UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

PEDRO LÁZARO MARTINS ALVES

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS E UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA COM BASE NAS TERNAS PITAGÓRICAS

QUIXADÁ – CEARÁ
2020

PEDRO LÁZARO MARTINS ALVES

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGOAS E UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA COM BASE NAS TERNAS PITAGÓRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Ciências e Letras do Sertão Central _ FECLESC, polo Quixadá como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Álgebra.

Orientadora: Prof. Dr. Ulisses Lima Parente

QUXADÁ – CEARÁ
2020

A643e Apolinário, Fátima Regina Guimarães

Entre muros: educação profissional como estratégia de inserção social para adolescentes em privação de liberdade / Fátima Regina Guimarães Apolinário. — Fortaleza, 2011.

146 p. : il.

Orientadora: Profª. Drª. xxxxxxxx.

Dissertação ou Teses (Mestrado Acadêmico ou Profissional em ..... ou Programa de Pós-Graduação em .... ou Doutorado em.....) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de ....

1. Educação profissional. 2. Inserção social. 3. Políticas públicas. 4. Medicas socioeducativas. I. Universidade Estadual do Ceará, Centro de ..... .

CDD: 377

PEDRO LÁZARO MARTINS ALVES

ALGUMAS DEMONSTRÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGOAS E UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA COM BASE NAS TERNAS PITAGÓRICAS

Dissertação ou Tese apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Letras e Ciências do Sertão Central _ FECLESC, polo Quixadá, como requisito parcial para a obtenção do título Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em: 29 / 12 / 2020 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Lindeval F. Lima

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
Universidade Federal de Roraima – (UFRR)

Ao Deus, altíssimo,
onisciente, onipotente

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força que me deu, por ter me amparado em todos os momentos da minha vida, me ajudando, orientando e incentivando a seguir. A ele meus eternos agradecimentos!

A minha esposa Eliene por cuidar com zelo de nossos filhos e nossa casa em minha ausência durante o tempo em que passei neste curso, se fazendo presente em todos os momentos e vibrando pelo meu sucesso. Obrigada por tudo, amo você!

Aos meus colegas de curso, onde em nossas dificuldades, encontramos apoio em nossa amizade.

Ao meu orientador, professor Dr. Ulisses Lima Parente, pela paciência, atenção e dedicação oferecidas durante a construção deste trabalho. Muito obrigada, pelo amparo em todos os momentos!

Aos professores deste curso, pela ajuda, dedicação e compreensão em nossos momentos de dificuldade, obrigado!

Aos meus filhos William e Apollo, eles são minha inspiração para lutar e ir adiante.

Fé não faz as coisas serem fáceis, mas as tornam totalmente possíveis, creia. (Romanos 5:8)

RESUMO

O teorema de Pitágoras é uma das ferramentas matemáticas mais conhecidas, porém sem profundidade em sua abordagem no ensino básico, ofertando uma bagagem que poderia ser mais robusta, que gerasse mais interesse do educando em absorvê-la. No decorrer deste trabalho, abordaremos alguns conceitos de base para nos apropriarmos melhor das passagens que abordam as demonstrações do Teorema de Pitágoras, um pouco de História da Matemática nos levando para mais perto das raízes deste Teorema, as demonstrações que trazem consigo a versatilidade de poderem ser trabalhadas de formas diferentes demonstrando ter um leque opções para incutir conhecimento ao educando, bem como seu caso particular; as ternas Pitagóricas, na qual nos serão apresentadas suas fórmulas geradoras, passando por uma curiosa relação com a sequência de Fibonacci, e em fim com essas fórmulas geradoras de ternas ofertar propostas pedagógicas onde se possa trabalhar de forma concreta com este conhecimento, entregando para o aluno uma matemática atraente e objetiva.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, ensino básico, educando, demonstrações, Ternas Pitagóricas, atraente.

ABSTRACT

The Pythagorean theorem is one of the best known mathematical tools, but without depth in its approach in basic education, offering a baggage that could be more robust, that would generate more interest from the student in absorbing it. In the course of this work, we will address some basic concepts to better appropriate the passages that address the demonstrations of the Pythagorean Theorem, a little History of Mathematics taking us closer to the roots of this Theorem, the demonstrations that bring with them the versatility of being able to worked in different ways demonstrating having a range of options to instill knowledge in the student, as well as their particular case; the Pythagorean terns, in which we will be presented with their generating formulas, going through a curious relationship with the Fibonacci sequence, and in the end with these formulas generating tenders, offer pedagogical proposals where one can work concretely with this knowledge, delivering to the student attractive and objective math.

Keywords: Pythagorean Theorem, basic education, educating, demonstrations, Pythagorean Suits, attractive.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras é um dos mais conhecidos da humanidade, de grande relevância geométrica, e ferramenta poderosa em muitos assuntos da vida prática. Sua ligação intima com o triângulo retângulo nos traz sempre num de ato de pensamento involuntário recitá-lo: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Se o nosso triângulo retângulo tiver catetos x e y e hipotenusa z, logo “rabiscamos” mentalmente $x^2 + y^2 = z^2$, difícil é não pensar quais números satisfazem essa trinca (x,y,z), e se eles forem inteiros logo temos um terno Pitagórico. E estes são os assuntos que trataremos, o Teorema de Pitágoras, mais especificamente algumas demonstrações, e as ternas pitagóricas, trazendo com elas uma proposta pedagógica.

