Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Sistemas Lineares: Uma proposta envolvendo álgebra e geometria

José Roberto Teixeira de Campos

Salvador - Bahia
Agosto de 2013

Sistemas Lineares: Uma proposta envolvendo álgebra e geometria

José Roberto Teixeira de Campos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas.

Salvador - Bahia

Agosto de 2013

Sistemas Lineares: Uma proposta envolvendo Álgebra e geometria

José Roberto Teixeira de Campos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 01 de agosto de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (Coorientador)
UFBA

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros
UEFS

À minha avó Valéria e ao meu pai José Alves.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos que tenho recebido e pela minha vida. Aos meus pais, Rosilândia e José Alves, e meus avós José Geraldo e Valéria por colaborarem com meu crescimento intelectual e moral e entenderem, por diversas vezes, a minha ausência. Não há palavras que expressam minha gratidão, admiração e amor que por minha avó Valéria e meu pai José Alves. Com muito esforço, vocês sempre me deram muito mais do que eu precisei e o melhor que possa existir: o amor incondicional. Vocês dois são os meus maiores exemplos de vida, e sem vocês nada disso valeria a pena. Agradeço também a todos os outros membros da minha família, graças a Deus eu tenho uma família linda e unida. Ao meu Orientador, Prof. Paulo Varandas, pela sua orientação, confiança, ensinamentos e acima de tudo pela sua amizade. Sou extremamente grato por sua paciência, atenção e contribuição na minha formação. Agradeço aos amigos do mestrado, em muito especial aos meus amigos David, Rogério, Andréia, André e José Luiz; foram muitas e muitas horas de aprendizado, tanto matemático quanto de vida. A todos os professores da Universidade Federal da Bahia que de alguma forma contribuíram para minha formação, através do valioso conhecimento que me passaram. Em especial, ao professor Joseph Nee Anyah Yartey, pessoa que admiro muito e sempre se mostrou presente, proporcionando-me apoio, força e conhecimento; agradeço também aos professores da banca. Agradeço também a todos que de alguma forma colaboraram para que esse momento de concretizasse. Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante os dois anos de curso e ao professor Elon Lages Lima por ter criado o PROFMAT.

"O homem é do tamanho dos seus sonhos"
Fernando Pessoa

Resumo

Tendo em vista que um conceito matemático possui várias formas de representação e a fim de contribuir para o ensino dos sistemas de equações e inequações lineares no ensino médio, nesta dissertação, abordaremos os sistemas lineares de modo a considerar seu significado geométrico. Tal abordagem é feita por meio de uma breve apresentação sobre geometria analítica no plano e no espaço, vetores no plano e no espaço, matrizes, determinantes, regra de Cramer e o método do escalonamento. Nos limitaremos a dimensão dois e três para permitir o uso da intuição geométrica de forma acessível aos educandos da educação básica.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares; Inequações Lineares; Geometria Analítica; Vetores; Combinação Linear; Método de Escalonamento; Regra de Cramer.

Abstract

Taking in account that a mathematical concept has several forms of representation and in order to contribute to the teaching of linear systems of equations and linear inequalities in basic education, our purpose in this dissertation is to discuss the geometric meaning of linear systems. In such an approach we make a presentation on the analytical geometry in the plane and three-dimensional space, vectors in the plane and in space, matrices, determinants, Cramer's rule and the scaling method. We limit ourselves to dimensions two and three so that the geometric intuition is accessible to students of basic education.

Keywords: Linear Equations Systems, Linear Inequalities, Analytic Geometry, Vectors, Linear Combination; Scaling Method ;Cramer's Rule.

Sumário

Introdução

A escolha dos Sistemas Lineares, como tema dessa dissertação, decorre das minhas experiências como estudante e, atualmente professor. Enquanto estudante sempre demonstrei interesse pelo assunto por suas inúmeras aplicações, principalmente no que diz respeito a resolução de problemas. Já, enquanto professor percebi imensa dificuldade por parte dos meus alunos do ensino básico em compreender os sistemas lineares e seus métodos de resolução e a necessidade de um significado geométrico para um melhor entendimento do tema.

Observamos que o assunto sistemas linear é abordado em nossas escolas, na maioria das vezes, de uma maneira desmotivada, visto que a ênfase recai exclusivamente a parte algébrica e ao domínio do cálculo, sem levar em consideração a interpretação geométrica, que é indispensável para uma perfeita compreensão do tema. Assim, nesta dissertação, apresentaremos uma nova abordagem alternativa para o ensino dos sistemas lineares que relacionará Geometria e Álgebra a fim de enriquecer e melhorar o processo ensino-aprendizagem desse assunto. Abordaremos também as inequações lineares, pouco trabalhadas na educação básica e inclusive no Ensino Superior.

Existem inclusive, vários trabalhos relacionados a esta temática. Como exemplo, cita-se Carneiro [2], que constrói através da geometria vetorial, uma proposta didática para o ensino de sistemas de equações lineares no Ensino Médio. O principal objetivo, segundo o autor, é fornecer através da geometria vetorial, uma ferramenta que capacite os alunos a analisar geometricamente sistemas lineares de ordem 3 de modo que o estudo de tal tópico tenha um "maior valor formativo". Para isso, Carneiro salienta a necessidade de incluir no currículo do Ensino Médio, uma introdução à geometria vetorial.

Ana Lucia Infantozzi Jordão e Barbara Lutaif Bianchini [4] desenvolvem uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica de sistemas de equações lineares quadrados com o auxílio do **software** denominado **Winplot**. A conclusão da pesquisadora aponta para uma relevante importância no uso do referido software, de modo a contribuir para a visualização e compreensão da resolução de sistemas lineares em 3 dimensões.

Por outro lado, um mesmo conceito pode assumir diversos registos de representação e a partir de estudos de Raymond Duval [1], a questão do papel de tais registros de representação para a aprendizagem matemática tem sido foco de várias pesquisas em Educação Matemática

[1]Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação, autor de vários trabalhos envolvendo a psicologia cognitiva e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático.

como afirma Claúdia Regina Flores [13].

Assim, a fim de contribuir com as pesquisas relativas à interpretação geométrica dos sistemas lineares e com melhora na qualidade do ensino da Matemática na educação básica, o presente trabalho, tem por objetivos:

- Fornecer uma abordagem alternativa que enfatize o aspecto geométrico dos sistemas de equações e inequações lineares complementando algumas apresentadas em livros didáticos de Matemática e de Álgebra Linear.
- Apresentar formas alternativas para o ensino de Sistemas Lineares que proporcionem maior motivação e entusiasmo aos educandos;
- Apresentar e discutir o uso dos recursos computacionais Winplot e Geogebra, buscando a melhora no processo de ensino-aprendizagem de sistemas de equações e inequações lineares no ensino básico;
- Contribuir com a formação do estudante e do professor de matemática no sentido de incorporar e unificar alguns conceitos da Álgebra Linear.
- Trazer parte da Geometria Analítica no espaço tridimensional para o currículo do ensino médio.

Este trabalho se direciona aos alunos dos 3 ° anos do ensino médio, estudantes do curso de Matemática e também professores de matemática do ensino fundamental ou médio.

Evidentemente, surgirão algumas dificuldades para a execução dessa proposta, por exemplo, a visualização geométrica no espaço, mas assim como em geometria espacial, o uso de modelos concretos e a utilização de recursos computacionais como o software Winplot e o Geogebra ajudarão a contornar tal problema.

Um possível desdobramento dessa proposta é a sua inserção no currículo do ensino básico junto com a Geometria Analítica, a Geometria Espacial e a Geometria Plana, algo que poderia ser feito no 3° ano do ensino médio.

No capítulo 1 da dissertação, serão apresentados conceitos básicos da geometria analítica no plano que serão utilizados ao longo da dissertação: coordenadas e distância no plano cartesiano, noções de vetores no plano e operações com vetores, produto interno e a equação cartesiana de reta.

No capítulo 2, apresentaremos de maneira breve alguns conceitos e resultados da Geometria Analítica no Espaço que são necessários à compreensão da proposta: coordenadas no espaço, noções básicas de vetores no espaço, a ideia de vetor normal, produto interno, produto vetorial, produto misto e equação cartesiana do plano no espaço.

Os capítulos 3 e 4 são o foco principal do trabalho, tais capítulos são destinados ao estudo dos sistemas de equações lineares e de inequações lineares sob a perspectiva da interpretação geométrica, onde tal interpretação será defendida como requisito importante para uma perfeita compreensão de tais temas. Por fim entendemos que para se adequar ao currículo da educação básica e para permitir o uso da intuição geométrica, a discussão sobre sistemas lineares é limitada a dimensão três e as inequações lineares a dimensão dois, ou seja, ao espaço tridimensional e ao plano cartesiano, respectivamente.

O trabalho é fechado com o capítulo 5, onde listaremos alguns problemas de aplicação prática que podem ser modelados e resvolvidos por meio de equações ou inequações lineares.

Capítulo 1

Matrizes e Determinantes

1.1 Conceitos básicos de Matrizes

Definição 1.1.1. Sejam m e n números naturais não nulos. Uma matriz do tipo $m \times n$ é uma tabela com $m \cdot n$ números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

Representamos usualmente uma matriz colocando suas entradas em entre parênteses ou entre colchetes.
Veja alguns exemplos de matrizes:
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -3 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.
$B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 0,5 \\ 1 & \pi & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3.
Genericamente, representamos uma matriz A do tipo $m \times n$,isto é, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e a_{ij} é um elemento qualquer de A, por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.2. Diz-se que a matriz A é *quadrada* quando tem o mesmo número de colunas e de linhas. Neste caso, dizemos simplesmente que A tem ordem n.

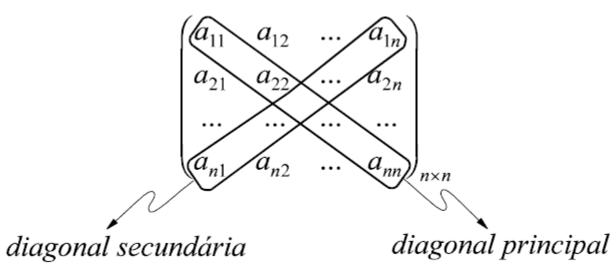

Figura 1.1: Matriz quadrada.

Definição 1.1.3. A *soma* de duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$ e o *produto de uma matriz por uma constante* são definidos elemento a elemento por: se $A = [a_{ij}]$ e $\mathrm{B} = [\mathrm{b}_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, então $A + B = [a_{ij} + b_{ij}\,]$ e $\mathrm{k} \cdot \mathrm{A} = [\mathrm{k} \cdot \mathrm{a}_{ij}]$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad e \quad k\cdot A=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \dots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Figura 1.2: Soma de duas matrizes e o produto de uma matriz por uma constante real.

Definição 1.1.4. Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\,\times\,n}$e $B = [b_{jk}]_{\mathrm{n}\,\times\,\mathrm{p}}$, chama-se produto de A por B, e se indica $A \cdot B$, a matriz $C = [c_{ij}]_{m\,\times\,\mathrm{p}}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $k \in \{1, 2, ..., p\}$.

Observação 1.1.1. A existência da matriz produto AB está condicionada a exigência de que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B. O exemplo abaixo mostrará como é obtida a matriz produto, multiplicando linhas por colunas.

Exemplo 1.1.1. *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$*, vamos determinar, se existirem, as matrizes* AB e BA.

Solução:

Como o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, então existe a matriz C do tipo 2×2 que é dada por:

$$\begin{aligned} C = A \cdot B \quad &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot1+3\cdot1+1\cdot5 & 2\cdot4+3\cdot2+1\cdot3 \\ 1\cdot1+0\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot4+0\cdot2+2\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vejamos agora se existe a matriz BA. Como o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, então existe a matriz D do tipo 3×3 dada por:

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot1+4\cdot2 \\ 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2 \\ 5\cdot2+3\cdot1 & 5\cdot3+3\cdot0 & 5\cdot1+3\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \\ 13 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

Observação 1.1.2. Veja que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, AB não é necessariamente igual a BA.

Definição 1.1.5. A *matriz identidade* $n \times n$ é a matriz $I_n = [m_{ij}]$ cujos elementos são $m_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $m_{ij} = 1$, se $i = j$. Assim :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se também que $A \cdot 0 = 0$, $A \cdot I_n = A$ e $I_n \cdot A = A$ desde que estejam definidos esses produtos. O produto de matrizes é associativo: $(AB)C = A(BC)$ e distributivo: $(A+B)C = AC + BC$ e $A(B+C) = AB + AC$.

Definição 1.1.6. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita inversível se existe uma matriz B(quadrada e de mesma ordem) , tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1}.

Exemplo 1.1.2. *A inversa de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *é* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, *pois :*

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

1.2 Determinantes

Seja A uma matriz quadrada de ordem $1 \leq n \leq 3$. Definimos o *determinante da matriz* A(e indicamos por $\det A$) como sendo o número que obtemos operando os elementos de A da seguinte forma:

1. Se A é de ordem 1, então $\det A$ é o único elemento de A.

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}.$$

Exemplo 1.2.1.

$$A = [-5] \Rightarrow \det A = -5.$$

Também é comum indicar o $\det A$ pelo símbolo $|a_{11}|$.

2. Se A é de ordem 2, então $\det A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Exemplo 1.2.2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) = 5.$

3. Se A é de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

definimos:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Vejamos um procedimento prático para obter o valor de $\det A$ nesse caso:

(a) copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas;

(b) multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Segundo a direção da diagonal principal, multiplicamos separadamente, os elementos das outras duas "diagonais";

(c) multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Segundo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas diagonais, também trocando o sinal dos produtos;

(d) somamos todos os produtos obtidos nos itens b e c.

Esse procedimento é conhecido como *Regra de Sarrus.*

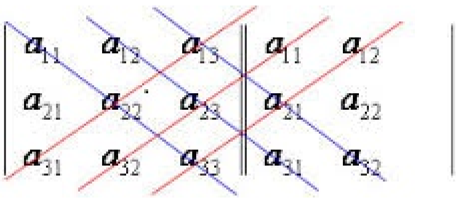

Figura 1.3: Regra de Sarrus.

Exemplo 1.2.3. *Calcular do determinante da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Aplicando a Regra de Sarrus, segue que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{matrix}$$

$\det A = -4 - 72 + 10 + 80 - 6 + 6 = 14.$

Capítulo 2

Geometria Analítica

2.1 Conceitos básicos da Geometria Analítica no plano

2.1.1 Coordenadas no plano e distância entre dois pontos

Um *sistema de eixos ortogonais* num plano π é um par de eixos OX e OY, tomados em π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O. Diz-se que o eixo OX é *horizontal* e eixo OY é *vertical.*

Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com o $\mathbb{R}^2$, que é o conjunto dos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais. Dado o ponto P do plano, baixamos por ele paralelas aos eixos OY e OX. Essas paralelas cortam os eixos em pontos cujas coordenadas são x e y, respectivamente. Ao ponto P do plano π faz-se então corresponder o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde o ponto $P \in \pi$, interseção da paralela a OY traçada pelo ponto de coordenada x com a paralela a OX traçada a partir do ponto de OY cuja coordenada é y. Os números x e y são denominados de *coordenadas cartesianas* do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado: x é a *abscissa* e y a *ordenada* de P.

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões, denominadas de *quadrantes.* Tem-se o primeiro quadrante, formado pelos pontos que têm ambas as coordenadas positivas. No segundo quadrante, a abscissa é negativa e a ordenada é positiva. No terceiro, abscissa e ordenada são ambas negativas. No quarto quadrante, os pontos têm abscissa positiva e ordenada negativa.

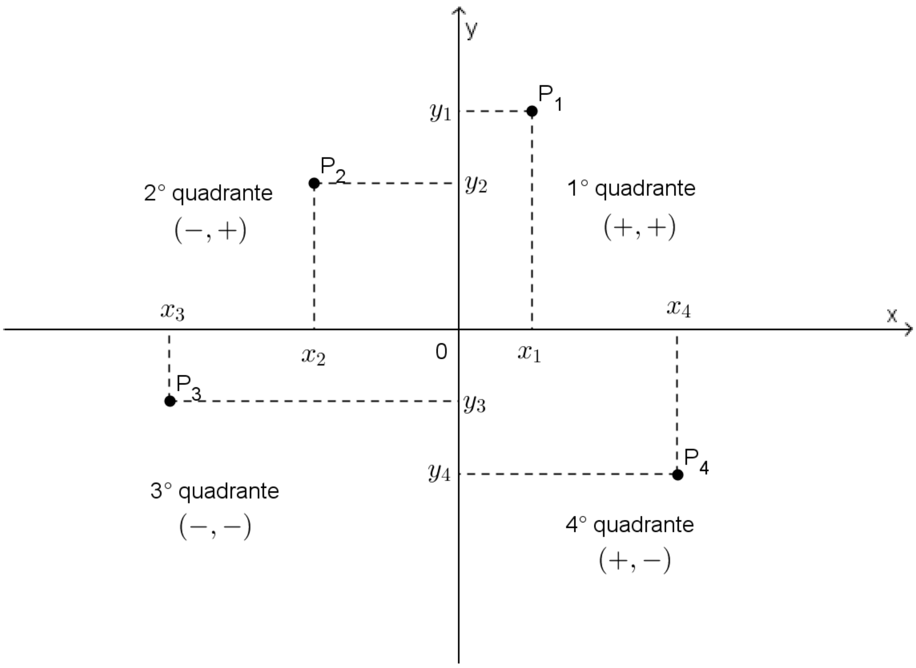

Figura 2.1: O plano cartesiano e os quadrantes.

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, vamos obter a expressão que calcula a distância $d(A, B)$ em termos das coordenadas de A e B. Para isso, vamos introduzir um novo ponto $C = (x_2, y_1)$.

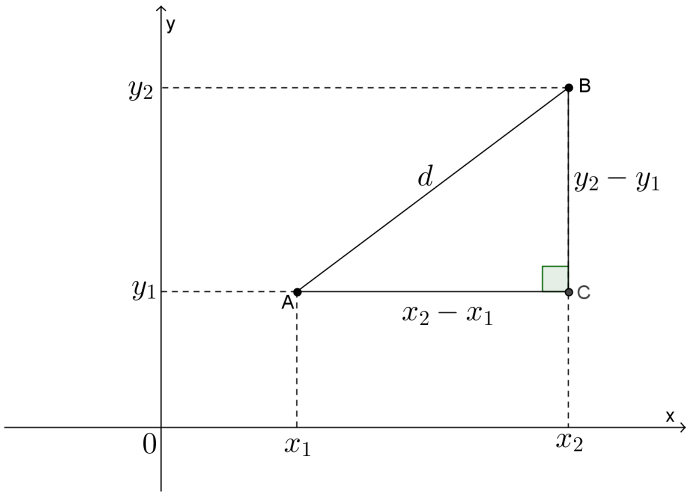

Figura 2.2: Distância entre dois pontos no plano.

Como A e C, têm a mesma ordenada, o segmento AC é paralelo a OX. Analogamente, o segmento BC é paralelo a OY, pois B e C têm a mesma abscissa. Portanto, o AB é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Os catetos desse triângulo medem $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Logo, pelo teorema de Pitágoras resulta que:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2.1.2 Vetores no plano

Designamos por AB o segmento de reta orientado percorrido de A para B. O mesmo segmento, quando orientado no sentido oposto, será designado por BA. No segmento AB, o ponto A é chamado de *origem* e o ponto B de *extremidade*. Diz-se que os segmentos orientados AB e CD são *equipolentes, e* escreve-se $AB \equiv CD$, quando eles:

1) Têm o mesmo comprimento;

2) São paralelos (também chamados de colineares);

3) Têm o mesmo sentido.

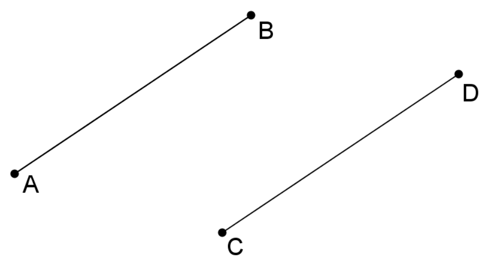

Figura 2.3: Segmentos equipolentes.

Proposição 2.1.1. A fim de que os segmentos orientados AB e CD sejam equipolentes é necessário e suficiente que o ponto médio do segmento AD coincida com o ponto médio do segmento BC.

Demonstração. Se $AB \parallel CD$, a equivalência é imediata, não tem o que provar, pois $ABCD$ seria um paralelogramo e como sabemos suas diagonais cortam-se ao meio.

Se AB e CD são colineares, considere r a reta que os contém, munida de uma origem O e uma orientação escolhida de modo que B esteja à direita de A (Figura **2.4**). Sejam a, b, c e d as coordenadas de A, B, C e D na reta r em relação a uma unidade de medida escolhida.

$$m = \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$$

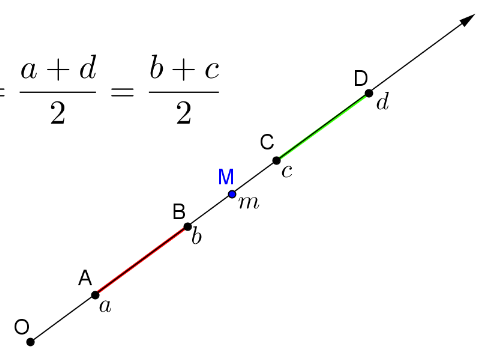

Figura 2.4: $AB \equiv CD$.

