Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

JAMERSON TEMOTEO DA SILVA

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2020

JAMERSON TEMOTEO DA SILVA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Regional do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Alexsandro Coelho Alencar

Coorientadora: Ma. Juscelândia Machado Vasconcelos

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2020

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri – URCA
Bibliotecária: Ana Paula Saraiva de Sousa CRB: 3/1000

Silva, Jamerson Temoteo da.
S586s Sequência didática para o ensino de sistemas de numeração a partir de uma perspectiva histórica/ Jamerson Temoteo da Silva. – Juazeiro do Norte-CE, 2020
106p.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Regional do Cariri – URCA
Orientador: Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar
Coorientadora: Prof.ª Ma. Juscelândia Machado Vasconcelos

1. História na educação matemática, 2. Sequencia didática, 3. Sistemas de numeração; I. Título.

CDD: 510

JAMERSON TEMOTEO DA SILVA

SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Na— cional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Regional do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 14 12 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar - Orientador (URCA)

Juscelandia Machado Vasconcelos

Profa Me. Juscelandia Machado Vasconcelos - Coorientadora (URCA)

José Tiago Nogueira Cruz

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz (URCA)

Carolina C. Pereira

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (UECE)

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa (UEPB)

Dedico aos meus pais, irmãs, à minha esposa

e aos amigos próximos.

Agradecimentos

Agradeço, a Deus, inicialmente, pelo discernimento, pela presença e pelo apoio fornecido em toda a minha caminhada acadêmica e pessoal.

À minha família. Mãe, Joselita Temoteo da Silva; Pai, Manoel Marconi Leite da Silva; e irmãs, Joyce e Jamilly, pela confiança, preocupação e pela construção do meu caráter, por meio de uma educação familiar muito rica e presente.

À minha esposa, Natalia Kessia Gomes Mota, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo impetuoso incentivo, nos meus momentos de maior reticência. Ao meu filho Raul, que mesmo antes de vir ao mundo, me impulsiona a ser minha melhor versão.

À minha instituição formadora, a Universidade Regional do Cariri (URCA), e a todos os seus professores e funcionários, pela contribuição acadêmica e humana da qual tive o prazer de desfrutar.

A todos os professores e profissionais que viabilizam, com excelência e maestria, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), em especial aos professores Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira e Flávio França Cruz, entusiastas e responsáveis pela existência e manutenção deste importante programa.

Aos meus colegas de turma, amigos para a vida, profissionais de enorme qualidade e conhecimento, que fazem jus à primeira turma de mestrado do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da URCA.

Aos meus orientadores, o professor Alexsandro Coelho Alencar e a professora Juscelândia Machado Vasconcelos pela dedicação, paciência, competência e humanidade com que me conduziram em todas as etapas de construção dessa dissertação. Deixo aqui o meu registro e agradecimento a todos.

RESUMO

Este trabalho propõe uma Sequência Didática, com o objetivo de trabalhar, de forma revisional, o tema Sistemas de Numeração, a partir de uma perspectiva historiográfica, utilizando a(s) História(s) da Matemática como uma Estratégia Didática e também de uma forma imbricada, estruturando, direcionando e motivando os temas que serão desenvolvidos. Apresentamos um material de apoio com o objetivo de desenvolver parte dos aspectos históricos e/ou matemáticos necessários para uma explanação básica do conteúdo abordado. Por último desenvolvemos a referida sequência, objetivo final do trabalho, dividida em seis etapas, de modo a viabilizar um processo de ensino e aprendizagem interdisciplinar, lúdico e prático, de modo a ser útil para as mais diversas finalidades. Concluímos que, apesar da impossibilidade de efetivar a presente sequência, devido a pandemia do novo coronavírus, a sua confecção e idealização proporcionaram um ganho em conhecimento didático, científico e matemático, além da convicção de que o campo da História no Ensino de Matemática pode ser uma importante estratégiaa de contextualização e motivação no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, esperamos que este trabalho possa contribuir nesse sentido.

Palavras-chave: história na educação matemática; sequência didática; sistemas de numeração.

ABSTRACT

This work proposes a Didactic Sequence, with the objective of working, in a revisional way, the theme of Numbering Systems, from a historiographical perspective, using the History (s) of Mathematics as a Didactic Strategy and also in a way imbricated, structuring, directing and motivating the themes that will be developed. We present a support material in order to develop part of the historical and / or mathematical aspects necessary for a basic explanation of the content covered. Finally, we developed the aforementioned sequence, the final objective of the work, divided into six stages, in order to enable a process teaching and learning, interdisciplinary, playful and practical, in order to be useful for the most diverse purposes. We conclude that, despite the impossibility of carrying out the present sequence, due to the pandemic of the new coronavirus, its preparation and idealization provided a gain in didactic, scientific and mathematical knowledge, in addition to the conviction that the field of History in the Teaching of Mathematics can be an important tool for contextualization and motivation in the teaching and learning process. We hope that this work can contribute in this direction.

Keywords: history in mathematics education; following teaching; numbering systems.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Constantemente, somos indagados quanto à necessidade do ensino de determinados conteúdos no campo da Matemática. A facilidade no acesso à informação, o imediatismo, o ensino mecânico desconectado de situações cotidianas ou significativas para o aluno acabam por evidenciar a necessidade de contextualizarmos o ensino de determinados conteúdos.

Dentre as várias formas de contextualizar, está aquela relativa a utilizar o campo histórico como forma de enfatizar o desenvolvimento de um certo componente curricular e/ou objeto de conhecimento, no nosso caso a Matemática ou seus conteúdos. Para tanto, parte-se dos aspectos históricos primordiais, como o período em que foi estudado e a relevância da temática para o meio em que esteve inserido, passando pelas modificações e aprimoramentos pertinentes, até, finalmente, concluir o processo de ensino, com as aplicações mais atuais desta temática.

No caso específico da nossa área de estudos, a Matemática, questionamentos como "quem criou a Matemática?", "quem desenvolveu determinada fórmula e por que o fez?" são cada vez mais comuns e, ao invés de serem encarados como uma afronta ao conhecimento do professor, podem funcionar como incentivo para a contextualização, interdisciplinaridade e amplitude do conhecimento, permitindo mais do que o conhecimento técnico de fórmulas ou métodos, mas abrindo a discussão para alguns porquês, dentro da estrutura do conhecimento matemático.

Fossa (2006) destaca que a pergunta "de que nasceu a Matemática?" é necessária, por exemplo, para a compreensão do que vem a ser o número. Daí, é natural sermos levados a concluir que atender a tais anseios deve ser uma das prioridades do exercício pedagógico.

O estudante é crítico e, raramente, se permite "aprender por obrigação". Nesse contexto, ressaltamos a importância de fugir do ensino tradicional por repetição, no qual o aluno memoriza métodos, mas não compreende quando são utilizados, não sabe em qual período, nem por quem foi estudado, tampouco a sua importância.

A consequência do ato de priorizarmos questões que deveriam ser secundárias, como dar demasiada ênfase à avaliação, ou à repetição de algoritmos para resolução de problemas pré-determinados é que o aluno acaba assimilando que o objetivo do aprendizado está na avaliação, no ato de efetuar um procedimento e não no conhecimento adquirido.

Diante do contexto apresentado, reconhecendo-me como um produto da educação pública e como parte integrante dela, atualmente, como professor da educação básica, compreendo como sendo um dever buscar alternativas que possibilitem um processo de ensino amplo, significativo, interdisciplinar e libertador, que possibilite ao aluno a oportunidade de perceber a relevância da Matemática e dos objetos de conhecimento pertinentes ao seu nível de ensino.

Para tanto, apresento a seguir uma sequência didática, que tem como finalidade utilizar a História da Matemática como uma Estratégia Didática. As atividades, aqui detalhadas devem direcionar o aluno a re(construir) ou deduzir o conceito em questão.

Tal proposta está inserida no campo de pesquisa da História na Educação Matemática, que segundo Souto (2010), tem como objetivo utilizar de forma efetiva a História da Matemática em situações de ensino e aprendizagem.

Nosso objeto de pesquisa fica centrado na elaboração analítica de uma proposta didática para o estudo do tema sistema de numeração, a partir de uma perspectiva histórica. Aqui, é interessante ressaltar que a História não possui um caráter introdutório ou mesmo informativo, mas estratégico, sendo o "fio condutor" da estruturação temática.

A escolha de tal tema foi motivada pelo seu caráter introdutório, e tem como objetivo apresentar os princípios de contagem, sistemas de numeração, operações básicas e mudanças de base. Portanto, é um tema que tem início nos anos iniciais do ensino fundamental e se constitui em uma importante revisão para o ensino médio.

Além disso, é importante ressaltar que um dos fatores preponderantes para a escolha do referido tema está baseado na minha experiência profissional, enquando professor de Matemática, ao reconhecer que a temática em questão é apresentada, na maioria das vezes, de uma forma apartada do seu contexto histórico, gerando desconhecimento sobre outros sistemas de numeração e uma considerável perda de significado, no que diz respeito a importância do nosso atual sistema de numeração.

Nessa oportunidade, a proposta é recomendada para turmas de ensino médio, dado o caráter revisional de conceitos, operações e principalmente de ideias, proposto na associação com a História da Matemática.

Uma vez instituído esse objeto, interessa-me apresentar uma proposta didática viável, simples, que contemple as demandas do atual estudante do ensino básico, desenvolvendo uma sequência que contemple a seguinte questão norteadora: Como propor e estruturar uma sequencia didática para ensinar os sistemas de numerações utilizando recursos advindos da História da Matemática?

Sobre uma compreensão mais humana da ciência em questão, Alencar (2014) considera que fatores como a motivação e a contextualização podem ser alcançados a partir de diferentes perspectivas didáticas e que o uso da História no ensino de Matemática pode servir como uma porta para novos horizontes. Sendo assim, essa perspectiva consiste em uma importante ferramenta de auxílio no processo de ensino.

A sequência didática em questão tem como objetivo apresentar uma proposta pedagógica que viabilize um momento revisional diferenciado, apresentando de forma contextualizada o tema proposto, pontuando os aspectos históricos e matemáticos que viabilizaram o seu desenvolvimento, além de debater, de forma indireta, sobre a validade de se construir uma prática pedagógica pautada em uma perspectiva de cunho histórico.

A partir das características descritas anteriormente podemos deduzir que a pesquisa a seguir é do tipo qualitativa[1], tendo em vista a subjetividade de uma proposta didática e das preferências didáticas empregadas, que são pautadas nas impressões e experiências do autor.

Desse modo, compreendendo o caráter subjetivo de uma proposta didática, salientamos que não almejamos uma prática de ensino única, pois a Matemática e a História são disciplinas demasiadamente complexas, e tal associação é apenas um recurso, com o objetivo principal de apresentar a Matemática de uma forma mais humana, interdisciplinar e em nada apartada dos fatores sociais, políticos e filosóficos que historicamente motivaram a sua existência.

1.1 Objetivos

Esta dissertação pode ser contemplada a partir de parâmetros estabelecidos sob dois tipos de objetivos, geral e específico, que se complementam e atuam de modo a definir a natureza da pesquisa em questão:
Como objetivo geral:
- Conhecer elementos da História da Matemática que contribuam para o ensino de sistema de numeração, apresentando uma proposta didática para a educação básica.

[1]Na pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas[...]O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações.(DESLAURIERS, 1991, p. 58).

Como objetivos específicos têm-se:

- Conhecer a contribuição da História na Educação Matemática com o objetivo de aproveitá-la como uma forma de contextualização.

- Descrever o panorama dos sistemas de numerações ao longo da história.

- Criar uma proposta didática para o ensino de sistema de numeração utilizando recursos advindos da História da Matemática.

2 A MATEMÁTICA NA(S) HISTÓRIA(S)

2.1 As histórias, os homens e o tempo

Estruturaremos a seguir um conjunto de informações, históricas e/ou matemáticas, que acreditamos serem úteis para uma melhor compreensão dos fatores que motivaram o presente trabalho.

A HISTÓRIA, OS HOMENS E O TEMPO[2]

Afinal, o que é a História? Tal questionamento, que a princípio nos parece lógico, apresenta-se, na prática, como um objeto de difícil explanação, dado o fato de que a própria História passou por diferentes processos de legitimidade. Diante dessa situação, constatamos que a problemática em questão está além do caráter epistemológico.

A resposta, talvez mais simples, para um problema de tamanha complexidade seria: "a história é a ciência do passado". No entanto, segundo Bloch (2002, p.7), "passado não é objeto de ciência". Foi a partir de questionamentos dessa natureza que a própria concepção de História, assim como o papel do historiador, sofreram fortes mudanças. Tais mudanças permeiam o debate entre a História tradicional ou positivista e a chamada nova História.

Em meados do século XX, autores como Bloch e Lucien Febvre deram início à prestigiosa escola dos Annales, que viria a ter um papel de suma importância no desenvolvimento de um novo modelo de historiografia. Tal modelo, surge como uma forma de redefinir o modo de se pensar e de se pesquisar a História. Para uma melhor compreensão sobre a motivação do debate, faremos uma diferenciação conceitual entre as duas vertentes históricas apresentadas.

Segundo Burke (1992, p. 10), o paradigma histórico tradicional "diz respeito essen-

[2]Referência ao título homônimo do capítulo 1 do livro "Apologia da História ou o Ofício do Historiador" de Marc Bloch.

cialmente à política. [...] A política foi admitida para ser essencialmente relacionada ao Estado; em outras palavras, era mais nacional e internacional, do que regional.".

Desse modo, "reconhecia-se como história apenas aquela que contava os feitos da nobreza, fazendo com que essa atividade tivesse uma ligação estreita com o Estado" (ALENCAR, 2014, p. 20). Dentro desse contexto, é perceptível que a política exercia forte influência na percepção histórica, no sentido de enaltecer figuras convenientes e marginalizar outras por igual motivo.

Características como essa foram criticadas veementemente por Bloch (2002), alegando que a rigidez da visão positivista-tradicional da História enquanto ciência negava as possibilidades da própria História, característica definida por ele como "historizante".

Uma consequência lógica de tais diretrizes procedimentais pode ser observada na função do historiador tradicional. Este tende a fazer questionamentos que possam apresentar a História como uma verdade absoluta e o seu desenvolvimento como algo linear, tendendo a observar os aspectos gerais, em detrimento dos pequenos acontecimentos que influenciam no tema observado.

Quanto à relevância dos séculos de pesquisas norteadas pela perspectiva tradicional histórica, Alencar (2014) considera que a concepção tradicionalista da História, embora questionável e em crise conceitual, não deve ser descartada, ou mesmo desmoralizada, pois apresenta um ponto de vista da história a que se propõe desenvolver. O que devemos aprender é a relativizá-la, observando os eventuais exageros e/ou conclusões tendenciosas.

Mas, segundo Schwarcz (2002), é exatamente em oposição à postura universalista da História tradicional que, em 1928, Bloch e Febvre tomam a iniciativa de fundar uma revista histórica. Porém, diante das dificuldades encontradas na empreitada, acabam por se inserir como editores da revista dos Annales. Tal movimento revolucionou a perspectiva historiográfica e serviu como base para o que hoje chamamos de "Nova História".

Essa perspectiva, segundo Peter Burke (1997), substitui a tradicional narrativa dos acontecimentos por uma história-problema. Substituindo a tradicional narrativa linear, objetiva e universalizadora por uma visão interdisciplinar, ampla, e indissociável de todos os fatores sociais, políticos, filosóficos e humanos que a compõe. Nessa perspectiva, admitimos os avanços e retrocessos ocorridos. Problematiza-se a visão exposta, considerando que o historiador não narra um fato por ele observado, mas a observação de um outro.

O narrador, ou o homem, nessa perspectiva, assume um papel coadjuvante, pois seus atos, seus feitos, são resultados de necessidades coletivas, que se tornaram possíveis, apenas devido a uma certa estrutura social.

Por História-Problema, temos como característica uma História:

> [...] interpretativa, problematizada, apoiada em hipóteses, capaz de recortar os acontecimentos através de novas tábuas de leitura, e, na verdade, capaz de problematizar este próprio gesto de recortar um acontecimento (BARROS, 2012, p. 306).

A perspectiva em questão torna a História um campo mais abrangente, interdisciplinar e multidisciplinar, que permeia as mais diversas áreas de atuação, como a História política, social, econômica. Da mesma forma, a insere em outras áreas de estudo como a Matemática, a Física, as Ciências de um modo geral, observando, problematizando e relativizando as contribuições históricas no meio social em que foi desenvolvido e os seus reflexos em nossa realidade em uma perspectiva que admite a parcialidade de quem pesquisa, sem que se coloque em dúvida o caráter científico do que se estuda.

Nesse contexto, deve-se salientar uma importante relação entre a chamada história nova e a proposta de se empregar a História no ensino de Matemática. Em ambas, um fator adquire uma relevância que justifica o nosso estudo: a interdisciplinaridade.

O caráter problematizador dessa nova perspectiva apresenta-se como uma importante ferramenta de contextualização e de motivação, podendo apresentar o conhecimento matemático como um produto de diversos interesses e necessidades sociais.

Do ponto de vista do estudante, é crucial fomentar essa visão crítica, presente na perspectiva historiográfica nova, um olhar amplo, suscetível ao debate. A inserção dos conhecimentos do próprio estudante e do seu conhecimento de mundo só são possíveis a partir de uma abordagem para além do tradicional aprendizado por repetição, em que a Matemática é apresentada de forma linear e inalterável, características que, curiosamente, se assemelham à perspectiva tradicional da História, aqui debatido.

Diante do caráter amplo do estudo introduzido, faremos um recorte, tendo em vista o nosso objeto de pesquisa. Para tanto, enfatizaremos a natureza do estudo histórico no campo da Matemática, da Educação Matemática e, principalmente, sua inserção como ferramenta pedagógica.

