NEDER DO CARMO PEREIRA HABIB

ABORDAGEM E ATIVIDADES PARA A CÔNICA HIPÉRBOLE

LAVRAS - MG

2013

NEDER DO CARMO PEREIRA HABIB

ABORDAGEM E ATIVIDADES PARA A CÔNICA HIPÉRBOLE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Agnaldo José Ferrari

LAVRAS - MG

2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca da UFLA

Habib, Neder do Carmo Pereira.
Abordagem e atividades para a cônica hipérbole / Neder do Carmo Pereira Habib. – Lavras : UFLA, 2013.
88 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Agnaldo José Ferrari.
Mestrado Profissional em Matemática.
Bibliografia.

1. Foco. 2. Cone. 3. Material concreto. 4. Ensino de cônicas. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.133

NEDER DO CARMO PEREIRA HABIB

ABORDAGEM E ATIVIDADES PARA A CÔNICA HIPÉRBOLE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 13 de março de 2013.

Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa	UFLA
Dra. Grasiele Cristiane Jorge	UNICAMP

Dr. Agnaldo José Ferrari
Orientador

LAVRAS - MG

2013

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para realização do curso;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos;

Aos professores, pelos ensinamentos e paciência;

Aos colegas, pelo companheirismo, em especial às colegas Adriana e Gisele e aos colegas de viajem Daniel, Rodnei, Emilio, Rosan, Lessa, pelas ajudas e grande paciência.

À amiga Isabella pela força na reta final.

RESUMO

As cônicas são utilizadas atualmente em astronomia, engenharia, arquitetura, física e em várias outras áreas. Porém, o estudo das cônicas fica restringido ao Ensino Médio, e na maioria dos casos, nem no Ensino Médio é trabalhado. Em muitos livros didáticos encontrados nas escolas, o ensino das cônicas se restringe a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos por trás delas. Apolônio foi o primeiro a se aprofundar no estudo das cônicas. Kepler estabeleceu que as órbitas dos planetas fossem elípticas, e desde então o uso da elipse ganhou importância na astronomia. Ela também é utilizada para construção de alguns tipos de refletores e nas câmaras de sussurros, que utilizam suas propriedades de reflexão nos focos. No método de navegação LORAN (long-range navigation) e na descrição da trajetória de uma partícula-alfa sujeita ao campo elétrico gerado por um núcleo atômico, é utilizado o conceito de hipérbole. Na fabricação de antenas parabólicas, faróis de automóveis, refletores, entre outros, é utilizado o conceito de parábola. Sugerimos que para o ensino de cônicas deve-se dar enfase a visualização, utilizando material concreto e daí partir para as definições. Para isso foram apresentadas algumas atividades interessantes para se trabalhar na sala de aula. No Capítulo 5 foi apresentado uma parte sobre transformações de coordenadas mais voltada para cursos de graduação. Deseja-se com isso levar o aluno do Ensino Médio a se interessar e entender as cônicas.

Palavras-chave: Foco. Cone. Material concreto.

ABSTRACT

Conics are currently used in astronomy, engineering, architecture, physics and many other areas. However, the study of conics is restricted to high school and, in most cases, not even then. Conics are taught, in many textbooks, only by memorizing formulas, without understanding the properties and concepts behind them. Apollonius was the first to deepen in the study of conics. Kepler established that the planets' orbits were elliptical and, since then, ellipses have gained importance in astronomy. It is also used in the construction of reflectors and whispering chambers, which use its properties of reflection in the focus. The hyperbole method is used in the LORAN navigation method (long-range navigation) and in the description of an alpha-particle subject to an electrical field generated by an atomic nucleus. The parabola is used in the fabrication of satellite dishes, head lights, reflectors, among others. The parabolas are models of various types of movements and are vastly used in physics. We suggest that conics must be taught in a manner of easer visualization using concrete material and, after this, teach the definitions. In order to do this, we bring some interesting activities to work with in the classroom. We also bring, in chapter 5, a portion on coordinate transformations focusing on graduate courses. With this we aim at leading the high school student to be interested in and understand conics.

Key-words: Focus. Cone. Concrete Material.

LISTA DE FIGURAS

ANEXO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os professores da atualidade têm um grande desafio, que é o de ensinar a matemática em um mundo dominado pela alta tecnologia. Portanto, devemos modificar as nossas ações e técnicas para que possamos ensinar matemática de forma que ela fique mais interessante para os alunos.

As cônicas são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram estudadas a fundo no século III pelo matemático grego Apolônio. Atualmente elas são aplicadas na geometria, astronomia, por meio do dos movimentos elípticos dos planetas, na física, na óptica, por meio de telescópios espaciais, na engenharia, na arquitetura e nas novas tecnologias, por meio de antenas parabólicas ou hiperbólicas.

No ensino básico as cônicas só aparecem no terceiro ano do Ensino Médio, mas muitas vezes nem são trabalhadas pelos professores. Quando é ensinado, muitas vezes o conteúdo é restringido a um amontoado de fórmulas que na maioria das vezes é decorado pelo aluno e raramente é entendido. Muitas das vezes as cônicas são trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo assim das cônicas com centros em outros pontos e que as cônicas também podem estar rotacionadas. As elipses e as hipérboles são trabalhadas por meio dos parâmetros a, b e c e as parábolas do parâmetro p. No ensino superior elas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes.

Objetiva-se com este estudo despertar o gosto pela matemática, tornando-a real e mais simples para os alunos, utilizando materiais concretos e de interesse dos mesmos. Quer-se com isso explorar as cônicas e suas aplicações partindo de materiais concretos e chegando às suas equações, então foi elaborado um material didático que pode oferecer alternativas para professores de matemática da educação básica, podendo se estender até a graduação.

Este trabalho foi dividido em três partes, uma das quais, tratada neste trabalho, é composta pelas hipérboles e mais dois outros trabalhos são desenvolvidos conjuntamente. As parábolas são tratadas por Gisele Polyana Rodrigues Pereira e as elípses por Adriana de Sousa Sabino Melo. Os três trabalhos têm algumas partes comuns, que serão citadas abaixo.

O segundo capítulo traz um histórico das cônicas comum aos três trabalhos.

O terceiro traz como as cônicas são comumente trabalhadas no Ensino Médio. Essa parte é individual e cada trabalho traz somente a cônica específica.

O quarto capítulo começa com propostas de abordagens e atividades contextualizadas para o ensino de cada cônica, que é individual para cada trabalho. No fim do capítulo mostramos um pouco sobre coordenadas polares, parte esta que é comum aos três trabalhos.

O quinto capítulo, comum aos três trabalhos, vem com a parte de transformações de coordenadas usando a geometria analítica e a álgebra linear. Este capítulo é destinado aos cursos de graduação, já que os alunos do Ensino Médio não têm pré-requisitos para esse capítulo.

Em anexo segue um banco de questões como material para professores na elaboração de suas aulas.

2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo será feito um relato da história das cônicas por meio dos séculos mostrando o desenvolvimento do estudo das mesmas.

Egípcios e babilônios, há mais de 3000 anos, utilizavam a geometria nas regiões inundáveis dos vales do Nilo, Tigre e Eufrates, na demarcação das terras a fim de organizar o plantio e facilitar a cobrança de impostos. Durante o período Helênico (400 a.C. - 476 d.C), Alexandre Magno construiu Alexandria em 331 a.C., que em pouco tempo transformou-se no centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo. Depois da morte de Alexandre, o império se dividiu em três impérios. Ptolomeu ficou com o governo do Egito, escolheu Alexandria como sua capital e lá construiu a Universidade de Alexandria para atrair homens de saber, cabendo a Euclides o Departamento de Matemática. Apolônio, que foi um dos maiores estudiosos das cônicas, nasceu em Perga e estudou em Alexandria onde ficou por um bom tempo (RODRIGUES FILHO, 2007).

Para Youssef (2005), Menaecmus, astrônomo e geômetra grego foi o primeiro a utilizar duas curvas: a parábola e a hipérbole. No século IV a.C., ele solucionou o problema da "duplicação do cubo" que consistia em encontrar um cubo cujo seu volume fosse igual a dois, utilizando-se dessas duas curvas. Consequentemente, a elipse surgiu mais tarde quando se seccionou uma superfície cônica perpendicularmente a sua geratriz. Por isso o nome secções cônicas.

Segundo Lopes (2011), para alguns historiadores a origem do estudo das cônicas não é muito clara, mas tudo leva a crer que elas originaram-se no problema da duplicação do cubo.

> Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) mostrou que esse problema (a duplicação do cubo) se reduzia em encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Esse processo consistia em determinar médias proporcionais entre duas grandezas dadas, ou seja, dados os segmentos a e b, encontrar dois outros x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

> Hipócrates afirmou que para $b = 2a$, a proporção contínua traduzia a solução do problema da duplicação do cubo, pois isolando e eliminando y, conclui-se que $x^3 = 2a^3$. Isto equivale, na notação atual, resolver simultaneamente quaisquer duas das três equações $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$ que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbole no terceiro.
> Mas a descoberta dessas curvas se deu por Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C.. Ele construiu as curvas com essas propriedades algébricas e consequentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessa sua pesquisa(LOPES, 2011, p. 33-34).

Para Venturi (1949), foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. Já a parábola, provavelmente, foi nomeada por Arquimedes.

> As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. [...] O tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os Rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides (BOYER, 2010, p. 99).

De acordo com Boyer (2010), Apolônio foi o primeiro a mostrar que as três secções não eram obtidas necessariamente de três cones diferentes, mas poderiam ser encontradas variando o ângulo de inclinação do plano da secção. Esse fato foi relevante para identificar e relacionar os três tipos de curvas. Apolônio também provou que o cone pode ser oblíquo ou escaleno, não precisando ser reto e que as propriedades das curvas não se modificam de acordo com o cone de origem.

Ainda para Boyer (2010), Apolônio poderia ter partido de qualquer cone e ter obtido as mesmas curvas, ou seja, qualquer seção plana de qualquer cone poderia servir de curva base em sua definição.

Menaecmus afirmava que cada secção cônica era encontrada em um formato diferente de cone. Assim, as cônicas eram tratadas de forma separada. Somente com Apolônio houve a unificação das mesmas (BORDALLO, 2011).

De acordo com Quaranta (2008), Arquimedes classifica os cones como reto ou de revolução (retângulo) quando o ângulo formado entre as geratrizes que pertencem a um dado plano que passa pelo vértice do cone e pelo centro da circunferência da base é reto; obtusângulo, quando este ângulo é obtuso e acutângulo, quando é agudo. Arquimedes deu nomes de "Orthotome" para parábola, que surgia do cone retângulo, "Oxythome" para a elipse, que surgia do cone acutângulo e "Amblythome" para a hipérbole que surgia do cone obtusângulo.

Segundo Youssef (2005), Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.) escreveu um importante documento sobre as cônicas. Neste documento, acrescentou aos estudos de Menaecmus várias proposições, mas de forma puramente geométrica. Pode-se destacar uma proposição sobre a posição do plano secante em relação ao eixo de rotação ou à geratriz de uma superfície cônica de revolução.

Para Boyer (2010), o cone de duas folhas surgiu quando Apolônio fez uma reta de comprimento indefinido que passava por um ponto fixo mover-se sobre uma circunferência de um círculo que não é coplanar ao ponto de origem, passando por todos os pontos dessa circunferência, a reta móvel dará origem à superfície de um cone duplo. Com isso surge o segundo ramo da hipérbole.

Apolônio foi o autor que mais contribuiu para o estudo das cônicas. Ele escreveu oito livros, dos quais os quatro primeiros apresentam resultados de outros matemáticos anteriores e os quatro últimos apresentam resultados desenvolvidos por ele mesmo. Apolônio é o primeiro a unificar as secções cônicas e afirmar que elas poderiam ser obtidas a partir de um único cone. Ele também duplicou o cone e daí a hipérbole passa a ter duas folhas (QUARANTA, 2008).

Segundo Bordallo (2011), Pappus fez um comentário sobre todos os matemáticos gregos de seu tempo em sua obra "Coleção Matemática". Ele contribuiu para o estudo das cônicas com seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. E de acordo com a variação da excentricidade ele define cada curva.

Boyer (2010, p. 101) afirma as cônicas eram conhecidas como "lugares sólidos", pois as cônicas não eram definidas como seções planas, mas seções de figuras tridimensionais. Apolônio usava o cone para obter as cônicas, mas o dispensou logo que possível. A partir do cone ele desenvolveu uma propriedade plana fundamental *(symptome)* para a secção e a partir daí iniciou um estudo somente no plano, baseado nessa propriedade.

Seja ABC uma secção triangular de um cone circular oblíquo (Fig.9.3) e seja P qualquer ponto sobre uma secção HPK cortando todos os elementos do cone. Prolongue HK até encontrar BC em G e por P passa-se um plano horizontal que corta o cone no círculo DPE e o plano HPK na reta PM. Trace-se DME, um diâmetro do círculo perpendicular a PM. Então a semelhança dos triângulos MEK e KCG tem-se $\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$. Agora, da propriedade do círculo tem-se $PM^2 = DM.ME$; logo $PM^2 = (\frac{HM.BG}{HG})(\frac{MK.CG}{KG})$. Se $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, a propriedade na sentença precedente equivale à equação $y^2 = kx.(2a - x)$, que reconhecemosmo a equação de uma elipse com H como vértice e HK como eixo maior. De modo semelhante, Apolônio obteve para a hipérbole o equivalente da equação $y^2 = kx(x + 2a)$. Essas formas são facilmente redutíveis às formas de nome acima, bastando tomar $k = \frac{b^2}{a2}$ e $l = \frac{2b^2}{a}$. Depois de Apolônio ter obtido de um estudo esteriométrico do cone a relação básica entre o que chamaríamos hoje as coordenadas planas um ponto da curva - dadas pelas três equações $y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$, $y^2 = 1x$ e $y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$ obteve outras propriedades a partir das equações no plano, sem mais referência ao cone. Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas para a hipérbole equilátera, pela equação $xy = c^2$. Não podia saber, é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia (BOYER, 2010, p. 101-102).

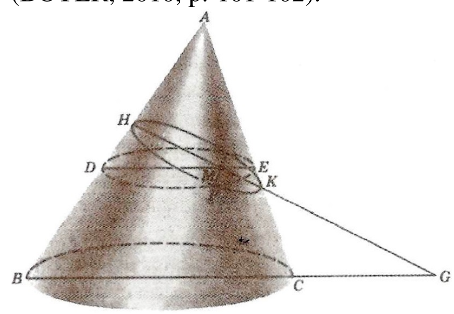

Figura 9.3 Cortes no cone

Ainda para Boyer (2010), Apolônio provou que quando um ramo de uma hipérbole intersecta os dois ramos de outra hipérbole, o outro ramo da primeira hipérbole não intersectará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos, também se uma hipérbole encontra uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto em um único ponto, o outro ramo da primeira não encontrará o outro ramo da segunda.

De acordo com Venturi (1949, p. 20), Kepler foi fortemente influenciado pelo livro “As Cônicas” de Apolônio. Em 1609 ele mostra uma fundamental lei da Astronomia: os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos. Kepler também introduziu a palavra foco, que vem do latim focus que significa fogo, lareira. O livro “As Cônicas” também traz outra aplicação em que Galileu (1632) desprezando a resistência do ar diz que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Para Quaranta (2008), Kepler (1571 - 1630) também apresenta as cônicas de forma unificada usando a hipérbole para medições do fenômeno de reflexão. Ele também mostra pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou hipérbole. Na construção da parábola ele utiliza a mesma distância dos pontos até o foco e até a diretriz. Ele também afirma que a parábola tem o segundo foco no infinito, que até então não era utilizado na geometria.

Apolônio em “As Cônicas” não trata de aspectos que atualmente nos parecem tão fundamentais. Por exemplo, ela trata dos focos das cônicas apenas indiretamente e nem tinha nomes para os mesmos (BOYER, 2010).

Segundo Youssef (2005), Apolônio também investigou o movimento dos planetas e baseado nos egípcios, acreditava que os planetas giravam em torno do sol em órbitas circulares. Somente em 1609, Kepler conclui que os planetas giram em órbitas elípticas. Apolônio nunca poderia imaginar que as cônicas estudadas por ele seriam utilizadas 1800 anos depois para descrever as órbitas planetárias e nem que belos projetos arquitetônicos teriam esses formatos.

Afirma Boyer (2010, p. 104) que Apolônio diz que "o assunto é um daqueles que parecem dignos de estudos por si mesmos". Ele sequer imaginava que futuramente seus estudos seriam importantes na dinâmica terrestre e mecânica celeste, e que eles possibilitariam a viagem de ida e volta à lua.

No pensamento de Boyer (2010), os estudos de Apolônio eram tão semelhantes aos atuais que muitas vezes ele antecipa a Geometria Analítica de Descartes. Seus métodos não são diferentes do uso de sistemas de coordenadas. Nos estudos gregos as equações são determinadas pelas curvas, mas as curvas não eram determinadas por equações. Para os gregos, as equações não eram suficientes, eram necessárias construções.

Para Bordallo (2011), Fermat e Descartes, no século XVII criam separadamente a Geometria analítica, que é mais utilizada atualmente. Com a chegada da Geometria analítica surge uma nova opção, na qual alguns optaram por ela, outros não, e ainda alguns utilizaram as duas concepções em conjunto. O estudo sintético das cônicas, sem a utilização da Geometria analítica contribuiu para a Geometria projetiva. A contribuição de Fermat às cônicas é encontrada principalmente no seu tratado *Ad locos Planos et Solidos Isagoge*, onde Fermat utilizou mudanças de coordenadas para descobrir que tipo de lugar correspondia a uma equação de primeira ou segunda ordem. Ele também mostrou que equação do segundo grau corresponde a uma cônica, um par de retas ou uma reta contada duas vezes.

Segundo Quaranta (2008), Descartes inicia uma nova forma de classificação das curvas por meio de equações. Conhecendo as propriedades geométricas de uma curva, ele representava todos os pontos da mesma por meio de equações. A caracterização bifocal, que permite as construções das cônicas, começa a ganhar força a partir do século XVI, com Kepler, Descartes e Van Schooten, que utilizam construções mecânicas dessas curvas. Também por meio de retas, da geometria projetiva e por meio de equações analíticas surgem outras caracterizações. Para o ensino das cônicas os métodos mais utilizados são a caracterização analítica e o uso dos focos, além da usual obtida por meio do cone.