($\Longrightarrow$) Se $AB \equiv CD$, temos $a < b$ e $c < d$, pois AB e CD têm o mesmo sentido e , $b-a = d-c$, pois $|AB| = |CD|$. Logo,

$$b - a = d - c \Longleftrightarrow \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2},$$

ou seja, o ponto médio de AD é igual ao ponto médio de BC.
($\Longleftarrow$) Se o ponto médio de $AD = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2} =$ ponto médio de BC, temos:

$$a + d = b + c \Leftrightarrow b - a = d - c.$$

Como $b-a$ e $d-c$ têm sinais e módulos iguais, então os segmentos colineares AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Portanto, $AB \equiv CD$.

$\square$

A relação de equipolência é reflexiva (isto é, $AB \equiv AB$), simétrica (se $AB \equiv CD$ então $CD \equiv AB$) e transitiva (se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$ então $AB \equiv EF$).

Quando dois segmentos AB e CD são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo *vetor v.* Escreve-se $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Assim, um vetor v no plano é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado dado. Se v é designado por $\overrightarrow{AB}$. Qualquer segmento orientado equipolente a AB é chamado de um *representante* do vetor $\overrightarrow{AB}$. Os vetores também são denotados usando letras minúsculas com uma flecha, como $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ etc.

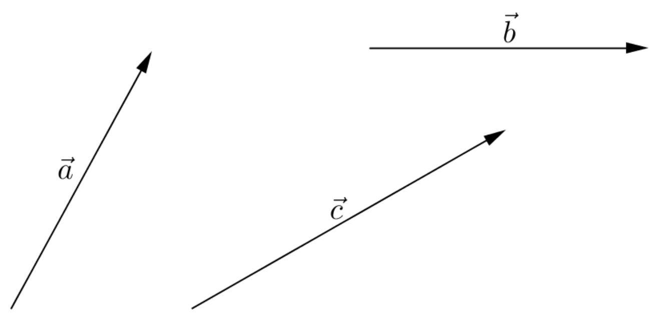

Figura 2.5: Vetores no plano.

Por extensão, admitiremos que um ponto qualquer do plano representa o *vetor nulo,* ou *vetor zero.*

Em relação a um sistema de eixos ortogonais de origem O, fixado no plano, sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. As coordenadas desse ponto são $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Pois, os segmentos AB e OP têm a mesma inclinação $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e que os segmentos OA e PB têm a mesma inclinação $\dfrac{y_1}{x_1}$. Daí, AB e OP, bem como OA e PB são lados opostos de um paralelogramo. Portanto, AB e OP são equipolentes.

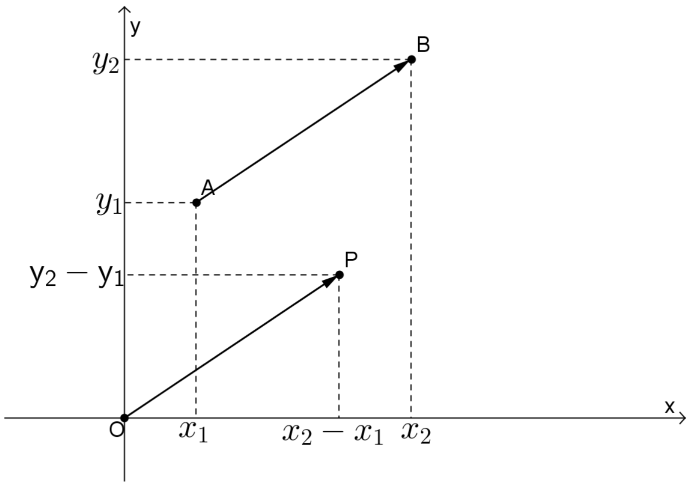

Figura 2.6: O segmento de origem O é equipolente a AB.

Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do plano e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ *são as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{v}$, e escrevemos:

$$\overrightarrow{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Vamos definir duas operações no conjunto de vetores do plano, uma operação de *adição* e uma operação de *multiplicação de vetores por números reais.*

i) Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$, então a *adição de* $\overrightarrow{u}$ *com* $\overrightarrow{v}$ é dada por:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

ii) Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e α é um número real, então a *multiplicação do vetor* $\overrightarrow{u}$ *pelo número real* α é dada por:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Pode-se verificar que, geometricamente a soma de dois vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$**,** está em uma das diagonais do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quando eles estão representados com a mesma origem.

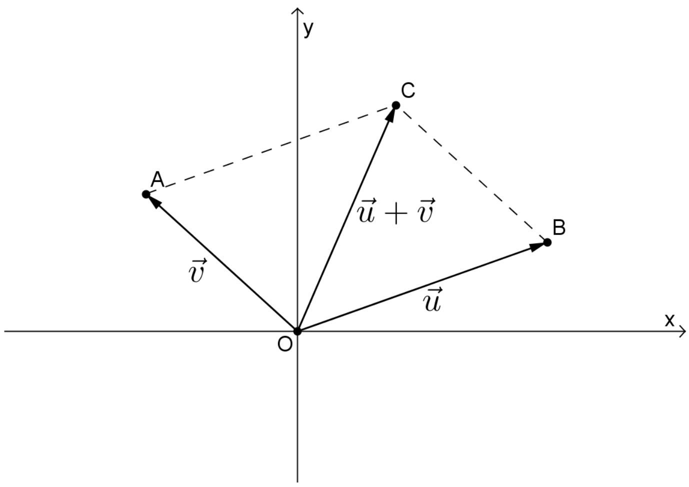

Figura 2.7: Vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$.

Já a multiplicação por um número, $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$, é um vetor que tem a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{u}$, se $\alpha > 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$; mesma direção e sentido contrário ao de $\overrightarrow{u}$, se $\alpha < 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e é o vetor nulo caso contrário.

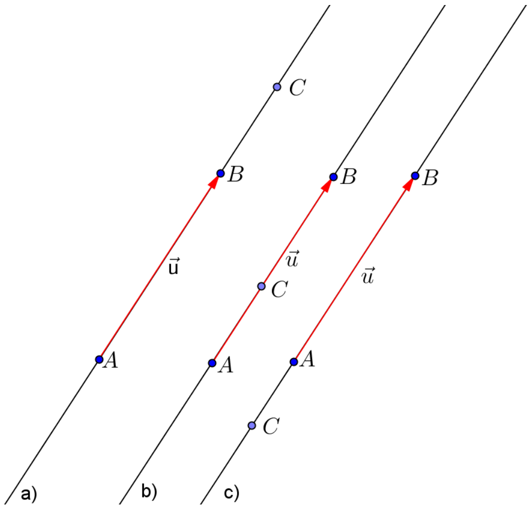

Figura 2.8: AC representando $\alpha\vec{u}$ para: a) $\alpha > 1$; b) $0 < \alpha < 1$; c) $\alpha < 0$

Dizemos que dois vetores não nulos são *paralelos* ou *colineares* se eles têm a mesma direção. Dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é *combinação linear* dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ quando existirem números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{v_n}.$$

O vetor $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ diz-se *múltiplo* do vetor $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ quando existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$, isto é, $x_1 = k \cdot x_2$ e $y_1 = k \cdot y_2$. Tomando $k = 0$, vemos que o vetor zero é múltiplo de qualquer outro. Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$ então $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, pois de $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$ resulta $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{v}$. Assim, dois vetores são paralelos ou colineares se, e somente se, eles são múltiplos.

Exemplo 2.1.1. *Os vetores* $\overrightarrow{u} = (2, 3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (1, \frac{3}{2})$ *são paralelos, pois* $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v}$.

2.1.3 Produto interno no plano e a equação cartesiana da reta

Seja $P = (x, y)$ um ponto do plano e O a origem do plano cartesiano, então o comprimento do segmento de reta OP é, como sabemos, igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Diremos assim que o *comprimento ou norma do vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ é esse comprimento e escrevemos:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, dizemos que $\overrightarrow{v}$ é um *vetor unitário.*

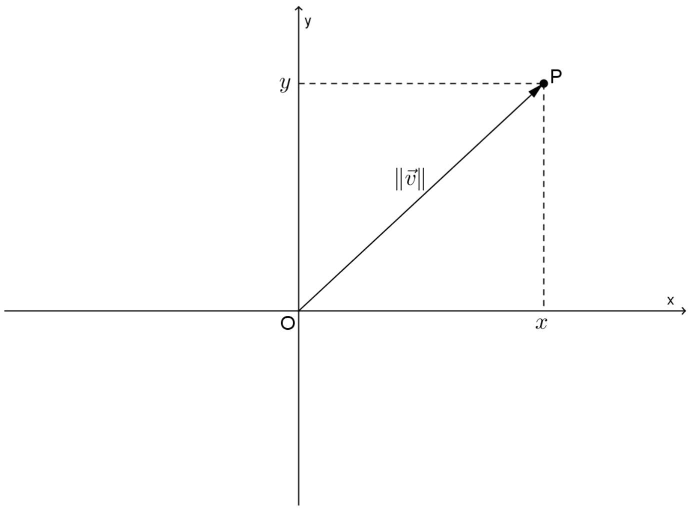

Figura 2.9: Norma do vetor $\vec{v}$.

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$, chama-se produto interno de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ ao número:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Segue imediatamente desta definição que:

1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$
2. $\langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \cdot \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} \rangle$
3. $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$
4. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \| \overrightarrow{v} \|^2$
5. $\left\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$
6. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} = 0$

para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.2. Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ ortogonais, então $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

Demonstração. Representando $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ por segmentos orientados de mesma origem O conforme a figura **2.10** e como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais,

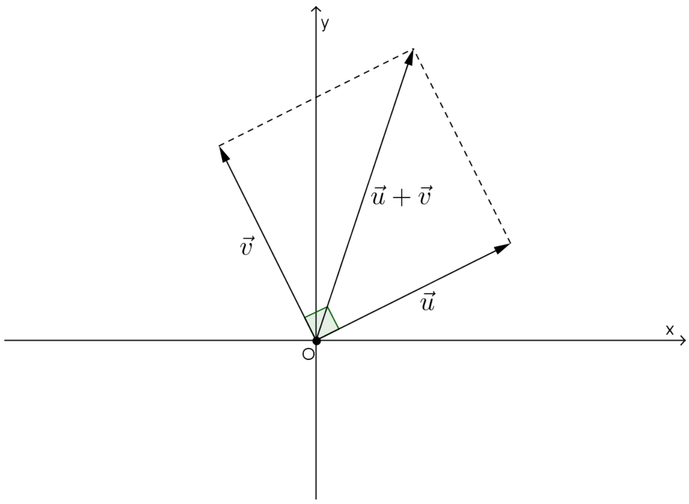

Figura 2.10: Vetores ortogonais.

então pelo teorema de Pitágoras segue que:

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Mas, $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + 2 \cdot \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$. Daí,

$$2 \cdot \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

$\square$

Mostraremos ao longo desse trabalho que se θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{\mathrm{v}}$, tem-se que:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta.$$

Deste último resultado decorre facilmente a recíproca da proposição acima, isto é, se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{\mathrm{v}}$ são ortogonais.

Uma aplicação interessante dessa interpretação geométrica do produto interno, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\theta$, é a dedução da equação cartesiana da reta.

Dada uma reta r no plano, seja $\overrightarrow{n} = (a, b)$ um *vetor normal* a r. (Isto significa que $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ e que, escrevendo $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB}$ tem-se que AB é perpendicular a r).

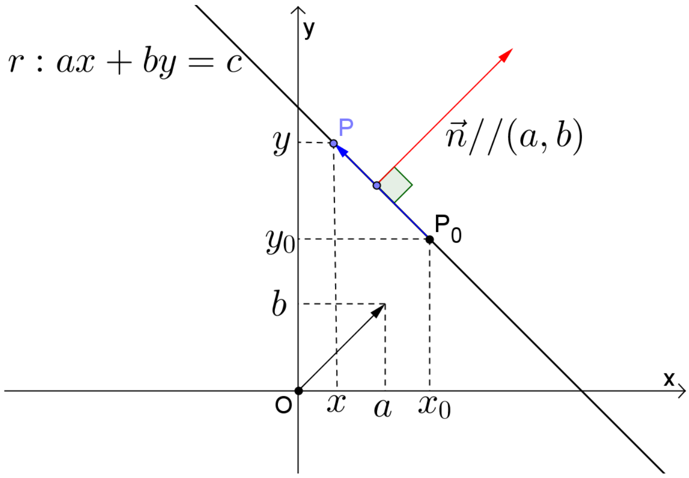

Figura 2.11: Vetor normal à reta r de equação $ax + by = c$.

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto fixado em r. Um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ é ortogonal a $\vec{n} = (a, b)$, isto é, $\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$, ou seja, a equação cartesiana da reta r é dada, portanto, por: $ax + by = c$, onde $c = ax_0 + by_0$.

Exemplo 2.1.2. *A equação $2x + y = 3$ representa no plano a reta r indicada na figura **2.12**, onde $a = 2$, $b = 1$ e $P = (2, 1)$ determina um vetor normal a r, obtido ligando a origem O ao ponto P.*

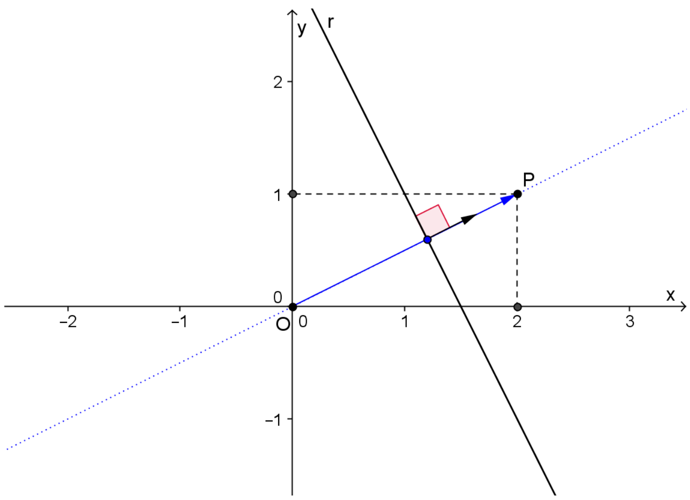

Figura 2.12: Vetor normal a reta r.

Exemplo 2.1.3. *Escreva a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $P = (1, 3)$ e é paralela à reta $r : 2x - 3y = 1$.*

Solução: Seja s tal reta. A equação de s é da forma $ax + by = c$, onde (a, b) é um vetor normal a reta. Como a reta s é paralela a $r : 2x - 3y = 1$, então $(2, -3)$ também é um vetor normal a s, isto é, $a = 2$ e $b = -3$. Assim, $s : 2x - 3y = c$. Por outro lado, $P = (1, 3) \in s$. Daí,

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = c \Leftrightarrow c = -7$. Portanto, a equação procurada é:

$$s : 2x - 3y = -7.$$

2.2 Conceitos básicos da Geometria Analítica no espaço

2.2.1 Coordenandas cartesianas no espaço e distância entre dois pontos

Vamos definir um sistema de coordenadas retangulares no espaço. Seja E o espaço da Geometria Euclidiana tridimensional. Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ em E consiste de três eixos OX, OY e OZ com a mesma origem O tais que dois quaisquer deles são perpendiculares.

Fixado um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, as notações $\prod_{xy}, \prod_{xz}$ e $\prod_{yz}$ indicam respectivamente os planos que contém os eixos OX e OY, OX e OZ, OY e OZ,onde cada plano desses é chamado de *plano coordenado*.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ permite associar a cada ponto P do espaço euclidiano E um terno ordenado (x, y, z) chamado de *coordenadas de ponto* P como segue:

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo OZ determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, como o eixo OY determina a coordenada y.
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo OX determina a coordenada x.

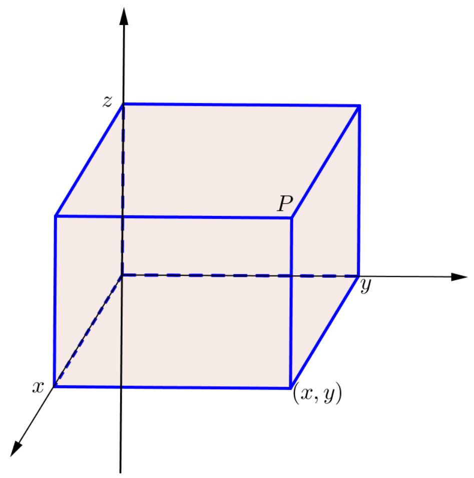

Figura 2.13: Coordenadas no Espaço.

Outra maneira de determinarmos as coordenadas de P é como segue:

- Trace uma reta paralela ao eixo OZ, passando por P.
- A interseção da reta paralela ao eixo OZ, passando por P, com o plano $\prod_{xy}$ é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas XOY são as duas primeiras coordenadas de P.
- A terceira coordenada é igual à distância de P a P', se P estiver acima do plano $\prod_{xy}$ e menos a distância de P a P' se P estiver abaixo do plano $\prod_{xy}$.

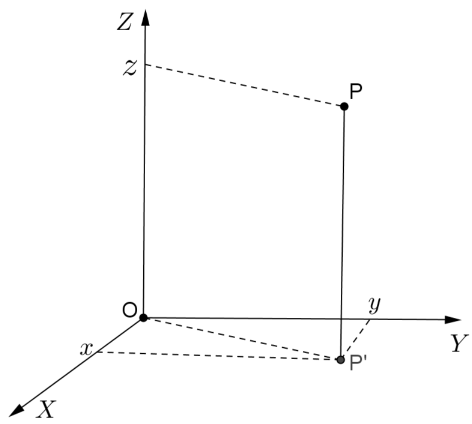

Figura 2.14: Ponto P no $\mathbb{R}^3$.

Seja $OXYZ$ um sistema de coordenadas retangulares no espaço E. Vamos obter uma fórmula que exprima a distância entre dois pontos de E em termos das coordenadas desses pontos no sistema $OXYZ$. Considere dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ do espaço. Sejam $Q = (x_1, y_2, z_1)$ e R $= (x_2, y_2, z_1)$. Como os segmentos de reta P_1Q,QR e RP_2 são respectivamente paralelos aos eixos OX, OY e OZ, segue que:

$$d(P_1, Q) = |y_1 - y_2|\,, d(Q, R) = |x_1 - x_2| \text{ e } d(R, P_2) = |z_1 - z_2|\,.$$

Além disso, os triângulos P_1QR e P_1RP_2 são retângulos.

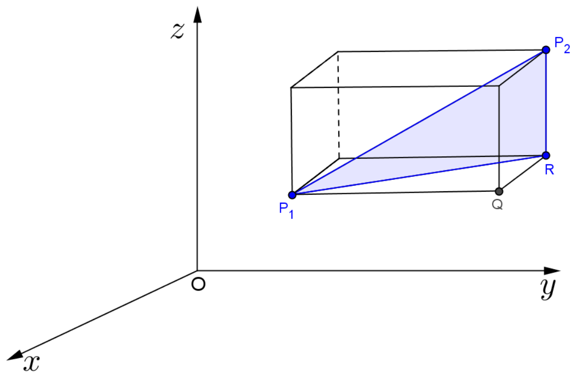

Figura 2.15: Distância entre dois pontos no espaço.

Logo, pelo teorema de Pitágoras, vem que:

$$d(P_1,P_2)^2 = d(P_1,R)^2 + d(R,P_2)^2$$

$$d(P_1,P_2)^2 = d(P_1,Q)^2 + d(Q,R)^2 + d(R,P_2)^2$$

$$d(P_1,P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Daí resulta a fórmula

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

para determinar a distância entre dois pontos do espaço.

2.2.2 Vetores no espaço

Um vetor $\overrightarrow{v}$ no espaço é identificado por $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$, onde x, y e z representam as coordenadas do ponto final P representante de $\overrightarrow{v}$ que tem ponto inicial na origem, também chamadas de *componentes de um vetor* $\overrightarrow{v}$. O *vetor nulo* é aquele em que todas as componentes são iguais a zero, isto é, $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$.

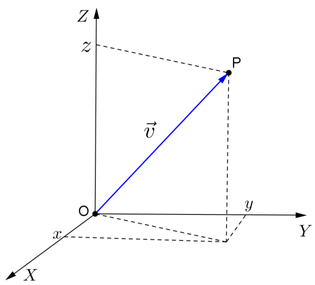

Figura 2.16: Coordenadas de um vetor no espaço.

Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $B = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos do espaço. Os números $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ e $z_2 - z_1$ são *as coordenadas* do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e escrevemos:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Três vetores do $\mathbb{R}^3$ tem um destaque especial, a saber:

$$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ e } \vec{k} = (0, 0, 1).$$

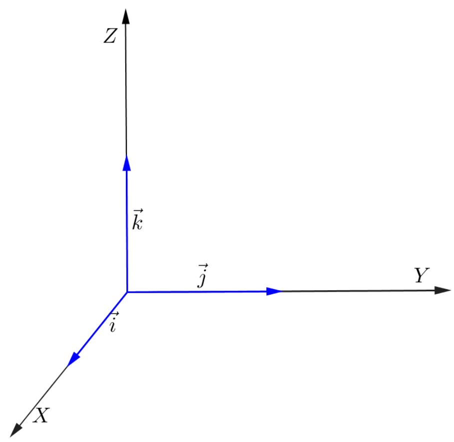

Figura 2.17: Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são mutuamente ortogonais. O conjunto $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ é dito a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Para todo $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vamos agora definir duas operações no conjunto de vetores do plano, uma operação de *adição* e uma operação de *multiplicação de vetores por números reais.* A operação de *adição de vetores* que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ associa um novo vetor, designado por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e chamado de *soma dos vetores* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, se define como segue:

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, seja C o único ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. *O vetor soma de* $\overrightarrow{u}$ *com* $\overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

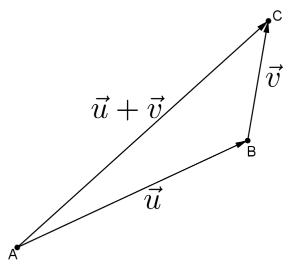

Figura 2.18: Adição de vetores.

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores do espaço expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo $OXYZ$, então o vetor soma é dado por:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um escalar, então a multiplicação de $\overrightarrow{u}$ por α é dada por:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Exemplo 2.2.1. *Dados os vetores* $\overrightarrow{v} = (1, 2, -3)$ e $\overrightarrow{u} = (4, 3, -1)$. *Determine:*

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Solução:

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (4, 3, -1) + (1, 2, -3) = (5, 5, -4)$.

b) $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

Solução:

$2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} = 2 \cdot (4, 3, -1) + 3 \cdot (1, 2, -3) = (8, 6, -2) + (3, 6, -9) = (11, 12, -11)$

Pode-se verificar que, geometricamente, a soma de dois vetores, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ está na diagonal do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quando eles estão representados com a mesma origem. A multiplicação por escalar $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$, é um vetor que tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{u}$, se $\alpha > 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$; mesma direção e sentido contrário ao de $\overrightarrow{u}$, se $\alpha < 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e é o vetor nulo caso contrário. Dizemos que dois vetores não nulos são *paralelos* ou *colineares* se eles têm a mesma direção.

Assim, segue:

Proposição 2.2.1. Dois vetores não nulos, $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, são paralelos se, e somente se, um é *múltiplo escalar* do outro (isto é, existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = \alpha \cdot \overrightarrow{v}$).

Demonstração. Decorrência imediata da definição de multiplicação de um vetor por escalar. □

Exemplo 2.2.2. *O vetor nulo é múltiplo de todos os outros (tome* $\alpha = 0$*) e nenhum vetor diferente de zero é múltiplo do vetor nulo. O vetor* $\overrightarrow{v} = (4, 6, -8)$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{u} = (6, 8, -12)$*, pois* $\overrightarrow{u} = 1,5 \cdot \overrightarrow{v}$.

Definição 2.2.1. A subtração do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo vetor $\overrightarrow{u}$ é a soma de $\overrightarrow{v}$ com o inverso aditivo de $\overrightarrow{u}$. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, então:

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

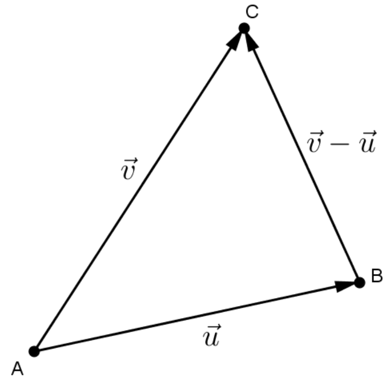

Figura 2.19: Vetor diferença $\vec{v}-\vec{u}$.

Definição 2.2.2. Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ e os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$, o vetor $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n \cdot \overrightarrow{v}_n$ *chama-se combinação linear* de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$. Diz-se também que $\overrightarrow{v}$ é *gerado* pelos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$.

Exemplo 2.2.3. *O vetor* $\overrightarrow{v} = (-1, 8, -2)$ *é combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{\mathrm{v}_2} = (-1, 2, 0)$, *pois existem os números* 2 *e* 3 *tais que* $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2}$.

Outro conceito fundamental em vetores é o conceito de *dependência linear* e *independência linear* .

Definição 2.2.3. Seguem as definições:

i) Um conjunto $(\overrightarrow{v})$ de um único vetor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente* (*LD)* se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, o conjunto $(\overrightarrow{v})$ é *linearmente independente (LI).*

ii) Um conjunto $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de dois vetores do $\mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente* (*LD)* se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos. Caso contrário, o conjunto $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ é *linearmente independente (LI).*

iii) Um conjunto $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de três vetores do $\mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente (LD)* se $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem coplanares. Caso contrário, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é *linearmente independente (LI*).

iv) Qualquer conjunto com quatro ou mais vetores do $\mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente* (*LD)* por definição.

Observações:

1. Conforme ficou explicitado acima, dependência e independência linear são qualidades inerentes ao conjunto de vetores e não aos próprios vetores. Pois podemos ter, por exemplo, dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos e paralelos que individualmente são LI, mas o par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ é LD.

2. Dizer que um conjunto de dois ou mais vetores do $\mathbb{R}^3$ é LI significa também que nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. Quando for possível escrever pelo menos um dos vetores como combinação linear dos demais, eles serão linearmente dependentes.

3. Uma propriedade do determinante não tratada aqui diz que, se uma matriz quadrada tem uma fila que é combinação linear das outras filas paralelas a ela, então o determinante igual a zero. Dessa forma é possível verificar se um conjunto de vetores $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é LD ou LI a partir do valor do determinante da matriz formada por esses vetores. Se o determinante for nulo, então os vetores serão considerados LD. Caso contrário, serão LI.

4. Se um conjunto de vetores $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n})$ é LD [LI] então qualquer permutação desse conjunto também é LD [respectivamente, LI].

Exemplo 2.2.4. *Analisar os itens abaixo:*

a) *Os vetores* $\overrightarrow{v} = (2, -2, 4)$ e $\overrightarrow{\mathrm{u}} = (4, -4, 8)$ *são LD, pois* $\overrightarrow{u} = 2 \cdot \overrightarrow{v}$.

b) *Vamos verificar se os vetores* $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4), \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{\mathrm{w}}$=$(-1, 0, 0)$ *são LI ou LD.*

Calculando o determinante da matriz formada pelos vetores dados, temos:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$ *Como* $1 \neq 0$ *então o conjunto formado por esses três vetores é LI.*

2.2.3 Produto interno no espaço e a equação geral do plano

A *norma* de um vetor $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1, z_1)$ é denotada por $\|\overrightarrow{v}\|$. Segue do Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo OPP' da figura abaixo que a *norma* de um vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser calculada por

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

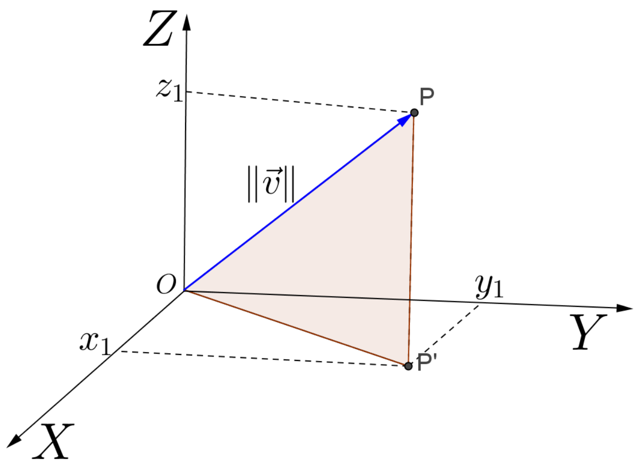

Figura 2.20: Norma de um vetor no espaço.

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um número real, isto é, um escalar. Por isso ele é chamado de *produto escalar.* Este produto tem inúmeras aplicações, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor descolamento, quando a força aplicada é constante.

O *produto escalar* ou *interno* de dois vetores $\overrightarrow{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{w} = (x_2, y_2, z_2)$ é definido por

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Exemplo 2.2.5. *Se* $\overrightarrow{v} = (2, -3, 5)$ *e* $\overrightarrow{w} = (1, 2, -4)$*, então*

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = 2 - 6 - 20 = -24.$$

Proposição 2.2.2. Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{\mathrm{w}}$ vetores e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar. Então são válidas as seguintes propriedades:

i) $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

ii) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$

iii) $\langle \alpha \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha \cdot \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \alpha \overrightarrow{v} \rangle$

iv) $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{v}\|^2$, para todo $\overrightarrow{v}$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

A demonstração dessas propriedades decorre naturalmente da definição de produto interno.

O ângulo entre dois vetores não nulos, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, é definido pelo ângulo θ determinado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem.

Quando o ângulo θ entre dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é reto ($\theta = 90^\circ$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são *ortogonais* ou *perpendiculares entre si.*

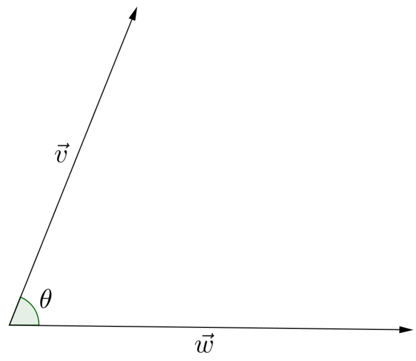

Figura 2.21: O ângulo entre dois vetores.

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ dois vetores não nulos e θ o ângulo entre eles. Pela lei dos cossenos,

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\theta.$$

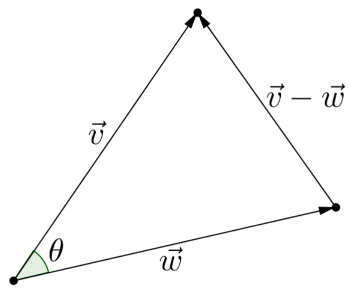

Figura 2.22: Norma do vetor diferença pela lei dos cossenos.

Por outro lado,

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = \langle \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

De onde segue que o produto escalar ou interno entre $\overrightarrow{v}$e $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito por

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cos\theta.$$

Portanto, dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não nulos, são ortogonais se, e somente se, $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$.

Exemplo 2.2.6. *Os vetores* $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$ *e* $\overrightarrow{w} = (2, 7, 4)$ *são ortogonais, pois:*

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 0.$$

Uma aplicação interessante dessa interpretação geométrica do produto interno, $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\theta$, é a dedução da equação geral do plano.

Proposição 2.2.3. A equação geral de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é dada por

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Esta equação é chamada de equação geral do plano π e o vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ é chamado de *vetor normal* do plano.

Demonstração. $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, ou seja,

$$\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{P_0P} \right\rangle = 0.$$

Mas, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Daí segue:

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) &= 0 \end{aligned}$$

Pondo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, vem que a equação do plano π é dada por:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

□

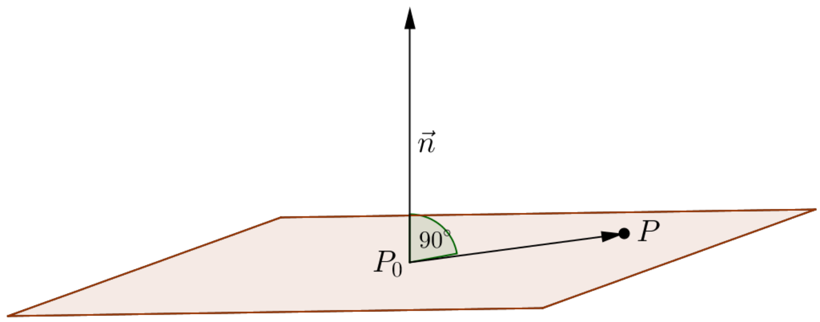

Figura 2.23: Vetor normal a um plano.

Exemplo 2.2.7. *A equação* $2x+3y-2z-4 = 0$ *representa no espaço um plano, onde* $(2, 3, -2)$ *é seu vetor normal, pois* $a = 2$, $b = 3$ *e* $c = -2$.

2.2.4 Produto vetorial, produto misto e aplicações

O produto interno de dois vetores, como vimos, é um número real e foi definido tanto no plano quanto no espaço.

Já o *produto vetorial,* que definiremos a seguir só faz sentido no $\mathbb{R}^3$ e dá como resultado outro vetor com algumas propriedades que veremos a seguir.

Considere $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e sejam os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$. O produto vetorial de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ é o vetor:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

Um método prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o determinante simbólico da matriz 3×3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, os elementos da segunda linha são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e os elementos da terceira linha são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Decorrem diretamente desta definição, as seguintes propriedades do produto vetorial: Para quaisquer vetores no espaço $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

1. $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$, isto é, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$.

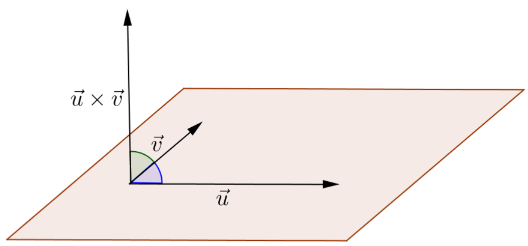

Figura 2.24: $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro. Ou seja, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos se, e somente se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

3. $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \, sen\theta$, onde $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

4. Se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são LI.

5. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$

6. $(\lambda \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

7. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

8. $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, onde

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

é a matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, na ordem em que são apresentados.

9. $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LD. Consequentemente, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \neq 0$, se e somente se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LI.

Vamos agora interpretar geometricamente a *norma do produto vetorial.*

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{0}$ vetores não-colineares. Seja C o ponto tal que o quadrilátero $P = OABC$ é um paralelogramo. Considerando o segmento OA como base, a altura de P é $h = \left\| \overrightarrow{OB} \right\| \cdot sen\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Área}(P) &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot sen\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot sen\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| . \end{aligned}$$

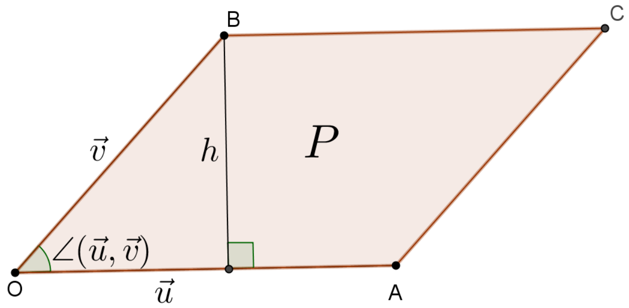

Figura 2.25: Paralelogramo $P = OACB$ de altura h.

Assim, a norma do produto vetorial de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ mede a *área do paralelogramo* que tem os segmentos OA e OB como lados adjacentes.

Note que se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares, ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então o paralelogramo P fica reduzido a um segmento ou um ponto e tem, portanto, área zero, isto é,

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = 0.$$

Exemplo 2.2.8. *Determine o produto vetorial* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, *sendo* $\overrightarrow{u} = (1, -2, 0)$ *e* $\overrightarrow{v} = (0, 2, -2)$.

Solução:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$ Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (4, 2, 2)$.

Vamos agora definir o *produto misto* de vetores. O produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do espaço é o número real

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle .$$

O produto misto de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ nada mais é, pela **propriedade 8** do produto vetorial, o determinante da matriz 3×3 que tem por linhas as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, nessa ordem em que forem listados. Ou seja,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

Interpretação geométrica do produto misto

Sejam A, B, C e D pontos não coplanares e P o paralelepípedo que tem os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ como arestas adjacentes.

Considerando o paralelogramo S de lados adjacentes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ como base de P, vem que:

$$\text{Vol}(P) = \text{Área}(S) \cdot h, \text{ onde } h \text{ é a altura relativa à base } S.$$

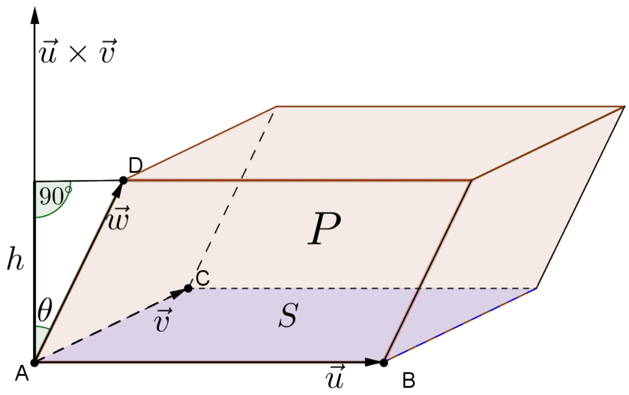

Figura 2.26: Paralelepípedo P de base S e altura h.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$, segue que:

$$\text{Área}(S) = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \text{ e } h = \|\overrightarrow{w}\| \cdot |\cos\angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\mathrm{u}} \times \overrightarrow{v})|\,.$$

Ou seja, *o volume de* P é o módulo do produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\text{vol}(P) = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|\,.$$

Observação 2.2.1. Se os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares o paralelepípedo fica reduzido a um paralelogramo, ou a um segmento, ou a um ponto e, portanto, o seu volume será zero.

Capítulo 3

Sistemas Lineares

3.1 Aspectos históricos dos Sistemas Lineares e Determinantes

Os breves comentários a seguir sobre a história dos Sistemas Lineares apoiam-se no livro Fundamentos de Matemática, volume 4 [8].

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C. Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas). O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a12, Leibniz indicava por 12. A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu Treatise of algebra. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à análise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A+By+Cx+Dy^2+Exy+Fx^2=0$. O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares — embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo". O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior. Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

3.2 Equações lineares

Definição 3.2.1. Equação linear é toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b,$$

onde $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n$ e b são números reais e $x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...\ ,\ x_n$ são as incógnitas. Os números reais $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n$ são chamados de coeficientes e o número real b é o termo independente.

Definição 3.2.2. Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, é uma sequência de números reais $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ...\ ,\ \alpha_n$ para o qual a sentença

$$a_1(\alpha_1) + a_2(\alpha_2) + a_3(\alpha_3) + ... + a_n\,(\alpha_n) = b$$

é verdadeira.

Exemplo 3.2.1. *Vejamos alguns exemplos:*

a) *A terna (2,1,0) é solução da equação:*

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\ ,\ \textit{pois}\quad 2\cdot 2 - 4\cdot 1 + 3\cdot 0 = 0$$

b) *A quadra (-1,3,5,8) é solução da equação:*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \ , \ \textit{pois} \quad 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 8 = 0$$

Definição 3.2.3. Denominamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

Em uma equação linear com duas incógnitas, o conjunto solução é representado graficamente por uma reta do plano cartesiano, isto é, o conjunto de todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação da forma $ax + by = c$ é uma reta,conforme já vimos. Por exemplo, o conjunto solução da equação $2x + y = 4$ define a reta representada na figura **3.1**.

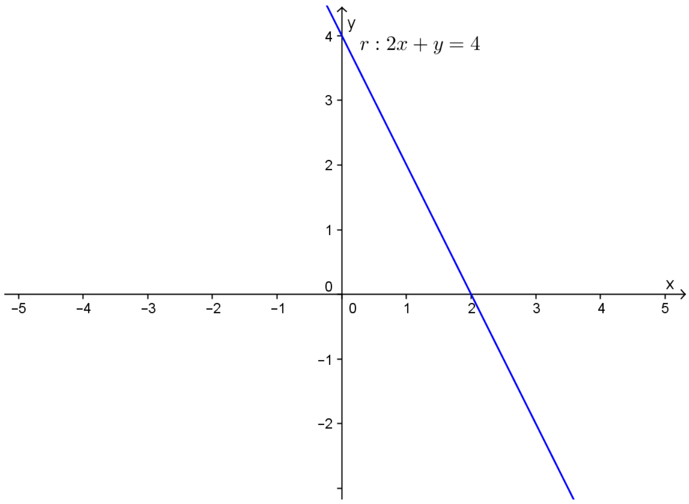

Figura 3.1: Reta no plano.

Já é uma equação linear com três incógnitas, o conjunto solução representa graficamente um plano do espaço, isto é, o conjunto de todos os ternos que satisfazem uma equação da forma $ax + by + cz = d$ define um plano, comforme já mostramos.

Por exemplo, o conjunto solução da equação $2x + y - z = 0$ determina graficamente o plano representado na figura **3.2**.

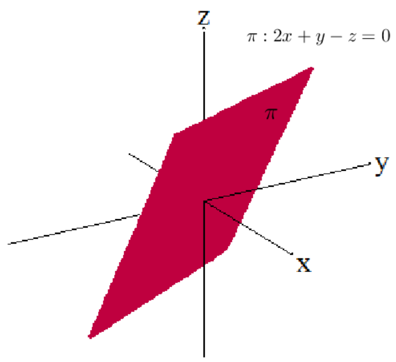

Figura 3.2: Plano no espaço.