2.2 A História no Campo da Matemática

Para falarmos de História, dentro do campo da Matemática, é importante ressaltarmos algumas vertentes de pesquisa. Segundo Miguel e Miorim (2005), podemos destacar: a História da Matemática, a História da Educação Matemática e a História na Educação Matemática como campos independentes, embora possuam finalidades que caminham em uma mesma direção, que é ressaltar a importante relação entre a Matemática, a História e a Educação. Em relação à História da Matemática, podemos mencionar seguinte:

> O campo História da Matemática é destinado ao estudo de obras literárias relacionadas à Matemática, à vida dos matemáticos, ao desenvolvimento de teorias ou de conceitos matemáticos, à formação de grupos e de instituições que desenvolvem Matemática, ao contexto sociocultural no qual estava sendo desenvolvido o conhecimento e ao estudo da Matemática de nativos em países colonizados. (SOUTO, 2010, p. 523)

No campo da História da Educação Matemática encontramos trabalhos que tem como objetivo tratar sobre:

> As pesquisas que investigam a história: da Matemática escolar; do ensino de teorias, noções ou conceitos matemáticos; da formação do professor de Matemática; de pessoas ou instituições significativas para o desenvolvimento da Educação Matemática; da investigação em Educação Matemática; de políticas e propostas educacionais relativas à Matemática. Além disso, consideramos também as pesquisas que investigam o papel da História da Matemática na formação do matemático e do professor e as que tratam da historiografia da Educação Matemática. (SOUTO, 2010, p.523)

Na visão deste mesmo autor, existem trabalhos que "[. . .] buscam apoio da História para tratar da Matemática em situações de ensino e aprendizagem se inserem no campo da História na Educação Matemática".(SOUTO, 2010, p.523)

É importante ressaltar que a diferenciação apresentada mostra-se como uma tentativa de investigar as potencialidades existentes na perspectiva historiográfica enquanto ferramenta de contextualização.

Nesse sentido, ao observar diferentes vertentes dentro de uma mesma proposta pedagógica, salienta-se a necessidade de se observar os aspectos que compõem a História da Matemática, enquanto Ciência, da Matemática, enquanto componente curricular, e a História do ensino da Matemática, apresentando propostas e fomentando debates que possam referendar, ou não, a inserção desta proposta, no ambiente escolar.

Diante de tal diferenciação, podemos observar que o presente trabalho encontra-se no último campo citado: a História na Educação Matemática, tendo em vista que se propõe a apresentar uma sequência didática que possa servir de inspiração a profissionais da educação, debatendo, de forma indireta, sobre as diferentes ferramentas que possam auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a partir da História.

Voltando ao nosso objeto de estudo, é possível observar, dentro do campo da História na Educação Matemática, suas principais características históricas, analisando suas potencialidades enquanto ferramenta metodológica. Para tanto, podemos traçar um paralelo entre a História da Educação Matemática e a História na Educação Matemática.

2.3 História na Educação Matemática

Segundo Souto (2010), o discurso em favor da participação da História na Educação Matemática não é recente. Alternando momentos de maior ênfase com outros de arrefecimento, podemos detectá-lo na literatura desde, pelo menos, o início do século XX. Ainda segundo o autor, no ano de 1980 ocorre uma crescente discussão em torno dessa temática, motivada pelas críticas ao movimento da Matemática Moderna. Tais movimentos científicos culminaram com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), no ano de 1999.

Sua criação fomentou a organização de seminários, palestras e encontros regulares, o que impulsionou a prática científica em nosso país. No entanto, apesar do debate quanto à utilização da História como ferramenta pedagógica ser comum no meio acadêmico, e ser consenso que esta ferramenta pode ser útil no processo de ensino, nossa experiência, no âmbito educacional, aponta para uma utilização ainda incompatível em sala de aula, onde a História da Matemática tem tido um papel de pouca relevância.

Corroborando com essa alegação, Miguel (1997) apresenta como argumento para questionar a real utilização da História por professores, no âmbito escolar, a falta de material adequado sobre assunto anterior há dois séculos, bem como uma literatura própria à utilização didática.

A escassez de materiais didáticos adequados e de propostas curriculares que incentivem o uso adequado desse recurso apontam uma justificativa para o seu uso ainda ser tão pouco explorado. Ademais, a falta de material científico que apresente propostas práticas de utilização, citada por Barbosa et al (2011, p. 02) "é um sintoma de que ainda existe uma persistente lacuna, entre o debate acadêmico e a prática".

As consequências de uma prática que não priorize a contextualização são observadas por Santos (2007, p. 18), quando afirma que "é possível que muitas das dificuldades que alunos encontram na aprendizagem da Matemática sejam resultado de ensinarmos apenas procedimentos e regras, limitando sua capacidade de compreender os conceitos".

Nesse contexto, apresentamos os papéis pedagógicos exercidos pela História da Matemática e as consequências da sua inserção no processo de ensino, segundo Miguel (1993): Motivação; Objetivo; Recreação; Desmistificação; Formalização; Dialética; Unificação; Atitude e Valores; Significação; Cultura e a Epistemologia.

Explicando algumas dessas consequências, ainda de acordo com o autor, quanto à motivação: a História da Matemática deve motivar o aprendizado, para tanto, deve apresentar problemáticas relevantes que estimulem o aluno a debater sobre o tema. Objetivo: a História tende a ressignificar o aprendizado, apresentando as condições necessárias para o desenvolvimento de uma temática, impulsionando o aluno a reconsiderar a sua real necessidade. Na Recreação, entende-se que a História apresenta aspectos lúdicos, seja a partir dos seus instrumentos históricos ou devido às suas lendas e particularidades. No tocante à Desmistificação, espera-se que a nova abordagem seja capaz de ressignificar o conteúdo, apresentando a Matemática como uma disciplina mais humana, inacabada e em constante adaptação. Tais aspectos são apresentados por diversos outros autores, como Baroni (2005); Mendes (2006) como fatores que justificariam o uso da História na Educação Matemática. Mas como fazê-lo?

É importante ressaltar que apesar de reconhecer a importâncias dos demais aspectos mencionados por Miguel (1993), fizemos um recorte, apresentando as características mais pertinentes, associadas ao tipo de trabalho que estamos propondo.

Para tentar responder a essa questão, precisamos voltar nossa atenção para os diversos aspectos que compõem a educação básica, desde a proposta apresentada pelo próprio livro didático, muitas vezes o único recurso disponível para o docente, passando pela discussão a respeito do currículo e chegando até a atuação do professor.

Apesar do amplo debate que os temas apresentados podem nos oferecer, faremos um recorte quanto à metodologia empregada pelo professor em sala de aula, com aspectos que corroboram para a elaboração de uma sequência didática fundamentada na inserção da História no Ensino de Matemática.

Sobre as formas de se utilizar a História na Educação Matemática, Vianna (1995) apresentou quatro categorias de utilização, quanto ao livro didático e quanto à apresentação de conteúdos:

> A História da Matemática como Motivação, ou seja, a HM é apresentada no início do capítulo, como uma anedota, lenda ou breve texto introdutório.
> A História da Matemática como Informação, isto é, são apresentadas notas históricas após o término de um capítulo, conteúdo, ou em exercícios, com a função de acrescentar informações sobre o assunto trabalhado. No entanto, não auxiliam à compreensão do conteúdo.
> A História da Matemática como Estratégia Didática, ou seja, a HM é utilizada "[...] para conduzir o aluno a um determinado tipo de procedimento que encontra alguma relação com o desenvolvimento do conteúdo".
> História da Matemática como Parte Integrante do Desenvolvimento do Conteúdo (Imbricado), isto é, HM é utilizada como fio condutor do currículo, por exemplo, para escolher qual conteúdo será abordado em detrimento de outro. (VIANNA, 1995, p. 78).

Porém, é importante salientar que tais categorias não são mutuamente excludentes e que uma abordagem, seja ela estratégia de ensino ou proposta científica, pode utilizar mais de um dos conceitos apresentados. Na presente pesquisa, por exemplo, apresentamos, predominantemente, como proposta de utilização da História como Estratégia

Didática, mas faremos uma forte referência ao seu uso imbricado, ao justificarmos a escolha do tema: Sistema de Numeração, como sendo parte de uma construção histórica.

A opção de pesquisa, feita pelo autor do presente trabalho, é referenciada pelo Vianna (1995, p. 6) quando este sugere que:

> [...] deve-se dar preferência aos usos em que o conhecimento histórico ocorra de forma imbricada com o conteúdo matemático, deve-se dar preferência ao uso da história da matemática como estratégia didática em contraposição à forma predominantemente de simples motivação e/ou informação.

O que corrobora, mais uma vez, com o fato de que o uso da História no Ensino de Matemática existe e já foi objeto de maior ou de menor debate, ao longo da História da Educação Matemática no nosso país, mas ainda está longe de ser praticado de uma forma estruturada, do ponto de vista pedagógico e acadêmico, o que justificaria a produção de documentos como este que está sendo apresentado.

Diante dos diversos aspectos aqui abordados, propomos trabalhar, preferencialmente, em caráter revisional, com o tema Sistema de Numeração, haja vista o caráter introdutório, do ponto de vista curricular e do ponto de vista histórico. Sendo este tema o ponto de partida para o completo desenvolvimento do que hoje chamamos de Matemática, as características históricas e matemáticas que julgamos pertinentes para uma explanação satisfatória do tema estão descritas a seguir.

2.4 Métodos de contagem: uma abordagem histórica

Afinal, quem inventou a Matemática? Determinados questionamentos, apesar de parecerem simples, nos remetem a problemas complexos. Aqui, temos um bom exemplo desse fato. Para tentarmos solucionar este problema, primeiro devemos observar que não existe uma só Matemática. O conceito de Matemática, assim como o de álgebra, aritmética, geometria e tantos outros mudaram de acordo com o período histórico observado. Suas utilizações, competências, abordagens, e finalidades variam, na maioria das vezes, com o objetivo de atender a uma demanda social.

Segundo Clareto (2016, p. 302):

> Nessas inquietações, uma compreensão: a matemática surge no mundo, junto com o próprio mundo; portanto, trata-se de descobrir a matemática que compõe o mundo, a natureza ou que aparece como cópia de uma Ideia... Aquilo que se poderia chamar de invenção de matemática, seria, mais claramente, invenção na matemática. Invenção de relações, propriedades, conceitos que compõem o escopo daquilo que se denomina matemática. Ela mesma, a matemática, tendo seus elementos constituídos ou na chamada natureza, ou no Mundo das Ideias.

Portanto, é concebível afirmar que tal pergunta possui nuances que não podem ser contempladas. A Matemática não foi inventada por alguém, ela sempre existiu, é uma competência humana, necessária para a sobrevivência, tal qual tantas outras que conhecemos. Dividir alimentos, mensurar distâncias e quantificar predadores são exemplos da Matemática em períodos remotos.

Assim, sabendo que a motivação do saber matemático é concreto e que surgiu da necessidade de aperfeiçoar métodos de contagem, seria mais interessante questionarmos os motivos que nos levaram a aperfeiçoar aquilo que, a princípio, nos parece intuitivo. A partir do momento em que os dedos deixaram de ser suficientes para estabelecer uma relação de contagem "um a um" o homem identificou a necessidade de registrar quantidades de alguma outra forma. Apesar da escassez de comprovações históricas, relíquias como o Osso de Ishango (Figura 2.1) na África, datado entre 20.000 e 10.000 a. E.C. são exemplares do quão longínquo e remotos são os tempos aos quais nos referimos.

Nesse contexto é possível afirmar que o homem, mesmo em períodos muito primitivos de sua existência, possui uma noção de quantidade, suficientemente complexa, para as suas necessidades. Mas, registros como o do Osso de Ishango, apresentam um

Figura 2.1: Osso de Ishango (África).

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.1)

método de registro de contagem dos mais básicos, o que nos leva a questionar em qual momento teria surgido a necessidade de se desenvolver métodos mais efetivos para problemas de contabilidade.

Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 1):

> Quando lemos sobre a origem da contagem, o exemplo que encontramos com mais frequência é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, ao invés de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas, escritas na argila, e estas marcas estariam na origem dos números. Mas esta versão não é segura. As fontes para o estudo das civilizações muito antigas são escassas e fragmentadas.

No entanto, ainda segundo os autores, os primeiros registros que se tem notícia que apresentam um tipo de escrita numérica são da Baixa Mesopotâmia e datam do período do quarto milênio antes da era comum, no território em que hoje se situa o Iraque. Tais registros, suas especificidades, assim como outros registros de sistemas de numeração relevantes, serão nosso objeto de estudo a seguir.

2.5 A Matemática na Babilônia (4.000 a. E.C)

Diferente do que se possa imaginar, não é possível estabelecer um percurso linear no processo de desenvolvimento da escrita numérica, nem mesmo compreender com clareza o momento que tal representação fez a transição do concreto ao abstrato [3] .

A hipótese mais aceita, do ponto de vista histórico, aponta para uma revelação até certo ponto surpreendente, indicando que as primeiras formas de escrita do homem possuíam uma finalidade numérica e que serviriam, principalmente para registros de insumos, animais, terrenos, etc. Tal tese, é intitulada de contábil-evolutiva.

O que se tem de consenso é que os primeiros registros, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 2) "empregava invólucros de argila, como uma bola oca, dentro dos quais eles eram guardados e fechados. Estes invólucros escondiam os tokens e, por isso, em sua superfície, eram impressas as formas contidas em seu interior".

Por se tratarem de materiais com considerável durabilidade, boa parte desses invólucros sobreviveram a ação do tempo, o que ofereceu aos historiadores a possibilidade de avaliar com segurança a sua finalidade.

Ainda de acordo com esses autores, o surgimento desse tipo de registro foi motivado pelo crescente desenvolvimento social, refletido por exemplo no "crescimento populacional considerável, particularmente na região Sul do Iraque, o que motivou o desenvolvimento de cidades e o aperfeiçoamento das técnicas de administração da vida comum" (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.2)

Tais fatos, evidenciam a importante relação entre o desenvolvimento social e o desenvolvimento matemático, mostrando que a Matemática possui enorme relevância na construção de uma sociedade bem estruturada.

Esses tokens[4] (Figura 2.2) realizavam uma contagem por associação em que cada token representava um objeto contado. Nessa etapa, já podemos observar uma diferenciação do método encontrado no Osso de Ishango, pois o objeto quantificado era

[3]Abstrair significa "isolar" determinada característica. Em um sistema de contagem abstrato, entende-se que um mesmo símbolo, pode representar diferentes conjunto de seres/objetos, desde que possuam uma mesma característica, possuírem quantidades iguais. Token significa símbolo em inglês.

[4]Token significa símbolo em inglês.

associado à imagem utilizada para contá-lo, introduzindo certa noção de simbologia ao processo.

Figura 2.2: Exemplares de tokens

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.3).

Apesar de o processo em questão ainda caracterizar um método de contagem concreto, acredita-se que tenha sido a partir desse procedimento que surgiram os primeiros mecanismos de contagem do tipo abstrato. Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 3) "os contadores do quarto milênio devem ter percebido que o conteúdo dos invólucros se tornava desnecessário em vista das marcas superficiais. Estes sinais não consistiam de figuras representando os produtos em si, mas os tokens usados para contá-los".

Assim, ao perceber que os tokens contidos nos invólucros eram de pouca utilidade e que a representação contida na face do ovoide era suficientemente clara, o processo foi sendo aperfeiçoado, de modo a utilizar-se exclusivamente a representação simbólica, representação essa que, mais adiante, passou a ser feita em blocos de argila.

Em um segundo momento, tais blocos de argila passaram a apresentar além da simbologia de contagem, um ideograma, identificando o tipo de objeto que estava sendo contado.

Prática essa, mais uma vez, fruto da necessidade e decorrente dos avanços administrativos e sociais desse período. Sabe-se que existiam profissionais dedicados exclusivamente a fazer esses registros, e que operações comerciais envolvendo pessoas, pagamento de impostos e até mesmo divisões de insumos eram realizadas.

Ainda assim, a representação numérica babilônica era fragmentada, apresentando estágios de maior ou menor desenvolvimento a variar de acordo com a região observada, o que resultava em sistemas de contagem diferentes para coisas/seres de natureza distintas.

O resultado dessa aparente desorganização, com múltiplos sistemas de numeração, resultou no fato de que, eventualmente, símbolos iguais pudessem representar quantidades diferentes, o que pode até não ter gerado, mas deixou a civilização babilônica a um passo do processo abstrato. Aqui, abriremos um parêntese, no que diz respeito a algumas características de uma das mais importantes cidades da região.

2.5.1 Uruk: A primeira cidade da História

Nesse contexto de abordagem sobre a matemática na babilônia, uma cidade merece nosso destaque: Uruk. Segundo Santos (2012, p. 116):

> situava-se a leste do Eufrates em uma região pantanosa, 225 quilômetros da atual cidade de Bagdá. Era rodeada por uma muralha de nove quilômetros de extensão. Suas dimensões ultrapassavam os 200 hectares, estima-se que sua população alcançou números que variam entre 20 e 80 mil habitantes.

Segundo os estudos mais recentes Uruk ou Uruque (4.000 – 3.000 a. E.C.), teria sido a primeira cidade que se tem notícia, apresentando considerável desenvolvimento social, administrativo e de construção civil, com prédios, fortificações, templos religiosos, sistema de tributos, profissionais dedicados à contabilidade e à formação de um Estado, do ponto de vista político-administrativo.

De acordo com Bachelot (2020), também é associado a Uruk os primeiros registros de escrita, em um contexto diferente do que podemos estabelecer hoje, mas compatível com o meio em que foi desenvolvido, o que consiste em um marco para seu desenvolvimento e para a construção da própria História.

Esses registros possuíam, inicialmente, uma finalidade contábil, registrando quantidades de objetos e desenvolvendo o que hoje temos como contratos. O desenvolvimento da escrita com uma finalidade matemática justifica a íntima ligação entre a necessidade de se desenvolver tal área, como uma condição necessária para o desenvolvimento social, mostrando que, se não podemos falar sobre a invenção da Matemática, mas devemos contextualizar o seu ensino, mostrando o porquê das invenções nessa Ciência.

É importante ressaltar que durante o período detalhado, outras importantes civilizações apresentavam mecanismos de contagem, com características e finalidades apropriadas às suas necessidades. O destaque à civilização babilônica, do ponto de vista histórico, se dá pelo grau de otimização que o processo alcançou, mesmo em período tão remoto, servindo até hoje de referência, no campo da escrita e da contagem.

Ademais, outras importantes civilizações, em períodos diferentes e até mesmo por motivações distintas chegaram ao mesmo estágio de abstração numérica, o que nos evidencia uma característica comum: o fato de que o desenvolvimento contábil e administrativo culmina com a criação de um sistema unificado de numeração. As principais características de alguns desses sistemas, incluindo o próprio sistema babilônico, serão detalhadas a seguir.

