabalhados no Ensino Básico para serem estudados, incluindo suas demonstrações, e analisamos quais podem ser trabalhadas nas escolas. Verificamos também como alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio trabalham tais teoremas. Finalizamos o trabalho propondo atividades (planos de aula para os dois níveis de ensino) envolvendo o importante exercício de verificação (prova) de resultados matemáticos simples.

Palavras-chave: Escolas Filosóficas Matemáticas, Teoremas, Demonstrações, Livros Didáticos, Propostas de atividades.

Abstract

This dissertation is about reflecting on the Teaching of Mathematics in Brazilian schools, more specifically on the teaching of theorems to students of Basic Education, how they are presented and whether they are taught and whether they should be taught in everyday school, their concepts and classic theorems of mathematical education, in addition to their demonstrations, application of exercises and activities extracted from textbooks of Elementary and High School. We started with the study of the three great mathematical philosophical schools (Logicism, Intuitionism and Formalism), from the end of the 19th century and the beginning of the 20th century, the mathematical rigor and the guiding documents of Basic Education in Brazil (Law of Directives and Bases of Education, National Curriculum Parameters, National Common Curricular Base). We selected some theorems worked at this level of education to be studied and applied with their demonstrations, based on the selected authors and established considerations about their teaching. We ended by proposing activities (lesson plans for the two levels of education) involving exercises to verify simple mathematical results.

Keywords: Mathematical Philosophical Schools, Theorems, Demonstrations, Textbooks, Proposals for activities.

Sumário

Introdução	1
1 O rigor matemático no ensino	2
1.1 As escolas do Formalismo, do Logicismo e do Intuicionismo Matemático . . .	2
1.2 O rigor matemático segundo os documentos LDB, PCN, BNCC e o estudo de teoremas no ensino básico	6
2 Alguns teoremas estudados no ensino básico	10
2.1 Sistema axiomático da Ciência Matemática	10
2.1.1 Definição de um objeto matemático	10
2.1.2 Conceito	11
2.1.3 Axioma	11
2.1.4 Postulado	11
2.1.5 Proposição	11
2.1.6 Conjectura	11
2.1.7 Teorema	12
2.1.8 Lema	13
2.1.9 Corolário	14
2.1.10 Prova (demonstração) de uma proposição	14
2.2 Teorema de Tales	15
2.2.1 Síntese histórica	15
2.2.2 Enunciado do Teorema Tales	16
2.2.3 Demonstração do Teorema de Tales	17
2.2.4 Aplicação do Teorema de Tales	18
2.3 Teoremas das Bissetrizes	19
2.3.1 Enunciado dos Teoremas das Bissetrizes	21
2.3.2 Demonstração do Teorema da Bissetriz interna	22
2.3.3 Demonstração do Teorema da Bissetriz externa	22
2.3.4 Aplicação do Teorema das Bissetrizes	24
2.4 Teorema de Pitágoras	25
2.4.1 Síntese histórica	25

2.4.2	Enunciado do Teorema de Pitágoras	26
2.4.3	Demonstração do Teorema de Pitágoras	26
2.4.4	Aplicação do Teorema de Pitágoras	28
2.5	Teorema (Fórmula) de Heron	29
2.5.1	Síntese histórica	29
2.5.2	Enunciado da Fórmula de Heron ou Teorema de Heron	29
2.5.3	Demonstração da Fórmula de Heron	30
2.5.4	Aplicação da Fórmula de Heron	32
2.6	Teorema dos Cossenos	32
2.6.1	Síntese histórica da Trigonometria	32
2.6.2	Enunciando da Lei ou Teorema dos Cossenos	34
2.6.3	Demonstração do Teorema dos Cossenos	35
2.6.4	Aplicação do Teorema dos Cossenos	36
2.7	Teorema dos Senos	37
2.7.1	Síntese histórica	37
2.7.2	Enunciado do Teorema dos Senos	37
2.7.3	Demonstração do Teorema dos Senos	38
2.7.4	Aplicação do Teorema dos Senos	40
2.8	Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)	41
2.8.1	Síntese histórica	41
2.8.2	Enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética	42
2.8.3	Demonstrações do Teorema Fundamental da Aritmética	42
2.8.4	Uma aplicação do TFA* - Crivo de Eratóstenes	44
2.9	Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)	44
2.9.1	Síntese histórica	44
2.9.2	Enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra	46
2.9.3	Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra	46
2.9.4	Aplicações do do Teorema Fundamental da Álgebra	49
2.9.5	A Fórmula de Bhaskara	50
2.10	Teorema Binomial de Newton	51
2.10.1	Síntese histórica	51
2.10.2	Enunciado do Teorema Binomial de Newton	52
2.10.3	Demonstração do Teorema Binomial de Newton	53
2.10.4	Aplicações do Teorema Binomial de Newton	55
2.11	Tabela síntese dos teoremas estudados	57
3	Ensino de matemática: os teoremas através dos livros didáticos	58
3.1	Teorema de Tales	60
3.2	Teorema das Bissetrizes	63

3.3	Teorema de Pitágoras	67
3.4	Teorema de Heron	73
3.5	Teorema dos Cossenos	75
3.6	Teorema dos Senos	78
3.7	Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)	83
3.8	Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)	89
3.8.1	A Fórmula de Bhaskara	90
3.9	Teorema Binomial de Newton	96
3.10	Tabela síntese sobre os teoremas nos livros didáticos	99
4	Propostas de atividades	100
4.1	Atividade 1	100
4.2	Atividade 2	102
5	Considerações finais	105
	Referências	107

Introdução

Com o título “Uma reflexão sobre o ensino de teoremas nas escolas”, este trabalho traz um estudo de 9 (nove) teoremas abordados no Ensino Básico (EB), ou seja, no Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM). Nele, buscamos compreender a estrutura geral da ciência matemática de hoje e como os teoremas são e podem ser abordados em sala de aula.

Justificamos a escolha do tema pelo fato de os teoremas serem as peças centrais da Matemática. Refletir sobre os teoremas, suas demonstrações e aplicabilidades é algo natural para um professor de matemática.

No capítulo 1, estudamos a concepção, o ensino e o rigor da Matemática nas escolas. Refletimos sobre a influência das três grandes escolas filosóficas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) na Matemática hoje. Analisamos também os documentos oficiais: Lei de Diretrizes e Bases (LDB), Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que norteiam os professores em suas práticas pedagógicas.

No capítulo 2, enumeramos os “elementos” que dão corpo ao sistema axiomático da Matemática: axiomas, definições, proposições, conjecturas, teoremas e outros. Apresentamos nove teoremas abordados no Ensino Básico, aspectos históricos, demonstrações e aplicações. Também analisamos quais demonstrações podem ser trabalhadas nas escolas contemplando as orientações dos documentos oficiais LDB, PCN e BNCC.

No capítulo 3, escolhemos alguns livros didáticos (LD) para uma análise de como os nove teoremas estudados no capítulo anterior são abordados nas escolas, uma vez que os LD são praticamente indispensáveis aos professores. Os livros escolhidos são de coleções bem conhecidas nas escolas públicas. Os autores dos livros analisados são Gelson Iezzi et al., Luiz Roberto Dante, José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci.

No capítulo 4, apresentamos duas propostas de atividades (dois planos de aula do EB) que trabalham verificações (provas) de resultados matemáticos simples. As duas propostas têm como objetivo principal despertar o instinto investigativo dos alunos.

Terminamos este trabalho com algumas considerações pertinentes sobre nosso estudo.

Capítulo 1

O rigor matemático no ensino

Neste capítulo, faremos uma breve reflexão sobre o que é Matemática, a influência das três grandes escolas matemáticas no ensino de hoje e o rigor matemático exigido nos documentos LDB, PCN, BNCC para nossas práticas pedagógicas.

1.1 As escolas do Formalismo, do Logicismo e do Intuicionismo Matemático

Começamos nossa reflexão sobre o ensino de teoremas nas escolas com uma pergunta “elementar”: O que é Matemática?

“Matemática” deriva da palavra grega “*mathiké*” que significa “ensinamentos, aquilo que se pode aprender”. É uma ciência que estuda quantidade e formas e possui uma linguagem própria para representação, pois é vista como uma expressão da mente humana, uma linguagem universal, formada por signos linguísticos que passam ideias e significados (NISKIE,2017).

Niskie (2017, p. 61-63) afirma que:

Ao longo dos séculos, a matemática aprimorou-se para solucionar desafios. Por meio da formulação de leis, que podem ser propriedades ou teoremas, obtivemos diversas fórmulas que facilitam os cálculos do dia a dia. (...) A matemática é uma ciência formal (seus axiomas são independentes dos axiomas das outras ciências), e que se baseia em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados e proposições para chegar a conclusões teóricas e práticas. Ela também pode ser vista como um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões.

A busca de fundamentos para estruturar a Matemática como uma Ciência, iniciada com os gregos, teve seu auge no final do século XIX e início do século XX, quando houve um grande movimento entre os matemáticos para justificar sua estruturação como

Ciência. Podemos destacar três correntes filosóficas que dão suporte para a concepção de Matemática atual: o **Logicismo**, o **Intuicionismo** e o **Formalismo**.

O intuicionismo, o logicismo e o formalismo são as correntes filosóficas que apresentam visões distintas sobre o que é a Matemática. Há entre elas incompatibilidade em alguns pontos. Mas haver incompatibilidade não significa que uma exclui a outra. (...) O intuicionismo, fundamentado no construtivismo, mostrou quais conhecimentos matemáticos podem e quais não podem ser construídos partindo de idéias intuitivas. O logicismo mostra as intersecções da Matemática com a Lógica. E o formalismo estabelece a Matemática como a Ciência dos sistemas formais (MONDINI, 2008, p.8).

A primeira doutrina que se apresentou por volta de 1884, com seu defensor Gottlob Frege (1848-1925), entre outros, foi o **logicismo**. Esta doutrina foi o ponto de partida para o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna, do método axiomático-dedutivo, com base em dois eixos mais importantes: os axiomas matemáticos são princípios da lógica e a Matemática pode ser deduzida da lógica. Segundo Bicudo (2010), o objetivo da doutrina era mostrar a Matemática como uma Ciência consistente e completa e expô-la como uma linguagem simbólica para simplificar suas formas de apresentação, excluindo as intuições geométricas da Análise e substituindo-as por noções da Aritmética. A Análise estaria fundamentada no sistema de números naturais. O realismo, fundamentado no platonismo, foi base filosófica para o movimento logicista que fracassou porque nem todos os axiomas puderam ser escritos na forma de proposições lógicas (MONDINI, 2008; BATISTELA; BICUDO; LAZARI, 2017).

Em 1907, surge o **intuicionismo**, criado pelo matemático holandês L. E. J. Brouwer (1881-1966), uma das principais correntes do movimento construcionista. Segundo Mondini (2008), os construcionistas/intuicionistas consideravam o ser humano dotado de uma intuição primeira sobre os números naturais. Por isso defendiam uma reelaboração da Matemática desde seus fundamentos. Partindo sempre da intuição, os axiomas, os teoremas, enfim, toda a Matemática deveria ser reconstruída. Todo e qualquer conhecimento deveria ser construído a partir da intuição, pois concebiam que entidades abstratas, como a Matemática, eram apenas elaborações humanas e não objetos ideais platônicos e que a Matemática Clássica era falível em alguns pontos, como os paradoxos da teoria dos conjuntos, que eram para eles, erros da Matemática. Já os defensores do logicismo acreditavam que os paradoxos da teoria dos conjuntos eram erros dos matemáticos.

Por último, veio o **formalismo**, criado pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) em 1910. O formalismo é a corrente filosófica cujo objetivo principal é provar que as ideias matemáticas são isentas de contradições. Sendo assim, a Matemática se tornaria livre de paradoxos e contradições e, quando ela pudesse ser reescrita com demonstrações

rigorosas em um sistema formal, se estabeleceria como verdade. Para os formalistas, a Matemática é um conjunto de regras e símbolos que permitem operar mecanicamente (LOUREIRO, 2015). A base para o formalismo é o nominalismo, segundo o qual as entidades da Matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais. Conforme esclarece Silva (2007, p. 184), “as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos”. Graças a esse conjunto de regras, hoje são utilizados calculadoras e programas de computador para executar diversos cálculos.

Quadro Síntese das concepções das escolas: Logicismo, Intuicionismo e Formalismo:

Escola Filosófica	Concepção
Logicismo	Reduzir a matemática em termos lógicos, propondo, demonstrar analiticidade de determinada proposição a partir das leis gerais da lógica.
Intuicionismo	A matemática deve ser sistematizada partindo sempre da intuição. Para tanto utiliza-se de número finito de passos, a partir dos números naturais, “métodos construtivos”, dados intuitivamente.
Formalismo	Formalizar toda a Matemática Clássica em um sistema formal consistente e completo, utilizando demonstrações procedendo a axiomatização de toda Matemática.

Fonte. (LOUREIRO; KLÜBER, 2015, p. 12)

Segundo Mondini (2008), entende-se que o logicismo mostra as intersecções da Matemática com a Lógica, o que permitiu o avanço da informática, de ciências cognitivas e da inteligência artificial do século XX, além do aparecimento de geometrias não euclidianas, de teorias dos conjuntos de Cantor com a noção de infinito atual. O intuicionismo mostra o conhecimento baseado na intuição. Já o formalismo estabelece a Matemática como “a Ciência dos sistemas formais”.

Mesmo que essas correntes filosóficas não tenham alcançado seus objetivos, no sentido de fornecer a Matemática uma fundamentação última, os reflexos de suas contribuições se esboçam no contexto educacional. Embora exista um movimento voltado à superação da compreensão do conhecimento matemático como independente do sujeito, ainda são necessárias reflexões filosófico/epistemológicas que permitam ao futuro professor valorizar o aluno como sujeito capaz de elaborar estratégias de construção de conceitos matemáticos e de preenchê-las de significado (MUTTI et al., 2019, p. 315).

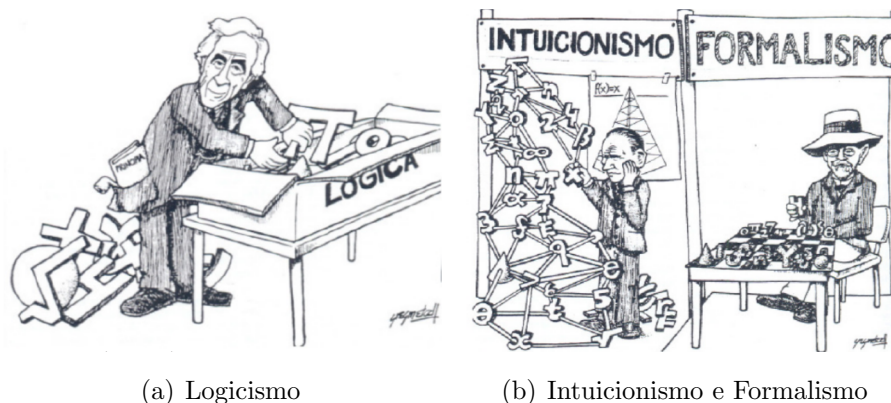


Figura 1.1: a. Logicismo: Referência às ideias dos logicistas: mostrar que a Matemática clássica era parte da Lógica;
 b. Intuicionismo e Formalismo: As duas escolas - a seu jeito - construíam o que seria a base do edifício da Matemática: a intuição e a formalização, respectivamente.

Fonte. Batistela, Bicudo e Lazari (2017, p. 199 e 201).

Certamente, a Matemática de hoje, aquela apresentada no ensino superior e no ensino básico, é resultado do processo de elaboração e reelaboração da própria matemática com o passar do tempo.

As discussões fomentadas no que tange as características e concepções, a partir das três escolas filosóficas, manifestam-se de diferentes formas no ensino da Matemática, como por exemplo, as abordagens de determinados conteúdos matemáticos, a postura docente diante dos enfrentamentos das salas de aula, a apresentação de determinados exercícios pelos professores e livros didáticos, ou o que as instituições de ensino almejam de seu corpo docente e discente. (...) o pensar pedagógico, no que se refere às práticas docentes em todos os níveis de ensino, carecem de reflexão. A compreensão a respeito de cada uma das escolas e de suas doutrinas se faz necessária, pois entendemos que tal conhecimento promove uma seguridade ao fazer prático do profissional. Por fim, a Matemática se constituiu da contribuição de diversos pensadores, que com seus estudos idealizaram uma Ciência capaz de responder uma diversidade de problemas, além de subsidiar outras Ciências. (...) O que podemos considerar é que a Matemática emerge das contribuições deixadas outrora pelo modo de pensar dos filósofos e pelas reestruturações internas da Ciência Matemática. E que o ensino de Matemática não é isento. As contribuições destas escolas, no âmbito da Matemática, podem se constituir em entraves às perspectivas do Ensino de Matemática. Por isso, uma avaliação crítica das escolas se faz necessária (LOUREIRO; KLÜBER, 2015, p. 13).

1.2 O rigor matemático segundo os documentos LDB, PCN, BNCC e o estudo de teoremas no ensino básico

Por definição, o rigor matemático pode se referir tanto a métodos de matemáticas como a métodos de prática matemática. Também classificam-se os graus de rigor em matemática de rigor matemático (propriamente dito) e rigor axiomático. O rigor axiomático trata-se dos axiomas que se utilizam para construir teoremas em matemática. O rigor matemático vem sendo usado em sala de aula como uma forma de ensino da matemática voltada apenas ao seu caráter nobre de pensamento. É necessário destacar que nem todos os alunos se encaminharão para a área das exatas, fazendo com que o docente, ao utilizar-se de técnicas mecânicas e descontextualizadas de ensino, acaba por prejudicá-los, pois para muitos deles o conhecimento matemático é algo extremamente complexo e sem nenhuma relação com sua vida cotidiana (DIAS et al., 2017, p. 65).

Começamos esta seção refletindo sobre esta citação. Acreditamos que os conteúdos matemáticos devem ser trabalhados com todos os alunos sempre de maneira consciente, independentemente de suas escolhas futuras em diferentes áreas (exatas ou não), tendo como base os documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC), cujas diretrizes esclarecem a medida adequada do rigor matemático nas práticas pedagógicas. Neste estudo, daremos atenção especial em como os teoremas são abordados nesses documentos oficiais.

Os documentos oficiais LDB, PCN e BNCC apresentam a concepção de que a Matemática no Ensino Básico (EB), especialmente a partir dos últimos anos (8º e 9º) do Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM), tem um valor formativo e também instrumental, contribuindo para estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo dos alunos, servindo como ferramenta para auxiliá-los no seu cotidiano.

A LDB (Lei 5.692, de 11/08/1971) define e regulariza o sistema educacional brasileiro, baseada nos princípios da Constituição de 1988. Ao longo do processo da educação no Brasil, sua reforma, com alterações e acréscimos (Lei Federal nº 9.394/96), desempenhou um papel fundamental para as mudanças do ensino, definindo o EM como uma etapa da EB (Educação Infantil ao EM), com finalidade de preparar os alunos para a continuidade dos estudos, trabalho e exercício da cidadania, determinando uma base nacional comum e uma parte diversificada para a organização do currículo escolar (BRASIL, 1996).

Tanto na LDB, quanto nos PCN e na BNCC, os objetivos, propostas, sugestões apontam para a matemática que enfatiza a reflexão, o desenvolvimento do pensamento, a

resolução de problemas cotidianos envolvidos em contextos sociais, econômicos e culturais nos quais os alunos vivem, e não mais o ensino de maneira descontextualizada, fragmentada e repetitiva, ao proporcionar aos estudantes a visão de que a matemática faz parte da cultura e da história e não se resume em um conjunto de regras e técnicas a serem “decoradas”. Assim, os temas relacionados aos números, à álgebra, à geometria, à estatística, à probabilidade e aos mais diversos teoremas devem estar ligados às aplicações práticas (BRASIL, 2018a, 2018b).

A BNCC (área de Matemática e suas Tecnologias) propõe ao EM a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no EF. Os conhecimentos já explorados possibilitam aos alunos a construção de uma visão mais integrada da matemática, com outras áreas do conhecimento e da sua aplicação à realidade. Desta forma, um problema ou um teorema, por exemplo, poderá ser aplicado ao meio ambiente ou à outra disciplina, conjugando conhecimentos; a organização curricular deixa de ser estanque e passa a ser mais focada no cotidiano dos alunos (BRASIL, 2018b).

A escola deve incentivar o protagonismo do aluno proporcionando experiências para torná-lo em um jovem crítico, capaz de desenvolver competências e habilidades com maior reflexão e abstração, por meio de estratégias, ações, conjecturas e demonstrações, para interpretar situações em diversos contextos socioeconômicos ou tecnológicos (saúde, sustentabilidade), utilizando linguagens próprias da Matemática.

As diferentes abordagens dos mais variados teoremas podem ser incorporadas na aprendizagem de ideias fundamentais, por meio de diferentes linguagens e exemplos concretos, tais como aquelas que envolvem o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico, e o cálculo mental frente ao uso da tecnologia. Porém, estas abordagens, a partir de técnicas ou formas de resolução, devem considerar a potencialidade dos alunos para sua vida e para o desenvolvimento de diferentes formas de pensar (ARCEGO; BERLANDA, 2016).

Com relação às propostas dos PCN e da BNCC para o uso de diferentes materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais sobre o ensino-aprendizagem dos mais diversificados conteúdos matemáticos no EM, essas se coadunam com o emprego de microcomputadores, *datashow* e *softwares* matemáticos e educativos nas aulas de matemática e ciências afins, dentro de um contexto interdisciplinar (como o *software* GeoGebra) e que podem contribuir para aquisição das habilidades a fim de selecionar e analisar as informações obtidas e tomar decisões às quais exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo dos três anos do EM (BRASIL, 2018b).

Os PCN e a BNCC propõem sobre o ensino dos teoremas no EF (4º ciclo - 8º e 9º anos) e no EM, através de verificações experimentais, demonstrações e aplicações, apontando que a função da matemática, tanto no EF como no EM, deve ser mais do que memorizar fórmulas e enunciados, pois a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um “saber fazer matemática e de um saber pensar matemático”.

A aprendizagem em matemática explora três momentos distintos e ordenados: “a) Fazer matemática; b) Desenvolver registros de representações pessoais; c) Apropriar-se dos registros formais”(BRASIL, 2015, p. 129).

Percebe-se que a “história da Matemática também tem uma relevância para o aprendizado pessoal e social dos estudantes, pois ilustra o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos”(BRASIL, 1998b, p. 54). D’ambrosio (2009) aponta ser relevante contextualizar e conhecer historicamente a matemática, presente em todas as formas de “fazer e de saber”, ao invés do docente resumir suas aulas com exercícios sem significados, memorização de fórmulas e enunciados de teoremas, impossibilitando a argumentação e a reflexão de fatos do cotidiano ou de outras áreas do saber. A história da matemática é essencial para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas no contexto específico de cada época. Como afirma Pereira (2019, p.16): “A História esclarece ideias, conceitos, métodos e dá resposta a muitos porquês”.

Com relação às propostas da BNCC, Pereira (2019) critica o letramento matemático proposto pelo documento, pois as bases propõem que o aluno deve se tornar capaz de aplicar a matemática (singular) em uma variedade de contextos, quando, na verdade, isto não ocorre na prática, apenas teorias na intenção de “uniformizar as práticas matemáticas”, sendo que “em momento algum faz referência a pluralidade de construções matemáticas criadas dentro desta variedade de situações”(PEREIRA, 2019, p. 235).

Compartilhamos da ideia de Pereira pois, na prática, a maioria dos professores tem dificuldades em alcançar todos os objetivos propostos pelos documentos oficiais (LDB, PCN, BNCC), sendo necessário mudar o ensino ainda centrado em procedimentos mecânicos e buscando novas tecnologias e práticas pedagógicas adequadas. Para tanto, o professor deve ter um domínio aprofundado do conteúdo, estar sempre se capacitando, ser sensível a realidade do aluno e “tentar” aguçar a curiosidade e o interesse deles. Mas devemos enfatizar também que, muitas vezes, o professor se depara com a falta de infraestrutura e de recursos pedagógicos. A abordagem dos teoremas nessa realidade exige uma forma mais criativa e contextualizada. Daí a importância dos livros didáticos que trazem estes assuntos de uma maneira mais acessível, prazerosa e ao mesmo tempo formal, pois muitas vezes são um dos únicos recursos didáticos que o professor tem a sua disposição.

O entendimento sobre as diferentes normativas, recomendações e legislações para o ensino é diversa, e, conseqüentemente, as visões sobre os processos formativos trazidos por cada um deles também pode variar.

Na visão de Diniz (2019), enquanto os PCN miram formar pessoas mais capazes, flexíveis e mais confiantes em si mesmas e prepará-las para o mercado de trabalho, a BNCC objetiva a formação integral das pessoas, por competências, preparando-as também para o trabalho, mas, sobretudo, para a convivência na diversidade e no enfrentamento das questões que poderão surgir ao longo da vida, “[...] de modo respeitoso, produtivo e

participativo, o que diferencia os Parâmetros da BNCC”(DINIZ, 2019, s.p).

Em contraposição, Búrigo (2019, p. 15) comenta que, no I Fórum Nacional da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) sobre Currículos de Matemática (FNCM), em junho de 2004, os PCN avançaram quanto “a formação para a cidadania, transversalidade, resolução de problemas, história da matemática, conhecimentos prévios dos alunos, uso das tecnologias”, porém, esclarece que, segundo a SBEM, as expectativas de aprendizagem e o desenvolvimento de um currículo devem atender a todos os alunos na sala de aula e em cada unidade escolar, “sem paternalismos e discriminações”.

Quanto à BNCC, Búrigo (2019, p. 17) cita que, de acordo com a SBEM, o documento preliminar da BNCC não traz uma proposta renovadora, “não apresenta uma coerência interna entre objetivos gerais iniciais e da área de matemática, entre o que se pensa e conteúdo, objetivos e operacionalização”, estando desvinculado das principais tendências matemáticas e representando retrocesso em relação aos avanços conquistados em outros documentos, como os PCN. Para esta Sociedade (SBEM, 2016a, p. 7, citado por BÚRIGO, 2019, p. 17), a BNCC valoriza “a interdisciplinaridade, mas, não considera a formação para a cidadania a ser tratada pela Educação Básica”, ou seja, a Educação Matemática Crítica.

Nesse sentido, Búrigo (2019) expõe também que a Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd) e várias outras entidades do campo da educação defendem o que propõe a LDB, isto é, um conjunto amplo de conhecimentos essenciais ao pleno desenvolvimento humano e não apenas o português e a matemática como disciplinas obrigatórias como apresenta a BNCC para o Ensino Médio.

(...) considerando a diversidade e a autonomia necessárias à construção cotidiana de escolas democráticas que respeitem e valorizem as juventudes e garantam as possibilidades de pleno desenvolvimento humano e oportunidades justas, contribuindo para a redução das desigualdades em nosso país (NOTA DAS ENTIDADES, 2018, p.1, citado por BÚRIGO, 2019, p.18).

Capítulo 2

Alguns teoremas estudados no ensino básico

Com o tempo, com influências das escolas que estudamos no capítulo anterior, a matemática foi evoluindo, se tornando uma Ciência. A partir de definições e axiomas, seguindo raciocínios lógicos, a matemática analisa “objetos”, grandezas e relações entre entidades abstratas. Isso permite, uma vez detectados certos padrões, formular conjecturas, estabelecer definições, formular resultados aos quais se chegam por dedução.

Neste capítulo, primeiramente, apresentaremos os “elementos” que dão corpo ao sistema axiomático da Ciência Matemática nos dias de hoje. Em seguida, apresentaremos nove teoremas estudados no ensino básico. Nosso objetivo é ressaltar a importância dos teoremas na Matemática sem esquecer da nossa prática pedagógica consciente nas escolas. Faremos uma reflexão do que acreditamos poder ser abordado, trabalhado, ou não nas escolas.

2.1 Sistema axiomático da Ciência Matemática

2.1.1 Definição de um objeto matemático

É a enumeração das propriedades que um determinado objeto matemático deve ter (ou deixar de ter) para pertencer a uma determinada classe de objetos; é um enunciado que descreve um conceito.

Exemplos: Para que um objeto seja considerado um triângulo, ele deve ser um polígono e possuir exatamente três lados. Ou um inteiro p é primo se, e somente, for divisível por exatamente quatro números: $1, -1, p, -p$ (<http://www-di.inf.puc-rio.br/poggi/discrete.pdf>).

2.1.2 Conceito

Do latim *conceptus*, do verbo *concipere*, que significa “conter completamente”, “formar dentro de si”. O conceito é aquilo que a mente concebe; é uma ideia ou uma noção (MELO, 2012, p. 9).

2.1.3 Axioma

Termo de origem grega que significa “consideração, opinião, dogma”; é um ponto de partida de raciocínio, uma proposição assumida como verdadeira e que não precisa de prova. São verdades gerais, aceitas sem discussão ou consideradas evidentes por si próprias, como na Filosofia e na Matemática. Geralmente, baseia-se no senso comum.

Exemplos: “Todo número inteiro tem um único sucessor” e, em geometria plana euclidiana, “Por dois pontos distintos A e B passa uma única reta.”.

Entretanto, os axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução, assim como não podem ser demonstrados por derivações formais, por serem hipóteses iniciais (AMORAS, 2015).

2.1.4 Postulado

Do latim *postulatus*, é um princípio básico que é necessário admitir, sem precisar de demonstração, uma premissa, sendo considerado também como um axioma por ser verdade absoluta e não precisar de provas (MORENO, 2017).

2.1.5 Proposição

É um conjunto de palavras ou símbolos ou uma sentença declarativa (que declara um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Exemplos:

(i) $2 + 5 = 7$ (proposição verdadeira);

(ii) A função $f(x) = -x$ é uma função crescente (proposição falsa). (MELO, 2012; <http://www-di.inf.puc-rio.br/poggi/discrete.pdf>)

2.1.6 Conjectura

É uma proposição cuja veracidade ainda não foi provada nem refutada. Consiste em uma sentença sendo proposta como verdade, e quando uma demonstração de uma conjectura é achada, a conjectura se torna um teorema.

Segundo Caputi e Miranda (2017, p. 75), uma conjectura é “uma sentença que inicialmente é proposta como verdadeira, usualmente com base em alguma evidência parcial,

um argumento heurístico ou a intuição de um perito”. Muitas vezes são verificadas que conjecturas são falsas, portanto elas não são teoremas.

Exemplo 1 - Conjectura de Fermat: Trata-se de uma generalização do Teorema de Pitágoras. Fermat substituiu o expoente 2 na fórmula de Pitágoras por um número natural n maior do que 2.

$$x^n + y^n = z^n$$

O último Teorema de Fermat afirma que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x, y, z e n , com n maior que 2, que satisfaça esta equação.

Fermat relatou ter prova deste resultado, mas nunca a publicou. Assim, esta conjectura ficou para ser demonstrada como um desafio para os matemáticos ao longo dos tempos.

Somente em 1995, após 358 anos de sua formulação, o teorema foi solucionado pelo britânico Andrew Wiles. Por isso, este teorema passou a ser chamado também por “Teorema de Fermat-Wiles”.

Assim, a conjectura de Fermat é verdadeira!

Exemplo 2 - Conjectura de Euler: O matemático Euler afirmou que não existia soluções com números inteiros para uma equação não muito diferente do Teorema de Fermat:

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$$

A falta de um contra-exemplo parecia ser uma evidência em favor desta conjectura. Porém, em 1988, Noam Elkies, da Universidade de Harvard, descobriu uma solução:

$$(2.682.440)^4 + (15.365.639)^4 + (18.796.760)^4 = (20.615.673)^4.$$

Assim, a conjectura de Euler estava errada, pois Elkies provou que existem infinitas soluções possíveis para a equação.

Assim, a conjectura de Euler é falsa!

2.1.7 Teorema

Termo introduzido por Euclides de Alexandria (c.325 a.C - 265 a.C.), de origem grega, e que originalmente, significava “espetáculo”, mas hoje, significa “válido, adequado ou autoevidente”. É uma proposição fundamental, garantida por uma prova, que se demonstra ser verdadeira através de operações e argumentos matemáticos.