Observação 3.2.1. Se o termo independente da equação linear for nulo, por exemplo, tomemos a equação $ax + by = 0$, e se tem (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como duas de suas soluções então soma delas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e a multiplicação por escalar $k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$ também será solução. Pois, se (x_1, y_1) é solução de $ax + by = 0$, então $ax_1 + by_1 = 0$ (I). Analogamente, se (x_2, y_2) é solução de $ax + by = 0$, então $ax_2 + by_2 = 0$ (II). Daí, somando as equações (I) e (II), vem que:

$$ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 = 0 + 0 \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0.$$

Logo, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ é também solução de $ax + by = 0$. Além disso, multiplicando (I) por $k \in \mathbb{R}$, temos que:

$$kax_1 + kby_1 = k \cdot 0 \Leftrightarrow a(kx_1) + b(ky_1) = 0,$$

ou seja, $k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$ também é solução de $ax + by = 0$. Vale salientar que tal afirmação continua valendo para uma equação linear com n variáveis, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Pensemos agora no seguinte problema: Qual a relação entre as equações lineares $x + y = 1$, $x + y = 3$ e $x + y = 6$ sob o ponto de vista geométrico? Sabemos que tais equações representam retas, a figura **3.3** abaixo ilustrará tal situação.

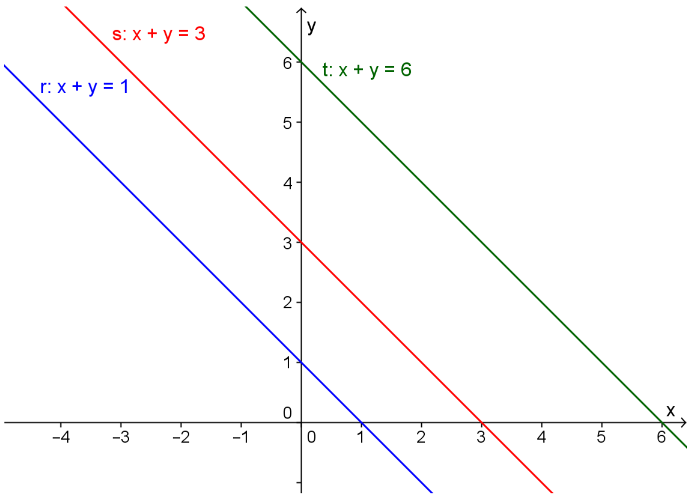

Figura 3.3: As retas r, s e t são paralelas.

Conforme mostra a figura 3.3 as equações $x + y = 1$, $x + y = 3$ e $x + y = 6$ descrevem três retas paralelas. Nas próximas seções analisaremos melhor as retas representadas por equações da forma $ax + by = c$ e também os planos representados por equações da forma $ax + by + cz + d = 0$.

3.3 Sistema Linear com duas equações e duas incógnitas

Um sistema linear S com duas equações e duas incógnitas nada mais é do que um conjunto de equações lineares da forma:

$$(S) \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Uma *solução* do sistema linear (S) é um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas x, y satisfazem ambas as equações. O sistema (S) é classificado em *indeterminado, impossível* ou *determinado* quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução, respectivamente. Conforme já vimos, cada equação em (S) tem como soluções as coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dos pontos de uma reta.

As *linhas* do sistema (S) são os vetores do $\mathbb{R}^2$:

$$l_1 = (a_1, b_1) \text{ e } l_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

As *linhas aumentadas* de (S) são os vetores do $\mathbb{R}^3$:

$$L_1 = (a_1, b_1, c_1) \text{ e } L_2 = (a_2, b_2, c_2).$$

Suporemos sempre que $l_1 \neq 0$ e $l_2 \neq 0$. Assim, cada uma das equações do sistema (S) representa uma reta em $\mathbb{R}^2$, onde l_1 e l_2 são seus respectivos vetores normais. Denotaremos essas retas por r e s, respectivamente. As soluções do sistema são, portanto, pontos (x, y) que pertencem a ambas as retas, ou seja, a interseção é o conjunto solução de (S).

Sob o ponto de vista algébrico, há três alternativas possíveis a respeito das linhas do sistema (S). São elas:

A_1: Existe $k \neq 0$ tal que $L_2 = k \cdot L_1$.

A_2: Existe $k \neq 0$ tal que $l_2 = k \cdot l_1$ mas $L_2 \neq k \cdot L_1$.

A_3: O vetor l_2 não é múltiplo de l_1.

Por outro lado, do ponto vista geométrico, temos três possibilidades para as retas r e s, as quais se excluem mutuamente, ou seja, se uma delas for verdadeira, as outras duas não ocorrem. São elas:

G_1: As retas r e s coincidem:

$$r = s;$$

G_2: As retas r e s são paralelas:

$$r \cap s = \emptyset;$$

G_3: As retas r e s são concorrentes, portanto, a interseção é um ponto:

$$r \cap s = \{P\}.$$

Proposição 3.3.1. As posições relativas G_1, G_2 e G_3 entre as retas r e s são equivalentes, respectivamente, às alternativas algébricas A_1, A_2 e A_3.

Demonstração. Provaremos a seguir as implicações $A_1 \Rightarrow G_1$, $A_2 \Rightarrow G_2$ e $A_3 \Rightarrow G_3$. Como as alternativas A_1, A_2 e A_3 esgotam todas as possibilidades, enquanto B_1, B_2 e B$_3$ se excluem mutuamente, consequentemente, as recíprocas $G_1 \Rightarrow A_1$, $G_2 \Rightarrow A_2$ e $G_3 \Rightarrow A_3$ também são verdadeiras. Portanto, as afirmações são de fato equivalentes, para $i = 1, 2$ e 3. (Suponhamos, por exemplo, que se tenha G_3, então não podem ocorrer as alternativas A_1 nem A_2, pois $A_1 \Rightarrow G_1$, $A_2 \Rightarrow G_2$ e G_3 é incompatível com G_1 e com G_2. Logo, vale A_3, ou seja, $G_3 \Rightarrow A_3$).

$A_1 \Rightarrow G_1$. Se $L_2 = k \cdot L_1$ então $a_2 = k \cdot a_1, b_2 = k \cdot b_1$ e $c_2 = k \cdot c_1$. Assim, a equação da reta s é obtida multiplicando por k ambos os membros da equação da reta r. Portanto, um ponto que satisfaz a primeira equação deve, necessariamente, satisfazer a segunda e, reciprocamente. Logo, um ponto pertence à reta r se, e só se, pertence à reta s. Ou seja, as retas r e s coincidem e o conjunto solução do sistema é $\{(x, y) \in r = s\}$. Conforme ilustra a figura **3.4.**

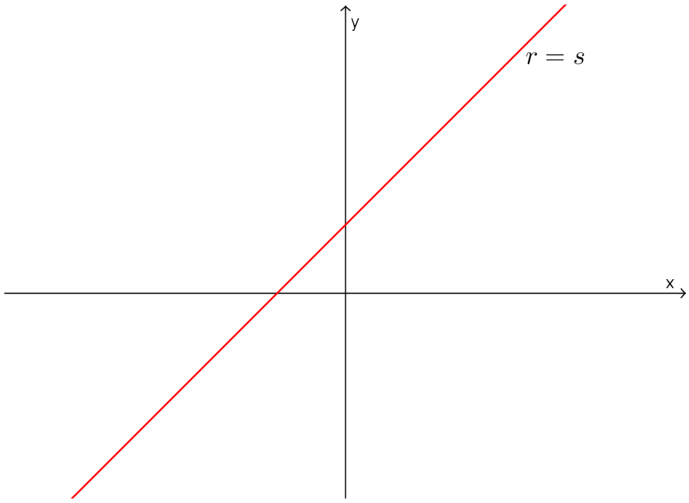

Figura 3.4: Retas coincidentes.

$A_2 \Rightarrow G_2$. Note que A_2 significa que $a_2 = k \cdot a_1, b_2 = k \cdot b_1$ mas $c_2 \neq k \cdot c_1$. Logo,

$$a_1x + b_1y = c_1 \Rightarrow a_2x + b_2y = c_2 = ka_1x + kb_1y = k(a_1x + b_1y) = kc_1 \neq kc_2.$$

Ou seja, $(x, y) \in r \Rightarrow (x, y) \notin s$. Logo, as retas r e s não têm pontos em comum, isto é, são paralelas conforme ilustra a figura **3.5**.

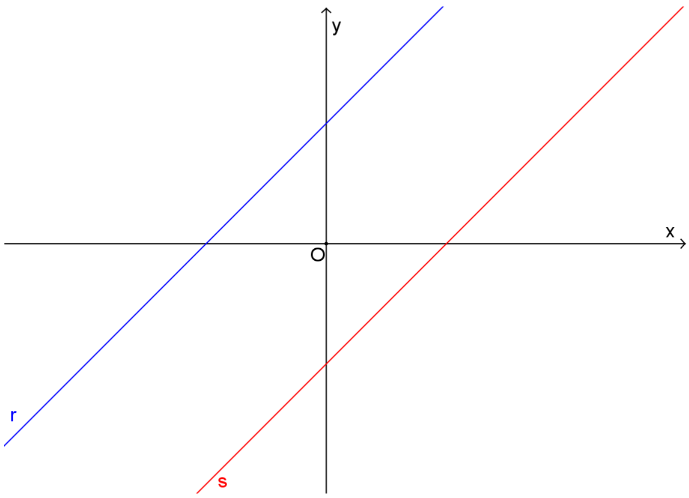

Figura 3.5: Retas paralelas.

$A_3 \Rightarrow G_3$. Neste caso, sabemos que o vetor l_1 é normal à reta r e o vetor l_2 é normal à reta s. Como eles não são paralelos e além disso as retas r e s são coplanares, então elas não são paralelas tampouco coincidentes. Portanto, as retas r e s concorrentes conforme ilustra a figura **3.6** abaixo.

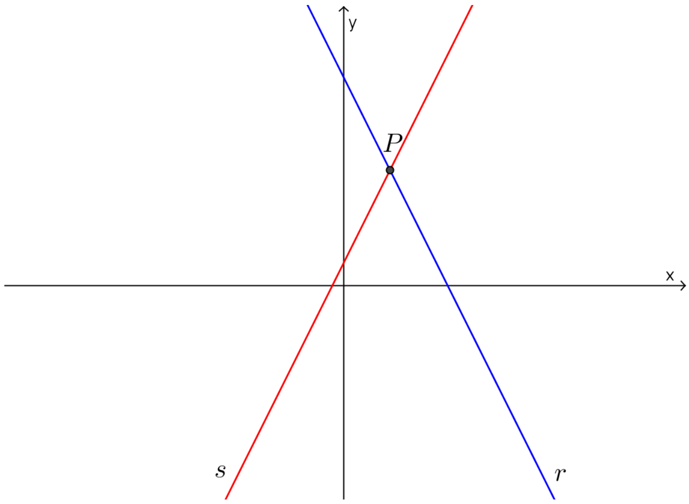

Figura 3.6: Retas concorrentes.

□

Quanto ao número de soluções, o sistema (S) é classificado em:

i) Impossível, se o sistema não possui nenhuma solução. Isso ocorre se as retas r e s representadas pelas duas equações de (S) forem paralelas;

ii) Indeterminado, se o sistema possui uma infinidade de soluções. Isso ocorre se as retas r e s representadas pelas duas equações de (S) forem coincidentes;

iii) Determinado, se o sistema possui uma única solução. Isso acontece se às retas r e s representadas pelas duas equações de (S) forem concorrentes.

Exemplo 3.3.1. *No sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10, \end{cases}$$

temos evidentemente que $L_2 = 2 \cdot L_1$, *pois* $(4, 6, 10) = 2 \cdot (2, 3, 5)$.
Portanto, essas duas equações representam a mesma reta. Assim, esse sistema admite infinitas soluções que são da forma $\left(x, \dfrac{5 - 2x}{3}\right)$, *onde* x *é número real escolhido livremente.*

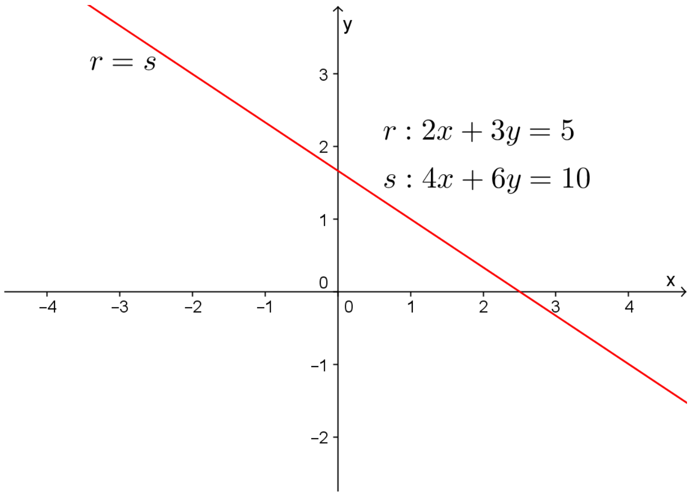

Figura 3.7: As retas r e s coincidem.

Exemplo 3.3.2. *Verifique que o sistema*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5, \end{cases}$$

é impossível.

De fato, pois note que $l_2 = 2 \cdot l_1$, mas $L_1 \neq L_2$. Assim, as representadas pelas equações acima são paralelas, e, portanto, o sistema não admite solução.

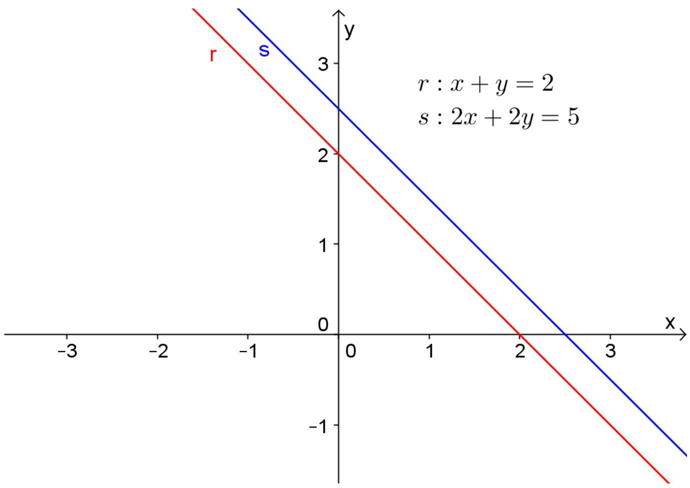

Figura 3.8: Retas paralelas.

Exemplo 3.3.3. *Verifique geometricamente que o sistema*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 10, \end{cases}$$

tem solução única.

Observe que nenhum dos vetores $l_1 = (2, 1)$ e $l_2 = (1, 1)$ é múltiplo do outro. Logo, essas equações representam retas concorrentes, isto é, a interseção é um único ponto P. Resolvendo o sistema pelo método da substituição, concluímos que este ponto P é o par ordenado $(-5, 15)$.

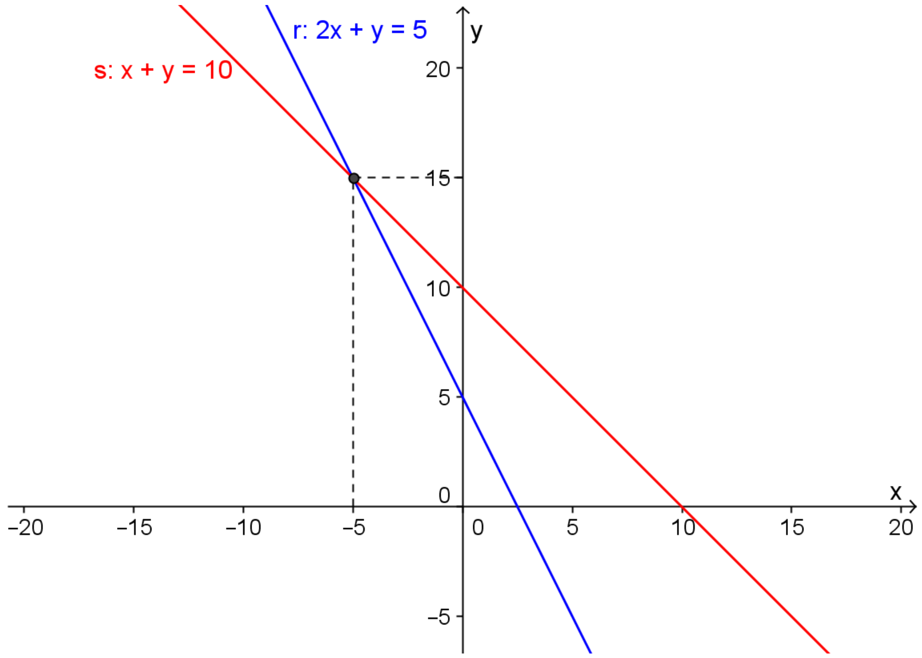

Figura 3.9: O ponto $(-5, 15)$ é a interseção das retas.

3.4 Sistema Linear com duas equações e três incógnitas

Um sistema (S) de duas equações lineares a três incógnitas consiste num conjunto de equações lineares sob a forma:

$$(S)\colon \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

As letras x, y e z representam as incógnitas. Cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas satisfaçam as equações do sistema S denomina-se uma *solução* do mesmo.

Os vetores $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em $\mathbb{R}^3$, chamam-se as *linhas* do sistema (S), enquanto que os vetores $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, em $\mathbb{R}^4$, chamam-se as *linhas aumentadas*.

Suporemos sempre que $l_1 \neq \overrightarrow{0}$ e $l_2 \neq \overrightarrow{0}$, onde $\overrightarrow{0}$ é o vetor nulo, assim teremos $L_1 \neq \overrightarrow{0}$ e $L_2 \neq \overrightarrow{0}$. Logo, cada uma das equações do sistema (S) representa um plano em $\mathbb{R}^3$, onde l_1 e l_2 são seus respectivos vetores normais. Indicaremos o plano de equação $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ por π_1 e o plano de equação $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ por π_2. As soluções do sistema são, portanto, os pontos (x, y, z) que pertencem a ambos os planos π_1 e π_2, isto é, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2$ é o conjunto solução de (S).

Vamos agora estabelecer uma relação entre as propriedades algébricas das linhas do sistema e as propriedades geométricas dos planos representados pelas equações desse sistema.

Sob o aspecto algébrico, existem três possiblidades a respeito das linhas do sistema (S). São elas:

A_1: Existe $k \neq 0$ tal que $L_1 = k \cdot L_2$.

A_2: Existe $k \neq 0$ tal que $l_2 = k \cdot l_1$, mas $L_2 \neq k \cdot L_1$.
A_3: O vetor l_2 não é múltiplo de l_1.

Por outro lado, sob o aspecto geométrico, podemos formular três possibilidades a respeito dos planos π_1 e π_2, onde apenas uma delas ocorre. São elas:
G_1: Os planos π_1 e π_2 coincidem:

$$\pi_1 = \pi_2;$$

G_2: Os planos π_1 e π_2 são paralelos:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset;$$

G_3: Os planos π_1 e π_2 são secantes definindo uma reta:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = r.$$

Proposição 3.4.1. As posições relativas G_1, G_2 e G_3 entre os planos π_1 e π_2 são equivalentes, respectivamente, às alternativas algébricas A_1, A_2 e A_3.

Demonstração. Provaremos a seguir as implicações $A_1 \Rightarrow G_1$, $A_2 \Rightarrow G_2$ e $A_3 \Rightarrow G_3$. Como as alternativas A_1, A_2 e A_3 esgotam todas as possibilidades, enquanto B_1, B_2 e B_3 se excluem mutuamente, consequentemente, as recíprocas $G_1 \Rightarrow A_1$, $G_2 \Rightarrow A_2$ e $G_3 \Rightarrow A_3$ também são verdadeiras. Portanto, as afirmações são, de fato, equivalentes, para $i = 1, 2$ e 3. (Suponhamos, por exemplo, que se tenha G_3, então não podem ocorrer as alternativas A_1 nem A_2, pois $A_1 \Rightarrow G_1$, $A_2 \Rightarrow G_2$ e G_3 é incompatível com G_1 e com G_2. Logo, vale A_3, ou seja, $G_3 \Rightarrow A_3$).
$A_1 \Rightarrow G_1$. Se $L_2 = k \cdot L_1$ então $a_2 = k \cdot a_1, b_2 = k \cdot b_1, c_2 = k \cdot c_1$ e $d_2 = k \cdot d_1$. Assim, a equação do plano π_2 é obtida multiplicando por k ambos os membros da equação do plano π_1. Portanto, um ponto que satisfaz a primeira equação deve, necessariamente, satisfazer a segunda e, reciprocamente. Logo, um ponto pertence ao plano π_1 se, e somente se, pertence ao plano π_2. Ou seja, os planos π_1 e π_2 coincidem e o conjunto solução do sistema é:

$$S = \pi_1 = \pi_2$$

.

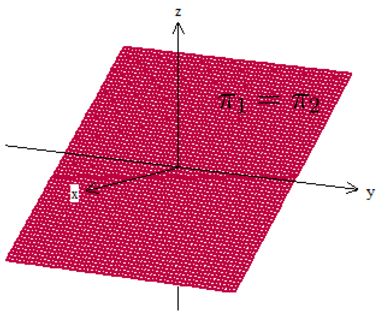

Figura 3.10: O plano $\pi_1 = \pi_2$.