3 OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

A seguir, apresentaremos as principais informações, de cunho histórico e matemático, necessárias para um entendimento completo das nuances que levaram o homem a desenvolver diferentes sistemas de numeração ao longo da sua história, além de ressaltar quais características sobreviveram a ação do tempo e contribuíram para o sistema usado com maior frequência nos dias de hoje.

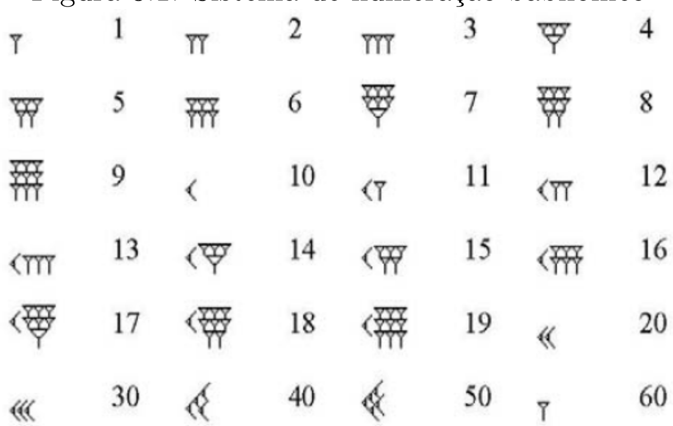
3.1 O sistema de numeração babilônico

Como mencionado anteriormente, os povos babilônicos utilizaram diversos sistemas de numeração, mas, aqui, faremos um recorte, apresentando as principais características do seu principal modelo, desenvolvido a partir de uma unificação de sistemas e da otimização dos escribas da época.

O sistema de numeração da Babilônia é posicional [5] , o que oferece a possibilidade de realizar operações de um modo mais simplificado. “Eles usavam uma combinação de base sessenta e de base dez, pois os símbolos até cinquenta e nove mudam de dez em dez.” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 8).

O sistema era composto por apenas dois símbolos (Figura 3.1), que representavam os algarismos 1 e 10. Tais símbolos eram talhados em blocos de argila. De acordo com Boyer (1996, p. 17), as escritas, a princípio eram feitas “do alto para baixo, da direita para a esquerda; e após, da esquerda para a direita, horizontalmente”.

Figura 3.1: Sistema de numeração babilônico



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 8).

[5]Um sistema de numeração posicional tem como característica o fato de que “um mesmo símbolo serve para representar diferentes números dependendo da posição que ocupa na escrita”. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.4)

A justificativa para a escolha de um sistema com base predominantemente sexagesimal, segundo Boyer (1996, p. 17) é de que "talvez tenha sido adotado por causa do interesse na metrologia, sendo que 60 unidades podem ser divididas em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos, facilmente".

O fato dos escribas babilônicos utilizarem materiais como argila ou barro, ofereceu aos historiadores uma maior riqueza de detalhes, dada a característica de maior preservação desses materiais, o que nos propiciou mais informações, do que o que se tem dos povos egípcios, por exemplo.

Um importante diferencial do sistema babilônico, relacionado ao caráter posicional já mencionado, é o fato de ser possível representar números grandes (Figura 3.2) com uma quantidade relativamente pequena de símbolos. Esta característica se acentua quando comparamos com a representação de números de igual característica em um sistema não posicional, como o egípcio. Abaixo, veremos como eram representados alguns numerais no sistema em questão.

Figura 3.2: Representação numérica babilônica

Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = 1x60 + 15	75
	1;40 = 1x60 + 40	100
	16;43 = 16x60 + 43	1003
	44;26;40 = 44x3600 + 26x60 + 40	160000
	1;24;51;10 = 1x216000 + 24x3600 + 51x60 + 10	305470

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.10).

Apesar dos elogios à estrutura posicional do sistema, algumas limitações podem ser observadas, hoje, no sistema. Por exemplo, o fato de que não existia uma notação para representar o zero, além da possibilidade de termos diferentes números representados por um mesmo símbolo, como é o caso, por exemplo, do número 1 e do número 60, ambos representados pela mesma cunha.

Ambiguidades como a mencionada, também poderiam ocorrer devido à falta de representatividade para o zero em números relativamente grandes. Deficiência essa que foi sanada, parcialmente, segundo Roque e Pitombeira (2012) mais adiante, no período do império Seleucida, por volta de 300 a. E.C., quando introduziram um símbolo, dois traços inclinados, como um separador, para designar casas vazias. Ainda assim, é importante salientar que o separador não representa ainda o numeral zero, tendo em vista que ele não poderia ser utilizado como o resultado de uma operação, por exemplo.

Quanto às ambiguidades numéricas, elas se evidenciam quando associadas ao nosso sistema de numeração indo-arábico decimal, e às demandas do nosso cotidiano. Mas, no período histórico em questão, o contexto da operação contábil inviabilizava a maior parte dessas interpretações dúbias, o que torna o sistema viável e suficientemente complexo para manter a estrutura social e administrativa apresentada anteriormente.

O sistema sexagesimal posicional babilônico exerceu forte influência nas civilizações posteriores e na Matemática, de um modo geral, por possuir importantes características que viriam a ser aproveitadas no nosso atual sistema de numeração. Como exemplo, podemos citar o fator posicional e a percepção da necessidade de se trabalhar com o zero, barreira percebida, mas não superada pela civilização babilônica.

Além disso, um sistema sexagesimal e posicional ainda é utilizado por nós, atualmente, para efetuar a contagem do tempo tendo em vista que uma hora corresponde a sessenta minutos, um minuto corresponde a sessenta segundos e assim sucessivamente, sendo esta, uma herança contemporânea do referido sistema.

3.2 O sistema de numeração egípcio

Assim como na Babilônia, a Matemática no antigo Egito era de suma importância para a manutenção administrativa e social da região. Para tanto, seu estudo e conhecimentos eram delegados aos escribas reais, figuras importantes que, dentre outras atribuições, asseguravam o pagamento dos impostos adequados ao faraó.

Um aspecto relevante no estudo dessa civilização é que, do ponto de vista histórico, temos uma considerável menor quantidade de artefatos históricos associados à escrita. Fato este decorrente do modo como essas informações eram armazenadas em papiros que, certamente, sofrem mais prejuízos com as ações do tempo.

De acordo com Imhausen (2007, p. 13), "a mais antiga evidência de textos escritos no Egito data do final do quarto milênio antes da era comum e consiste no registro de nomes (pessoas e lugares) bem como mercadorias e suas quantidades.". Isso nos remete ao argumento contábil para o desenvolvimento da escrita, tal qual ocorrido com a civilização babilônica no mesmo período.

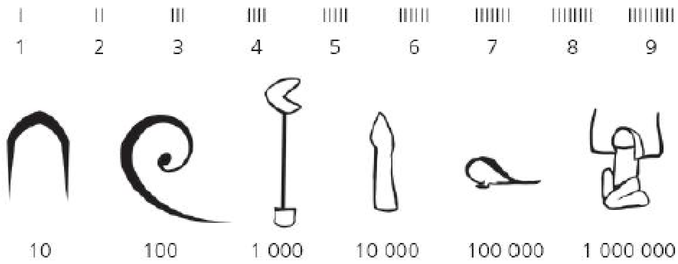
No entanto, no tocante a documentos exclusivamente matemáticos, apenas dois sobreviveram e podem ser analisados em sua quase totalidade atualmente. São eles: o Papiro Rhind ou Ahmes e o Papiro de Moscou, que apresentavam técnicas matemáticas com problemas e soluções associados à Geometria e à Aritmética.

A respeito do início da escrita dos antigos egípcios, Katz (2008) afirma que eles utilizavam dois estilos diferentes: os hieróglifos, geralmente utilizados em monumentos, e o hierático, um tipo de letra cursiva, mais apropriada para a escrita em papiros.

3.2.1 O sistema hieróglifo de numeração

Segundo Roque e Pitombeira (2012), por volta do ano 3.000 a.E.C os egípcios desenvolveram o seu sistema de numeração que, diferente do sistema babilônico, era aditivo[6] e decimal.

Figura 3.3: Sistema de numeração Hieróglifo - Egito



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.25)

O sistema em questão era amplamente utilizado no Egito antigo por oferecer a possibilidade de se efetuar operações aritméticas básicas, já conhecidas pelo povo egípcio. Com finalidade contábil-administrativa, tal qual o sistema babilônico, o sistema hieroglífico foi usual até a fase final do antigo Egito, mesmo tendo como limitação o fato de não possuir um algarismo para representar o zero, conforme observamos na Figura 3.3.

Quanto à simbologia desse sistema, ainda de acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 25):

> O número 1 era representado por uma barra vertical e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números são múltiplos de dez e, por esta razão, dizemos que o sistema é decimal. O número dez é uma alça; cem, uma espiral; mil, a flor de lótus; dez mil, um dedo; cem mil, um sapo e um milhão, um deus com as mãos levantadas. (Figura 3.3).

No referido sistema, existe uma convenção, mas não a obrigatoriedade para que os números maiores sejam escritos à esquerda dos menores. Na leitura, caso existam

[6]Em um sistema aditivo "somavam-se os valores de cada símbolo usado na representação de um número para se ter este número" (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p.8)

duas ou mais linhas, recomenda-se que a interpretação seja feita de cima para baixo. Desse modo, a interpretação de qualquer que fosse o número poderia ser feita apenas juntando os valores numéricos dos algarismos representados, como podemos observar adiante (Figura 3.4).

Figura 3.4: Representação do sistema hieróglifo de numeração

Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p.26)

Seguindo a recomendação, o número representado na Figura 6, por exemplo, pode ser lido como a junção dos números: 1.000 / 1.000 / 1.000 / 100 / 100 / 10 / 10 / 10 / 10 / 1 / 1 / 1 / 1. Essa combinação resultaria no número 3.244 (três mil duzentos e quarenta e quatro), considerando o atual sistema indo-arábico como método de representação.

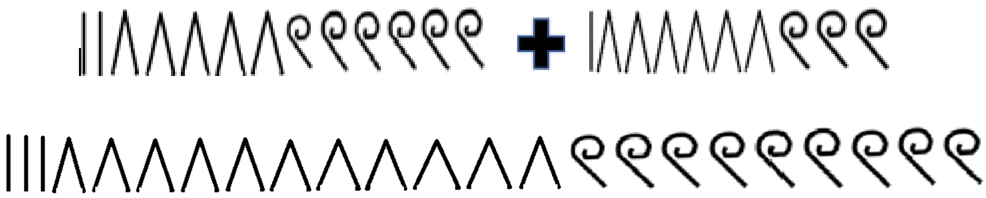
AS OPERAÇÕES BÁSICAS NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO HIEROGLÍFICO:

No período em questão, as operações aritméticas básicas já eram conhecidas pelo povo egípcio, de modo que, segundo Katz (2008), operações como a soma e a subtração poderiam ser feitas com relativa facilidade. Para tanto, segundo Gomes Júnior e Oliveira (2016) seria necessário juntar ou retirar símbolos de mesmo valor, efetuando as devidas trocas, pertinentes ao referido sistema de numeração, com o objetivo de representar os resultados com o menor número de símbolos possível.

Com uma finalidade didática, apresentaremos um passo-a-passo para ilustrar o processo anteriormente anunciado, efetuando a soma dos numerais 652 e 361, no sistema de numeração hieroglífico.

Passo 1: Representação hieroglífica dos numerais, 652 + 361.

Passo 2: Estágio inicial da soma, com a junção dos símbolos utilizados.



Passo 3: Representação final da soma, com a troca de dez dos símbolos de unidade por um símbolo de dezena, posteriormente, a troca dos dez símbolos de dezena resultantes por um símbolo de centena, a saber 1.013.

É importante ressaltar que a operação de subtração possuía um algoritmo análogo ao apresentado enquanto que o algoritmo da multiplicação, segundo Katz (2008, p.4) “era baseado em um processo contínuo de dobra”. Desse modo, para multiplicar os números x e y era efetuado um processo como o apresentado abaixo:

O ALGORÍTMO DA MULTIPLICAÇÃO HIEROGLÍFICA:

A seguir apresentaremos um passo-a-passo de autoria própria, baseado nos algoritmos apresentados por Gomes Júnior e Oliveira (2016), para efetuar a operação de multiplicação no sistema de numeração hieroglífico.

Passo 1: Para efetuar a multiplicação entre x e y, representa-se os algarismos 1 e y, lado a lado.

Passo 2: Efetua-se um processo de dobra para ambos os números representados no passo anterior, de modo a apresentar os respectivos valores obtidos na dobra, abaixo dos valores que o originaram, até que o processo de dobras gerado pelo algarismo 1 seja o menor possível em relação ao número x.

Passo 3: Buscam-se, entre os valores encontrados na dobra do número 1, aqueles cuja soma seja igual a x e os destacamos.

Passo 4: Marcamos os valores da coluna obtida com as dobras do y que estão associados aos destacados na coluna x.

Passo 5: Efetuamos a soma dos valores marcados no passo anterior.

Para exemplificar o algoritmo expresso, efetuaremos a multiplicação entre os numerais 13 e 15, Figura 3.5, utilizando suas respectivas representações no sistema indo-arábico, tendo em vista que o objetivo dessa explanação é ressaltar o procedimento utilizado.

Nesse exemplo, a linha com a dobra 16 foi descartada por apresentar um valor maior do que o 13, proposto na soma, enquanto que a linha com dobra 2 foi descartada por não se adequar ao proposto no passo 3. Utilizando os valores associados às linhas 1,4,8, visto que 1+4+8 = 13, devemos somá-los, assim 13 x 15 = 15 + 60 + 120 = 195.

Figura 3.5: O algoritmo da multiplicação hieroglífica 13 x 15

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240

Fonte: O autor

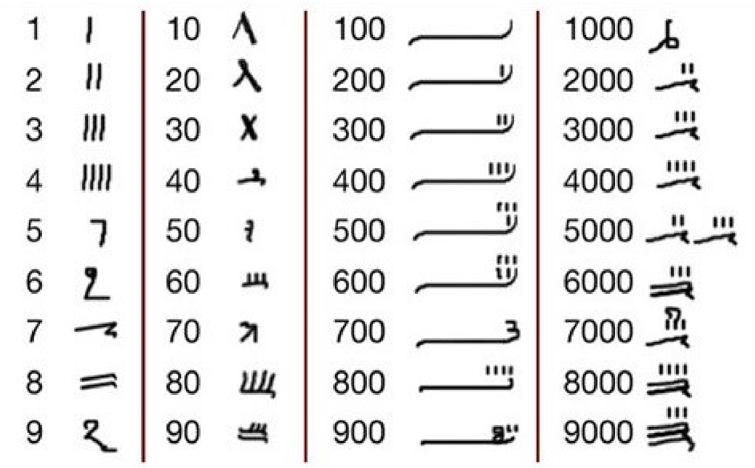
O sistema em questão também possui um algoritmo para efetuar a divisão. Tal procedimento possui raciocínio semelhante ao da multiplicação, apresentado acima, e sua execução será deixada a cargo do leitor.

Desse modo, é razoável observarmos o porquê do sistema em questão ter perdurado durante tanto tempo, tendo em vista que apresentava a possibilidade de se operar e de resolver problemas do dia-a-dia. Sem dúvidas, sua utilização impulsionou civilizações futuras a desenvolver a Matemática, sob a justificativa contábil e prática.

3.2.2 O sistema hierático de numeração

O sistema hierático, por sua vez, apresentava significativas diferenças, quando comparado ao sistema hieróglifo e se opunha a este em alguns aspectos. De acordo com Katz (2008, p.4), “cada número entre 1 e 9 tem seu próprio símbolo, assim como cada múltiplo de 10, entre 10 e 90, e cada múltiplo de 100, entre 100 e 900 e assim por diante” (Figura 3.6).

Figura 3.6: Sistema de Numeração Hierático



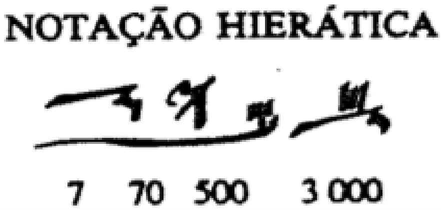
Fonte: Ifrah (2013, p. 209)

De acordo com Ifrah (2010), esse antigo sistema de numeração egípcio era aditivo, não posicional e decimal, sem a presença de um algarismo para representar o zero.

Seu procedimento de escrita consiste em agrupar os símbolos em uma orientação pré-estabelecida, a qual comentaremos a seguir. No entanto, é relevante ponderar que apesar de haver um ordenamento para a escrita em hierático o sistema não se caracteriza como posicional, tendo em vista que a troca de ordem de símbolos não serve para representar um novo número.

Dentre as principais diferenças entre os sistemas, Imhausen (2007) afirma que no sistema hierático existe a orientação de se realizar a escrita e a leitura da direita para a esquerda, posicionando na extremidade direita os símbolos que representam um maior valor. É o que se pode observar na Figura 3.7, a qual apresenta um exemplo que serve de comparação entre os dois sistemas egípcios:

Figura 3.7: Sistema de Numeração Hierático



Fonte: Ifrah (2013, p. 209)

É relevante observar que o número 3.577 (Figura 3.7) pode ser representado com uma menor quantidade de símbolos na escrita hierática. No entanto, a notação hieroglífica apresenta melhores condições para que se realizem operações matemáticas básicas como adição e multiplicação. Esse fato é citado por Katz (2008, p. 4) quando argumenta que o "simples algoritmo da adição e da multiplicação, não é possível no sistema hierático. Provavelmente os escribas simplesmente memorizavam tabelas de adição básicas". Isso nos leva a concluir que os escribas egípcios priorizavam um ou outro sistema, de acordo com o tipo de trabalho que seria efetuado.

Um outro aspecto histórico que merece nossa atenção, está na comparação que é, frequentemente, feita entre as duas civilizações mencionadas até o momento, Egito e Babilônia. Em alguns casos, segundo Eves (1995), o senso comum tende a afirmar que a matemática do antigo Egito não alcançou o patamar da Matemática desenvolvida na Babilônia. Afirmações desse tipo, segundo o autor, não apresentam segurança histórica, mas ele justifica sua afirmação, argumentando que, enquanto o território babilônico era situado em uma rota de grandes caravanas, por ser privilegiadamente situada entre os rios Tigres e Eufrates, o Egito estava em relativo isolamento geográfico.