Exemplos:

(i) A trajetória de um projétil arremessado no vácuo próximo a superfície da Terra é parabólica (MELO, 2012).

(ii) Um ângulo externo de um triângulo qualquer é maior do que qualquer ângulo interno não adjacente a ele (MORENO, 2017).

Hipótese: É a parte do teorema que apresenta as informações conhecidas sobre o problema. As hipóteses são as informações já adquiridas para provar algo. A partir da hipótese chega-se à tese.

Tese: É a parte do teorema que representa o que de fato se deseja provar.

Exemplo: Em um triângulo equilátero, a altura em relação a um lado é também uma bissetriz deste triângulo (MORENO, 2017). Veja a figura a seguir.

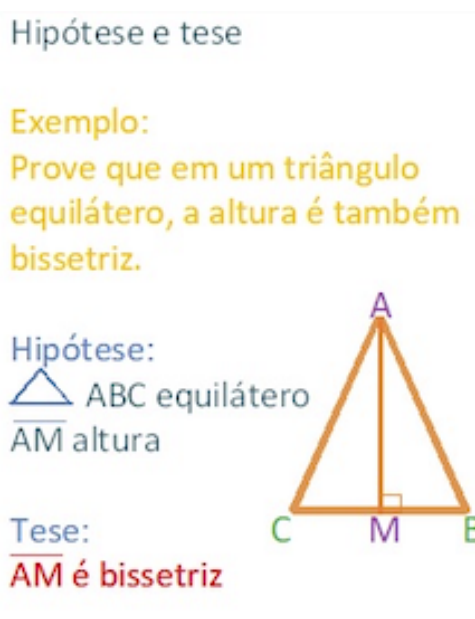


Figura 2.1: Hipótese e Tese

Fonte. https://www.youtube.com/watch?v=Tquq_N7JDMg

2.1.8 Lema

Do grego $\lambda\eta\mu\mu\alpha$ (lémma) significa “algo recebido, ganho, como um presente”; é uma afirmação provada e que ajuda a provar afirmações mais importantes como os teoremas, sendo considerado um “teorema auxiliar” (“pré-teorema”), utilizado para provar outros teoremas maiores. A diferença entre lema e teorema é um pouco arbitrária, visto que grandes resultados são por vezes usados na prova de outros (MELO, 2012; AMORAS, 2015).

Exemplo: Relação de Stifel: Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tem-se que:
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p}.$$

2.1.9 Corolário

De origem latina (*corollarium*) “é um teorema que pode ser estabelecido diretamente de um teorema que já foi demonstrado”; é uma consequência direta de um teorema, ou definição. Muitas vezes as suas demonstrações são omitidas, por serem simples (CAPUTI; MIRANDA, 2017, p. 75).

Exemplos:

(i) Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus. Corolário: Cada ângulo de um triângulo equilátero tem 60 graus (<http://www-di.inf.puc-rio.br/poggi/discrete.pdf>).

(ii) O Teorema de Bayes $P(A_i/B) = \frac{[P(B/A_i) \times P(A_i)]}{P(B)}$ é o corolário do Teorema da Probabilidade (SOUZA, 2018).

2.1.10 Prova (demonstração) de uma proposição

É um argumento válido que estabelece a verdade de uma proposição matemática. Segundo Loureiro (s.d, p. 2) “é preciso ter precisão de pensamento e linguagem para obter a certeza matemática a respeito de um determinado problema”. São vários os métodos de prova: prova direta, prova por indução, por contradição, por contraposição, prova pela negativa e outros.

Observa-se que a prova de um teorema pode utilizar outros teoremas, desde que eles também tenham sido devidamente provados, uma vez que resultados cada vez mais complexos podem ser provados a partir de resultados mais simples.

Geralmente uma demonstração é a prova matemática de que uma dada propriedade (sentença) **TT** é deduzida de outra propriedade (sentença) **HH**. Essa prova é feita por meio de uma cadeia de argumentações lógicas que utilizam definições, propriedades ou resultados já conhecidos. Nesse processo, **HH** é denominada hipótese e, **TT**, tese (MORAIS FILHO, 2012; CAPUTI; MIRANDA, 2017).

2.2 Teorema de Tales

2.2.1 Síntese histórica



Figura 2.2: Tales de Mileto

Fonte. <https://www.webestudante.com.br/tales-de-mileto/>

Tales de Mileto (624-548 a.C.) foi um importante pensador, filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo. Nasceu em Mileto (Jônia), colônia grega, na Ásia Menor (hoje Turquia). Considerado o “Pai do Pensamento Científico” e da “Filosofia Ocidental” e um dos Sete Sábios da Grécia por gostar de estudar e se dedicar aos conhecimentos da sua época por puro prazer, trazendo do Egito e da Babilônia os conhecimentos da Geometria do Oriente. Tales foi fundador da Escola Jônica, considerada mais antiga escola filosófica, na qual os seus pensadores buscavam explicações para teorias cosmológicas, como o surgimento do universo.

Tales de Mileto conseguiu demonstrar vários teoremas, todos ramificados da geometria. Conta-se que o estudioso fora convidado pelos egípcios (e por um faraó) para medir a altura da pirâmide de Quéops, o que ele fez utilizando um teorema geométrico, denominado mais tarde como Teorema de Tales (FONTANA, 2011) (Tales apoiou-se a uma vara espetada perpendicularmente ao chão e esperou que a sua sombra tivesse comprimento igual ao da vara. Após isto acontecer disse a um colaborador: “Vai e mede depressa a sombra da pirâmide. Esta medida é igual a altura da pirâmide”).

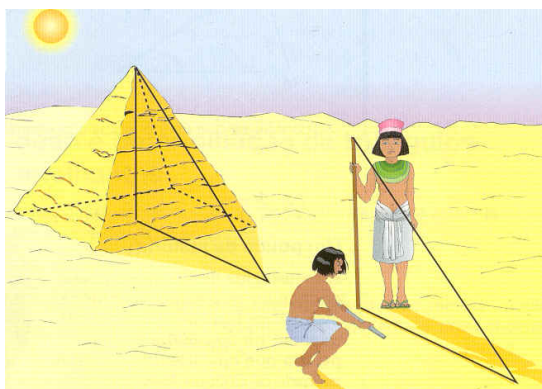


Figura 2.3: Tales de Mileto medindo a altura da pirâmide

Fonte: <http://matematicaferafacitec.blogspot.com.br/2011/08/tales-de-mileto-piramide-e-oteorema.html>.

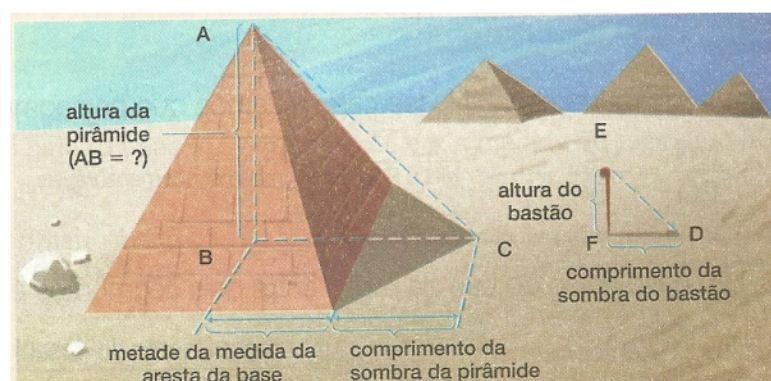


Figura 2.4: Cálculo da altura da Pirâmide por meio de sua sombra

Fonte: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/22092014Paulo-Fernando-Silva-dos-Reis.pdf>

2.2.2 Enunciado do Teorema Tales

Teorema 2.1. *(de Tales) A interseção entre duas retas paralelas e transversais formam segmentos proporcionais, ou seja, se duas retas são transversas a um eixo de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra (MACEDO, 2014, p. 17).*

Tales de Mileto defendia a tese de que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada. Partindo desse princípio básico observado na natureza, o matemático intuiu uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

Enunciado

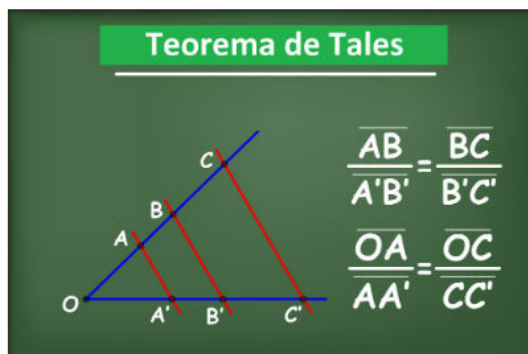


Figura 2.5: Teorema de Tales - Enunciado

Fonte. <https://www.todamateria.com.br/teorema-de-tales/>

Lê-se: AB está para BC , assim como $A'B'$ está para $B'C'$. E OA está para OC , assim como OA' está para OC' .

2.2.3 Demonstração do Teorema de Tales

Observação 2.1. Para demonstrar este teorema é necessário o conhecimento de que a área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa à mesma base e o conhecimento da propriedade do paralelogramo, em que seus pares de lados opostos são iguais. Sua demonstração é bem possível de ser trabalhada com os alunos das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. Essa demonstração aborda apenas conteúdos já trabalhados nesse nível de ensino.

Inicialmente traça-se, passando por D , a reta r' paralela à reta r . Sejam B' e C' as interseções de r' com \overline{BE} e \overline{CF} , respectivamente.

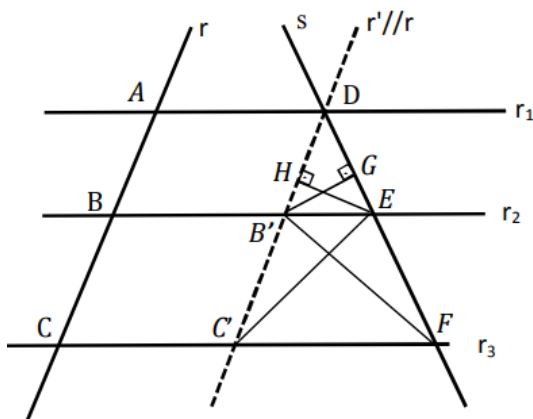


Figura 2.6: Teorema de Tales - Construção geométrica usada na demonstração

Fonte. Macedo (2014, p. 18-19).

A área do triângulo $DB'E$ pode ser calculada de duas maneiras:

$$\frac{DB' \cdot EH}{2} \text{ ou } \frac{DE \cdot B'G}{2}.$$

Logo,

$$\frac{DB' \cdot EH}{2} = \frac{DE \cdot B'G}{2}.$$

Da igualdade acima, conclui-se que $DB' \cdot EH = DE \cdot B'G$.

Como $DB' = AB$ temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{B'G}{EH} \quad (1)$$

Os triângulos $C'B'E$ e FEB' têm áreas iguais (mesma base, considere $B'E$, e mesma altura, que é a distância entre as paralelas r_2 e r_3).

Logo,

$$\frac{B'C' \cdot EH}{2} = \frac{EF \cdot B'G}{2}.$$

Como $B'C' = BC$ temos

$$\frac{BC}{EF} = \frac{B'G}{EH} \quad (2)$$

De (1) e (2) segue-se que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

Como queríamos demonstrar (MACEDO, 2014, p. 18-19).

2.2.4 Aplicação do Teorema de Tales

O Teorema de Tales possui inúmeras aplicações nas diversas situações envolvendo cálculo de distâncias inacessíveis e possui grande aplicabilidade nas questões relacionadas à Astronomia. Uma importante aplicação deste teorema é em semelhança de triângulos, empregado em muitas situações do cotidiano. Vejamos um exemplo.

Exemplo: Calcule o comprimento da ponte que deverá ser construída sobre o rio, de acordo com o esquema a seguir (considere $DE \parallel BC$).

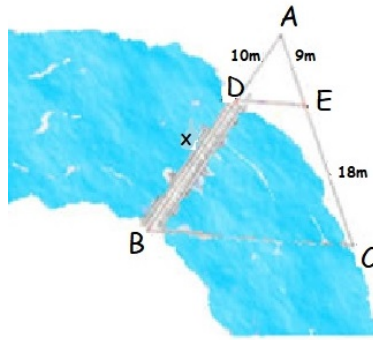


Figura 2.7: Aplicação do Teorema de Tales - Exemplo

Fonte.

<http://matematicosdemogi.blogspot.com/2013/06/aplicacoes-do-teorema-de-tales.html>

Pela figura temos um triângulo ABC e o segmento DE paralelo a BC , sendo formado o triângulo ADE . As informações que temos são as medidas dos seguintes segmentos: $AD = 10$ m, $AE = 9$ m, $EC = 18$ m e $DB = x$.

O valor de DB será determinado através do Teorema de Tales que diz: retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos proporcionais. Desse modo, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \\ \frac{10}{x} &= \frac{9}{18} \\ 9x &= 180 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Portanto, a ponte terá 20 metros de comprimento.

2.3 Teoremas das Bissetrizes

A **bissetriz** é uma semirreta que inicia no vértice de um ângulo e o divide em dois ângulos com a mesma medida. É usada na geometria para analisar principalmente os triângulos. Na Matemática, a bissetriz é um lugar geométrico com pontos que equidistam de duas retas concorrentes (duas retas que se cruzam em um ponto que é comum a ambas), dividindo um ângulo em dois ângulos congruentes. Na figura a seguir, a semirreta OC é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$:

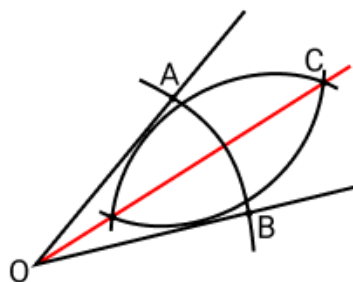


Figura 2.8: Bissetriz interna

Fonte. <https://matematicabasica.net/bissetriz/>

De acordo com suas medidas, os ângulos podem ser classificados em: reto, agudo, obtuso, meia volta (raso) e volta inteira, como na tabela abaixo:

Tabela 2.1: Tipos de ângulos.

Tipos de Ângulos

Os ângulos são classificados conforme suas medidas:

Classificação	Medida	Representação
Agudo	Menor que 90° .	
Reto	Igual a 90° .	
Obtuso	Maior que 90° .	
Meia Volta	Igual a 180° .	
Volta Inteira	Igual a 360° .	

Fonte. https://www.slideshare.net/trigono_metria/mat-utfrs-15-angulos/6

Os triângulos possuem ângulos internos e externos, podendo ser traçadas bissetrizes em cada um destes ângulos.

Há dois tipos de bissetrizes, a **bissetriz interna** que é a semirreta que divide um ângulo interno qualquer. A **bissetriz externa** é a semirreta que divide o ângulo suplementar, ou seja, do ângulo externo. O ângulo suplementar é um ângulo que quando somado com o ângulo interno equivale a 180° .

2.3.1 Enunciado dos Teoremas das Bissetrizes

Teorema 2.2. *(da bissetriz interna) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

Na figura 2.9, AD é a bissetriz do ângulo interno A . O teorema diz que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

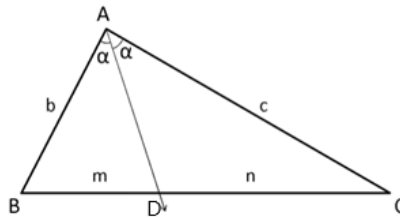


Figura 2.9: Bissetriz interna

Fonte. A autora.

Teorema 2.3. *(da bissetriz externa) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo externo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.*

Na figura 2.10, AD é a bissetriz do ângulo externo A . O teorema diz que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

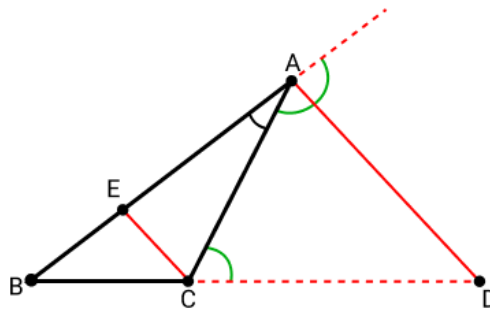


Figura 2.10: Bissetriz externa

Fonte. <https://matematicabasica.net/bissetriz/>

2.3.2 Demonstração do Teorema da Bissetriz interna

Dado um triângulo ABC tracemos a bissetriz AD , logo $B\hat{A}D = D\hat{A}C = \alpha$. No vértice C tracemos uma reta paralela a AB . Chamemos de F o encontro do prolongamento de AD com a reta paralela a AB traçada por C . Observe a figura a seguir; marcamos o ângulo β . Temos que $\alpha = \beta$ porque são ângulos alternos internos nas paralelas AB e CF , logo o triângulo ACF é isósceles, já que possui os ângulos das bases iguais e concluímos que $AC = CF$. Como $B\hat{D}A = C\hat{D}F$, pois são ângulos opostos pelo vértice, temos que os triângulos ABD e FDC são semelhantes pelo critério de semelhança de triângulos AA (ângulo-ângulo: pelo menos dois ângulos internos congruentes), então $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{FC}$. Como $FC = AC$ temos que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, como queríamos demonstrar.

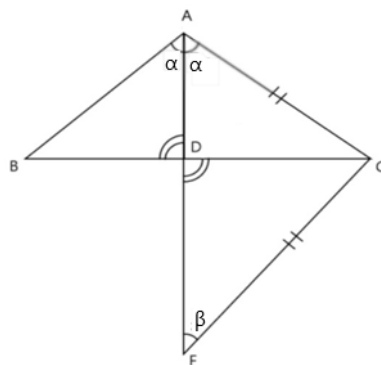


Figura 2.11: Bissetriz interna - Demonstração

Fonte. A autora.

2.3.3 Demonstração do Teorema da Bissetriz externa

Dado um triângulo ABC , tracemos a bissetriz AD , logo $\alpha = \beta$. Tracemos por C a paralela a AD que encontra AB em E , $AD \parallel CE$. Temos que $\alpha = \alpha'$, pois são ângulos alternos internos nas paralelas AD e CE e $\beta = \beta'$ porque são ângulos correspondentes nas paralelas CE e AD , então o triângulo ACE é isósceles, pois $\beta' = \alpha'$, logo $AE = AC$. Pelo teorema de Tales temos que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$. Como $AE = AC$ temos que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, como queríamos demonstrar.

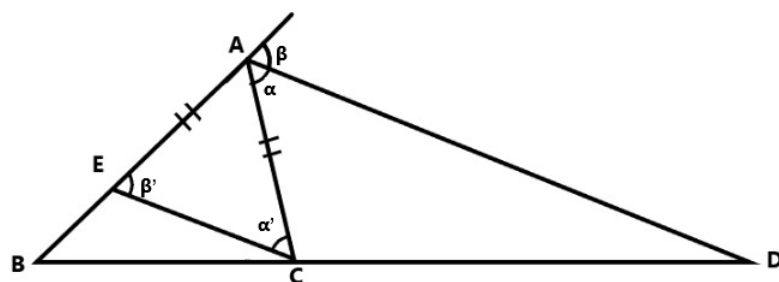


Figura 2.12: Bissetriz externa - Demonstração

Fonte. A autora.

Portanto, em um triângulo, a bissetriz interna e a bissetriz externa dividem harmonicamente o lado oposto quando traçadas do mesmo vértice

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}.$$

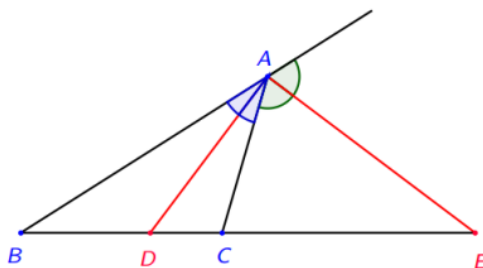


Figura 2.13: Bissetriz interna e bissetriz externa

Fonte. Muniz Neto(2013).

Observação 2.2. *Os teoremas das bissetrizes internas e externas têm vasta aplicação na geometria e na trigonometria e se apoiam nos teoremas da proporcionalidade e de Tales. Esses dois teoremas possuem demonstrações bem acessíveis os alunos das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. Essas demonstrações abordam apenas conteúdos já trabalhados nesse nível de ensino.*

O **incentro** é o ponto de encontro das três bissetrizes internas de um triângulo e está a uma mesma distância dos três lados do triângulo (Este fato é um teorema!). Quando uma circunferência está inscrita em um triângulo, este ponto, indicado na figura, representa o centro da circunferência. Para mais detalhes, ver Dolce et al.(2013, p.121).

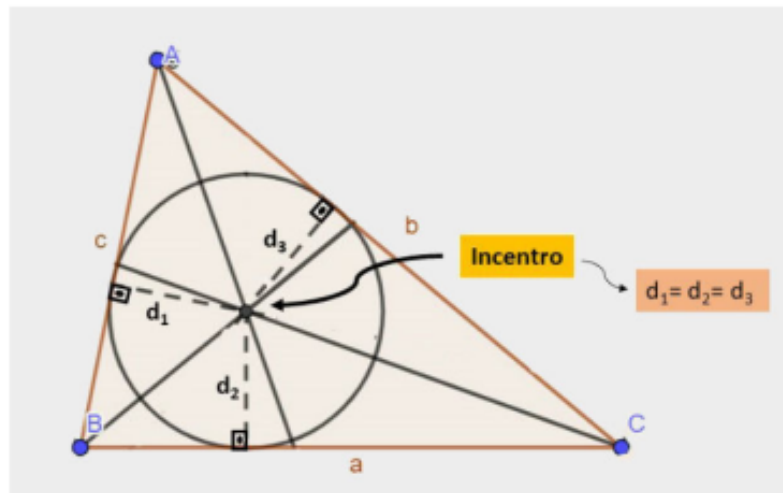


Figura 2.14: Incentro

Fonte. <https://www.todamateria.com.br/bissetriz/>

2.3.4 Aplicação do Teorema das Bissetrizes

O teorema das bissetrizes tem várias aplicações na geometria e na trigonometria. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Determine o valor de x no triângulo abaixo sabendo que AP é bissetriz do ângulo A.

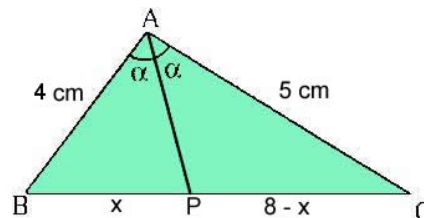


Figura 2.15: Bissetriz interna - Aplicação

Fonte. <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/teorema-bissetriz-interna.htm>

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{8 - x}$$

$$4(8 - x) = 5x$$

$$32 - 4x = 5x$$

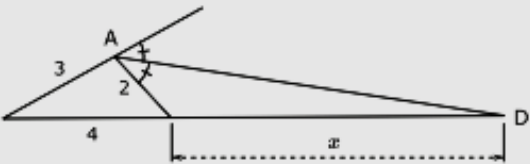
$$-4x - 5x = -32$$

$$-9x = -32$$

Portanto $x = \frac{32}{9}$.

Exemplo 2:

Na figura, AD é bissetriz externa do ângulo \hat{A} . Calcule x.



Solução:

Usando TBE vem:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8.$$

Figura 2.16: Bissetriz externa - Aplicação

Fonte. <https://brainly.com.br/tarefa/13507725>.

2.4 Teorema de Pitágoras

2.4.1 Síntese histórica

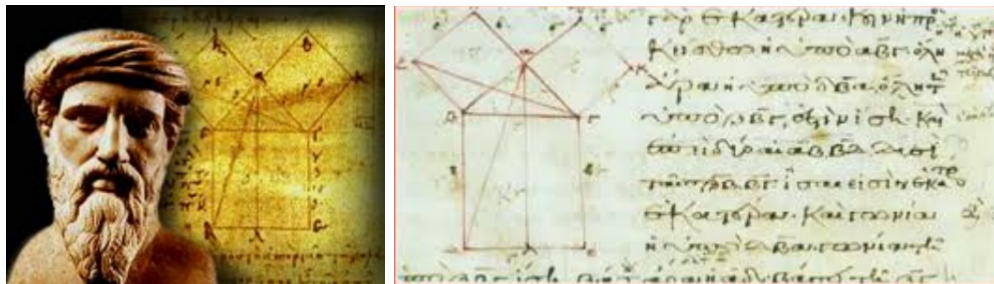


Figura 2.17: Pitágoras e o Papiro com o seu Teorema

Fonte. <<http://amatematicadavida.blogstop.com.br/search?q=pit%C3%A1goras>>

Matemático e filósofo, Pitágoras nasceu na Ilha De Samos, no Mar Egeu (570-490 a.C.). Foi estudante de matemática, astronomia, filosofia e música. Em Crotona, sul da Itália, criou a escola de filosofia pitagórica e outras escolas de conhecimento em geral em viagens pelo Oriente Médio, e que deram origem à Teoria dos Números, base dos estudos de Ciência e Tecnologia (FLOOD; WILSON, 2013; SOUZA, 2018).

Ferramenta importante para a Geometria (cálculo de perímetros, áreas e volumes de objetos), e Trigonometria (cálculo de distâncias entre pontos no espaço, e construção de expressões matemáticas na Geometria Analítica), o Teorema de Pitágoras consiste em um relevante feito no estudo dos triângulos, aplicado aos comprimentos dos lados do triângulo retângulo, triângulo que possui um ângulo reto, isto é, que mede 90° .

Pitágoras não foi o inventor ou descobridor deste teorema, conhecido bem antes dele, porém, foi ele o primeiro matemático a demonstrar a sua veracidade (SOUZA, 2018).

2.4.2 Enunciado do Teorema de Pitágoras

Teorema 2.4. (de Pitágoras) *O quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas de seus catetos.*

A **hipotenusa** é o lado do triângulo retângulo que tem a maior medida e fica oposta ao ângulo reto; o **cateto oposto** a um ângulo (não reto) deste triângulo fica em frente a este ângulo e o **cateto adjacente** é aquele lado que fica ao lado deste mesmo ângulo:

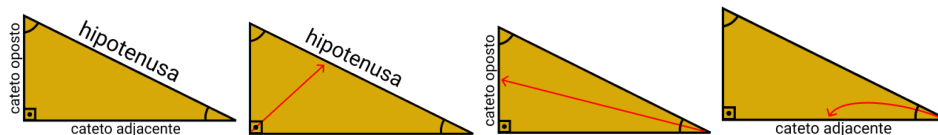


Figura 2.18: Triângulo retângulo

Fonte. <https://matematicabasica.net/teorema-de-pitagoras/>.

2.4.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Demonstração Clássica por semelhança de triângulos

Considere o triângulo retângulo ABC , em que a , b e c são os comprimentos dos lados desse triângulo e h é o comprimento da altura relativa à hipotenusa BC .

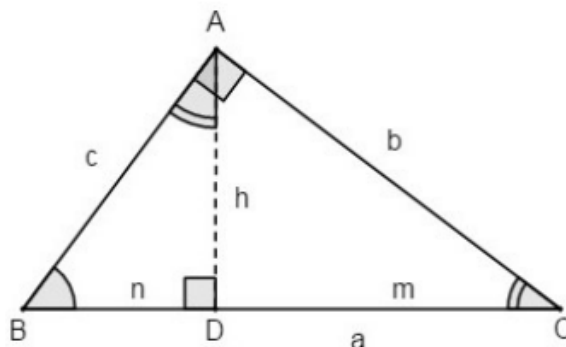


Figura 2.19: Teorema de Pitágoras - Demonstração

Fonte. <https://www.youtube.com/watch?v=pXr1VKaVKG0>.

Observe que podemos destacar os triângulos ABD e ADC . E observe também que os triângulos ABC , ABD e ACD são semelhantes, pois possuem ângulos congruentes (AAA).

Temos então as relações:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \text{ (equação [1]) e } \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \text{ (equação [2])}.$$

Somando as equações [1] e [2] e observando a figura anterior que $a = m + n$, temos $b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2$, como queríamos demonstrar (NASCIMENTO, 2018).

Observação 2.3. Segundo Souza (2018), existem mais de trezentas demonstrações do Teorema de Pitágoras, mas destacam-se dois tipos: as demonstrações geométricas (comparação entre áreas de polígonos) e as algébricas (relações métricas de um triângulo retângulo). Por possuir diversas demonstrações, muitas são acessíveis aos alunos das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio.

Pitágoras provou que a área dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo referentes aos catetos, equivalem à área do quadrado construído sobre o lado da hipotenusa (MATEMÁTICA BÁSICA, 2019).

Exemplo: Considerando um triângulo retângulo com as seguintes medidas: Hipotenusa $a=5$ cm; Cateto $b=4$ cm; Cateto $c=3$ cm. Verifique o teorema de Pitágoras para essas medidas.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, a soma dos quadrados dos catetos tem que ser igual à hipotenusa ao quadrado, assim: $a^2 = b^2 + c^2$. Então: $5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = 9 + 16 \Rightarrow 25 = 25$.

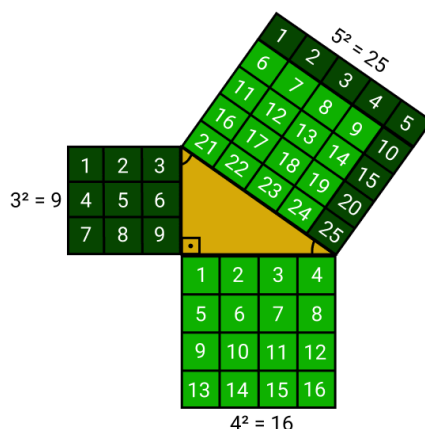


Figura 2.20: Teorema de Pitágoras - Exemplo

Fonte. <https://matematicabasica.net/teorema-de-pitagoras/>

2.4.4 Aplicação do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras tem inúmeras aplicações não só na matemática, como em outras áreas do conhecimento, além de podermos observar que ele está presente em boa parte da natureza (uma árvore faz um ângulo reto com o solo) e nas construções humanas (edifícios, pontes, monumentos assentam em ângulos retos). Assim, conforme cita Souza (2018), o Teorema de Pitágoras pode ser aplicado:

(a) Na construção civil, para garantir a formação de ângulos retos na colocação dos pisos, e entre as paredes e o chão do cômodo, além da construção da cobertura da casa (“tesoura do telhado”);

(b) Na Física e Biologia, para descobrir a intensidade das forças perpendiculares e o equilíbrio entre elas;

(c) Na construção de cestos, azulejos, em que os desenhos artesanais e “quadrados dentados” estão associados ao conceito de triplas pitagóricas, os quadrados geométricos;

(d) Na arte contemporânea.

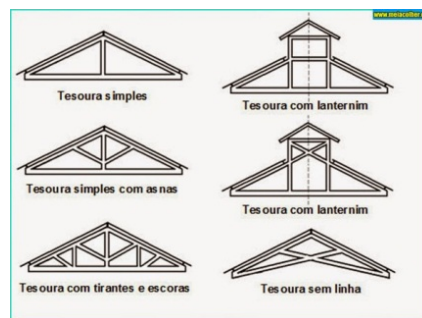


Figura 2.21: Tesouras dos telhados

Fonte. <https://abordandoamatematica.files.wordpress.com/2015/09/06.jpg>

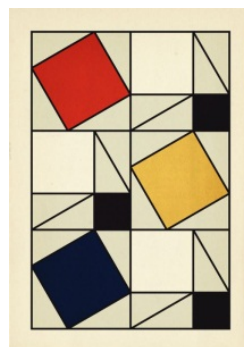


Figura 2.22: Obra de arte: Teorema pitagórico

Fonte. <https://www.pinterest.es/pin/440438038534282782/>. 2010.

2.5 Teorema (Fórmula) de Heron

2.5.1 Síntese histórica



Figura 2.23: Heron

Fonte. <https://oblogdojf.blogspot.com/2017/03/o-genial-heron-de-alexandria.html>

O estudo sobre o cálculo de áreas teve início já com Arquimedes de Siracusa (287-212 *a.C.*), “que desenvolveu trabalhos sobre perímetros de figuras planas, áreas de superfícies e volumes de sólidos” (SOUZA, 2018, p. 60).