$A_2 \Rightarrow G_2$. Note que A_2 significa que $a_2 = k \cdot a_1, b_2 = k \cdot b_1, c_2 = k \cdot c_1$ mas $\mathrm{d}_2 \neq k \cdot d_1$. Logo,

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_2x + b_2y + c_2z = d_2 = ka_1x + kb_1y + kc_1z = k(a_1x + b_1y + c_1z) = kd_1 \neq d_2. \end{aligned}$$

Ou seja, $(x, y, z) \in \pi_1 \Rightarrow (x, y, z) \notin \pi_2$. Logo, os planos π_1 e π_2 não têm pontos em comum, isto é, são paralelos.

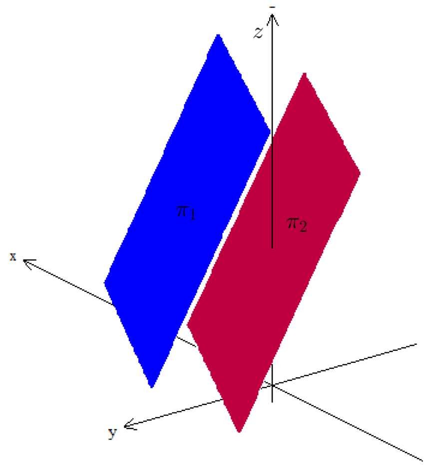

Figura 3.11: O plano π_1 em azul é paralelo a π_2 em vermelho.

$A_3 \Rightarrow G_3$. Neste caso, a hipótese implica que o produto vetorial entre os vetores normais $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente, de π_1 e π_2 é diferente do vetor nulo, isto é, $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0, 0, 0)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que a última coordenada $D = a_1b_2 - a_2b_1$ do produto vetorial $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ seja diferente de zero. O sistema S: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ pode ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z. \end{cases}$$

Sendo o determinante $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ da matriz do sistema acima diferente de zero, ele pode ser resolvido de forma única para cada valor de z:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{D}\left[(d_1 - c_1z)b_2 - (d_2 - c_2z)b_1\right] \\ y = \frac{1}{D}\left[(d_2 - c_2z)a_1 - (d_1 - c_1z)a_2\right]. \end{cases}$$

Portanto, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2$, ou seja, o conjunto das soluções (x, y, z) do sistema S é uma reta cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{D}\left[(d_1 - c_1z)b_2 - (d_2 - c_2z)b_1\right] \\ y = \frac{1}{D}\left[(d_2 - c_2z)a_1 - (d_1 - c_1z)a_2\right] \end{cases},$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é o parâmetro.

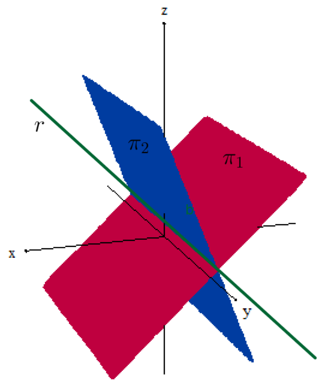

Figura 3.12: A reta r é a interseção dos planos π_1 e π_2.

$\square$

Exemplo 3.4.1. *No sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 6y - 2z = 10, \end{cases}$$

temos evidentemente que $L_2 = 2 \cdot L_1$, *pois* $(4, 6, -2, 10) = 2 \cdot (2, 3, -1, 5)$.

Portanto, essas duas equações representam o mesmo plano. Assim, esse sistema apresenta infinitas soluções que são da forma $(x, y, 2x + 3y - 5)$, com x e y números reais escolhidos livremente.

Exemplo 3.4.2. *Verifique que o sistema*

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ 12x + 4y - 8z = 10, \end{cases}$$

é impossível.

De fato, pois note que $l_2 = 4 \cdot l_1$, mas $L_1 \neq L_2$. Assim, os planos representados pelas equações acima são paralelos, e, portanto, o sistema não admite solução.

Exemplo 3.4.3. *Verifique que o sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 6y - 2z = 10, \end{cases}$$

possui infinitas soluções.

Observe que nenhum dos vetores $l_1 = (2, 3, -1)$ e $l_2 = (1, 6, -2)$ é múltiplo do outro. Logo, essas equações representam planos π_1 e π_2 secantes, isto é, a interseção é uma reta. Portanto, o sistema admite infinitas soluções, pois as soluções são os pontos dessa reta.

3.5 Sistema Linear com três equações e três incógnitas

Um sistema linear com três equações e três incógnitas é um conjunto de equações lineares da forma:

$$(S)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Uma *solução* do sistema linear (S) é um terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas x, y e z satisfazem ambas as equações. O sistema (S) é classificado em *indeterminado, impossível* ou *determinado* quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução, respectivamente. Como vimos na subseção **2.2.3**, cada equação em (S) tem como soluções as coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dos pontos de um plano.

As *linhas* do sistema (S) são os vetores:

$$l_1 = (a_1, b_1, c_1),\ l_2 = (a_2, b_2, c_2) \text{ e } l_3 = (a_3, b_3, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

E as *linhas aumentadas* de (S) são os vetores do $\mathbb{R}^4$:

$$L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1),\ L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) \text{ e } L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3).$$

Suporemos sempre que $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ e $l_3 \neq 0$. Assim, cada uma das equações do sistema (S) representa um plano em $\mathbb{R}^3$, onde l_1, l_2 e l_3 são seus respectivos vetores normais. Indicaremos tais planos por π_1, π_2 e π_3, respectivamente. Assim, um terno (x, y, z) é solução do sistema quando o ponto $P = (x, y, z)$ pertence simultaneamente aos três planos π_1, π_2 e π_3.

Sob o ponto de vista algébrico, há oito alternativas possíveis a respeito das linhas do sistema (S). São elas:

A_1: Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $L_2 = \lambda \cdot L_1$ e $L_3 = \mu \cdot L_1$;

A_2: Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $L_2 = \lambda \cdot L_1$ e $l_3 = \mu \cdot l_1$, mas $d_3 \neq \mu \cdot d_1$;

A_3: Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $l_2 = \lambda \cdot l_1$ e $l_3 = \mu \cdot l_1$, mas $d_2 \neq \lambda \cdot d_1, d_3 \neq \mu \cdot d_1$ e $d_3 \neq \frac{\mu}{\lambda} \cdot d_2$;

A_4: Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $L_2 = \lambda \cdot L_1$, mas l_1 e l_3 não são múltiplos;

A_5: Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $l_2 = \lambda \cdot l_1$, mas $d_2 \neq \lambda \cdot d_1$ e l_1 e l_3 não são múltiplos;

A_6: Nenhum dos vetores l_1, l_2 e l_3 é múltiplo do outro, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $L_3 = \lambda \cdot L_1 + \mu \cdot L_2$.

A_7: Os vetores l_1, l_2 e l_3 são dois a dois não-colineares, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $l_3 = \lambda \cdot l_1 + \mu \cdot l_2$, mas $d_3 \neq \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot d_2$;

A_8: Os vetores l_1, l_2 e l_3 são linearmente independentes, isto é, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

Por outro lado, do ponto vista geométrico, temos oito possibilidades para os planos π_1, π_2 e π_3, as quais se excluem mutuamente, ou seja, se uma delas for verdadeira, as outras sete não ocorrem. São elas:

G_1: Os três planos coincidem:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3;$$

G_2: Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles:

$$\pi_1 = \pi_2 \text{ e } \pi_3 \cap \pi_1 = \emptyset;$$

G_3: Os planos são paralelos dois a dois:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset\ ,\ \pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset \text{ e } \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset;$$

G_4: Dois planos coincidem e o terceiro os intersecta ao longo de uma reta r:

$$\pi_1 = \pi_2 \text{ e } \pi_3 \cap \pi_1 = r$$

G_5: Dois dos planos são paralelos e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas r e s:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset\ ,\ \pi_1 \cap \pi_3 = r \text{ e } \pi_2 \cap \pi_3 = \text{s};$$

G_6: Os três planos são distintos e se intersectam ao longo de uma reta r:

$$\pi_1 \neq \pi_2, \pi_1 \neq \pi_3,\ \pi_2 \neq \pi_3 \text{ e } \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r;$$

G_7: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas entre si:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \text{r}\ ,\ \pi_1 \cap \pi_3 = s\ ,\ \pi_2 \cap \pi_3 = \text{t com } r \parallel s \parallel t;$$

G_8: Os três planos têm um único ponto em comum:

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}\,.$$

Proposição 3.5.1. As posições relativas $G_1 - G_8$ entre os planos π_1, π_2 e π_3 são equivalentes, respectivamente, às alternativas algébricas $A_1 - A_8$.

Demonstração. Basta mostramos as equivalências $A_i \Leftrightarrow G_i, i = 6, 7, 8$. Pois, as equivalências $A_i \Leftrightarrow G_i, i = 1, ..., 5$, seguem diretamente das equivalências $A_i \Leftrightarrow G_i, i = 1, ..., 3$, da proposição **3.4.1,** aplicadas aos pares de planos π_1 e π_2, π_1 e π_3 e π_2 e π_3, do sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ da seção **3.4**.

$A_6 \Rightarrow G_6$. Vamos supor que os vetores l_1, l_2 e l_3 são dois a dois não-colineares. Pela implicação $A_3 \Rightarrow G_3$ da proposição **3.4.1,** temos que os planos π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta r. Sejam $P = (x, y, z)$ um ponto da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned} & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{ e } a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ & \Rightarrow \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1z = \lambda d_1 \text{ e } \mu a_2x + \mu b_2y + \mu c_2z = \mu d_2 \\ & \Rightarrow (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z = \lambda d_1 + \mu d_2. \end{aligned}$$

Se, além disso, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $L_3 = \lambda L_1 + \mu L_2$, então $a_3x + b_3y + c_3\text{z} = d_3$, e, portanto P $\in \pi_3$. Assim, $r \subset \pi_3$. Como os planos π_1 e π_3, pela proposição **3.4.1** também se intersectam ao longo de uma reta e como $r \subset \pi_1 \cap \pi_3$, daí segue que $\pi_1 \cap \pi_3 = r$. Logo,

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r.$$

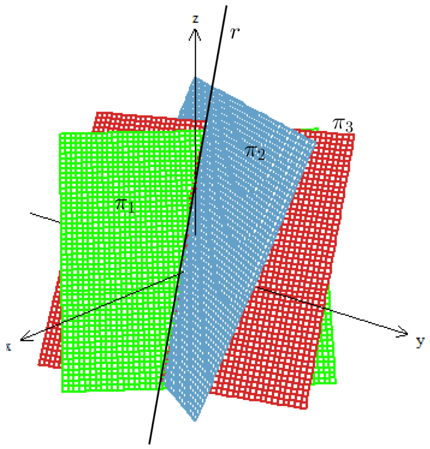

Figura 3.13: A reta r é a interseção dos planos, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$.

$A_7 \Rightarrow G_7$. Pelo provado acima, π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta r e essa reta não intersecta o plano π_3, já que, por hipótese, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $l_3 = \lambda \cdot l_1 + \mu \cdot l_2$, mas $d_3 \neq \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot d_2$. Portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Sejam s e t as retas tais que $\pi_2 \cap \pi_3 = s$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = t$. Como $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, vem que $r \cap s = r \cap t = s \cap t = \emptyset$, ou seja, as retas são duas a duas paralelas.

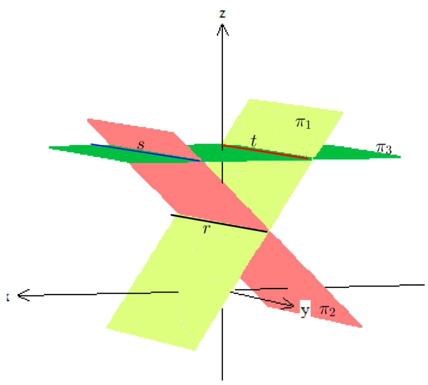

Figura 3.14: $\pi_1 \cap \pi_2 =$ r , $\pi_1 \cap \pi_3 = s$, $\pi_2 \cap \pi_3 =$ t com $r \parallel s \parallel t$;

$A_8 \Rightarrow G_8$. Sendo os vetores l_1, l_2 e l_3 linearmente independentes, então nenhum deles é múltiplo do outro e produto misto $[l_1, l_2, l_3] = \langle l_1 \times l_2, l_3 \rangle \neq 0$. Logo, pela implicação $A_3 \Rightarrow G_3$ da proposição **3.4.1** e pelo significado geométrico do produto vetorial visto ao longo desse trabalho, segue que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ é uma reta paralela ao vetor $l_1 \times l_2$. E como $\langle l_1 \times l_2, l_3 \rangle \neq 0$, temos que a reta r não pode ser paralela ao plano π_3. Daí, r é concorrente ao plano π_3, isto é, $r \cap \pi_3 = \{P\}$.

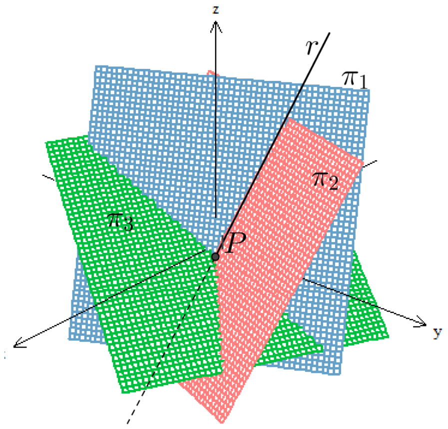

Figura 3.15: A reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e o ponto P, onde $r \cap \pi_3 = \{P\}$.

Ademais, como as posições relativas $G_1 - G_8$ dos planos π_1, π_2 e π_3 se excluem mutuamente e as alternativas algébricas $A_1 - A_8$ esgotam todas as possibilidades, então as implicações $G_i \Rightarrow A_i$, para todo $i = 1, ..., 8$, são também válidas. $\square$

Observação 3.5.1. Um sistema de três equações lineares com três incógnitas é *homogêneo* quando todos os termos independentes são iguais a zero, conforme indicado abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3\text{z} =0. \end{cases}$$

Note que o sistema homogêneo sempre possui a *solução trivial* $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Conforme visto anteriormente, esse sistema será determinado, admitindo apenas a solução trivial se os vetores linha forem LI, ou seja, se $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$. Do contrário, o sistema será indeterminado.

Exemplo 3.5.1. *No sistema*

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ 2x + 6y - 2z = 10 \\ 3x + 9y - 3z = 15, \end{cases}$$

temos evidentemente que $L_2 = 2 \cdot L_1$ *e* $L_3 = 3 \cdot L_1$*, pois* $(2, 6, -2, 10) = 2 \cdot (1, 3, -1, 5)$ e $(3, 9, -3, 15) = 3 \cdot (1, 3, -1, 5)$. *Portanto, essas três equações representam o mesmo plano. Assim, esse sistema possui infinitas soluções que são da forma* $(x, y, x + 3y - 5)$*, com* x e y *números reais escolhidos livremente.*

Exemplo 3.5.2. *No sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ \frac{1}{2}x + y - z = 1 \\ 4x + 8y - 8z = 5, \end{cases}$$

tem-se que $L_2 = \frac{1}{2} \cdot L_1$ *e* $l_3 = 4 \cdot l_1$ *mas* L_3 *não é múltiplo* L_1. *Portanto, os planos* π_1 e π_2 *coincidem, mas* π_3 *é paralelo a* π_1. *Logo, o sistema não possui solução.*

Exemplo 3.5.3. *No sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 4y - 4z = 4 \\ 4x + y - 2z = 5, \end{cases}$$

temos que $L_2 = 2 \cdot L_1$, *mas* l_3 *não é múltiplo de* l_1. *Portanto os planos* π_1 e π_2 *coincidem e* π_3 *os intersecta segundo uma reta. Para determinar essa reta basta resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y = 2 + 2z \\ 4x + y = 5 + 2z \end{cases}$$

Portanto, o sistema admite infinita soluções.

Exemplo 3.5.4. *No sistema*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 4 \\ 3x + 9y - 6z = 5, \end{cases}$$

temos que $l_2 = 2 \cdot l_1$ *e* $l_3 = 3 \cdot l_1$, *mas nenhum dos vetores* L_1, L_2 e L_3 *é múltiplo um do outro. Logo, as equações desse sistema representam planos paralelos* π_1, π_2 e π_3. *Portanto, esse sistema é impossível.*

Exemplo 3.5.5. *No sistema*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ -2x + 4y - 4z = 4 \\ 3x + y - 6z = 5, \end{cases}$$

temos que $l_2 = 2 \cdot l_1, L_2 \neq 2 \cdot L_1$ *mas* l_3 *não é múltiplo nem de* l_1 *tampouco* l_2. *Logo, as equações desse sistema representam planos paralelos* π_1 e π_2, *definidos pelas duas primeiras equações, o que já garante que o sistema é impossível.*

Exemplo 3.5.6. *No sistema*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ -2x + 4y - 4z = 4 \\ -3x + 6y - 3z = 5, \end{cases}$$

temos que nenhum dos vetores l_1, l_2 *e* l_3 *é múltiplo do outro. Mas, observe que* $L_3 = L_1 + L_2$. *Logo, pela implicação* $A_6 \Rightarrow G_6$, *os três planos* π_1, π_2 e π_3, *definidos pelas equações do sistema acima, têm uma reta* r *em comum. Portanto, o sistema é admite infinitas soluções.*

Exemplo 3.5.7. *Considere agora o sistema*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ -2x + 4y - 4z = 4 \\ -3x + 6y - 3z = 2, \end{cases}$$

note que nenhum dos vetores l_1, l_2 e l_3 é múltiplo do outro. Mas, observe que $l_3 = l_1 + l_2$, mas $L_3 \neq L_1 + L_2$. *Portanto, segue da implicação $A_7 \Rightarrow G_7$, que o sistema é impossível.*

Exemplo 3.5.8. *No sistema*

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - 4z = 4 \\ x + 2y - 3z = 5, \end{cases}$$

temos que nenhum dos vetores l_1, l_2 e l_3 é múltiplo do outro. Ademais, nenhum deles é combinação linear dos outros dois, assim l_1, l_2 e l_3 são LI, pois $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$. *Portanto, o sistema dado possui solução única.*

3.6 Escalonamento (eliminação gaussiana)

Nas seções anteriores desse capítulo foi feita uma análise qualitativa dos sistemas lineares, com ênfase na classificação dos sistemas e na interpretação geométrica. Nesta seção apresentaremos um método simples e extremamente eficiente para resolver um sistema linear qualquer, em particular os sistemas discutidos ao longo desse trabalho , que é o *escalonamento* ou *método de Eliminação de Gauss.*

Definição 3.6.1. Dado um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

diremos que S está na *forma escalonada* , quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Além disso, as linhas que tiverem todos os elementos iguais a zero devem estar abaixo das demais.

Exemplo 3.6.1. *Considere os sistemas lineares abaixo:*

$$S_1 \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ \quad y - 2z = 3 \\ \qquad 5z = 10, \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x - y + 3z + w = 1 \\ \quad y - 2z + 2w = 3 \\ \qquad 5z - w = 10 \end{cases}$$

Note que esses sistemas exemplificados acima estão na forma escalonada e podem ser facilmente resolvidos de baixo para cima, por simples substituições.

Definição 3.6.2. Dizemos que dois sistemas lineares S_1 *e* S_2 são equivalentes, se toda solução de S_1 também for solução de S_2 e vice-versa.

Exemplo 3.6.2.

$$S_1 \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 2x - y = 1 \\ \quad\;\; 3x = 3 \end{cases}$$

S_1 e S_2 *são equivalentes, pois ambos admitem como solução o par ordenado* $(1,2)$.

Assim, o método do escalonamento se baseia no fato que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado. Precisamos, então, saber que operações efetuar a fim de transformar um sistema S_1 em outro equivalente S_2, na forma escalonada. Essas operações são dadas por dois teoremas que veremos a seguir.

Teorema 3.6.1. Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, por um número real $k \neq 0$, o novo sistema S' assim obtido, será equivalente a S.

Demonstração. Considere o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Multiplicando a i-ésima equação de S, com $i \in \{1, 2, ..., m\}$, por um número real $k \neq 0$ obteremos o sistema:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + ka_{i3}x_3 + ... + ka_{in}x_n = kb_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Agora observemos que a única diferença entre os sistemas S e S' é i-ésima equação. Assim, basta analisarmos ela. Suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução de S, isto é, a igualdade $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$ é verdadeira. Agora vamos mostrar que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ também é solução de S'. De fato, pois:

$$\begin{aligned} & ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ka_{i3}\alpha_3 + ... + ka_{in}\alpha_n \\ & = k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n) \\ & = kb_i \end{aligned}$$

Assim, temos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima linha do sistema S'. Portanto, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S'. Reciprocamente, suponhamos agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução do sistema S', isto é, a sentença $ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ka_{i3}\alpha_3 + ... + ka_{in}\alpha_n = kb_i$ é verdadeira e provemos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ também é solução de S. De fato, pois substituindo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1° membro da i-ésima equação de S, vem:

$$\begin{aligned}
&a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n \\
&= \tfrac{k}{k}(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n) \\
&= \tfrac{1}{k}(ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ka_{i3}\alpha_3 + ... + ka_{in}\alpha_n) \\
&= \tfrac{1}{k} \cdot kb_i.
\end{aligned}$$

O que significa que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Portanto, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S. □

Teorema 3.6.2. Se substituirmos uma equação de um sistema linear S, pela soma membro a membro, dela com outra equação de S, o novo sistema obtido S' assim obtido, será equivalente a S.