De acordo com Venturi (1949), o marco zero da geometria analítica é o tratado de Fermat. Foi Fermat quem descobriu as equações da reta, da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Para simplificar as equações do 2º grau ele utilizava a rotação dos eixos. Ele também descobriu que se a equação envolve três incógnitas, ela não pode ser de um ponto ou uma curva, mas sim de uma superfície.

Segundo Bordallo (2011), Philippe de La Hire, no século XVII, tornou a fragmentar as cônicas, dando o primeiro passo na direção ao tratamento puramente focal que é presente no ensino das cônicas atualmente, em seu livro *Nouvelle méthode en géometrie pour lessection setles superfícies coniques* de 1673. Ele começa o seu trabalho tratando cada curva separadamente, introduzindo as propriedades características e sua definição focal. Dandelin, no século XIX, tentou unificar as cônicas novamente, mostrando que as seções do cone que geram cada cônica coincidem com a definição focal.

O estudo das curvas feito pelos gregos fica em posição desfavorável em relação à flexibilidade e extensão do tratamento moderno. Os antigos não tinham noção da utilização dessas curvas no mundo que os cercava. Os inventores modernos da geometria analítica tinham à sua disposição a álgebra da Renascença, enquanto que Apolônio manejava a álgebra geométrica trabalhando com o instrumento mais rigoroso e menos manejável (BOYER, 2010).

As cônicas estudadas desde a antiguidade estão presentes, no mundo atual, em vários ramos do dia-a-dia. Apesar das várias caracterizações discutidas pelos autores, mal sabiam seus inventores da importância que elas teriam futuramente.

3 HIPÉRBOLE, DEFINIÇÃO E ABORDAGEM USUAL

Nem todos os professores de matemática ensinam, orientam, trabalham da mesma maneira os conteúdos/habilidades matemáticas com seus alunos. Cada um carrega consigo particularidades, traços pessoais. Mas, no tocante à metodologia de ensino e didática, quem acompanha o cotidiano escolar, professores, pais ou até mesmo os próprios alunos sabem que muitos dos professores, seguem uma rotina pedagógica, às vezes chamada de "cuspe e giz", onde as aulas são apenas expositivas. São inúmeras as razões que podem vir a justificar tal postura e tais razões não vem ao caso.

Nas aulas expositivas de matemática o livro didático assumiu e ainda hoje assume papel extremamente importante. Chagas (2004) corrobora tanto a presença de aulas expositivas quanto a importância do livro didático nas aulas de matemática ao dizer que:

> Não é raro encontrarmos, dentro do trabalho cotidiano das escolas, professores de matemática ensinando esta disciplina de forma "rotineira", onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e a exercícios de fixação ou de aprendizagem (CHAGAS, 2004, p. 242).

Huete e Bravo (2006) vão além de atestar, consideram muito negativa a rotina no ensino de matemática e a predominância do livro didático quando dizem que

> A ausência, nos professores, de um sólido conhecimento teórico leva-os a dirigir a tarefa escolar (de resolução de situações problemáticas) de forma rotineira, cujo único objetivo é chegar à solução esperada [...]. As situações problemáticas, as quais aparecem em algumas apostilas ou nos livros-texto selecionados, distanciam-se consideravelmente de suas experiências de seus interesses, deixando à margem qualquer resquício de participação imaginativa que possa originar na aula (HUETE; BRAVO, 2006, p. 8).

Portanto é razoável considerar que os livros textos determinam em grande medida o currículo escolar e como o ensino/aprendizagem de matemática efetivamente ocorre nos dias atuais. Assim sendo uma análise de livros didáticos foi realizada para investigação de como se dá a abordagem usual das hipérboles nos dias de hoje.

Foram selecionados para análise de sua abordagem sobre as hipérboles quatro livros didáticos do Ensino Médio. Dos quais três são atuais e de autores bastante adotados pelos professores e um é uma versão antiga de um dos mesmos autores. Foram observados na análise os critérios de contextualização, abordagem matemática, aplicações, atividades concretas, quantidade e qualidade dos exercícios.

3.1 Análise de livros didáticos

3.1.1 "Fundamentos de Matemática Elementar" de Gelson Iezzi e outros

Trata-se do sétimo volume de uma muito utilizada coleção, e publicado no ano de 1979. O livro, já no início do assunto Hipérbole, apresenta a definição da curva em forma textual e em linguagem de conjuntos. Em seguida uma ilustração de uma hipérbole que apresenta alguns pontos marcados e alguns segmentos que representam as distâncias dos pontos aos focos. Ou seja, em poucas linhas e com uma gravura onde estão destacados apenas seis pontos da mesma é definida e apresentada ao estudante a cônica em questão.

Após as poucas linhas de apresentação da curva, são listados os elementos principais e, sem maiores explicações, é apresentada a "relação notável" $C^2 = a^2 + b^2$. Em seguida é feita a dedução da fórmula da hipérbole de centro na origem e eixo real coincidindo com o eixo x, como o próprio autor cita no livro: "a dedução é imediata". Analogamente são apresentadas, mas aqui sem o desenvolvimento para se chegar à fórmula, as fórmulas para hipérboles com centro na origem e eixo real coincidindo com o eixo y e hipérboles com centro diferente da origem e eixos reais paralelos aos eixos x e y. Alguns exemplos são apresentados, mas nenhum exercício resolvido ou situação contextualizada.

As seções seguintes, que abordam as cônicas conjuntamente, são da mesma maneira isentas de contextualização, totalmente abstratas. São elas: *Reconhecimento de uma Cônica e Intersecções de Cônicas.*

A abordagem não apresenta contextualização, é puramente abstrata e algorítmica, não há aplicações ou propostas de atividades concretas. Ao final da seção existem sete exercícios de treinamento simples do que foi exposto no texto, nenhum problema contextualizado.

3.1.2 "Matemática: Ensino Médio", de Kátia S. Smole e Maria I. Diniz

O assunto hipérbole aparece no volume 3 da coleção seriada, publicada em 2010. Na introdução do estudo das cônicas é feito, assim como no livro citado anteriormente, um breve apanhado histórico e as cônicas são apresentadas como cortes do cone. E na versão do professor do livro existe logo no início do capítulo sobre as cônicas uma indicação de "Experimentos educacionais" e um endereço de página da internet onde são encontradas algumas atividades concretas, algumas delas relacionadas às cônicas. Também apenas na versão do professor e no início do capítulo sobre as cônicas existe um pequeno texto informativo sobre o assunto ser de "caráter opcional", a ser desenvolvido caso o tempo permita ou o professor deseje um aprofundamento no trato do aluno com a geometria analítica.

Na seção referente exclusivamente à hipérbole existe um exemplo de visualização das hipérboles no dia a dia, que é a figura de uma luminária em forma de cone e do reflexo de luz em forma de hipérbole em uma parede vertical próxima à luminária.

No mais a abordagem do livro é bem parecida com o livro anteriormente descrito. Apresenta definição, breve explicação da definição, listagem de elementos da hipérbole, e uma também breve explicação de como obter as fórmulas, mas, aqui, apenas para as de hipérboles com centro na origem. E, diferentemente do primeiro livro analisado, breve explicação sobre as assíntotas da hipérbole, exercícios resolvidos e nove exercícios de fixação dos conceitos da seção, mas entre eles alguns exercícios onde o leitor deve raciocinar e explicar sobre a cônica. No fim da seção é desenvolvida a fórmula de *"Uma hipérbole especial"*: $y = \frac{1}{x}$.

Mais contextualizado que o primeiro, mas ainda assim pouco contextualizado, exigindo um grau um pouco menor de abstração do estudante em relação ao primeiro livro, mas ainda assim um elevado grau de abstração. Os livros pouco diferem. Ponto positivo que merece destaque é a indicação ao professor de um site onde se encontram atividades concretas, a saber: *www.uff.br/cdme*.

3.1.3 "Matemática: ciências e aplicações", de Gelson Iezzi e outros

Publicado em 2010, 31 anos após a publicação do primeiro livro aqui analisado.

E pouquíssimas são as mudanças no terceiro livro analisado em relação ao primeiro. O assunto é abordado na ordem definição, ilustração que explica a definição sucintamente, elementos principais, raciocínio algébrico para se obter as fórmulas. As poucas diferenças são: citar hipérbole equilátera e um tópico com o título *"Hipérboles e funções recíprocas"*. As seções *Reconhecimento de uma Cônica e Intersecções de Cônicas* do primeiro livro analisado também aparecem aqui e novamente de forma abstrata e sem contextualização.

Em relação aos exercícios também não existem mudanças que merecem nota, inclusive alguns dos exercícios são os mesmos do livro de 1979.

Outro livro pobre, no tratamento da hipérbole, no que se refere às atividades concretas e contextualização, de abordagem um tanto quanto mecanizada, sem aplicações, com poucos exercícios e sem exercícios contextualizados.

3.1.4 "Matemática completa", de José R. Giovanni e José R. Bonjorno

Livro publicado em 2005. Nele a definição é um pouco mais explicada ao leitor. Assim como nos outros livros a lista de elementos da hipérbole aparece após a definição. A relação notável $C^2 = a^2 + b^2$ é justificada pelo teorema de Pitágoras.

Em seguida são obtidas as fórmulas para hipérboles com centro na origem e eixos reais coincidindo com os eixos x e y respectivamente e depois as fórmulas para hipérboles com centro em um ponto qualquer e eixos reais paralelos aos eixos x e y são apenas apresentadas. Cinco exercícios resolvidos encerram a parte teórica do tópico hipérbole. Tudo de forma não contextualizada e com uma frase sobre aplicações: “Rutherford usou órbitas hiperbólicas de partículas ? irradiadas para explorar o núcleo do átomo” (GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 105).

Ao final da abordagem teórica sobre a hipérbole o livro apresenta uma atividade intitulada ´´Como construir uma hipérbole” onde é dado um passo a passo para o aluno, munido de compasso, fazer o traço da curva. A atividade deixa a desejar apenas no que diz respeito à explicação da relação entre os passos da atividade e a definição da hipérbole.

O livro tem explicação mais detalhada, além de apresentar uma atividade concreta para construção da hipérbole. A quantidade de exercícios de fixação é bem maior que a dos outros livros, totalizando dezoito.

3.2 A abordagem dos livros didáticos

Tendo em vista que a forma como os livros didáticos atuais de matemática abordam a hipérbole não varia muito, faz sentido falar em “a” abordagem usual dos livros didáticos. Abaixo está uma exposição do que a maioria dos livros apresenta sobre o assunto hipérbole.

Poucas palavras são dedicadas à história das cônicas, quando existem.

As cônicas são apresentadas como cortes de cone como na figura abaixo.

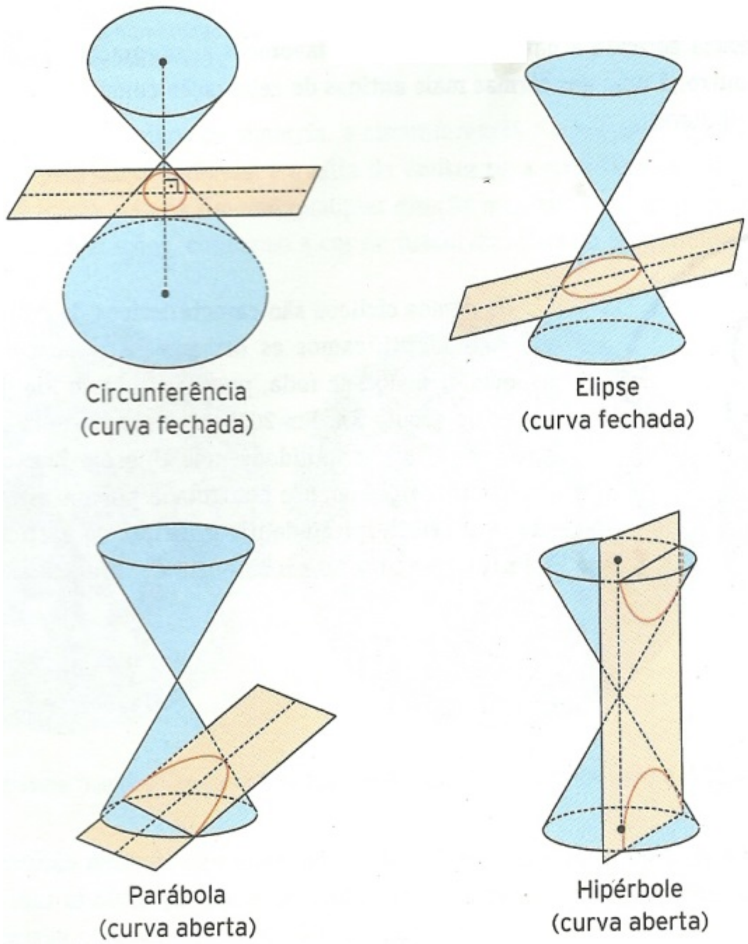

Figura 1 As cônicas como cortes do cone duplo

No que se segue é abordada ainda mais diretamente a hipérbole, expondo, assim, neste trabalho o que os livros texto trazem sobre o assunto.

Definição: Hipérbole é o conjunto dos pontos P de um plano π tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 desse plano é uma constante positiva e menor que a distância entre esses pontos fixos.

Ilustração e breve explicação da definição: Considerando a ilustração da hipérbole dada pela figura 3, os pontos P, Q, R, S, A_1 e A_2 são exemplos de pontos da hipérbole porque,

$PF_1 - PF_2 = QF_2 - QF_1 = RF_2 - RF_1 = SF_1 - SF_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$

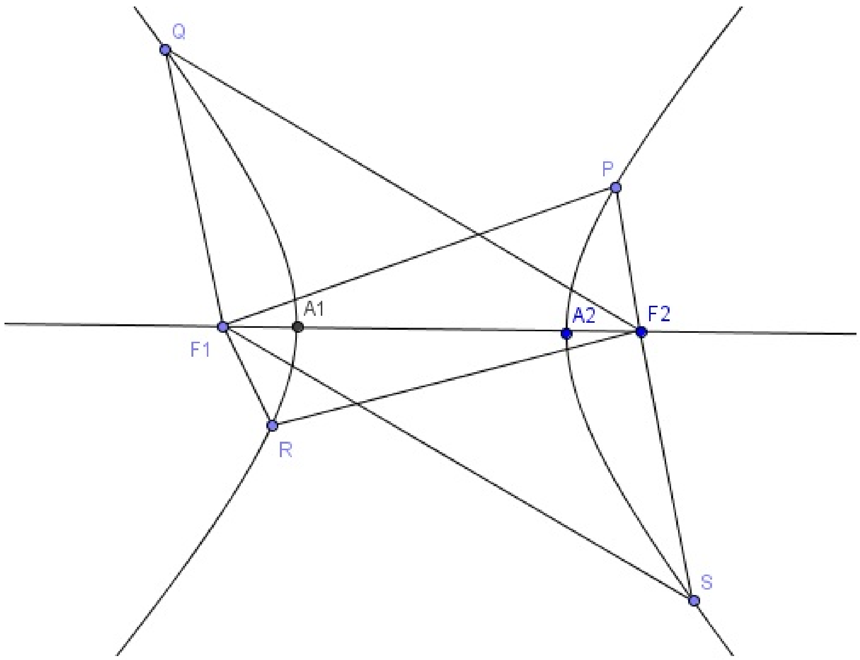

Figura 2 A hipérbole e alguns de seus pontos

Elementos da hipérbole:

Focos da hipérbole: pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é a distância entre os focos, de medida $2c$;

Centro da hipérbole: é o ponto médio entre os focos, o ponto O;

Vértices da hipérbole: são os pontos A_1 e A_2;

Eixo real ou transverso: é o seguimento que liga A_1 e A_2, de medida $2a$;

Excentricidade: é a razão; a excentricidade é sempre um número maior que 1 e diferencia o formato das hipérboles, a hipérbole é tanto mais aberta em sua forma quanto maior for o valor de sua excentricidade.

Eixo imaginário de tamanho $2b$, onde, a maioria dos livros didáticos não explica que tal valor “batizado” de b é um argumento para facilitar a compreensão, memorização, trato com a fórmula da curva, uma vez que a hipérbole é totalmente definida pela distância focal e pela distância entre os vértices.

Demonstração da equação reduzida da hipérbole com eixo real sobre o eixo x e centro na origem:

Seja o ponto P de coordenadas (x,y) pertencente à hipérbole. Pela definição, temos que o módulo da diferença da distância de P até F_1 e da distância de P a F_2 é igual a $2a$. Usando a equação das distâncias e considerando que as coordenadas de F_1 são $(c,0)$ e as de F_2 são $(-c,0)$ temos:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Retirando o módulo e adicionando $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ em ambos os membros:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois lados:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

Desenvolvendo quadrados de $x-c$ e $x+c$:

$$x^2-2xc+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

Subtraindo x^2,y^2 e c^2 em ambos os membros:

$$-2xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2xc$$

Subtraindo $2xc$ e $4a^2$ em ambos os membros da equação:

$$-4a^2-4xc = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Dividindo ambos os membros por 4 e os elevando ao quadrado:

$$a^4+2a^2xc+x^2c^2 = a^2\left((x+c)^2+y^2\right)$$

Elevando $x+c$ ao quadrado e multiplicando os parênteses por a:

$$a^4+2a^2xc+x^2c^2 = a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

Reorganizando com somas e subtrações:

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2$$

Evidenciando a^2 no primeiro membro e x^2 no segundo:

$$a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Substituindo $a^2 - c^2$ por $-b^2$, pois b foi definido com um valor tal o ponto B de coordenadas $(0,b)$ forme juntamente com os pontos A_1 e O e também com os pontosA_2 e O triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c, logo pelo teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$:

$$-a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2$$

Dividindo-se ambos os membros por $-a^2b^2$:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

De forma análoga pode ser obtida a equação da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo y. Apenas os papéis de x e y se invertem, resultando em:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}.$$

E com raciocínios também parecidos podemos obter as equações de uma hipérbole com centro em um ponto qualquer (x_0, y_0) e eixos reais paralelos ao eixo x ou ao eixo y, sendo elas respectivamente:

$$1 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0}{b^2} \text{ e } 1 = \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0}{b^2}$$

onde $(x - x_0)^2$ equivale a x^2 e $(y - y_0)^2$ equivale a y^2 por poder ser vista essa situação como translações da hipérbole com centro na origem horizontal e/ou verticalmente.

No mais, os livros didáticos geralmente apresentam exercícios resolvidos, salvo algumas exceções.