Heron de Alexandria (Hero ou Herão, 10-70 *d.C.*, século I) foi um geômetra, matemático e engenheiro egípcio, que realizou trabalhos em Física e Geometria (como uma espécie de máquina a vapor, precursora do termômetro e outros engenhos mecânicos), autor de um tratado, “Métrica”, que versa sobre a medição de figuras simples de planos sólidos, com prova das fórmulas envolvidas no processo, divisão das figuras planas e sólidas, contendo a Fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo, utilizando somente através das medidas dos lados, sem utilizar a altura do triângulo, diferente de outras expressões matemáticas para a mesma finalidade, e também um método (já antecipado pelos babilônios) de aproximação a uma raiz quadrada de números não quadrados.

2.5.2 Enunciado da Fórmula de Heron ou Teorema de Heron

Conforme Souza (2018, p.62), o Teorema de Heron enuncia-se:

Teorema 2.5. *(de Heron) Seja s o semiperímetro do triângulo, a, b, c os comprimentos dos três lados do triângulo e $A = \text{Área do triângulo}$. Então a área de um triângulo qualquer é a raiz quadrada do produto entre o seu semiperímetro (metade do perímetro) e as diferenças entre o semiperímetro e a medida de cada um de seus lados.*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

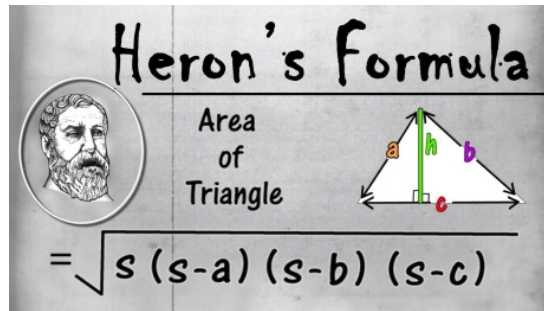


Figura 2.24: Fórmula de Heron

Fonte: <https://www.google.com/search?q=Heron%27s+f%C3%B3rmula+area+of+triangle...>

2.5.3 Demonstração da Fórmula de Heron

Seja um triângulo qualquer com a base a e os outros lados b e c . Os lados b e c têm projeções ortogonais, indicadas por m e n sobre o lado a , conforme figura abaixo.

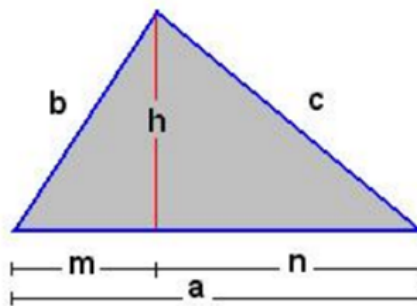


Figura 2.25: Relações métricas no triângulo retângulo

Fonte: <https://blogdoenem.com.br/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-matematica-enem/>

Tomando h como a medida da altura do triângulo, relativa ao lado a , segue-se que a área da região triangular será dada por $A = \frac{a \cdot h}{2}$. Tem-se a formação de mais dois pequenos triângulos retângulos e com eles, são extraídas as relações:

Relação I: $b^2 = m^2 + h^2$ (pelo Teorema de Pitágoras);

Relação II: $c^2 = n^2 + h^2$ (pelo Teorema de Pitágoras);

Relação III: $m + n = a$ (os segmentos m e n juntos equivalem ao lado a).

Subtraindo as *Relações I e II*, membro a membro, temos $b^2 - c^2 = m^2 - n^2$.

Desenvolvendo o segundo membro da nova equação, segue-se $b^2 - c^2 = (m + n)(m - n)$.

E substituindo a *relação III*, obtemos $b^2 - c^2 = a(m - n)$.

Agora considere a *Relação IV* sendo $m - n = \frac{b^2 - c^2}{a}$.

Somando, membro a membro, a *relação III* e *IV*, segue-se que

$$(m+n) + (m-n) = a + \frac{b^2 - c^2}{a} \Rightarrow 2m = a + \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Finalmente, temos a última *Relação V* sendo $m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.

Da *Relação I* segue $h^2 = b^2 - m^2$.

Resolvendo este produto notável, obtemos $h^2 = (b+m)(b-m)$.

Substituindo o valor de m , conforme a *Relação V*, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \\ \Rightarrow h^2 &= \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \\ \Rightarrow h^2 &= \frac{1}{4a^2} [((a^2 + 2ab + b^2) - c^2)(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))] \\ &\Rightarrow 4a^2h^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \end{aligned}$$

Resolvendo estes produtos notáveis, segue-se

$$4a^2h^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Como $a+b+c = 2p$ (Soma dos lados é igual ao dobro do semiperímetro), e também

$$a+b-c = a+b+c - 2c = 2p - 2c = 2(p-c);$$

$$a+c-b = a+b+c - 2b = 2p - 2b = 2(p-b);$$

$$b+c-a = a+b+c - 2a = 2p - 2a = 2(p-a);$$

Obtemos de $4a^2h^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$, a equação a seguir

$$4a^2h^2 = [2p][2(p-c)][2(p-b)][2(p-a)];$$

$$4a^2h^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c);$$

$$\frac{a^2h^2}{4} = p(p-a)(p-b)(p-c);$$

$$\left(\frac{a \cdot h}{2}\right)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c);$$

Como a área do triângulo pode ser expressa por $A = \frac{a \cdot h}{2}$ temos que

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c);$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Chegamos à conclusão que em qualquer triângulo, conhecida as medidas dos seus lados a , b e c , podemos calcular a sua área, utilizando a Fórmula de Heron, como queríamos demonstrar.

Observação 2.4. *Nessa demonstração usamos teorema de Pitágoras e produtos notáveis. Apesar de ser uma demonstração trabalhosa, é possível ser trabalhada com os alunos das séries finais do ensino fundamental e ensino médio. Aconselhamos ao professor fazer um roteiro bem definido dos passos da demonstração, caso ele acredite ser interessante trabalhá-la em sala de aula.*

2.5.4 Aplicação da Fórmula de Heron

A fórmula de Heron de Alexandria é sempre útil nos casos em que não se sabe as alturas de um triângulo, mas se tem as medidas de todos os seus lados (SOUZA, 2018). Vejamos um exemplo.

Exemplo: Utilizando a fórmula de Heron, calcule a área de uma região triangular coma as seguintes medidas: lado $a = 26$ cm, lado $b = 26$ cm e lado $c = 20$ cm.

Calculando o semiperímetro, temos

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{26 + 26 + 20}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

Agora usamos a fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36(36-26)(36-26)(36-20)}$$

$$A = \sqrt{36 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 16} = \sqrt{57600} = 240$$

Logo, a área desta região triangular é 240 cm^2 .

2.6 Teorema dos Cossenos

2.6.1 Síntese histórica da Trigonometria

A palavra “trigonometria” vem do grego e corresponde às palavras *tri* (três), *gonía* (ângulo) e *métron* ou *metrein* (medidas); assim sendo, trigonometria é a ciência que estuda os triângulos. Os primeiros a usá-la nos século IV e V *a.C.*, foram os egípcios, babilônios e, posteriormente, os gregos. Mas, a introdução da Trigonometria nos estudos científicos se deve ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (190-120 *a.C.*), considerado o “Pai da Trigonometria” por estabelecer as medições e registrar em tábuas os resultados dos

cálculos efetuados pelos astrônomos (construção das primeiras tabelas trigonométricas), “por se tratarem de valores correspondentes ao arco e à corda de uma série de ângulo” (FRITZEN, 2011, p. 44; SOUZA, 2018).

Mais tarde, Ptolomeu (90-168 *d.C.*) ampliou o trabalho de Hiparco na obra “Almagesto”, na qual apresenta uma tabela de valores numéricos (ou aproximações) “associados a cordas correspondentes a diversos ângulos, em ordem crescente e em função da metade do ângulo, o que equivale a uma tabela de senos”(FRITZEN, 2011, p. 44).

A trigonometria é um dos ramos mais importantes da Matemática, podendo ser aplicada em diversas áreas do conhecimento e as noções acerca do tema são devidas aos estudos não somente de Hiparco, mas de Pitágoras, Isaac Newton, Ptolomeu e outros que foram fundamentais para a história da matemática (GAIESKI, 2014).



Figura 2.26: Hiparco e Ptolomeu

Fonte. <https://www.google.com/search?q=fotos+dos+primeiros+msatem>

O cosseno é uma função trigonométrica. Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos, diferente do reto, igual a θ , define-se $\cos \theta$ como sendo a razão entre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa deste triângulo. Ou seja:

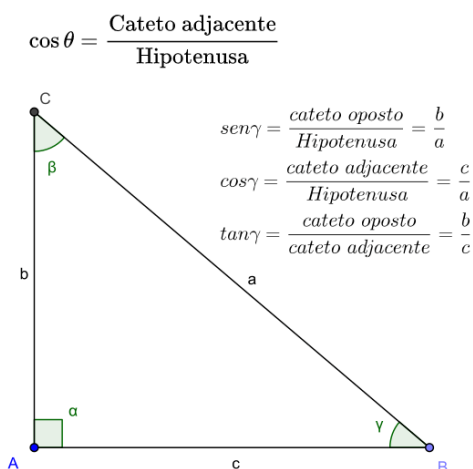


Figura 2.27: Cosseno no triângulo retângulo

Fonte. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cosseno>.

O conceito de cosseno de um ângulo surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os estudos trigonométricos no triângulo são embasados no cosseno e em mais duas relações fundamentais, o seno e a tangente (FRITZEN, 2011). “Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias”(GAIESKI, 2014, p. 15).

Segundo Souza (2018, p. 49), a primeira tabela de senos e cossenos foi criada por um astrônomo persa, mas coube a um astrônomo turco criar a “tabela de sombras” (“cotangentes de ângulos de 1° a 90° ”), formulando uma regra para determinar a elevação do sol acima do horizonte através da medição de sombra, calculando também a inclinação do eixo da Terra.

2.6.2 Enunciando da Lei ou Teorema dos Cossenos

Teorema 2.6. *(dos cossenos) A Lei dos Cossenos ou Teorema dos Cossenos estipula que, em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados equivale, ou é igual, à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles (GAIESKI, 2014).*

Fórmulas da Lei dos Cossenos aplicado ao triângulo ABC :

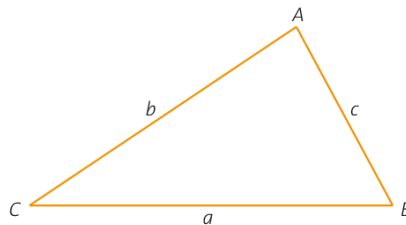


Figura 2.28: Triângulo ABC

Fonte. Gaieski(2014, p.30).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A};$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

2.6.3 Demonstração do Teorema dos Cossenos

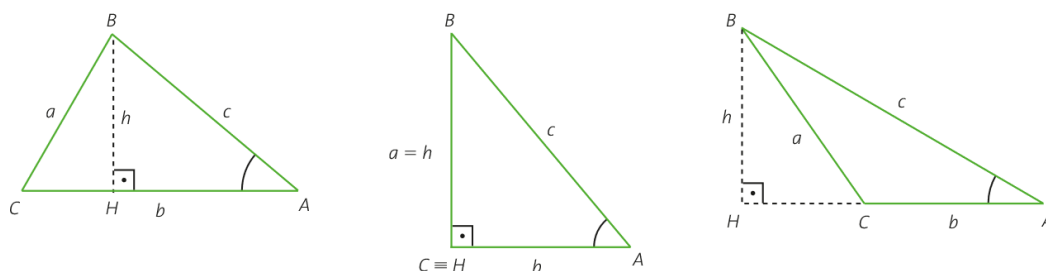


Figura 2.29: Teorema dos Cossenos - O ângulo A pode estar em um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p. 18).

Neste momento, vamos demonstrar o Teorema dos Cossenos utilizando o triângulo acutângulo. Na página 75, encontram-se as demonstrações no triângulo obtusângulo e retângulo.

Considerando a figura a seguir de um triângulo acutângulo qualquer, podemos obter as seguintes relações:

$$b = m + n \quad \text{e} \quad m = c \cdot \cos \hat{A}$$

Os triângulos ABD e BCD são triângulos retângulos. Assim sendo, o Teorema de Pitágoras é utilizado para determinar as relações entre os lados desses triângulos como a seguir:

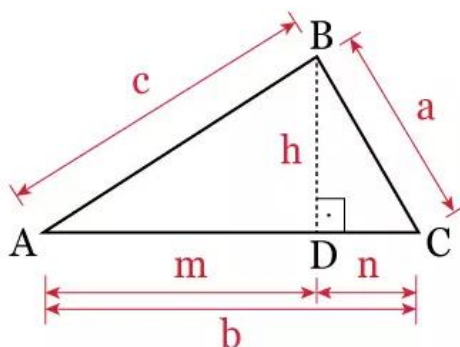


Figura 2.30: Teorema dos Cossenos - Demonstração usando o triângulo acutângulo

Fonte. https://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_dos_cossenos

No triângulo ABD encontra-se: $c^2 = m^2 + h^2$

No triângulo BCD encontra-se: $a^2 = n^2 + h^2$

Na substituição dos elementos $n = b - m$ e $h^2 = c^2 - m^2$ em $a^2 = n^2 + h^2$, obtemos

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^2 &= b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bm.\end{aligned}$$

Com base na relação $m = c \cdot \cos \hat{A}$ é possível chegar à Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A},$$

como queríamos demonstrar.

Observação 2.5. *Nesta demonstração usamos o teorema de Pitágoras e produtos notáveis. Esse teorema possui demonstração acessível aos alunos do ensino médio. Essa demonstração aborda conceitos já estudados nesse nível de ensino.*

2.6.4 Aplicação do Teorema dos Cossenos

Este teorema ajuda a determinar um lado de um triângulo em função dos outros dois lados e do ângulo entre eles (GAIESKI, 2014).

A Lei dos Cossenos é um dos teoremas mais importantes da trigonometria. Com o seu uso é possível obter elementos do triângulo, conhecendo mais lados do que ângulos, estabelecendo relações que auxiliam no cálculo dos ângulos e dos lados dos triângulos. Sua aplicação é válida para todos os tipos de triângulo, porém é específica para o triângulo acutângulo (possui todos os ângulos agudos, menores que 90°) e o triângulo obtuso (possui um ângulo interno obtuso, maior que 90°), entretanto para o cálculo das medidas do triângulo retângulo (possui um ângulo interno reto, com 90°) as aplicações do Teorema dos Cossenos nos levam ao Teorema de Pitágoras. Vejamos um exemplo.

Exemplo: Considere o triângulo da figura a seguir. Calcule o lado x .

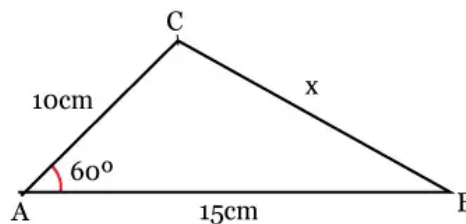


Figura 2.31: Teorema dos Cossenos - Aplicação

Fonte. Educa Brasil (2018).

Pelo teorema do cossenos obtemos a relação:

$$\begin{aligned}x^2 &= 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ \\ x^2 &= 100 + 225 - 300 \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$x^2 = 325 - 150$$

$$x^2 = 175$$

$$x = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$$

Temos que o lado x mede $5\sqrt{7}$ cm.

2.7 Teorema dos Senos

2.7.1 Síntese histórica

Sobre a origem da palavra senos encontramos: Os árabes traduziram textos de trigonometria do sânscrito. Os hindus tinham dado o nome de *jiva* à metade da corda, e os árabes a transformaram em *jiba*. Os tradutores árabes registraram *jb*, mas na tradução do árabe para o latim, Robert de Chester, arabista inglês do século XII, interpretou *jb* como as consoantes da palavra *jaib*, que significa “baía ” ou “enseada”, e escreveu *sinus*, que é o equivalente em latim, originando de *jiba*, ou meia corda hindu, a denominação de *sinus*, seno em português (<https://pt.wikipedia.org/wiki/Seno>).

O seno é uma função trigonométrica. Dado um triângulo retângulo com um de seus ângulos internos, diferente do reto, igual a θ , define-se $\text{sen}\theta$, como sendo a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa deste triângulo. Ou seja:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

2.7.2 Enunciado do Teorema dos Senos

A Lei dos Senos ou o Teorema dos Senos é uma relação matemática de proporção entre as medidas dos lados de triângulos arbitrários e seus ângulos.

Teorema 2.7. *(do seno) Esta lei, ou teorema, estabelece que em um triângulo qualquer as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Assim, num dado triângulo, a razão entre o valor de um lado e o seno do seu ângulo oposto, sempre será constante.*

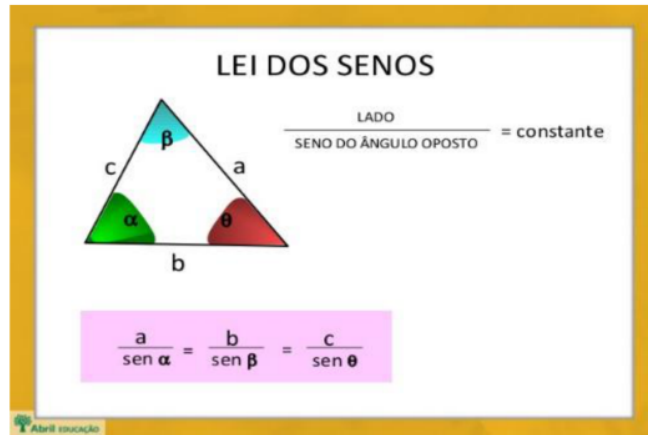


Figura 2.32: Lei dos senos

Fonte. <https://www.passeidireto.com/arquivo/43124096/slide-lei-dos-senos>

Na verdade, temos mais do que isso. Qualquer que seja o triângulo ABC , seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r,$$

em que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

2.7.3 Demonstração do Teorema dos Senos

Consideramos um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de raio r e seja BD um diâmetro dessa circunferência. Suponha $\hat{A} \leq 90^\circ$. Como BD é um diâmetro, então o triângulo BCD é retângulo, com o ângulo reto em C (Este é um resultado de geometria plana!). Considere a figura a seguir:

Temos que,

$$\text{sen}\hat{D} = \frac{a}{2r}.$$

Observe que $\hat{D} = \hat{A}$, pois ambos são ângulos inscritos na circunferência e subtendem o arco BC (Outro resultado de geometria plana!).

Desse modo,

$$\text{sen}\hat{A} = \text{sen}\hat{D} = \frac{a}{2r}.$$

Logo,

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2r.$$

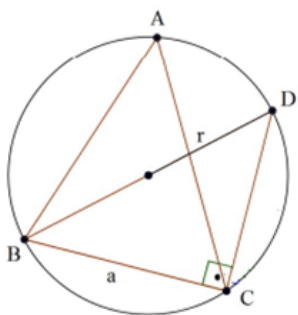


Figura 2.33: Lei dos Senos $\hat{A} \leq 90^\circ$

Fonte. Gaieski (2014, p. 28).

Procedendo de modo análogo para os outros ângulos e lados, teremos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r.$$

Para $\hat{A} > 90^\circ$, considere um ponto E sobre o arco maior determinado por B e C . Os ângulos \hat{A} e \hat{E} são suplementares. Logo, $\text{sen}\hat{A} = \text{sen}\hat{E}$. Pelo caso anterior, $\frac{a}{\text{sen}\hat{E}} = 2r$.

Logo,

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2r.$$

Procedendo de modo análogo para os outros ângulos e lados, teremos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r.$$

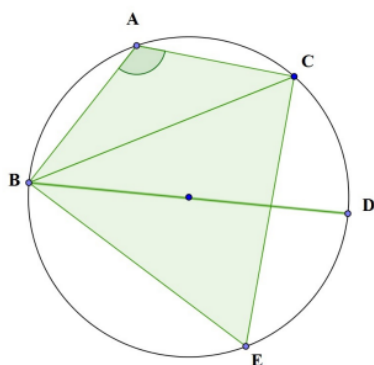


Figura 2.34: Lei dos Senos $\hat{A} > 90^\circ$

Fonte. Gaieski (2014, p. 29).

Como queríamos demonstrar.

Observação 2.6. Nesta demonstração usamos alguns resultados de geometria plana, sendo acessível aos alunos do ensino médio, pois aborda apenas conteúdos já trabalhados nesse nível de ensino.

2.7.4 Aplicação do Teorema dos Senos

Este teorema é utilizado para encontrar as medidas dos lados de um triângulo e também dos ângulos.

“Importa saber que, para se encontrar as medidas dos lados de um triângulo, é necessário apenas conhecer as medidas dos seus ângulos e apenas a medida de um de seus lados”(NOVAES, 2019a, s.p).

Exemplo: Considere o triângulo ABC a seguir de lados a , b e c , com a medindo 10 cm:

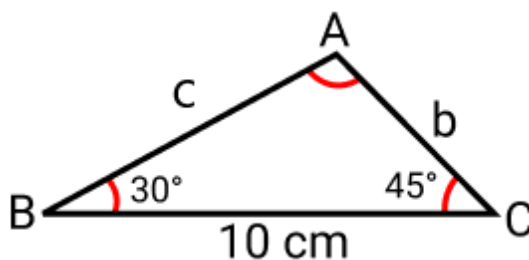


Figura 2.35: Lei dos Senos - Aplicação

Fonte. <https://matematicabasica.net/lei-dos-senos/>

$$\frac{c}{\text{sen}45^\circ} = \frac{b}{\text{sen}30^\circ} = \frac{10}{\text{sen}105^\circ}$$

A soma interna dos ângulos de um triângulo é igual a 180° . Assim, podemos estabelecer as medidas para b e c da seguinte forma:

$$c = \frac{\text{sen}45^\circ}{\text{sen}105^\circ} \cdot 10, \quad b = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}105^\circ} \cdot 10.$$

Portanto, obtemos as medidas de $c = 7,32$ cm e $b = 5,18$ cm.

2.8 Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)

2.8.1 Síntese histórica

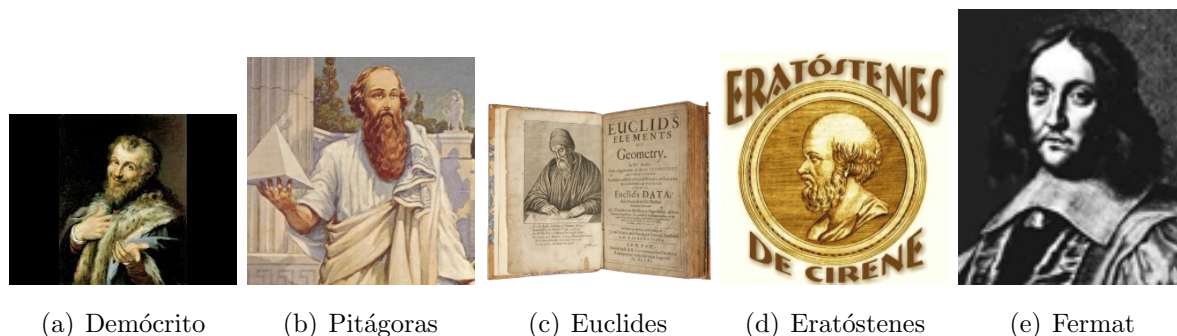


Figura 2.36: Alguns dos responsáveis pelo Teorema Fundamental da Aritmética

Fonte: <https://www.google.com>

Os primeiros trabalhos em teoria aritmética dos números tem origem na Índia Antiga (800 *a.C.*), porém, os resultados mais importantes foram demonstrados pelos gregos, que descobriram que toda matéria é formada por átomos (*a* não; *tomo* divisão), que são pequenas partículas. Foi o filósofo grego Demócrito (546 a 460 *a.C.*) quem denominou essas partículas de átomos, considerando-as indivisíveis. Hoje os átomos podem ser divididos em partículas menores ou “unidades mínimas”.

Na aritmética, as “unidades mínimas” também tem origem grega e o papel dos átomos é exercido pelos números primos, que funcionam como “blocos numéricos fundamentais”, responsáveis por gerar todos os números naturais diferentes de 0 e de 1 (OBMEP, 2019).

Eves (2011) cita que Pitágoras (570-495 *a.C.*) e seus seguidores iniciaram o desenvolvimento da teoria dos números, com a descoberta dos números amigos (soma dos divisores de um resulta exatamente no outro), e “os números perfeitos, deficientes e abundantes”(EVES, 2011, p. 99).

Euclides de Alexandria (360-295 *a.C.*) foi um professor, matemático e escritor grego que desenvolveu a teoria dos números. O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*) aparece publicado nos “Elementos”, no livro IX, onde se explica que qualquer inteiro só pode ser decomposto como produto de primos de uma única maneira. Em teoria de números, é possível enumerar diversos resultados notáveis (e usados até hoje) atribuídos a Euclides, como o algoritmo para a divisão, a demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ (diagonal de um quadrado de lado 1) e a prova de que os números primos são infinitos, demonstrados pelo método da contradição (EUCLIDES, 2009).

Eratóstenes de Cirene (276-194 *a.C.*) realizou sua contribuição para a teoria de números com a criação do Crivo de Eratóstenes, uma das formas mais eficientes para criação

de listas de números primos com aplicabilidade em várias teorias, como na teoria de criptografia ou sistemas de códigos e em computação (SOUZA, 2018). Outros matemáticos se dedicaram ao estudo da teoria dos números, como Pierre de Fermat (1601-1665), que conjecturou no Último Teorema de Fermat que $x^n + y^n = z^n$ não tem nenhuma solução de inteiro (não zero) para x , y e z quando $n > 2$.; Leonhard Euler (1707-1783), que criou muitas notações matemáticas e Friedrich Gauss (1777-1855), que demonstrou corretamente o TFA* publicado em 1801 na obra *Disquisitiones Arithmeticae*.

2.8.2 Enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética

Números primos são os números naturais que têm apenas dois divisores naturais diferentes: o 1 e ele mesmo.

Teorema 2.8. (TFA*) *Todo inteiro maior do que 1 (um) pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos. Assim, todo número inteiro maior ou igual a 2 pode ser escrito como produto de números primos.*

Este teorema garante obter uma única representação para qualquer número natural, com diversas possibilidades de aplicação, e sua compreensão permite conexões que envolvem conceitos de fatoração, divisibilidade, primalidade, entre outros.

Exemplos:

$$12 = 2 \times 2 \times 3, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5, \quad 935 = 5 \times 11 \times 17$$

$$2100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1$$

“Significa que os números primos são como os “átomos” ou “tijolos” da construção numérica pela multiplicação”(OLIVEIRA; FONSECA, 2017, p. 884).

Os conceitos e propriedades dos números primos são elementos essenciais da Teoria dos Números que é a “porta de entrada” para o estudo da matemática, por identificar elementos da Aritmética básica por toda parte, possibilitando o desenvolvimento das “habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas”(RESENDE, 2007, p. 7).

2.8.3 Demonstrações do Teorema Fundamental da Aritmética

Vamos dividir a demonstração do TFA* em duas etapas:

(i) Existência da decomposição em primos:

Usaremos o **princípio da indução matemática**.

Se n for primo, nada há a demonstrar.

Considere, então, n não primo, ou seja, um número composto. Neste caso, o menor valor para o qual o teorema se verifica é $n = 4 = 2 \cdot 2$.

Hipótese de indução: Suponhamos que o teorema também seja válido para todos os números maiores que 4 e menores que n . Vamos mostrar que também é válido para n .

Como n é composto, existem a e $b \in \mathbb{N}$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$ tais que $n = ab$.

Mas, como a e b são menores que n , por hipótese de indução, existem primos $r_1, r_2, \dots, r_t, q_1, q_2, \dots, q_s$ de forma que, $a = r_1 r_2 \dots r_t$ e $b = q_1 q_2 \dots q_s$.

Logo, $n = ab = r_1 r_2 \dots r_t q_1 q_2 \dots q_s$, ou seja, n também pode ser decomposto em fatores primos, provamos a existência.

(ii) Unicidade da decomposição em primos:

Usaremos a **redução ao absurdo**.

Suponhamos que o número n admita duas decomposições diferentes. Sejam elas:

$$n = p_1 \cdot p_2 \dots p_k \quad (1) \qquad n = q_1 \cdot q_2 \dots q_r \quad (2)$$

Vamos supor, também, que $r \geq k$.

Assim, $p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_r \Rightarrow p_2 \dots p_k = \frac{q_1 q_2 \dots q_r}{p_1}$

Concluimos que p_1 deve ser algum dos fatores q_i , pois p 's e q 's são primos. Suponha que $p_1 = q_r$.

Simplificando estes fatores comuns, temos $p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_{r-1}$.

Prosseguindo com a mesma lógica,

$$p_3 \dots p_k = \frac{q_1 q_2 \dots q_{r-1}}{p_2} \Rightarrow p_3 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_{r-2}, \text{ etc.}$$

Portanto, para cada p_j do primeiro membro, vamos ter um q_i do segundo membro tal que $p_j = q_i$.

Uma vez que $p_j = q_i$, reescrever (2) da seguinte maneira $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_k q_j q_{j+1} \dots q_{j+m}$.

Mas, dividindo (2) por (1), temos $1 = q_j q_{j+1} \dots q_{j+m}$, um absurdo.

Mas não seria se em (1) e (2) se verificasse $k = r$ (mesma quantidade de primos) e $p_i = q_i$ (igualdade dos primos correspondentes).

Logo, a decomposição de n em fatores primos é única (a menos da ordem dos fatores). Como queríamos demonstrar.

Observação 2.7. *Nesta demonstração clássica do TFA* usamos o princípio de indução matemática e redução por absurdo que são conteúdos (técnicas) não estudados no ensino básico. Portanto, pensando num panorama geral das nossas escolas públicas, não é razoável aos alunos nesse nível de ensino.*

Corolário do TFA*: Se $n \neq 1$ não é um número primo, então n possui necessariamente um fator primo menor do que ou igual a \sqrt{n} .

Demonstração: Suponha que n é um número composto positivo, então existe ao menos um par de inteiros n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$. Sem perda de generalidade, suponha $n_1 \leq n_2$. Claramente devemos ter $n_1 \leq \sqrt{n}$, uma vez que se $n_1 > \sqrt{n}$ teríamos:

$$n = n_1 n_2 \geq n_1 n_1 > \sqrt{n} \sqrt{n} = n, \text{ o que é um absurdo.}$$

Usando o TFA*, temos que n_1 é primo ou n_1 é produto de primos. Se n_1 é primo temos o resultado. Caso contrário, $n_1 = \alpha p$, em que p é primo e $1 < \alpha = n_1/p$. Como $\max\{\alpha, p\} < n_1 \leq \sqrt{n}$ segue-se que $p < \sqrt{n}$. Como queríamos demonstrar.

2.8.4 Uma aplicação do TFA* - Crivo de Eratóstenes

Do corolário anterior do TFA*, segue um dispositivo matemático bem prático.

O **Crivo de Eratóstenes** é um algoritmo bem conhecido do ensino fundamental, um método simples e prático, para encontrar números primos até um certo valor limite. Segundo a tradição, foi criado pelo matemático grego Eratóstenes.

O Crivo começa com a lista de todos os números inteiros entre 1 e N . Em seguida excluimos dessa lista os múltiplos de todos os números primos entre 1 e \sqrt{N} (sabemos que isso é possível pelo corolário anterior). Os sobreviventes, deste processo de seleção, são: o número 1 e os números primos entre \sqrt{N} e N . Podemos ilustrar isso como se segue:

Exemplo: Faça $N = 48$, temos que os primos menores do que $\sqrt{48}$ são 2, 3 e 5, assim,

1, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,
~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~,
31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, 40,
41, ~~42~~, 43, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, 47, ~~48~~.

Desta forma, concluímos que os números primos de 1 a 48 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

2.9 Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)

2.9.1 Síntese histórica

De acordo com Sobral (2015, p. 119), Peter Rothe (?-1617) escreveu em *Arithmetica Philosophica* (1608) que uma equação polinomial de grau n , com coeficientes reais, podia ter soluções. Em 1629, Albert Girard (1595 -1632), matemático francês, afirmou em seu livro *L'invention nouvelle en l'Algèbre*, que “uma equação polinomial de grau n tem soluções, mas não disse que tais soluções eram necessariamente números complexos”.

François Viète (1540-1603), matemático francês, trabalhou com várias equações polinomiais com coeficientes reais e foi quem adotou as vogais para as incógnitas, consoantes para os números conhecidos, gráficos para resolver equações cúbicas e biquadradas (ou de 4º grau) e trigonometria, para as equações de graus mais elevados, sendo considerado um precursor da geometria analítica.