Apesar de sua importância, essência e beleza, as demonstrações do Teorema de Pitágoras são negligenciadas. Nas aulas de Matemática, e num contexto de conhecimento próprio, na escola pública, fala-se rapidamente o seu enunciado e significado, partindo para a resolução de exercícios, não aproveitando todo o poder que suas demonstrações tem de gerar conhecimento, ocasionado assim uma falta de riqueza em detalhes que são importantes para a apropriação dos alunos, deixando ainda muitos sem compreensão. E quando achamos que o conhecemos por termos decorado alguns resultados, nos deparamos com a demora de encontrar uma trinca de inteiros que o satisfaça e nos contentamos com as trincas já conhecidas e seus múltiplos. E esta é a motivação que impulsionou este trabalho, dar subsídios ao docente e ao discente, no que concerne, Teorema de Pitágoras e suas Ternas Pitagóricas.

Como objetivo geral, este trabalho visa ofertar um material que possa contribuir para jornada dos professores matemática, e como fonte de conhecimento a alunos e interessados em demonstrações do Teorema de Pitágoras e suas Ternas Pitagóricas. De forma mais específica, este trabalho visa através das demonstrações, dar ferramentas para que que professores, alunos ou interessados no assunto, tenham a oportunidade de ver o Teorema de Pitágoras por ângulos diferentes, capacitando o discente a utilizar aquela que é compatível com os seus alunos e se possível fazer com que o aluno participe destas demonstrações. Quanto as Ternas Pitagóricas, dar subsídios aos professores para capacitar o discente a não se limitar aos ternos tradicionais, por exemplo 3,4,5 e seus múltiplos, mas que aprendam a gerar ternos.

O capitulo 1 visa direcionar o leitor aos objetivos desse trabalho, o capitulo 2 traz conteúdos de base para uma melhor apropriação do assuntos tratados no trabalho, o capitulo 3 vem com a biografia de Pitágoras e alguns tópicos de história da matemática envolvendo o Teorema de Pitágoras e as ternas, o capitulo 4 vem com algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, no capitulo 5 trazemos a definição formal das ternas pitagóricas primitivas ou não, munidas de fórmulas geradoras de ternas primitivas, triângulos pitagóricos primitivos e fórmulas para determinar a quantidade destes que podem ser gerados dada a paridade de um cateto. O capitulo 6 temos uma breve biografia do matemático Leonardo de Pisa e uma curiosidade; encontrar Ternas Pitagóricas na sequência de Fibonacci. No capítulo 7, tratamos de 3 propostas pedagógicas com base nas Ternas Pitagóricas, a primeira através de desenho geométrico com utilização de régua e compasso, a segunda incentivando os alunos ao uso das tic`s através do Excel e a terceira, um problema prático que pode ser moldado em sala de aula incentivando os alunos a trabalhar com o “concreto”, através de papelão ou cartolina. O 8º e último capitulo vem com as considerações finais. A metodologia para desenvolver este trabalho desenvolveu-se por intermédio de pesquisas em livros, sites e artigos.

2. CONTEÚDOS DE BASE

2.1 Números Inteiros

Denominamos números inteiros, aqueles que não apresentam partes decimais. Este conjunto numérico é formado pelos números positivos e negativos juntamente com o zero. Em outras palavras, é formado pelo conjunto numérico natural e seus simétricos aditivos. A representação do conjunto numérico dos inteiros ou apenas inteiros é simbolizado pela letra $\mathbb{Z}$, cuja letra é originada da palavra alemã Zahlen que quer dizer números ou algarismo, assim:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

2.2 Os Inteiros e seus Subconjuntos Notáveis

O Conjunto numérico dos Inteiros, possuem alguns subconjuntos notáveis que são:

- ✓ ($\mathbb{Z}^*$) Subconjunto dos inteiros e não nulos.

$$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} ;\ x \neq 0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$$

- ✓ ($\mathbb{Z}_+$) Subconjunto dos inteiros e não negativos.

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- ✓ ($\mathbb{Z}_-$) Subconjunto dos inteiros e não positivos.

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} ;\ x \leq 0\} = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$$

- ✓ (Z_+^*) Subconjunto dos inteiros positivos.

$$Z_+^* = \{x \in \mathbb{Z} ;\ x > 0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- ✓ ($\mathbb{Z}_-^*$) Subconjunto dos inteiros negativos.

$$\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} ;\ x < 0\} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

Podemos dizer que os inteiros positivos formam o conjunto numérico natural cuja representação é a letra $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+^*$).

2.3 **Divisão de Números Inteiros**

Sejam dois inteiros a e b, para dizemos que a divide b ou que a é divisor de b, escrevemos.

$$a|b$$

se existir $q \in \mathbb{Z}$ com $a = qd$. Caso contrário, escrevemos

$$a \nmid b.$$

Veja que, $-3|9$ mas $9 \nmid -3$.

Proposição 2.1 Sejam $a, b, c, \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração: Como $a \mid b$ e $b \mid c$, então existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que que, $b = ak_1$ e $c = bk_2$. Ao substituir, b na equação $c = bk_2$ teremos $c = ak_1k_2$, implicando que $a \mid c$.

■

Exemplo 2.1: Como $3 \mid 12$ e $12 \mid 48$, então $3 \mid 48$.

2.4 Máximo divisor comum (MDC)

Sejam a, b (com a ou b diferente de zero) $\in \mathbb{Z}$, diz-se que $d \in \mathbb{Z}_+$ é o mdc entre a e b e escrevemos $d = (a, b)$, se d é o maior inteiro, que divide a e b.

Ou seja:

$i)$ $d \mid a$ e $d \mid b$, isto é, d é divisor comum de a e b
$ii)$ d é o maior dos divisores comuns, no sentido de que se c é um divisor de a e b então $c \leq d$.

Além disso, valem as seguintes propriedades:
Propriedade 1: $\mathrm{mdc}\,(\mathrm{a}, 1) = 1$
Propriedade 2: se $\mathrm{a} \neq 0$, então $(\mathrm{a}, 0) = |\mathrm{a}|$
Propriedade 3: se $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, então $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = |\mathrm{a}|$.