3.3 Observações pós análise dos livros didáticos

O tratamento dado às hipérboles nos quatro livros analisados é muito parecido. São comuns a presença de definição focal da curva, a listagem exaustiva de elementos, demonstração de fórmulas, exercícios resolvidos e exercícios propostos. A definição é focal, isto é, a curva é definida pela sua propriedade de distância em relação aos focos em todos os livros analizados.

São poucas as atividades de construção da curva.

Em suma a análise feita concorda com a análise maior, que envolveu mais livros didáticos e as três cônicas, feitas por Bordallo (2011, p. 18):

> As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma:o corte do cone que gera a cônica; definição focal; elementos principais; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; equação com centro e vértice fora da origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos.

A mesma autora, critica a forma fragmentada como as cônicas são abordadas: “Acreditamos que a apresentação fragmentada atual não faz sentido aos alunos, tornando-se uma ‘decoreba’ que não terá qualquer serventia” (BORDALLO, 2011, p. 18).

Logo, não é de se estranhar que, na versão do professor do segundo livro didático acima analisado, as autoras comentem que a unidade sobre as cônicas “pode ser desenvolvida por você (o professor que adotou o livro) em caráter opcional, caso o tempo permita”.

Não descartando um papel importante para o livro didático, mas tendo em vista o exposto acima, fica claro que apenas o livro didático não é suficiente na abordagem do tema hipérbole. Para que o ensino das cônicas seja mais que um decorar fórmulas e elementos, faz-se necessário que o professor esteja munido de atividades diferenciadas que possibilitem aos alunos uma participação investigativa, imaginativa, criativa e mais rica em significado.

4 PROPOSTAS DE ABORDAGEM

4.1 Atividades sobre o tema hipérbole

Abaixo são apresentadas atividades como material complementar ao livro didático para abordagem da cônica hipérbole na sala de aula.

4.1.1 Encontrando pontos da hipérbole com barbante

Nesta atividade construiremos uma hipérbole com colagem de barbantes. Siga o passo a passo caprichosamente e você construirá uma das mais importantes curvas da matemática.

Materiais necessários Meia cartolina - Lápis - Régua graduada - Barbante - Tesoura - Cola

Passo a passo 1º passo: Marque o ponto O no centro da meia cartolina

2º passo: Trace a reta r passando pelo ponto O e paralela à borda maior da meia cartolina

3º passo: Marque os pontos F_1, do lado direito do ponto O, e F_2 , do lado esquerdo do ponto O, pertencentes à reta r e distantes 5 centímetros do ponto O

4º passo: Marque os pontos A_1, do lado direito do ponto O, e A_2 , do lado esquerdo do ponto O, pertencentes à reta r e distantes 4 centímetros do ponto O

5º passo: Recorte dois pedaços de barbante de tamanhos $10cm$ e dois pedaços de tamanho 2cm.

6º passo: Coloque uma ponta do pedaço de barbante de tamanho 10cm sobre F_1 e uma ponta do pedaço de tamanho 2 cm sobre F_2 . Agora encontre um ponto na metade de cima da cartolina onde a outra ponta de cada um dos barbantes se encontra. Marque o ponto.

7º passo: Repita o 6º passo com os outros pedaços de barbante de tamanho 10cm e 2cm e marque o ponto onde as pontas se encontram na metade de baixo da cartolina.

8º passo: Lambuse os pedaços de barbante de cola e cole-os na posição encontrada para marcar os pontos de acordo com o 6º passo e com o 7º passo.

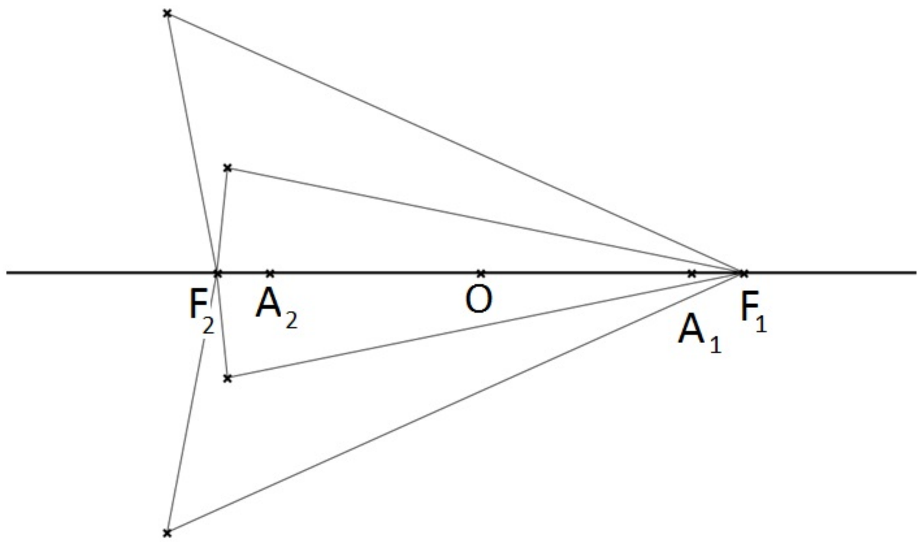

Figura 3 Pontos iniciais marcados na atividade 1

9º passo: Repita do 5º ao oitavo passo usando pares de pedaços de barbantes, todos com 8cm de diferença do pedaço maior para o pedaço menor, por exemplo pedaços de tamanhos 12cm e 4cm, 14cm e 6cm, 17cm e 9cm, 20cm e 12cm, 24cm e 16cm.

10º passo: Trace uma curva que passe pelos pontos onde as pontas de barbante se encontram e pelo ponto ponto A_1.

11º passo: Tente traçar uma curva simétrica à curva traçada no 10º passo que passa por A_2.

Reflexão sobre a atividade

Por que a hipérbole passa pelos pontos A_1 e A_2?

O que todos os pontos por onde passa a hipérbole tem em comum?

O QUE É UMA HIPÉRBOLE?

Elementos da hipérbole nesta atividade

Ponto O: centro da hipérbole

Segmento A_1A_2: eixo real ou eixo transverso da hipérbole

Pontos A_1 e A_2: Vértices da hipérbole

Pontos F_1 e F_2: Focos da hipérbole

Dever de casa: Construa outra hipérbole, usando outros valores para a distância entre o centro da hipérbole e os focos e entre o centro da hipérbole e os vértices. Note que a diferença entre os tamanhos dos barbantes deve ser igual à distância entre os pontos A_1 e A_2.

Compare as duas hipérboles e anote quais as diferenças que você observa entre elas.

Objetivos da atividade: Visualizar a hipérbole, definir ou vir a refletir sobre a definição focal da mesma, a saber, o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante. Apresentar alguns elementos da hipérbole aos alunos. Trabalhar em equipe, interagir. Trabalhar com medições. Dessa forma pretende-se que o aluno tenha um primeiro contato com a hipérbole por meio de manipulação, indo de encontro ao que diz Huete e Bravo (2006, p. 59) quando dizem que: “Para a introdução de conceitos matemáticos é ótimo recorrer a atividades do tipo lúdico”. Pretende-se também apresentar aos alunos do Ensino Fundamental a cônica, para que no Ensino Médio ela não seja uma curva totalmente estranha, concordando com Nina e Portanova (2005, p. 19) quando diz que:

> A capacidade de raciocínio de um aluno desenvolve-se ao longo de um período de tempo e está intimamente ligada à vivência de uma gama de experiências variadas [...] e que devem ser, especialmente no Ensino Fundamental, apresentados como um todo integrado, num currículo em espiral, organizado num gral crescente de complexidade.

Público alvo: alunos a partir do 8º ano do Ensino Fundamental ou alunos que não conhecem ainda o formato da hipérbole

Pré-requisitos: noção de reta, reta paralela, ponto, distância.

Materiais e tecnologias: cartolina, lápis, barbante, cola, régua graduada e tesoura.

Recomendações metodológicas: formação em duplas ou trios, leitura e tira dúvida por parte do professor do passo a passo. Promover discussão com a turma sobre o que cada ponto de encontro entre cada par de pedaços de barbante tem em comum, para que eles possam se aproximar da definição da hipérbole.

Dificuldades previstas: leitura das regras do passo a passo, mãos sujas de cola.

Descrição geral: Os alunos devem ler e seguir os passos da atividade, marcação de pontos, traço de uma reta, cortes de pedaços de barbante, encontrar o lugar onde os pedaços de barbante definem um ponto pertencente à hipérbole, colar barbantes. Previsão de tempo de duas aulas de 50 minutos.

Possíveis desdobramentos: O professor pode orientar os alunos a variarem a distância entre os focos, bem como entre os vértices e, a partir da visualização dos novos formatos, proporem discussão, investigação sobre a relação entre a distância focal e da distância entre vértices.

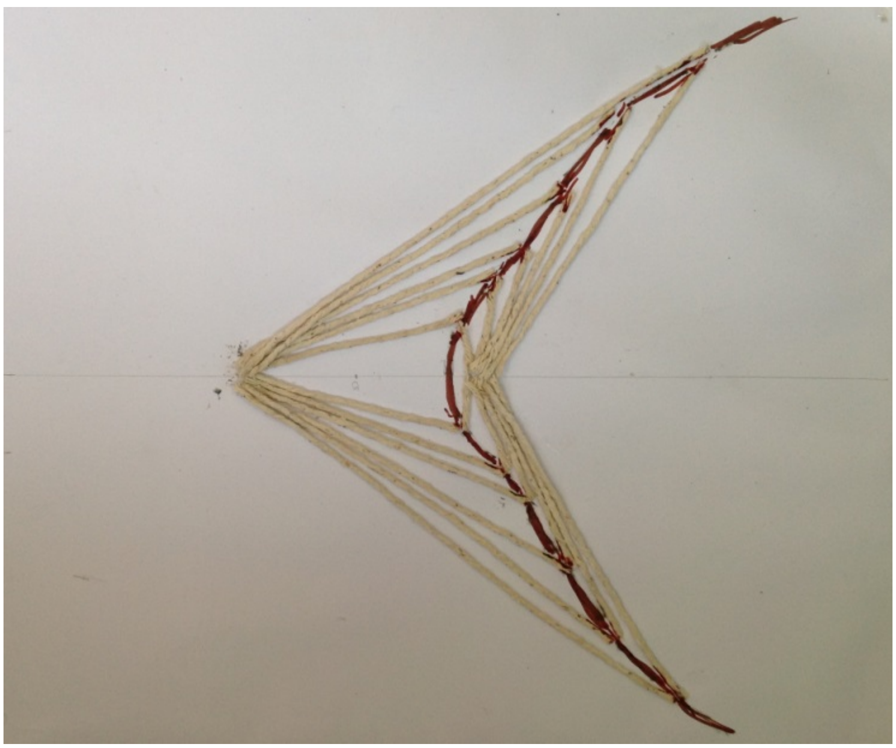

Figura 4 Hipérbole traçada com o auxílio de colagens de barbante

4.1.2 Encontrando pontos da hipérbole com régua graduada e compasso

Esta atividade consiste de um passo a passo para que seja feito o traço de uma hipérbole.

Siga o passo a passo da atividade, responda ao questionário e em seguida construa outra hipérbole com valores que você escolher.

Materiais utilizados: Folha de papel ofício - Régua graduada - Lápis - Compasso

Passo a passo

1º passo: Marque no centro da folha o ponto O

2º passo Trace a reta R passando pelo ponto O e paralela à borda maior da folha

3º passo: Marque os pontos F_1 e F_2 sobre a reta r de tal forma que F_1 esteja à direita de O 5cm e F_2 à esquerda de O também 5cm

4º passo: Marque os pontos A_1 e A_2 sobre a reta r de tal forma que A_1 esteja à direita de O 3cm e A_2 à esquerda de O também 3cm

5º passo: Faça com o compasso uma abertura de 9cm e trace duas circunferências de raio 9 cm, uma com centro em F_1 e outra com centro em F_2.

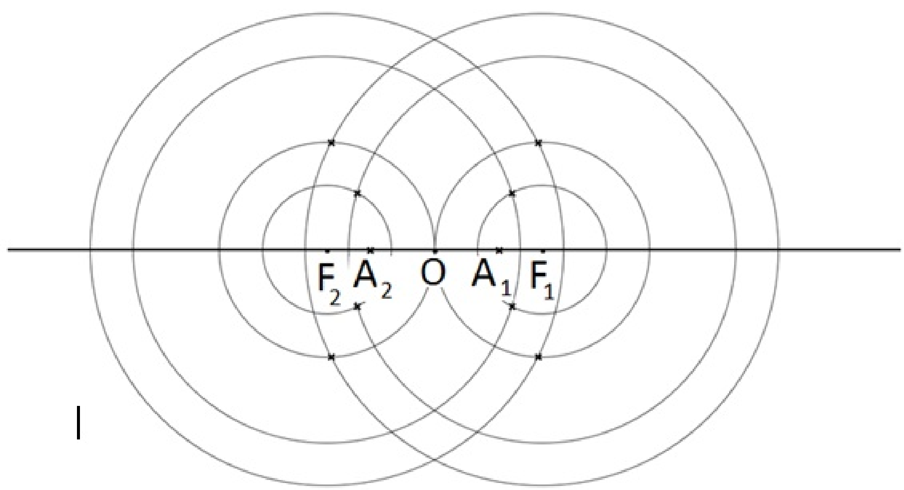

Figura 5 Pontos iniciais marcados na atividade 2

6º passo: Faça com o compasso uma abertura de 3 cm e trace duas circunferências de raio 3 cm, uma com centro em F_1 e outra com centro em F_2.

7º passo: Marque os quatro pontos de encontro entre circunferências de raios 9 cm e as circunferências de raio 3 cm.

8º passo: Repita do 5º ao 7º passo pelo menos mais seis vezes com valores maiores para o par de circunferências. Escolha valores de tal forma que a diferença entre eles seja sempre 6 cm. Por exemplo 10 cm e 4 cm, 11 cm e 5 cm.

10º passo: Ligue os pontos marcados com uma curva. Observação: Os pontos A_1 e A_2 fazem parte da curva. Eis uma hipérbole!

Elementos da hipérbole desta atividade:

Ponto O: centro da hipérbole

Pontos A_1 e A_2: vértices da hipérbole

Segmento A_1A_2: eixo real ou transverso

Pontos F_1 e F_2: focos da hipérbole

Distância de F_1 a F_2: distância focal

Discuta com seu colega de dupla e responda:

Porque os pontos A_1 e A_2 fazem parte da hipérbole?

O que os pontos marcados têm em comum?

O que é uma hipérbole?

Exercício: Construa mais duas hipérboles seguindo o Passo a Passo acima, com outros valores para os segmentos OF_1, OF_2, OA_1 e OA_2. Use tamanhos de circunferências tais que a diferença do raio da maior para o raio da menor seja igual à distância de A_1 a A_2.

Objetivos da atividade: Visualizar a hipérbole pela marcação de alguns de seus pontos. Trabalhar com régua e compasso o conceito de lugare(s) geométrico(s). Trabalhar ponto, reta, medidas, interseção entre circunferências. Pretende-se que os alunos possam se aproximar da definição de hipérbole, ou mesma defini-la, facilitando assim a compreensão da definição formal da curva.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio ou mesmo do 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos: Ponto, reta, distância, reta paralela, medir usando a régua.

Materiais e tecnologias: régua graduada, compasso, papel e lápis. Recomendações metodológicas: formação de duplas, leitura e tira dúvida por parte do professor do passo a passo. Promover discussão com a turma sobre o que cada ponto marcado tem em comum, para que eles possam se aproximar da definição da hipérbole.

Dificuldades previstas: leitura do passo a passo, manuseio do compasso

Descrição geral: seguindo passos descritos na atividade os alunos devem fazer pares de círculos em torno de dois pontos escolhidos como focos de uma hipérbole a ser construída de tal forma que a diferença entre os raios nos pares de círculos seja igual à diferença entre as distâncias de cada ponto da hipérbole aos focos, obtendo assim pontos da hipérbole pela interseção de circunferências.

Possíveis desdobramentos: O professor pode orientar os alunos a variarem a distância entre os focos, bem como entre os vértices e, a partir da visualização dos novos formatos, proporem discussão, investigação sobre a relação entre a distância focal e da distância entre vértices, e as duas distâncias e sua relação com a excentricidade da hipérbole. Também pode propor uma atividade onde a hipérbole seja assim traçada em papel quadriculado e os alunos verifiquem a validade da equação da mesma escolhendo pontos do traçado.

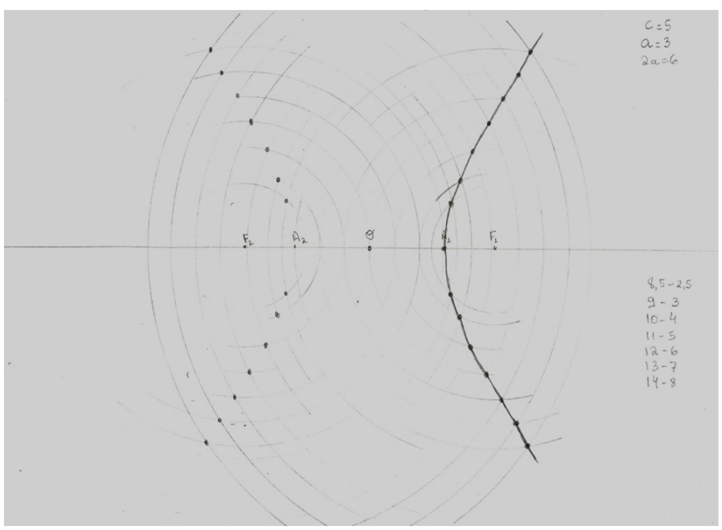

Figura 6 Hipérbole traçada com régua graduada e compasso

4.1.3 Desenhando hipérboles com a régua furada

Faça dois furos nas extremidades de uma régua de acrílico e amarre um pedaço de barbante (de tamanho menor que a distância entre os focos, o tamanho do barbante definirá a distância entre os vértices) em uma das extremidades. Na ponta livre que sobrar no pedaço de barbante faça um pequeno laço, como na figura abaixo.

Figura 7 A régua furada

Usando uma tachinha ou um percevejo prenda a extremidade da régua onde não está amarrado o barbante em um foco da hipérbole e o laço do barbante no outro foco da hipérbole. O lápis, mantendo o contato com a régua deve passear pelo barbante enquanto a régua gira em torno do foco onde está presa, como na figura abaixo.