Thomas Harriot (1560-1621), um matemático estudante da Álgebra, introduziu vários símbolos e notações algébricas, tais como: os sinais $>$ (maior que) e $<$ (menor que) e se a for raiz de um polinômio, então $(x - a)$ divide o polinômio.

O matemático francês René Descartes (1596 -1650), primeiro filósofo a utilizar as técnicas algébricas como meio de exploração científica, em 1637, confirmou a descoberta de Harriot e afirmou que “para todas as equações de grau n , pode-se imaginar n raízes,

mas estas podem não corresponder a quantidade nos números reais”, números que o matemático denominou de “números imaginários”(SOBRAL, 2015, p. 120).

No século XVIII, Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês criador da fórmula De Moivre, e Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático e físico suíço, estabeleceram uma estrutura algébrica para os números complexos. No escopo dos números complexos, o TFA** afirma que “qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável x e de grau $n > 1$ tem alguma raiz complexa”(SOBRAL, 2015, p. 120).

Assim, uma consequência do TFA** é que “qualquer polinômio com coeficientes reais e grau superior a 0 pode ser escrito como produto de polinômios com coeficientes reais, de primeiro ou segundo grau”. Entretanto, Gottfried Leibniz (1646-1716), em 1702, afirmou que “nenhum polinômio do tipo $x^4 + a^4$ (com a real, e não nulo) poderia ser obtido sob aquela forma”(SOBRAL, 2015, p. 120).

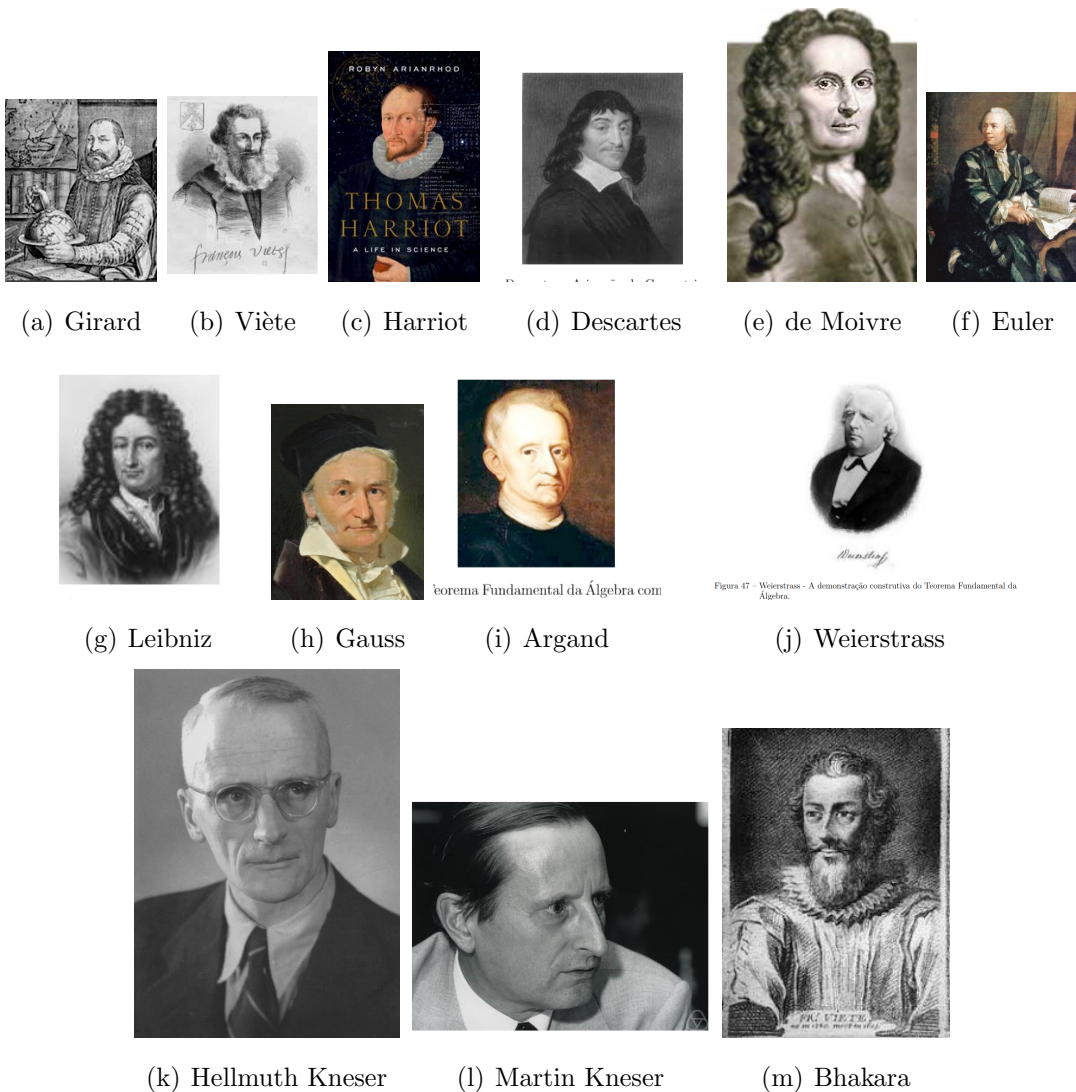


Figura 2.37: Responsáveis pelo Teorema Fundamental da Álgebra

Fonte. <https://en.wikipedia.org/wiki/>; Sobral, 2015.

No final do século XVIII, foram feitas duas demonstrações algébricas com falhas de natureza topológica. Em 1799, o matemático alemão, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), publicou sua tese de doutorado com a primeira demonstração plausível do *TFA*** para a comunidade matemática. Porém, foi somente em 1806, que o matemático francês Jean-Robert Argand (1768-1822) enunciou este teorema para “polinômios com coeficientes complexos e não apenas para polinômios com coeficientes reais”. Em 1891, o professor alemão Karl Weierstrass (1815-1897) chamou atenção para a criação de uma demonstração construtiva do teorema, realizada pelo matemático alemão Hellmuth Kneser (1898-1973) em 1940 e simplificada em 1981, pelo matemático alemão Martin Kneser (1928-2004) (SOBRAL, 2015, p. 122).

2.9.2 Enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 2.9. (*TFA***) *Qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos em uma variável z e de grau $n \geq 1$ possui n raiz complexa.*

O enunciado mais detalhado seria:

Teorema 2.10. (*TFA***) *Considere o polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ com grau $n \geq 1$. Então, existem números complexos distintos a_1, a_2, \dots, a_k com $k \leq n$ e números naturais m_1, m_2, \dots, m_k com $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$, tais que $p(z) = a(z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_k)^{m_k}$, com $a \in \mathbb{C}$.*

É importante salientar que “nem todas as raízes de um polinômio são números reais, mas, se forem números complexos, sempre aparecerão aos pares, tanto o complexo como seu conjugado (se $x + yi$ é raiz de um polinômio, o conjugado $x - yi$ também é raiz deste mesmo polinômio)”. (SOUZA, 2018, p. 130)

2.9.3 Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Nos livros-textos de Matemática do Ensino Médio, o teorema Fundamental da Álgebra é apresentado como um resultado que faz (de modo algo mágico) com que possamos garantir a existência de exatamente n raízes para um polinômio de grau n . A rigor, ele é apresentado nos livros como se fosse um axioma, sem qualquer razão para pelo menos mostrar que se trata de um resultado plausível. Isso se justifica pelo fato de que sua demonstração requer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no Ensino Médio. Mas é interessante que pelo menos o professor tenha ideia sobre como demonstrá-lo (LIMA et al., 2016, p.182-185).

Encontramos dois tipos de demonstrações para o TFA^{**}: **as analíticas e as algébricas**.

- Encontramos **uma demonstração algébrica** em (SALVADO, 2016, p.30-31). Essa demonstração é por indução matemática e é necessário saber dois fatos sobre o corpo dos números reais.

(a) Qualquer polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real;

(b) Todo número real não negativo tem raiz quadrada real.

- Encontramos também **duas demonstrações analíticas** (usam argumentos de análise complexa) para o TFA^{**}. A primeira que encontramos foi no livro do professor Márcio Soares (SOARES, 2009). Essa demonstração elegante exige bastante conhecimento prévio da teoria de resíduos e polos da análise complexa, ela sai como um corolário do teorema de Rouché. Encontramos uma segunda demonstração analítica também nos trabalhos de (SALVADOR, 2016, p.31-33) e de (SCARAMELLA, 2018, p.12-15) cuja referência principal é o volume 3 da coleção *A Matemática do Ensino Médio* da SBM (LIMA et al., 2016, p.182-185).

Demonstração: Suponhamos conhecidos os três seguintes fatos:

(a) As funções polinomiais são contínuas (holomorfas) em todo \mathbb{C} .

(b) A **representação polar** (ou trigonométrica) de um número complexo $z = a + bi$ é a forma $z = r(\cos\theta + i\sen\theta)$, em que r é o módulo de z e θ é seu argumento.

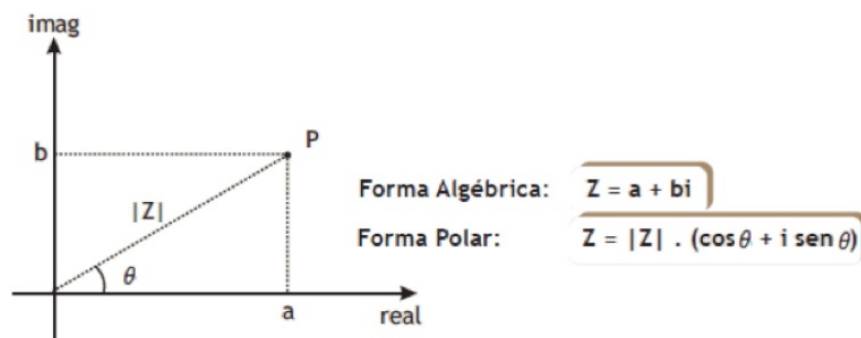


Figura 2.38: Representação polar de z

Fonte: <https://www.google.com.br/search?sxsrf=ALeKk03POQj1OdBUV3NOzQPYGsREtGWKJA:1610704667189&source=univ&tbm=isch&q=figura+da+representa%C3%A7%C3%A3o+polar+em+>

(c) **Teorema de De Moivre:**

Se $z = r(\cos\theta + i\sen\theta)$, então $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sen(n\theta))$.

Considere uma função polinomial $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, são números complexos. Então cada ponto do plano complexo tem uma imagem por p que também é um número complexo.

Vamos provar (explorando de modo intuitivo, mas que pode ser matematicamente preciso, a continuidade de funções polinomiais) que existe um complexo z_o tal que a sua imagem é zero ($p(z_o) = 0$), ou seja, z_o é raiz de p . Desta forma, segue a demonstração do TFA**.

Consideremos um círculo \mathcal{C} no plano complexo com centro na origem e raio r , temos $|z| = r$. Como p é uma função contínua, a imagem de uma curva contínua e fechada é outra curva contínua e fechada (a curva imagem pode cruzar a si mesma).

Vamos estudar a imagem dos pontos deste círculo \mathcal{C} quando aplicado no polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Primeiramente, vamos supor que $a_0 \neq 0$.

Considere $z \in \mathcal{C}$, sua forma polar será $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, temos:

$$p(z) = a_n (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n + a_{n-1} (r(\cos\theta + i\sin\theta))^{n-1} + \dots + a_1 (r(\cos\theta + i\sin\theta)) + a_0.$$

Logo, por De Moivre, temos:

$$p(z) = a_n (r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))) + a_{n-1} (r^{n-1} (\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta))) + \dots + a_1 (r(\cos\theta + i\sin\theta)) + a_0.$$

Quando z percorre \mathcal{C} , círculo de raio r , o argumento θ varia de 0 a 2π . Observe então que z^2 terá argumento 2θ que varia de 0 a 4π e, no geral, z^n tem argumento $n\theta$ que varia de 0 a $2n\pi$.

Observamos também que quando z percorre \mathcal{C} de raio r , z^2 percorre duas vezes o círculo de raio r^2 e z^n percorre n vezes o círculo de raio r^n .

Logo, a imagem do círculo \mathcal{C} por p não é simples de se enxergar, note as parcelas de $p(z)$. Porém podemos perceber o que acontece com a curva imagem $p(\mathcal{C})$ nos casos extremos, ou seja, quando r é muito pequeno ou quando r é muito grande. Isso fica mais claro quando colocamos r^n em evidência em $p(z)$:

$$p(z) = r^n \left[(a_n (\cos n\theta + i\sin n\theta)) + \frac{a_{n-1}}{r} ((\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)) + \dots + \frac{a_1}{r^{n-1}} ((\cos\theta + i\sin\theta)) + \frac{a_0}{r^n} \right]$$

Para valores de r próximos de zero, as potências de r serão valores cada vez menores, ou seja, $r > r^2 > \dots > r^{n-1} > r^n$, porém $\frac{1}{r} < \frac{1}{r^2} < \dots < \frac{1}{r^{n-1}} < \frac{1}{r^n}$. Assim, a imagem de \mathcal{C} pelo polinômio p é um “círculo” centrado em a_0 , com pouca perturbação dos outros termos (parcelas) de $p(z)$.

Para valores grandes de r , $p(\mathcal{C})$ é um “círculo” de centro na origem e raio r^n , ligeiramente perturbado pelas contribuições das outras parcelas de $p(z)$.

Portanto para valores bem pequenos de r a curva descrita por $p(\mathcal{C})$ é uma curva fechada em torno do complexo a_0 e próxima de a_0 . Assim a origem zero de \mathbb{C} é exterior a essa curva. Quando os valores de r são grandes, a curva descrita por $p(\mathcal{C})$ se comporta como um círculo de centro na origem.

Finalmente, pensando numa variação contínua de r em \mathbb{R} , de r 's grandes para pequenos, para que o centro do “círculo” $p(\mathcal{C})$ passe do interior para o exterior da curva fechada $p(\mathcal{C})$, significa que para algum valor de r a curva passa pela origem e, assim, existe algum z_o tal que $p(z_o) = 0$.

Para o caso em que $a_0 = 0$, escrevemos $p(z) = z \cdot (a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1)$, logo $z = 0$ é uma raiz de p . Se $a_1 \neq 0$, então temos que o teorema está provado para o polinômio $q(z) = a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$, conseqüentemente está provado para o polinômio original. Se $a_1 = 0$, repetimos o mesmo procedimento aplicado aqui, agora em q .

Portanto, toda equação polinomial tem uma raiz complexa, como queríamos demonstrar (SALVADO, 2016, p.31-33).

Em Lima et al.(2016, p.182-185), para ficar mais visível o argumento usado na demonstração acima, foram considerados o círculo \mathcal{C} centrado na origem $|z| = r$ e o polinômio $p(z) = z^2 + z + 2$. Para raio $r = \sqrt{2}$, a curva imagem de \mathcal{C} passa pela origem. Logo existe um complexo z , de módulo 2, cuja imagem $p(z) = 0$. De fato, as raízes de $p(z) = z^2 + z + 2$ são $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ que têm módulo $\sqrt{2}$.

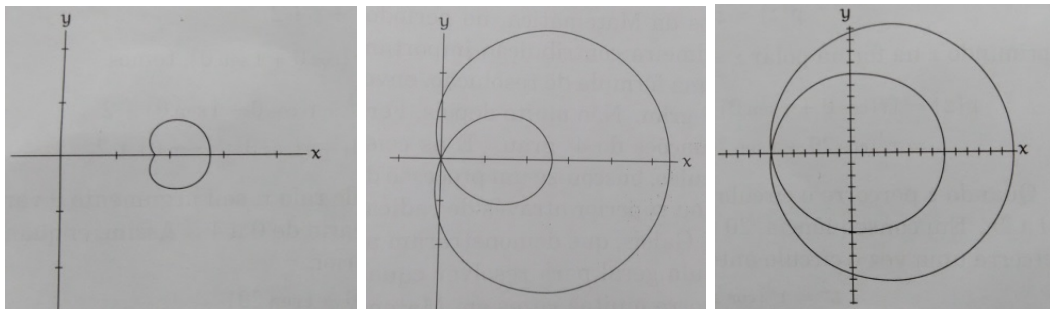


Figura 2.39: Curva imagem de \mathcal{C} para $r = 1/2$, $r = \sqrt{2}$ e $r = 3$, respectivamente.

Fonte. Lima et al.(2016, p.182-185).

2.9.4 Aplicações do do Teorema Fundamental da Álgebra

Souza (2018) aponta que o TFA** pode ser aplicado em diferentes situações relacionadas às ciências da natureza (pressão da água do mar, conversão de medidas da temperatura em Celsius (C), em Kelvin (K) ou em Fahrenheit, a trajetória de um corpo lançado obliquamente no espaço ou a ionização de moléculas), às ciências humanas e ao cotidiano (equilíbrio de mercado, comércio, lucro, produção, entre outras), “sendo as funções polinomiais úteis para economistas, cientistas e tecnólogos”(SOUZA, 2018, p.135).

2.9.5 A Fórmula de Bhaskara

Ilustrando o TFA** para $n = 2$, a fórmula de Bhaskara é um dos métodos mais conhecidos para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau (polinômio de segundo grau). Essa fórmula recebe este nome em homenagem ao matemático, astrônomo e professor indiano Bhaskara Akaria ou Bhakara II (1114 -1185), considerado o último matemático medieval importante da Índia do século XII.

Teorema 2.11. *(de Bhaskara) Considere uma equação do 2º grau*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a , b e c são números reais quaisquer, com $a \neq 0$. Então as raízes desta equação são duas dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vejamos uma demonstração bem simples deste teorema:

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então $ax^2 + bx = -c$.

Como $a \neq 0$ podemos dividir a última igualdade por a e obtemos $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$.

Agora, completando quadrado do lado esquerdo da igualdade teremos que somar $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

O lado esquerdo da última igualdade pode ser reescrito como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Já o lado direito também pode ser reescrito como $\frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Logo, ficamos com a seguinte igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados desta igualdade, obtemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente isolando x no lado esquerdo, obtemos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ou melhor,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A conhecida fórmula de Bhaskara, como queríamos demonstrar.

Chamamos de *discriminante* da equação $ax^2 + bx + c = 0$ o valor $\Delta = b^2 - 4ac$.

Note, pela fórmula de Bhaskara, que:

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas;

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais iguais;

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes complexas conjugadas.

Observação 2.8. *Acreditamos que qualquer demonstração do teorema fundamental da álgebra é muito sofisticada para o ensino básico. Porém, a demonstração da fórmula de Bhaskara aqui apresentada pode ser um exercício do conteúdo “completar quadrados” do ensino básico.*

2.10 Teorema Binomial de Newton

2.10.1 Síntese histórica



Figura 2.40: Newton

Fonte. http://clubes.obmep.org.br/blog/b_newton/

Isaac Newton (1643-1727), cientista inglês, estudioso de Física e de Matemática pura e aplicada, tornou-se notável no meio científico-acadêmico pelos estudos da Sistematização das Leis da Dinâmica, Concepção da Lei da Gravitação Universal, Óptica (incluindo a Teoria das Cores), criando e fabricando diversos instrumentos científicos como telescópios e lentes (GARBI, 2010). O cientista se dedicou também em estudar como conectar expansão binomial com o Cálculo Diferencial e Integral, denominado por ele de método das fluxões, segundo Eves (2011).

O termo “Binômio de Newton” é dedicado a Isaac Newton, embora haja indícios do Teorema nos escritos de Euclides, sobre o desenvolvimento binomial com expoente dois; no interesse dos hindus antigos sobre os coeficientes binomiais, como quantidades combinatórias que expressam o número de maneiras de selecionar k objetos de n sem substituição; no trabalho de Al-Karaji, matemático persa do século XI, que descreveu o padrão triangular

dos coeficientes binomiais e também forneceu uma prova matemática do teorema binomial do triângulo de Pascal usando uma forma primitiva de indução matemática, além da contribuição de outros matemáticos para o desenvolvimento do Teorema Binomial com expoente natural (LEACHENSKI, 2017; CUNHA, 2017).

2.10.2 Enunciado do Teorema Binomial de Newton

Um **binômio** é uma adição ou subtração de dois monômios, ou seja, é uma expressão do tipo $(a + b)$ ou $(a - b)$. Em matemática, *binômio de Newton* permite escrever na forma canônica o polinômio correspondente à potência de um binômio. Casos particulares do binômio de Newton:

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \quad e \quad (a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

Coefficientes binomiais ou números binomiais são relações estabelecidas entre dois números naturais n e p , tais que $n \geq p$, indicadas por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Chamamos $\binom{n}{p}$ de coeficiente binomial de classe p do número n ou coeficiente binomial n sobre p (n e p são naturais). O coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ corresponde, em análise combinatória, ao número de combinações de n (numerador) elementos agrupados p a p (denominador).

Os coeficientes binomiais podem ser organizados num triângulo denominado **triângulo de Pascal** (1623-1662, Blaise Pascal, matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo católico francês) ou de Tartaglia (1500-1557, matemático italiano). O triângulo de Pascal dispõe os coeficientes binomiais, de modo que os coeficientes de mesmo numerador fiquem agrupados em uma mesma linha, e coeficientes de mesmo denominador ficam agrupados na mesma coluna. Veja as duas figura a seguir.

$$\begin{array}{l}
 \text{linha 0} \quad \binom{0}{0} \\
 \text{linha 1} \quad \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 \text{linha 2} \quad \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 \text{linha 3} \quad \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 \text{linha 4} \quad \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
 \vdots \\
 \text{linha } n \quad \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \binom{n}{4} \dots \binom{n}{n}
 \end{array}$$

Figura 2.41: Triângulo de Pascal, modelo 1

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/triangulo-de-pascal/>

Triângulo de Pascal

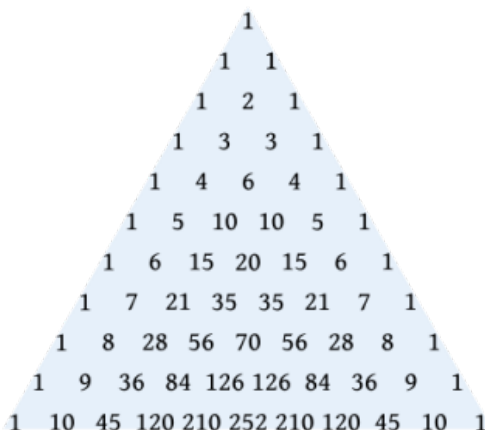


Figura 2.42: Triângulo de Pascal, modelo 2

Fonte. <http://www.cognoscomm.com/arquivo/2208/81-escada-de-venus/>

Teorema 2.12. (*Binomial de Newton*) Sejam a e b números reais e n um número natural, então vale a igualdade:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2.10.3 Demonstração do Teorema Binomial de Newton

Usaremos o **princípio da indução matemática**.

Para $n = 1$, do lado esquerdo da igualdade do teorema, temos $(a + b)^1 = a + b$.

Do lado direito da igualdade, temos $\binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$.

Então o teorema é verdadeiro para $n = 1$.

Hipótese de indução: suponha o teorema válido para $n = k$.

$$P(k) : (a + b)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^p.$$

Mostraremos que o teorema é válido para $n = k + 1$.

$$P(k + 1) : (a + b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} b^p.$$

Em uma notação mais econômica, mostraremos que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Partindo da hipótese de indução $P(k)$, multiplica-se ambos os lados da equação por

$(a + b)$:

$$(a + b)(a + b)^k = (a + b) \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^p.$$

Efetuando-se a propriedade distributiva:

$$(a + b)^{k+1} = a \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^p + b \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^p.$$

E utilizando a propriedade distributiva para todos os termos do somatório:

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k+1-p} b^p + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^{p+1}.$$

Calculando o 0-ésimo termo do primeiro somatório e em seguida retirando-o do somatório, tem-se que:

$$\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k+1-p} b^p = a^{k+1} + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} a^{k+1-p} b^p.$$

Calculando o k-ésimo termo do segundo somatório e retirando-o do somatório, e em seguida redefinindo a variável p como $p := p - 1$ tem-se:

$$\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} b^{p+1} = b^{k+1} + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} a^{k-p} b^{p+1} = b^{k+1} + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p-1} a^{k+1-p} b^p.$$

Dessa forma, obtém-se:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} a^{k+1-p} b^p + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p-1} a^{k+1-p} b^p.$$

Colocando em evidências o termo $a^{k+1-p} b^p$ nos dois somatórios, tem-se:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k \left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right] a^{k+1-p} b^p.$$

É fácil verificar que $\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p}$ (Relação de Stifel), então:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{p=1}^k \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} b^p.$$

Como o $(k + 1)$ -ésimo termo do somatório é igual a b^{k+1} e o 0-ésimo termo é igual a a^{k+1} , podemos incorporar esses dois termos ao somatório modificando o índice $p = 1$ para $p = 0$, e o índice k para $k + 1$:

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} a^{k+1-p} b^p.$$

Logo, a partir de $P(k)$, foi possível provar $P(k + 1)$, e o resultado é válido para todo número natural $n \geq 1$, como queríamos demonstrar (CANDIDO et al.,2014, p.7-8).

Observação 2.9. *Nesta demonstração utilizamos o princípio de indução matemática. A demonstração deste teorema exige conhecimentos matemáticos dificilmente abordados no ensino básico. Portanto, em geral, não é razoável aos alunos desse nível de ensino.*

2.10.4 Aplicações do Teorema Binomial de Newton

O teorema binomial pode ser utilizado nos cálculos de probabilidade envolvendo dois eventos mutuamente exclusivos, quando não importa a ordem de ocorrência de tais eventos.

Exemplo 1: Vamos pensar no exercício em que um dado é lançado 3 vezes consecutivas. Vamos listar os eventos possíveis.

Considere S (**sucesso**) o evento retirada da face seis em um lançamento e F (**fracasso**) o evento complementar de S em um lançamento.

Neste caso, temos:

$P(S)$ = probabilidade de retirada de um seis (sucesso) em um lançamento = $\frac{1}{6}$;

$P(F)$ = Probabilidade da não retirada de um seis (sucesso) em um lançamento = $\frac{5}{6}$.

Para 3 lançamentos consecutivos de um dado temos 8 situações possíveis,
 $2^3 = 8$.

$$SSS, FSS, SFS, SSF, FFS, FSF, SFF, FFF$$

Como os eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência, seja um sucesso ou um fracasso de cada terna ou etc, é calculada da seguinte maneira:

- A probabilidade de apenas sucessos (3 sucessos) é

$$P(SSS) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0;$$

- A probabilidade de apenas 2 sucessos é

$$P(FSS) + P(SFS) + P(SSF) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1;$$

- A probabilidade de apenas 1 sucessos é

$$P(FFS) + P(FSF) + P(SFF) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2;$$

- A probabilidade de 0 sucessos (3 fracassos) é

$$P(FFF) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3;$$

Escrevendo por meio de uma função de probabilidade, em que são observadas ocorrências de um evento k vezes em n tentativas, podemos escrever:

$$p(X = k) = \binom{n}{n-k} (P(S))^k (P(F))^{n-k}.$$

Então, em nosso exemplo, temos:

$$P(SSS) = P(X = 3), \quad P(FSS) + P(SFS) + P(SSF) = P(X = 2),$$

$$P(FFS) + P(FSF) + P(SFF) = P(X = 1), \quad P(FFF) = P(X = 0).$$

Para uma suposta retirada de apenas um seis ($k = 1$) em três ($n = 3$) lançamentos de um dado, tem-se a seguinte probabilidade:

$$p(X = 1) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}.$$

O desenvolvimento binomial para este exercício é dado por:

$$(P(S) + P(F))^3 = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = 1$$

Ou seja,

$$(P(S) + P(F))^3 = \binom{3}{0} (P(S))^3 (P(F))^0 + \binom{3}{1} (P(S))^2 (P(F))^1 +$$

$$\binom{3}{2} (P(S))^1 (P(F))^2 + \binom{3}{3} (P(S))^0 (P(F))^3 = 1 = 100\%.$$

Uma das áreas, além da matemática, em que o binômio de Newton é utilizado é na área **biológica, em estudos que envolvem genética**, como, por exemplo, a utilização da herança quantitativa (cor de pele humana, cor do olho humano, altura, peso, cor do cabelo, entre outras), porque esta herança é determinada por no mínimo dois pares de alelos, sendo que estes estão localizados em cromossomos não homólogos (CANDIDO et al., 2014).

2.11 Tabela síntese dos teoremas estudados

TEOREMAS	ANOS	ENUNCIADOS, CONCEITOS E FÓRMULAS	SOBRE A DEMONSTRAÇÃO
Teorema de Tales	9º ano EF 1º ano EM	Se duas retas são transversais a feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.	Sua demonstração é acessível aos alunos do 9º ano e do EM, pois depende de conceitos estudados anteriormente.
Teoremas das Bissetrizes	8º ano EF	(1) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes. (2) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo externo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.	Esses dois teoremas possuem demonstrações acessíveis aos alunos do 8º ano do EF, pois dependem de conceitos estudados anteriormente.
Teorema de Pitágoras	9º ano EF 1º ano EM	O quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas de seus catetos.	Por possuir diversas demonstrações, muitas são acessíveis aos alunos.
Teorema de Heron	8º ano EF 2º ano EM	A área de um triângulo qualquer é a raiz quadrada do produto entre o seu semiperímetro e as diferenças entre o semiperímetro e a medida de cada um de seus lados.	Apesar de ser uma demonstração mais trabalhosa, é possível ser trabalhada com os alunos, pois depende de conceitos básicos.
Teorema dos Cossenos	2º ano EM	A Lei dos Cossenos, ou Teorema dos Cossenos, estipula que, em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados equivale, ou é igual, à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.	Esse teorema possui demonstração acessível aos alunos do EM, pois depende de conceitos básicos.
Teorema dos Senos	2º ano EM	Esta Lei, ou Teorema, estabelece que em um triângulo qualquer as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos correspondentes.	Esse teorema possui demonstração acessível aos alunos do EM, pois depende de conceitos básicos.
Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)	6º ano EF	Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos. Assim, todo número inteiro maior ou igual a 2 pode ser escrito como produto de números primos.	A demonstração exige conteúdos geralmente não estudados no ensino básico, sendo portanto de difícil acesso aos alunos do EM.
Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)	3º ano EM	Qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos em uma variável z e de grau $n \geq 1$ possui n raiz complexa.	A demonstração exige conteúdos geralmente não estudados no ensino básico, portanto de difícil acesso aos alunos do EM.
Fórmula de Bhaskara	9º ano EF 1º ano EM	É um caso particular do TFA**. Considere uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b e c são números reais quaisquer, com $a \neq 0$. Então as raízes desta equação são duas dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$	Sua demonstração é acessível aos alunos do 9º ano e do EM, pois depende de conceitos estudados anteriormente.
Teorema Binomial de Newton	2º ano EM	Sejam a e b números reais e n um número natural, então vale a igualdade: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$	A demonstração exige conteúdos geralmente não estudados no ensino básico, portanto de difícil acesso aos alunos do EM.

Capítulo 3

Ensino de matemática: os teoremas através dos livros didáticos

Para Almouloud (2017), o saber manifesta-se pela capacidade de o aluno resolver os problemas que surgem, e para que haja intencionalidade didática, o professor tem de criar, organizar e desenvolver situações que possam provocar essas aprendizagens, tendo disponíveis algumas noções e teoremas matemáticos como ferramentas para resolver problemas e interpretar questões novas. Estas ferramentas são inscritas em um contexto, sob a ação e o controle do professor. O meio e as situações matemáticas devem estar engajados aos saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, poderá haver trocas de informações e interações entre alunos e os diferentes recursos disponíveis no meio. Segundo Almouloud (2017, p. 14), “os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos pelo intermédio de atividades que eles permitem realizar, ou seja, resolver”.

Neste capítulo, apresentaremos uma análise de Livros Didáticos (LD) de autores de renome nos meios escolares com o objetivo de verificar como esses LD apresentam os teoremas que estudamos no capítulo anterior.