2.5 Números Primos

Um número inteiro $n(n > 1)$ possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo. Se $n \ > 1$ e n não for primo, dizemos que n é composto.

Proposição 2.2 Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$

Demonstração: Se $p \nmid a$, $(a, p) = 1$, então pela proposição 4.1 item (vi) $p \mid b$. ■

Proposição 2.3 (Teorema fundamental da aritmética) Todo número inteiro $n > 1$ pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos.

Demonstração: Se n é primo não necessita demonstração. Suponhamos que n seja composto. Seja $p_1 > 1$ o menor dos divisores positivos de n. Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois caso contrário existiria p, $1 < p < p_1$ com p|n, contradizendo a escolha de p_1. Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como menor fator de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é primo temos que que $n = p_1 p_2 n_2$.

Repetindo esse procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, n_{3,\ldots},\ n_r$. Como os primos na sequencia $p_1, p_2, \ldots, p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geram a forma:

$$n = \ p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}$$

Para mostrar a unicidade usamos a indução em n. Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Assumimos, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores que n. Provaremos que ela é verdadeira para n. Se n é primo não há o que provar. Vamos supor que n seja composto e que tenha duas fatorações, assim,

$$n = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_r$$

Provaremos que $s = r$ e que cada p_i é igual a um q_j. Como p_1 divide o produto $q_1 q_2 \ldots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Sem perda de generalidade pudemos supor que $p_1 \mid q_1$. Como são ambos primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo n$\mid p_1 = p_2 \ldots p_s = q_2 \ldots q_r$. Como 1<n$\mid p_1 < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, s=r e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 \ldots p_s$ e $q_1 q_2 \ldots q_r$ são iguais. ■

2.6 Geometria Plana

Neste item iremos trabalhar com noções primitivas de ponto reta e plano.

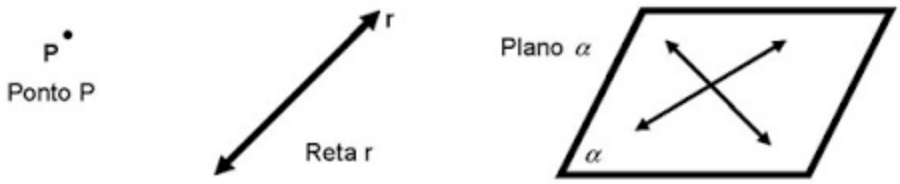
2.6.1 Entes Geométricos

Ponto: Um elemento do espaço que define uma posição, é um objeto que não possui definição, dimensão e forma, o representamos por um pingo e é nomeado por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Reta: É um conjunto de infinitos pontos colineares subsequentes. Ou seja, é uma linha infinita que não se curva. Dois pontos são suficientes para determinar uma reta. Uma reta é nomeada por letras minúsculas do alfabeto.

Plano: Podemos entender o plano pelo enfileiramento de infinitas retas, ou seja, o plano contém infinitas retas e infinitos pontos e, assim, o plano é o conjunto infinito e ilimitado de retas.Três pontos não alinhados são suficientes para determinar um ponto e são nomeados por letra minúsculas do alfabeto grego.

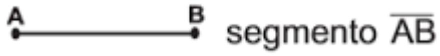
Figura 1. Ponto, reta e plano



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/13486439

Segmento de reta: Parte de uma reta que parte de um ponto determinado e termina em outro ponto determinado. Não se prolonga indefinidamente.

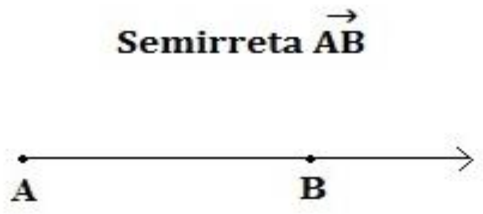
Figura 3. Segmento de reta



Fonte:https://www.canaleducacao.tv/images/slides/37947_e279b8910b9d6d4a8204f2aab885191d.pdf

Semirreta: Segmento que parte de um ponto determinado e se prolonga indefinidamente. Exemplo:

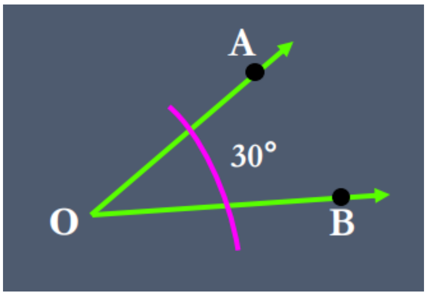
Figura 2. Semirreta



Fonte: https://www.todamateria.com.br/semirreta/

Ângulo: Formado pela união de semirretas com origem comum, ou mesmo por segmentos de retas. É a medida da abertura entre dois segmentos de reta. Desse modo, existe um número que está relacionado com cada abertura entre duas semirretas e, quanto maior a abertura, maior esse número que geralmente é expresso em graus. O ângulo abaixo indica-se como AÔB, e sinal de referência em cima do ponto O indica que esta é a origem do ângulo. Para indicar sua medida fazemos; med (AÔB)= 30º.