Figura 8 Como usar a régua furada

Ao se chegar à metade do ramo da hipérbole, deve-se parar o traço da mesma, soltar a extremidade presa da régua, virar a régua e prendê-la novamente, e assim fazer o traço da outra metade do ramo da curva.

Em seguida basta trocar de posição a extremidade presa da hipérbole com o laço do barbante e proceder da mesma maneira para que seja traçado o outro ramo da hipérbole.

Por que o traço com a régua furada é uma hipérbole?

No início do traço da curva com a régua furada, temos que as distâncias aproximadas do ponto onde se encontra a caneta e os focos são: a distância entre os furos da régua que será batizado de r, e o tamanho livre do barbante, que será denotado por b. Nesse momento pode-se dizer que a diferença das distâncias do ponto aos focos é $r-b$. A situação está ilustrada na figura abaixo.

Figura 9 Momento inicial do traço com a régua furada

À medida que a caneta passeia pelo barbante e traça a curva, faz com que um pedaço fique encostado na régua, considerando p o tamanho do pedaço de barbante que encosta-se à régua, como o pedaço de régua que encosta-se no barbante também mede p, temos que as distâncias do ponto onde a caneta se encontra e os focos são $r-p$ e $b-p$. De tal forma que a diferença entre as distâncias agora é: $(r-p)-(b-p)=r-p-b+p=r-b$, ou seja, a diferença permanece a mesma. Tal situação é ilustrada na figura abaixo, note o pedaço de barbante que se encontra junto à régua.

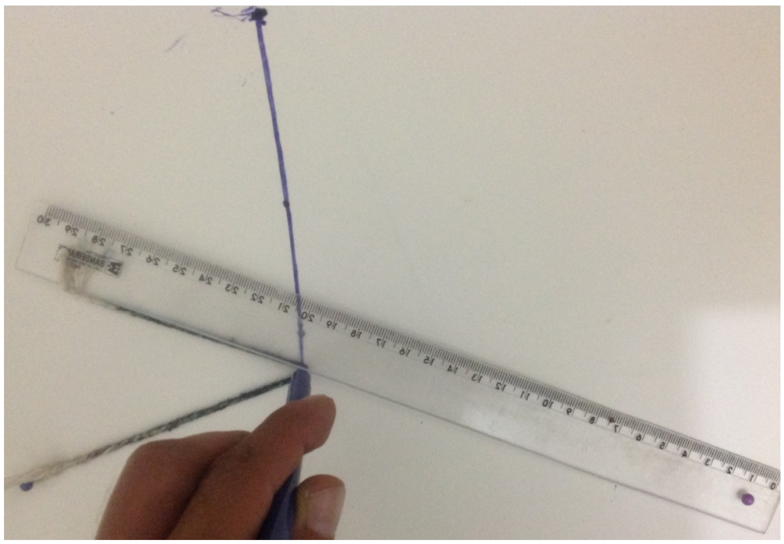

Figura 10 Pedaço de barbante junto à régua furada durante o traço da curva

Objetivos da atividade: Construção de diferentes hipérboles, reflexão da relação entre o processo usado na construção e a definição da curva, fazendo assim com que a definição da curva seja mais bem assimilada pelo estudante.

Público alvo: alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos: não possui

Materiais e tecnologias: régua furada, barbante, cartolina e lápis.

Recomendações metodológicas: Orientar os alunos na reflexão do porque o procedimento utilizado origina uma hipérbole, na conferência da validade da definição da hipérbole para pontos da curva traçada, na variação da distância focal e na distância entre vértices para obtenção de novas hipérboles e na reflexão do fato da distância entre vértices ser justamente o tamanho livre do barbante.

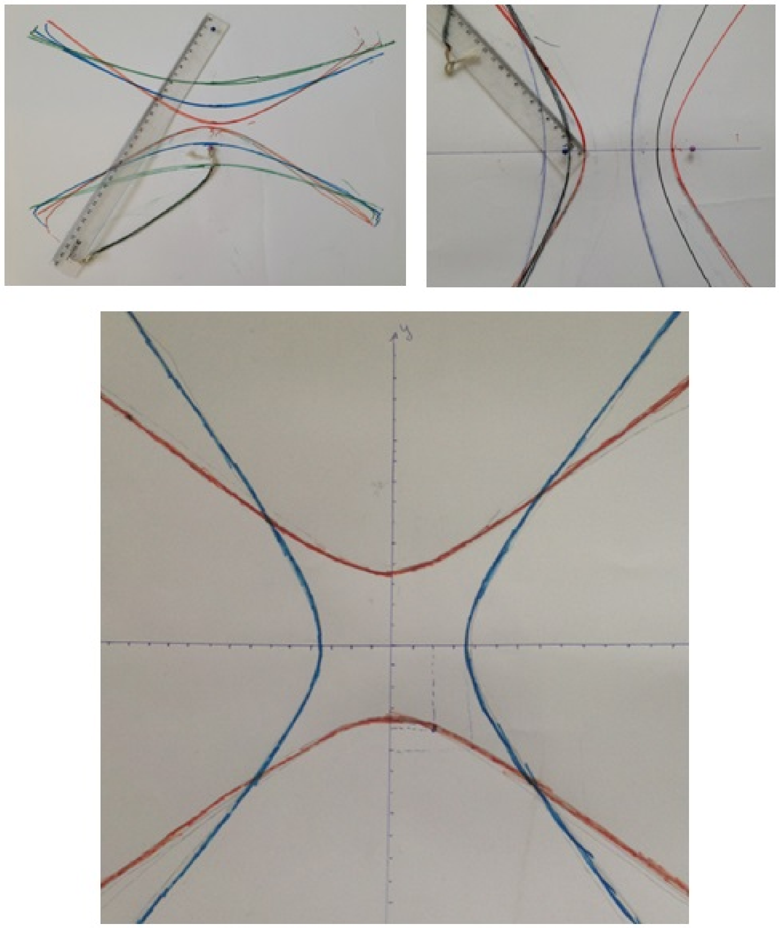

Figura 11 Hipérboles desenhadas com régua furada

Dificuldades previstas: as réguas devem ser furadas anteriormente por ser necessário uso de faca de ponta. Para prender os percevejos é bom que a cartolina seja apoiada em papelão, apenas a cartolina não é capaz de prendê-los suficientemente.

Descrição geral: Atividade para ser realizada em uma aula de 50 minutos, com possível continuidade em outra aula para as reflexões sobre a atividade. Consiste em aprender manusear a régua furada para com ela executar o traço de várias hipérboles e reflexões sobre o processo.

Possíveis desdobramentos: Uso de plano cartesiano para traço de hipérboles com equação dada.

4.1.4 Hipérboles no computador com o software Z.u.L

Nesta atividade será feita uma construção que possibilitará que seja traçada uma hipérbole com um simples clique. Também, uma vez feita a construção será possível modificar a hipérbole de forma fácil, bastando apenas mudar um ou outro valor.

Uma vez aberto o software Z.u.L, que é gratuito, devemos:

1º: Clicar no botão PONTO e marcar dois pontos quaisquer que serão os focos da hipérbole.

2º: Clicar no botão CÍRCULO COM RAIO FIXO, clicar em um dos focos marcados anteriormente e clicar novamente de forma a obter uma circunferência com raio menor que a distância entre os focos. Aperte OK.

3º: Clicar novamente em PONTO e marcar um ponto qualquer em cima da circunferência.

4º: Clicar no botão SEGMENTO e em seguida no ponto marcado no 3º passo e no foco que está fora da circunferência, traçando dessa maneira o segmento que liga os dois.

5º: Clicar no botão PONTO MÉDIO e em seguida nos dois pontos clicados no 4º passo para assim marcar o ponto médio do segmento.

6º: Clicar no botão RETA em seguida no foco que está dentro da circunferência e no ponto que está sobre a circunferência, traçando assim uma reta.

7º: Clicar no botão PERPENDICULAR e em seguida no segmento traçado anteriormente e no ponto médio do segmento, nessa ordem, traçando assim a reta perpendicular ao segmento.

8º: Clicar no botão PONTO novamente e marcar o ponto de encontro entre as duas retas.

A construção necessária para que o programa trace a hipérbole está feita, se você seguiu os passos certinhos sua construção deve conter os mesmos elementos que a figura abaixo, confira:

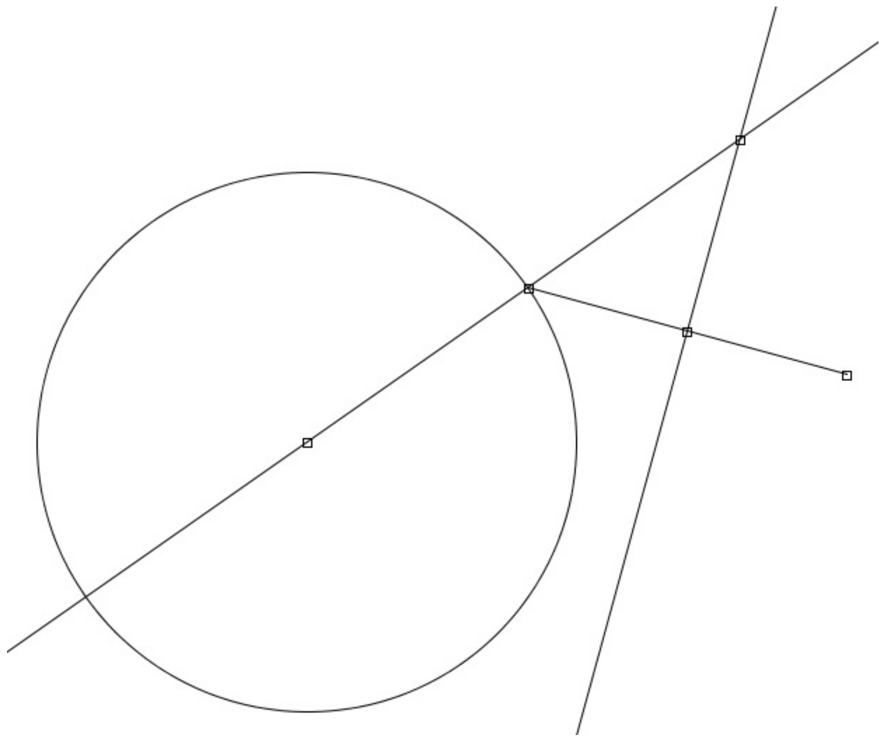

Figura 12 Construção auxiliar para o traço da hipérbole no Z.u.L

Agora para terminar:

Último passo: Clicar no botão RASTREIO AUTOMÁTICO DE PONTO OU RETA, em seguida clicar no ponto de interseção das retas, depois no ponto que está na circunferência escolher C_1 e clicar em OK. Clique mais uma vez no ponto da circunferência. As coisas começaram a se movimentar? Apareceram os dois ramos de uma hipérbole? Se sim, pronto.

Agora se sinta à vontade para mudar o tamanho do raio, mudar a posição dos focos, fazer outras hipérboles.

Antes de falar sobre as características da atividade, é apresentada uma demonstração do porque da construção utilizada originar uma hipérbole.

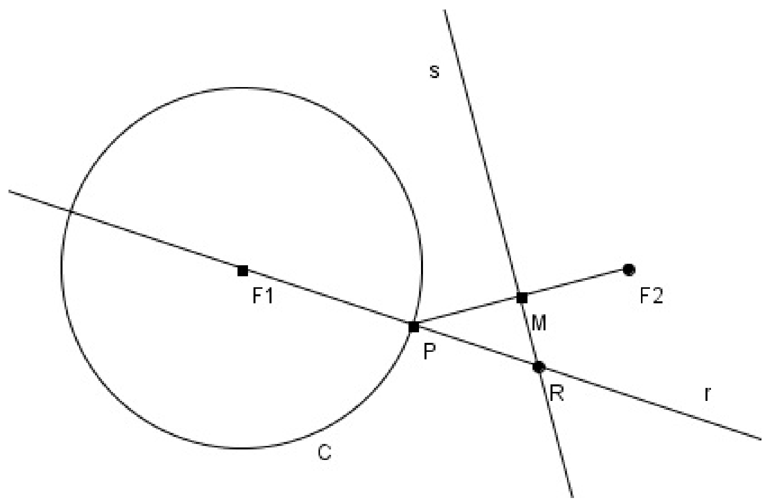

Figura 13 Construção utilizada no Z.u.L para obtenção da hipérbole - 1

Denotando os pontos F_1 e F_2 da figura por F_1 e F_2, são elementos da construção:

Pontos F_1 e F_2;

Circunferência C de centro em F_1 e raio menor que a distância entre F_1 e F_2;

Ponto P que é um ponto qualquer da circunferência C;

Segmento PF_2;

Ponto M que é o ponto médio do segmento PF_2;

Reta r que é a reta que passa por F_1 e P;

Reta s que é a reta mediatriz do segmento PF_2;

E o ponto R que é o ponto de interseção entre as retas r e s.

Deve-se provar que a diferença entre a distância de R a F_1 e a distância de R a F_2 é a mesma para qualquer ponto P tomado na circunferência, isto é $|Rf_1 - RF_2| = c$. Onde c é uma constante.

O triângulo PRF_2 por construção é um triângulo isósceles de base PF_2, uma vez que os triângulos PMR e F_2MR são congruentes por serem ambos os triângulos retângulos com catetos iguais devido ao fato de M ser ponto médio e MR ser comum, logo $RP = RF_2$.

Existem dois casos a serem considerados: Quando RF_1 é maior que RF_2 e o caso inverso.

RF_1 é maior que RF_2 quando o ponto P está entre F_1 e R, sendo assim $RF_1 = RP + PF_1$ como ilustra a figura acima, e é o caso que define o ramo direito da hipérbole, nesse caso tem-se:

$RF_1 - RF_2 = RP + PF_1 - RF_2 = PF_1 = c$, pois $RP = RF_2$ e onde c o raio da circunferência.

Já RF_2 maior que RF_1 ocorre quando o ponto F_1 está entre P e R, sendo assim $PR = RF_1 + F_1P$ como ilustra a figura abaixo, e é o caso que define o ramo esquerdo da hipérbole, nesse caso tem-se:

$RF_2 - RF_1 = PR - RF_1 = RF_1 + F_1P - RF_1 = F_1P = c$, pois $RP = RF_2$ e onde c o raio da circunferência.

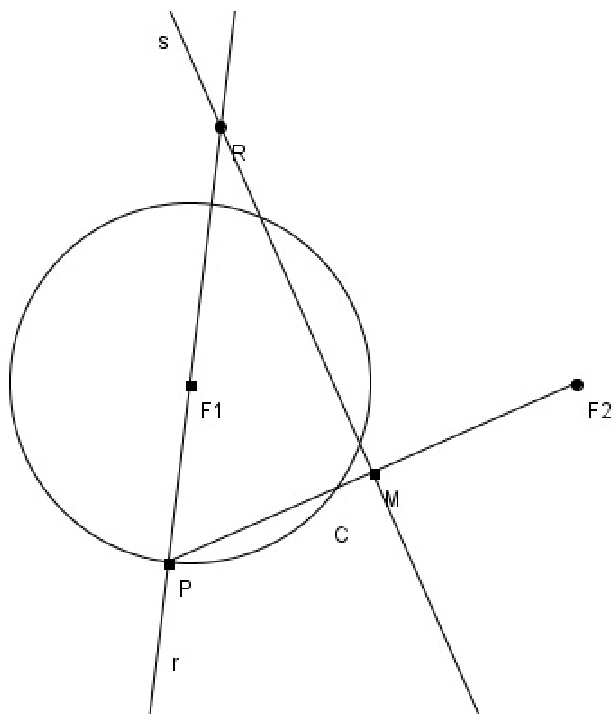

Figura 14 Construção utilizada no Z.u.L para obtenção da hipérbole - 2

Tal demonstração garante que o ponto R é um ponto da hipérbole porque temos que todos os pontos R assim construídos terão o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (no caso F_1 e F_2) igual a uma constante (que na demostração foi chamada de c).

Objetivos da atividade: Construção e visualização de hipérboles onde são abordados os conceitos de ponto, reta, ponto médio, circunferência, interseção de retas em uma atividade utilizando o software Z.u.L. que permite que várias hipérboles sejam traçadas com uma simples mudança na localização de um ponto. Pretende-se que além de revisar os conceitos acima descritos o estudante tenha a oportunidade de observar e inferir facilmente sobre a relação que a distância focal e a distância entre os vértices da hipérbole têm no formato da mesma, visualizando assim hipérboles de várias excentricidades.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio

Pré-requisitos: ponto, reta, ponto médio, circunferência, interseção de retas.

Materiais e tecnologias: computador que tenha instalado o software Z.u.L.

Recomendações metodológicas: se os alunos não têm familiaridade com o software é necessário que o professor realize a construção com os alunos, sem pressa, todos juntos.

Dificuldades previstas: o uso do software se for a primeira vez que os alunos o utilizarem

Descrição geral: Usando o software Z.u.L. os alunos são orientados na atividade a elaborarem uma construção de que possibilita o traçado de uma hipérbole e também a construir várias hipérboles variando parâmetros da forma que acharem melhor. O Z.u.L. é um programa para construções com régua e compasso que roda em vários sistemas operacionais e é gratuito.

Possíveis desdobramentos: O professor pode aproveitar a atividade em um estudo investigativo ou de verificação sobre as equações da hipérbole, fazendo uso da grade quadriculada do próprio programa e das medidas que o mesmo informa.