Sabemos que os LD não devem ser o único material didático utilizado pelos professores em suas práticas pedagógicas. Existem diversos outros recursos didáticos: jornais, revistas, folhetos, propagandas, computadores, calculadoras, filmes entre outros. Porém, na prática, o LD ainda é o recurso mais usado pelos professores no ensino básico, principalmente nas escolas públicas. Desta forma, um LD que traz uma matemática rica e contextualizada é muito importante no processo de ensino e aprendizagem, como aliado tanto do professor quanto dos alunos, como propõem os PCN (BRASIL, 1998a, p. 67): “o livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos”.

Analisamos os seguintes LD:

Ensino Fundamental

- *A Conquista da Matemática*, José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, v.8 e v.9.
- *Teláris matemática*, Luiz Roberto Dante, v.8 e v.9.

Ensino Médio

- *Matemática: Contexto & Aplicações*, Luiz Roberto Dante, v.1, v.2 e v.3.
- *Matemática: Ciência & Aplicações*, Gelson Iezzi et al., v.1, v.2 e v.3.



Figura 3.1: Livros didáticos do Ensino Fundamental



Figura 3.2: Livros didáticos do Ensino Médio

3.1 Teorema de Tales

Os conteúdos razão, proporção, teorema de Tales, relações métricas do triângulo retângulo e circunferência são apresentados no 1º ano do EM com o objetivo de aprofundar os conteúdos de Geometria Plana vistos no 9º ano (teorema de Tales, triângulos, circunferências e cálculo de áreas).

Nos dois livros didáticos analisados do EM, os autores apresentam o teorema de Tales, sua demonstração, exercícios diretos (curtos) e exercícios contextualizados. Notamos que Dante apresenta uma demonstração deste teorema mais simples do que a apresentada no livro do Iezzi et al. Dante também fala sobre Tales de Mileto, colocando o aluno em contato com a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

A seguir algumas imagens dos livros analisados.

Vamos fazer a demonstração supondo que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos comensuráveis, isto é, existe um segmento de medida x que é submúltiplo de AB e de CD , ou seja, existem números inteiros p e q de modo que $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$, como mostra a figura (neste caso, temos $p = 5$ e $q = 6$).

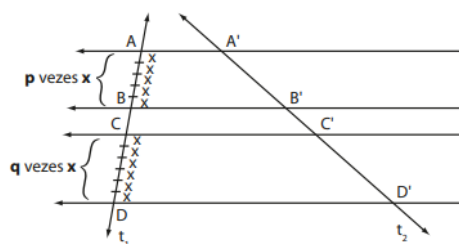
Temos:

$$AB = p \cdot x$$

$$CD = q \cdot x$$

Estabelecendo a razão

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad \text{①}$$



Conduzindo retas do feixe (paralelas a $\overline{AA'}$) pelos pontos de divisão de \overline{AB} e \overline{CD} (veja linhas tracejadas na figura), observamos que:

- O segmento $\overline{A'B'}$ fica dividido em p segmentos congruentes, cada um com medida x' :

$$A'B' = p \cdot x'$$

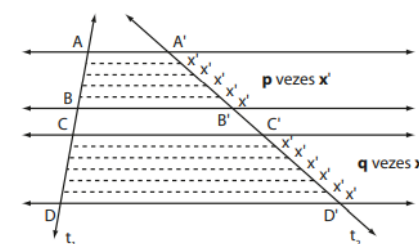
- O segmento $\overline{C'D'}$ fica dividido em q segmentos congruentes, cada um com medida x' :

$$C'D' = q \cdot x'$$

Estabelecemos a razão
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \quad \text{②}$$

Comparando ① e ②, temos:
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Pode-se mostrar que o teorema de Tales também é válido no caso em que \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis, isto é, quando não existe submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{CD} .



É importante que os estudantes compreendam que, ao usar o teorema de Tales, é possível escolher *quaisquer* dois segmentos de uma transversal (e não apenas segmentos adjacentes). Na proporção dada, consideramos a razão $\frac{AC}{BC}$ e a correspondente $\frac{A'C'}{B'C'}$.

PENSE NISTO:

Um estudante utilizou a proporção $\frac{10}{6} = \frac{x}{9}$ para solucionar o problema do exemplo 5. Comente essa estratégia.

Figura 3.3: Demonstração do Teorema de Tales

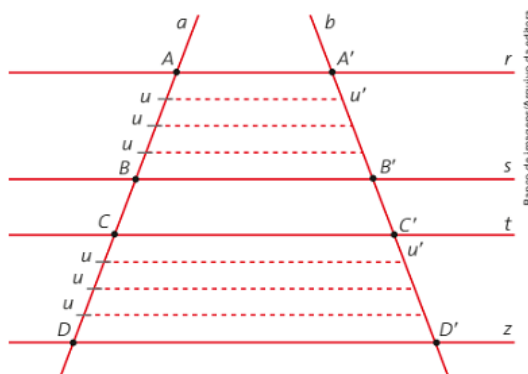
Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM, p. 199).

Teorema de Tales

Se duas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos de reta quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos de reta correspondentes da outra.

Vamos comprovar esse teorema, para o caso em que os segmentos de reta são comensuráveis (o feixe de paralelas divide as transversais em segmentos de reta cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira de uma certa unidade).

Considere um feixe de paralelas e duas transversais, como indica a figura abaixo.



Vamos supor que exista um segmento de reta u de modo que $AB = mu$ e $CD = nu$ ($m, n \in \mathbb{N}$), ou seja, que AB e CD são números racionais. Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$, obtemos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n} \text{ (I)}$$

Pelos pontos que dividem \overline{AB} e \overline{CD} em m e n partes congruentes ao segmento de reta de medida u , traçamos retas paralelas ao feixe. Desse modo, os segmentos de reta $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ ficam divididos em m e n partes iguais a u' , respectivamente.

Temos:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{mu'}{nu'} = \frac{m}{n} \text{ (II)}$$

Das relações (I) e (II), concluímos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Fique atento!

O teorema de Tales também é válido para os casos em que os segmentos de reta envolvidos são incomensuráveis.

Podemos também enunciar o teorema de Tales assim:

Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos de reta proporcionais.

Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Se necessário, recorde com os alunos as propriedades de uma proporção.

Figura 3.4: Demonstração do Teorema de Tales

Fonte. Dante (2016, v. 1 EM, p. 237).

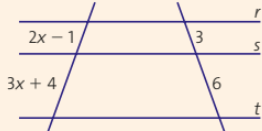
Exercícios resolvidos

1. Nas figuras, as retas r , s e t são paralelas. Determine o valor de x .

a)



b)

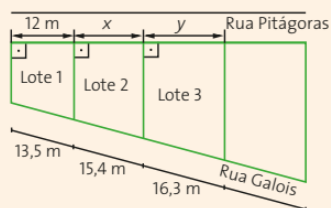


Resolução:

a) $\frac{2}{5} = \frac{x}{4} \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

b) $\frac{2x-1}{3x+4} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6(2x-1) = 3(3x+4) \Rightarrow 12x-6 = 9x+12 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

2. Observe a planta de um loteamento:



Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3 em metros?

Resolução:

Este problema pode ser resolvido usando-se o teorema de Tales, como segue:

$$\frac{12}{x} = \frac{13,5}{15,4} \Rightarrow 13,5x = 184,8 \Rightarrow x \approx 13,7$$

$$\frac{12}{y} = \frac{13,5}{16,3} \Rightarrow 13,5y = 195,6 \Rightarrow y \approx 14,5$$

O lote 2 tem aproximadamente 13,7 metros de frente e o lote 3 tem aproximadamente 14,5 metros.

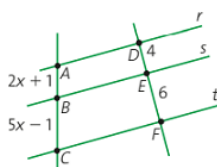
Exercícios

Atividade em dupla Atividade em equipe

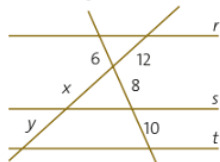


1. Na figura, $r \parallel s \parallel t$. Determine a medida do segmento de reta AB .

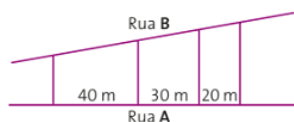
$$x = \frac{5}{4}$$



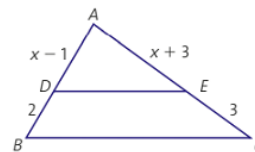
2. Na figura, $r \parallel s \parallel t$. Qual é o valor de xy ? 320



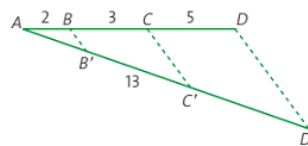
3. Três terrenos têm frente para a rua **A** e para a rua **B**, como representa a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual é a medida de frente para a rua **B** de cada lote sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m? 80 m; 60 m; 40 m



4. Na figura, a reta DE é paralela ao lado BC do triângulo ABC . Calcule o valor de x . $x = 9$



5. (Fuvest-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:
a) 6 m. c) 12 m. e) 72 m.
b) 7,2 m. x) d) 20 m.
6. (Unicamp-SP) A figura mostra um segmento AD dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm.



O segmento AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD' . Determine os comprimentos dos segmentos AB' , $B'C'$ e $C'D'$.
 $AB' = 2,6$ cm, $B'C' = 3,9$ cm, $C'D' = 6,5$ cm

Ilustrações desta página: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Figura 3.5: Teorema de Tales - exercícios resolvidos e propostos

Fonte. Dante (2016, v. 1 EM, p. 238).

3.2 Teorema das Bissetrizes

O letramento matemático de um aluno é um processo gradual, feito durante anos. A partir do 8º ano do EF, o desejado é que o aluno já tenha a capacidade de utilizar conceitos matemáticos aprendidos nos anos anteriores, tais como os conceitos básicos de Geometria Euclidiana Plana: ângulos opostos pelo vértice (formados por paralelas e transversais), a soma dos ângulos num triângulo qualquer, congruência, semelhança, mediana, bissetriz e altura dos triângulos.

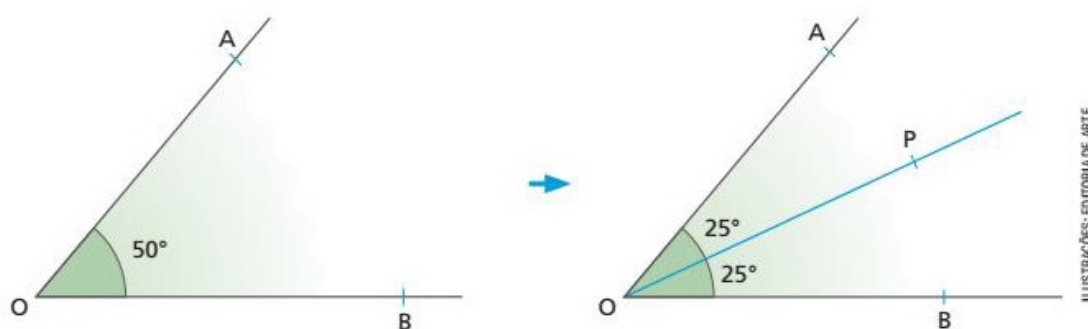
Os livros didáticos analisados definem bissetriz de um ângulo mas não trazem os teoremas das bissetrizes apresentados no capítulo anterior. O livro do Dante do EF cita uma propriedade que podemos enxergá-la como uma particularidade do teorema da bissetriz interna e utiliza recursos como compasso, régua e o software GeoGebra, mas não apresenta exercícios algébricos. Já o livro de Giovanni Júnior e Castrucci traz atividades com uso de recortes, dobraduras e exercícios algébricos. Vale ressaltar que o uso do LD é praticamente indispensável pelo professor, no entanto, nada o impede de buscar outras fontes alternativas para construir sua proposta de trabalho sobre os teoremas em geral, inclusive outras demonstrações.

A seguir algumas imagens dos dois livros analisados.

🌀 Bissetriz de um ângulo

Seja o ângulo AOB da figura e $med(A\hat{O}B) = 50^\circ$.

A partir do vértice O , traçamos \overline{OP} que divide $A\hat{O}B$ em dois ângulos adjacentes de mesma medida. A \overline{OP} damos o nome de bissetriz de $A\hat{O}B$. Observe:



Bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice desse ângulo que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Figura 3.6: Bissetriz de um ângulo

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 8 EF, p. 67).

☉ Bissetriz de um triângulo

Bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao seu respectivo lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de mesma medida.

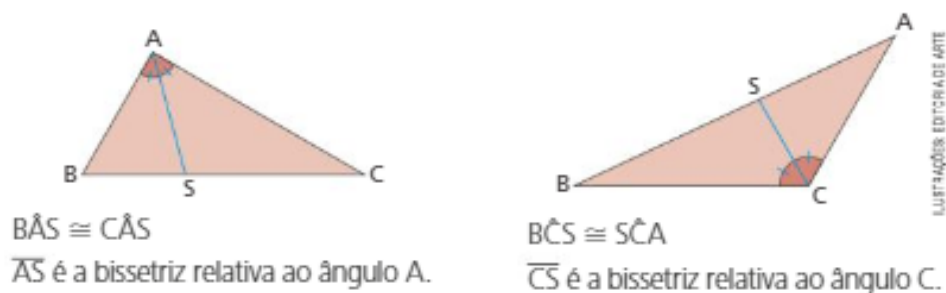


Figura 3.7: Bissetriz de um triângulo

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 8 EF, p.76).

● PARA QUEM QUER MAIS

Usando dobraduras

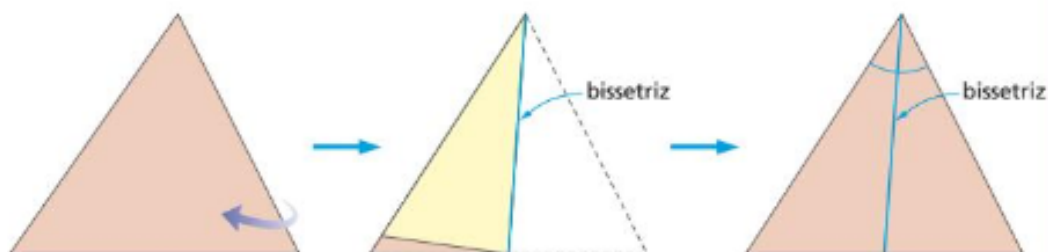
É possível representar os elementos de um triângulo usando dobraduras. Nesta atividade vamos obter as bissetrizes e o incentro de um triângulo.

Você vai precisar de:

- papel sulfite
- tesoura com pontas arredondadas
- lápis
- esquadro
- transferidor

1º passo: Recorte um triângulo qualquer.

2º passo: Para obter a bissetriz de um ângulo do triângulo, dobre-o sobrepondo dois lados.



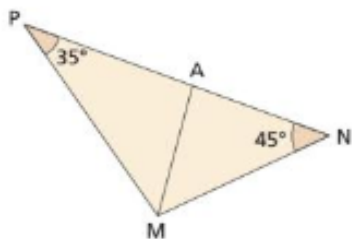
3º passo: Obtenha, da mesma maneira, as três bissetrizes dos ângulos internos.

4º passo: Marque o ponto I onde elas se encontram. Esse ponto é o **incentro do triângulo**.

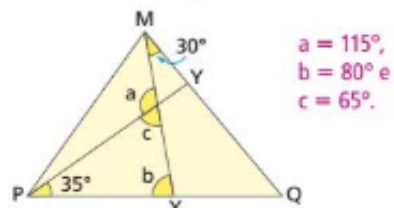
Figura 3.8: Teorema da Bissetriz - atividade proposta

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 8 EF, p.78).

2. No $\triangle MNP$, \overline{MA} é a bissetriz relativa ao lado \overline{PN} . Qual a medida de \widehat{PMA} ? 50°



5. No $\triangle MPQ$, \overline{MX} e \overline{PY} são bissetrizes. Calcule as medidas a , b e c .



6. Em um $\triangle ABC$, o ângulo B mede 60° , e o ângulo C mede 20° . Calcule a medida do ângulo formado pela altura relativa ao lado \overline{BC} e a bissetriz do ângulo A. 20°

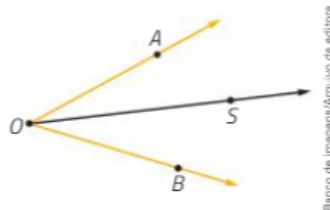
Figura 3.9: Teorema da Bissetriz - exercícios

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 8 EF, p.79).

Bissetriz de um ângulo

Outro lugar geométrico do plano é a **bissetriz** de um ângulo.

Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em 2 ângulos de medidas de abertura iguais (ângulos congruentes).



A semirreta \overline{OS} é bissetriz do \widehat{AOB} , pois $\widehat{AOS} \cong \widehat{BOS}$.

Veja por que a bissetriz de um ângulo é um lugar geométrico do plano.

- Propriedade: todos os pontos da bissetriz são equidistantes dos 2 lados do ângulo.
 $XM = XN$, $YR = YS$, $ZP = ZQ$, ...
- Nenhum outro ponto do plano tem essa propriedade.

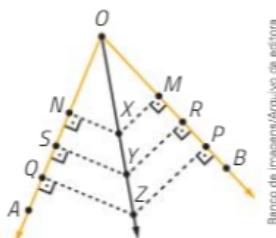



Figura 3.10: Teorema da Bissetriz

Fonte. Dante (2018, v. 8 EF, p. 61).


Construção da bissetriz de um ângulo

Agora vamos construir e explorar as propriedades da bissetriz de um ângulo.

Para iniciar um novo trabalho, salve as construções já feitas e comece uma nova construção, clicando em "Novo".

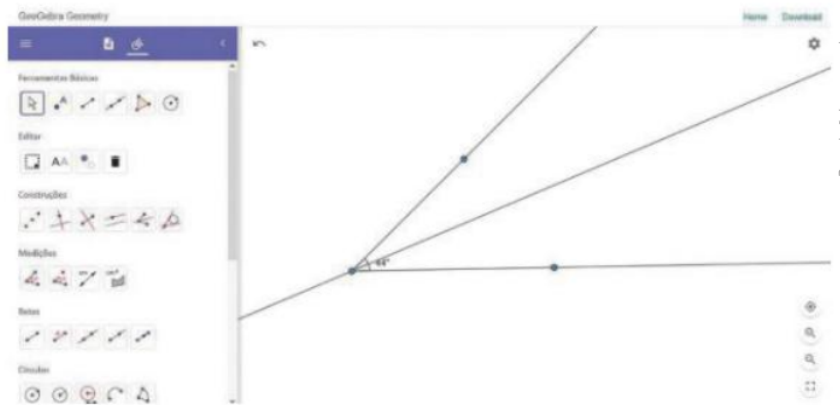
1º passo: Clique na opção "Semirreta"  no menu de ferramentas e marque 2 pontos próximos ao centro da tela, onde você quiser que fique o desenho. Para construir a outra semirreta, clique novamente em um dos pontos e, depois, escolha e clique em outro ponto na tela.

2º passo: Você já viu como medir a abertura do ângulo formado entre 2 retas. Entre 2 semirretas você pode usar a mesma opção. Faça essa medição. Se necessário, você pode usar a opção "Mover" para melhorar a posição e a visualização do valor obtido.

3º passo: Para determinar a bissetriz do ângulo, clique na opção "Bissetriz"  e, em seguida, clique nos 3 pontos que você usou para traçar as semirretas.



Fotos: Reprodução/www.geogebra.org



Atenção: O GeoGebra traça a reta suporte da bissetriz do ângulo, que é uma semirreta.

Reprodução/www.geogebra.org

5º passo: Exemplo de resposta: A mediatriz se movimenta junto, continuando a ser a mediatriz do ângulo e mantendo as propriedades. Ao alterar a medida de abertura do ângulo traçado, a outra medida de abertura calculada continua sendo a metade dela.

4º passo: Agora, meça a abertura de um dos ângulos formados entre as semirretas que você traçou inicialmente e a bissetriz. Qual é a relação entre essa medida e a medida de abertura do ângulo que você traçou? **É a metade da medida de abertura do ângulo traçado.**

5º passo: Use a opção "Mover" para alterar lentamente a posição de umas das semirretas que você traçou. O que acontece com a bissetriz? E com as medidas de abertura dos ângulos?

Figura 3.11: Construção do Teorema da Bissetriz no GeoGebra

Fonte. Dante (2018, v. 8 EF, p. 64,65).

3.3 Teorema de Pitágoras

Os PCN (BRASIL, 1998a) das séries (anos) finais do EF apontam meios de abordar no 9º ano do EF, e no 1º ano do EM, não somente os teoremas relacionados à geometria e, mais especificamente à trigonometria, a fórmula de Bhaskara, equações binárias e sistemas de equações do 2º grau, como o próprio Teorema de Pitágoras.

As atividades propostas nos LD de Iezzi et al. (2016, EM), Dante (2016, EM; 2018, EF) e Giovanni Júnior e Castrucci (2018, EF) criam várias oportunidades de desenvolver conceitos partindo da visualização da resolução de cada situação-problema apresentada.

Dante (2018, v.9 EF, p. 184-197), Dante (2016, v.1 EM, p. 246-248), Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v.9 EF, p.198-208) e Iezzi et al. (2016, v.1 EM, p. 209-213) apresentam o Teorema de Pitágoras, um pouco da sua História (exceto Dante(2016, EM)), sua demonstração algébrica clássica, exercícios simples e situações problema contextualizados, de maneira acessível ao aluno. Porém, Dante (2016; 2018) apresenta mais de uma demonstração do teorema, oferecendo assim mais recursos para o professor/aluno. No EF Dante é mais detalhista em sua abordagem do que no EM.

Para Markarian (s.d) é importante que o aluno entenda o caráter cumulativo da ciência matemática, pois a compreensão dos conceitos anteriores são importantes para entender as etapas mais avançadas, facilitando o aprendizado, e consolidando o novo mais facilmente.

A seguir algumas imagens dos livros analisados, demonstrações e alguns exercícios resolvidos e propostos.

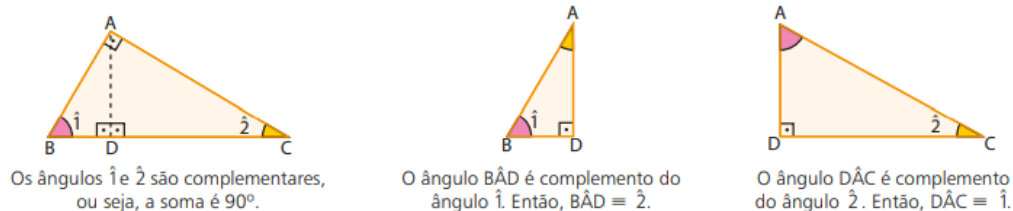
▶ O triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos (agudos) complementares.

O maior dos três lados do triângulo é o oposto ao ângulo reto e chama-se **hipotenusa**; os outros dois lados são os **catetos**.

▶ Semelhanças no triângulo retângulo

Traçando a altura \overline{AD} , relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos: DBA e DAC. Observe as figuras:



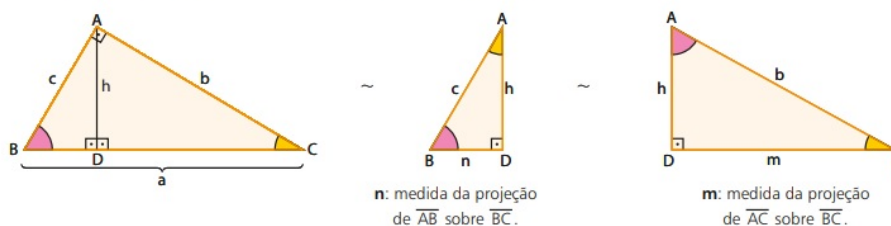
Reunindo as conclusões, vemos que os triângulos ABC, DBA e DAC têm os ângulos respectivos congruentes e, portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

Figura 3.12: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM, p. 208).

► Relações métricas

Voltemos ao triângulo ABC, retângulo em \hat{A} , com a altura \overline{AD} . Os segmentos \overline{BD} e \overline{DC} também são chamados de **projeções** dos catetos sobre a hipotenusa.



Explorando a semelhança dos triângulos, temos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad \textcircled{1}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad \textcircled{2}$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad \textcircled{3}$$

As relações $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ são importantes **relações métricas no triângulo retângulo**. Em qualquer triângulo retângulo, temos, portanto:

- O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto sobre a hipotenusa, isto é:

$$b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n$$

- O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina na hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n$$

Das relações $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ decorrem outras, entre as quais vamos destacar duas:

Multiplicando membro a membro as relações $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ e depois usando a $\textcircled{3}$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot m \cdot n \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

- Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela:

$$b \cdot c = a \cdot h$$

Somando membro a membro as relações $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ e observando que $m + n = a$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

- Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Essa última relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Figura 3.13: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM, p. 209-210).



UM POUCO DE HISTÓRIA

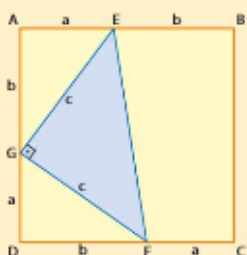
Pitágoras de Samos

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 565 a.C.

Sua obra, depois continuada pelos discípulos, foi de enorme importância para o desenvolvimento da Matemática. Várias foram as contribuições da escola pitagórica, responsável por avanços na área do raciocínio lógico-dedutivo. Pitágoras deu também grandes contribuições ao desenvolvimento da Aritmética.

O teorema que leva seu nome já teve centenas de demonstrações diferentes. Observe a demonstração a seguir.

Tomemos o quadrado ABCD abaixo representado, de lado $a + b$.



Podemos dividi-lo em dois trapézios congruentes pelo segmento \overline{EF} : o trapézio AEFD e o trapézio EBCE. A área S do trapézio AEFD pode ser calculada de duas maneiras:

Como metade da área do quadrado ABCD:

$$S = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$$

Como a soma das áreas dos triângulos AEG, EGF e GFD:

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2}$$

Então:

$$(a + b)(a + b) = ab + cc + ab$$

e daí resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Essa demonstração se deve a James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos.



Pitágoras desenhando na areia o teorema que hoje leva o seu nome. Gravura de autor desconhecido, 1833.

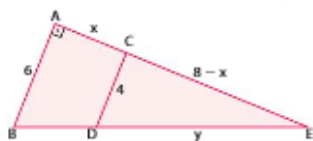
Fonte de pesquisa: ROSA, Euclides. *Maria de Pitágoras*. RYM/Estágio OBMSP, 2007. p. 34-39. Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/tpm_pic2007.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.



EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

27 Sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, determine x e y .



28 Determine x e y nas figuras:

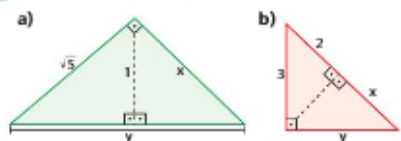


Figura 3.14: Um pouco de História sobre Pitágoras e exercícios propostos

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM , p. 211).

Na figura, o quadrado DEFG está inscrito no triângulo ABC. Sendo $BD = 8$ cm e $CE = 2$ cm:

- calcule o perímetro do quadrado.
- determine a menor distância entre o ponto A e a reta \overline{BC} .

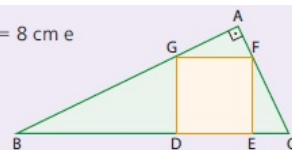


Figura 3.15: Teorema de Pitágoras - exercícios propostos

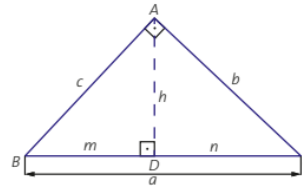
Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM , p. 213).

Elementos do triângulo retângulo

Consideremos um triângulo ABC , retângulo em A , e o segmento de reta AD perpendicular ao lado BC , com D em \overline{BC} .

Ficam definidos os seguintes elementos do $\triangle ABC$:

- \overline{BC} → hipotenusa (medida a)
- \overline{AC} → cateto (medida b)
- \overline{AB} → cateto (medida c)
- \overline{BD} → projeção do cateto \overline{AB} sobre a hipotenusa (medida m)
- \overline{CD} → projeção do cateto \overline{AC} sobre a hipotenusa (medida n)
- \overline{AD} → altura relativa à hipotenusa (medida h)



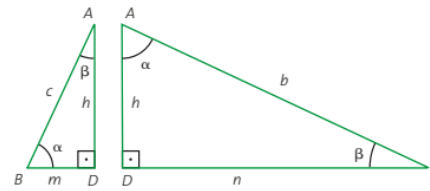
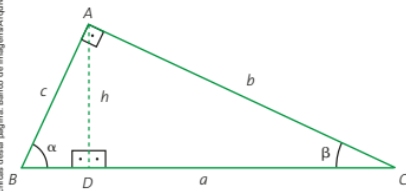
Relações métricas

Uma importante aplicação da semelhança de triângulos são as relações métricas no triângulo retângulo: fórmulas que relacionam entre si as medidas dos lados e das alturas do triângulo.

Triângulos semelhantes

A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Observe:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de Imagens/Arquivo de editoria



Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, pelo 1º caso de semelhança, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

As relações métricas

Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$, segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \quad \textcircled{I}$$

Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \quad \textcircled{II}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \quad \textcircled{III}$$

Da semelhança entre $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$, segue que:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad \textcircled{IV}$$

Somando membro a membro \textcircled{I} e \textcircled{III} , temos:

$$\begin{aligned} & c^2 = am \\ & + b^2 = an \\ \hline & b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \quad \textcircled{V} \end{aligned}$$

A relação \textcircled{V} é o famoso **teorema de Pitágoras**: em um triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Fique atento!
Você reparou que as relações \textcircled{I} e \textcircled{III} são as mesmas, apenas mudam do lado esquerdo para o lado direito do triângulo ABC ? Ambas podem ser generalizadas como: **cateto² = hipotenusa · projeção**

Figura 3.16: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte. Dante (2016, v. 1 EM, p. 246-247).

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras também pode ser demonstrado por comparação de áreas (segundo os historiadores, a demonstração de Pitágoras deve ter sido uma demonstração geométrica semelhante à que segue).

As duas regiões quadradas a seguir têm lados de medidas $(b + c)$. Logo, têm a mesma área. Retirando das duas as quatro regiões triangulares congruentes, o que sobra na primeira (a^2) é igual ao que sobra na segunda ($b^2 + c^2$). Então: $a^2 = b^2 + c^2$.

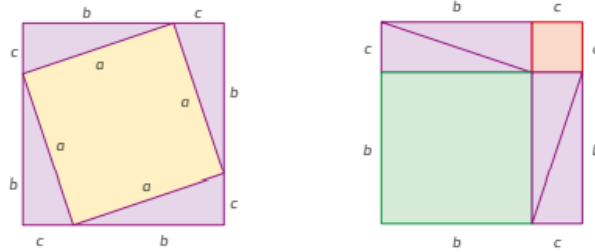
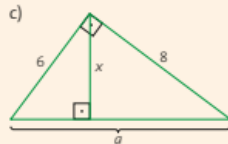
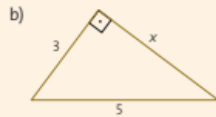
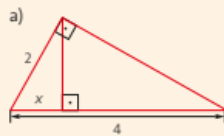


Figura 3.17: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte. Dante (2016, v. 1 EM, p.247).

Exercícios resolvidos

5. Calcule o valor de x em cada uma das figuras.



Resolução:

a) $c^2 = am \Rightarrow 2^2 = 4x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$

b) Pelo teorema de Pitágoras:

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

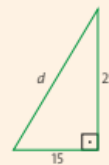
c) $a^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$$ah = bc \Rightarrow 10x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 4,8$$

6. Uma rodovia cruza uma hidrovía perpendicularmente por meio de uma ponte. Ambas podem ser consideradas retíneas. No mesmo instante em que um carro cruza a ponte, a uma velocidade constante de 100 km/h, uma barcaça passa sob a ponte a 60 km/h e prossegue a viagem a essa velocidade. Após 15 minutos, qual será a distância aproximada entre o automóvel e a barcaça supondo que ambos estejam no mesmo plano horizontal?

Resolução:

A velocidade do carro é 100 km/h; logo, em 15 minutos terá percorrido 25 km. Por sua vez, a barcaça está a 60 km/h; logo, terá percorrido 15 km nesses 15 minutos.



$$d^2 = 15^2 + 25^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 625 \Rightarrow$$

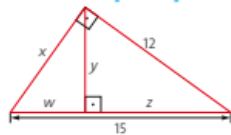
$$\Rightarrow d^2 = 850 \Rightarrow d = 5\sqrt{34}$$

Portanto, $d = 29,15$ km.