O aspecto geográfico, salientado pelo autor, assim como os frágeis papiros, mencionados anteriormente, nos impedem de compreender, do ponto de vista histórico, toda a complexidade e evolução científica de uma civilização que foi capaz de realizar obras de um elevado grau de dificuldade, como templos religiosos luxuosos e as famosas pirâmides, obras essas que, de fato, representam a capacidade científica e intelectual do antigo Egito.

Quanto aos sistemas de numeração desenvolvidos no antigo Egito, podemos perceber que com sistemas devidamente adequados a finalidades específicas, foi possível manter uma estrutura social capaz de empregar milhares de pessoas em obras faraônicas, como as mencionadas anteriormente, em intervalos de tempo muito grandes, o que demandaria um planejamento contábil e um remanejamento de insumos bastante complexos.

Nessas circunstâncias, podemos concluir que os sistemas em questão eram suficientemente eficientes para as necessidades de um povo que se destacou na História do homem e das civilizações antigas.

3.3 O sistema de numeração romano

De acordo com Andrini e Vasconcelos (2012), os romanos antigos possuíam um sistema de numeração aditivo e não posicional, formado a partir do agrupamento de 7 símbolos. Apresentamos na Figura 3.8 esses símbolos e sua correspondência no sistema Indo-arábico.

Figura 3.8: Sistema de Numeração Romano

Romano	I	V	X	L	C	D	M
Indo-arábico	1	5	10	50	100	500	1000

Fonte: O autor

No entanto, percebeu-se que o sistema em questão apresentava uma quantidade significativamente alta de símbolos para representar números maiores. Nesse sentido, para representar o número 3999, por exemplo seria necessário a seguinte configuração: MMMDCCCCLXXXXVIIII. Além da grande quantidade de símbolos, o sistema não posicional apresentava limitações para que se realizassem operações aritméticas básicas.

Com as características mencionadas, é importante ressaltar que o sistema de numeração romano não possuía representação para o zero e que o fato de possuir uma característica aditiva e não posicional, Segundo Ifrah (2010), tornava as operações aritméticas pouco práticas. Sendo assim, era um sistema usual para registro de quantidades, mas inviável nas operações aritméticas básicas, um fato considerado como uma regressão histórica.

Sobre a problemática mencionada, devemos acrescentar que as operações aritméticas básicas eram feitas a partir de um instrumento prático de manipulação, o ábaco romano[7] . Criado com base no ábaco grego, o instrumento em questão era comum a diversas outras civilizações e ainda é utilizado atualmente, como forma de introduzir as operações básicas nos anos iniciais do ensino de Matemática.

Em um segundo momento, o sistema romano sofreu algumas alterações, passando a ser um sistema aditivo-subtrativo e posicional, com algumas características que visam otimizar seu processo de representação, como veremos a seguir.

Segundo Imenes (l994), o sistema romano possuía ainda sete símbolos, mas os símbolos I,X,C,M poderiam ser repetidos por até três vezes, enquanto que V,L,D não deveriam ser repetidos. Os símbolos que representavam valores maiores deveriam ser posicionados mais à esquerda, no entanto, casos em que símbolos menores estivessem à esquerda dos maiores serviriam para indicar uma subtração entre esses valores. Além

[7]Instrumento de cálculo usado até o final da idade média, feito com base em outros instrumentos pré-existentes, como o ábaco grego e tinha como objetivo suprir a dificuldade do sistema romano em realizar operações aritméticas básicas.

disso, um número deveria ser multiplicado por mil, se possuísse um traço sobre ele, por dez mil, no caso de dois traços e assim sucessivamente. Como era característico em outros sistemas, também não havia um símbolo para representar o zero nesse sistema.

Nessa nova configuração, números como 3999, citado anteriormente, poderiam ser escritos com uma menor quantidade de símbolos, a saber: MMMCMXCIX. Uma redução bastante significativa, que representou uma evolução no método de representação do povo romano.

Além disso, números como 4000 antes escritos como MMMM, poderiam ser representados como $(I\overline{V})$ ou ainda $M\overline{V}$. No entanto, como podemos observar em ambos os exemplos citados, apesar da otimização na escrita, ainda havia ambiguidades no processo de representação, possibilitando que houvesse escritas diferentes para um mesmo número, uma situação comum em sistemas que não possuem uma notação simbólica para o vazio, uma característica considerada negativa do referido sistema.

Ainda assim, é inegável que o sistema romano possui relevância histórica. Por ter sido o sistema adotado pela igreja católica na Europa, foi amplamente utilizada no mundo, empregada em esculturas, pinturas, igrejas e textos bíblicos divulgados em todo o mundo, mesmo após tornar-se obsoleto, por volta do século XIII.

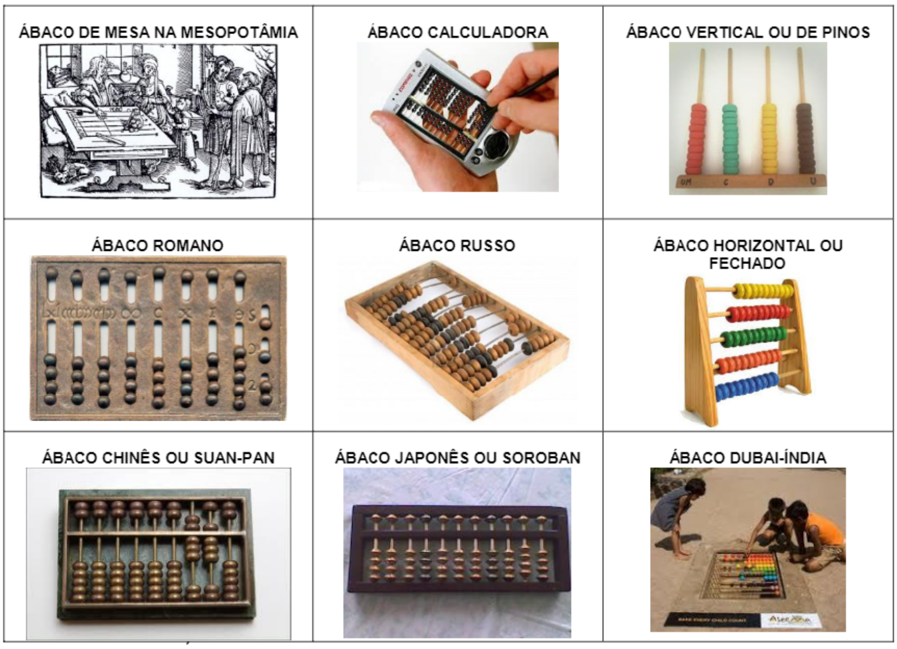
É por esse motivo que, ainda hoje, nos parece um sistema tão familiar. Essa discussão será aprofundada mais adiante, na seção que trata do caminho para a introdução do sistema indo-arábico na Europa e no mundo.

3.3.1 O ábaco romano

Segundo Neves et al (2017), o ábaco foi um dos primeiros dispositivos mecânicos criado para contagem. Suas primeiras versões já eram utilizadas há cerca de 2500 a.E.C, no Oriente Médio. Essas primeiras versões que se tem notícia eram compostas por um tabuleiro com areia, onde eram feitos pequenos sulcos que seriam preenchidos com pedras.

Neves et al (2017) afirmam que existem diferentes tipos de Ábaco: o Suam Pan chinês, o Abacus romano, Abax grego, Nepohualtzitzin asteca, Soroban japonês, e o modelo russo.

Figura 3.9: Diferentes tipos de ábaco



Fonte: Silva (2014)

O ábaco é um instrumento milenar, usado para promover cálculos com maior agilidade. A maioria dos exemplares, é composto por uma base que sustenta algumas hastes, que devem ser preenchidas com algum tipo de argola, objetivando descrever números de acordo com a alteração posicional e da quantidade de argolas dispostas. Alguns exemplares de ábaco podem ser vistos na Figura 3.9:

O ábaco romano, Figura 3.9, segundo Cunha e Ibiapina (2015) é um instrumento de cálculo que foi amplamente utilizado, do início da civilização romana até meados do final da Idade Média, e era formado por uma prancha com colunas verticais. Os números eram representados por fichas de diferentes tipos de material onde cada coluna deveria representar uma potência de base 10.

É importante salientar que o instrumento em questão foi amplamente utilizado em toda a Europa, tendo em vista a impossibilidade do sistema de numeração romano em realizar operações básicas e o fato de o referido sistema ter sido adotado pela Igreja Católica e pela sociedade europeia, de um modo geral. Esta discussão será trazida novamente à tona um pouco mais adiante, na seção que trata da divulgação do sistema indo-arábico na Europa.

3.4 O sistema de numeração chinês

O sistema de numeração Chinês apresentava características singulares, a começar pelo fato de apresentar um sistema multiplicativo, posicional e de base 10. Consistia, assim, em um procedimento, até então, diferente dos demais sistemas observados.

Assim como nos demais métodos de escrita numérica relatados, o desenvolvimento deste sistema também não foi linear, apresentou diferenciações e até mesmo novas características, chegando a ser desenvolvido dois métodos distintos para a representação numérica.

Em um primeiro momento, de acordo com Ifrah (2010), os chineses criaram, por volta do século III a.E.C, um sistema posicional que utilizava barras horizontais e verticais (Figura 3.10).

Figura 3.10: Antigo sistema de numeraçã Chinês

Fonte: Eves (2011, p. 45)

O sistema em questão (Figura 3.10) conta com 9 símbolos, representando os algarismos de 1 a 9, respectivamente. A leitura de um determinado número, com n símbolos, deveria ser feita da direita para a esquerda, multiplicando o valor numérico de cada símbolo por $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ..., 10^n$, respectivamente. (Figura 3.11)

Figura 3.11: Representação numérica no antigo sistema Chinês

Fonte: Pedroza (2010)

No entanto, é possível observar que devido à ausência de um símbolo para representar o zero, característica comum aos demais sistemas da época, o espaçamento era crucial para evitar ambiguidades. Por esse motivo, antes de chegar a representação por signos, que veremos mais à frente, ainda houve variações, acrescentando diferenciações entre os símbolos utilizados nas posições pares e nas posições ímpares.

O aspecto posicional, diferenciando o tipo de letra usada na posição par ou ímpar, apresentou-se como uma importante ferramenta para evitar representações diferentes de um mesmo número, pois utilizavam-se os novos símbolos em algumas casas e os antigos nas demais. Por consequência, a junção de símbolos de uma mesma notação indicava a existência de um separador.

Em um terceiro momento, de acordo com Pinheiro, Luccas e Lucas (2019), a partir da evolução dos sistemas descritos acima, desenvolveu-se um novo sistema, com 13 símbolos, signos, que utilizava um procedimento aditivo-multiplicativo e posicional de representação numérica. (Figura 3.12)

Este novo sistema ainda não contava com a representação do zero, mas apresentava um mecanismo de representação eficiente (Figura 3.13) de modo que até hoje é utilizado, paralelamente a outros sistemas, na China e no Japão.

Figura 3.12: Sistema de Numeração Chinês

1	一	10	十
2	二		
3	三	100	百
4	四		
5	五	1 000	千
6	六		
7	七	10 000	萬
8	八		
9	九		

Fonte: Ifrah (2013, p. 209)

Figura 3.13: Representação numérica sistema de numeração Chinês (Signos)

七 萬 九 千 五 百 六 十 四

= 79 564 (7 . 10 000 + 9 . 1 000 + 5 . 100 + 6 . 10 + 4)

Fonte: Pinheiro, R.M., Luccas S., Lucas, L.B. (2019)

3.5 Aspectos históricos no sistema de numeração indo-arábico

3.5.1 O sistema de numeração indo-arábico:

Segundo Eves (1994), o sistema de numeração indo-arábico recebe esse nome devido ao fato de ter sido criado pelo povo hindu, mas ter sido “apresentado” ao mundo pelos povos árabes, uma civilização de tradição mercantil, habituada a grandes peregrinações com o objetivo de comprar e vender as mais diversas especiarias.

Em sua fase final de desenvolvimento, como conhecemos atualmente, caracterizou-se como um sistema posicional, com 10 símbolos e de base decimal, que tem como característica ser aditivo e multiplicativo. No entanto, o principal fator que motivou a ampla divulgação e utilização do referido sistema está associado ao fato de haver um símbolo para representar a ausência de objetos, o zero.

Ainda assim, é natural ponderarmos que o sistema não nasceu com todas as características apresentadas. Seu aperfeiçoamento é fruto da constante necessidade de evolução contábil, e o produto final, o qual usamos até hoje, é resultado dos esforços de diferentes matemáticos e de diferentes civilizações ao longo de séculos de evolução.

De acordo com Ifrah (2010), no século III a.E.C, os indianos já haviam criado um precursor do atual sistema de numeração que contava com apenas 9 símbolos, sendo que não havia um símbolo para representar o zero, e o sistema ainda não tinha características posicionais. Além disso, existiam símbolos independentes para representar os múltiplos de 10 até o número 90 000. Por esse motivo, concluímos que, nessa fase, o maior valor que poderia ser representado era o 99 999.

Com as limitações apresentadas, fica evidente que o sistema ainda não possuía todas as características necessárias para ser considerado um sistema efetivamente usual, mas já apresentava características que viriam a permanecer em sua fase final. Ainda assim, a ausência do zero possibilitava interpretações dúbias do algarismo representado, e o excesso de símbolos para representar os múltiplos de 10 tornavam o seu aprendizado uma tarefa demasiadamente complexa.

Ainda de acordo com Ifrah (2010), apesar das mudanças gráficas apresentadas pelos símbolos indo-arábicos (Figura 3.14), foi somente no século V d. E.C. que o sistema apresentou significativas mudanças estruturais. Nesse período, os hindus deram início a um sistema de numeração oral, que passou a excluir da sua representação o algarismo dez e as suas respectivas potências. Tal característica, mostrou-se viável também para a escrita, possibilitando a representação de números considerados grandes com uma quantidade relativamente pequena de símbolos.

Na ausência das potências de 10, o sistema adquire uma de suas mais relevantes características, o aspecto posicional, visto que a troca de ordem de símbolos, que não estão escritos junto com sua respectiva potência, fatalmente modificariam o número representado.

Ainda assim, havia uma barreira que tantos outros sistemas não conseguiram transpor: a necessidade de representar o zero ou, ainda, em um sistema posicional, a necessidade de indicar a ausência de um valor associado a determinada potência.

Segundo Brandembeg e Guimarães (2020), por volta do século VII d. E.C ocorreu relativa valorização do sistema hindu, o que, possivelmente, motivou a evolução das técnicas de cálculo, até então feitas por um dispositivo chamado ábaco de chão[8] , além de, finalmente, inserir a principal característica do sistema em questão, a representação do vazio, simbolizado por um círculo (Figura 3.14).

Apesar de observarmos que o sistema hindu alcançou um nível de excelência superior aos demais apresentados, sua utilização não foi imediata na Europa. Sua aceitação foi lenta e, durante séculos, o eurocentrismo científico manteve a representação numérica no sistema romano.

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO:

O sistema de numeração indo-arábico também conhecido como sistema decimal, possui tal alcunha devido ao fato de, convencionalmente, ser tratado como um sistema posicional de base 10, mas essa não é uma verdade absoluta. Segundo Moretti (1999, p. 13), a escolha de uma base no sistema indo-arábico é arbitrária (qualquer natural maior do que 1), mas, por razões históricas, a base mais utilizada é a decimal, muito provavelmente devido aos dedos das mãos.

A escolha de uma base decimal, apesar de ser arbitrária, não surpreende, tendo em

[8]O ábaco é um instrumento de cálculo para sistemas decimais-posicionais, sua utilização pode ser encarada como uma extensão do ato de se calcular com os dedos das mãos.

Figura 3.14: Evolução dos símbolos no sistema Indo-arábico

Fonte: Boyer (1996, p. 163)

vista que alguns outros sistemas possuíam a mesma característica, como os sistemas egípcio e romano. Ainda assim, mais adiante, demonstraremos o algoritmo para que se realize a mudança para uma base qualquer, tendo em vista que a troca possa se mostrar necessária.

O sistema em questão é dito posicional, pois em sua representação numérica, um mesmo número pode representar quantidades diferentes. Por exemplo, os números 34 e 43 representados no referido sistema são constituídos pelos algarismos 3 e 4, mas o algarismo 3 do primeiro número não representa a mesma quantidade do algarismo 3 no segundo, a justificativa para tal afirmação pode ser observada na representação a seguir:

Seja $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$ um número qualquer escrito na base decimal[9] , então $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Em um processo de

[9]É usual que um número representado no sistema indo-arábico, quando na base 10, não utilize a nomenclatura indicando a sua base, tendo em vista que convencionalmente, os números estarão nessa representação.

representação conhecido como, “polinomial”.

Desse modo, o número $(34)_{10} = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$, lê-se, 3 dezenas e 4 unidades. Enquanto que o número $(43)_{10} = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, lê-se, 4 dezenas e 3 unidades. Assim, o algarismo 3 representa 3 dezenas no primeiro exemplo, mas apenas 3 unidades no segundo, ressaltando o aspecto posicional mencionado.

A representação numérica no referido sistema, utiliza agrupamentos de 10 em 10, de modo a classificar os algarismos presentes em um número, de acordo com sua posição, em classes e ordens, de modo que a cada 3 ordens, temos uma classe, conforme podemos observar no exemplo abaixo, do número 3 627 546 .

Quadro 3.1: Classes e ordens no sistema indo-arábico

<table>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Ordem das unidades de milhão (07)</td><td>Ordem das centenas de milhar (06)</td><td>Ordem das dezenas de milhar (05)</td><td>Ordem das unidades de milhar (04)</td><td>Ordem das centenas simples (03)</td><td>Ordem das dezenas simples (02)</td><td>Ordem das unidades simples (01)</td></tr>
<tr><td>Classes dos milhões</td><td colspan="3">Classe dos milhares</td><td colspan="3">Classe das unidades simples</td></tr>
</table>

Fonte: O autor.

Assim, o número $3\ 627\ 546 = 3 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$, pertencente a classe dos milhões e lê-se três milhões, seiscentos e vinte e sete mil, quinhentos e quarenta e seis.

3.5.2 Operações básicas no sistema indo-arábico:

A ADIÇÃO:

A adição é um dos processos mais naturais e intuitivos do ser humano. Nos remete à ideia de juntar, agregar, somar. No entanto, representar a soma no sistema de numeração indo-arábico, bem como experienciar os algoritmos para a prática dessa operação, pode parecer um tanto quanto brusco, se o processo não for apresentado em uma estruturação adequada.