Demonstração. Seja

$$S \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{in}x_n = b_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}$$

Daí, substituindo a i-ésima equação de S, pela soma membro a membro, dela com j-ésima equação, teremos o sistema:

$$S' \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + (a_{i3} + a_{j3})x_3 + ... + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}$$

Note que a única diferença entre os sistemas S e S' é a i-ésima equação. Portanto, basta mostrarmos que elas são equivalentes. De fato, pois:

Se $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ for solução de S então:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i \qquad \text{(I)}$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + ... + a_{in}\alpha_n = b_j \qquad (II)$$

Substituindo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1° membro de i-ésima equação de S', segue:

$$\begin{aligned}&(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n \\ &= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n) + (a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n) \\ &= b_i + b_j\end{aligned}$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S'. Reciprocamente, se $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução de S' então:

$$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j \qquad \text{(I)}$$
$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j \qquad \text{(II)}$$

Das igualdades (I) e (II) , vem que:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$$

O que significa que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Portanto, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S. □

Resumindo, as operações que permitem escalonar um sistema S, decorrentes dos teoremas **3.6.1** e **3.6.2**, são:

1. Troca de equações entre si;

2. Multiplicação de uma equação por uma constante real $k \neq 0$;

3. Adição a uma equação de um múltiplo de outra (Sem alteração das demais equações).

Observação 3.6.1. Mas, qual o siginificado geométrico de tais operações ? No caso de um sistema 2×2, cujas equações representam retas, ao efetuarmos as operações elementares apresentadas acima, estamos gerando novas retas, porém, preservando a interseção das mesmas, ou seja, o conjunto solução, pois conforme já vimos estamos produzindo um sistema equivalente ao original. Análogo ao caso 2×2, o mesmo vale para um sistema linear 2×3 ou 3×3 cujas equações lineares do sistema representam planos. Geometricamente, a transformação aplicada produz novos planos, contudo, é mantida a interseção dos planos, ou seja, o conjunto solução.

A ilustração abaixo vai tornar mais clara tal afirmação.

$$S_1 \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

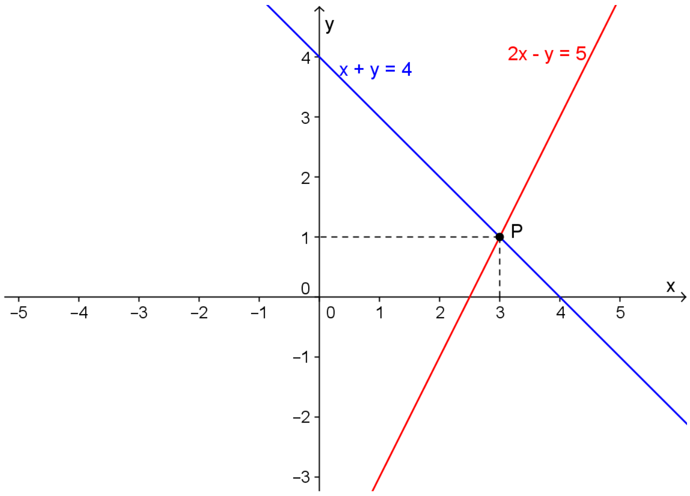

Figura 3.16: Representação geométrica do sistema S_1, onde $(3,1)$ é a solução do sistema.

$$S_2 \begin{cases} x + y = 4 \\ 0x - 3y = -3 \end{cases}$$

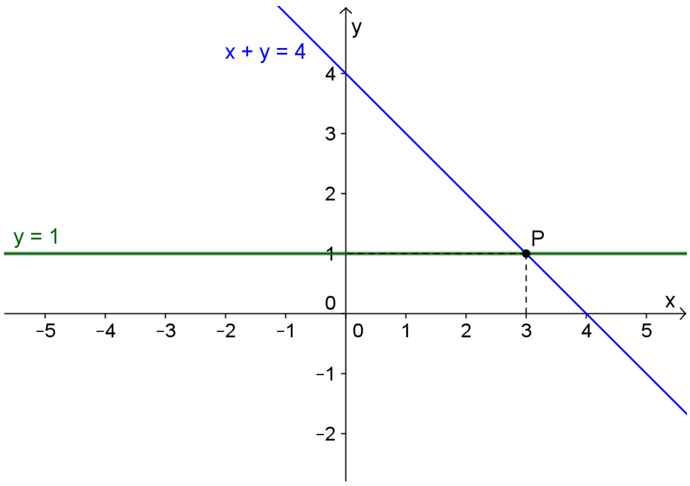

Figura 3.17: Representação geométrica do sistema S_2.

Temos dois sistemas equivalentes S_1 e S_2, onde S_2 foi obtido de S_1 substituindo sua 2ª equação por ela somada ao produto da 1ª equação por -2. Conforme colocamos, as novas retas obtidas em S_2 preservam o ponto de interseção como podemos ver na figura **3.17**.

Agora vejamos o passo a passo de como escalonar um sistema, o procedimento é o seguinte:

1° Passo

Colocamos 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja diferente de zero.

2° Passo

Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita em todas as equações abaixo da 1ª, substituindo a i-ésima $(i \geq 2)$ equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por uma constante conveniente.

3° Passo

Deixamos de lado a 1ª equação e aplicamos o 1° e o 2° passos nas equações restantes.

4° Passo

Deixamos de lado a 1ª e a 2ª equações e aplicamos o 1° e o 2° passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Os exemplos a seguir, ajudarão a esclarecer o método do escalonamento.

Exemplo 3.6.3. *Vamos resolver pelo método do escalonamento o sistema do* ***exemplo 3.5.8*** *da seção anterior:*

$$\begin{cases} -x+2y+z=1 \\ -2x+y-4z=4 \\ x+2y-3z=5 \end{cases}$$

Solução:

Trocando a 1ª com a 3ª equação, vem:

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ -2x+y-4z=4 \\ -x+2y+z=1 \end{cases}$$

Substituindo a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por 2 e substituindo a 3ª equação pela soma dela com a 1ª , vem:

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ \quad 5y-10z=14 \\ \quad 4y-2z=6 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por $\frac{1}{5}$, segue:

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ \qquad y-2z=2,8 \\ \quad 4y-2z=6 \end{cases}$$

Substituindo a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por -4, vem:

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ \qquad y-2z=2,8 \\ \qquad\quad 6z=-5,2 \Rightarrow z=\dfrac{-5,2}{6}=\dfrac{-13}{15} \end{cases}$$

Daí, substituindo o valor de z na 2ª equação segue que $y=\frac{16}{15}$ e substituindo y e z na 1ª equação decorre que $x=\frac{4}{15}$. Portanto, o conjunto solução é $S=\left\{\frac{4}{15},\frac{16}{15},\frac{-13}{15}\right\}$.

Exemplo 3.6.4. *Vamos agora resolver pelo método do escalonamento o **exemplo 3.5.4** da seção anterior.*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 4 \\ 3x + 9y - 6z = 5 \end{cases}$$

Solução:

Substituindo a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -2 e substituindo a 3ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por -3 , vem:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \quad \Rightarrow S = \emptyset \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

Portanto, de fato, o sistema não admite soluções reais, pois não existem números reais tais que $0x + 0y + 0z = 2$.

Exemplo 3.6.5. *Consideremos o sistema:*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4z = 2 \end{cases}$$

Solução:

Substituindo a 2ª linha pela soma dela com a 1ª linha multiplicada por -2 e substituindo a 3ª linha pela soma dela multiplicada por -2, vem que:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ \quad - 5y + z = 0 \\ \qquad\quad 0z = 0 \end{cases}$$

Portanto, temos um sistema com infinitas soluções e que são da forma :

$$(7y + 1, y, 5y); y \in \mathbb{R}.$$

3.7 Regra de Cramer

Nesta seção apresentaremos mais um método de resolução de sistemas lineares destacando seu significado geométrico, que é a regra de Cramer. Tal regra só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas e está baseada no cálculo de determinantes.

Essa regra leva o nome do matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752), que a demonstrou em 1750, embora não tenha sido o primeiro matemático a fazê-lo; acredita-se que a regra já era conhecida por Maclaurin desde 1729.

Inicialmente, vamos enunciar e demostrar essa regra para o caso de um sistema 2×2. Antes, observe que um sistema linear da forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ pode ser escrito em termos de matrizes, isto é, na forma $AX = B$, onde $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. A é denominada de matriz dos coeficientes, B de matriz dos termos independentes e X de matriz das incógnitas.

Proposição 3.7.1. Considere um sistema linear 2×2 nas incógnitas x e y: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$
Seja D o determinante da matriz A dos coeficientes do sistema, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } D = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Se $D \neq 0$, então o sistema tem uma única solução (x, y) dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D},$$

em que D_x e D_y são os determinantes das matrizes obtidas a partir de A substituindo, respectivamente, a coluna dos coeficientes de x e a coluna dos coeficientes de y em A pela coluna dos termos independentes das equações dos sistema.

Demonstração. Vamos resolver o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ pelo método do escalonamento. Multiplicando a 1ª equação por $(-a_2)$, $a_2 \neq 0$, e a 2ª equação por a_1, $a_1 \neq 0$, pois $D \neq 0$, e substituindo a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, vem que:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \end{cases}$$

Agora note que $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = D$ e $a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 = D_y$. Logo, como $D \neq 0$, segue que:

$$y = \frac{D_y}{D}.$$

Substituindo o valor de y na 1ª equação, vem:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \quad &\Rightarrow \quad a_1x + b_1 \cdot \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad a_1 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1)x + b_1 \cdot (a_1c_2 - a_2c_1) = c_1 \cdot (a_1b_2 - a_2b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1.} \end{aligned}$$

Veja que $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = D$ e $b_1c_2 - b_2c_1 = D_x$. Portanto, $x = \dfrac{D_x}{D}$
Logo, de fato, o sistema tem uma única solução dada por :

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right).$$

□

Exemplo 3.7.1. *Usando a regra de Cramer, resolva o sistema* $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$.

Solução:

Observemos que $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$. Assim, o sistema é possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 0 = 18 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{-1} = -18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-1} = 12$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(-18, 12)\}$.

E geometricamente, qual o significado da Regra de Cramer em sistemas 2×2?

No sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, consideremos os vetores-coluna:

$$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \text{ e } c = (c_1, c_2).$$

Os pares de vetores a e b, c e b e c e a determinam no plano três paralelogramos, se os representarmos com a mesma origem. No livro Coordenadas no Espaço de Elon Lages Lima, página 112 [15], é mostrado que os determinantes D, D_x e D_y da regra de Cramer, medem, em valor absoluto, a área desses paralelogramos conforme ilustra a figura abaixo:

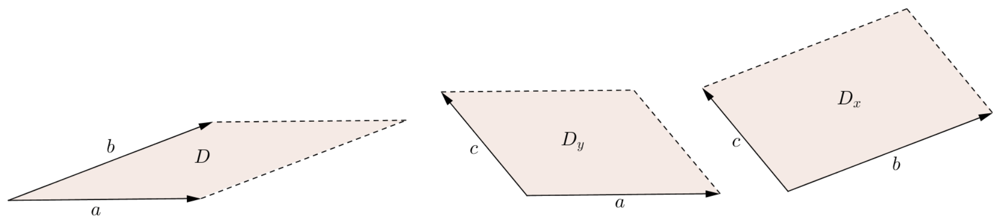

Figura 3.18: Interpretação geométrica da Regra de Cramer no caso 2x2.

Proposição 3.7.2. Considere um sistema linear 3×3 nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3\text{z} = 0. \end{cases}$$

Seja D o determinante da matriz A dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \det A.$$

Se $D \neq 0$, então o sistema tem uma única solução (x, y, z) dada por:

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D} \text{ e } z = \frac{D_z}{D},$$

em que D_x, D_y e D_z são os determinantes das matrizes obtidas a partir de A substituindo, respectivamente, a coluna dos coeficientes de x , a coluna dos coeficientes de y e a coluna dos coeficientes de z pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Demonstração. A demonstração pode ser feita de modo análogo ao caso 2×2, resolvendo o sistema pelo método do escalonamento chegaremos a tal conclusão. □

Observação 3.7.1. Assim como no caso 2×2, a regra de Cramer também tem um significado geométrico em três dimensões, a diferença é que ao invés de áreas de paralelogramos, temos que os valores dos determinantes na resolução dos sistemas 3×3 : D, D_x, D_y e D_z representam, em valor absoluto, os volumes dos paralelepípedos determinados pelos ternos de vetores, $[a, b, c]$, $[d, b, c]$, $[a, d, c]$ e $[a, b, d]$, respectivamente, onde:

$$a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3),\ c = (c_1, c_2, c_3) \text{ e } \mathrm{d} = (\mathrm{d}_1, d_2, d_3).$$

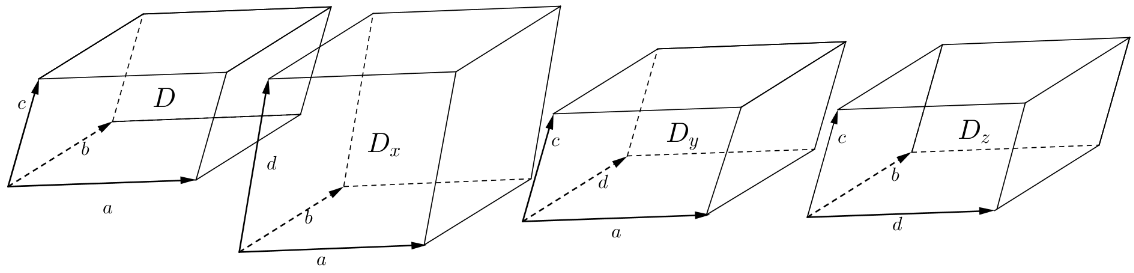

Figura 3.19: Interpretação geométrica da Regra de Cramer no caso 3x3.

Exemplo 3.7.2. *Usando a regra de Cramer, vamos resolver o sistema* $\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - 4z = 4 \\ x + 2y - 3z = 5, \end{cases}$

*do **exemplo 3.5.8** da seção anterior.*

Solução:

Temos que $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, assim o sistema tem uma única solução.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-30} = \frac{4}{15}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -32 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-32}{-30} = \frac{16}{15}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{-26}{30} = \frac{-13}{15}$$

Logo, o conjunto solução $S = \{(\frac{4}{15}, \frac{16}{15}, \frac{-13}{15})\}$.

Observação 3.7.2. Eis algumas considerações sobre a regra de Cramer.

1. Vale ressaltar que a regra de Cramer só funciona perfeitamente quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Aplicá-la em outro caso, poderá induzir a erros, como é comum observamos em alguns livros didáticos que afirmam:
   "Se os determinantes da regra de Cramer forem todos nulos o sistema é indeterminado, isto é, tem infinitas soluções", o que é falso, pois o sistema poderá ser impossível, por exemplo, quando os planos representados nas equações são paralelos.

2. A regra de Cramer no caso sistemas com três equações e três incógnitas, se consagra, tradicionalmente, como o principal método de resolução, porém como vimos é bastante penoso, assim, acreditamos que o Escalonamento se apresenta como um método mais prático, até porque não exige certas condições, sendo, portanto, mais geral.

Capítulo 4

Sistema de Inequações Lineares

4.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos as inequações linerares da mesma forma que as equações lineares tanto sob o ponto de vista álgébrico quanto do geométrico. Para permitir o uso da intuição geométrica e ficar acessível aos alunos da educação básica, nos limitaremos ao estudo das inequações lineares no plano cartesiano.

4.2 Inequações Lineares em uma variável

Uma *inequação* é afirmação envolvendo uma ou mais variáveis expressa por uma desigualdade. Em particular, uma *inequação do* 1° *grau (linear) em uma variável* é qualquer inequação que pode ser escrita na forma:

$$ax + b > 0 \text{ ou } ax + b < 0 \text{ ou } ax + b \geq 0 \text{ ou } ax + b \leq 0,$$

onde x é a variável e a e b são números reais.

A inequação $2x + 5 > 3x + 2$ é uma inequação de primeiro grau em uma variável que afirma que o membro esquerdo da inequação é maior do que o direito. Nesta seção resolveremos e representaremos geometricamente equações dessa forma. Certos valores reais da variável vão satisfazer a inequação. Esses valores formam o *conjunto solução da inequação.* Por exemplo, o número 2 pertence ao conjunto solução de $2x+5 > 3x+2$, pois $2\cdot2+5 = 9 > 3\cdot2+2 = 8$. *Resolver* uma inequação significa encontrar seu conjunto solução, e duas inequação são *equivalentes* se elas tiverem o mesmo conjunto solução.

Assim como fizemos com as equações, determinamos as soluções para as inequações encontrando inequações equivalentes a partir das quais as soluções podem ser facilmente obtidas. Usamos as seguintes propriedades para reduzir uma inequação a uma inequação mais simples mas equivalente a inequação original.

1) Propriedade da Substituição

A inequação formada pela substituição de uma expressão por outra igual é equivalente à inequação original. Como mostra o exemplo abaixo:

$$3x - 2x > 4 \Leftrightarrow x > 4$$

2) Propriedade da Adição

A inequação formada pela adição do mesmo número real em ambos os lados de uma inequação é equivalente à inequação original. Veja no exemplo abaixo:

$$x - 5 > 4 \Leftrightarrow x - 5 + 5 > 4 + 5 \Leftrightarrow x > 9.$$

3) Propriedade da Multiplicação

A inequação obtida pela multiplicação de ambos os lados de uma inequação pelo mesmo *valor real positivo* é equivalente à inequação original e a inequação formada pela multiplicação de ambos os membros de uma inequação pelo mesmo *valor real negativo* e pela inversão da direção do símbolo de desigualdade é equivalente à inequação original. Veja nos exemplos abaixo:

$$\frac{1}{3}x > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x \cdot 3 > 4 \cdot 3 \Leftrightarrow x > 3.$$

$$-2x \leq 9 \Leftrightarrow -2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \geq 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{2}.$$

Representa-se graficamente a solução de inequações em uma variável na reta real. Por exemplo, o gráfico de $x < 3$ consiste de todos os pontos à esquerda de 3 na reta real. O círculo vazado no gráfico da Figura **4.1** indica que a solução é formada por todos os pontos até 3, mas sem incluir o 3.

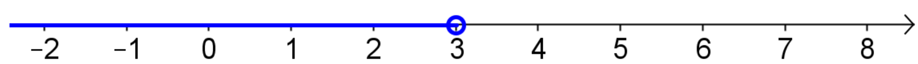

Figura 4.1: Solução gráfica da inequação $x < 3$.

Exemplo 4.2.1. *Resolva a inequação*

$$\frac{x}{-3} < 4$$

e represente graficamente o conjunto solução.

SOLUÇÃO:

$$\frac{x}{-3} < 4$$

Multiplicando ambos os lados por -3 e invertendo a desigualdade vem que:

$$\frac{x}{-3} \cdot (-3) > 4 \cdot (-3) \Leftrightarrow x > -12$$

Assim, conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x > -12\}$. Geometricamente, temos o gráfico que é mostrado na Figura **4.2**.

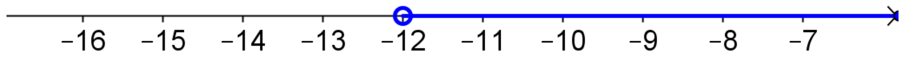

Figura 4.2: Representação geométrica de $x > -12$.

Exemplo 4.2.2. *Resolva a inequação e represente goemetricamente seu conjunto solução.*

$$2 \cdot (x-3) < \frac{x-2}{3}$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (x-3) < \frac{x-2}{3}\\
&6 \cdot (x-3) < x-2\\
&6x - 18 + 18 < x - 2 + 18\\
&6x < x + 16\\
&6x - x < x + 16 - x\\
&5x < 16\\
&x < \frac{16}{5}
\end{aligned}$$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R}; x < \frac{16}{5}\right\}$. Geometricamente, temos como gráfico a Figura **4.3**.

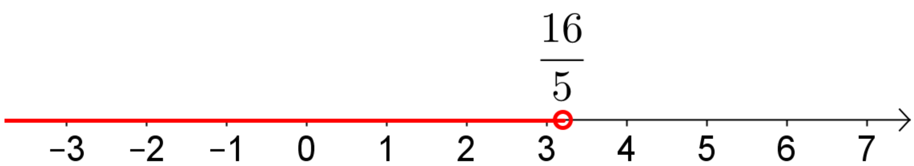

Figura 4.3: Representação geométrica de $x < \frac{16}{5}$.

Exemplo 4.2.3. *Resolva e represente geometricamente o conjunto solução da inequação:*

$$3x - 4 \leq 6$$

SOLUÇÃO:

Resolvendo usando as propriedades mostradas acima, segue:

$$\begin{aligned}
&3x - 4 \leq 6\\
&3x \leq 10\\
&x \leq \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \leq \dfrac{10}{3} \right\}$. Geometricamente, temos o gráfico na Figura **4.4**.