Exercícios

27. Determine o valor de x, y, z e w no triângulo retângulo abaixo.

$$x = 9; y = \frac{36}{5}; z = \frac{48}{5}; w = \frac{27}{5}$$



29. Calcule os valores de c, r, x e y do triângulo abaixo.

$$c = \frac{3\sqrt{14}}{5}; r = 5;$$

$$x = \frac{7}{5} \text{ ou } 1,4; y = 3,6$$

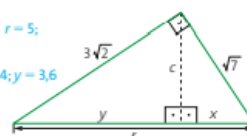
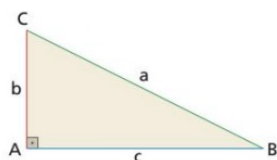


Figura 3.18: Teorema de Pitágoras - exercícios resolvidos e propostos

Fonte. Dante (2016, v. 1 EM, p. 248).

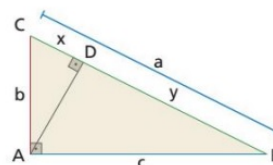
☉ Uma demonstração do teorema de Pitágoras

Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema. Vamos ver uma demonstração baseada na semelhança de triângulos. Consideremos o triângulo retângulo da figura a seguir.

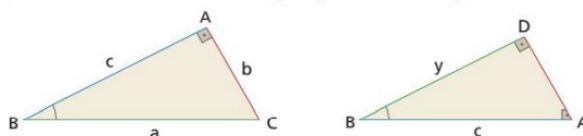


a: medida da hipotenusa.
b: medida de um cateto.
c: medida do outro cateto.

Nesse triângulo, vamos traçar a altura relativa ao lado BC. Essa altura divide a hipotenusa em dois segmentos, cujas medidas chamaremos de x e y .



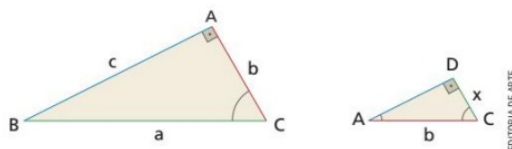
Os triângulos ABC e ABD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum B .



Assim, podemos escrever:

$$\frac{c}{y} = \frac{a}{c} \Rightarrow ya = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{a}$$

Analogamente, os triângulos ABC e ACD são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo comum C .



Assim, podemos escrever:

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow xa = b^2 \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$$

Como $a = x + y$, podemos escrever:

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

▶ Veja no material audiovisual o vídeo sobre o teorema de Pitágoras.

Figura 3.19: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 9 EF, p.202-203).

3.4 Teorema de Heron

O uso da fórmula de Heron nas escolas de EF (8º ano) e EM (2º ano) é uma boa alternativa para o cálculo de áreas de figuras geométricas planas, porém sua demonstração não é muito simples para os alunos. As demonstrações de teoremas em sala de aula podem se tornar um fator motivador ou desestimulante à aprendizagem, isso depende do teorema e da abordagem empregada pelo professor.

A fórmula de Heron é considerada longa e trabalhosa para se demonstrar nas escolas, mesmo que a demonstração, por nós apresentada, aborde conteúdos já estudados pelos alunos. Observamos que sua demonstração não consta nos LD do EB que pesquisamos neste trabalho.

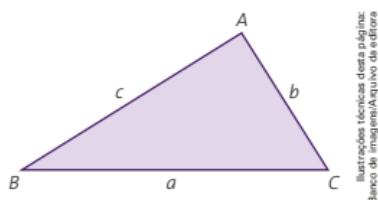
Em Dante (2018, v.8 EF, p. 167) não temos a demonstração do teorema, e sim a fórmula de Heron e exercícios que envolvem esta fórmula. Dante traz também um texto pequeno sobre Heron de Alexandria.

No EM, Iezzi et al. (2016, v.2 EM) não cita o teorema de Heron e no livro de Dante (2016, v. 2 EM, p. 129) apenas a fórmula.

Abaixo imagens dos livros analisados.

Área do triângulo sendo conhecidos os três lados

Conhecidos os três lados (a , b e c) de um triângulo, a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Sendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, é possível demonstrar que:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

(Fórmula de Heron, muito útil quando não conhecemos a altura do triângulo.)

Para refletir
O que significa semiperímetro de um polígono?

A metade da soma das medidas dos lados.

Fique atento!

Heron de Alexandria, geômetra e mecânico grego, esteve no auge de sua produção intelectual em torno do ano 62 a.C.

Figura 3.20: Área de uma região triangular sendo conhecidos os três lados

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p. 129).

Heron de Alexandria e o cálculo da medida de área de regiões triangulares

O matemático e inventor grego Heron de Alexandria (c. 10-c. 70) teve importante papel no desenvolvimento de vários conceitos matemáticos.

No principal trabalho dele sobre Geometria, denominado *Métrica*, ele apresentou diferentes maneiras de determinar: a medida de área de regiões triangulares; a medida de área de regiões limitadas por quadriláteros, por polígonos regulares de 3 a 12 lados e por elipses; a medida de área do círculo; e a medida de volume de cilindros, de cones e de esferas.

Nesse trabalho, ele demonstra uma fórmula que permite calcular a medida de área de uma região triangular sendo conhecidas as medidas de comprimento a , b e c dos 3 lados. Ela é chamada de **fórmula de Heron** e pode ser escrita da seguinte maneira:

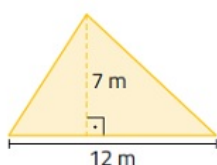
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ com } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Fonte de consulta: REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFPI. Disponível em: <http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/729/Disserta%20c3%a7%20c3%a3o_Uchoa_18_11_2016.pdf?sequence=1>. Acesso em: 30 set. 2018.

Ao resolver um problema, podemos escolher a fórmula que usaremos dependendo dos dados do problema.

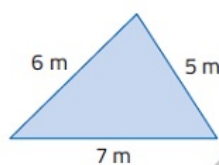
Veja estes exemplos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$$

$$A = 42 \text{ m}^2$$



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

$$p = \frac{6 + 7 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$A = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt{216} \approx 14,7 \text{ (com uma calculadora)}$$

$$A \approx 14,7 \text{ m}^2$$

A medida de perímetro do triângulo é dada por $a + b + c$. Como p representa metade dessa medida e 'semi' pode dar a ideia de metade, temos que p é o semiperímetro do triângulo.

Bate-papo

p é chamado de semiperímetro do triângulo. Por que você acha que ele recebe esse nome?

Para calcular o valor de uma raiz quadrada não exata, podemos usar uma calculadora e obter uma aproximação racional, como no exemplo a seguir.

Teclamos e o visor mostrará

Então, a aproximação com 1 casa decimal é $\sqrt{216} \approx 14,7$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura 3.21: Área de uma região triangular sendo conhecidos os três lados

Fonte. Dante (2018, v. 8 EF, p. 167).

3.5 Teorema dos Cossenos

O teorema dos Cossenos é apresentado no EM, mais especificamente no 2º ano do EM, quando espera-se que os alunos já tenham conseguido assimilar os elementos básicos da trigonometria e percebam sua aplicabilidade nas diversas áreas das Ciências Exatas.

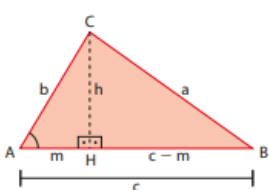
Os autores dos dois livros analisados apresentam a demonstração deste teorema, exercícios e situações-problemas de forma clara e adequada ao nível do aluno do EM. Porém Iezzi et al. (2016, v.2 EM, p. 37-41) apresentam a demonstração nos três tipos de triângulos (acutângulo, obtusângulo e retângulo); já Dante (2016, v.2 EM, p. 17-21) apresenta somente no triângulo acutângulo e solicita a verificação para os triângulos retângulos e obtusângulos.

► Teorema

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração:

- Sejam o triângulo **acutângulo** ABC, e CH = h, a medida da altura relativa ao lado \overline{AB} .



$$\left. \begin{aligned} \triangle BCH: a^2 &= h^2 + (c - m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 &= b^2 - m^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad \text{①}$$

$$\triangle ACH: \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad \text{②}$$

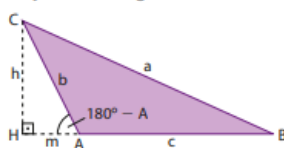
Substituindo ② em ①, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- Sejam o triângulo ABC **obtusângulo** em \hat{A} , e CH = h, a medida da altura relativa ao lado \overline{AB} .



$$\left. \begin{aligned} \triangle BCH: a^2 &= h^2 + (c + m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 &= b^2 - m^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad \text{①}$$

$$\triangle CHA: \cos (180^\circ - A) = \frac{m}{b}, \text{ isto é, } m = b \cdot \cos (180^\circ - A) =$$

$$= b \cdot (-\cos \hat{A}) = -b \cdot \cos \hat{A}$$

$$m = -b \cos \hat{A} \quad \text{②}$$

Substituindo ② em ①, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

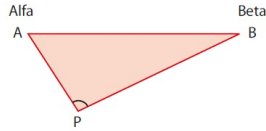
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- No caso de o triângulo ABC ser **retângulo** (em \hat{A} , por exemplo), como $\cos 90^\circ = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (\hat{B} e \hat{C}), a igualdade decorre também do teorema de Pitágoras.

Figura 3.22: Demonstração da Lei dos Cossenos

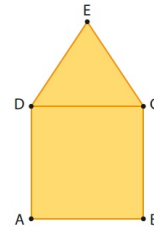
Fonte: Iezzi et al. (2016, v 2 EM, p. 37-38).

- 19 Um motorista de caminhão precisa fazer entregas nas cidades Alfa e Beta, distantes $10\sqrt{13}$ km (aproximadamente 36 km) entre si. Do ponto P em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a distância a Beta é o triplo da distância a Alfa.



Sabendo que $\text{med}(\widehat{APB}) = 120^\circ$ e que a velocidade máxima permitida no trecho de P a Beta é de 50 km/h, determine o tempo mínimo que será gasto para chegar a Beta, onde será feita a primeira entrega.

- 20 Na figura, o perímetro do quadrado ABCD mede 24 cm e o triângulo DEC é equilátero. Determine a medida de \overline{AE} .



- 21 Na figura abaixo, a medida de \overline{AB} é 60% maior que a medida do raio da circunferência de centro O. Determine $\text{tg } \alpha$.

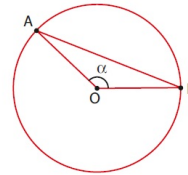
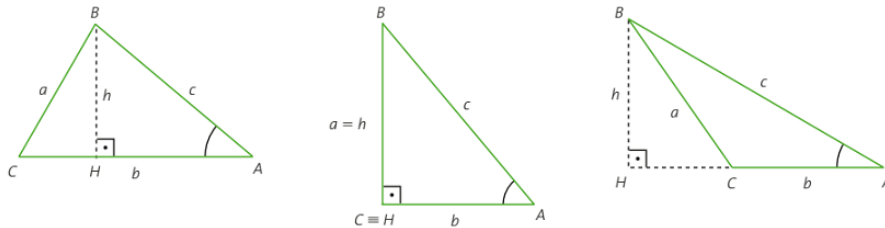


Figura 3.23: Lei dos Cossenos - exercícios

Fonte. Iezzi et al. (2016, v 2 EM, p. 41).

O ângulo agudo A pode estar em um triângulo acutângulo, retângulo ou obtusângulo.



Vamos demonstrar a lei dos cossenos usando o triângulo acutângulo.

Traçando a altura \overline{BH} , obtemos os triângulos retângulos ABH e CBH.

- No $\triangle ABH$, temos:

$$\begin{cases} \cos \hat{A} = \frac{\overline{AH}}{c} \Rightarrow \overline{AH} = c \cdot \cos \hat{A} \\ c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \overline{AH}^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - (c \cdot \cos \hat{A})^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad \text{①} \end{cases}$$

- No $\triangle CBH$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos \hat{A})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow h^2 = a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad \text{②} \end{aligned}$$

- De ① e ② temos:

$$a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} = c^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Para refletir

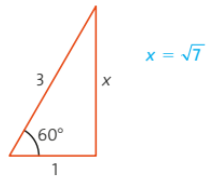
- Verifique que a relação vale para \hat{A} agudo no triângulo retângulo e no triângulo obtusângulo.
- Podemos considerar o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) como um caso particular da lei dos cossenos (pois $\cos 90^\circ = 0$).

Veja comentários deste Para refletir no Manual do Professor.

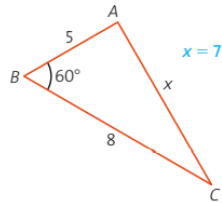
Figura 3.24: Demonstração da Lei dos Cossenos

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p. 18).

17. No triângulo da figura abaixo, calcule a medida x .



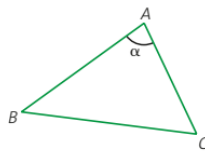
18. No triângulo da figura abaixo, determine x .



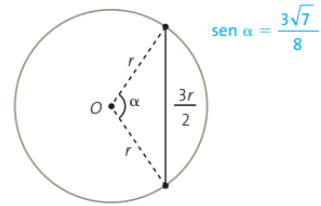
19. Em um triângulo ABC são dados: $\hat{A} = 30^\circ$, $b = 2\sqrt{3}$ e $c = 3$. Calcule a medida do terceiro lado do triângulo.

20. Considere o triângulo ABC com: $\hat{A} = 45^\circ$, $a = 4$ e $b = 4\sqrt{2}$. Determine o lado c . $c = 4$

21. No triângulo abaixo, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AB} = 3$ e $\hat{BAC} = \alpha$. Determine o valor de $\cos \alpha$. $\cos \alpha = \frac{1}{9}$

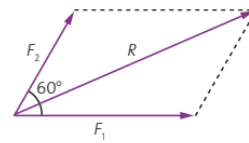


25. (FCMSCSP) Considerando a figura abaixo, qual o valor de $\sin \alpha$?



26. **DESAFIO Física**

Duas forças de intensidade $F_1 = 8 \text{ N}$ e $F_2 = 12 \text{ N}$ formam entre si um ângulo de 60° . Qual é a intensidade R resultante dessas duas forças? $R = 4\sqrt{19} \text{ N}$



27. Considere uma circunferência de raio r e ℓ a medida do lado de um decágono regular inscrito nessa circunferência. Determine ℓ em função de r . $\left(\alpha = \frac{360^\circ}{n}\right)$

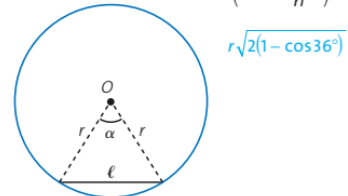


Figura 3.25: Lei dos Cossenos - exercícios

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p. 19-21).

3.6 Teorema dos Senos

No 3º ano do EM, a trigonometria aparece como ferramenta básica para resolver problemas relacionados a outros conteúdos matemáticos, como por exemplo, no estudo de números complexos. Conteúdos novos de trigonometrias são introduzidos aos alunos até 2º ano do EM. O teorema dos senos, por exemplo, é estudado no 2º ano do EM, juntamente com o teorema dos cossenos.

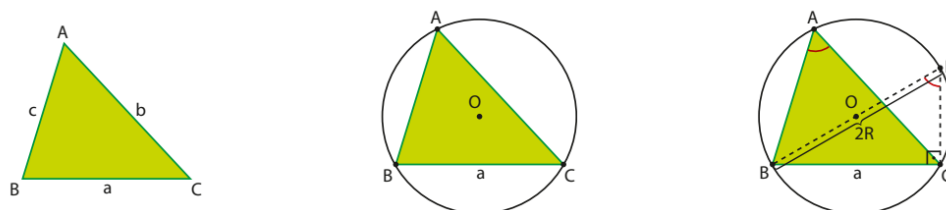
Tendo em vista que a contextualização dos conteúdos matemáticos facilita a compreensão de conceitos abstratos, Iezzi et al. (2016, v. 2 EM, p. 34-37) e Dante (2016, v. 2 EM, p. 13-16) apresentam o teorema dos Senos de maneira contextualizada, sua demonstração, exercícios de diversos níveis e situações problemas. Os dois livros trazem demonstrações um pouco diferentes envolvendo conceitos que os alunos já estudaram anteriormente. Ambos os livros apresentam suas demonstrações somente no triângulo acutângulo e solicitam a verificação para os triângulos retângulos e obtusângulos, conforme imagens a seguir.

► Teorema

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Demonstração:

Dado um triângulo ABC, consideremos a circunferência circunscrita a ele. Sejam **O** e **R**, respectivamente, o centro e a medida do raio dessa circunferência. \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são os ângulos do triângulo ABC com vértices em **A**, **B** e **C**, respectivamente:



Traçando o diâmetro \overline{BD} , temos $\text{med}(\widehat{BAC}) = \text{med}(\widehat{BDC})$, pois \widehat{BAC} e \widehat{BDC} , como ângulos inscritos (isto é, seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes a ela), veem o arco comum \widehat{BC} e determinam a mesma corda \overline{BC} na circunferência.

Como o triângulo BDC é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em **C**:

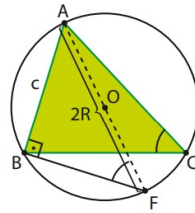
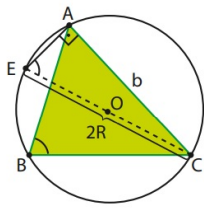
$$\text{sen}(\widehat{BDC}) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen} \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = 2R$$

Professor, se achar necessário, revise o conceito de ângulo inscrito e a relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente.

Figura 3.26: Demonstração da Lei dos Senos

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 2 EM, p.34-35).

De modo análogo, temos:



Assim: $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

Segue a expressão da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

OBSERVAÇÕES

- Se um dos ângulos for reto ($\triangle ABC$ retângulo), a demonstração é análoga; usa-se o fato de que $\text{sen } 90^\circ = 1$.
- Se um dos ângulos for obtuso ($\triangle ABC$ obtusângulo), usa-se raciocínio análogo e a relação: $\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \text{sen } \hat{A}$.

Figura 3.27: Demonstração da Lei dos Senos

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 2 EM, p.35).

EXERCÍCIOS
FAÇA NO
CADERNO

- 1 Num triângulo ABC são dados $\text{med}(\hat{B}) = 60^\circ$, $\text{med}(\hat{C}) = 45^\circ$ e $AB = 8$ cm. Determine o comprimento de \overline{AC} .
- 2 No triângulo ABC da figura, determine as medidas de \overline{AB} e \overline{BC} . Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.
- 3 Dado $\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, determine x e y na figura abaixo.
- 4 O proprietário de um terreno deseja conhecer a distância entre sua casa e a nascente de um rio. O caminho da casa à nascente, porém, é de difícil acesso. A partir da frente da casa e com auxílio de um teodolito, mediu o ângulo através do qual avistava a nascente e o pomar, obtendo 48° . Caminhou, então, 420 metros em linha reta até o pomar, de onde mirou a nascente e a casa segundo um ângulo de 64° . Quantos metros separam sua casa da nascente? Use a tabela trigonométrica da página 276 ou uma calculadora científica.
- 5 Determine a medida x do ângulo $\hat{M}\hat{N}\hat{P}$.
- 6 Determine a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC, sendo $BC = 15$ cm e $\text{med}(\hat{A}) = 30^\circ$.
- 7 Entre os pontos A e B, extremidades do lado de um terreno, existe uma região plana alagadiça, cuja extensão deseja-se estimar. Um topógrafo, situado em A, avistou um posto rodoviário situado na estrada sob um ângulo de 40° em relação a \overline{AB} . Dirigiu-se, então, ao posto, situado a 1500 metros de A, e avistou as extremidades do terreno sob um ângulo de 85° . Considere: $\text{sen } 55^\circ \approx 0,82$; $\text{sen } 85^\circ \approx 0,99$ e $\text{sen } 40^\circ \approx 0,64$.

 - a) Qual é a extensão da região alagadiça?
 - b) Qual é a distância entre o posto e o ponto B?

Figura 3.28: Lei dos Senos - exercícios

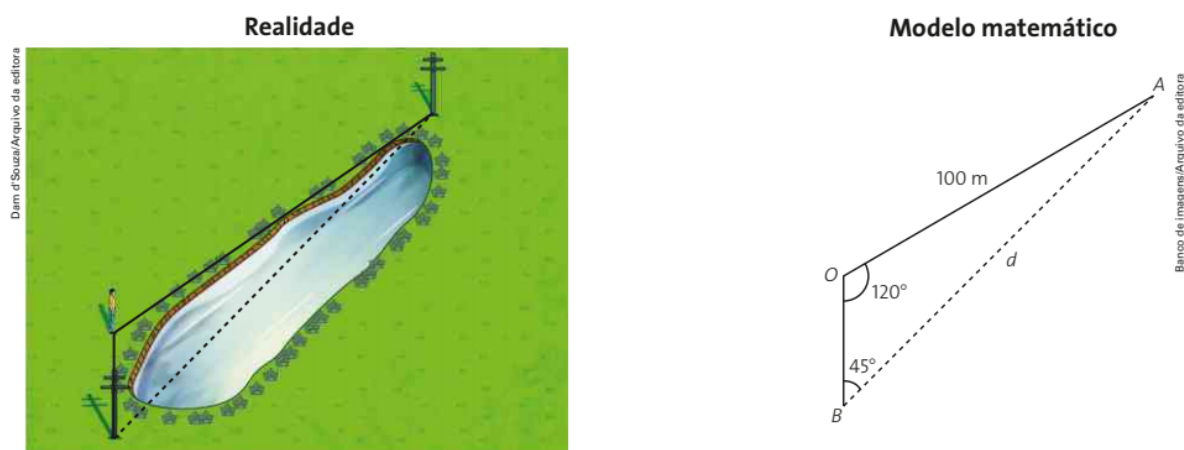
Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 2 EM, p.36).

3 Lei dos senos

Acompanhe a seguinte situação-problema:

Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância.

Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, o teodolito, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120° . Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve 100 m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45° . Com essas informações, o engenheiro ficou satisfeito, pois ele já conseguiria calcular a distância entre os postes. Vamos descobrir como a seguir.



O triângulo AOB é obtusângulo, e a resolução desse problema consiste em determinar a medida do lado \overline{AB} . Para resolvê-lo, vamos estudar a **lei dos senos**, cujo enunciado vem a seguir.

Em qualquer triângulo ABC , as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

Figura 3.29: Lei dos Senos - Situação problema

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p.14).

Acompanhe a seguir a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo.

Consideremos o $\triangle ABC$ acutângulo e duas de suas alturas: $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$.

• No $\triangle ACH_1$, retângulo em H_1 , temos:

• $\text{sen } \hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen } \hat{C}$

• No $\triangle ABH_1$, retângulo em H_1 , temos:

• $\text{sen } \hat{B} = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen } \hat{B}$

Comparando, temos:

$$b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \textcircled{\text{I}}$$

• No $\triangle BCH_2$, retângulo em H_2 , temos:

• $\text{sen } \hat{C} = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } \hat{C}$

• No $\triangle ABH_2$, retângulo em H_2 , temos:

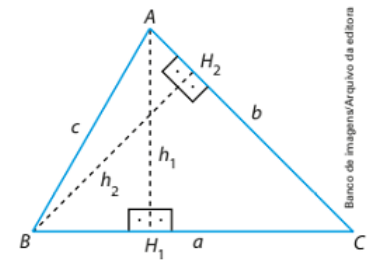
• $\text{sen } \hat{A} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen } \hat{A}$

Comparando, temos:

$$a \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \textcircled{\text{II}}$$

De $\textcircled{\text{I}}$ e $\textcircled{\text{II}}$ concluímos que:

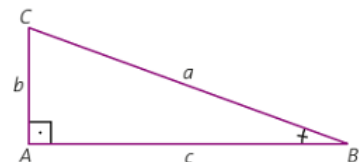
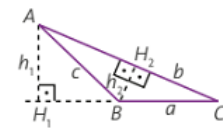
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Para refletir

Verifique que a demonstração vale também para o $\triangle ABC$ obtusângulo e para o triângulo retângulo.



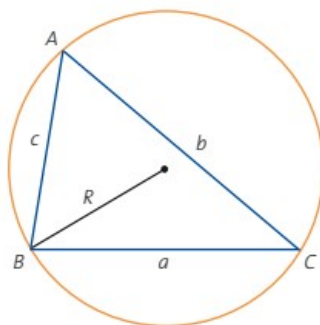
Banco de Imagens/Arquivo da editora

Lembre-se: $\text{sen } \alpha = \text{sen } (180^\circ - \alpha)$.

[Veja a demonstração no Manual do Professor.](#)

Observações:

1ª) Pode-se provar que a razão $\frac{\text{medida do lado } a}{\text{seno do ângulo oposto a } a}$ é constante e igual a $2R$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo considerado. A mesma relação vale para os outros dois lados do triângulo.



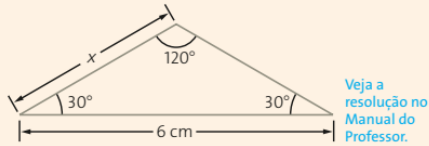
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

Figura 3.30: Demonstração da Lei dos Senos

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p. 14-15).

Exercícios resolvidos

1. Em um triângulo isósceles, a base mede 6 cm e o ângulo oposto à base mede 120° . Calcule a medida dos lados congruentes do triângulo.



Veja a resolução no Manual do Professor.

Resolução:

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{3}x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Cada um dos lados congruentes mede $2\sqrt{3}$ cm.

Para refletir

Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base é também mediana e bissetriz. Use esse fato e resolva este exercício de outra forma.

2. Em um triângulo ABC , temos $BC = 5$ cm, $\hat{A} = 48^\circ$ e $\hat{B} = 25^\circ$. Calcule a medida aproximada do lado \overline{AB} (use a tabela da página 22 ou uma calculadora científica).

Resolução:

Pela lei dos senos:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\sin \hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{C}}$$

sendo $\hat{C} = 180^\circ - (48^\circ + 25^\circ) = 107^\circ$.

Fique atento!

Com a tabela obtemos $\sin 107^\circ \approx 0,956$, procurando $\sin 73^\circ$.

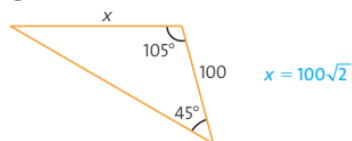
Substituindo:

$$\frac{5}{\sin 48^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 107^\circ} \Rightarrow \frac{5}{0,743} = \frac{\overline{AB}}{0,956} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{5 \cdot 0,956}{0,743} \approx 6,43$$

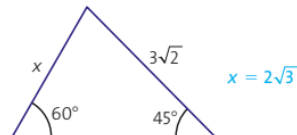
Portanto, a medida aproximada do lado \overline{AB} é 6,43 cm.

Exercícios

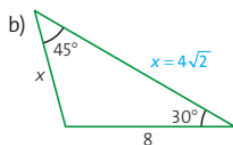
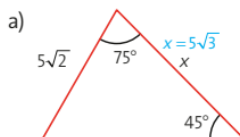
12. Observe a figura abaixo e calcule o valor da medida x .



13. Observe o triângulo abaixo e calcule o valor da medida x .



14. Em cada triângulo a seguir, calcule o valor da medida x .



15. Em um triângulo ABC , são dados $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ e $a + b = \sqrt{2} + 1$. Calcule o valor de a . $a = \sqrt{2}$

16. Use a tabela da página 22 ou uma calculadora científica e determine os valores de x (aproximadamente):

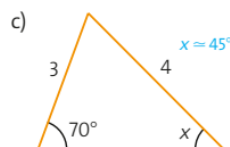
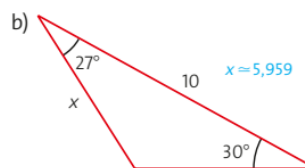
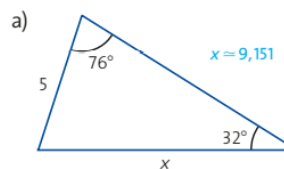


Figura 3.31: Lei dos Senos - exercícios resolvidos e propostos

Fonte. Dante (2016, v. 2 EM, p.16).

3.7 Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)

Nos 6º e 7º anos (terceiro ciclo do EF) há um trabalho continuado com os números naturais, que não deve terminar no final do segundo ciclo, pois o aluno deve continuar a trabalhar com estes números “em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números “grandes” e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza”(BRASIL, 1998a, p. 66). No terceiro ciclo do EF, os alunos também são levados a investigar questões que envolvem primalidade dos números naturais, decomposição em primos e divisibilidade.

Os livros citados no início desse capítulo não apresentam explicitamente o TFA*, pois são livros de séries mais avançadas. Mas Dante (2015, v.6, p.151-155), Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v.6 EF, p.118-129) e Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v.7 EF, p.21), livros dos 6º e 7º anos, apresentam os conceitos e propriedades dos números primos, elementos essenciais da Teoria dos Números, da Aritmética. Estes livros trazem o TFA* quando abordam decomposição de números naturais em fatores primos.

A seguir algumas imagens dos três livros.



Figura 3.32: Livros didáticos do Ensino Fundamental



NÚMEROS PRIMOS

Observe os quadros a seguir.

Número	Divisores	Número	Divisores
0	1, 2, 3, 4, ...	5	1, 5
1	1	6	1, 2, 3, 6
2	1, 2	7	1, 7
3	1, 3	8	1, 2, 4, 8
4	1, 2, 4	9	1, 3, 9

Note que:

- O 1 tem apenas um divisor: o próprio 1.
- Todo número natural diferente de zero é divisível por 1 e por ele mesmo.
- Há números que são divisíveis apenas por 1 e por eles mesmos, como: 2, 3, 5 e 7.
- Há números que, além do 1 e deles mesmos, possuem outros divisores. Como: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 e 15.
- O zero tem infinitos divisores.

Um número natural que possui apenas dois divisores naturais distintos (o número 1 e ele mesmo) é denominado **número primo**.

Assim, os números 2, 3, 5 e 7 são exemplos de números primos.

A sucessão dos números primos é infinita, ou seja, existem infinitos números primos.

Os números naturais que possuem mais de dois divisores distintos são chamados **números**

compostos. Assim, 4, 6, 8 e 9 são números compostos.

Observações:

- Os números 0 e 1 não são primos nem compostos.
- O único número natural par que é primo é o 2.

🔗 Como reconhecer números primos?

Primus é uma palavra latina que significa “primeiro e único”. Ela foi escolhida para denominar o grupo dos números naturais divisíveis apenas por dois números naturais distintos: 1 e ele mesmo. Se um número natural não for primo, ele será chamado número composto, ou seja, poderá ser dividido por outros números, além do 1 e dele mesmo.

Vamos aqui usar uma regra que permitirá dizer quando um número natural dado é ou não um número primo. Veja:

- Dividimos o número dado pelos números primos menores que ele, até obter um quociente menor ou igual ao divisor.
- Se nenhuma das divisões efetuadas for exata, o número será primo.
- Se qualquer uma das divisões for exata, o número não será primo.

Figura 3.33: Números Primos

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 6 EF, p.118).

● PARA QUEM QUER MAIS

Resoluções na p. 302

O crivo de Eratóstenes

O grego Eratóstenes (276-194 a.C.) montou a primeira tábua de números primos.

Por exemplo, para achar os primos até 1000, basta começar eliminando o 1. A seguir, elimine os múltiplos de 2, exceto o 2, depois os de 3, exceto o 3, e assim por diante até 31.

Quando tiver riscado os múltiplos de 31, pode parar: você já achou todos os números primos menores que 1000.

Veja, ao lado, a tábua de números primos até 50. Nela foram escritos os números de 1 a 50 e seguidos os procedimentos descritos acima.

1. Agora é com você. Monte, no caderno, uma tábua de números primos até 100 seguindo o procedimento descrito anteriormente. *Resposta no fim do livro.*

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

MARCO GUILHERME

SAIBA QUE

O número 1 não é primo, pois tem apenas um divisor natural, que é ele mesmo.

Figura 3.34: Crivo de Eratóstenes

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 6 EF, p.120).

🕒 Números primos

Vamos relembrar o conceito de número primo:

Um número que possui apenas dois divisores naturais distintos (o número 1 e ele mesmo) é denominado **número primo**.