Figura 4. Ângulo AÔB



Fonte:https://www.santacecilia.com.br/sites/default/files/aulas-multimidia

2.6.2 Tipos de ângulos

Dizemos que um ângulo é:

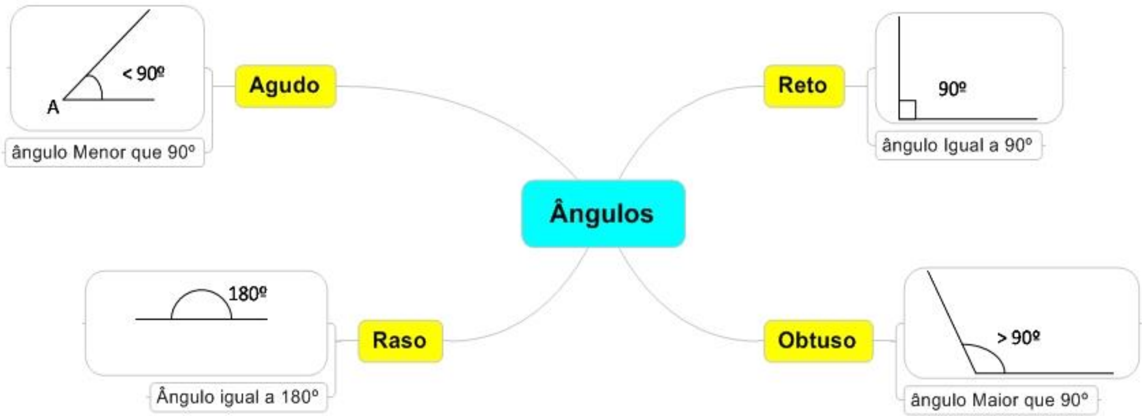
Raso: se, e somente se, é igual a 180º;

Reto: se, e somente se, é igual a 90º;

Agudo: se, e somente se, é maior que 0º e menor que 90º;

Obtuso: se, e somente se, é maior que 90º e menor que 180º.

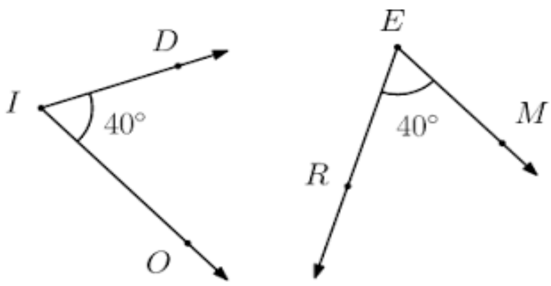
Figura 5. Tipos de ângulos



Fonte: https://virtualescola.wordpress.com/tag/consulta-rapida-matematica-geometria-tipos-de-angulos/

Ângulos congruentes: Dizemos que dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida, observe a figura 6. Não é matematicamente correto dizer que estes ângulos são "iguais", pois os vértices e os lados não são os mesmos.

Figura 6. DÎO≡RÊM



Fonte: https://matika.com.br/angulo/angulos-congruentes

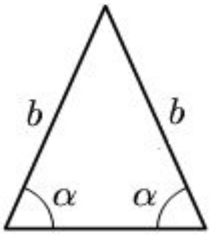
Dizemos que os ângulos DÎO e RÊM, da figura acima, são congruentes e escrevemos DÎO≡RÊM.

2.7 O Triângulo e suas classificações

Triângulo é uma figura formada por três lados e três ângulos, classificam-se quanto aos lados e aos ângulos. Quanto aos lados classificam-se em:

Triângulos isósceles: possui dois lados iguais e um diferente, o lado desigual é chamado de base e pode-se provar que os ângulos da base têm a mesma medida.

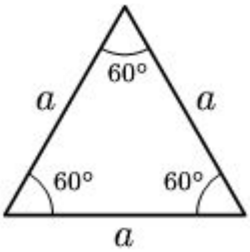
Figura 7. Triângulo isósceles



Fonte: https://www.todamateria.com.br/classificacao-dos-triangulos/

Triângulo equilátero: possui os três lados de mesma medida, assim como os três ângulos.

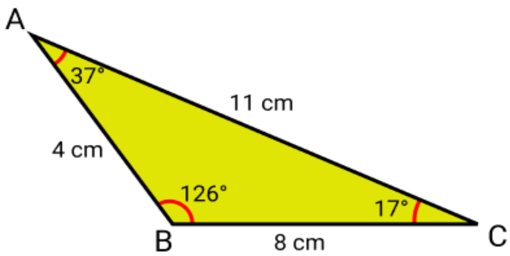
Figura 8. Triângulo Equilátero



Fonte: https://www.todamateria.com.br/classificacao-dos-triangulos/

Triângulo escaleno: possui três lados de medidas diferentes assim como os três ângulos

Figura 9. Triângulo Escaleno

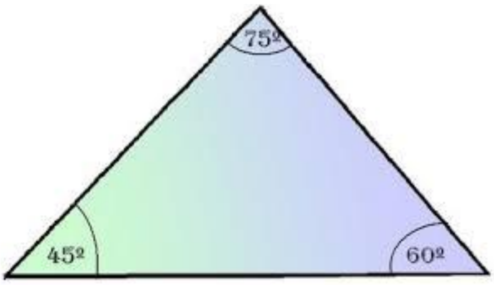


Fonte: https://matematicabasica.net/triangulo-escaleno/

Quanto aos ângulos os triângulos classificam-se em:

Triângulo acutângulo: possui os três ângulos com medida maior que 0° e inferior a 90°.

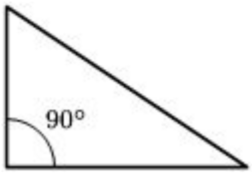
Figura 10. Triângulo Acutângulo



Fonte: https://sites.google.com/site/ale90herag/geometria

Triângulo retângulo: possui um ângulo com medida igual a 90°.

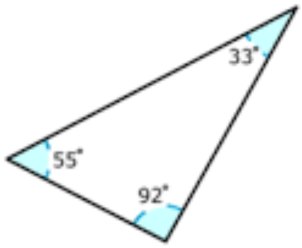
Figura 11. Triângulo retângulo



Fonte: https://www.todamateria.com.br/classificacao-dos-triangulos/

Triângulo obtusângulo: possui um ângulo com medida superior a 90° e menor que 180°.