Segue abaixo algumas imagens de hipérboles feitas com o programa:

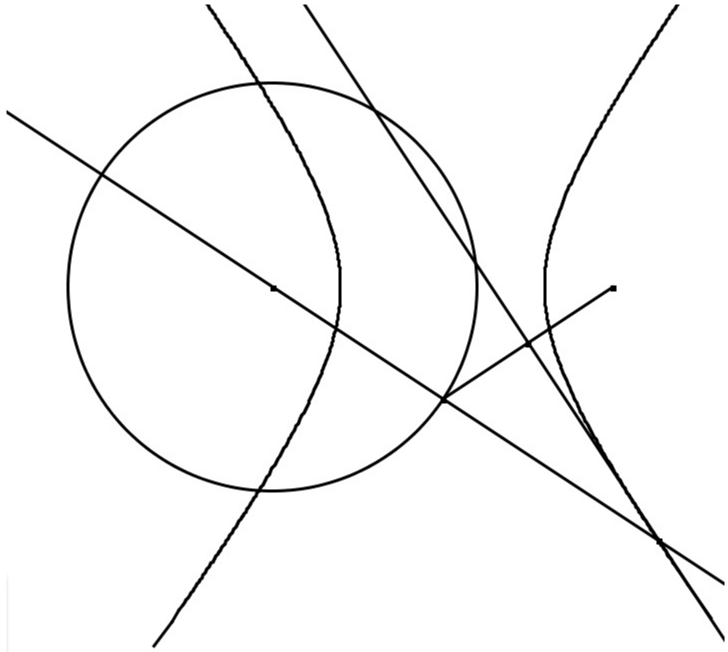

Figura 15 Ponto da hipérbole iniciando “passei” pelo ramo da direita

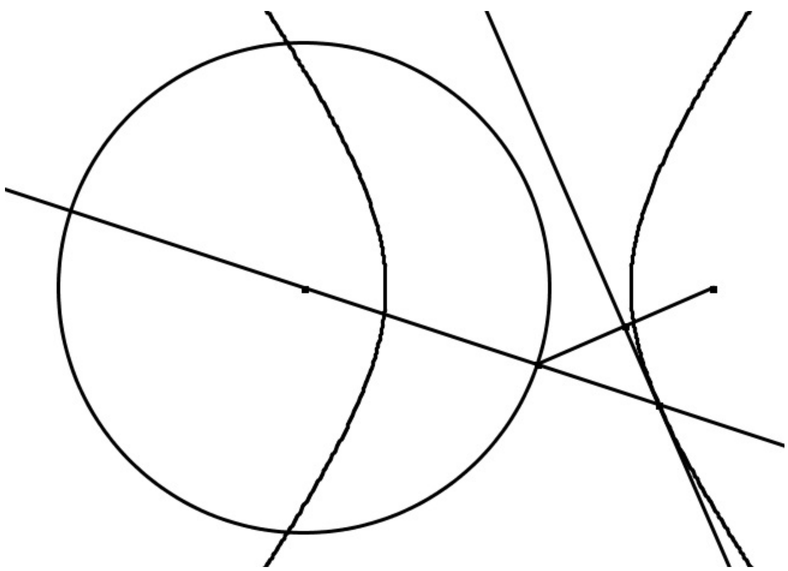

Figura 16 O ponto se deslocou um pouco para cima

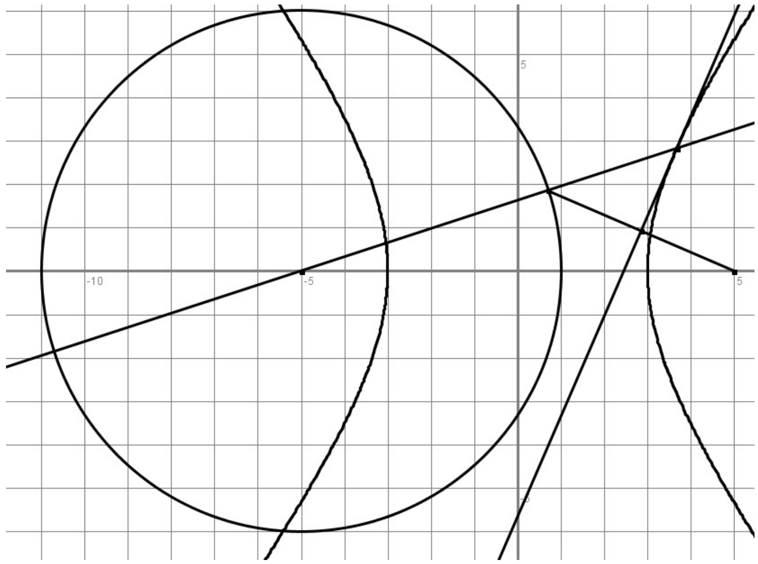

Figura 17 Malha quadriculada do Z.u.L e ponto da hipérbole mais acima

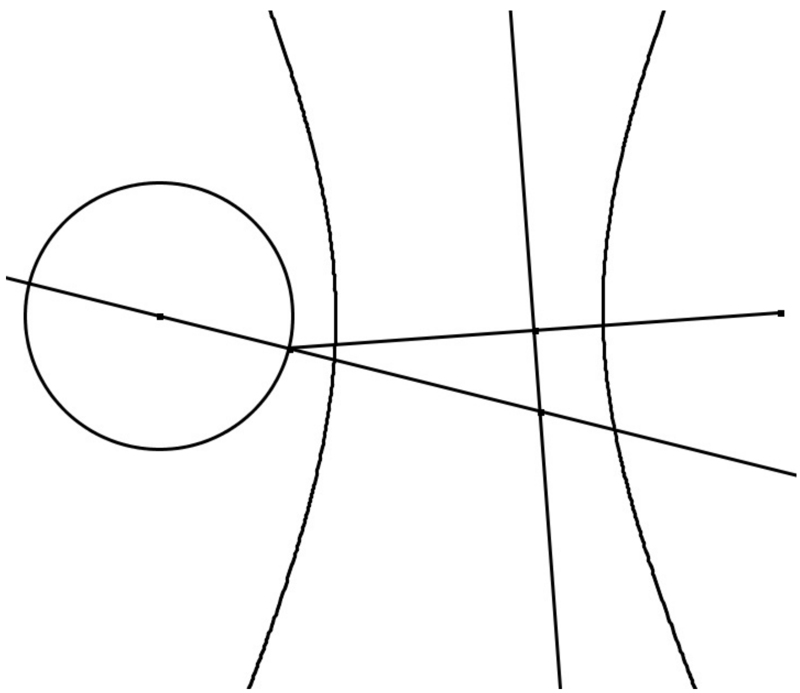

Figura 18 Hipérbole obtida variando-se o tamanho do raio e a posição do foco

4.1.5 Sinuca com borda em formato de hipérbole

Objetivos da atividade: Confecção de uma “mesa” de sinuca com borda em formato de hipérbole para uma abordagem prática da propriedade de reflexão da hipérbole. Apresentar ao aluno uma propriedade muito usada na ótica de forma concreta e lúdica.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio

Pré-requisitos: Fazer o traçado de uma hipérbole

Materiais e tecnologias: A ‘mesa’ de bilhar com borda em formato de hipérbole pode ser confeccionada com materiais distintos à escolha do grupo de alunos, como por exemplo, papelão, madeira, isopor, e nos mais diferentes tamanhos, podendo ser uma bola de gude, por exemplo, para fazer o papel de bola de bilhar. Para a borda da “mesa” pode-se usar o emborrachado conhecido por EVA e muito utilizado nas escolas. Recomendações metodológicas: pode ser indicado como trabalho em grupo. Discussão com os alunos sobre como confeccionar a “mesa”. Apresentar a propriedade de reflexão da hipérbole.

Dificuldades previstas: Escolher hipérbole que melhor se ajuste a “mesa”, desenhar e recortar de forma precisa a curva no material concreto.

Descrição geral: Formação de grupos de alunos, apresentação da propriedade reflexiva da hipérbole, apresentação das fotos da mesa de bilhar, explicação da relação que a propriedade reflexiva tem com a “mesa”, discussão com a turma a respeito da viabilidade, materiais utilizados, tamanho da “mesa”. Apresentação e estudo sobre a propriedade reflexiva da hipérbole.

Possíveis desdobramentos: Construções mais aprimoradas. Estudo sistemático da propriedade reflexiva da hipérbole.

Figura 19 Mesa de bilhar com borda hiperbólica 1

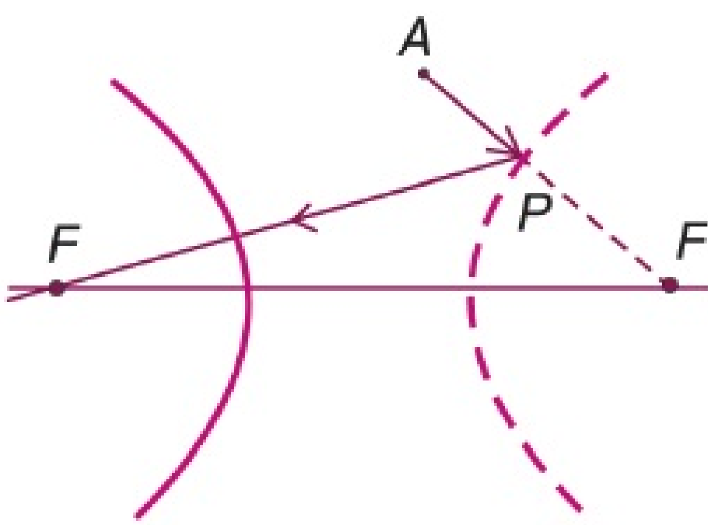

Figura 20 Propriedade de reflexão da hipérbole

Figura 21 Mesa de bilhar com borda hiperbólica 2

4.2 Aplicações

Todas as cônicas possuem aplicações práticas de seu uso. É impossível expor todas, até porque novas aplicações podem ser inventadas futuramente. Citar aplicações das cônicas para os alunos é importante por mostrar que as curvas são presentes na vida real. Abaixo listamos algumas aplicações da hipérbole.

A propriedade de reflexão da hipérbole, ilustrada pela "mesa" de bilhar com borda em forma de hipérbole, faz com que a hipérbole seja muito usada na óptica, na construção de lentes e telescópios. O telescópio espacial Hubble, que tem ajudado o homem a resolver problemas antigos de astronomia, é um famoso exemplo do uso de lentes em formato de hipérbole.

Figura 22 Telescópio espacial Hubble

Na arquitetura também é possível observar a utilização das hipérboles. Como por exemplo, na Catedral de Brasília, projetada pelo famoso arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, onde dezesseis colunas em formato de hipérboles simetricamente opostas são destaque.

Figura 23 Catedral de Brasília

Existem cometas cujas trajetórias que descrevem pelo espaço são em formato de hipérbole.

As hipérboles também aparecem num quarto escuro quando se acende um abajur, pois o bojo do abajur forma cones de luz que interceptam a parede e é como se a parede fizesse um corte paralelo à altura do cone, resultando assim numa iluminação com borda em formato de hipérbole, Como na figura seguinte:

Figura 24 Parede seccionando cones de luz

No estudo da química e da física no Ensino Médio, aprendemos que várias são as grandezas inversamente proporcionais, onde o produto entre elas é constante. Por exemplo, na física, velocidade e tempo, no movimento retilíneo uniforme; na química, no estudo dos gases, o volume ocupado por um gás e a pressão exercida (como ilustra a figura 26); no comércio, a quantidade de produtos comprados e o preço a pagar (quando não se tem desconto); entre muitos outros. A proporção inversa é representada graficamente por uma hipérbole, uma vez que a equação que caracteriza o produto de duas varíaveis ser igual à uma constante , ou seja $xy = k$, é a equação de uma hipérbole rotacionada (ver o último exemplo da seção 5.3).

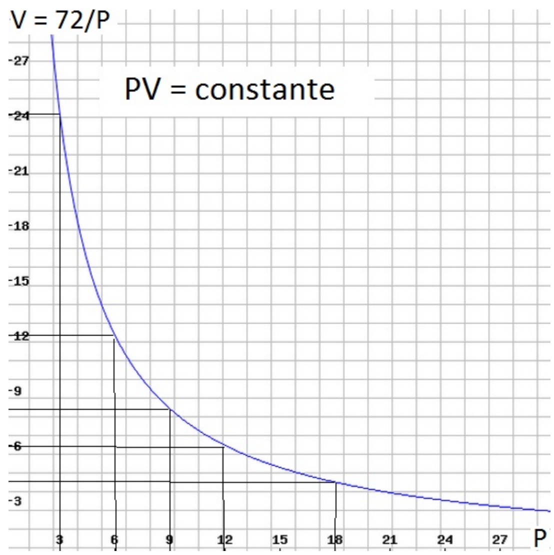

Figura 25 Hipérbole num gráfico de pressão x volume

Hipérboles são também utilizadas por alguns radares de navegação onde os radares se situam no foco de várias hipérboles.

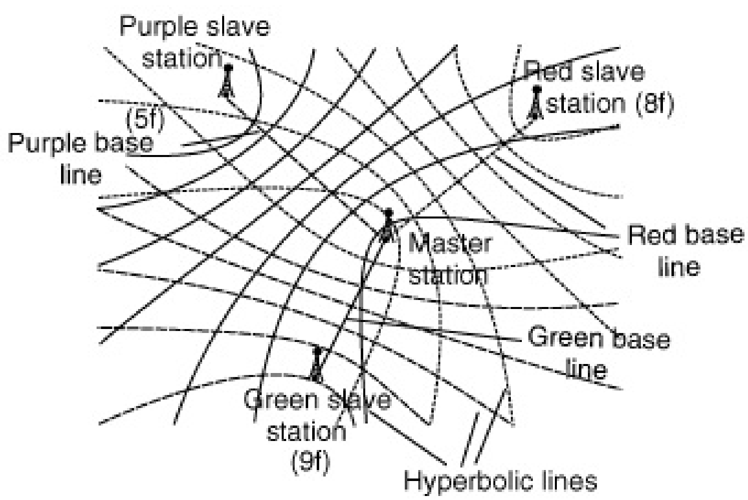

Figura 26 Hipérboles são usadas por radares

4.3 Coordenadas polares

Em geral, os alunos do Ensino Médio utilizam somente o sistema de coordenadas cartesianas. Deve-se introduzir outros sistemas de coordenadas no Ensino Médio, entre eles o sistema de coordenadas polares. Para alguns, pode parecer desnecessário considerar outro sistema diferente do sistema cartesiano. Mas em muitos casos o uso dessas coordenadas representa muitas vantagens sobre as coordenadas cartesianas.

Segundo Kindle (1976), para determinar a posição de um ponto P ao invés de usar como referência dois eixos ortogonais, às vezes é mais fácil localizá-lo em função da distância dele a um ponto fixo O e do ângulo que a direção OP forma com uma reta fixa que passa por O as coordenadas desse sistema denominam-se coordenadas polares.

Para Lehmann (1966), trace o segmento OP e designe sua longitude por r (Figura 47). Considerando um segmento AO, onde A é um ponto qualquer do plano, chamemos θ ao ângulo AOP. Evidentemente a posição do ponto P com relação ao eixo polar e ao pólo é determinada quando se conhecem r e θ. Em particular r se chama vetor raio e θ ângulo polar, ângulo vetorial ou argumento de P. As coordenadas polares de P se escrevem (r,θ).

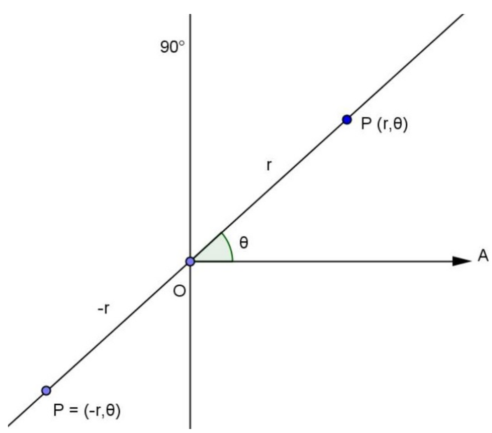

Figura 27 Coordenadas polares

Chama-se r de coordenada radial de P e θ de coordenada angular (ou ângulo polar) de P (ANTON et al., 2000).

De acordo com Júnior (1973) chamaremos de θ o menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário em graus ou em radianos de *AO* para *OB*, e de *r* a distância orientada positivamente, *OP*. Mas às vezes é preciso que *r* e θ tenham valores positivos ou negativos. Se θ é negativo e *r* é positivo, traçamos o ângulo θ= *AB*, medidos a partir de *OA*, no sentido horário e marcamos *P* sobre *OB* de modo que $OP = r$. Se *r* é negativo construímos $\theta = AB$, prolongando *OB* até o pólo B' e marcamos *P* sobre OB' a uma distância $\|r\|$ de *O*. Um par de coordenadas polares determina somente um ponto, mas um ponto pode ser determinado de várias maneiras. Outra forma de representar é $(r, \theta + 2\pi n)$ onde θ está dado em radianos e n é um número inteiro ou $(-r, \theta + \pi n)$ onde n é um número inteiro ímpar qualquer.

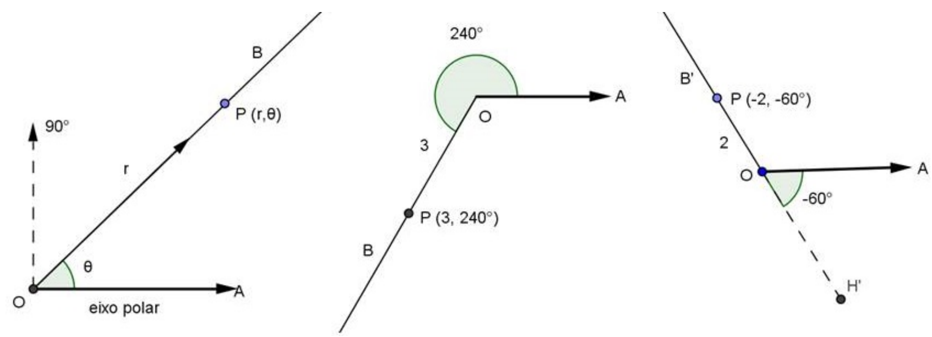

Figura 28 Pontos em coordenadas polares

Lehmann (1966) traz um exemplo de pontos em coordenadas polares está representado na figura 52, onde estão traçados os pontos $P_1(4, \frac{\pi}{6})$, $P_2(6, 2)$, $P_3(-7, 75^o)$ e $P_4(5, \frac{7\pi}{4})$.O ângulo polar 2 (em P_2) significa 2 radianos que equivale a $114^o 35, 5'$ (aproximadamente).

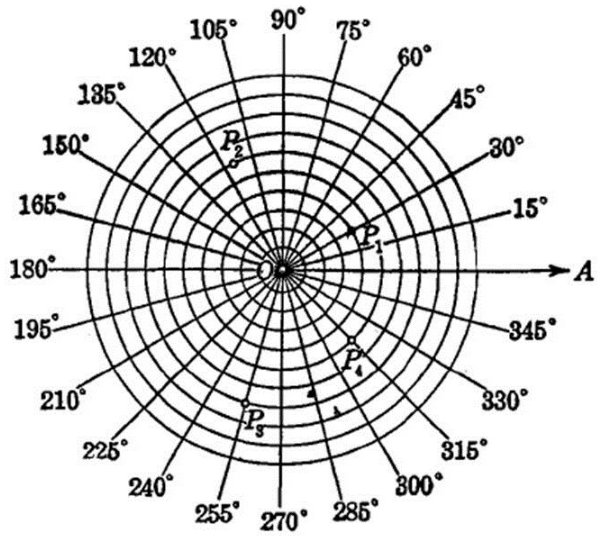

Figura 29 Alguns pontos marcados em coordenadas polares
Fonte: (LEHMANN, 1966).