Os números naturais que possuem mais de dois divisores distintos são chamados **números compostos**.

Assim:

- O número 1 não é primo nem composto.
- Os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são alguns exemplos de números naturais primos.
- Os números 4, 6, 8, 9 e 10 são alguns exemplos de números naturais compostos.
- O único número primo par é o 2, já que todos os demais números pares são divisíveis por 2.

Figura 3.35: Números Primos

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 7 EF, p.21).

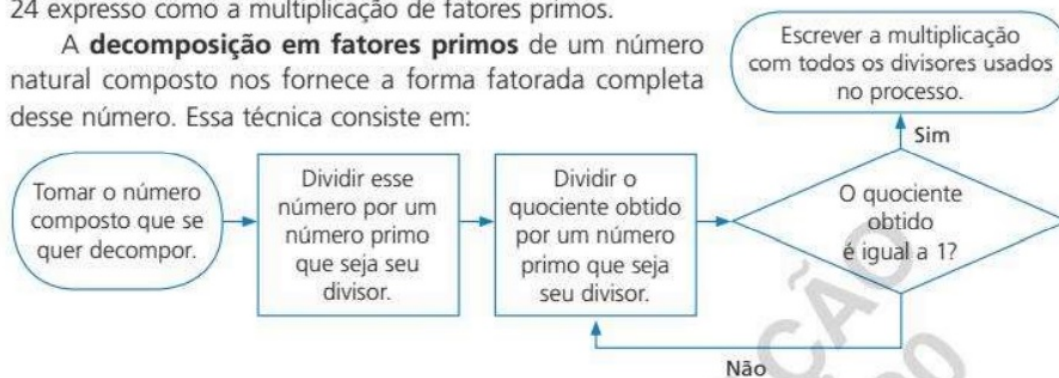
Decomposição em fatores primos

Vimos que todo número natural maior do que 1 que não é primo é chamado de número composto, pois ele pode ser expresso como uma multiplicação de dois ou mais fatores, em particular uma multiplicação de fatores primos. Observe o número 24, que é um número composto:

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Assim, $2 \times 2 \times 2 \times 3$ é a **forma fatorada completa** do número 24, ou seja, é o número 24 expresso como a multiplicação de fatores primos.

A **decomposição em fatores primos** de um número natural composto nos fornece a forma fatorada completa desse número. Essa técnica consiste em:



Veja como decompor os números 72, 116 e 231 em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

• $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

• $116 = 2 \times 2 \times 29$

$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

• $231 = 3 \times 7 \times 11$

Figura 3.36: Decomposição em fatores primos

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 7 EF, p.21).

5 Número primo

Observe os divisores de alguns números naturais:

- os divisores de 21 são: 1, 3, 7 e 21
- os divisores de 24 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24
- os divisores de 3 são: 1 e 3
- os divisores de 7 são: 1 e 7

Note que alguns desses números têm apenas dois divisores. Quando isso acontece, eles são chamados de **números primos**.

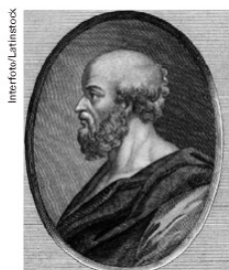
Número primo é todo número natural maior do que 1 que tem exatamente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

Entre os números 21, 3, 24 e 7, podemos afirmar que:

- 3 é número primo, pois é maior do que 1 e só tem 1 e 3 como divisores;
- 7 também é número primo, pois é maior do que 1 e tem apenas o 1 e o 7 como divisores;
- 21 e 24 não são números primos, pois têm mais do que dois divisores. Veja: $d(21)$: 1, 3, 7, 21 e $d(24)$: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Figura 3.37: Números Primos

Fonte. Dante (2015, v.6 EF, p.151).



Eratóstenes, matemático grego (276 a.C.–195 a.C.).

Este quadro com os números riscados, no qual aparecem só os números primos, é chamado Crivo de Eratóstenes.

Crivo de Eratóstenes

Quais são os números primos até 100?

Eratóstenes, matemático, geógrafo e astrônomo grego, criou um método simples e prático para a obtenção de números primos até um determinado limite: o **Crivo de Eratóstenes**.

Veja e faça junto.

- 1ª) Construa um quadro com os números naturais de 2 até 100.
- 2ª) Risque os múltiplos de 2 maiores do que 2.
- 3ª) Risque os múltiplos de 3 maiores do que 3.
- 4ª) Risque também os múltiplos de 5 e os múltiplos de 7 maiores do que eles.
- 5ª) O maior número primo a ser checado corresponde à raiz quadrada do valor-limite, arredondado para baixo. Neste exemplo, como $\sqrt{100} = 10$, o maior número a ser checado é o 7.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Os números que não foram riscados são os números primos até 100. Você já descobriu quais são eles?

Figura 3.38: Crivo de Eratóstenes

Fonte. Dante (2015, v.6 EF, p.152).



Exercícios

43. Quantos são os números primos até 100? Complete o quadro ao lado com todos esses números.

44. A soma de dois números primos é 40. A diferença entre eles é 6. Quais são esses números?

45. **Reconhecimento de um número primo**

Você já descobriu, pelo Crivo de Eratóstenes, quais são os números primos até 100. Agora você verá um processo que pode ser usado para descobrir os demais números primos. Basta ir dividindo o número dado pelos números primos, a partir do 2, até que um dos seguintes fatos aconteça:

Números primos até 100				

- A divisão "dar" exata (nesse caso o número não é primo).
- O quociente ficar **igual** ou **menor do que** o divisor sem que nenhuma divisão tenha "dado" exata (nesse caso o número é primo).

Figura 3.39: Números Primos - exercícios

Fonte. Dante (2015, v.6 EF, p.152).

A demonstração desse Teorema não é acessível aos alunos do EB. Do ponto de vista de Barbosa (2008, p. 249), “assuntos associados ao TFA* precisam ser retomados em vários momentos da vida escolar do estudante, contribuindo para que ele avance no reconhecimento e na generalização das propriedades dos números inteiros”.

3.8 Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)

Já foi dito neste trabalho que a demonstração do TFA** necessita de conhecimentos matemáticos mais avançados. Os alunos do 3º ano do EM necessitam pelo menos conhecer os números complexos e a definição de polinômios para que faça sentido o enunciado deste teorema no ensino básico.

Dante (2016, v. 3, p. 219) e Iezzi et al. (2016, v. 3 EM, p. 219-220) apresentam (enunciam) uma versão mais simples deste teorema mas não sua demonstração.

A seguir algumas imagens dos livros analisados.

Teorema fundamental da Álgebra (TFA)

O teorema seguinte, enunciado e provado por Carl Gauss (1777-1855), constitui um elemento central para o estudo das equações algébricas.

Todo polinômio de grau n , $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema exige conhecimentos de Matemática do Ensino Superior e que, portanto, não são abordados no Ensino Médio.

Figura 3.40: Teorema Fundamental da Álgebra

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 3 EM, p. 219).

Teorema fundamental da Álgebra

O **teorema fundamental da Álgebra**, que admitiremos sem demonstração, diz que:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau n ($n \geq 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Esse teorema foi demonstrado em 1799 pelo matemático Carl F. Gauss, então com 21 anos, em sua tese de doutorado.

Figura 3.41: Teorema Fundamental da Álgebra

Fonte. Dante (2016, v. 3 EM, p. 219).

3.8.1 A Fórmula de Bhaskara

As equações de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ podem ser resolvidas utilizando a famosa fórmula de Bhaskara, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que nos permite calcular o valor de x através dos coeficientes a , b e c da equação.

No livro analisado de Dante (2018, v.9 EF, p. 57), temos a demonstração dessa fórmula, um pouco de História, exemplos e muitas atividades, inclusive atividades com jogos. Observamos que Dante utiliza em seus LD uma linguagem clara, concisa e objetiva. O autor faz uso de várias representações na abordagem dos conteúdos (gráficos, tabelas e ilustrações), havendo um equilíbrio entre elas. Ele procura seguir os objetivos e as orientações metodológicas dos PCN (BRASIL, 1998a, 1998b), apontando um contexto social e conteúdos matemáticos que são desenvolvidos a partir de situações-problema e envolvendo outras áreas do conhecimento.

Também em Iezzi et al. (2016, v.1 EM, p.97) e em Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v.9 EF, p.100-103) temos a fórmula de Bhaskara com uma demonstração de fácil entendimento, seguida de exemplos, exercícios resolvidos e propostos, porém Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v.9 EF, p.104-105) traz o software Ofi Calc.

A seguir algumas imagens dos livros analisados.

▶ Raízes de uma equação do 2º grau

Chamam-se **raízes** ou **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ são as soluções (se existirem) da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos deduzir a fórmula que permite obter as raízes de uma função quadrática. Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é a fórmula resolvente de uma equação do 2º grau.

*Sim, desenvolvendo o produto notável $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
temos: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$, isto é, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.*

PENSE NISTO:
 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um trinômio quadrado perfeito?

Figura 3.42: Demonstração da Fórmula de Bhaskara

Fonte. Iezzi et al. (2016, v. 1 EM, p.97).

Fórmula de resolução de uma equação do 2º grau

Generalizando a ideia de completar quadrados, podemos chegar a uma fórmula para resolver **qualquer equação do 2º grau**, incompleta ou completa, com o primeiro membro sendo um trinômio quadrado perfeito ou não.

Consideremos a equação genérica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes a , b e c reais e $a \neq 0$.

Dividindo ambos os membros dessa equação por a , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o quadrado do primeiro membro somando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

quadrado de x quadrado de $\frac{b}{2a}$

$2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito do primeiro membro da equação e transformando o segundo membro em uma única fração, obtemos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos: $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Isolando o x no primeiro membro, obtemos: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Finalmente, obtemos a fórmula da resolução de equações do 2º grau: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Figura 3.43: Demonstração - Fórmula de Bhaskara

Fonte. Dante (2018, v. 9 EF, p. 57).

Quantas raízes há?

Com esse jogo você, além de se divertir, vai aplicar alguns dos conteúdos que aprendeu neste capítulo. Preste atenção às orientações e bom jogo!

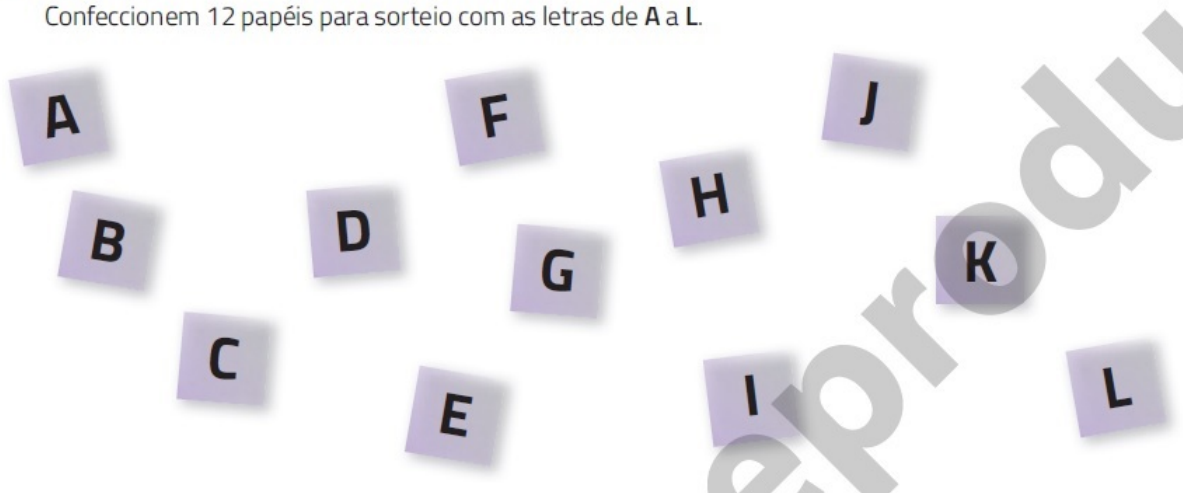
Orientações

Número de participantes: 2 jogadores.

Material: 1 folha de papel sulfite.

Preparação

Confeccionem 12 papéis para sorteio com as letras de A a L.



Copiem o quadro de pontuação no caderno antes do início do jogo.

Quadro de pontuação

Nome	Pontuação nas rodadas						Pontuação total

Como jogar

A cada rodada, cada jogador sorteia 1 papel, verifica abaixo a equação correspondente, determina quantas raízes reais a equação sorteada tem, usando o valor de Δ ou outro conhecimento adquirido, e marca os pontos no quadro de pontuação.

- Se a equação não tiver raízes reais, então o jogador não marca ponto (0).
- Se a equação tiver 2 raízes reais iguais, então o jogador marca 1 ponto (1).
- Se a equação tiver 2 raízes reais distintas, então o jogador marca 2 pontos (2).

A $x^2 + x + 1 = 0 \Delta < 0$ (0 ponto)	G $x^2 - 6x + 9 = 0 \Delta = 0$ (1 ponto)
B $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Delta = 0$ (1 ponto)	H $7x^2 - 10x + 4 = 0 \Delta < 0$ (0 ponto)
C $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Delta > 0$ (2 pontos)	I $3x^2 - 27 = 0 \Delta > 0$ (2 pontos)
D $x^2 - 11x + 30 = 0 \Delta > 0$ (2 pontos)	J $x(x + 1) = 0 \Delta > 0$ (2 pontos)
E $3x^2 + 108 = 0 \Delta < 0$ (0 ponto)	K $x(x - 1) = 11x - 36 \Delta = 0$ (1 ponto)
F $(x - 2)(x - 2) = 0 \Delta = 0$ (1 ponto)	L $2x(x - 1) = -4 \Delta < 0$ (0 ponto)

Vence a partida quem conseguir mais pontos após as 6 rodadas.

Figura 3.44: Fórmula de Bhaskara - jogos

Fonte. Dante (2018, v. 9 EF, p. 60).

🕒 Fórmula resolvente de uma equação do 2º grau com uma incógnita

Veja como podemos chegar à fórmula resolvente:

Dedução da fórmula resolvente		Processo algébrico de Bhaskara para o exemplo
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$		$x^2 + 4x - 12 = 0$
$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	→	$x^2 + 4x = 12$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	→	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$		
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	→	$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	→	$(x + 2)^2 = 16$
$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	→	$(x + 2) = \pm \sqrt{16}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	→	$x + 2 = \pm 4$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	→	$x = -2 \pm 4$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	→	$x = 2 \text{ ou } x = -6$

Figura 3.45: Demonstração - Fórmula de Bhaskara

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 9 EF, p.100).

A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ é chamada **fórmula resolutiva** da equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A expressão $b^2 - 4ac$ (que é um número real) é usualmente representada pela letra grega Δ (delta) e é chamada **discriminante da equação**.

Então, a fórmula resolutiva pode ser escrita assim: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

A fórmula resolutiva recebeu, também, o nome de **fórmula de Bhaskara** em homenagem ao grande matemático hindu.

A existência ou não de raízes reais, bem como o fato de elas serem duas iguais ou diferentes, depende, exclusivamente, do valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos $\Delta = b^2 - 4ac$ e consideramos:

- Quando $\Delta \geq 0$, a equação tem raízes reais $\begin{cases} \Delta > 0 & \text{(duas raízes diferentes)} \\ \Delta = 0 & \text{(duas raízes iguais)} \end{cases}$
- Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Figura 3.46: Fórmula de Bhaskara

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 9 EF, p.101).

Resolução de equação do 2º grau

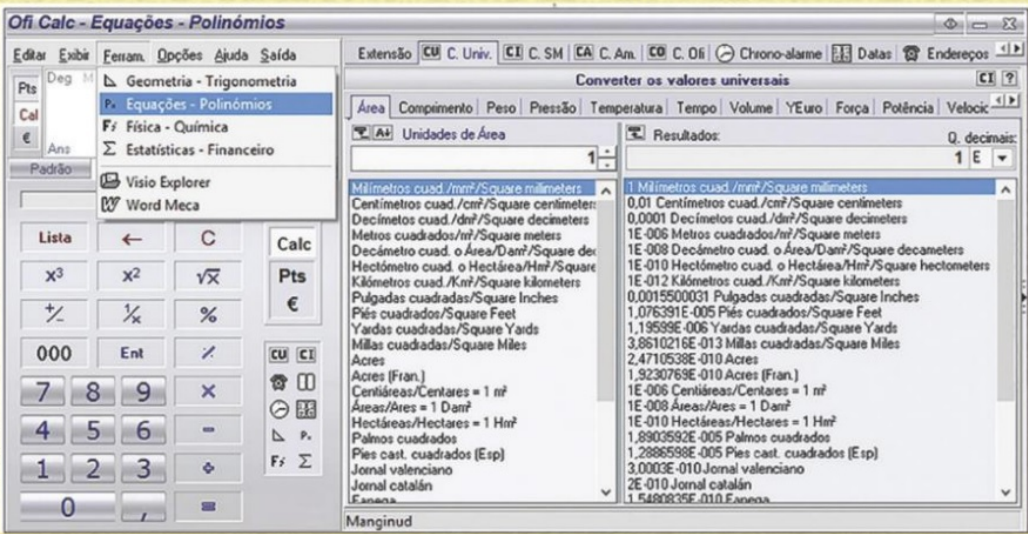
Nesta seção, exploraremos o campo destinado à resolução de equação do 2º grau do Ofi Calc, que é um *software* disponível para *download* gratuito no site <<http://livro.pro/tbfg5r>>. Acesso em: 16 nov. 2018.

Além de poder nos auxiliar a resolver operações básicas, o Ofi Calc possui diversas outras ferramentas, por exemplo, uma para resolver equações do 2º grau.

Esse *software* é de grande utilidade para auxiliá-lo na conferência de resultados e não deve substituir os cálculos feitos por você.

Veja como podemos utilizar o Ofi Calc.

Clique na aba **Ferramentas** (Ferram.) e, depois, em **Equações – Polinômios**.

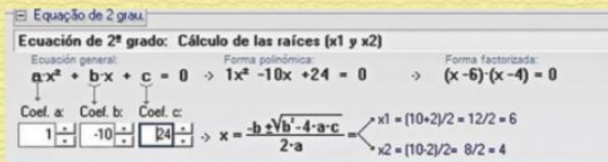
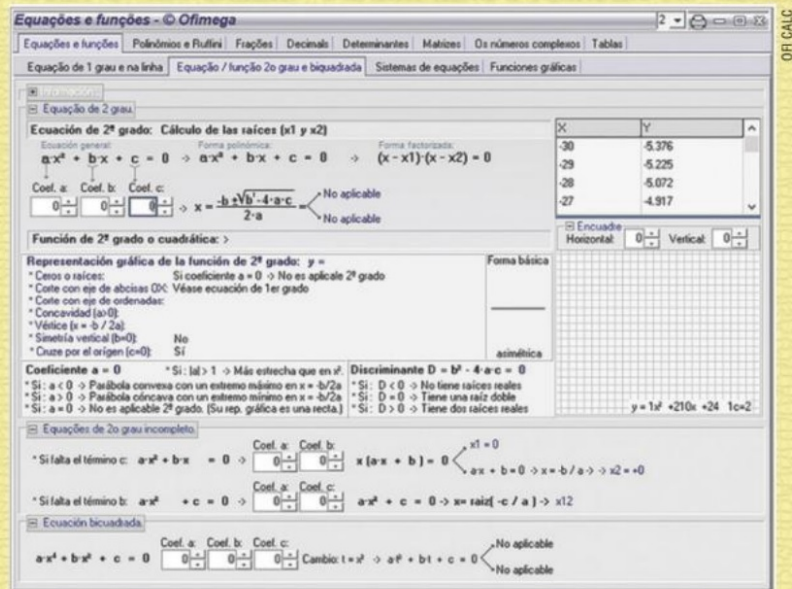


The screenshot shows the Ofi Calc application window. The title bar reads 'Ofi Calc - Equações - Polinômios'. The menu bar includes 'Editar', 'Exibir', 'Ferram.', 'Opções', 'Ajuda', and 'Saída'. The 'Ferram.' menu is open, showing options like 'Geometria - Trigonometria', 'E. Equações - Polinômios', 'F. Física - Química', 'Σ Estatísticas - Financeiro', 'Visio Explorer', and 'Word Meca'. The 'E. Equações - Polinômios' option is selected. On the right, a 'Converter os valores universais' dialog box is open, showing a list of units for conversion, such as 'Mímetros cuad./m²/Square millimeters', 'Centímetros cuad./cm²/Square centimeters', etc. The 'Unidades de Área' section is active, and the 'Resultados' field shows '1 Mímetros cuad./m²/Square millimeters'.

Figura 3.47: Software Ofi Calc

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 9 EF, p.104-105).

Teremos nova tela e nela devemos selecionar a aba **Equação/função do 2º grau e biquadrada**.



Teremos uma tela em que podemos preencher os valores dos coeficientes de uma equação do 2º grau e obter a resolução.

Por exemplo: para resolver a equação $x^2 - 10x + 24 = 0$, basta completar os campos dos coeficientes com $a = 1$, $b = -10$ e $c = 24$ que o *software* retornará às raízes e à forma fatorada da equação.

1. Agora, com o auxílio do *software* Ofi Calc, obtenha as raízes das seguintes equações do 2º grau:

- a) $4x^2 - 11x + 26 = 0$
- b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- c) $3x^2 - 53x = 0$

2. Verifique se nos itens *b* e *c* os valores apresentados pelo *software* são de fato raízes das equações dadas.

3. Explore, com um amigo, outras ferramentas do *software*.

Figura 3.48: Software Ofi Calc

Fonte. Giovanni Júnior e Castrucci (2018, v. 9 EF, p.105).

3.9 Teorema Binomial de Newton

No EF, mais especificamente no oitavo ano, é apresentado aos alunos o cálculo de potências de binômios do tipo $(a + b)^n$ ou $(a - b)^n$, com $0 < n \leq 3$, sendo que esses cálculos são feitos utilizando-se da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou através de regras (geralmente decoradas pelos alunos), os produtos notáveis: quadrado de uma soma, quadrado de uma diferença, cubo de uma soma ou cubo de uma diferença.

Exemplo: Utilizando a propriedade distributiva observamos o desenvolvimento dos seguintes binômios:

(i) $(x + 3)^2 = (x + 3).(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$;

(ii) $(x + 3)^3 = (x + 3)^2.(x + 3) = (x^2 + 6x + 9).(x + 3) = x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 18x + 9x + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$;

(iii) $(x + 3)^4 = (x + 3)^2.(x + 3)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x^3 + 36x^2 + 54x + 9x^2 + 54x + 81 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$.

Entretanto, quanto maior for o expoente, mais trabalhoso é o cálculo da potência pela propriedade distributiva, exigindo métodos mais eficientes para desenvolver as contas.

No 2º ano do EM são abordados os conteúdos de Análise Combinatória: permutações, arranjos, combinações, os números binomiais e o teorema binomial, também chamado binômio de Newton e o triângulo de Pascal.

O teorema do binômio de Newton agrega muito ao conhecimento matemático dos alunos, porém é uma ferramenta considerada difícil por eles no geral. As dificuldades podem ser minimizadas quando o tratamos de maneira contextualizada a outras ciências, tornando mais produtivo o estudo (TOGNATO II, 2013). Este teorema pode ser utilizado em conexão com cálculos de probabilidade envolvendo dois eventos mutuamente exclusivos nos quais não importa a ordem de ocorrência de tais eventos.

Iezzi et al. (2016, EM) não apresentam o teorema Binomial, já Dante (2016, v. 2 EM, p. 228-229) apresenta este teorema, mas não o demonstra. Ele define números binomiais e apresenta algumas propriedades, o triângulo de Pascal, a propriedade dos números binomiais complementares, propriedade das linhas, sem demonstrá-los. Como leitura, o autor apresenta aspectos históricos sobre o triângulo de Pascal e explora vários exercícios visando a reprodução do teorema Binomial. Dante se mostra atento ao apresentar esses conceitos matemáticos de “maneira simples e compreensível”, com aplicação envolvendo problemas do mundo real.

9 Binômio de Newton

Toda potência da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como **binômio de Newton**.

O desenvolvimento do binômio de Newton é simples em casos como os seguintes, que você já estudou no Ensino Fundamental:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Em casos como $(x + y)^7$, $(2x - y)^5$, $(x + 2)^{10}$ e outros, vamos recorrer aos conhecimentos adquiridos na análise combinatória.

Observe nos exemplos seguintes os binômios de Newton desenvolvidos e veja como são os coeficientes de cada termo:

$$a) (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$$

$$b) (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

Note que os coeficientes dos desenvolvimentos são as linhas do triângulo de Pascal. Será que isso também acontece com $(x + y)^4$?

De fato:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4 = \\ = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Generalizando, podemos escrever, para x e $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

Note que os expoentes de x começam em n e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de y começam em 0 e crescem de 1 em 1 até n .

Observação: Como já vimos, dados os números naturais n e p , com $p \leq n$, o número $\binom{n}{p}$ é chamado

número binomial n sobre p . Lembre que $C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Veja, por exemplo, como efetuar o desenvolvimento de $(x + a)^5$:

$$(x + a)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 + \binom{5}{5}a^5 \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Portanto:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Figura 3.49: Teorema Binomial

Fonte: Dante (2016, v. 2 EM, p. 228).

Exercícios



77. Efetue os seguintes desenvolvimentos:

- a) $(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
b) $(a - 3)^4 = a^4 - 12a^3 + 54a^2 - 108a + 81$

Fique atento!

$$(a - 3)^4 = (a + (-3))^4$$

78. Considerem o desenvolvimento de $(x + 1)^{15}$. Sem fazer o desenvolvimento todo, tentem responder às perguntas:

- a) Quantos termos tem o desenvolvimento? **16 termos**
b) Qual é o 1º termo? x^{15}
c) Qual é o 3º termo? $\binom{15}{2} \cdot x^{13} = 105 \cdot x^{13}$

Figura 3.50: Binômio de Newton - exercícios

Fonte: Dante (2016, v. 2 EM, p. 229).

Observação 3.1. *Os LD analisados neste estudo oferecem caminhos que conduzem os alunos ao domínio progressivo de temas ou componentes curriculares, contribuindo assim para a formação e desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos para que possam acompanhar os avanços das ciências e das tecnologias. Esses LD articulam bem o uso dos conteúdos, de forma contextualizada, ao longo dos anos do EB. Entretanto, o professor deve buscar apoio além dos LD, em situações e objetos do cotidiano, nas novas tecnologias e em diversos outros recursos. Assim como os LD são um auxílio fundamental na construção dos planos de aula, organizador de rotinas para o professor, eles podem também comprometer a autonomia do professor no ensino-aprendizagem de sua disciplina, distanciando o professor da proposta de ensino e limitando as possibilidades de exploração do conhecimento. É fundamental que o professor busque o equilíbrio no uso dos LD em suas práticas-pedagógicas.*

3.10 Tabela síntese sobre os teoremas nos livros didáticos

	A Conquista da Matemática. v. 6,7,8 e 9. (Ensino Fundamental)	Teláris Matemática v. 6,7,8 e 9. (Ensino Fundamental)	Matemática: Contexto & Aplicações v.1,2 e 3. (Ensino Médio)	Matemática: Ciência e Aplicações v.1, 2 e 3. (Ensino Médio)
Teorema de Tales	O volume 9 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 9 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.
Teoremas das Bissetrizes	O volume 8 define bissetriz de um ângulo, mas não traz os teoremas das bissetrizes.	O volume 8 define bissetriz de um ângulo e cita uma propriedade que podemos enxergá-la como uma particularidade do teorema da bissetriz interna.	Não apresenta os Teoremas das Bissetrizes, em apenas alguns exercícios cita bissetriz.	Não apresenta os Teoremas das Bissetrizes, em apenas alguns exercícios cita bissetriz.
Teorema de Pitágoras	O volume 9 apresenta o teorema, incluindo duas demonstrações (uma algébrica e outra geométrica), de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 9 apresenta o teorema, incluindo uma demonstração algébrica, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta o teorema, incluindo duas demonstrações (uma algébrica e outra geométrica), de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta o teorema, incluindo uma demonstração algébrica, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.
Teorema de Heron	Não apresenta o Teorema de Heron como uma maneira de calcular a área de uma região triangular.	Apresenta o teorema no volume 8, mas sem sua demonstração.	Apresenta o teorema no volume 2, mas sem sua demonstração.	Não apresenta o Teorema de Heron como uma maneira de calcular a área de uma região triangular.
Teorema (lei) dos Cossenos	Não apresenta o teorema.	Não apresenta o teorema.	O volume 2 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração no triângulo acutângulo, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 2 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração nos três tipos de triângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.
Teorema (lei) dos Senos	Não apresenta o teorema.	Não apresenta o teorema.	O volume 2 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 2 apresenta o teorema, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.
Teorema Fundamental da Aritmética (TFA*)	Os volumes 6 e 7 apresentam apenas uma versão mais simples do teorema.	O volume 6 apresenta apenas uma versão mais simples do teorema.	Não apresenta o teorema.	Não apresenta o teorema.
Teorema Fundamental da Álgebra (TFA**)	Não apresenta o teorema.	Não apresenta o teorema.	O volume 3 apresenta apenas uma versão mais simples do teorema.	O volume 3 apresenta apenas uma versão mais simples do teorema.
Fórmula de Bhaskara	O volume 9 apresenta a Fórmula de Bhaskara e sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 9 apresenta a Fórmula de Bhaskara, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta a Fórmula de Bhaskara, incluindo sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.	O volume 1 apresenta a Fórmula de Bhaskara e sua demonstração, de maneira clara e de fácil entendimento para o aluno.
Teorema Binomial de Newton	Não apresenta o teorema.	Não apresenta o teorema.	Apresenta o teorema no volume 2, mas sem sua demonstração.	Não apresenta o teorema.

Capítulo 4

Propostas de atividades

De acordo com a BNCC, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes saibam investigar, argumentar, formular, justificar e defender soluções de problemas matemáticos, expressando e compartilhando experiências e resultados, mas procurando comunicar-se produzindo sentidos que levem ao entendimento.

Assim como ocorre no direito, tudo na matemática deve ser provado antes que possa ser aceito como verdadeiro (...). Muitas vezes, é muito mais difícil provar alguma coisa do que descobri-la e decidir que ela é quase certamente verdadeira. Às vezes, leva muitos séculos para que um teorema seja provado. Mas é a prova que define um teorema - deve ser possível demonstrar sua verdade através de um raciocínio lógico a partir de axiomas e outros teoremas já provados (ROONEY, 2012, p.199).

A seguir, apresentamos duas propostas de atividades (dois planos de aula) que trabalham verificações (provas) de resultados matemáticos simples com o objetivo de despertar o instinto investigativo em nossos alunos.

4.1 Atividade 1

- 1) **Título da atividade:** Reflexão sobre uma provinha matemática.
- 2) **Tempo necessário:** 1(uma) aula de 50 minutos.
- 3) **Público alvo:** Ensino Fundamental e Ensino Médio.
- 4) **Conteúdo:** Definições, conjecturas e provas matemáticas.
- 5) **Metodologia:** Aula expositiva dialogada e trabalho em grupos.

6) **Recursos/Materiais:** Quadro de giz, *datashow*.

7) **Objetivos específicos:**

- Refletir sobre conjectura, proposição, teorema, prova (demonstração) matemática;
- Auxiliar os alunos em seus argumentos matemáticos;
- Analisar resoluções algébricas de resultados matemáticos;
- Desenvolver senso crítico matemático;
- Promover a interação entre os alunos.

8) **Avaliação:** Participação dos alunos na discussão da prova apresentada; interação entre os alunos e professor.

9) **Desenvolvimento e conclusão da atividade:**

(i) Apresentar as definições de proposição, conjectura, teorema, corolário e prova usando *datashow* ou quadro de giz;

(ii) Apresentação da “prova” que $2=1$.

Sejam a e b números reais tais que $a = b$.