Figura 12. Triângulo acutângulo



Fonte: https://www.todamateria.com.br/classificacao-dos-triangulos/

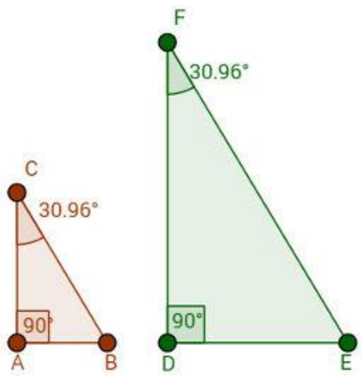
2.8 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se seus ângulos são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais. A correspondência entre os lados é verificada de acordo com os ângulos congruentes dos triângulos.

A semelhança entre triângulos é definida por três casos.

1º caso: Dois triângulos serão ditos semelhantes se possuírem dois ângulos iguais, este critério é chamado A.A (ângulo, ângulo).

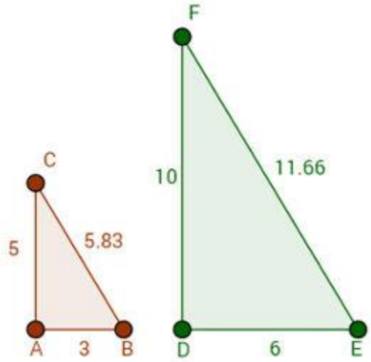
Figura 13. Caso ângulo, ângulo



Fonte:https://brasilescola.uol.com.br/matematica/semelhanca

2º caso: Dois triângulos são ditos semelhantes, se os três lados de um forem proporcionais aos três lados do outro, este critério é chamado L.L.L (lado, lado, lado).

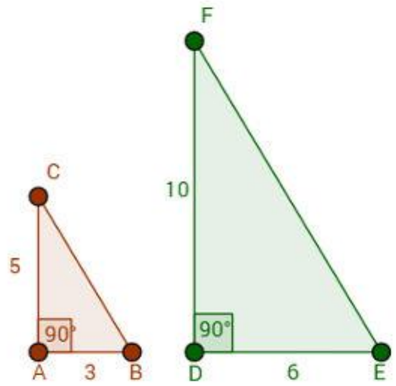
Figura 14. Caso lado, lado, lado



Fonte:https://brasilescola.uol.com.br/matematica/semelhanca

3º caso: Dois triângulos serão ditos semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais, este critério é chamado L.A.L (lado, ângulo, lado).

Figura 15. Caso lado, ângulo, lado



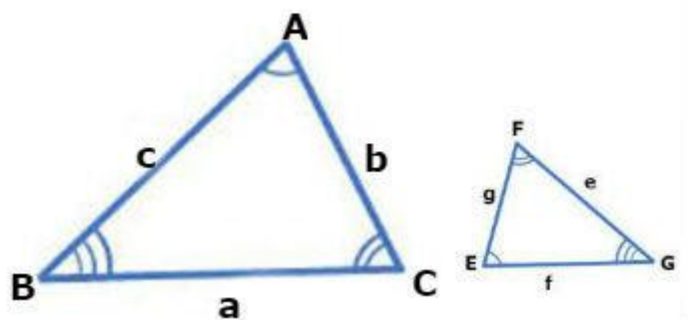
Fonte:https://brasilescola.uol.com.br/matematica/semelhanca

2.8.1 Razão de Semelhança

Quando dizemos que, dois triângulos são semelhantes, estamos a nos referir que possuem os três ângulos ordenadamente congruentes (mesma medida) e os lados correspondentes proporcionais e usamos o símbolo ~ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

Considere os triângulos ABC e EFG semelhantes, em símbolos dizemos $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ representados na figura 16:

Figura 16. Triângulos semelhantes



Fonte:https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos

Observamos através da correspondência entre os ângulos que os lados **a** e **e**, **b** e **g**, **c** e **f** são homólogos, sendo assim, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{b} = \frac{c}{f} = k$$

Chamamos k de razão de semelhança.

Pela figura 13 temos que a razão de semelhança (k), entre os triângulos ABC e DEF, é:

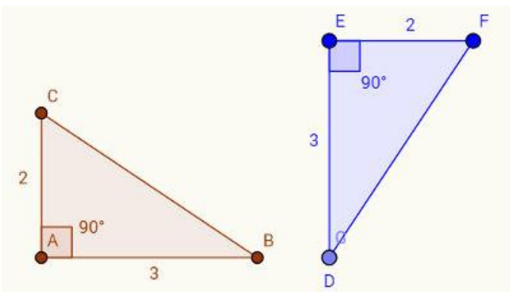
$$k = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{5{,}83}{11{,}66} = \frac{1}{2}$$

2.9 Congruência de triângulos

Triângulos semelhantes não são triângulos iguais. Triângulos são considerados congruentes (iguais), quando coincidem ao serem sobrepostos. Há três casos de congruência.

1º caso: Dois lados congruentes de mesma medida e o ângulo formado por eles também congruentes (L.A.L).

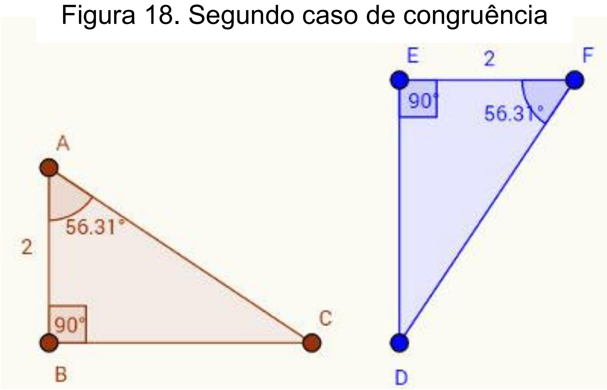
Figura 17. Primeiro caso de congruência



Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/casos-congruencia-

2º caso: Dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente (A.L.A).