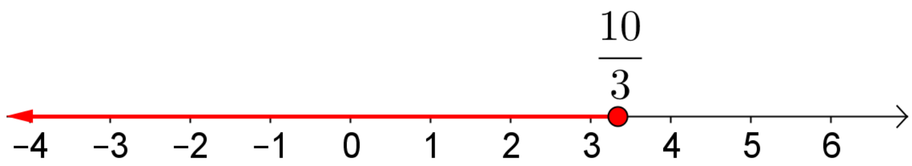

Figura 4.4: Representação geométrica de $x \leq \dfrac{10}{3}$.

4.3 Inequações Lineares em duas variáveis

Já vimos que a uma equação do tipo $ax + by = c \Leftrightarrow ax + by - c = 0$ está associada uma reta no plano cartesiano. Esta equação pode ser representada por algebricamente pela equação $F(x, y) = 0$ onde $F(x, y) = ax + by - c$ é uma expressão algébrica linear envolvendo duas variáveis x e y, isto é, ambas do 1° grau. Nesse caso, $F(x, y) = 0$ representa uma reta no plano. Essa reta divide o plano em duas regiões, ditas semi-planos. Uma dessas regiões é formada por todos os pontos (x, y) do plano que satisfaz a desigualdade $F(x, y) > 0$ e a outra por todos os pontos do plano que satisfazem a condição $F(x, y) < 0$.

Casos Particulares

Analisaremos, inicialmente, inicialmente exemplos para os casos particulares, em que pelo menos uma das constantes reais a e b é nula.

I. $a = 0$ e $b \neq 0$

Exemplo 4.3.1. *Representar, no plano, os pontos que satisfazem a condição*

$$y - 2 < 0.$$

Solução:

Os pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem esta condição são aqueles situados "abaixo" da reta $y = 2$, ou seja, um semiplano aberto.

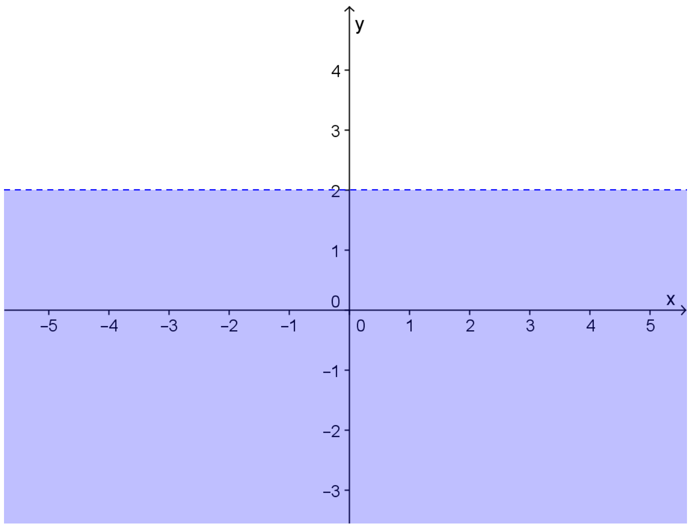

Figura 4.5: Semiplano $y < 2$.

II. $a \neq 0$ e $b = 0$

Exemplo 4.3.2. *Representar, no plano, os pontos que cumprem a condição*

$$2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Solução:
Os pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano que cumprem tal condição são aqueles situados "à direita" da reta $x = 1$, reunidos com os pontos dessa mesma reta, ou seja, um semiplano fechado.

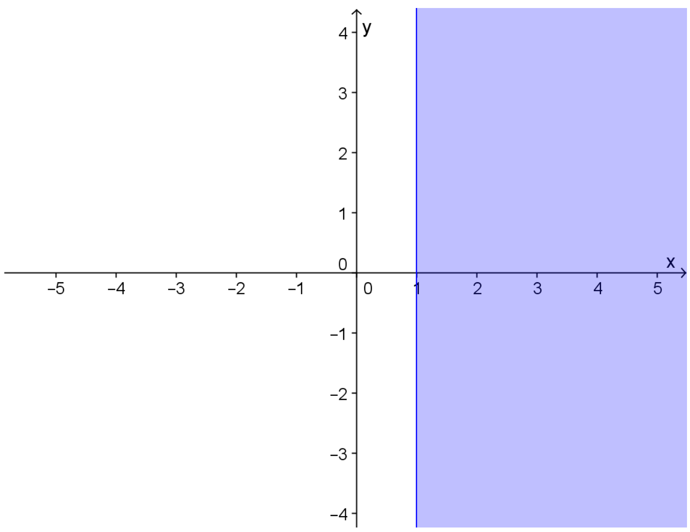

Figura 4.6: Semiplano $x \geq 1$.

III. $a = 0$ e $b = 0$

Exemplo 4.3.3. *Representar no plano os pontos que satisfazem a condição*

$$0x + 0y + 3 > 0.$$

A condição é satisfeita por todos os pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano.

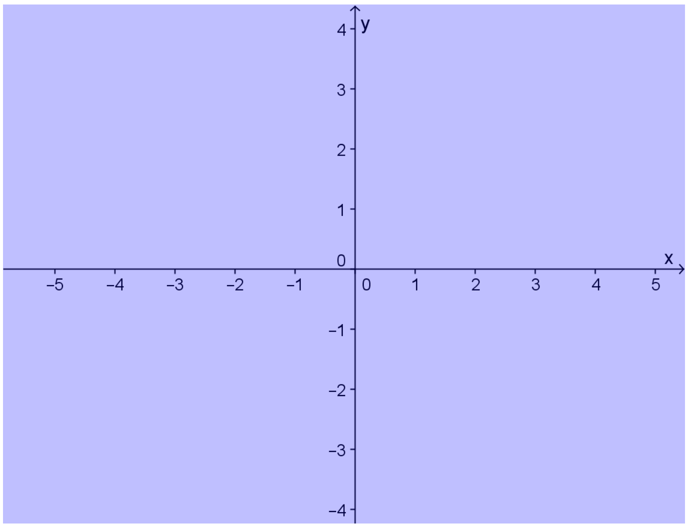

Figura 4.7: Plano cartesiano

Exemplo 4.3.4. *Representar no plano os pontos que satisfazem a condição* $0x + 0y - 3 > 0$.

Nenhum ponto do plano cartesiano cumpre essa condição, logo ela representa um conjunto vazio.

Caso Geral

Analisaremos agora os casos em as constantes a e b não são nulas. Seja r uma reta do plano cartesiano de equação $ax + by = c$ $(a \neq 0$ e $b \neq 0)$, representada, por exemplo, conforme a Figura **4.8**:

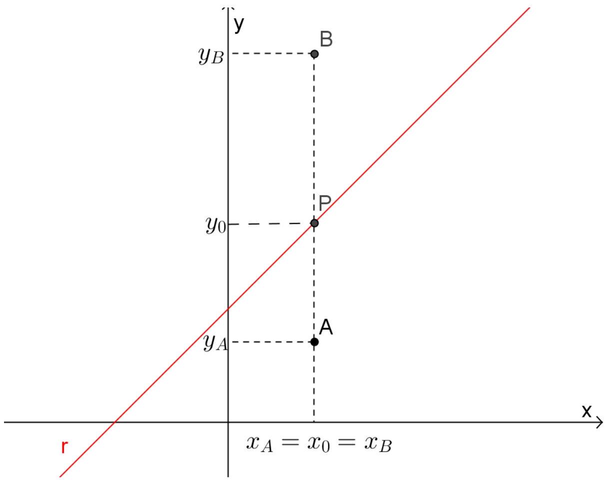

Figura 4.8: $y_B > y_0 > y_A$.

Consideremos também a equação reduzida de $r : y = mx + n$. Sendo $P = (x_0, y_0)$, temos que $y_0 = mx_0 + n$. Consideremos agora no plano cartesiano um ponto $A = (x_A, y_A)$, situado "abaixo" de r, e um ponto $B = (x_B, y_B)$, situado "acima" de r modo que $x_A = x_0 = x_B$, onde x_0 é abscissa de um ponto $P = (x_0, y_0)$ da reta r.

Do gráfico, podemos observar que:

$$y_A < mx_0 + n = mx_A + n \text{ e } y_B > mx_0 + n = mx_B + n.$$

Assim, podemos concluir que:

1. Para todos os pontos $P = (x, y)$ do plano situados "acima" de r vale a relação:

$$y > mx + n$$

2. Para todos os pontos $P = (x, y)$ do plano situados "abaixo" de r vale a relação:

$$y < mx + n$$

Exemplo 4.3.5. *Represente graficamente a inequação* $3x - 2y \leq 6$.

Solução:
Observe que $3x - 2y \leq 6 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{3}{2}x + 3$. Traçando a reta representada por $y = \dfrac{3}{2}x + 3$ como uma linha cheia pois os pontos que estão na reta satisfazem a inequação dada, vem das conlusões acima que o conjunto solução é formado por todos os pontos "acima"da reta reunidos com os pontos já indicados da reta, conforme a Figura **4.9** abaixo.

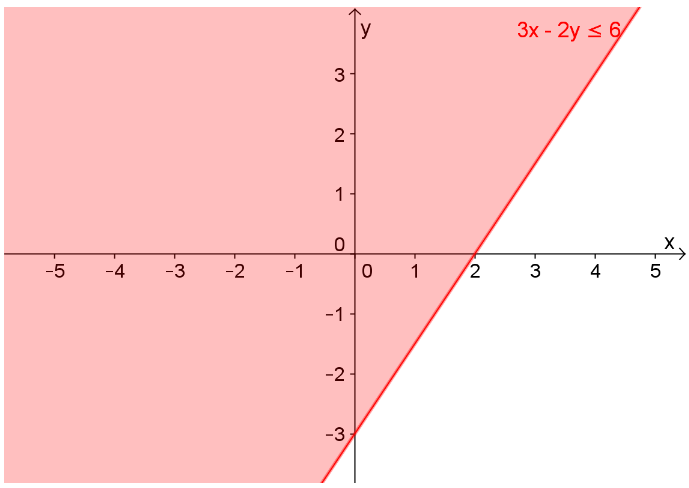

Figura 4.9: Semiplano $3x - 2y \leq 6$.

4.4 Sistema de Inequações Lineares com duas variáveis

Um *sistema de inequações lineares com duas incógnitas* é um conjunto de duas ou mais desigualdades dos tipos $ax + by + c < 0$, $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \leq 0$ ou $ax + by + c \geq 0$, onde a, b e c representam números reais. O *conjunto solução* de um sistema desse tipo é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem, simultaneamente, a todas as desigualdades dadas.

De um modo geral, para encontrarmos a solução de um sistema de inequações com duas incógnitas, devemos primeiro, encontrar os semiplanos que são as soluções de cada uma das inequações lineares dadas e por fim determinarmos a interseção dos mesmos. Os exemplos a seguir mostrarão como resolvermos tais sistemas de inequações lineares.

Exemplo 4.4.1. *Represente graficamente a solução do sistema*

$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 4 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

Solução:

As inequações, de forma equivalente, podem ser escritas na forma

$$y \leq \frac{2}{3}x - 4$$
$$y > -x + 2$$

Traçamos $y = \dfrac{2}{3}x - 4$ como uma reta cheia e $y = -x + 2$ como uma reta tracejada. A solução da primeira inequação é o semiplano fechado abaixo da reta $y = \dfrac{2}{3}x - 4$ e a solução da segunda inequação é o semiplano aberto acima da reta $y = -x + 2$. Portanto, a solução do sistema é a interseção dessas regiões. Os pontos de encontro das retas que satisfazem ambas inequações são denominados de *vértices*, como já sabemos tais vértices são obtidos resolvendo o sistema linear formado por cada uma das equações lineares presentes nesse sistema, nesse exemplo, o vértice é o ponto $P = (2, 0)$ conforme indicado na Figura **4.10**.

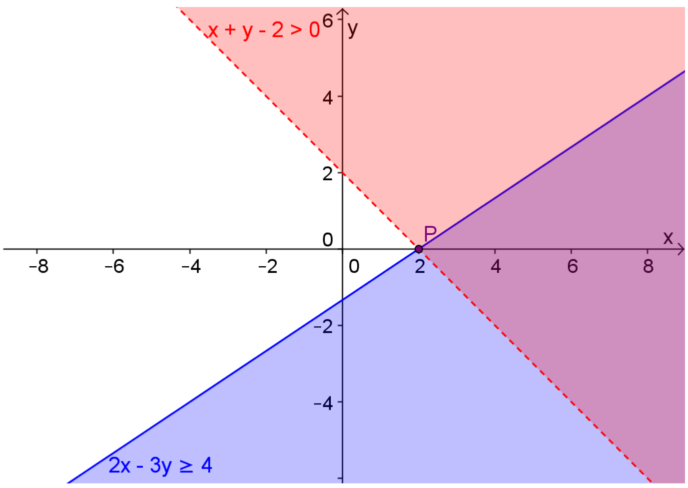

Figura 4.10: A região em lilás representa o conjunto solução do sistema.

Exemplo 4.4.2. *Represente graficamente a solução do sistema*

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y > 7 \end{cases}$$

Solução:

As inequações, de forma equivalente, podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} &y \geq -2x + 6 \\ &x \geq 0 \\ &y \geq 0 \\ &y > \frac{-x}{2} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Traçamos $y = -2x + 6$ como uma reta cheia, assim como as retas e $y = \dfrac{-x+7}{2}$ como uma reta tracejada. A solução da primeira inequação é o semiplano fechado acima da reta $y = -2x + 6$, a segunda e terceira inequação restrigem as regiões ao primeiro quadrante e a solução de $y > \dfrac{-x+7}{2}$ é o semiplano aberto acima da reta $y = \dfrac{-x+7}{2}$. Logo, a solução do sistema é a interseção dessas regiões conforme indicado na Figura **4.11**, em lilás.

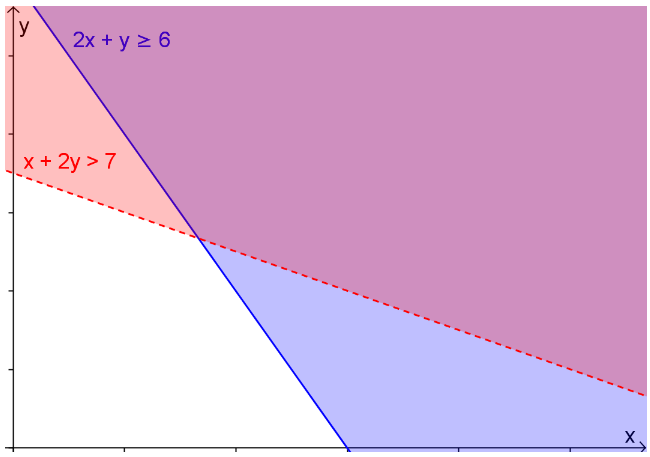

Figura 4.11: Representação geométrica da solução restrita ao primeiro quadrante.

Capítulo 5

Resolução de Problemas por Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como Administração, Economia, Eletrônica, Informática, Engenharia, Física, entre outras. Neste capítulo iremos apresentar algumas dessas aplicações por meio da resolução de problemas do cotidiano.

5.1 Problemas modelados por Desigualdades Lineares

Problema 5.1.1. Um vendedor tem um ganho mensal y dado pela fórmula

$$y = 1000 + 0,2 \cdot x,$$

onde x é o volume mensal de vendas, em reais. Quando ele deve vender para ganhar pelo menos R$ 2.500,00 em um mês?

Solução:
Devemos encontrar x tal que $y = 1000 + 0,2 \cdot x \geq 2500$. Resolvendo essa inequação, vem que $x \geq 7500$. Logo, o vendedor deve vender R$ 7.500,00.

Problema 5.1.2. (FGV 2010) Maria, que tem 52 anos, faz uma dieta alimentar e precisa tomar um lanche às 15:30 horas, no qual não pode consumir mais que 500 calorias, e precisa ingerir as necessidades mínimas diárias de cálcio, a saber, 1.200 mg/dia. Nesse lanche, ela quer tomar leite desnatado e comer amêndoas. Dentre os dados fornecidos por sua nutricionista, estão os seguintes:

	Porção (quantidades aproximadas)	Calorias (kcal)	Teor de cálcio (mg por 100 g de alimento)
Leite desnatado	250 ml	100	300
Amêndoas	30 g	200	150

a) Represente algebricamente as condições do problema, considerando as porções de leite desnatado e de amêndoas.

b) Represente graficamente as condições do problema no plano cartesiano $X0Y$.

c) É possível Maria ingerir exatamente 500 calorias e 1200 mg de cálcio se ingerir somente leite desnatado e amêndoas no lanche da tarde? Justifique sua resposta.

Solução:

a) $\begin{cases} 100x + 200y \leq 500 \\ 0,25x.300 + 0,3y.150 > 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ 50x + 3y \geq 80 \end{cases}$

b)

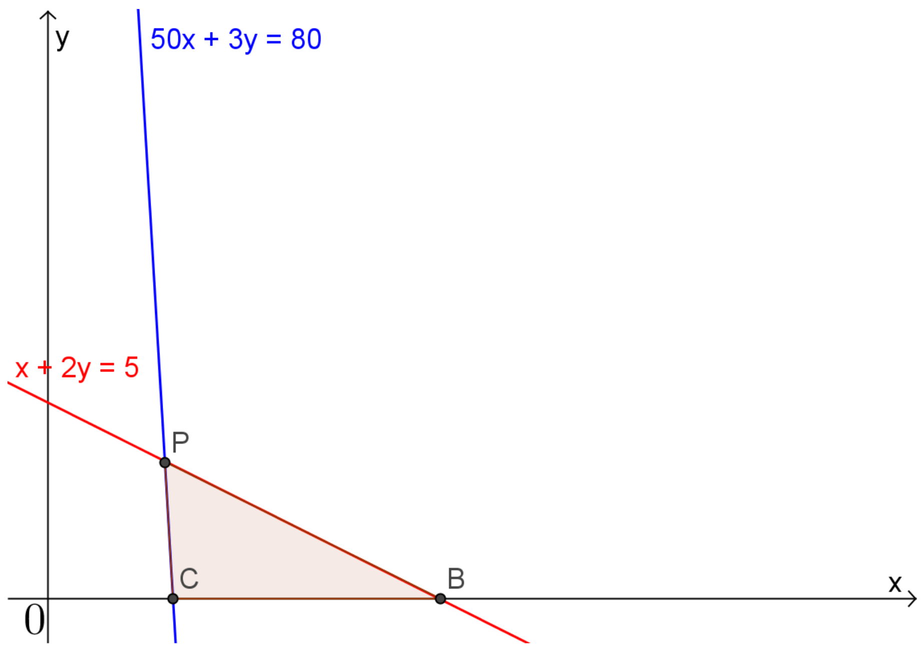

Figura 5.1: Região triangular PBC representando as condições do problema.

c) O ponto P solução do sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 50x + 3y = 80 \end{cases}$ fornece a quantidade de leite desnatado e amêndoas que Maria deve consumir.

Resolvendo temos que $x = 1,49$ e $y = 1,75$.

A resposta é $1,49$ porções de leite desnatado e $1,75$ porções de amêndoas, ou seja, é sim possível.

Problema 5.1.3. (UEG 2010) Em uma chácara há um pasto que é utilizado para criar vacas e bezerros. Esse pasto tem área de dois hectares, sendo que cada um corresponde a um quadrado de 100 metros de lado. Observações técnicas indicam que cada vaca deverá ocupar uma área de, no mínimo, 1000 m^2 e cada bezerro de, no mínimo, 400 m^2.

a) De acordo com as observações técnicas, esse pasto comportará 15 vacas e 15 bezerros? Justifique sua resposta.

b) Represente algébrica e graficamente as condições dessa situação, respeitando as observações técnicas.

Solução:

a) Não. A área do pasto, em m^2, é:

$$2 \text{ ha} = 200 \text{ a} = 200 \text{ dam}^2 = 20.000 \text{ m}^2.$$

De acordo com as observações técnicas, temos:

$$15 \cdot (1000 + 400) = 21.000 \text{ m}^2 > 20.000 \text{ m}^2.$$

b) Sejam x e y, respectivamente, o número de vacas e o número de bezerros. Logo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1000x + 400y \leq 20000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 100 \end{cases}.$$

A representação gráfica das condições acima é a região triangular limitada pelos eixos coordenados e a reta $y = -\dfrac{5}{2}x + 50$.