A seguir, apresentaremos o passo a passo para a realização do algoritmo da soma:

Passo 1: As partes que compõem a soma devem ser escritas uma abaixo da outra de modo a propiciar um alinhamento entre as ordens dos respectivos valores. Para tanto, é necessário que, caso uma das partes possua mais ordens, esta seja posicionada acima, em relação a outra. A cada uma das partes envolvidas na soma é dado o nome de parcela.

Passo 2: Devemos iniciar o processo de soma, junção, entre os valores das ordens alinhadas, da direita para a esquerda. Os resultados devem ser anotados separadamente.

Passo 3: Na orientação sugerida pelo passo 2, os resultados da soma devem ser representados, se possível, em agrupamentos de 10, de modo que, 10 unidades simples representam uma dezena simples, 10 dezenas simples representam uma centena simples, e assim, sucessivamente.

Passo 4: Devemos agrupar as respectivas ordens obtidas em um novo processo de soma, tal resultado será chamado, soma ou total.

Exemplo: $627 + 434$

Passo 1:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & 7 \\ + & 4 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Passos 2 e 3:

Ordem 1 (O1) $= 7 + 4 = 11 =$ 1 dezena simples e 1 unidade simples

Ordem 2 (O2) $= 2 + 3 = 5 =$ 5 dezenas simples

Ordem 3 (O3) $= 6 + 4 = 10 =$ 10 centenas simples = 1 unidade de milhar

Passo 4:

(1 unidade simples) + (1 + 5 dezenas simples) + (0 centenas simples) + (1 unidade de milhar) $= 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 1\ 061$.

A SUBTRAÇÃO:

A subtração, por sua vez, apresenta-se como uma operação associada às ideias de retirar uma parte, descobrir quanto falta ou quanto sobra num processo de comparação numérica. Seu algoritmo pode ser apresentado conforme descrito abaixo:

Passo 1: Posicionar as partes envolvidas na subtração uma abaixo da outra, de modo que o maior valor, caso exista, deve estar posicionado mais acima e exista um alinhamento entre suas respectivas ordens, da direita para esquerda. O maior termo será chamado de minuendo e o menor de subtraendo.

Passo 2: Realizar as subtrações, da direita para a esquerda, na ordem em que aparecem. Caso tenhamos o impasse de ser necessário retirar uma parte que seja maior que o todo, devemos retirar uma unidade da ordem à esquerda e adicioná-la à parte em questão. Em último caso, se a ordem imediatamente à esquerda não oferecer tal possibilidade, devemos recorrer às demais ordens à esquerda, respeitando SEMPRE a potência à qual a respectiva unidade deslocada está associada.

Passo 3: Com as subtrações efetuadas e as ordens devidamente separadas, os resultados devem ser representados, se possível, em agrupamentos de 10, de modo que, 10 unidades simples representam uma dezena simples, 10 dezenas simples representam uma centena simples, e assim, sucessivamente.

Passo 4: Devemos agrupar as respectivas ordens obtidas em um processo de soma. Ao resultado da subtração é dado o nome de diferença.

Exemplo: 1024 – 666

Passo 1:

$$\begin{array}{r} 1024 \\ -\quad 666 \\ \hline \end{array}$$

Passos 2 e 3:

Ordem 1: 4 – 6, apresenta o inconveniente de ter uma parcela a ser retirada maior que o todo. Desse modo, devemos tomar uma unidade da ordem imediatamente à esquerda, nesse caso, uma dezena. Agregando à parcela inicial teremos (10 + 4) – 6 = 14 – 6 = 8 = 8 unidades simples.

Ordem 2: Retirando a unidade deslocada anteriormente, teremos: (2 - 1) – 6, mais uma vez, teremos a problemática mencionada. Recorrendo ao mesmo procedimento, observamos que a ordem imediatamente à esquerda (Ordem 3) não possui unidade para ser deslocada, o que nos obriga a recorrer à ordem seguinte (Ordem 4). Essa unidade representa uma unidade de milhar, que equivale a dez centenas, que serão agregadas à ordem 3. Esta, por sua vez, terá subsídios para fornecer uma de suas unidades para a problemática Ordem 2. A unidade de centena cedida corresponde a dez dezenas, que quando agregadas à parcela existente na Ordem 2 resulta em (10 + 2) – 6 = 6 = 6 dezenas simples.

Ordem 3: Com a unidade cedida para a ordem anterior, restam 9 unidades, efetuando a subtração entre os valores de Ordem 3: 9 – 6 = 3 = 3 centenas simples. As demais ordens, não possuem unidades.

Passo 4: (8 unidades simples) + (6 dezenas simples) + (3 centenas simples) = $3.10^2 + 6.10^1 + 8.10^0 = 368$.

A MULTIPLICAÇÃO:

A operação de multiplicar pode ser encarada como a prática de efetuar sucessivas somas de parcelas iguais, sendo assim, uma forma de representação da própria soma, de modo que em um produto, $a \cdot b$ ou $a \times b$, o termo b deve ser somado a ele mesmo, a vezes. Seu algoritmo pode ser feito da seguinte maneira:

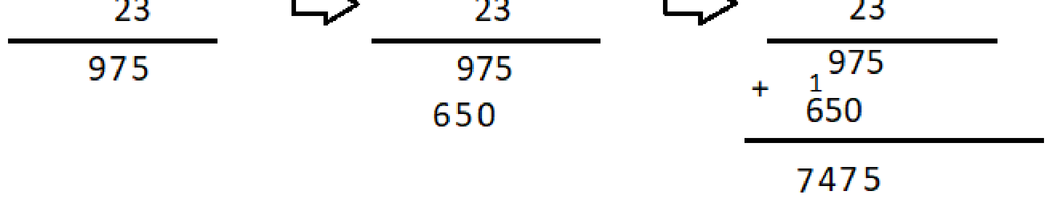
Passo 1: As partes envolvidas na multiplicação devem ser posicionadas uma abaixo da outra, de modo que o maior valor, caso exista, esteja acima do outro.

Passo 2: Da direita para a esquerda o valor correspondente à Ordem 1 do número posicionado abaixo deve ser multiplicado por todos os valores pertencentes às ordens do número acima, de modo que os resultados da multiplicação de cada ordem sejam agrupados de 10 em 10, sendo que 10 unidades simples representam uma dezena simples, 10 dezenas simples representam uma centena simples, e assim, sucessivamente. Cada ordem, ficará com as suas respectivas unidades, e as demais serão acrescidas ao resultado da multiplicação da ordem à qual pertencem.

Passo 3: Com as multiplicações efetuadas e as ordens devidamente separadas, os resultados devem ser somados, de modo que resultados a partir de 10 unidades irão transferir o excedente para ser adicionado ao resultado da multiplicação da ordem imediatamente à sua esquerda.

Passo 4: Com a soma devidamente feita no passo anterior, teremos o resultado da multiplicação. Tal resultado é chamado de produto.

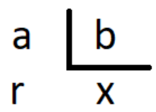
Exemplo: $325 \cdot 23$



A DIVISÃO:

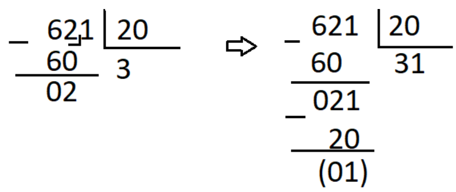
Usamos o algoritmo da divisão ($\div$) como forma de "repartir" um número em parcelas iguais. Consequentemente, descobrimos quantas dessas parcelas de um número "cabem" no mesmo. Um dos processos mais usuais para se realizar uma divisão é o chamado método das chaves, que será exemplificado logo a seguir:

Sejam $a, b, x, r \in \mathbb{N}$, é válido que $a = b \cdot x + r$, onde, a e b, são, respectivamente, os valores com os quais estamos operando, x é o resultado da divisão e r o resto da operação[10]. Esses valores serão apresentados no seguinte esquema:



É válido mencionar que o resultado apresentado é o chamado teorema fundamental da divisão. Seu resultado é de suma importância para o desenvolvimento da referida área, e sua demonstração não será apresentada, tendo em vista que o enfoque da sequência que apresentamos está nos sistemas de numeração e nos seus referidos algoritmos, sendo a demonstração em questão, mais pertinente no estudo dos conjuntos.

Exemplo: $621 \div 20$



No exemplo em questão, observe que $621 = 20 \cdot 31 + 1$, um caso particular, que corrobora com o teorema apresentado.

[10] O algorítmo da divisão, também conhecido como Teorema da Divisão Euclidiana é comumentemente apresentado da seguinte forma: Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que: $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < |b|$

Uma ressalva que devemos fazer é que uma divisão é dita exata quando o resto encontrado no algoritmo utilizado é igual a zero. Logo, a divisão efetuada não é exata, e podemos concluir que não é possível dividir 621 em 20 partes iguais sem que exista uma sobra de tamanho diferente.

É importante salientar, também, que o sistema indo-arábico conta com diversas outras operações e até mesmo com diferentes algoritmos, diferentes dos que apresentamos, para realizar suas operações, sendo esta, umas das principais características do sistema: a facilidade de se desenvolverem métodos para que se realizem operações sem a utilização de qualquer objeto manipulativo. Este fato, sem dúvidas, impulsionou o referido sistema a ser utilizado em todo o mundo, em um processo histórico que será melhor descrito na seção que trata da divulgação do referido sistema na Europa.

3.5.3 O algorítmo para mudança de base no sistema de numeração indo-arábico:

Como mencionado anteriormente, na seção que trata do sistema de numeração indo-arábico, apesar da convenção a respeito do uso da base decimal ser profundamente enraizada em nossa sociedade, a base do referido sistema é arbitrária, sendo esta, inclusive, uma característica considerada positiva do sistema, tendo em vista a sua possibilidade de adequação a diferentes necessidades.

Na informática, por exemplo, é comum observarmos a utilização de um sistema posicional de base 2, também conhecido como sistema binário. Esse sistema nada mais é do que uma variação de base do sistema de numeração indo-arábico. Da mesma forma, na contagem do tempo, em um outro exemplo, utilizamos uma outra variação, com base sexagesimal. E é natural identificarmos no dia a dia situações em que trabalhamos com contagens em dúzias, base 12, dentre outras bases, que eventualmente podem se fazer necessárias.

Desse modo, concluímos que é necessário para o estudante da educação básica que não só conheça, como saiba transformar e operar em diferentes bases no referido sistema. Por esse motivo, apresentaremos a seguir o passo a passo de um algoritmo que efetue tal transformação, sendo importante mencionar que a justificativa Matemática para este procedimento está amparada no Teorema Fundamental da Divisão, também conhecido como Teorema da Divisão Euclidiana, resultado este que já mencionamos anteriormente, quando tratamos do algoritmo da divisão.

Passo 1: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, para denotarmos o numeral a, em uma base b, utilizando o método das divisões sucessivas de Euclides, temos a garantia de que existem $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$, tais que $a = b \cdot q_1 + r_1$.

Passo 2: Analogamente, existem $q_2, r_2 \in \mathbb{N}$, tais que $q_1 = b \cdot q_2 + r_2$, por um raciocínio do tipo indutivo[11] , deduzimos que para qualquer $n \in N$, $q_{n-1} = b \cdot q_n + r_n$.

Passo 3: Conhecida a existência do resultado apresentado no Passo 2, devemos repetir o procedimento apresentado sucessivas vezes, até que se identifique que para um determinado valor de n, $q_n = 0$.

Passo 4: Desse modo, concluímos o processo, de modo que $a = (r_n r_{n-1} \ldots r_2 r_1)_b$.

Exemplo: Escreva o número 1650 na base 5.

Passo 1: Verificamos que $1650 = 5 \cdot 330 + 0$

[11] No raciocínio lógico, têm-se por método indutivo, aquele que utiliza de uma quantidade significativa de casos particulares para obter um resultado geral.

Passos 2 e 3: Reproduzindo o processo sucessivas vezes obtemos:

$$\begin{aligned} 1650 &= 5 \cdot 330 + 0 \\ 330 &= 5 \cdot 66 + 0 \\ 66 &= 5 \cdot 13 + 1 \\ 13 &= 5 \cdot 2 + 3 \\ 2 &= 5 \cdot 0 + 2 \end{aligned}$$

Passo 4: Concluímos que 1 650 = $(23100)_5$

Observe que, utilizando a representação polinomial descrita no capítulo que trata do sistema indo-arábico, é possível reescrever o número apresentado na base decimal. Para tanto, devemos realizar o seguinte procedimento:

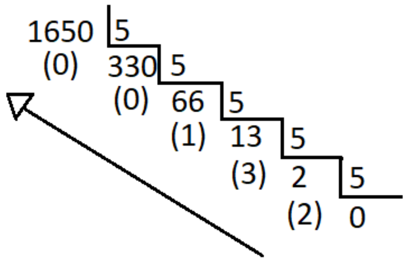
$$(23100)_5 = 0 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 = 0 + 0 + 25 + 375 + 1250 = 1650.$$

Tal procedimento, com características regressivas, pode ser encarado como uma forma de verificar a validade do resultado obtido.

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA A MUDANÇA DE BASE:

Sob justificativa didática, o passo a passo apresentado anteriormente, para efetuar uma mudança de base, pode ser apresentado aos estudantes da educação básica em uma outra formatação, de modo a utilizar o método das chaves, já mencionado. Para tanto, o exemplo solucionado, 1 650 na base 5, seria feito da seguinte forma:

Figura 3.15: Usando o método das chaves para a mudança de base



Fonte: O autor

Utilizando a orientação indicada pela seta, com os respectivos restos, também obtemos que 1 650 = $(23100)_5$.

A respeito das mudanças de base é importante mencionar que para representarmos um número qualquer de base decimal, em uma base maior do que 10, se faz necessário introduzir símbolos, como na base 11, em que os algarismos poderiam ser da forma $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X\}$.

A justificativa para tal alteração está no fato de que, ao dividirmos um natural qualquer por 11, o maior resto possível é o 10, no sistema decimal. Este valor seria representado pelo X, no exemplo de base 11 mencionado acima, sendo que as demais etapas do processo seguem inalteradas. Analogamente, para trabalharmos com bases ainda maiores, acrescentaremos outros símbolos, tantos quantos se façam necessários.

Diante das possibilidades apresentadas, percebemos o grau de sofisticação e praticidade alcançado pelo sistema indo-arábico, de um modo que seria natural imaginar que sua aceitação teria sido rápida, a nível global. Mas não foi bem assim, e a culpa não pode ser delegada à dificuldade de comunicação entre as civilizações, questões religiosas, políticas e até mesmo a uma certa soberba científica que atrasou esse processo, o qual será melhor descrito na próxima seção.

3.5.4 A divulgação do sistema indo-arábico na Europa:

É importante salientar que, apesar dos notáveis esforços de algumas figuras como Leonardo Fibonacci (1180 - 1250), Gebert (950 - 1003), Al-khowarizmi (780 - 850) e de tantos outros matemáticos da antiguidade, a divulgação do sistema de numeração indo-arábico só foi possível devido a uma séries de fatos históricos que permitiram o alinhamento entre as culturas do ocidente e do oriente. Alguns desses fatos serão descritos a seguir, tendo como principal fonte de informações a publicação Brandemberg e Guimarães (2020).

Segundo Brandembeg e Guimarães (2020), é insuficiente atribuir o mérito da divulgação do sistema hindu exclusivamente à obra Liber Abaci do matemático Leonardo Fibonacci, pois, apesar do reconhecido brilhantismo da obra, uma série de fatores sociais, políticos, econômicos, científicos e até mesmo religiosos propiciaram um "terreno fértil" para o necessário debate, quanto à incorporação de um novo sistema.

Por esse motivo, iremos traçar um paralelo a respeito da perspectiva do desenvolvimento das ciências, em especial da Matemática, tomando como referencial geográfico os territórios, ocidente e oriente do Império Romano, durante um período histórico que culmina com o ano de lançamento da obra em questão, 1202. Com isso, objetivamos possibilitar uma análise mais ampla, contemplando as histórias que contribuíram para o êxito do referido sistema.

No oriente, segundo Brandembeg e Guimarães (2020), apesar do interesse por otimizar as relações comerciais e o consequente desenvolvimento matemático, séculos de obscurantismo, fomentados por questões religiosas, culminaram em guerras e atos extremistas, como a destruição da biblioteca de Alexandria e de diversos textos de cunho matemático e científico. Nesse contexto, criou-se um ambiente de instabilidade para as ciências e para a cultura, que perdurou até meados do século VII d.E.C.

De acordo com Garbi (2009), após esse período, sob o governo do Califa Al-Mansur (714 - 775), o clamor pela guerra esfriou e o apreço às Artes, à Ciência e à Matemática voltaram à tona. Novos centros de estudo e de manutenção das Ciências foram criados e o sistema de numeração indiano foi adotado em Bagdá.

É importante frisar que a valorização das artes e das ciências contribuíram significativamente para que o sistema em questão pudesse ser incorporado às situações comerciais do oriente, pois os séculos de guerras, internas e externas, impediram o avanço das questões de cunho científico e matemático, além de inviabilizar as práticas comerciais com o restante do mundo, práticas essas que foram a motivação da criação e do aperfeiçoamento do referido sistema.

Em conformidade com Garbi (2009), o sucessor do califa Al-Mansur, Al-Mamum (786 - 833) também admirava as artes e as ciências, tendo criado em Bagdá a Casa da Sabedoria (Bait al-hikma), que teve como um dos seus mestres o matemático Al-Khowarizmi, um dos mais importantes matemáticos da História, tendo exercido forte influência na Álgebra ocidental e oriental. Além disso, Al-Khowarizmi descreveu em seus livros a utilização do novo sistema indiano que, nesse período, já possuía os aspectos posicional, decimal e com a existência do zero.

O fato de um matemático de fama internacional, com trabalhos de grande relevância, comparados aos antigos textos de Euclides, referenciar o sistema indiano foi, sem dúvidas, um dos fatores que legitimou e apresentou ao mundo o sistema que atualmente utilizamos.

No Ocidente, a separação do Império Romano, trouxe à Europa um período de séculos de instabilidade, o controle do clero sobre a informação e a cultura trouxeram limitações que não permitiram a matemáticos como Boécio (480 - 524) e Gebert obter êxito na divulgação do "novo sistema", mesmo ambos tendo estudado e publicado trabalhos nesse sentido.