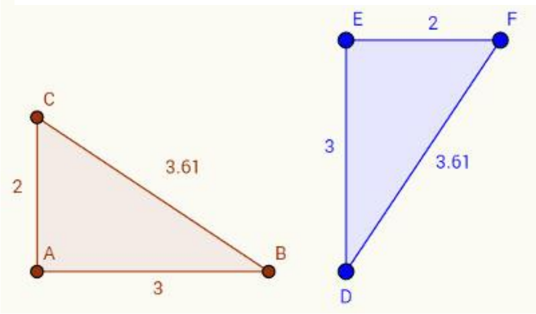
Figura 18. Segundo caso de congruência



Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/casos-congruencia-

3º caso: Os três lados são respectivamente congruentes (L.L.L).

Figura 19. Primeiro caso de congruência

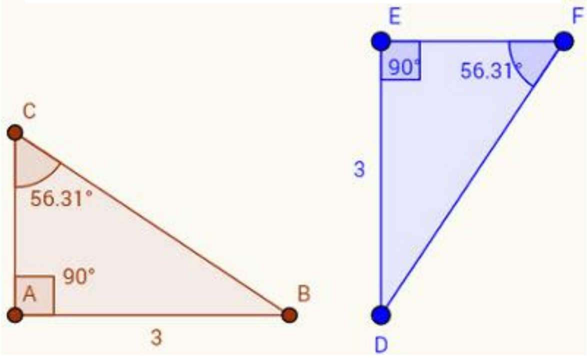


Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/casos-congruencia-

4º caso**:** Lado – Ângulo – Ângulo oposto (LAAo).

Quando dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado congruentes, então esses dois triângulos são congruentes.

Figura 20. Quarto caso de congruência



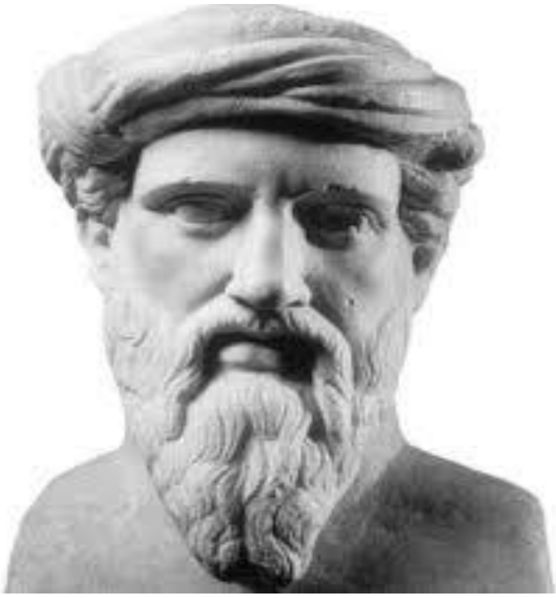
Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/casos-congruencia-

3. BIOGRAFIA DE PITÁGORAS E UM POUCO DE HISTÓRIA

3.1 A Biografia de Pitágoras

Nascido na ilha de Samos, no mar Egeu oriental, por volta de 570 a.C. Tinha como ocupação a Filosofia, Geometria, Religião, Música e outras vertentes. Seu pai Mnesarco, supostamente mercador, teria levado em suas viagens o jovem Pitágoras, que conheceu o Egito, a Grécia, a Fenícia e a Babilônia. Há uma crença de que sua matemática e correntes filosóficas foram absorvidas dessas culturas, e ainda tendo ótimos professores, alguns deles filósofos. Mudou-se para Crotona, uma colônia grega onde hoje é a Itália, onde fundou uma sociedade secreta e ao mesmo tem solidária que ficou conhecida como Escola Pitagórica e seus seguidores foram chamados de pitagóricos, que acreditavam que a base do universo era o número, nessa escola, compartilhavam conhecimento sobre os mais variados ramos, pois tinham bases religiosas, matemáticas e filosóficas.

Figura 21: Pitágoras de Samos



Fonte: https://www.algosobre.com.br/biografias/pitagoras.html

Um dos mais fascinantes teoremas da História, que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo, leva o seu nome, teorema de Pitágoras, em que enuncia que o quadrado catetos a e b, são iguais ao quadrado da hipotenusa c.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

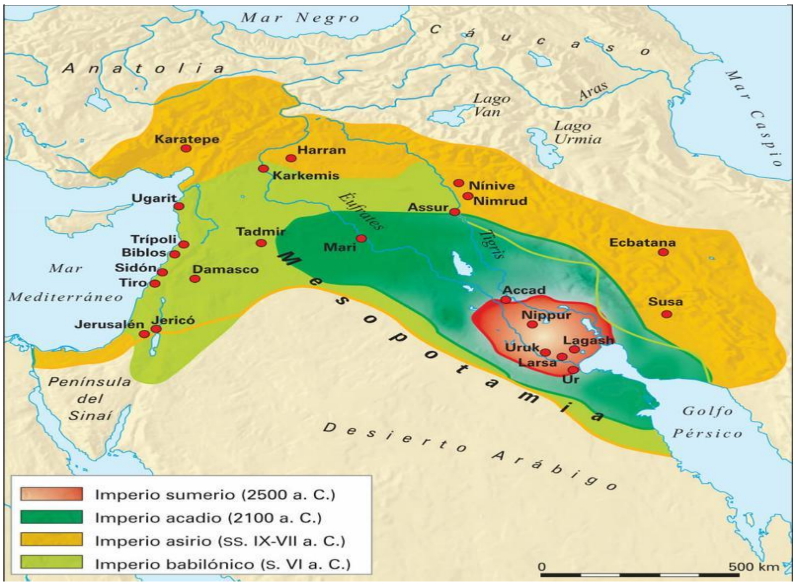
Não temos ideia se ele de fato provou esse teorema, ou um dos seguidores, ou algum matemático escriba sumério ou babilônico. Há evidências de que as ternas pitagóricas eram conhecidas muito antes de Pitágoras.