O pólo tem infinitas representações no sistema polar $(0,\theta)$, pois são todos os valores de θ tais que $r = f(\theta) = 0$, que dão as direções das tangentes no pólo.

Considerando o pólo como a origem do sistema cartesiano, e o eixo polar como a parte positiva do eixo x tem-se as seguintes relações:

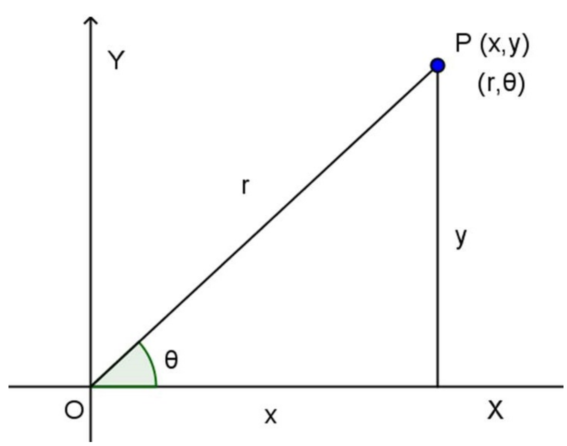

Figura 30 Coordenadas polares

$$cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = rcos\theta \tag{1}$$

$$sen\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rsen\theta \tag{2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

E daí provém que $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ então:

$$sen\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e

$$cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Dividindo (2) por (1) tem-se que:

$$\frac{y}{x} = \frac{rsen\theta}{rcos\theta}$$

$$tg\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para traçar o gráfico de curvas em coordenadas polares deve-se, de acordo com Lehmann (1966), seguir os seguintes passos:

a) Determinação das intersecções com o eixo polar e com o eixo de 90º;

b) Determinação da simetria da curva com respeito ao eixo polar, ao eixo a 90º e ao pólo;

c) Determinação da extensão do lugar geométrico;

d) Cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos para obter um gráfico adequado, e

e) Traçar o gráfico.

Para determinar as intersecções com o eixo polar basta fazer $\theta = 0^o$ e para fazer a intersecção com o eixo de 90º, basta fazer $\theta = 90^o$.

Para fazer a simetria explica Kindle (1976) nos casos em que a substituição de θ por - θ não altera a equação, curva é simétrica em relação ao eixo polar. Quando substituímos θ por $\pi - \theta$, e a equação continua a mesma, a curva é simétrica em relação à reta $\theta = \pi$. E a curva é simétrica em relação ao pólo quando substituímos r por $-r$ ou θ por $\pi + \theta$ e a equação não se modifica.

Sobre a determinação da extensão do lugar geométrico Ayres Júnior (1973) diz que a equação polar $r = f(\theta)$ representa curva fechada quando r é um número real e finito para qualquer θ, mas quando existem valores para os quais uma das variáveis torna a outra infinita a curva não é fechada.

Segundo Anton et al. (2000), deve-se escolher valores conhecidos para θ, calcular os valores correspondentes de r, então, marcar os pontos (r, θ) no sistema de coordenadas polares e então traçar o gráfico.

4.3.1 Cônicas em coordenadas cartesianas.

(1) A elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante o maior que a distância entre eles.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Os elementos de uma elipse são:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância entre os focos $(2c = F_1F_2)$.
Eixo maior: é o segmento $A_1A_2 = 2a$, que passa pelos focos $(2a > 2c)$.

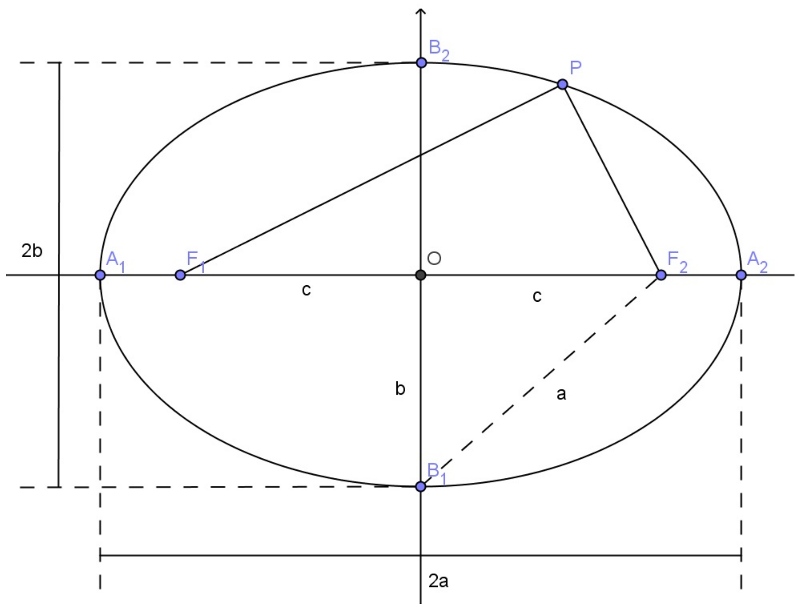

Figura 31 Elipse em coordenada cartesiana

Centro: é o ponto O, ponto médio de A_1A_2.
Eixo menor: é o segmento $B_1B_2 = 2b$, perpendicular a A_1A_2 passando por O.
Excentricidade (e): é a razão $e = \dfrac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.
Se a excentricidade e for próxima de 1, o formato da elipse será mais achatado, se e for próximo de 0, o seu formato será próximo ao de uma circunferência.
Em uma elipse: $a^2 = b^2 + c^2$.

As equações de uma elipse são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas e centro $(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas e centro $(0,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(2) A parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a uma reta r dada é igual à distância a um ponto fixo F não pertencente a r.

$$PF = PH$$

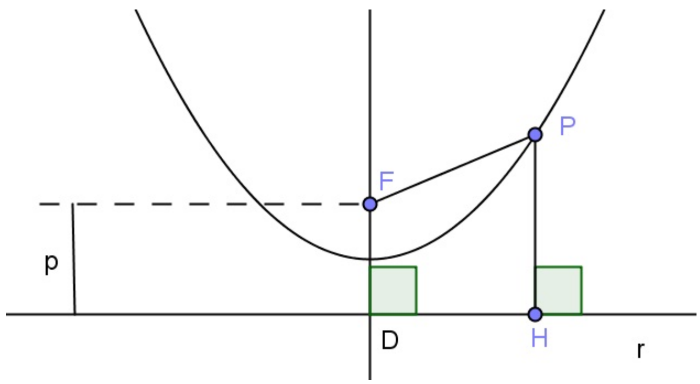

Figura 32 Parábola em coordenada cartesiana

Os elementos de uma parábola são:

Focos: o ponto F.
Diretriz: é a reta r.
Eixo de simetria: é reta perpendicular a r, que passa por F.
Vértice: é a intersecção da parábola com o eixo de simetria.
Parâmetro da parábola: é a distância de p entre o foco e a diretriz.

As equações de uma parábola são dadas por:

i) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(c,0)$)

$$y^2 = 4cx \text{ ou } y^2 = 2px$$

ii) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(-c,0)$)

$$y^2 = -4cx \text{ ou } y^2 = -2px$$

iii) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0,c)$)

$$x^2 = 4cy \text{ ou } x^2 = 2py$$

iv) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0,-c)$)

$$x^2 = -4cy \text{ ou } x^2 = -2py$$

(3) A hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e menor que a distância entre eles.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

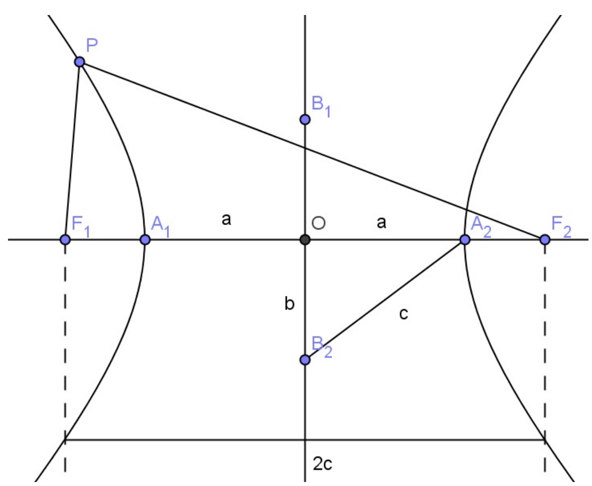

Figura 33 Hipérbole em coordenada cartesiana

Os elementos de uma hipérbole são:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.
Distância focal: é a distância entre os focos $(2c = F_1F_2)$.

Vértices: São os pontos A_1 e A_2, intersecções de F_1F_2 com a hipérbole.
Eixo real: é o segmento $A_1A_2 = 2a$.
Centro: é o ponto O, ponto médio de A_1A_2.
Eixo imaginário: é o segmento $B_1B_2 = 2b$.
Excentricidade (e): é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$.
Se e está próximo de 1, os ramos da hipérbole serão mais fechado. Se e for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole seráo mais abertos.
Em uma hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$.

As equações de uma hipérbole são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

As assíntotas de uma hipérbole são as retas $y = \pm\frac{b}{a}x$, das quais a hipérbole fica cada vez mais próxima, sem tocá-las.

4.3.2 Cônicas em coordenadas polares.

Anton et al. (2000) deduz as equações polares para as cônicas. Suponhamos que a diretriz esteja a direita do foco (Figura 54).

Sabendo que $\frac{PF}{PD} = e$, temos que

$$PF = ePD,$$

e como $PF = r$ e $PD = d - rcos\theta$, segue que

$$\frac{r}{d - rcos\theta} = e$$

.

Assim,

$$\frac{d}{r} - \frac{rcos\theta}{r} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{e} + cos\theta$$

$$ed = r + ercos\theta$$

$$ed = r(1 + ecos\theta)$$

$$r = \frac{ed}{1 + ecos\theta}$$

.

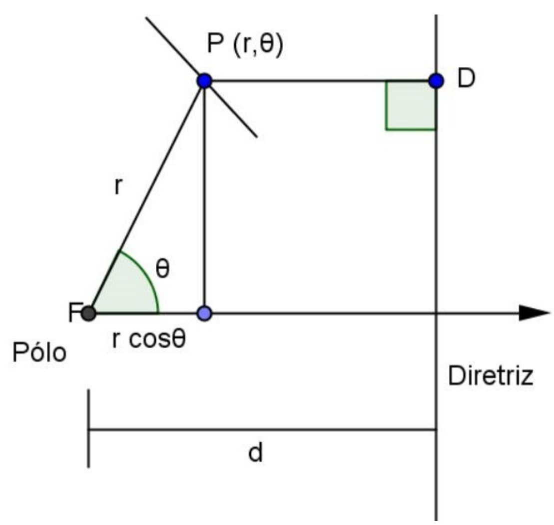

Figura 34 Equação polar das cônicas

Assim, para os demais casos temos o seguinte resultado:

Teorema: Se uma seção cônica com excentricidade e está posicionada em um sistema de coordenadas polares, de modo que seu foco está no pólo e a diretriz correspondente está a d unidades do pólo, então a equação da cônica tem uma das quatro formas possíveis, dependendo da sua orientação:

$$r = \frac{ed}{1+ecos\theta} \text{ (diretriz à direita do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1-ecos\theta} \text{ (diretriz à esquerda do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1+esen\theta} \text{ (diretriz acima do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1-esen\theta} \text{ (diretriz abaixo do polo)}$$

Ainda para Anton et al. (2000) na elipse precisa-se determinar a distância do foco aos vértices. Sendo r_0 a distância do foco até o vértice mais próximo e r_1 a distância até o vértice mais afastado, temos que: $r_0 = a-c$, $r_1 = a+c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1+r_0)$ e subtraindo temos: $c = \frac{1}{2}(r_1-r_0)$. Agora multiplicando $r_0.r_1 = a^2-c^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0r_1}$. Da mesma maneira que na elipse, na hipérbole tem-se que: $r_0 = c-a$, $r_1 = a+c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1-r_0)$ e subtraindo tem-se: $c = \frac{1}{2}(r_1+r_0)$. Agora multiplicando $r_0.r_1 = c^2-a^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0r_1}$.

Exemplo:

a) Esboce o gráfico de $r = \dfrac{2}{1+2sen\theta}$ em coordenadas polares.

Solução: Comparando com as equações acima, observa-se a equação do exemplo se trata da equação de uma hipérbole com diretriz uma unidade abaixo do pólo e excentricidade igual a dois, pois $d = 1$ e $e = 2$

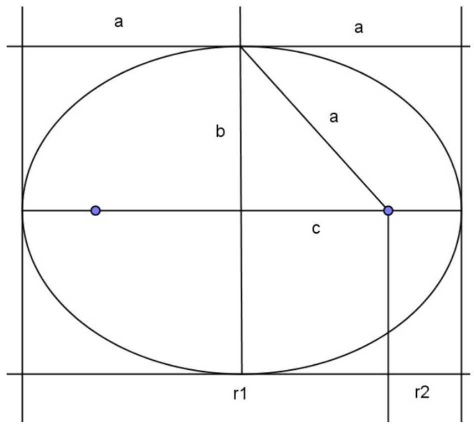

Figura 35 Elipse

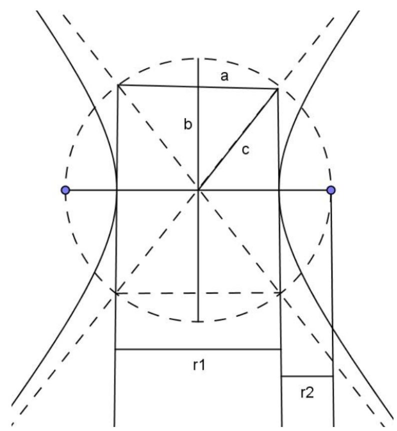

Figura 36 Hipérbole

Quando θ varia ao longo do intervalo de $0 \leq \theta < \frac{7\pi}{6}$, o valor de r é positivo, e varia desde 2 para $\frac{2}{3}$ e, em seguida, para $+\infty$, que gera parte do ramo inferior. (figura 40).

Quando θ varia ao longo do intervalo $\frac{7\pi}{6} < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, o valor de r é negativa e varia de $-\infty$ a - 2, o que gera a parte direita do ramo superior.

Quando θ varia ao longo do intervalo $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < \frac{11\pi}{6}$, o valor de r é negativa e varia de - 2 a $-\infty$, a qual gera a parte esquerda do ramo superior.

Quando θ varia ao longo do intervalo $\frac{11\pi}{6} < \theta \leq 2\pi$, o valor de r é positivo, e varia de $+\infty$ a 2, que preenche a peça que faltava no ramo inferior direito.

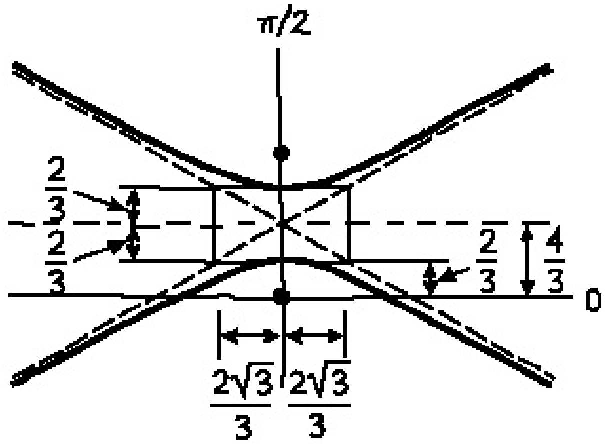

Figura 37 Esboço rudimentar da Hipérbole

Fazendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ obtemos valores para r_0 e r_1 respectivamente:

$$r_0 = \frac{2}{1+2sen(\frac{3\pi}{2})} = \frac{2}{3} \text{ e } r_1 = \left|\frac{2}{1+2sen(\frac{3\pi}{2})}\right| = 2.$$

Fazendo subtração, adição e multiplicação dos valores de r_0 e r_1 temos $a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = \frac{2}{3}$, $b = \sqrt{r_0 r_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) = \frac{4}{3}$ como na figura 39.

5 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Este capítulo apresenta um estudo voltado para a graduação, onde abordamos as rotações e translações de eixos coordenados. No fim do capítulo mostramos a rotação de eixos utilizando a álgebra linear.

Quando se trabalha com cônicas, muitas vezes a escolha certa dos eixos conduz a uma forma mais simples da equação. É possível simplificar essa equação de duas maneiras, pela translação de eixos e/ou pela rotação de eixos.

Para Lehmann (1966) uma transformação é uma operação pela qual uma relação, expressão ou figura se transforma em outra seguindo uma lei dada. Analiticamente, a lei se expressa por uma ou mais equações chamadas equações de transformações.

5.1 Translação de eixos coordenados

De acordo com Kindle (1976) sendo OX e OY os eixos originais e $O'X'$ e $O'Y'$ os eixos transladados, respectivamente paralelos aos primeiros. Considerando (h,k) a nova origem do novo sistema e seja P um ponto qualquer do plano, com (x,y) as coordenadas dos eixos originais e (x',y') as coordenadas nos novos eixos.

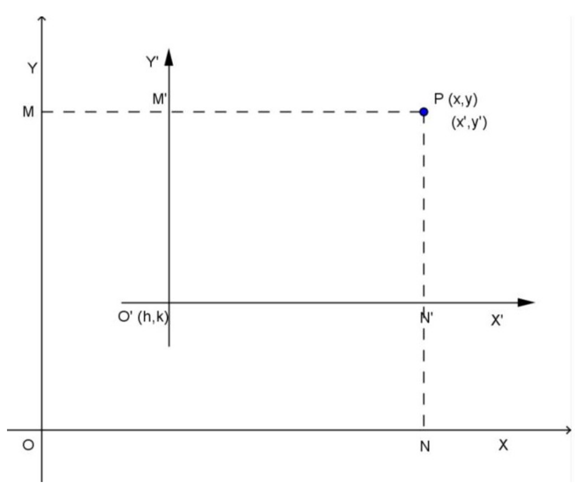

Figura 38 Translação de eixos

Determinando-se x e y em função de x', y', h e k, temos:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

e,

$$y = NP = NN' + N'P = k + y'$$

Logo, as fórmulas para transformação são: $x = x' + h$ e $y = y' + k$, isto é, $x' = x - h$ e $y' = y - k$.