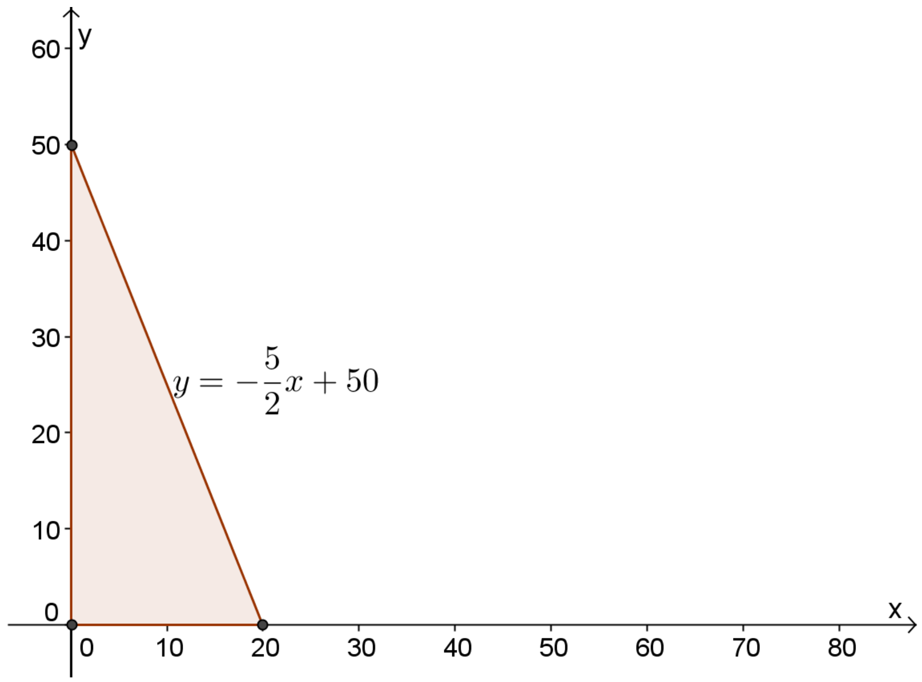

Figura 5.2: Representação gráfica das condições do problema

Problema 5.1.4. Um comerciante vende dois tipos de produtos, **A** e **B**. Na venda do produto **A** tem um lucro de R$ 25,00 por unidade, e na venda do produto **B** tem um lucro de R$ 40,00 reais por unidade. Em seu depósito só cabem 120 produtos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 20 produtos do tipo **A** e 30 produtos do tipo **B**. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 70 produtos do tipo **A** e 80 produtos do tipo **B**. Quantos produtos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?

Solução:

Se x representa o número de produtos **A** e y o número de produtos **B,** então queremos o valor máximo da função $L = 25x + 40y$, sujeita as restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ 20 \leq x \leq 70 \\ 30 \leq y \leq 80, \end{cases}$$

onde L representa o lucro, em reais. Resolvendo geometricamente esse sistema de inequações, segue que a região poligonal $ACDEB$ é a solução do sistema.

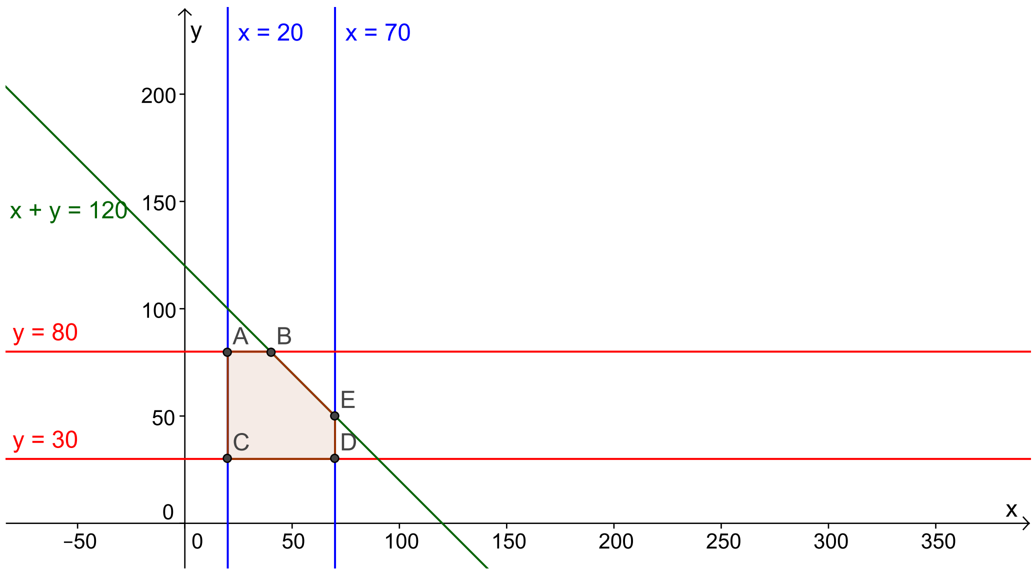

Figura 5.3: Polígono $ACDEB$.

Sendo assim, é preciso verificar para qual dos vértices, L é máximo:

$$\begin{aligned} A = (20, 80) &\Rightarrow L = 25 \cdot 20 + 40 \cdot 80 = 3700 \\ C = (20, 30) &\Rightarrow L = 25 \cdot 20 + 40 \cdot 30 = 1700 \\ D = (70, 30) &\Rightarrow L = 25 \cdot 70 + 40 \cdot 30 = 2950 \\ E = (70, 50) &\Rightarrow L = 25 \cdot 70 + 40 \cdot 50 = 3750 \\ B = (40, 80) &\Rightarrow L = 25 \cdot 40 + 40 \cdot 80 = 4200 \end{aligned}$$

Logo, o lucro será máximo quando o comerciante encomendar 40 produtos **A** e 80 produtos **B**.

O problema que acabamos de resolver é um exemplo simples de problemas estudados pela **programação linear**.

O problema geral de programação linear é utilizado para **otimizar** (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de *função objetivo*, sujeita a uma série de equações (ou inequações) lineares, chamadas **restrições**.

A formulação do problema a ser resolvido segue três pontos básicos:

1. Definição do objetivo do problema;

2. Definição das variáveis de decisão envolvidas;

3. Conhecimento das restrições a que está sujeito o problema.

Observação 5.1.1. Perceba que no exemplo acima, o Domínio da função-objetivo era uma região poligonal. Como estamos sempre lidando com eqüações e inequações lineares, o domínio sempre será um polígono. Nunca conseguiremos obter curvas no gráfico do Domínio da função-objetivo. Outra coisa interessante é que o ponto ótimo que estávamos buscando coincidiu com um dos vértices do polígono. No caso de modelos de programação linear, isso sempre será verdade. Assim, basta fazermos o gráfico do Domínio da função-objetivo e checarmos os valores da função em todos os seus vértices para calcularmos o ponto ótimo.

Problema 5.1.5. Uma empresa fabrica dois tipos de boxes (8 mm) para banheiros, o transparente, cujo preço unitário de custo, no tamanho padrão, é de R$ 200,00, e o colorido (fumê ou verde), cujo preço unitário de custo, no tamanho padrão, é R$ 300,00. As restrições financeiras da empresa permitem que ele gaste, semanalmente, no máximo R$ 9.000,00 para fabricar os boxes. Sua capacidade produtiva é de até 32 boxes por semana. Os boxes são vendidos aos preços unitários de R$ 280,00 o transparente e R$ 360,00 o colorido. Quantos boxes de cada tipo devem ser fabricados e vendidos, durante uma semana, a fim de maximizar a receita da empresa?

Solução:
Se x representa o número de boxes transparentes e y o número de boxes coloridos que serão produzidos e vendidos, então queremos o valor máximo da função $R = 280x + 360y$, sujeita as restrições:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 200x + 300y \leq 9000 \\ x + y \leq 32 \end{cases}$$

R representa a receita da empresa, em reais. Resolvendo esse problema de programação linear, conforme o problema anterior, teremos que a receita será máxima quando forem vendidos 6 boxes transparentes e 26 boxes coloridos.

5.2 Problemas modelados por Equações Lineares

Problema 5.2.1. (UERJ 2010) Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados todos os jogadores que marcaram 13, 14 ou 15 gols cada um. O número total de gols realizados pelos premiados foi igual a 125 e, desses atletas, apenas cinco marcaram mais de 13 gols. Calcule o número de atletas que fizeram 15 gols.

Solução:

Sejam:

$x =$ número de atletas que marcaram 13 gols

$y =$ número de atletas que marcaram 14 gols

$z =$ número de atletas que marcaram 15 gols

Daí, temos que:

$13x + 14y + 15z = 125$

$y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - y$ e $0 \leq y \leq 5$

$13x + 14y + 15(5 - y) = 125 \Rightarrow 13x + 14y + 75 - 15y = 125$

$13x - y = 50 \Rightarrow 13x - 50 = y$

$0 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 13x - 50 \leq 5 \Rightarrow 50 \leq 13x \leq 55 \Rightarrow \dfrac{50}{13} \leq x \leq \dfrac{55}{13} \Rightarrow x = 4.$

Portanto:

$y = 13x - 50 = 13 \cdot 4 - 50 = 2$

$z = 5 - y = 3$

Logo, o número de atletas que fizeram 15 gols é igual a 3.

Problema 5.2.2. (UFU 2011) A prefeitura de uma cidade, preocupada com o meio ambiente e com o problema da falta de espaço físico adequado destinado a depósitos de lixo, criou uma cooperativa de reciclagem em parceria com os moradores de baixa renda. A Tabela 1 fornece os preços de venda (em reais) de cada kg de papel, vidro e plástico referente à primeira semana dos meses de setembro de 2009 e setembro de 2010; a Tabela 2 expressa a quantidade total (em kg) vendida desses três materiais na primeira semana dos meses mencionados acima e o rendimento (em reais) referentes à venda dos materiais reciclados, obtidos nas referidas semanas.

Tabela 1

	Papel	Vidro	Plástico
Set/2009	0,30	0,20	0,50
Set/2010	0,40	0,30	1,0

Tabela 2

	Quantidade (kg)	Rendimento (reais)
Set/2009	8.000	R$ 2.580,00
Set/2010	9.000	R

Sabe-se que, na primeira semana de setembro de 2010, foram vendidos 50% a mais de papel do que o vendido na primeira semana de 2009 e iguais quantidades, que aquelas comercializadas na primeira semana de 2009, de vidro e plástico. Interprete e analise o texto dado, descrevendo expressões matemáticas que conduzam ao valor de R. Determine-o.

Solução:

$$\begin{cases} x+y+z=8000 \\ 0,3x+0,2y+0,5z=2580 \\ 1,5x+y+z=9000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:
$x=2000$
$y=3400$
$z=2600$
Portanto, o rendimento obtido será:
$R=0,4\cdot 300+0,3\cdot 3400+1\cdot 2600=4820$ reais

Problema 5.2.3. (Unicamp 2010) Uma confeitaria produz dois tipos de bolos de festa. Cada quilograma do bolo do tipo A consome $0,4$ kg de açúcar e $0,2$ kg de farinha. Por sua vez, o bolo do tipo B consome $0,2$ kg de açúcar e $0,3$ kg de farinha para cada quilograma produzido. Sabendo que, no momento, a confeitaria dispõe de 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha, responda às questões a seguir.
a) Será que é possível produzir 7 kg de bolo do tipo A e 18 kg de bolo do tipo B? Justifique sua resposta.
b) Quantos quilogramas de bolo do tipo A e de bolo do tipo B devem ser produzidos se a confeitaria pretende gastar toda a farinha e todo o açúcar de que dispõe?

Solução:
1 kg do bolo A: $0,4$ kg de açúcar e $0,2$ kg de farinha
1 kg do bolo B $0,2$ kg de açúcar e $0,3$ kg de farinha
a) 7 kg do tipo A e 18 kg do tipo B $(2.8+3.6)$ kg de açúcar e $(1,4+5,4)$ kg de farinha.
Logo não será possível, pois faltará farinha.
b) x kg do tipo A e y kg do tipo B
$$\begin{cases} 0,4x+0,2y=10 \\ 0,2x+0,3y=6 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema vem que $y=5$ kg e $x=22,5$ kg

Logo, a resposta é $22,5$ kg do tipo A e 5 kg do tipo B.

Problema 5.2.4. (UFPE 2011) Uma locadora de vídeos tem três estilos de filmes: de ficção cientifica, dramáticos e comédias. Sabendo que:
- o total de filmes de ficção cientifica e dramáticos, adicionado de um quarto dos filmes de comédia, corresponde a metade do total de filmes da locadora;
- o número de filmes de comédia excede em 800 o total de filmes de ficção cientifica e dramáticos;
- o número de filmes dramáticos e 50% superior ao número de filmes de ficção cientifica.
Encontre o numero de filmes dramáticos da locadora e indique a soma de seus dígitos.

Solução:

Sejam x, y e z, respectivamente, o número de filmes de ficção científica, o número de filmes dramáticos e o número de comédias.

De acordo com as informações do enunciado, temos que:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{z}{4}=\dfrac{x+y+z}{2} \\ z=x+y+800 \\ y=1,5x \end{cases} \sim \begin{cases} z=5x \\ z=2,5x+800 \\ y=1,5x \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2,5x=800 \\ y=1,5x \\ z=2,5x+800 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x=320 \\ y=480 \\ z=1600 \end{cases}.$$

Portanto, a locadora possui 480 filmes dramáticos.

Problema 5.2.5. (UFG 2012) Um fabricante combina cereais, frutas desidratadas e castanhas para produzir três tipos de granola. As quantidades, em gramas, de cada ingrediente utilizado na preparação de 100g de cada tipo de granola são dadas na tabela a seguir.

Tipo de granola/ingredientes	Cereais	Frutas	Castanhas
Light	80	10	10
Simples	60	40	0
Especial	60	20	20

O fabricante dispõe de um estoque de 18 kg de cereais, 6 kg de frutas desidratadas e 2 kg de castanhas. Determine quanto de cada tipo de granola ele deve produzir para utilizar exatamente o estoque disponível.

Solução:

Considerando:

x a quantidade de porções de 100 g de granola light

y a quantidade de porções de 100 g de granola simples e

z a quantidade de porções de 100 g de granola especial

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 80x+60y+60z=18000 \\ 10x+40y+20z=6000 \\ 10x \quad\quad + \quad 20z=2000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x=120$, $y=100$ e $z=40$, logo 12 kg de granola light, 10 kg de granola simples e 4 kg de especial.

Problema 5.2.6. (UFPE 2011) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1, A_2 e A_3 na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está na tabela a seguir:

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos (dos tipos C_1, C_2 ou C_3)?

Solução:
Sejam x, y e z, respectivamente, os números de carros fabricados dos tipos C_1, C_2 e C_3.
De acordo com as informações da tabela e do enunciado, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 26 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}.$$

Queremos calcular $x+y+z$. Somando as duas últimas equações do sistema, vem que $5x+5y+5z = 45 \Leftrightarrow x + y + z = 9$.

Portanto, o total de carros construídos é 9.

Problema 5.2.7. (UFES 2010) Vicente, que tem o hábito de fazer o controle do consumo de combustível de seu carro, observou que, com 33 L de gasolina, ele pode rodar 95 km na cidade mais 276 km na estrada e que, com 42 L de gasolina, ele pode rodar 190 km na cidade mais 264 km na estrada.
a) Calcule quantos quilômetros Vicente pode rodar na cidade com 1 L de gasolina.
b) Sabendo que Vicente viajou $143,5$ km com 13 L de gasolina, determine o comprimento do seu trajeto na estrada e o comprimento do seu trajeto na cidade.

Solução:
a)

$$\begin{cases} 95x + 276y = 33 \\ 190x + 264y = 42 \end{cases}$$

(onde x é o consumo em litros por km rodado na cidade e y é o consumo a cada km rodado na estrada).

Resolvendo o sistema, segue que $x = \dfrac{2}{19}$ L/km e $y = \dfrac{1}{12}$ L/km.

Portanto ele poderá rodar com 1 L de gasolina $\dfrac{19}{2}$ km na estrada e 12 km na cidade.

b)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{12}.E + \dfrac{2}{19}.C = 13 \\ E + C = 143,5 \end{cases}$$

(onde E é o trajeto na estrada e C o trajeto na cidade)

Resolvendo o sistema obteremos $E = 96$ km e $C = 47,5$ km.

Problema 5.2.8. (UFG 2010) Em um estádio, são colocados à venda ingressos para arquibancada e cadeira. Em um jogo de futebol, o público total que pagou ingresso foi de 5.715 pessoas. Desse total, 40% pagaram meia-entrada, sendo que 2/3 dos que compraram ingresso para arquibancada pagaram meia-entrada e 1/6 dos que compraram ingresso para cadeira pagou meia-entrada. Considerando que o preço do ingresso de arquibancada era R$ 20,00 e o de cadeira, R$ 30,00, calcule o valor total arrecadado com a venda de ingressos para esse jogo.

Solução:
Sejam a e c, respectivamente, o número de ingressos disponíveis para arquibancada e cadeira. Sabemos que $0,4 \cdot 5715 = 2286$ pessoas pagaram meia-entrada. Logo, devemos ter:

$$\begin{cases} a + c = 5715 \\ \dfrac{2a}{3} + \dfrac{c}{6} = 2286 \end{cases} \sim \begin{cases} a + c = 5715 \\ c = 13716 - 4a \end{cases} \sim \begin{cases} a = 2667 \\ c = 3048 \end{cases}.$$

Portanto, o valor total arrecadado com a venda de ingressos para esse jogo foi de:

$$\frac{1}{3} \cdot 2667 \cdot 20 + \frac{2}{3} \cdot 2667 \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 3048 \cdot 15 + \frac{5}{6} \cdot 3048 \cdot 30 = \text{R\$ } 119.380,00.$$

Problema 5.2.9. (INSPER 2009) Renato decidiu aplicar R$ 100.000,00 em um fundo de previdência privada. O consultor da empresa responsável pela administração do fundo sugeriu que essa quantia fosse dividida em três partes x, y e z, que seriam aplicadas em três investimentos A, B e C, respectivamente. Em seguida, mostrou a Renato duas simulações do desempenho da aplicação, considerando dois cenários distintos, para um período de 5 anos.

Cenário	Rendimento previsto para um período de 5 anos			Saldo previsto após 5 anos
	Investimento A	Investimento B	Investimento C	
Conservador	100%	50%	25%	R$ 170.000
Otimistas	100%	150%	200%	R$ 235.000

Com essas informações, determine os valores de x, y e z sugeridos pelo consultor.

Solução:
Com base nas informações fornecidas, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 100000 \\ 2x + 1,5y + 1,25z = 170000 \\ 2x + 2,5y + 3z = 235000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema , temos que: $x = 50000$, $y = 30000$ e $z = 20000$.

Problema 5.2.10. (UNESP 2007) Uma pessoa consumiu na segunda-feira, no café da manhã, 1 pedaço de bolo e 3 pãezinhos, o que deu um total de 140 gramas. Na terça-feira, no café da manhã, consumiu 3 pedaços de bolo e 2 pãezinhos (iguais aos do dia anterior e de mesma massa), totalizando 210 gramas. A tabela seguinte fornece (aproximadamente) a quantidade de energia em quilocalorias (kcal) contida em cada 100 gramas do bolo e do pãozinho.

Alimento	**ENERGIA**
100g de bolo	420 kcal
100g de pãozinho	270 kcal

Após determinar a quantidade em gramas de cada pedaço de bolo e de cada pãozinho, use a tabela e calcule o total de quilocalorias (kcal) consumido pela pessoa, com esses dois alimentos, no café da manhã de segunda-feira.

Solução:
Sejam x e y, respectivamente, a quantidade em gramas de cada pedaço de bolo e a quantidade em gramas de cada pãozinho. De acordo com o enunciado, temos que:

$$\begin{cases} x + 3y = 140 \\ 3x + 2y = 210 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem que $x = 50$ g e $y = 30$ g. Daí, pela tabela temos que o total consumido pela pessoa foi 210 kcal $+$ 81 kcal =291 kcal.

Referências Bibliográficas

[1] Hygino H. Domingues e Roberto C.F. Costa Carlos A. Callioli. Álgebra Linear e Aplicações. Atual Editora, São Paulo, 6ª edition, 1995.

[2] Pedro Sica Carneiro. Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações. 2007.

[3] Luiz Roberto Dante. Matemática: contexto e aplicações, volume 2. Ática, São Paulo, 1ª edition, 2010.

[4] Ana Lucia Infantozzi Jordão e Barbara Lutaif Bianchini. Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2 ano do ensino médio. Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044, 1(1), 2012.

[5] Abramo Hefez e Cecília de Souza Fernandez. Introdução à Álgebra Linear. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 1ª edition, 2013.

[6] Paulo Boulos e Ivan de Camargo. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Pearson education, São Paulo, 1987.

[7] Maria Cristina Costa Ferreira e Maria Laura Magalhães Gomes. Sobre o ensino de sistemas lineares. SBM, Revista do Professor de Matemática (RPM), 32:9–16, 1996.

[8] Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 4. Atual, São Paulo, 7ª edition, 2013.

[9] Elon Lages Lima et al. Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social (VITAE), Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 2001.

[10] Elon Lages Lima et al. Coordenadas no Plano. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professsor de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª edition, 2002.

[11] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio, volume 3. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professsor de Matemática, Rio de Janeiro, 6ª edition, 2006.

[12] Gelson Iezzi et al. Matemática: ciência e aplicações, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6ª edition, 2010.

[13] Claúdia Regina Flores. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. Bolema, Rio Claro (SP), 19(26):77–102, 2006.

[14] Elon Lages. Matemática e Ensino. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professsor de Matemática, Rio de Janeiro, 3ª edition, 2002.

[15] Elon Lages Lima. Coordenadas no Espaço. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professsor de Matemática, Rio de Janeiro, 3ª edition, 1992.

[16] Elon Lages Lima. Sobre o ensino de sistemas lineares. SBM, Revista do Professor de Matemática (RPM), 23:8–18, 1993.

[17] Andre Rodrigues Monticeli. Um estudo sobre sistemas de inequações lineares. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas . Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Março 2010.

[18] João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 1ª edition, 2013.

[19] Reginaldo J. Santos. Álgebra Linear e Aplicações. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2006.

[20] Paulo Winterle. Vetores e Geometria Analítica. Pearson Makron Books, São Paulo, 2000.