Segundo Boyer (1974), Pitágoras era tido como profeta, um místico. Por exemplo, os pitagóricos faziam rituais de purificação usando a geometria. Há algumas lendas que dizem que após descobrir o famoso teorema, Pitágoras haveria mandando sacrificar 100 bois, mas talvez isso nos garanta a inveracidade dessas lendas e posteriormente da autoria do teorema de Pitágoras, uma vez que a sociedade pitagórica praticava o vegetarianismo. Provavelmente em 596 a.C, morreu em Metaponto, localizada na região sul da Itália, as margens do golfo de Tarento.

3.2 O Teorema de Pitágoras e as Ternas Pitagóricas no Período Babilônico

O primeiro contato com as Ternas Pitagóricas é por volta das séries finais do ensino fundamental, através do Teorema de Pitágoras. E como a nomenclatura é sugestiva, subtendemos que Pitágoras seria fonte inicial desse Teorema e por consequência das Ternas Pitagóricas, o que nos levaria para o século VI A.c. Achados históricos, tábuas de argila, no antigo território babilônico, hoje o Iraque, demonstram que já se conheciam aspectos do que hoje conhecemos como teorema de Pitágoras 1500 anos antes de seu nascimento.

Figura 22. Região Mesopotâmica nos tempos de Pitágoras



Fonte: https://blogdoenem.com.br/civilizacoes-mesopotamia-parte-1-historia-enem

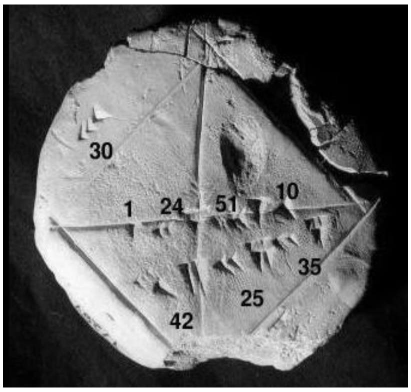
A longo dos séculos, a Arqueologia tem feito descobertas interessantíssimas, e com relação ao Teorema de Pitágoras, sobressem-se a tábua de Yale ou YBC729, conservada na Universidade de Yale e a Plimpton 322 na Universidade de Columbia.

Figura 23. Tábua de Yale

Fonte: http://blog.bachmann.com.br/2019/05/raiz-quadrada-de-dois/

Na tabua de Yale, podemos observar um quadrado dividido por suas diagonais, mas o que caracteriza o Teorema de Pitágoras, é a tradução dos símbolos contidos nela em notação sexagesimal, que era a utilizada pelos babilônicos, para nossa notação decimal. Esses caracteres traduzidos em caracteres modernos estão na figura 24.

Figura 24. Tábua de Yalle com a tradução dos caracteres



Fonte:https://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B4nica

Na diagonal horizontal, os caracteres são expressos como 1; 24, 51, 10 , o ponto e virgula funciona como a separação da parte inteira das decmais e as virgulas separam as posições sexagésimais. Assim para passar para nosso sistema sexagesimal teriamos

$$1;\ 24;\ 51;\ 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1{,}4142... \approx \sqrt{2}$$

Na parte superior aparece o número 30, enquanto que na parte inferior temos 42; 25,35 que traduzidos em decimais nos dão 30 e 42,426389, respectivamente. Observe que o que temos aqui é uma relação do Teorema de Pitágoras, em que a diagonal de um quadrado é dada por $\sqrt{2}$ multiplicado pelo valor do lado. Assim vemos o povo mesopotamico aproximadamente 1600 A.E.C, 1000 anos antes do período Helenistico, tinham um conhecimento empirico do teorema de Pitágoras.

A tabua de Plimpton é um dos achados matemáticos mais importante que geram diverssos estudos até hoje. Datada de 1900 a 1600 A.C, consiste de quatro colunas de numeros e 15 linhas horizontais. Sua elaboração claramente nos leva a conjecturar que os babilônicos tinham um grande interesse nos triângulos retângulos, mais precisamente em um caso particular do Teorema de Pitágoras, as Ternas Pitagóricas, que trata de triângulos retângulos com medidas inteiras.

Figura 25. PLIMPTON 322

Fonte: https://rcristo.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322-um-tablete-de-argila-com-escrita-cuneiforme-babilonica-datado-em-3800-anos/

De acordo com Morey (2009) a PLIMPTON 322 é um fragmento de um tablete, cuja parte esquerda se perdeu. A quarta coluna contém em nossa escrita decimal, números de 1 a 15 e simplesmente representa a ordem das linhas de números, a segunda e a terceira coluna representam o cateto menor (b) e e hipotenusa (h) de triangulo retângulo de lados inteiros, ou seja de um triângulo pitagórico. A primeira coluna o quadrado da divisão da hipotenusa pelo maior cateto.

Como se vê na figura 25, a PLIMPTON 322 esta danificada do lado direito e uma parte ilegível em seu lado esquerdo, em 1945, o matemático Otto Neugebauer e o assiriologista Abraham Sachs conseguem restaurar a tábua e anunciaram que os sessenta numerais inscritos nela eram triplos pitagóricos.