Tal fato pode ser justificado pelo momento histórico da Matemática na Europa, que apresenta uma quantidade pequena de mudanças significativas e uma priorização na tradução e/ou reprodução de procedimentos conhecidos por civilizações anteriores.

De acordo com Potro (2000), a primeira obra europeia de sucesso, que apresenta o sistema indo-arábico é o liber abaci de Leonardo Fibonacci, no início do século XIII, um livro histórico sobre aritmética que, dentre outras contribuições, apresentou as vantagens de um sistema indiano, posicional, decimal e com um símbolo para representar o zero.

Segundo Brandemberg e Guimarães (2020), é importante ponderar que apesar do brilhantismo da obra de Fibonacci, podemos observar que outros matemáticos europeus já haviam se debruçado sobre o referido sistema. Mas, com um ambiente que pouco contribuía para mudanças tão drásticas, tais esforços não lograram êxito.

Leonardo Fibonacci, além de viver em um período em que a Europa apresentava uma maior estabilidade econômica, acompanhou o pai em diversas expedições mercantis, podendo conviver e aprender diversos sistemas de numeração.

Agregado a esse fato, podemos acrescentar a credibilidade da Matemática desenvolvida na Índia, fomentada pelos diversos tradutores orientais que puderam contribuir, significativamente, para transpor a barreira ocidente-oriente, com conhecimentos que só puderam ser disseminados graças ao período de valorização cultural que o Oriente prestigiou, após os séculos de obscurantismo religioso e cultural.

3.6 As potencialidades do estudo dos sistemas de numeração na perspectiva histórica:

Como citado anteriormente, o tema Sistema de Numeração está associado à matriz curricular do ensino fundamental. Ainda assim, do ponto de vista revisional é um componente curricular que merece nossa atenção nas séries finais do ensino médio, tendo em vista a possibilidade de oferecer ao professor e aos seus alunos a oportunidade de debater sobre temas como: O desenvolvimento da Matemática, os diferentes sistemas de numeração, justificar os algoritmos utilizados nas operações aritméticas básicas, dentre diversos outros assuntos matemáticos associados ao tema.

Ademais, se não fossem suficientes as vantagens matemáticas em reapresentar o tema em questão, ainda podemos enumerar algumas possibilidades didáticas, na associação entre a História e o ensino dos sistemas de numeração, quais sejam: apresentar a Matemática como um conhecimento em constante evolução; tornar o seu estudo mais prazeroso, ao associá-lo com outras áreas de conhecimento; aprender sobre sistemas de numeração pouco comentados em sala de aula; debater detalhes sobre diferentes civilizações da antiguidade; ressignificar o atual sistema de numeração e valorizar tudo aquilo que construímos historicamente na Matemática;

A respeito do último tópico abordado, a ressignificação do sistema indo-arábico, podemos observar alguns importantes detalhes históricos que justificam a sua massiva expansão. Por esse motivo, levantaremos algumas hipóteses que podem ser úteis durante o processo de ensino.

Para tanto, iremos observar o Quadro 3.2, que apresenta as principais características dos sistemas de numeração aqui abordados, tendo como referencial a fase final de desenvolvimento de cada um deles.

Quadro 3.2: Comparando os sistemas de numeração e suas principais características.

	Aditivo	Multiplicativo	Posicional	Representação do zero
Babilônico	NÃO	NÃO	SIM	NÃO
Egípcio (hieróglifo)	SIM	NÃO	NÃO	NÃO
Chinês	SIM	SIM	SIM	NÃO
Romano	SIM	NÃO	SIM	NÃO
Indo-arábico	NÃO	NÃO	SIM	SIM

Fonte: O autor.

No comparativo observado, podemos verificar que o sistema indo-arábico reúne as principais características evolutivas pertinentes aos demais sistemas. Conseguir reunir aspectos positivos em uma escrita simples e, ainda, acrescentar um símbolo representativo para o elemento neutro, pode ter impulsionado o sistema indo-arábico ao patamar hoje alcançado.

Um aspecto importante que deve ser frisado no sistema de numeração indo-arábico é que este, apesar de ser um sistema posicional, utiliza, em sua estruturação, aspectos aditivos e multiplicativos, tendo em vista que cada algarismo, pertencente à sua determinada posição em um número, deve ser multiplicado pela sua respectiva potência de base 10 e, ao final, esses produtos devem ser somados para que possamos estabelecer uma relação "um a um" com a quantidade que desejamos representar, um aspecto que pode ser associado aos sistemas egípcio e babilônico.

Além disso, segundo Brandemberg e Guimarães (2020), o cenário político, social e religioso de estabilidade, no século XIII, contribuíram, significativamente, para que o prático sistema indo-arábico se tornasse atrativo e pertinente às necessidades contábeis-administrativas e matemáticas das mais diversas civilizações.

Desse modo, cabe ao docente perceber que, ressaltar os aspectos históricos que contribuíram para o desenvolvimento do referido sistema, possui um potencial muito grande, pois abre espaço para o debate, trabalha a transversalidade entre diferentes componentes curriculares, desmistifica o desenvolvimento e ressignifica o aprendizado da Matemática, apresentando-a de uma forma mais humana, o que sem dúvidas é de interesse de professores e alunos, pois responde a questionamentos recorrentes como o "porquê" e o "para quê" estudamos Matemática.

A respeito do potencial da inserção da(s) História(s) no ensino de Matemática, acrescentamos que esta, apesar de não ser a única ferramenta de contextualização existente, mostra-se como uma possibilidade factível, que carece de poucos recursos financeiros, acessível aos profissionais da educação de diferentes níveis e com um enorme potencial de aperfeiçoamento científico.

Por esse motivo, apresentaremos uma sequência didática, que se propõe a utilizar a História como um "fio condutor" e como uma estratégia didática, de modo a oferecer ao estudante a possibilidade de conhecer diferentes sistemas de numeração e de refletir sobre a importância de se aprender Matemática no meio social e para sua própria vida.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Por sequência didática, Zabala (1998, p. 18) a entende como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Desse modo, podemos observar que o caráter estruturante e lógico de uma sequência didática de certo modo possui uma íntima ligação com a própria estruturação matemática, o que privilegia sua associação à referida disciplina.

Uma das características mais interessantes da sequência didática está na possibilidade de se contextualizar conteúdo a partir do lúdico ou da interdisciplinaridade. Tal característica oferece ao professor a possibilidade de fugir da aula expositiva tradicional, mesmo que apenas pontualmente.

Ademais, permite a professores e alunos perceberem a ligação entre disciplinas que muitas vezes são vistas como desconexas. No presente texto, apresentaremos uma sequência didática que trata da inserção da História no Ensino de Matemática, contextualizando o tema Sistemas de Numeração, a partir dos seus aspectos históricos, muitas vezes deixados em um segundo plano, com o objetivo de tornar o aprendizado do referido tema e da Matemática mais humano, mais significativo e próximo dos interesses do educando.

A sequência a seguir está estruturada em seis etapas, organizadas de modo a desenvolver nos estudantes algumas das habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC[12]) e para que este possa refletir sobre suas próprias concepções sobre a Matemática, trabalhando com os aspectos históricos e matemáticos que compõem o tema, utilizando o debate, a exposição e o apelo visual, a manipulação e a própria

[12]A BNCC é um documento nacional que regulamenta as demandas curriculares dos estudantes da educação básica do nosso país.

vivência, além dos conhecimentos do aluno como ferramenta.

No entanto, antes de apresentá-las, é pertinente justificar a estruturação e a motivação da sequência apresentada. Para tanto, alguns detalhes serão salientados a seguir:

1) A escolha dos sistemas de numeração: Escolher o tema sistemas de numeração foi uma tarefa simples, tendo em vista as inúmeras potencialidades mencionadas no decorrer do trabalho. Todavia, escolher sobre quais sistemas trabalhar foi uma tarefa árdua, tendo em vista a importância histórica de todos os sistemas existentes. Ainda assim, priorizamos trabalhar com aqueles que apresentavam características diferenciadas, deixando ao leitor/professor, a prazerosa responsabilidade de observar outros sistemas, como o sistema de numeração Inca, Maia, Sumério e diversos outros, potencialmente instigantes para o trabalho em sala de aula.

2) A justificativa da estruturação das etapas: Como mencionado, a sequência está estruturada em etapas e tem como objetivo propiciar uma proposta lógica, coerente, do ponto de vista matemático, mas tendo a História como um fio condutor. Por esse motivo, as etapas se iniciam na civilização babilônica, cerca 3000 a.E.C, e finalizam por volta do século 13 d.EC, tendo como marco a obra Liber Abaci.

3) Quais instrumentos serão utilizados na sequência a seguir:

A grande justificativa para uma sequência didática sob uma perspectiva historiográfica está na possibilidade da contextualização, pois a associação entre a História e a Matemática trazem, por si, o vigor e o estímulo necessário para aprender, mas não devemos nos esquecer de alguns outros artifícios possíveis, como o apelo ao lúdico e à resolução de problemas.

Por esse motivo, apresentaremos, nas etapas a seguir, uma proposta de utilização do ábaco, um importante instrumento histórico e manipulativo usado para efetuar operações, nas mais diversas civilizações, como salientado em nosso trabalho. Além disso, trabalharemos com a resolução de problemas do caderno de questões do Portal da Matemática (OBMEP), como forma de mostrar que o processo de ensino proposto pode fugir do tradicional e, ainda assim, atender às demandas avaliativas do cotidiano escolar.

4.1 ETAPA 01: As histórias, os homens e os Sistemas de Numeração.

OBJETIVO:

Debater sobre o período anterior aos primeiros sistemas de numeração, enumerando as condições individuais e sociais que levaram o homem primitivo a perceber a necessidade de contar, enumerando, paralelamente, os artifícios desenvolvidos para atender a essas demandas.

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

HABILIDADES:

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel
- Quadro branco
- Projetor (opcional)

PROCEDIMENTO:

É necessário fomentar um cenário propício ao debate, convidativo à participação dos estudantes e que permita a interação entre todos. Para tanto, recomenda-se que o processo seja iniciado com alguns questionamentos, comuns entre os estudantes: “Quem inventou a Matemática?”, “Quem inventou os números?”, “Por que estudamos Matemática?”.

Em questionamentos desse tipo, abrimos espaço ao diálogo, à participação e ao mesmo tempo quebramos o paradigma de que a aula é o local do silêncio e de que a aula de Matemática é o local das “contas”.

Nesse debate, espera-se que o professor consiga perceber qual a visão que os alunos possuem da Matemática, sendo que as intervenções do profissional devem ter como objetivo obter respostas sobre alguns questionamentos, como:

1) O(s) aluno(s) tem consciência de que a Matemática não foi inventada por alguém?

2) Qual a importância dos sistemas de numeração e da Matemática para o desenvolvimento das sociedades primitivas?

3) A turma tem conhecimento de que o sistema de numeração indo-arábico não é único?

4) Quais outros sistemas de numeração são conhecidos pela turma?

5) Qual a importância de se estudar Matemática hoje?

Após essa etapa introdutória de debates, espera-se que os alunos estejam instigados a obter as respostas sobre os questionamentos levantados. Nesse momento, o professor deve apresentar os aspectos históricos que compunham o meio de viver do homem primitivo, suas demandas e desafios diários, ressaltando os aspectos pertinentes à vida nas primeiras cidades.

Nesse momento, será inevitável tratar do fato de que, mesmo antes do surgimento das primeiras cidades, o homem sentiu a necessidade de contar. Para tanto, de forma concreta, utilizava partes do próprio corpo, como os dedos das mãos e dos pés e que quando estes, não foram mais suficientes, passou a fazer marcas em objetos, como pedras ou osso de animais, o Osso de Ishango (Figura 2.1) pode ser usado para fomentar o aspecto visual do tema.

Com o debate e as informações apresentadas, espera-se que os estudantes venham a deduzir que a Matemática não foi inventada por alguém, ela é uma atribuição inerente à necessidade de sobrevivência do ser humano e que a capacidade de sobrevivência do homem está intimamente ligada ao seu saber matemático.

4.2 ETAPA 02: Os Sistemas de Numeração na Babilônia, no Egito, na China e em Roma.

OBJETIVO:

Trabalhar os aspectos históricos e os sistemas de numeração das referidas civilizações, salientando a relação existente entre o desenvolvimento da Matemática e do homem como ser social.

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

HABILIDADES:

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel
- Quadro branco
- Projetor (opcional)

PROCEDIMENTO:

Objetivando responder aos questionamentos feitos na etapa anterior, deve-se ressaltar os aspectos históricos que levaram o homem a sair do isolamento e passar a viver em comunidades e, posteriormente, como essas comunidades se transformaram em cidades, com estrutura física, social, política e religiosa.

Paralelamente a tudo isso, ressaltar que, nesse momento, a contagem puramente concreta já não atendia às demandas da sociedade, que necessitava dividir terras, insumos e bens. Por esse motivo, é natural deduzir que em algum momento surgiria o interesse em unificar a representação numérica e, com essa motivação, surgiram os primeiros profissionais dedicados à Matemática.

Feitas as devidas ressalvas, os alunos devem ser apresentados à civilização babilônica, suas características sociais, históricas e sua contribuição para o advento da escrita, ressaltando a tese contábil-evolutiva para justificar o surgimento da escrita.

Será relevante, também, ressaltar os diferentes momentos durante a evolução do sistema de numeração babilônico, ressaltando que este não foi linear e que passou por momentos de maior ou menor desenvolvimento.

Para concluir esta etapa, podemos apresentar o produto final do referido sistema, salientando a transição dos tokens para as marcas em blocos de argila, expondo os materiais históricos (Figura 2.2) que até hoje existem e nos auxiliam no processo de entendimento dessa complexa civilização e, por fim, a simbologia utilizada para a representação dos números, que já apresentava características que nos remetem ao processo de abstração numérica.

Nesse momento, as comparações com o sistema indo-arábico serão inevitáveis, por parte dos estudantes, e não devem ser reprimidas, muito pelo contrário, devem ser ressaltados os aspectos em comum e as diferenças entre os sistemas.

De modo análogo, devemos apresentar o contexto social e político da civilização egípcia, ressaltando que os fatos relatados ocorreram em períodos históricos próximos e que tanto o Egito, quanto a Babilônia destacavam-se no quesito organização social.

Em seguida, apresenta-se o sistema de numeração egípcio, com suas características e diferenças em relação ao sistema de numeração babilônico e ao indo-arábico, procurando apresentar os papiros existentes e a Matemática conhecida pelos escribas do antigo Egito.

Em conformidade com a proposta de apresentar os sistemas de numeração utilizando a História como "fio condutor", os alunos devem ser apresentados ao sistema de numeração Chinês, com seus ideogramas e signos, ressaltando as três etapas de desenvolvimento do referido sistema, deixando claro que tal desenvolvimento também não foi linear e apresentando os problemas que levaram a referida civilização a adotar um sistema aditivo-multiplicativo e posicional.

Nesse contexto, é válido abrir espaço ao debate, incentivando os alunos a se questionarem, sobre a possibilidade do sistema de numeração chinês ser adotado hoje. É esperado que os alunos observem os aspectos comuns ao atual sistema indo-arábico e as limitações do sistema Chinês, como por exemplo, a falta de um algarismo para representar o zero.

Em seguida, a pergunta de número 4, feita na etapa 01, deve ser inserida no debate, sendo esperado que alguns alunos relatem ter sido apresentados a sistemas como os mencionados anteriormente, mas é esperado que o sistema romano seja o mais presente, nos conhecimentos prévios dos estudantes. Essa conclusão é embasada na influência que a igreja católica exerce em nossa sociedade, mesmo nos dias atuais, e no relato, dos próprios alunos, que cotidianamente devem identificar o referido sistema em livros, revistas, placas de rua etc.

Aproveitando a estrutura criada pelos questionamentos e pelas discussões, o sistema de numeração romano deve ser apresentado com mais um questionamento: Porque o sistema de numeração romano nos parece mais próximo que os outros sistemas apresentados? A discussão deve passar por dois aspectos, o matemático, no sentido de apresentar as etapas de aperfeiçoamento do sistema, e a questão histórica, ressaltando o fato da sua utilização pela Igreja Católica, a extensão espacial e temporal do domínio do Império Romano e os séculos de utilização europeia.

Por fim, apresentam-se as principais contribuições históricas dessas civilizações, ressaltando o quanto desenvolveram-se como sociedade, contribuíram para a Matemática e para diversas outras áreas da Ciência e seu legado para as civilizações posteriores.

Nessa conclusão, o Quadro 1, pode ser utilizado como forma de comparar e de recapitular os sistemas de numeração, ressaltando os aspectos que caracterizam concordância ou divergência, entre os quatro sistemas apresentados, e desses, com o sistema de numeração indo-arábico, que apesar de não ter sido apresentado, é esperado que seja conhecido pelos alunos, tendo em vista o aspecto revisional da referida sequência.

4.3 ETAPA 03: O sistema de numeração Indo-arábico

OBJETIVO:

Debater os aspectos históricos que acarretaram no desenvolvimento e na inserção do sistema em questão nas mais diversas civilizações, além de apresentar o referido sistema e suas operações básicas.

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.
- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.
- Divisão euclidiana.

HABILIDADES:

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel
- Quadro branco
- Projetor (opcional)

PROCEDIMENTO:

Com o conhecimento histórico e matemático, envolvendo as civilizações e os seus respectivos sistemas de numeração, é esperado que a forma como o estudante enxerga o atual sistema tenha sido ampliada, ressignificada, de modo que alguns questionamentos a respeito desse sistema devem existir. Nessa etapa, fomentar o debate torna-se ainda mais necessário.

Para tanto, é recomendável iniciar esta etapa apresentando a Figura 3.14, de modo a questionar se os alunos conseguem identificar o próximo sistema de numeração que será estudado. É esperado que os últimos símbolos sejam reconhecidos, que o sistema indo-arábico seja identificado e que surjam alguns questionamentos a respeito da evolução dessa simbologia, um território fértil para a inserção dos aspectos históricos, debatidos no capítulo que trata da divulgação do sistema indo-arábico na Europa.

Observe que, nessa etapa, optamos por iniciar a apresentação do sistema em questão a partir de uma abordagem histórica, tendo em vista a possibilidade de que alguns alunos possam apresentar um certo “desinteresse” por rever os aspectos matemáticos de um sistema tão frequentemente utilizado. Tal estratégia, pretende contextualizar a História, como forma de introduzir, direcionar e ressignificar o aprendizado desejado.