5.2 Rotação dos eixos coordenados

A rotação dos eixos coordenados consiste em manter a origem fixa e girar os eixos em um determinado ângulo.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado,

Teorema 1: Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem como centro de rotação, e as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da rotação são (x, y) e (x', y') respectivamente, as equações de transformação do sistema original ao novo sistema de coordenadas estão dadas por: $x = x' cos\theta - y' sen\theta$, $y = x' sen\theta + y' cos\theta$.

Demonstração: Sejam X e Y os eixos originais e X' e Y' os novos eixos. A partir do ponto P traça-se a ordenada AP correspondente ao sistema X, Y, a ordenada $A'P$ correspondente ao sistema X', Y', e a reta OP. Seja o ângulo $POA' = \varphi = r$. Por trigonometria tem-se:

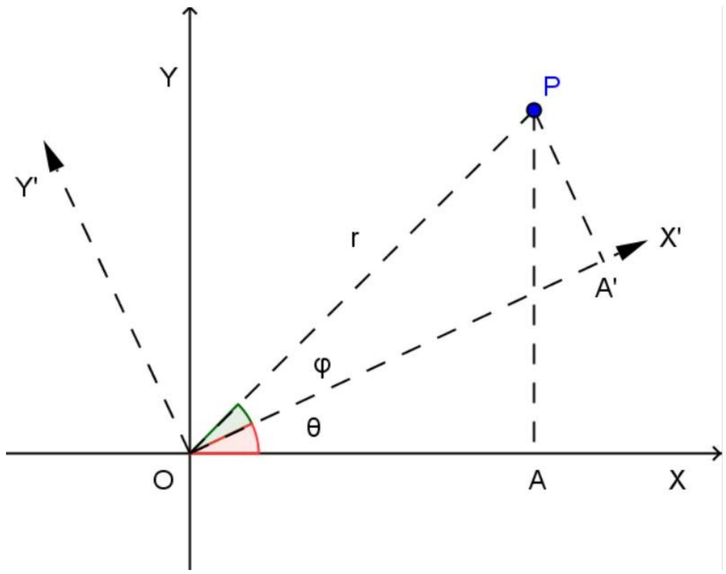

Figura 39 Rotação de eixos

$$x = \overline{OA} = rcos(\theta + \varphi) \quad (1)$$

$$y = \overline{AP} = rsen(\theta + \varphi) \quad (2)$$

$$x' = \overline{OA'} = rcos\varphi, y' = \overline{A'P} = rsen\varphi \quad (3)$$

De (1) tem-se:

$$x = \overline{OA} = rcos(\theta + \varphi) = rcos\theta cos\varphi - rsen\theta sen\varphi$$

.

Se nesta última equação substituir-se os valores dados por (3), obtemos a primeira equação de transformação

$$x = x'cos\theta - y'sen\theta$$

Analogamente, de (2)

$$y = rsen(\theta + \varphi) = rsen\theta cos\varphi + rcos\theta sen\varphi$$

De (3), tem-se a segunda equação de transformação:

$$y = x' sen\theta + y' cos\theta$$

Para as aplicações será necessário girar os eixos coordenados somente por um ângulo suficientemente grande para fazer coincidir um dos eixos coordenados com uma reta dada fixa qualquer, ou para fazer que seja paralelo a ela em um plano coordenado. Assim podemos restringir, em geral, os valores do ângulo de rotação θ ao intervalo dado por $0^o \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (LEHMANN, 1966).

Já Ayres Júnior (1973) apresenta outra maneira de encontrar as equações de rotação, mantendo a origem fixa, e os eixos coordenados girando em sentido anti-horário um ângulo θ, e se um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema OXY e (x', y') no novo sistema tem-se:

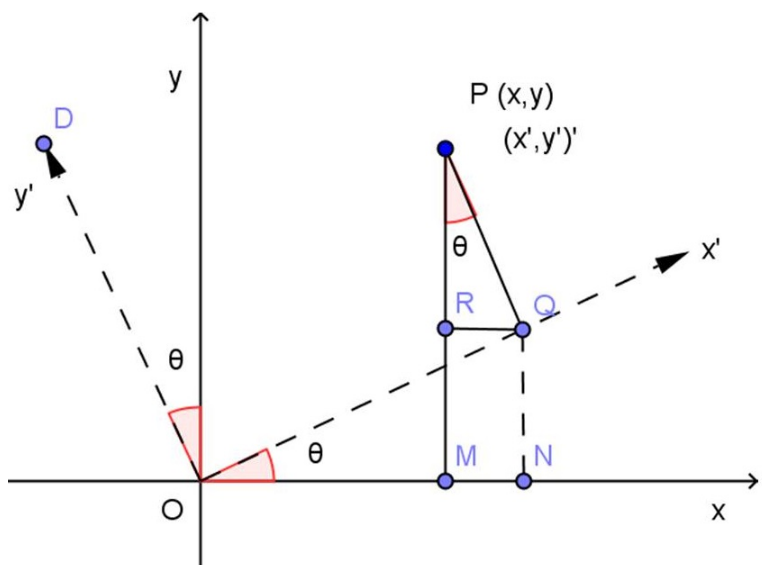

Figura 40 Eixos com rotação

$$
\begin{aligned}
x &= OM = ON - MN = ON - RQ \\
&= OQcos\theta - QPsen\theta \\
&= x'cos\theta - y'sen\theta \\
y &= MP = MR + RP = NQ + RP \\
&= OQsen\theta + QPcos\theta \\
&= x'sen\theta - y'cos\theta
\end{aligned}
$$

De acordo com Camargo et al.(2005) sendo $P(x,y)$ um ponto do plano π. Quando rotaciona-se θ radianos no sentido anti-horário, obtém-se um ponto $P'(u,v)$ tal que

$$
\begin{cases} x = ucos\theta - vsen\theta \\ y = usen\theta + vcos\theta \end{cases},
$$

onde $P = P'$. Resolvendo esse sistema temos

$$
\begin{cases} u = xcos\theta + ysen\theta \\ v = -xsen\theta + ycos\theta \end{cases},
$$

que são as expressões das novas coordenadas em relação às antigas. Pode-se escrever matricialmente por

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M. \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}
$$

ou

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^{-1}. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},
$$

onde M é a matriz mudança de base $M = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ que é ortogonal, ou seja, $M^{-1} = M^t$.

Exemplo:

Obtenha um sistema de coordenadas x'y' pela rotação do sistema de coordenadas xy por um ângulo de $\theta = 60°$. Obtenha a equação da curva $\sqrt{3}xy + y^2 = 6$ no sistema de coordenadas x'y'. Esboce o gráfico da curva mostrando ambos sistemas de coordenadas.

Solução: As equações de transformação por rotação são:

$$x = x'cos60° - y'sen60° = \tfrac{1}{2}x' - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'$$

e

$$y = x'sen60° + y'cos60° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'.$$

Substituindo estes valores de x e y na equação $\sqrt{3}xy + y^2 = 6$:

$$\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}x' - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right).\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \tfrac{1}{2}y'\right)^2 = 6$$

Desenvolvendo e simplificando essa última equação, obtemos a equação transformada $3x'^2 - y'^2 = 12$. Logo, o lugar geométrico é uma hipérbole, esboçada na figura 43.

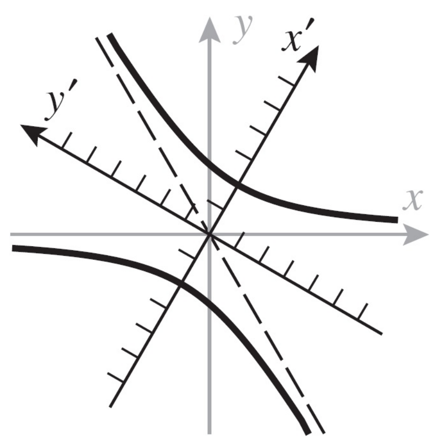

Figura 41 Rotação de eixos da hipérbole

5.3 A equação geral do 2º grau em $\mathbb{R}^2$

De acordo com Anton et al. (2000), a equação da forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

recebe o nome de equação polinomial de segundo grau em x e y. O termo Bxy é chamado termo misto. Se a equação não tiver o termo misto, ou seja, $B=0$, então a equação é do tipo $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ e, neste caso, o gráfico será possivelmente uma secção cônica degenerada que está na posição padrão ou transladada. Agora, se a equação tiver o termo misto, ou seja, $B\neq 0$, o gráfico será possivelmente uma cônica rotacionada de sua orientação-padrão.

Lehmann (1966) afirma que para transformar a equação polinomial do segundo grau que apresenta o coeficiente B diferente de zero, por rotação de eixos, tem-se as seguintes equações de transformação por rotação:

$$x=x'cos\theta-y'sen\theta$$

e

$$y=x'sen\theta+y'cos\theta$$

dadas no Teorema 1. Substituindo na equação polinomial geral do segundo grau tem-se:

$A(x'cos\theta-y'sen\theta)^2+B(x'cos\theta-y'sen\theta)(x'sen\theta+y'cos\theta)+C(x'sen\theta+y'cos\theta)^2+D(x'cos\theta-y'sen\theta)+E(x'sen\theta+y'cos\theta)+F=0.$

Se desenvolver-se e colocar-se os termos comuns em evidência, obtem-se

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0 \tag{2}$$

em que

$A'=Acos^2\theta+Bsen\theta cos\theta+Csen^2\theta,$
$B'=2(C-A)sen\theta cos\theta+B(cos^2\theta-sen^2\theta,$
$C'=Asen^2\theta-Bsen\theta cos\theta+Ccos^2\theta,$

$D' = Dcos\theta + Esen\theta$,
$E' = Ecos\theta - Dsen\theta$,
$F' = F$.

Se na equação (2) desejamos eliminar o termo $x'y'$, o coeficiente de B' deve anular-se. Portanto, devemos ter

$$2(C-A)sen\theta cos\theta + B(cos^2\theta - sen^2\theta) = 0$$

.

Por meio das fórmulas trigonométricas do ângulo duplo, esta última equação pode ser escrita da forma:

$$(C-A)sen^2\theta + Bcos^2\theta = 0 \quad (4)$$

Se $A \neq C$, pela Equação (4) temos $tg^2\theta = \dfrac{B}{A-C}$. Se $A = C$, então pela Equação (4) temos: $Bcos^2\theta = 0$. Como $B \neq 0$, por hipótese, segue que

$$cos^2\theta = 0 \quad (5)$$

O ângulo de rotação θ é restringido ao intervalo $0^o \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, de maneira que o intervalo de variação para 2θ é $0^o \leq 2\theta \leq \pi$. Portanto, da equação (5), temos que $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Lehmann (1966) ainda traz a seguinte definição.

Definição 1: Se um dos coeficientes A' ou C' é igual a zero, a equação (4) representa uma parábola ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm o mesmo sinal, a equação (4) representa uma elipse ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm sinais contrários, a equação (4) representa uma hipérbole ou um dos casos degenerados.

Segundo Ayres Júnior (1973), a equação (2), já transformada é chamada de forma semi-reduzida da equação do 2º grau.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado:

Teorema 2: A equação geral de segundo grau representa uma cônica do tipo parábola, elipse ou hipérbole segundo o indicador $I = B^2 - 4AC$. Se $I = 0$ é uma parábola, se $I < 0$ é uma elipse e se $I > 0$ é uma hipérbole.

Exemplo: Identifique e esboce a curva $xy = 1$

Solução: Comparando com a equação polinomial geral do segundo grau temos $A = 0$, $B = 1$ e $c = 0$.

O ângulo de rotação é obtido por $tg2\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow cot2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{0-0}{1} = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$. Logo as equações de transformação por rotação são:

$$x = x'cos45° - y'sen45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

e

$y = x'sen45° + y'cos45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$

Substituindo na equação $xy = 1$ do exemplo:

$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) . \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$ que é a equação de uma hipérbole com vértices em $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ e $-\left(\sqrt{2}, 0\right)$ no sistema de coordenadas x'y', como ilustra a próxima imagem.

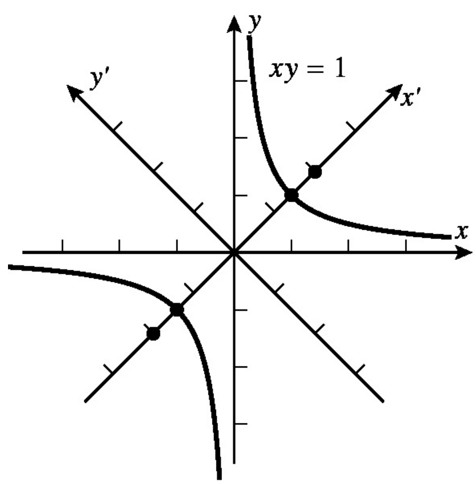

Figura 42 Rotação de eixos da hipérbole

5.4 Rotação de eixos usando a álgebra linear

Para Callioli et al. (1990), as equações canônicas das cônicas têm um aspecto comum para a álgebra, elas são equações de segundo grau em $\mathbb{R}^2$. Mas para que as equações estejam na sua forma canônica é preciso trabalhar com sistemas de eixos ortogonais numa posição favorável em relação às curvas.

> **Definição:** Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, onde A ou B ou $C \neq 0$. Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$, uma forma linear, $L(x,y)=Dx+Ey$, e um termo constante F. Isto é, a equação que define a cônica é: $Q(x,y)+L(x,y)+F=0$(BOLDRINI et al., 1980, p. 306).

O Instituto Gauss de Matemática (2013) apresenta outra definição.

Definição: Se A uma matriz m x n, denominamos de autovalor da matriz A o número real λ, tal que $A.V=\lambda V$, em que $V=(v_1,v_2,...,v_n)^t$ é um vetor não nulo. O vetor V é chamado de autovetor de A.

De acordo com Callioli et al. (1990), devemos analisar a equação geral quadrática em duas variáveis

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \tag{1}$$

e verificar se são cônicas ou não. Fazendo essa análise, verificaremos que sempre serão cônicas ou seus casos degenerados, e as classificaremos de acordo com seus coeficientes. Considerando as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$f(x,y) = 0$ será escrita na forma

$$X^t.A.X + 2[a_1 a_2]X + a = 0 \qquad (2)$$

Como A é simétrica e toda matriz simétria é diagonalizável, é possível obter uma matriz ortogonal P de forma que $P^t.A.P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A.

Ainda segundo Callioli et al. (1990) considerando uma mudança de base determinada por P, sendo a equação $X = P.Y$, onde $Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ é a matriz do vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ na nova base então a equação (2) ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) &= Y^t.(P^t.A.P).Y + 2[a_1 a_2].P.Y + a \\ &= [x_1,y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 2[a_1 a_2].P.Y + a \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + a = 0 \ (3) \end{aligned}$$

Os coeficientes b_1 e b_2 são expressos em função de a_1, a_2 e dos termos de P.

Segundo Waga et al. (2013b), para calcular os autovalores associa dos a uma matriz devemos calcular as raízes do polinômio característico $det[A - \lambda I_n] = 0$, onde I_n é a matriz identidade. Os autovetores assossiados devem ser normalizados.

De acordo com Waga et al. (2013a), o polinômio

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

com coeficientes reais, chama-se forma quadrática no $\mathbb{R}^2$. A matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática. Então $Q(x,y)$ pode ser representado da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
Q(x,y) &= [x \;\; y].\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x' \;\; y'].\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2
\end{aligned}
$$

em que λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz simétrica M.

Para classificar uma cônica segundo Boldriniet al. (1980) dada a sua equação $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, onde A ou B ou $C \neq 0$ devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Escrever a equação na sua forma matricial:

$$[x \;\; y].\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \;\; E].\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2º passo: Diagonalização da forma quadrática para eliminar os termos mistos, encontrando os autovalores e autovetores ortonormais da matriz simetrica M.

3º passo: Devemos obter as novas coordenadas substituindo na equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, em que P é a matriz de autovetores de M.

4º passo: Substituímos a equação por suas novas coordenadas obtendo $[x' \;\; y'].\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [D \;\; E]P.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0$, ou seja, $\lambda_1 x'^2 + \lambda_1 2y'^2 + ax' + by' + F = 0$.

5º passo: Eliminação dos termos lineares, agrupando os termos e completando quadrados. Então tem-se três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + \lambda_2 y'^2 + by' + F = 0$$

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{a^2}{4\lambda_1}+\lambda_2\left(x'+\frac{b}{2\lambda_2}\right)^2-\frac{b^2}{4\lambda_2}+F=0$$

.
Sendo $x''=x'+\dfrac{a}{2\lambda_1}$ e $y''=y'+\dfrac{b}{2\lambda_2}$, tem-se então $\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+f=0$ onde $f=F-\dfrac{a^2}{4\lambda_1}-\dfrac{b^2}{4\lambda_2}$.

ii) $\lambda_1\neq 0$ e $\lambda_2=0$

$$\lambda_1 x'^2+ax'+by'+F=0$$

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{a^2}{4\lambda_1}+by'+F=0$$

. Sendo $x''=x'+\dfrac{a}{2\lambda_1}$ e $y''=y'$ tem-se $\lambda_1 x''^2+by''+f=0$, onde $f=F-\dfrac{a^2}{4\lambda_1}$.

iii)$\lambda_1=0$ e $\lambda_2\neq 0$ (análogo ao anterior).

Exemplo:
Considerando a cônica de equação $3x^2-8xy-12y^2-30x-64y=0$
Calculam-se os autovalores da matriz $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$
A equação característica é $3(3-\lambda)(-12-\lambda)-6=0$
Que nos dá os autovalores 4 e -13 .
Resolvendo os sistemas:

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2=4x_1 \\ -4x_1-12x_2=4x_2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -13x_1 \\ -4x_1 - 12x_2 = -13x_2 \end{cases}$$

Obtemos os autovetores $(-4,0)$ e $(1,4)$ que normalizados formam a base $\left(\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ ortonormal do plano e dão a direção dos eixos coordenados após a rotação.

Em seguida calcula-se $\begin{bmatrix} -30 & -60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{-4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$ que fornece os valores $D' = \frac{56}{\sqrt{17}}$ e $E' = \frac{-286}{\sqrt{17}}$.

Ficando a nova equação assim $4x'^2 - 13y'^2 + \frac{56}{\sqrt{17}}x' - \frac{286}{\sqrt{17}}y' = 0$.

Que resulta, usando o método de completar quadrados, em: $4\left(x' + \frac{7}{\sqrt{17}}\right)^2 - 13\left(y' - \frac{11}{\sqrt{17}}\right)^2 = 81$.