Multiplique a equação $a = b$ por $a \Rightarrow a^2 = ab$;

Some a^2 aos dois membros $\Rightarrow a^2 + a^2 = ab + a^2 \Rightarrow 2a^2 = a^2 + ab$;

Agora subtraia $2ab \Rightarrow 2a^2 - 2ab = a^2 + ab - 2ab \Rightarrow 2a^2 - 2ab = a^2 - ab$;

Escreva a última equação como se segue $\Rightarrow 2(a^2 - ab) = 1(a^2 - ab)$;

Dividida ambos os lados por $(a^2 - ab) \Rightarrow 2 = 1$.

Opa! Alguma coisa está muito errada, pois sabemos que $2 \neq 1$.

(iii) Solicitar a cada aluno que procure o erro e faça uma observação em seu caderno;

(iv) Discussão oral sobre o erro na prova apresentada. Neste momento, os alunos deverão dizer o que observaram de “estranho” na prova apresentada. Esperamos que eles percebam que no último passo da prova dividimos a equação por zero (um erro comum em resoluções de equações). Concluir a atividade refletindo que não devemos “sair aplicando regras matemáticas” sem saber realmente o que estamos fazendo, pois podemos chegar em resultados bem bizarros.

10) **Referências**

1 - ROONEY, Anne. *A História da Matemática*. Desde a criação das pirâmides até a

exploração do infinito. São Paulo, M.Books do Brasil, 2012.

2 - SOUZA, Maria Helena. *Teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018. (Coleção 21).

4.2 Atividade 2

1) **Título da atividade:** O número 0,9999... é igual a 1?

2) **Tempo necessário:** 1(uma) aula de 50 minutos.

3) **Público alvo:** Ensino Médio.

4) **Conteúdo:** Conjunto dos números racionais (em particular, as dízimas periódicas), Progressão Geométrica - PG, conjecturas e provas matemáticas.

5) **Metodologia:** Aula expositiva dialogada e trabalho em grupos.

6) **Recursos/Materiais:** Quadro de giz.

7) **Avaliação:** Participação dos alunos na discussão da questão proposta, argumentação, interpretação e interação entre os colegas nos grupos.

8) **Objetivos específicos:**

- Analisar resoluções algébricas de resultados matemáticos;
- Auxiliar os alunos em seus argumentos matemáticos;
- Desenvolver senso crítico matemático;
- Promover a interação entre os alunos nos grupos e com o professor.

9) **Desenvolvimento e conclusão da atividade:**

(i) Apresentar a seguinte pergunta à classe: O número 0,999... é igual a 1?
Muitos alunos têm dificuldades em entender que o número 0,999... é igual a 1. Eles aceitam melhor, por exemplo, que o número 0,333... é igual a $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{3}$ não ser inteiro.

(ii) Solicitar a cada aluno que responda esta pergunta em seu caderno justificando sua resposta.

(iii) Formar pequenos grupos de discussão sobre as respostas e justificativas.

(iv) Apresentação de cada grupo sobre a conclusão que chegou e se houve alguma

divergência entre os membros do grupo.

(v) Observar se algum grupo conseguiu provar formalmente a conjectura verdadeira proposta. Apareceram provas diferentes?

(vi) Trabalhar diferentes provas dessa conjectura verdadeira.

Prova 1 - Determinar a fração geratriz de uma dízima periódica como no EF

Chame a dízima periódica $0,999\dots$ de $x \Rightarrow x = 0,999\dots$ [1]

Multiplique esta equação por 10 $\Rightarrow 10x = 9,999\dots$ [2]

Faça a subtração [2] - [1], membro a membro $\Rightarrow 10x - x = (9,999\dots) - (0,999\dots)$

Obtemos $9x = 9 \Rightarrow x = 1$; como se queria demonstrar.

Prova 2 - Por progressão geométrica (PG)

Observe que a dízima periódica $0,999\dots$ é o resultado da adição de infinitas parcelas de números racionais (decimais finitos) como a seguir:

$$0,9999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$

Podemos identificar uma PG de termo inicial $a_1 = 0,9$ e razão $q = 0,1$.

Assim temos os termos $a_1 = 0,9$, $a_2 = 0,09$, $a_3 = 0,009$ e somas parciais $S_1 = 0,9$, $S_2 = 0,99$ e $S_3 = 0,999$.

Portanto, $0,999\dots$ (com reticências) é a soma infinita desta PG.

Sabemos que a soma infinita de uma PG é dada pela fórmula $S = \frac{a_1}{1 - q}$, então teremos que $0,999\dots = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$.

Ou seja, $0,999\dots = 1$; como queríamos demonstrar.

Prova 3 - Da dízima $0,333\dots$ provaremos que $0,999\dots = 1$

Para o aluno do EB é bem mais fácil aceitar que $0,333\dots = \frac{1}{3}$.

Considere provada a igualdade $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Multiplique por 3 ambos os membros desta igualdade $\Rightarrow 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0,333\dots$

Então temos que $1 = 0,999\dots$; como queríamos provar.

(vii) Provavelmente, no final desta atividade, algum aluno ainda não irá se sentir confortável com o fato de $0,999\dots$ ser igual a 1. Apresente outro exemplo semelhante, por exemplo, $0,24999\dots = 0,25$.

(viii) Proponha aos alunos uma pesquisa de campo, com pessoas de diferentes níveis de escolaridade, aplicando a questão: “O número $0,999\dots$ é igual a 1? Justifique.”

10) Referências:

1 - ALEXANDRE Edigley. *Entendendo porque 0,999 é igual a 1*. 10 out. 2011. Disponível em: <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2011/10/entendendo-porque-0999-e-igual-1.html>. Acesso em: 28 abr. 2020.

2 - FAINGUELERNT, Estela K.; VILLELA, Lucia Maria A. *0,999... É IGUAL A 1?* Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/decimais-web/9999.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2020.

3 - **Site visitado:** *Exemplo 0,999...* Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/0,999...> Acesso em: 28 abr. 2020.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, buscamos entender como se dá o “rigor” que encontramos na matemática nos dias de hoje. Para isso estudamos a influência das três grandes escolas filosóficas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo). Neste contexto, focamos nossos olhares nos teoremas ensinados nas escolas do Ensino Básico.

De fato, os teoremas estão presentes no ensino da matemática desde os nossos primeiros passos na escola. Tudo que aprendemos de matemática, desde o início da nossa formação, tem fundamentos em resultados matemáticos previamente descobertos/provados por matemáticos.

Nas escolas, os professores são os mediadores entre os alunos e os conteúdos matemáticos. Uma boa qualificação dos professores, uma boa estrutura física e tecnológica nas escolas e bons livros didáticos fazem toda a diferença no ensino. Mas o bom senso dos professores em entender e sentir a realidade das turmas, suas características particulares, também é muito importante para dar ritmo às atividades propostas aos alunos.

Terminamos nossa reflexão pensando no equilíbrio que devemos levar às salas de aula. Acreditamos ser fundamental mostrar aos alunos a importância dos teoremas na Matemática, trabalhar com eles os teoremas, mas isso pode ser feito de maneira leve, consciente. Acreditamos também que despertar o instinto investigativo em nossos alunos é o caminho mais promissor no ensino de matemática e os teoremas se encaixam perfeitamente neste caminho.

Certamente muitas ações podem ser desenvolvidas em sala de aula para proporcionar aos alunos uma compreensão significativa e motivadora de problemas envolvendo provas e demonstrações (por exemplo, nossas propostas de atividades no capítulo 4). Porém, para que isso aconteça, devemos abolir cada vez mais a prática de se trabalhar com uma matemática distante, sem sentido e descontextualizada, com apresentação de teoremas direcionados apenas para aplicação de fórmulas e regras “decoradas”. Tais procedimentos desestimulam e dificultam o aprendizado dos alunos.

Esperamos que este trabalho contribua para a formação dos colegas professores de matemática. Que desperte neles a busca de um domínio mais detalhado e articulado

dos conteúdos matemáticos que ensinam para seus alunos. Esperamos também despertar outras reflexões pertinentes ao ensino com o objetivo de melhorarmos cada vez mais nossas práticas pedagógicas nas escolas.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade*. Revista de Educação em Ciências e Matemática. v.13, n.27, p.5-35, set. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/5514/4561>. Acesso em: 16 dez. 2019.
- [2] ALVES, Aline Paula. *Desmistificando o Teorema Fundamental da Álgebra*. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Campinas. UNICAMP. Campinas (SP), 2105. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306555/1/Alves_AlinedePaula_M.pdf. Acesso em: 29 out. 2019.
- [3] AMORAS, Márcio Gomes. *Estudo da sequência de Fibonacci via teoria de Álgebra Linear*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Amapá - UNIFAP. Macapá, 2015. Disponível em; <https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/Tcc-Alex-Corrigido-2015.pdf>. Acesso em: 03 out. 2019.
- [4] ALEXANDRE, Edigley. *Entendendo porque 0,999 é igual a 1*. Disponível em: <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2011/10/entendendo-porque-0999-e-igual-1.html>. Acesso em: 28 abr. 2020.
- [5] ANDRADE, Júlio. *Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números*. 29º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 2013. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/29CBM_11.pdf. Acesso em: 24 abr. 2020.
- [6] ARCEGO, Priscila; BERLANDA, Juliana Carla. *A História da Matemática como meio de interlocução no ensino da probabilidade*. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Relatos de Experiência do XII ENEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6356_2906_ID.pdf. Acesso em: 13 abr. 2020.

- [7] BARBOSA, Gabriela dos S. *O Teorema Fundamental da Aritmética: Jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental*. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. São Paulo (SP), 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11358/1/Gabriela%20dos%20Santos%20Barbosa.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2020.
- [8] BATISTELA, Rosemeire de F.; BICUDO, Maria Aparecida V.; LAZARI, Henrique. *O Cenário do surgimento e o impacto do Teorema da Incompletude de Godel na Matemática*. JIEEM, n. 3, p. 198-207, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/323369273-O_Cenario_do_Surgimento_e_o_Impacto_do_Teorema_da_Incompletude_de_Godel_na_Matematica. Acesso em: 18 abr. 2020.
- [9] BICUDO, Maria Aparecida V. *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: UNESP, 2010.
- [10] BITTAR, Marilena. *A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos*. Zetetiké, Campinas (SP), v.25, n. 3, p.364-387, set./dez. 2017.
- [11] BOLEMA, Antônio Henrique P. *A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar*. Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 1045-1060, dez. 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-1045.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- [12] BOYER, Carl B., e Uta C. MERZBACH. *História da Matemática*. 3. Trad. Helena Castro. Vol. I. São Paulo: Blucher, 2012.
- [13] BRASIL. *Lei 5.692, de 11 de Agosto de 1971*. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Brasília (DF): 1971. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692.htm. Acesso em: 13 abr. 2020.
- [14] BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. LDB: Lei das Diretrizes e Bases da Educação nacional. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília (DF), 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso em: 13 abr. 2020.
- [15] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5º a 8º anos)*. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

- Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- [16] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. *Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, p. 40-58, 1998b. Disponível em: <https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/ciencias-da-natureza-matematica-e-suas-tecnologias.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- [17] BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v.2. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, p. 69-96, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.
- [18] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, p. 145-201, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file>. Acesso em: 16 abr. 2020.
- [19] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Texto Preliminar do documento BNCC*, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 14 abr. 2020.
- [20] BRASIL. Ministério da Educação. *PNLD 2018: matemática - guia de livros didáticos - Ensino Médio/ Ministério da Educação - Secretária de Educação Básica - SEB - 161*. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília (DF), 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/318-programas-e-acoes-1921564125/pnld-439702797/12391-pnld>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- [21] BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Resolução nº 4, de 17 de dezembro de 2018*. Institui a Base Nacional Comum Curricular na Etapa do Ensino Médio (BNCC-EM), como etapa final da Educação Básica, nos termos do artigo 35 da LDB, completando o conjunto constituído pela BNCC da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, com base na Resolução CNE/CP nº 2/2017, fundamentada no Parecer CNE/CP nº 15/2017. 2018a. Disponível em: http://estaticog1.globo.com/2018/12/18/DiarioOficialUniao.pdf?_ga=2.258807497.2116823696.1587209244-a35c3727-c801-828e-3d45-85955f354cea. Acesso em: 14 abr. 2020.
- [22] BRASIL. Base Comum Curricular. Educação é a Base. 3ª versão. Ministério da Educação. Conselho Nacional da Educação. *Área da Matemática e suas Tec-*

- nologias no Ensino Médio*. Brasília (DF): MEC, p. 527-546, 2018b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EL_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 abr. 2020.
- [23] BÚRIGO, Elizabete Z. *A Sociedade Brasileira de Educação Matemática e as Políticas Educacionais*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 7-26, ago. 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n64/1980-4415-bolema-33-64-0vii.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2021.
- [24] CANDIDO, Ana Cláudia P. et al. *Teorema do Binômio de Newton*. (Triângulo de Pascal). Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas (SP), abr. 2014. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/BN_M1_FM_2014.pdf. Acesso em: 25 out. 2019.
- [25] CAPUTI, Armando; MIRANDA, Daniel. *Bases Matemáticas*. Universidade Federal do ABC. Santo André (SP). Versão 13, maio. 2017. Disponível em: <http://hostel.ufabc.edu.br/daniel.miranda/livros/basesmatematicas/bases.pdf>. Acesso em: 23 set. 2019.
- [26] CBC - Currículo Básico Comum - Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais - (SEE/MG) *Proposta Curricular para o Ensino Médio - Matemática*. Belo Horizonte, 2007.
- [27] CECHIN, Lucas. *Exercícios Resolvidos sobre o Teorema de Pitágoras*. Meteorotica, out. 2015. Disponível em: <http://meteorotica.blogspot.com/2015/10/exercicios-resolvidos-sobre-o-teorema.html>. Acesso em: 27 set. 2019.
- [28] CONTADOR, Paulo Roberto M. *Matemática, uma breve história*, v.2. São Paulo: Livraria da Física, 2008.
- [29] COUTINHO, Severino C. *Primalidade em Tempo Polinomial - Uma introdução ao algoritmo AKS*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro (RJ): maio. 2004. Disponível em: <https://www.dcc.ufrj.br/collier/Books/AKS1.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.
- [30] CUNHA, Leandro Solano C. da. *Uma conexão entre Binômio de Newton e Probabilidade*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal da Bahia UFBA. Salvador, p. 1-42, abr. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/23416/1/DissertacaoLeandro.pdf>. Acesso em: 20 out. 2019.

- [31] DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris: Matemática. Ensino Fundamental. 2.ed., v 6.* São Paulo: Ática, 2015.
- [32] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.Contexto & Aplicações. Ensino Médio. 3. ed., v 1.* São Paulo: Ática, 2016.
- [33] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.Contexto & Aplicações. Ensino Médio. 3. ed., v 2.* São Paulo: Ática, 2016.
- [34] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.Contexto & Aplicações. Ensino Médio. 3. ed., v 3.* São Paulo: Ática, 2016.
- [35] DANTE, Luiz Roberto. *Teláris Matemática. Ensino Fundamental. 3.ed., v 8.* São Paulo: Ática, 2018.
- [36] DANTE, Luiz Roberto. *Teláris Matemática. Ensino Fundamental. 3.ed., v 9.* São Paulo: Ática, 2018.
- [37] D'AMBROSIO , Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática.* 17. ed. São Paulo: Papirus, 2009.
- [38] DIAS, Alessandra R. et al. *O Rigor Matemático: como as escolas o utilizam de acordo com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Revista Maiêutica, Indaial, v. 5, n. 1, p. 65-72, 2017. Disponível em: https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/1796/890. Acesso em: 30 mar. 2020.
- [39] DINIZ , Maria Iñez. *Dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a BNCC: uma construção e uma ruptura.* Mathema. 21 nov. 2019. Disponível em: <https://mathema.com.br/bncc/dos-parametros-curriculares-nacionais-para-a-bncc-uma-construcao-e-uma-ruptura/>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- [40] DINIZ, Maria Iñez. *Matemática: Contexto e Aplicações, 3 ed., v. 9.* São Paulo: Ática, 2016.
- [41] DINIZ, Maria Iñez. *Matemática: Contexto e Aplicações, 3 ed., v. 1.* São Paulo: Ática, 2016.
- [42] DINIZ, Maria Iñez. *Matemática: Contexto e Aplicações, 3 ed., v. 3.* São Paulo: Ática, 2016.
- [43] DOLCE , Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana, 9 ed., v. 9.* São Paulo: Atual, 2013.

- [44] EDUCA BRASIL. *O teorema estabelece as relações métricas de um triângulo*. 2018. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/lei-dos-senos-e-dos-cossenos>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [45] EUCLIDES . *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [46] EVES, Howard . *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas (SP): UNICAMP, 2011.
- [47] FAINGUELERNT, Estela K.; VILLELA, Lucia Maria A. *0,999... é igual a 1?*. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/vclotilde/disciplinas/html/decimais-web/9999.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2020.
- [48] FILIPPOZZI, Rafaela; SANTOS, Luiz Rafael dos. *Uma prova da irracionalidade $\sqrt{2}$ via Teorema Fundamental da Aritmética*. Feira de Iniciação Científica e Extensão. FICE, 11 e 12 set. 2014. Disponível em: <http://www.camboriu.ifc.edu.br/vfice2014/anais/uploads/trab18.pdf>. Acesso em: 19 out. 2019.
- [49] FLOOD, Raymond.; WILSON, Robin. *A História dos Grandes Matemáticos*. São Paulo: M. Books, 2013.
- [50] FONTANA, Júlio. *Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide*. Vol. 2, Metatheoria, v. 2, n. 1, p. 23-36, 2011. Disponível em: <http://www.metatheoria.com.ar/index.php/m/article/view/61/72>. Acesso em: 23 nov. 2019.
- [51] FRISON, Marli D. et al. *Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais*. In: VII Encontro Nacional de Pesquisas em Educação e Ciências (Enpec), Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), nov. 2009. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viipec/pdfs/425.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2019.
- [52] FRITZEN, Karina R. *Estudo do sistema conceitual de trigonometria no Ensino Fundamental: Uma leitura Histórico-Cultural*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC. Criciúma (SC), 2011. Disponível em: <http://200.18.15.60:8080/pergamumweb/vinculos/00004E/00004E5D.pdf>. Acesso em: 19 out. 2019.

- [53] GAIESKI, Reges V. *Trigonometria e Aplicações*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual de Maringá - UEM. Maringá, 2014. Disponível em: http://sites.uem.br/profmat/reges_gaieski.pdf. Acesso em: 21 out. 2019.
- [54] GARBI, Gilberto Geraldo. *C.Q.D: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [55] GIMENES, Luciene P. *Teorema Fundamental da Aritmética*. Universidade Estadual de Maringá. UEM. 2010. Disponível em: http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/teoremafundamentalaritmetica.pdf. Acesso em: 19 out. 2019.
- [56] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática*. Ensino Fundamental. 4 ed. v. 6. São Paulo: FTD, 2018.
- [57] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática*. Ensino Fundamental. 4 ed. v. 7. São Paulo: FTD, 2018.
- [58] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática*. Ensino Fundamental. 4 ed. v. 8. São Paulo: FTD, 2018.
- [59] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática*. Ensino Fundamental. 4 ed. v. 9. São Paulo: FTD, 2018.
- [60] GOUVEIA, Rosimar. *Teorema de Pitágoras*. Exercícios. Toda Matéria. 2017. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras-exercicios/>. Acesso em: 13 dez. 2019.
- [61] IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos da Matemática Elementar 2*. 10 ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [62] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. Ensino Médio, 9 ed., v. 1. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [63] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. Ensino Médio, 9 ed., v. 2. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [64] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. Ensino Médio, 9 ed., v. 3. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [65] JARDIM, Gustavo. *Último Teorema de Fermat*. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/ultimo-teorema-de-fermat/>. Acesso em: 06 fev. 2020.

- [66] JORDON, About. *Lei dos Cossenos*. 2017. Disponível em: <https://sabermatematica.com.br/lei-dos-cossenos.html>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [67] LEACHENSKI, Alan Alceu. *Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa (PA), 2017.
- [68] LIMA, Elon L. et al. *A Matemática de Ensino Médio - Volume 3*. 7ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção Professor de Matemática), 2016.
- [69] LINZ, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.
- [70] LOPES, Celi E. *Os desafios e as perspectivas para a Educação Matemática no Ensino Médio*. Sessão Trabalho Encomendado. Anped34 - 2011. A Educação Matemática no Ensino Médio., p. 1-47, 03 out. 2011. Disponível em: http://www.ufrj.br/emanped/noticia/docs/TextosGT19Anped2011_TrabEncomendado.pdf. Acesso em: 13 abr. 2020.
- [71] LOUREIRO, Antônio Alfredo F. *Métodos de Prova*. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, s.d. Disponível em: https://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md_3MetodosDeProva.pdf. Acesso em: 08 out. 2019.
- [72] LOUREIRO, Daniel Zampieri; KLÜBER, Tiago Emanuel. *As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: Um olhar para o Ensino de Matemática*. Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Cascavel. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, p. 1-14, 2015. Disponível em: <https://docplayer.com.br/133084230-As-escolas-do-formalismo-logicismo-e-intuicionismo-um-olhar-para-o-ensino-de-matematica.html>. Acesso em: 02 abr. 2020.
- [73] MACEDO, Darilene Maria R. *Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014_dis_dmr Macedo.pdf. Acesso em: 11 dez. 2019.
- [74] MACHADO, Guilherme C. *O estudo dos triângulos através da observação de estruturas treliçadas e sua aplicação em competição de construção de pontes de espaguete*. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual do Norte

- Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/23112016Guilherme-Coelho-Machado.pdf>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [75] MACHADO, Nilson José. *Matemática e realidade*. Análise. 4 ed. São Paulo (SP): Cortez, 2009.
- [76] MACHADO, Sílvia D. A.; MARANHÃO, Maria Cristina S. de A.; COELHO, Sônia P. *Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental*. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Actas do V CIBEM. Porto, Portugal, 17 a 22 de julho de 2005, v.1, p. 1-12. 1 CD-ROM.
- [77] MAIER, Rudolf R. *Teoria dos Números*. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática - IE, 2005. Disponível em: <http://www.mat.unb.br/maier/tnotas.pdf>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [78] MARKARIAN, Roberto. A Matemática na Escola: Alguns Problemas e suas Causas. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, s.d. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/38/4.htm>. Acesso em: 27 fev. 2021.
- [79] MATEMÁTICA BÁSICA. *Teorema de Pitágoras: Fórmula e Exemplo*. 2019. Disponível em: <https://matematicabasica.net/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em: 27 set. 2019.
- [80] MEC - Ministério da Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Área de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. 2018, p. 265-298 (EF), p. 527-532. (EM). Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EL_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 jan. 2020.
- [81] MELO, Helena. *Ensinar e aprender Matemática: diálogos, conjunções numa perspectiva interdisciplinar*, fev. 2012. O Conceito pelo conceito. Universidade dos Açores. Disponível em: http://sites.uac.pt/mmatp/files/2012/02/Slides_O_conceito-pelo-conceito_Helena-Melo.pdf. Acesso em: 27 set. 2019.
- [82] MONDINI, Fabiane. *O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a Matemática*. Unesp, p.1-10, 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-A_gt2_mondini_ta.pdf. Acesso em: 31 mar. 2020.
- [83] MORAIS FILHO, Daniel C. de. *Um Convite à Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [84] MORENO, Juliana. *Curso de Geometria - Aula de postulado, teorema, tese e hipótese*. Vídeo Youtube, abr. 2017. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Tquq_N7JDMg. Acesso em: 24 set. 2019.
- [85] MUNDO EDUCAÇÃO. *Exercícios Sobre Teorema De Tales*. 2018. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exerciciosmatematica/exercicios-sobre-teorema-tales.htm>. Acesso em: 23 set. 2019.
- [86] MUNIZ NETO, Antônio C. *Geometria*. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2013.
- [87] MUTTI, Gabriele de S. L. et al. *Logicismo, intuicionismo e formalismo: uma análise de documentos das licenciaturas em Matemática das universidades públicas paranaenses*. Paraná (PR). Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 21, n. 2, p. 313-334, 2019. Disponível em: [file:///D:/User/Downloads/40766-131378-1-PB%20\(1\).pdf](file:///D:/User/Downloads/40766-131378-1-PB%20(1).pdf). Acesso em: 19 abr. 2020.
- [88] NAGAFUCHI, Thiago; BATISTA, Irinéa de Lourdes. *O que é Demonstração? Aspectos filosóficos*. 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/69-1-Agt2_nagafuchi_ta.pdf. Acesso em: 25 set. 2019.
- [89] NASCIMENTO, Marcus Vinicius S. *Sobre o crivo de Eratóstenes - Legendre*. Campinas (SP), 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/307507/1/Nascimento_MarcusViniciusSilva_M.pdf. Acesso em: 27 abr. 2020.
- [90] NASCIMENTO, Van Eudes F. do. *Demonstrações do Teorema de Pitágoras*. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte, 2018.
- [91] NISKIE, Arnaldo. *Matemática, a ciência do raciocínio*. Palestra pronunciada em 4 de julho de 2017. In: Carta Mensal, Rio de Janeiro, v. 63, n. 750, p. 59-87, set. 2017. Disponível em: http://cnc.org.br/sites/default/files/arquivos/2017_cmensal_750.pdf. Acesso em: 27 fev. 2021.
- [92] NÓS, Rudimar; SAITO, Olga H.; SANTOS, Marcos André dos. *Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos. O te-*

- orema de Heron e a demonstração nas aulas de matemática.* Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 11, dez. 2017. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v11a03-geometria-radicaais-duplos-e-a-raiz.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2020.
- [93] NOVAES, Jean Carlos. *Lei dos Senos: Demonstração, Aplicação e Exemplos.* Matemática Básica. 2019a. Disponível em: <https://matematicabasica.net/lei-dos-senos/>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [94] NOVAES. *Teorema de Pitágoras.* Matemática Básica. 2019b. Disponível em: <https://matematicabasica.net/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em: 27 set. 2019.
- [95] NUNES, Ingrid. *Lei dos Senos e Cossenos: Exercícios Resolvidos.* 2019. Disponível em: <https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/297-lei-dos-senos-e-cossenos-exercicios-resolvidos>. Acesso em: 20 out. 2019.
- [96] OBMEP.Sala de Estudo: *Teorema Fundamental da Aritmética.* Vídeo sobre O Teorema Fundamental da Aritmética. 2019. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/>. Acesso em: 19 out. 2019.
- [97] OLIVEIRA, Gerson P.; FONSECA, Rubens V. *A teoria dos números na formação de professores de matemática:*(in) compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. Ciênc. educ. (Bauru), v. 23, n. 4,p. 881-898, Bauru, out./dez. 2017. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S151673132017000400881. Acesso em: 18 out. 2019.
- [98] OLIVEIRA, Louraine de Paula. *Teorema do Binômio de Newton.* Triângulo de Pascal. Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. 29 abr. 2014. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Louraine_BN_2014.pdf. Acesso em: 25 out. 2019.
- [99] OLIVEIRA, Oswaldo R. B. *O Teorema Fundamental da Álgebra: Via as quatro operações básicas e indução, baseado em: The Fundamental Theorem of Algebra: from the four basic operations,* de 2012. 29 nov. 2014. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/oliveira/TFA-4OPERACOES-INDUCAO.pdf>. Acesso em: 30 out. 2019.
- [100] PAULANTI, Cláudio Magno. *Área das Figuras Planas.* Uso da Fórmula de Heron. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade

- Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2014. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/12122014Claudio-Magno-Paulanti.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2019.
- [101] PEREIRA, Jefferson T. G. *BNCC - Do Letramento Matemático à equidade e igualdade, possíveis significações produzidas*. Universidade São Francisco., p. 226-237, 2019. Disponível em: <http://ensaios.usf.edu.br/ensaios/article/view/57/25>. Acesso em: 16 abr. 2020.
- [102] PINTO, Antônio Henrique. *A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 1045-1060, dez. 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-1045.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2020.
- [103] RESENDE, Marilene R. V. *Ressignificando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica - PUC/SP, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11207>. Acesso em: 18 out. 2019.
- [104] RIBEIRO, Thyago. *Lei dos Senos e dos Cossenos*. Trigonometria. Info escola, s.d. Disponível em: <https://www.infoescola.com/trigonometria/lei-dos-senos-e-dos-cossenos/>. Acesso em: 19 out. 2019.
- [105] RIGONATTO, Marcelo. *Demonstração da Fórmula de Bhaskara*. Ensino da Matemática. 17 ago. 2019. Disponível em: <https://ensinodematematica.blogspot.com/2011/05/demonstracao-da-formula-de-bhaskara.html>. Acesso em: 17 dez. 2019.
- [106] ROONEY, Anne. *A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo, M.Books do Brasil, 2012.
- [107] SALDAN, Cláudio. *Binômio de Newton - Lista de Exercícios*. Exercício nº 21, 2015. Disponível em: <https://dokumen.tips/documents/lista-de-exercicios-binomio-de-newton.html>. Acesso em: 25 out. 2019.
- [108] SALVADO, Cláudio D'Alessandro. *Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio*. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), p. 1-41, 2016. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf. Acesso em: 12 jan. 2021.

- [109] SANTOS, Ana Maria Q. dos; SANTOS, Fábio Henrique da C.; OLIVEIRA, Reinaldo M. de. *Teorema de Pitágoras: Demonstrações*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática). Universidade Federal do Amapá. Macapá (AP), 2015. Disponível em: Documents/TCC-REVISADO%20%20QUE%20ROBERTA%20MANDOU%20PARA%20EU%20LHAR.pdf. Acesso em: 03 abr. 2020.
- [110] SCARAMELLA, Diego de S. *Teorema Fundamental da Álgebra para o Ensino Médio*. Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-graduação em Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Rio de Janeiro, p. 1-20, 25 fev. 2018. Disponível em: https://impa.br/wpcontent/uploads/2018/03/TCC_2018_Diego_Scaramella.pdf. Acesso em: 12 jan. 2021.
- [111] SILVA, Jairo José da. *Filosofias da matemática*. São Paulo: UNESP, 2007.
- [112] SILVA, Luiz Paulo M. O que são ângulos opostos pelo vértice? *Brasil Escola*, s.d. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-angulos-opostos-pelo-vertice.htm>. Acesso em: 14 out. 2019.
- [113] SILVER, Nate. *O sinal e o ruído: porque tantas previsões falham e outras não*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013.
- [114] SMOLE, Kátia Cristina S. *Aprendizagem Significativa: O lugar do Conhecimento e da Inteligência*. Mathema. 23 maio. 2019a. Disponível em: <https://mathema.com.br/artigos/aprendizagem-significativa-o-lugar-do-conhecimento-e-da-inteligencia/>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- [115] SMOLE, et al. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. *Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Luís Carlos de Menezes (Coord.). p. 1-58, 2019b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.
- [116] SOARES, Márcio Gomes. *Cálculo em uma Variável Complexa*. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Coleção Matemática Universitária)
- [117] SOBRAL, João Bosco M. *Dos Primórdios da Matemática aos Sistemas Formais da Computação*. Série Pensamento Matemático @ Ciência da Computação. Florianópolis (SC): Edição do Autor, p. 119-122, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/157316/teste-livro-1vFINAL.pdf?sequence=1&isAllowed=>. Acesso em: 18 out. 2019.

- [118] SOUZA, Cássia R. de. *Os Livros Didáticos de Matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton*. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2019. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4402/1/PB_PROFMAT_M_Souza%2C%20C%3%A1ssia%20Ribeiro%20de_2019.pdf. Acesso em: 13 jan. 2020.
- [119] SOUZA, Maria Helena. *Teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018. (Coleção 21).
- [120] TADEU, Walter. *Lista de Lei dos Senos e Cossenos - Gabarito*. 2010. Disponível em: <professorwaltertadeu.mat.br>GABLeisenocossenobasico2010. Acesso em: 20 out. 2019.
- [121] TOGNATO II, José Osvaldo. *O Binômio de Newton*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, out. 2013. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/matematica_dissertacoes/dissertacao_jose_osvaldo_tognato.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.
- [122] WHEATON, Kristan J.; LEE, Jennifer; DESHMUKH, Hemangini. *Teaching Bayesian Statistics To Intelligence Analysts: Lessons Learned*. Journal of Strategic Security. v. 2, n.1, art. 3, p. 39-58, fev. 2009. Disponível em: <https://scholarcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1035&context=jss>. Acesso em: 29 set. 2019.