Com as questões políticas, sociais, históricas e religiosas devidamente debatidas, devemos apresentar os padrões matemáticos do sistema em questão, chamando atenção para as suas principais características. A saber: um sistema posicional, de base arbitrária, com a presença da representação do zero.

Nesse momento, ressaltar que tais características eram também pertinentes a outros sistemas apresentados, é uma prática recomendável, com o objetivo de despertar o aluno para a importância de uma herança histórica, na construção de um conhecimento científico.

Por fim, devemos apresentar os algoritmos para realizar as operações aritméticas básicas de modo a mostrar que em outros sistemas utilizar algoritmos não seria viável, ou mesmo que fosse, nos apresentaria enorme dificuldade e que sem o referido sistema, seria impossível mensurar o prejuízo do desenvolvimento da Matemática e das Ciências de um modo geral.

É recomendável finalizar essa etapa oferecendo ao aluno a possibilidade de mencionar outros algoritmos para realizar operações com o sistema indo-arábico. Tal prática dinamiza o encontro e oferece aos alunos a possibilidade de compartilhar conhecimento entre eles mesmos e de perceber a possibilidade de se pesquisar e produzir, no campo da Matemática.

4.4 ETAPA 04: Operações no sistema de numeração indo-arábico usando o ábaco, digital ou físico.

OBJETIVO:

Agregar à prática um momento lúdico, manipulativo, que propicie ao aluno a possibilidade de vivenciar um importante instrumento histórico, remanescente às diversas civilizações mencionadas

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.

HABILIDADES:

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel
- Quadro branco
- Projetor (opcional)
- Ábaco Chinês convencional - SOROBAN (opcional)
- Aparelho celular, tablet ou computador

PROCEDIMENTO:

Aproveitando o fato de que uma parcela significativa de alunos do ensino médio possui acesso a aparelhos eletrônicos como celulares, tablets, computadores, é válido oferecermos ao estudante um momento de maior ludicidade, com auxílio de materiais manipulativos, sem deixar de lado a finalidade Matemática da etapa.

Sob essa justificativa, indicaremos um procedimento em que falaremos a respeito de um importante instrumento histórico da Matemática, o ábaco, instrumento este que foi amplamente utilizado por diversas civilizações ao longo da História, com a finalidade de efetuar operações básicas, servindo como uma forma de complemento para os sistemas que não propiciavam os algoritmos operacionais.

Para tanto, é recomendável, embora não obrigatório, que o professor adquira ou construa um ábaco, para demonstrações em sala de aula. Uma outra alternativa, seria utilizar um aplicativo que simule seu uso, sendo que este artifício pode ser encontrado para celulares e similares. Um pouco adiante, será indicado um aplicativo com essa finalidade.

A respeito do uso de tecnologias no ambiente educacional, o senso comum aponta que possuímos uma "geração digital" e, nossa experiência, enquanto professores, corrobora com essa alegação. Entretanto, o que podemos perceber é que existe um uso excessivo e não orientado desses aparelhos no ambiente escolar. Por esse motivo, o bom senso nos aponta para uma maior flexibilização, aproveitando as potencialidades tecnológicas sob a orientação do professor e com uma finalidade estritamente didática.

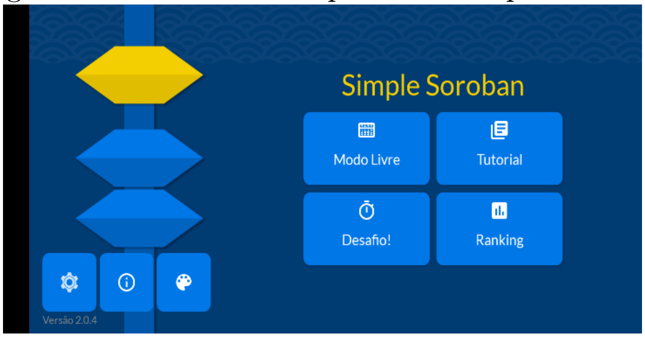
Em uma discussão que está além do nosso trabalho, inclusive, pode-se debater se o simples ato de proibir e condenar o uso do celular no ambiente escolar é útil e se não seria papel da escola, inserir-se em uma realidade tecnológica tão presente no nosso cotidiano. Este raciocínio se mostra ainda mais evidente se considerarmos o contexto do ano de 2020, quando a pandemia do novo Coronavírus trouxe ao mundo uma realidade educacional completamente diferente, com aulas remotas, numa conjuntura em que o uso das tecnologias evitou uma perda completa do ano letivo.

O APLICATIVO SIMPLE SOROBAN:

Dentro desse contexto, indicaremos o uso de um aplicativo para celulares, chamado "SIMPLE SOROBAN", Figura 4.1, um programa que simula o uso de uma variação do ábaco que é muito comum no Japão e na China, o Soroban.

O aplicativo em questão possui uma finalidade educacional, uma estruturação simples e uma boa potencialidade a ser explorada. É um recurso gratuito e sem propagandas, desenvolvido pelo programador Bruno Oliveira, como um artifício recreativo e lúdico, e pode ser encontrado no endereço eletrônico:
https://play.google.com/store/apps/details?id=br.net.btco.soroban&hl=pt_BR.

Figura 4.1: Interface do aplicativo Simple Soroban

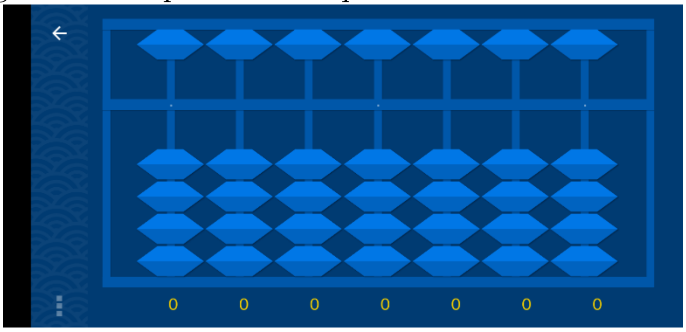


Fonte: Aplicativo Simple Soroban

Neste aplicativo, temos a possibilidade manipular um Soroban tradicional, com base decimal e operar com até 9 dígitos em três modalidades diferentes: o Modo livre, modo Tutorial e modo Desafio. Como pudemos observar na Figura 4.1:

1) Modo Livre: Nessa modalidade, efetuamos as manipulações da forma que desejarmos, realizando qualquer operação básica que seja do interesse do usuário, sem que para tanto exista algum tipo de interferência ou auxílio. (Figura 4.2)

Figura 4.2: Aplicativo Simple Soroban em Modo Livre



Fonte: Aplicativo Simple Soroban

2) Modo Tutorial: Nesse modo, somos ensinados a realizar as operações básicas em um passo a passo bastante lúdico e prático. Abaixo, a título de ilustração, indicaremos uma operação de soma, de acordo com o procedimento indicado pelo aplicativo: (Figura 4.3)

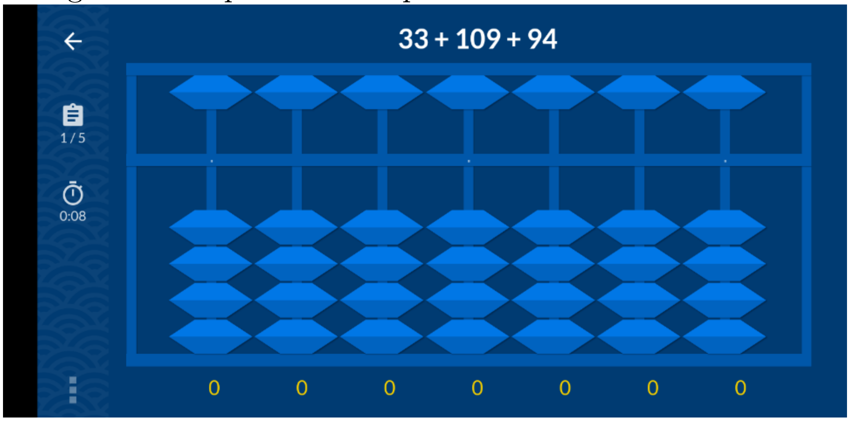
Figura 4.3: Aplicativo Simple Soroban em Modo Tutorial

Fonte: Aplicativo Simple Soroban

3) Modo Desafio: Nessa modalidade, podemos nos colocar em teste, ao efetuar operações indicadas pelo próprio aplicativo sem que seja utilizado nenhum tipo de auxílio. Para tanto, o aplicativo solicita a escolha da operação básica que se deseja fazer e o nível de dificuldade em que desejamos ser testados, dentre três possíveis: fácil, normal ou difícil.

Em seguida, somos apresentados a um teste, com a operação e o nível de dificuldade desejado, junto a um temporizador e a possibilidade de ter acesso a outros problemas semelhantes, caso consigamos resolver o problema inicial, em um formato que se assemelha aos avanços de fase, comuns em jogos eletrônicos, como pudemos observar na Figura 4.4.

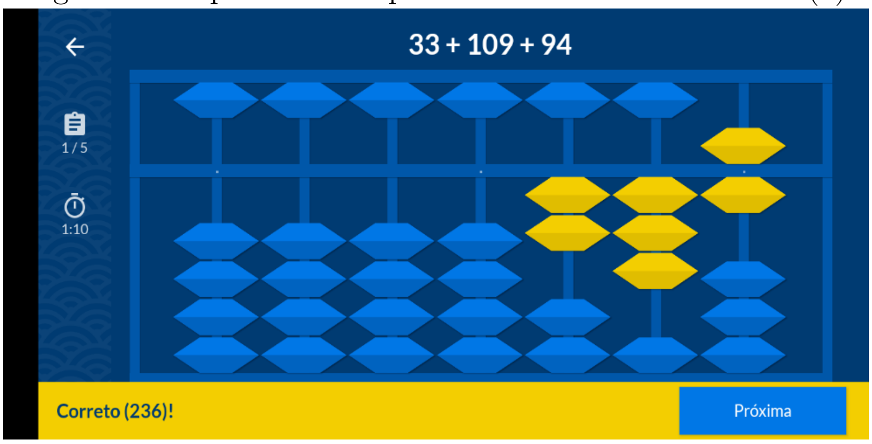
Figura 4.4: Aplicativo Simple Soroban em Modo Desafio



Fonte: Aplicativo Simple Soroban

É importante observar que, nessa etapa, oferecemos ao educando a possibilidade de simular a utilização de um instrumento histórico muito comum na Matemática antiga, propiciando ao aluno a possibilidade de associar e refletir sobre os algoritmos que amplamente utilizamos atualmente. (Figura 4.5)

Figura 4.5: Aplicativo Simple Soroban em Modo Desafio (2)



Fonte: Aplicativo Simple Soroban

Portanto, como podemos verificar, o Soroban é um artifício útil que permite realizar operações básicas, fomenta manipulações aritméticas, mentais ou não, ressignifica o aprendizado dos sistemas de numeração, das operações básicas e é um forte elemento na associação entre História e ensino de Matemática.

Por esse motivo, concluímos que sua utilização pode ser mais uma importante ferramenta de contextualização. Seja na versão física, ou na versão virtual, acredita-se que o professor deve estar atento à possibilidades desse tipo, ressaltando que na versão virtual, o próprio programa conduz os estudantes ao aprendizado que desejamos, cabendo ao professor o papel de conduzir, facilitar e acompanhar os rumos do processo de aprendizagem.

4.5 ETAPA 05: Mudança de base no sistema de numeração Indo-arábico

OBJETIVO:

Apresentar o algoritmo para mudança de base no sistema de numeração indo-arábico, de modo acessível ao público em questão e resolver exemplos associados ao tema.

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

HABILIDADES:

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel

- Quadro branco

- Projetor (opcional)

PROCEDIMENTO:

Do ponto de vista matemático, salientar a arbitrariedade da base, no sistema de numeração indo-arábico é um debate extremamente pertinente às séries finais do ensino médio, tendo em vista que em muitos anos como professor de ensino médio foram poucas as vezes que identifiquei estudantes com esse conhecimento. Mais raros ainda, foram os casos em que os discentes sabiam efetuar trocas de base.

Por esse motivo, é recomendável iniciar essa etapa salientando os motivos que nos levam a trocar uma base em um sistema que se universalizou como decimal. Para tanto, é recomendável trazer à tona o debate apresentado no início do capítulo sobre o algoritmo para mudança de base, ressaltando as situações do cotidiano que podem nos levar a essa necessidade.

Com a realização do debate a respeito da importância de se trabalhar com diferentes bases no sistema indo-arábico, devemos apresentar o algorítmo para efetuarmos tais mudanças, nesse contexto, é preferível introduzirmos esse conhecimento com o método tradicional, para em seguida, apresentar o método alternativo, relacionando o método resolutivo com o teorema fundamental da divisão. Essa orientação tem como objetivo contextualizar o aprendizado, tendo em vista que o segundo método apesar de bastante prático, pode omitir aspectos matemáticos pertinentes.

Com o debate estabelecido e o estudante envolto na importância do que nos propomos a ensinar, devemos apresentar o referido algoritmo, presente no capítulo mencionado anteriormente, salientando que o procedimento em questão está profundamente relacionado ao teorema fundamental da divisão, que deve ser apresentado antes do método em questão.

Na apresentação do algoritmo, é recomendável apresentar os dois métodos apresentados, salientando que o segundo, que deve ser melhor recebido pelos estudantes, nada mais é do que uma variação do primeiro e que este possui um importante embasamento matemático.

É recomendável encerrar essa etapa com a resolução de um questionário, como o que apresentaremos a seguir, deixando o aluno à vontade para tentar resolver sozinho, em grupo ou até mesmo no quadro, as questões de cunho matemático, incentivando-o a apresentar suas respostas e procedimentos aos demais alunos.

QUESTIONÁRIO:

1) Você considera interessante a associação entre a História e a Matemática? Em caso positivo, você gostaria de outras associações desse tipo?

2) Qual(is) aspecto(s) histórico(s) e/ou matemático(s) mais chamou(aram) a sua atenção nesse estudo?

3) Qual(is) sistema(s) de numeração você considera mais interessante(s)? Qual(is) você já conhecia?

4) Você acredita que, no futuro, possamos utilizar um outro sistema de numeração, diferente do atual sistema indo-arábico ou, ainda, que seja mais habitual usar uma base diferente da decimal? Justifique sua resposta.

5) Efetue as mudanças de base dos numerais abaixo, sabendo que todos estão representados em sua base decimal:

a) 723 na base 5

b) 1 024 nas bases 3,5,7

c) 4 967 na base 12

6) Classifique a afirmação abaixo em VERDADEIRO(V) ou FALSO(F):

( ) O número 2 na base 10 é representado por 10 na base 2.

Com o questionário proposto, objetivamos avaliar a percepção dos estudantes sobre a abordagem adotada, além de observar se os aspectos matemáticos trabalhados até o momento estão sendo compreendidos de forma adequada. Os resultados observados nessa fase devem ser considerados, no sentido de nortear o ritmo e o grau de complexidade das questões que serão indicadas na fase seguinte.

4.6 ETAPA 06: Resolução de problemas

OBJETIVO:

Resolver problemas do Portal da Matemática (OBMEP[13]) sobre: sistema de numeração indo-arábico, algoritmos das operações básicas e sobre as mudanças de base no sistema indo-arábico.

UNIDADE TEMÁTICA:

- Números

OBJETOS DE CONHECIMENTO:

- Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

- Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais.

- Divisão euclidiana.

HABILIDADES:

[13] A OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, é um projeto nacional dirigido às escolas públicas com o objetivo de avaliar, anualmente, o nível de aprendizado em Matemática das referidas instituições.

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

DURAÇÃO DO EXPERIMENTO:

2 h/a.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Pincel
- Quadro branco
- Projetor (opcional)

PROCEDIMENTO:

Aproveitaremos esse momento de culminância para corrigir as questões 5 e 6 e debater as questões discursivas apresentadas no momento anterior, apresentar as respostas dos próprios alunos e dirimir as eventuais dúvidas apresentadas, ressaltando o protagonismo do aluno na construção do próprio conhecimento, a validade das suas opiniões e o quanto eles podem ser relevantes para a construção das futuras "novas histórias".

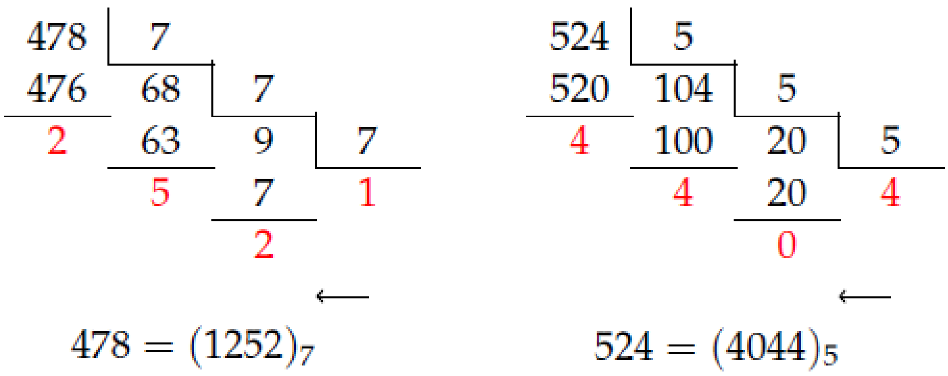
Além disso, aproveitaremos para imergir em problemas matemáticos de um maior grau de dificuldade, tendo em vista a possibilidade de mostrar ao aluno que o conhecimento adquirido transcende o aspecto da curiosidade, ele é prático e deve ser aproveitado em diferentes situações, como por exemplo em avaliações externas, comuns ao ambiente escolar.

Para tanto, apresentaremos a seguir um compilado com algumas das questões disponíveis no site PORTAL DA MATEMÁTICA (OBMEP), no tópico: "Sistemas de Numeração". A plataforma em questão é gratuita e oferece a estudantes e professores, do ensino fundamental ao médio, o acesso a vídeo aulas, materiais digitalizados e questionários, com o objetivo de aprofundar e desenvolver talentos na Matemática.

Devido à sua gratuidade, seu uso é recomendado, tanto para professores, quanto para alunos que desejem o acesso a um material de qualidade, organizado e pautado nas mais diversas competências e habilidades pertinentes a cada etapa de ensino. Seu acesso é bastante simples e pode ser feito a partir do endereço eletrônico: http://matematica.obmep.org.br/.