Multiplicando ambos os lados da equação por - 1 e considerando $x'' = x' + \frac{7}{\sqrt{17}}$ e $y'' = y' - \frac{11}{\sqrt{17}}$, a equação da cônica fica: $13y''^2 - 4x''^2 = 81$.

Que é a equação de uma hipérbole.

Ainda para Boldrini et al. (1980) pode-se classificar as cônicas por meio de seus autovalores. Utilizando a equação $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f = 0$ tem-se: se λ_1 e λ_2, os dois autovalores, forem ambos positivos, ter-se-á para $f < 0$ uma elipse, para $f = 0$ um ponto, e para $f > 0$ o conjunto vazio. Se λ_1 e λ_2 forem negativos tem-se uma elipse se $f > 0$, um ponto se $f = 0$ e o conjunto vazio caso $f < 0$. Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos tem-se uma hipérbole se $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$. No caso da equação $\lambda_2 y''^2 + ax'' + f = 0$ tem-se se $a \neq 0$ uma parábola, se $a = 0$ um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio.

6 CONCLUSÃO

Com esse estudo sobre cônicas podemos perceber que a maioria dos livros didáticos traz esse assunto de forma analítica, somente com a utilização de fórmulas. Muitas vezes esse assunto é ignorado pelos professores do Ensino Médio por falta de tempo ou achar que ele é de pouca importância. Só que quando esses alunos vão para um curso de exatas, na qual é tratado o tema "cônica" eles se sentem perdidos por não terem os pré-requisitos necessários.

A abordagem de cônicas do Ensino Médio deve ser feita de uma forma concreta para aumentar o interesse dos alunos.

Esse trabalho contém um histórico e um material para o professor de Ensino Médio planejar suas aulas além de um banco de questões.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se um estudo sobre quádricas.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.et al.Cálculo, um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2, 552 p.

AYRES JÚNIOR, F. Geometria analítica plana e sólida: resumo da teoria, 155 problemas resolvidos, 203 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973. 203 p. (Coleção Schaum, 6).

BOLDRINI, J. L. etal.Álgebra linear. 2.ed. São Paulo: Harper &Row do Brasil, 1980. 315 p.

BORDALLO, M. As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro. 2011. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

BOYER, C. B. História da matemática. 3.ed. São Paulo: Blucher, 2010. 107 p.

CALLIOLI, C. A.etal.Álgebra linear e aplicações. 6.ed. São Paulo: Atual, 1990. 285 p.

CHAGAS, E. M. P. de F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. Millenium - Revista do Instituto Politécnico de Viseu, Viseu, n. 29, jun. 2004. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/default.htm>. Acesso em: 9 fev. 2013.

GIOVANNI, J. R. et al.Matemática completa. 2.ed. São Paulo: FTD, 2005. 134 p. (Coleção Matemática Completa).

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. O ensino de matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 232 p.

INSTITUTO GAUSS DE MATEMÁTICA. Autovalores e autovetores. Disponível em:<http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=247%3Aautovalores-eautovetores&catid=41%3Aconteudosal&Itemid=38>.Acesso em: 16 jan. 2013.

KINDLE, J. H. Geometria analítica plana e no espaço: resumo da teoria, 345 problemas resolvidos, 910 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 118 p. (Coleção Schaum).

LEHMANN, C. H. Geometria analítica. La Habana, 1966. 344 p.

LOPES, J. F. Cônicas e aplicações. 2011.184 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro,2011.

NINA, C. T. D.; PORTANOVA, R. Um currículo de matemática em movimento. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005. 89 p.

QUARANTA, F. Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o ensino de matemática.2008. 310 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

RODRIGUES FILHO, N. Cônicas e suas aplicações em faróis automotivos. Belo Horizonte: UFMG, 2007. 135 p.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. Matemática: Ensino Médio, volume 3. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 133 p.

VENTURI, J.J. Cônicas e quádricas. 5. ed. Curitiba: Unificado, 1949. Disponível em: <http://www.geometriaanalítica.com.br>. Acesso em:7 dez. 2012.

WAGA, C. et al.Álgebra linear II. Disponível em: <http://www.ime.uerj. br/ alglin/ApostilaAlgLinII.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2013a.

WAGA, C. ET. AL..Álgebra linear III. Disponível em: <http://www.ime. uerj.br/ alglin/ApostilaAlgLinIII/Capitulo6_Aut08resumido.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2013b.

YOUSSEF, A. N. et al. Matemática: Ensino Médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005. 345 p.

ANEXO

ANEXO A - BANCO DE QUESTÕES

O banco de questões é composto por atividades que poderão auxiliar os professores na elaboração de suas aulas.

Do Livro Fundamentos de MATEMÁTICA ELEMENTAR, volume 7:

1 - Determinar as equações das seguintes hipérboles:

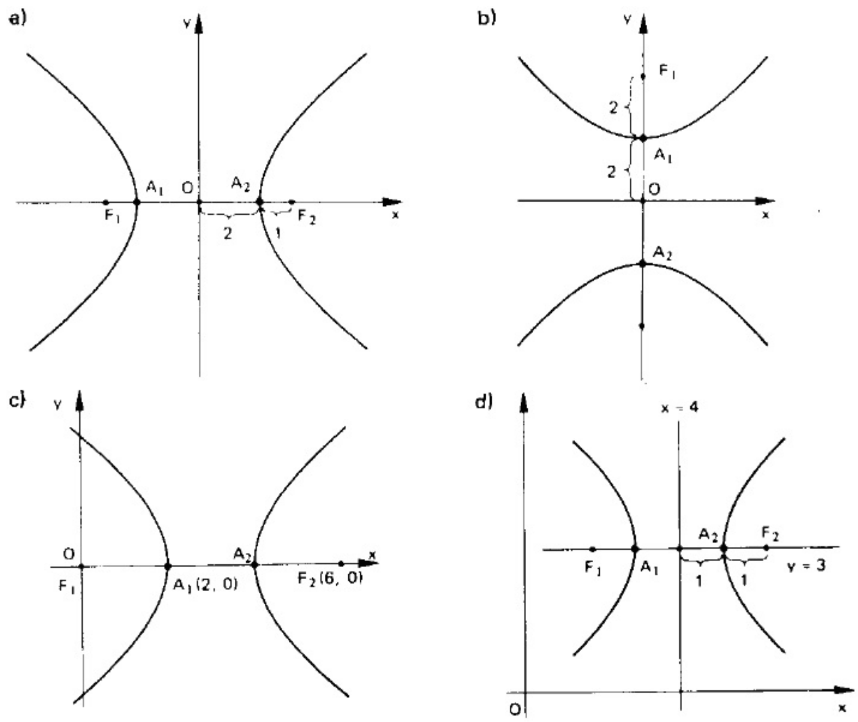

Figura 1 Gráficos de hipérboles

2 - Obter a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

3 - Calcular a excentricidade da hipérbole cuja equação é $9x^2 - 25y^2 = 1$.

4 - Construir os gráficos das cônicas $(\lambda)x^2 - y^2 = 1$ e $(\lambda')y^2 - x^2 = 1$. São coincidentes?

5 - Determinar as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $9y^2 - 16x^2 = 144$.

6 - Obter os focos da cônica cuja equação é $\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

7 - Determinar a equação da hipérbole que tem as seguintes propriedades?

a) seu centro é a origem b) um de seus focos é $F_1\,(0,-2)$ c) um de seus pontos é $P\left(1,\sqrt{3}\right)$

Do livro Matemática: Ensino Médio, vol 3:

1 - Explique por que, na definição de hipérbole, exigimos que $2a < 2c$.

2 - Por que na definição de hipérbole, exigimos a > 0 ? O que ocorreria se a = 0 ? E se a = c ?

3 - Explique o significado da excentricidade $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ na hipérbole.

4 - Uma hipérbole tem centro na origem, focos sobre o eixo x, 8 de eixo real e 6 de eixo imaginário. a) Ache a equação da hipérbole.

b) Quais são as coordenadas dos focos?

c) Esboce o gráfico da hipérbole.

d) Dê a equação das assíntotas.

5 - Obtenha a equação da hipérbole de focos $F_1(2\sqrt{5},0)$ e $F_2(-2\sqrt{5},0)$ e de eixo imaginário de comprimento 4.

6 - Obtenha a equação da hipérbole cujo eixo imag. tem extremos $B_1(1,0)$ e $B_2(-1,0)$ e cuja excentricidade vale $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7 - A partir dos gráficos, obtenha as coordenadas dos focos, a equação das hipérboles e das assíntotas e a excentricidade.

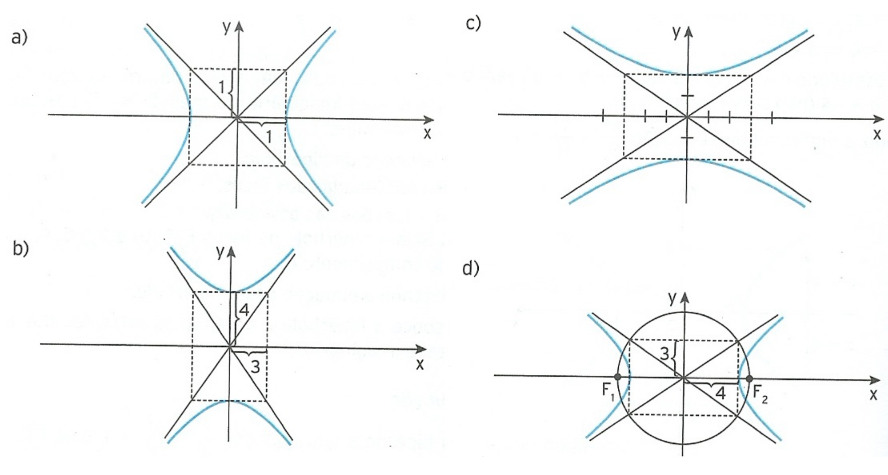

Figura 2 Gráficos de hipérboles

8 - Determine as intersecções da reta de equação $x-\sqrt{3}y=0$ com a hipérbole de excentricidade $\frac{\sqrt{13}}{3}$ e eixo imaginário de extremos (0, 2) e (0, -2).

9 - A hipérbole com semieixos de mesma medida e focos (-2, -2) e F_2 (2, 2) corresponde ao gráfico de uma função. Qual é essa função?

Do livro Matemática: ciências e aplicações:

1 - Determine as equações das hipérboles seguintes:

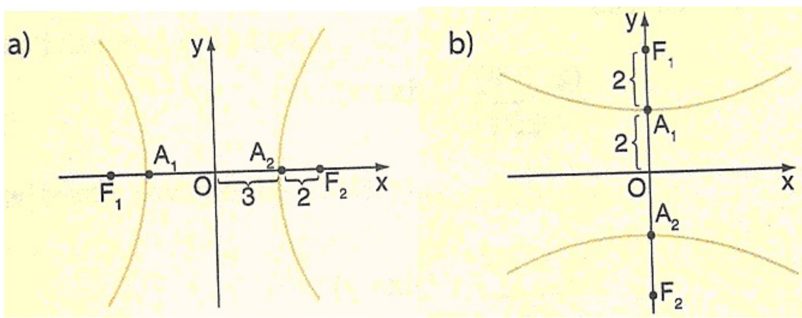

Figura 3 Gráficos de hipérboles

2 - Determine as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior.

3 - Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$.

4 - Calcule a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$.

5 - Construa os gráficos das cônicas $(?)x^2-y^2=1$ e $(?')y^2-x^2=1$. São coincidentes?

6 - Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2-y^2=300$.

7 - Determine as equações das hipérboles abaixo:

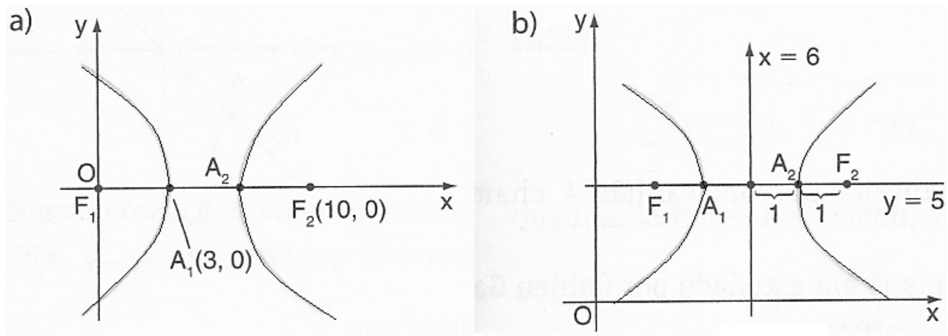

Figura 4 Gráficos de hipérboles

8 - Quais são as coordenadas dos focos de cada hipérbole do exercício anterior?

9 - Obtenha os focos da hipérbole cuja equação é $\frac{(x+1)^2}{13} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

10 - Qual a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{(y-7)^2}{2} - \frac{(x+9)^2}{47} = 1$?

11 - Qual a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y^2}{20} = 1$?

Do livro Matemática Completa:

1 - Determine a equação das hipérboles cujos gráficos são:

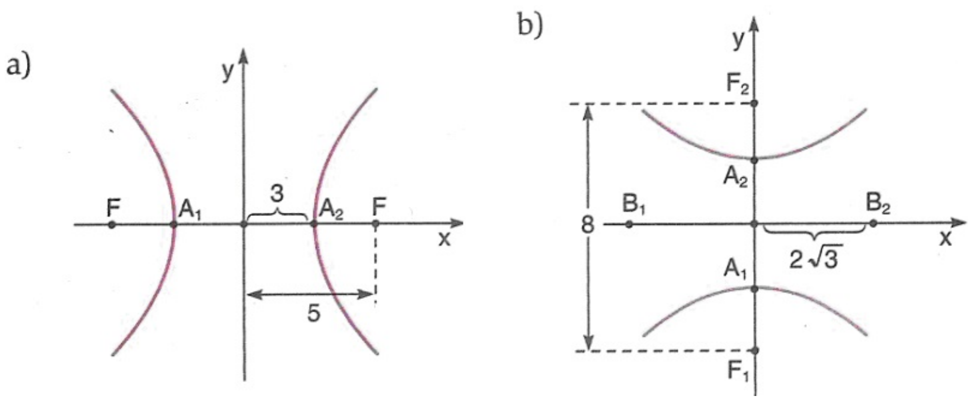

Figura 5 Gráficos de hipérboles

2 - Determine a equação e a excentricidade da hipérbole de focos $F_1(0,-6)$ e $F_2(0,6)$, sabendo que o eixo imaginário tem 8 unidades de comprimento.

3 - Determine a equação de cada uma das seguintes hipérboles com centro na origem e eixo real sobre o eixo y.

a) a medida do eixo transverso igual a 24 e a distância focal 26.

b) distância focal 12 e excentricidade $2\sqrt{2}$.

4 - Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(5,0)$ e $F_2(-5,0)$ e de excentricidade $e = \frac{5}{3}$.

5 - Numa hipérbole, a distância focal é 16 3 q medida do eixo real é 12. Determine a equação da hipérbole, sabendo que os focos pertencem ao eixo das abscissas.

6 - Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(0,4)$ e $F2(0,-4)$ e de vértices $A_1(0,1)$ e $A_2(0,-1)$.

7 - Uma hipérbole tem focos $F1(\sqrt{13},0)$ e $F_2(-\sqrt{13},0)$ e passa pelo ponto P (1, 0). Qual é a equação dessa hipérbole?

8 - Determine as coordenadas dos focos, dos vértices e a excentricidade da hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$.

9 - Determine a equação da hipérbole equilátera, sabendo que seus focos são $F_1(8,0)$ e $F_2(-8,0)$.

10 - Numa hipérbole equilátera, cujos focos pertencem ao eixo das ordenadas, o eixo real tem 8 unidades de comprimento. Determine a equação dessa hipérbole.

11 - Ache as equações das hipérboles equilátera cuja distância focal é igual a 10.

12 - Uma hipérbole tem eixo real sobre o eixo x, passa pelo ponto (4, 6) e suas assíntotas são as retas $y = -\sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$. Calcule a excentricidade dessa hipérbole.

13 - Determine a equação da hipérbole que satisfaz às seguintes condições:

1ª) O eixo transverso é paralelo ao eixo x e o seu centro é o ponto (5, 2).

2ª) 2a = 10 e 2c = 26.

14 - Ache a equação da hipérbole de centro (- 3, 4) e eixo real paralelo ao eixo y, nos seguintes casos:

a) 2a = 20 e 2b = 10

b) 2b = 6 e 2c = 12

15 - Determine a distância focal da hipérbole de equação: $9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0$.

16 - Determine a equação que representa cada uma das seguintes hipérboles.

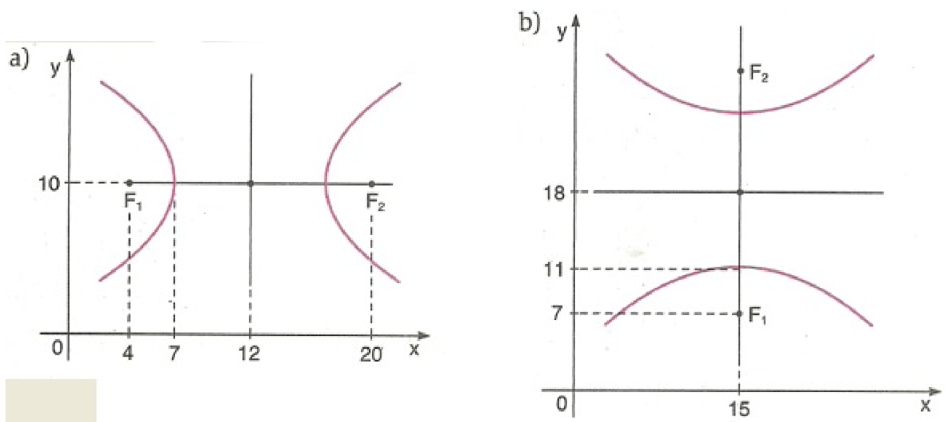

Figura 6 Gráficos de hipérboles

17 - (UFPE) A hipérbole de equação $x^2 - y^2 + 2y = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ se interceptam em 3 pontos não colineares. Determine a área A do triângulo com vértices nestes três pontos e indique A^2.

18 - (UEMA) Considere a reta r de equação $2x - 2ky - 1 = 0$ e a hipérbole H de equação $\frac{(y-1)^2}{2} - x^2 = 1$.

a) Para que valor de k real a reta r é tangente à hipérbole H ?

b) Para que valores de k real a reta r é secante à hipérbole H ?