As questões que veremos a seguir devem ser apresentadas, debatidas e solucionadas em sala de aula, de modo a incluir o aluno em todo o processo de resolução:

Exercício 1. Para converter um número da base 10 para outra qualquer, basta operar sucessivas divisões e destacar todos os restos em cada passo e o último quociente. Os exemplos abaixo ilustram as conversões do número 478 para a base 7 e 524 para a base 5.



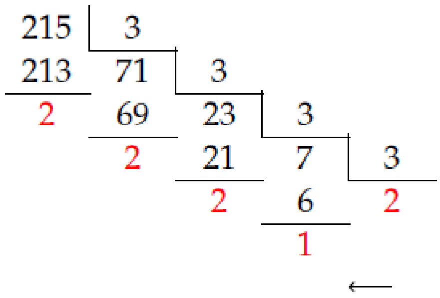
Agora, proceda com o que se pede.

a) Converta 215 para a base 3.

b) Converta 2 000 para a base 7.

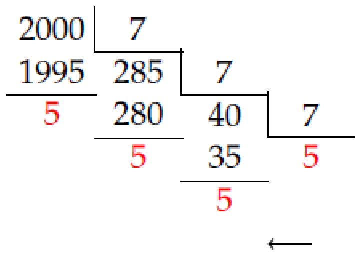
Solução:

a) De acordo com o algoritmo alternativo para mudança de base, teremos a seguinte formatação:



Assim, $215 = (21222)_3$

b) De modo análogo, teremos:



Portanto, $2000 = (5555)_7$

Exercício 2. Em regra, um número X numa base a é escrito como $(X)_a$. A base 10, por ser o sistema corrente, costuma dispensar a simbologia do índice subscrito, mas também podemos escrever $(X)_{10}$ ou X para enfatizar que estamos usando tal base. Por exemplo:

$(13)_4 = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 7;$

$(101)_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5;$

$(1234)_7 = 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 466.$

Observando os exemplos, converta os números abaixo para a base decimal.

a) $(312)_4$

b) $(10011)_2$

c) $(11111)_5$

Solução:

a) $(312)_4 = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 48 + 4 + 2 = 54$

b) $(10011)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$

c) $(11111)_5 = 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 625 + 125 + 25 + 5 + 1 = 781$

Exercício 3. Nas tabelas abaixo, todos os números estão escritos na base 4. A da esquerda é a de soma e a da direita, a de multiplicação. Construa essas mesmas tabelas para as bases 2 e 3.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Solução:

Base 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 3:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Exercício 4. Sendo $A = (11000)_2$ e $B = (10001)_2$, qual o valor de A - B no sistema decimal?

Solução:

Inicialmente, é recomendável representar A e B na base decimal, assim:

$A = (11000)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 = 24$

$B = (10001)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$

Portanto,

A – B = 24 – 17 = 7.

Exercício 5. Suponha que x seja representado por um número de dois dígitos ab na base 8, isto é, $(ab)_8$, e que $x = a^2 + b^2$, na base decimal. Qual é o valor de b?

Solução:

Sendo $x = (ab)_8$, então $x = b \cdot 8^0 + a \cdot 8^1 = 8a + b$. Logo $x = 8a + b$.

Por hipótese, é válido também que $x = a + b$

Sendo assim, vale que:

$$8a + b = a^2 + b^2$$

$$8a - a^2 = b^2 - b$$

$$a \cdot (8 - a) = b \cdot (b - 1)$$

Ora, como $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, efetuando os devidos testes e excluindo o caso em que a e b são ambos nulos, tendo em vista que tal caso contrariaria nossa hipótese de que se trata de um número de dois dígitos, concluímos que os seguintes resultados são possíveis:

$a = 2$ e $b = 4$

$a = 6$ e $b = 4$

$a = 8$ e $b = 1$

Exercício 6. (Adaptado da Olimpíada dos Estados Unidos) No sistema de numeração de base 10, o número 526 representa $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6$. Em Terra Brasilis, entretanto, os números são escritos na base z. Wellington compra um automóvel lá por 440 unidades monetárias (abreviada por u.m.). Ele dá ao vendedor uma cédula de 1000 u.m. e recebe de troco 340 u.m.. Qual a base z?

Solução:

Uma boa opção para tratar esse problema de uma forma prática é detalhar os dados da operação em uma base decimal, conforme o esquema abaixo:

Valor da Compra (C): $(440)_z = 4 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 0 \cdot z^0 = 4z^2 + 4z$

Logo, $C = 4z^2 + 4z$

Valor Pago (P): $(1000)_z = 1 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 + 1 \cdot z^0 = z^3$

Logo, $P = z^3$

Valor do Troco (T): $(340) = 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 0 \cdot z^0 = 3z^2 + 4z$

Assim, $T = 3z^2 + 4z$

Sabendo que $P - C = T$, então:

$$\begin{aligned} z^3 - [4z^2 + 4z] = 3z^2 + 4z \\ z^3 - 7z^2 - 8z = 0 \\ z \cdot [z^2 - 7z - 8] = 0 \end{aligned}$$

Portanto $z = 0$, ou $z = 8$ ou $z = -1$. Ora, mas z é um número inteiro e não nulo, pois z é uma base e deve representar uma contagem de elementos, então podemos concluir que o único resultado possível é o caso em que $z = 8$.

Exercício 7. (Extraído da Olimpíada do Canadá) O número N é um inteiro que possui representação na base b igual a 777, ou seja, $N = (777)_b$. Calcule o menor inteiro positivo b tal que N é a quarta potência de algum inteiro.

Solução:

Seja $N = (777)_b$, como $(777)_b = 7 \cdot b^2 + 7 \cdot b^1 + 7 \cdot b^0 = 7b^2 + 7b + 7 = 7 \cdot [b^2 + b + 1]$

Então $N = 7 \cdot [b^2 + b + 1]$

Sendo $b, K \in \mathbb{Z}$, procuramos o menor valor de b, tal que $N = K^4$.

Assim, $7 \cdot [b^2 + b + 1] = K^4$ o que implica $7|K^4$.

Como 7 é primo, $7|K$. Desse modo, $K \geq 7$.

Se desejamos que o valor de b seja mínimo, começaremos por testar o caso $K = 7$:

$$7 \cdot [b^2 + b + 1] = 7^4$$

$$[b^2 + b + 1] = 7^3$$

$$b^2 + b - 342 = 0$$

Portanto, $b = -19$ ou $b = 18$. Como b é inteiro positivo e não nulo, por ser uma base, então $b = 18$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A vivência em sala de aula, enquanto professor, nos traz inúmeros aprendizados, acumula experiências e oferece a segurança, tão necessária ao profissional que tem o dever de ensinar. No entanto, diante de uma realidade muitas vezes desestimulante, acabamos por nos permitir perder para o comodismo.

O ensino tradicional é cômodo e torna-se, com o passar do tempo, uma forma estanque de abordagem dos conteúdos, visto que o professor dispõe de pautas de planejamentos, insumos e observações antigas, nas quais baseia sua prática, repetindo procedimentos que limitam a ideia de planejar, bem como a busca por metodologias mais significativas, por exemplo.

É importante salientar que o debate proposto não tem o intuito de fazer uma crítica ao professor. Muito pelo contrário, como representante da categoria, reconheço que na maioria das vezes travamos batalhas inglórias, não reconhecidas e demasiadamente mal remuneradas, para que se exija um trabalho de tamanha complexidade. Mas a História nos mostra que o comodismo nunca foi uma solução.

O campo da didática no ensino de Matemática é amplo e promissor, mas deve ser trazido ao ambiente de maior necessidade, a escola. Por esse motivo, propusemos uma sequência didática, que teve como objetivo tratar, de forma revisional, o tema sistemas de numeração sob uma perspectiva histórica, delegando à(s) História(s) o papel de conduzir e de contextualizar a temática escolhida.

O presente trabalho apresenta-se como uma alternativa, um complemento, não almejando ser uma fórmula pronta, ou mesmo apresentar-se como a única estratégia viável de ensino para qualquer que seja o componente curricular.

O debate a respeito da inserção da História no Ensino de Matemática não é exatamente uma novidade no campo da pesquisa, mas ainda está longe de ser uma prática comum, no ambiente escolar. Dessa forma, reconhecendo as potencialidades dessa prática iniciamos o nosso trabalho debatendo sobre a própria História, enquanto área independente, debatendo sobre suas especificidades, características e promovendo um importante debate sobre as Histórias, dentro de uma perspectiva de fuga à chamada História tradicional.

No debate em questão pudemos ressaltar o quanto é importante repensar o meio em que estamos inseridos, questionando práticas e mecanismos, mesmo os que estejam mais enraizados na área. As histórias nos mostram que a História, a Matemática e, certamente, qualquer área possuem diferentes possibilidades e que tal qual o desenvolvimento do próprio ser humano, a linearidade raramente é possível.

Em seguida, paralelamente a questões de cunho histórico apresentamos diferentes etapas do desenvolvimento do ser humano, desde o período nômade, até as civilizações historicamente mais próximas aos dias atuais, salientando suas características e contribuições para a sociedade e para as ciências, em especial, para a Matemática, ao abordar com maior ênfase seus respectivos sistemas de numeração.

Com o debate, apresentamos a Matemática como uma prática humana, necessária ao desenvolvimento do homem, como indivíduo e como ser social, propiciando ao aluno a possibilidade de refletir sobre as suas próprias convicções, quanto a essa importante área.

Ao abordar o tema sistemas de numeração, promovemos uma revisão de um tema que é muitas vezes negligenciado, reduzido a algoritmos no sistema indo-arábico, que muitas vezes não é sequer devidamente apresentado. Então, na escolha desse tema, propiciamos ao professor e ao aluno a possibilidade de observar que existe muito mais para explorar do que a história que lhes é contada.

Por fim, propusemos uma sequência didática, dividida em seis etapas, desenvolvida de modo a debater sobre as diversas civilizações e suas contribuições históricas e matemáticas, organizadas de modo a desenvolver o conhecimento sob um fio condutor histórico, de forma crítica e ampla, sem deixar de lado o conhecimento matemático, suas operações, algoritmos e histórias.

A respeito da contextualização, uma questão norteadora do nosso trabalho, observamos que a sequência didática é uma ferramenta muito importante, tendo em vista a propensão natural à interdisciplinaridade e ao lúdico. Por esse motivo, inserimos em nossas etapas a utilização de um software educacional, o Simple Soroban e reservamos um momento para debater e resolver problemas matemáticos relacionados ao tema, uma forma de mostrar ao estudante que o lúdico e o prático podem andar juntos.

Sobre a associação entre a História e o Ensino de Matemática, consideramos que esta seja uma importante ferramenta, pois auxilia para uma melhor contextualização dos componentes curriculares, apresenta a Matemática de uma forma diferenciada, torna a exposição de conteúdos menos enfadonha, além de permitir um direcionamento histórico para o ordenamento do próprio conteúdo.

Se levarmos em consideração que o desenvolvimento da Matemática se deu a partir das necessidades humanas, como observado no presente trabalho, é perfeitamente natural que se estruture a apresentação dos conteúdos com base nessa evolução, tendo assim a possibilidade de mostrar ao estudante a importância da Matemática nas histórias das sociedades e dos indivíduos.

A inserção da História no ensino de Matemática traz ganhos efetivos na qualidade do planejamento e da execução de práticas educativas, pois diversifica o objeto de estudo, trabalha a questão da interdisciplinaridade e mostra-se como uma ferramenta efetiva de auxílio no processo de ensino e aprendizagem.

Enquanto professor, destacarei a seguir os principais aspectos, positivos e negativos dessa experiência, rica e complexa, de planejar uma atividade dentro do campo da História no Ensino de Matemática.

- Aspectos Positivos: permitir ao professor conhecer aspectos da Matemática que ele próprio desconhece; tornar o planejamento um espaço propício para práticas lúdicas e/ou manipulativas; ressignificar o objetivo da aula, equiparando a importância do contexto histórico com as questões matemáticas; desafiar-se em uma área diferenciada; sentir-se novamente inserido na pesquisa, na área da Educação Matemática.
- Aspectos Negativos: requer um estudo diferenciado do habitual, com pesquisas e práticas que muitas vezes excedem os conhecimentos prévios do professor; demanda um maior tempo para planejamento e organização das atividades.

Concluímos, então, que o campo da História na Educação Matemática, é um campo extremamente promissor na educação brasileira, mas que pode ser melhor explorado. Esperamos que o presente trabalho contribua nesse sentido, como uma forma de incentivo e/ou inspiração.

Para finalizar, lamentamos o fato de não poder contar com o auxílio mais próximo dos alunos na confecção dessa proposta e lamentamos, ainda mais, o fato de não poder efetivar nossa sequência em uma sala de aula. Infelizmente, o ano de 2020 nos apresentou um mundo bem diferente do que qualquer planejamento poderia prever, de modo que a pandemia do novo coronavírus inviabilizou que a prática proposta pudesse ser consolidada presencialmente.

No entanto, sob o compromisso de fazê-lo, tão logo seja possível, concluo que a principal expectativa é para que a pesquisa e o debate proposto, tenham sido tão incentivadores e inspiradores a todos, como foi para mim, no sentido de reafirmar o desejo de contribuir para uma educação de melhor qualidade.

6 Referências

[1] ALENCAR, A.C. **História da matemática no livro didático de matemática**: práticas discursivas. Dissertação – Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Campina Grande, 2014.

[2] ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[3] BACHELOT, L. **Aventuras e desventuras da escrita. A propósito da interpretação do nascimento da escrita na Mesopotâmia**. Cadernos do Lepaarq, v. XVII, n.33, p. 223-250, Jan-Jun. 2020.

[4] BARBOSA, J. L.C.; RÊGO, R. M.; BARBOSA, J. C. A História da Matemática: Uma análise das experiências publicadas em periódicos nacionais e internacionais. **Anais do Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**, São João Del Rei, 2011.

[5] BARROS, J.D.A. Os Annales e a história-problema – considerações sobre a importância da noção de "história-problema" para a identidade da Escola dos Annales. **História: Debates e Tendências** – v. 12, n. 2, jul./dez. 2012, p. 305-325.

[6] BLOCH, M. **Apologia da história, ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002, (p. 07-68)

[7] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. rev. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1996;

[8] BRANDEMBERG, J.C.; GUIMARÃES, J.S.F. Sobre a divulgação do sistema Indo-arábico na Europa no século XIII. **BOCEHM**. v.07, n°20, p. 380–391, 2020.

[9] BURKE, P. **A escrita da história**: novas perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1992.

[10] CLARETO, S.M. Professor, quem inventou a Matemática? Travessias de uma pergunta que se torna problema e um problema que inventa currículo. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática. 2016, p. 297-307.

[11] CUNHA, A. M. V.; IBIAPINA, W. F. A operação de adição e subtração no ábaco romano. **BOCEHM**. v. 02, n° 06, p. 25–29, 2015.

[12] DESLAURIERS J. P. Recherche Qualitative. Montreal: McGraw Hill, 1991

[13] EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

[14] FOSSA, J. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: FOSSA, J. A.; MENDES, I. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

[15] GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed. rev. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2009.

[16] GOMES JÚNIOR, E.L.; OLIVEIRA, D.P.A. **O SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO E SEUS ALGORÍTMOS**. ENEM. São Paulo – SP, 2016 – Trianual. ISSN 2178-034X

[17] IFRAH, G. **Os números: história de uma grande invenção.** São Paulo: Editora Globo, 2010.

[18] IMENES, L.M. **Os números na história da civilização.** São Paulo: Editora Scipione, 1994.

[19] IMHAUSEN In KATZ, V. (ed.) **The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, china, India e islam**. A sourcebook. New Jersey: Princeton University Press, 2007.

[20] KATZ, V. J. **A history of mathematics**. New York, Addison Wesley, 3.ed., 2008.

[21] MARQUES P. R.; LUCCAS S.; LUCAS L.B. **Sistemas de numeração à luz de uma abordagem histórico-epistemológica.** Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias,14(2), 253-267, (2019). Disponível em: http://doi.org/10.14483/23464712.13030 Acesso em: 03 set. 2020

[22] MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação Matemática.** Tese de Doutorado. Campinas/SP, 1993, UNICAMP

[23] MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da História a d Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **ZETETIKE**. v.5, nº 8,1997, p. 73-105.

[24] MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **Historia na Educação Matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 200p. (Tendências em Educação Matemática,10).

[25] MORETTI, M. T. **Dos sistemas de numeração às operações básicas com números naturais**. Florianópolis: Editora da UFSC, 1999.

[26] NEVES, J. E. da S.; LIMA, E. S. de; LIMA, W. M. P. B. de. Ábaco: um recurso didático no ensino da adição e subtração de números naturais. **COPRESIS,** 2017. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/31544 Acesso em: 25 set. 2020.

[27] PEDROZA, P. A. **Sistemas de Numeração Antigos**. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Quixadá/CE, 2010, UECE

[28] POTRO, B. C.; LLAVE, R. C. **El Arte Del Alguarismo: um libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV**. Junta de Castlla y León, Espanha: 2000

[29] ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de história da matemática**. São Paulo: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

[30] SANTOS, C. A. **A História da Matemática como ferramenta no processo de ensino aprendizagem da Matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo, 2007, PUC/SP.

[31] SANTOS, D.V.C. ; CONTADOR, A.L. ; CRESCENCIO, A. A. Representações do espaço da cidade na epopéia de gilgamesh: a Uruk das grandes muralhas. **Revista Sapiência: sociedade, saberes e práticas educacionais** – UEG/UnU Iporá, v. 1, n. 2, p. 115-129 – jul/dez 2012

[32] SCHWARCZ, L.M. **Apologia da História ou o Ofício do Historiador**, de Marc Bloch, 1° ed., 7-14. Rio de Janeiro: Editora Jorge Zahar, 2001.

[33] SILVA, D. F.**Ábaco como recurso para o ensino do sistema de numeração Decimal**. (Monografia). Graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual

de Maringá, Paraná, 2014. Disponível em: http://docplayer.com.br/35564500-Abaco-como-recurso-para-o-ensino-do-sistema-de-numeracao-decimal.html Acesso em 25 set. 2020.

[34] SOUTO; R. M. A. História na Educação Matemática - um estudo sobre trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **Bolema**, v.23, nº 35B, 2010, p.515-536.

[35] VIANNA, C. R. **Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas**. Dissertação de Mestrado Universidade de São Paulo, 1995.

[36] ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.