Figura 26. PLIMPTON 322 na base sexagesimal

I	II	III	IV
[1; 59, 0,] 15	1, 59	2,49	1
[1; 56, 56,] 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	[1,20,25]	2
[1;55, 7] 41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1,50,49	3
[1;] 5,[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5, 9, 1	4
[1;] 48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
[1;] 47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
[1;] 43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
[1;] 41, 33, 59, 3, 45	13, 19	20, 49	8
[1;] 38, 33, 36, 36	[8, 1]	12, 49	9
1;35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
1;33,45	45	1, 15	11
1;29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
[1;] 27, 0, 3, 45	7, 12, 1	4, 49	13
1; 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 21	53, 49	14
[1;] 23, 13, 46, 40	56	[1, 46]	15

Fonte: http://ms-matematica.blogspot.com/2015/01/plimpton-322.html

Traduzindo a tabua da PLIMPTON 322, para uma tabela adequada em numeração decimal e acrescentando uma coluna com disposição dos catetos maiores teriamos a tabela abaixo.

Figura 27. PLIMPTON 322 na base decimal com
adição de uma coluna

coluna 4	coluna 2	coluna 3	cateto a	coluna 1
linha	cateto b	hipotenusa c	a = $\sqrt{c^2 - b^2}$	$(c/a)^2$
1	119	169	120	1,983402778
2	3367	4825	3456	1,949158552
3	4601	6649	4800	1,918802127
4	12709	18541	13500	1,886247907
5	65	97	72	1,815007716
6	319	481	360	1,785192901
7	2291	3541	2700	1,719983676
8	799	1249	960	1,692709418
9	481	769	600	1,642669444
10	4961	8161	6480	1,586122566
11	45	75	60	1,5625
12	1679	2929	2400	1,48941684
13	161	289	240	1,450017361
14	1771	3229	2700	1,43023882
15	28	53	45	1,387160494

Fonte: o Autor

Como podemos perceber, aqui temos uma outra evidência que o povo babilônico já tinha conhecimento sobre Ternas Pitagóricas muito antes dos gregos, apesar destes nos entregarem fórmulas e demonstrações, os babilônicos motivados pelo uso prático da Matemática nos deixaram belas infomaçoes.Estudiosos crêem que PLIMPTON 322, tem condições de mudar os rumos da educação matematica, por apresentar ainda muitos mistérios, simplicidade e beleza.

4. DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

A demonstração do teorema de Pitágoras tem sido de grande interesse da comunidade matemática ao longo tempo, muitos matemáticos e estudiosos deixaram suas marcas sobre este assunto, tornando-o tema excelente para discussões em sala de aula. Neste capítulo mostraremos algumas dessas demonstrações, elaboradas de formas diferentes e formando um verdadeiro acervo eclético.

4.1 Enunciando o Teorema de Pitágoras

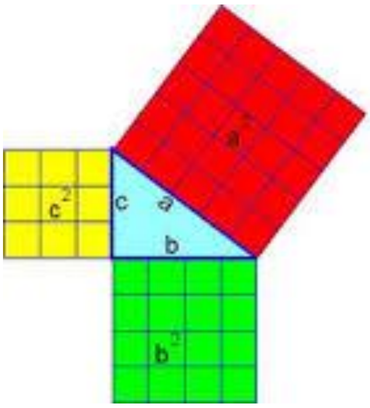
O Teorema de Pitágoras é um dos mais conhecidos e importante relação matemática, um número enorme de demonstrações já foram feitas e continuam sendo feitas. O professor Elisha Scott Loomis, em 1927 publicou o livro the Pythagorean Preposition com 230 demonstrações diferentes, mais tarde em 1940 publicou uma segunda edição com 367 demonstrações. O seu enunciado diz que:

“Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados sobre os catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”.

Sua utilização engloba uma gama de aplicações; no cálculo de perímetros, áreas e volumes de objetos relacionados ao estudo da Geometria. Em Trigonometria é uma ferramenta para o cálculo de distâncias entre pontos no espaço, na Geometria Analítica tem uma enorme aplicabilidade na criação de expressões matemáticas. Em razão da sua importância para os cálculos matemáticos, o professor precisa criar mecanismos eficientes para o ensino desse teorema.

Geometricamente dizemos que a soma das áreas dos quadrados cujos os lados são os catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado cujo lado é a hipotenusa deste triângulo retângulo.

Figura 28. Teorema de Pitágoras



Fonte:https://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/geometria-plana/teorema-de-pitagoras/

Seja a medida da hipotenusa a e b e c as medidas dos catetos então o teorema de Pitágoras afirma que $a^2 = b^2 + c^2$.

4.2 OS Aspectos educacionais das demonstrações

As demonstrações não são tão privilegiadas no ensino básico, más elas possibilitam o aluno a fazer parte de um processo investigativo e estimulante do pensamento estruturado.

O sequenciamento lógico é muito valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Consideram-no essencial para que o aluno desenvolva sua aprendizagem. Lógica e Matemática estão ligadas e não se pode dizer que a demonstração está inserida em um contexto educativo em que não existe encadeamento lógico onde o aluno esteja desenvolvendo a criatividade, a intuição, a capacidade de analisar e criticar, podendo assim interpretar os fatos e os fenômenos. Sem que haja possibilidade de desenvolvimento da capacidade de argumentar dentro de um determinado espaço de conhecimento adquirido por ele no decorrer de sua trajetória escolar a demonstração perde a função formativa. Ela precisa possibilitar que o estudante possa evoluir para a realização de demonstrações formais por iniciativa própria (BRASIL, 1998).

De Villiers (2002) diz que é rotineiro no ensino da Matemática usar uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como uma ferramenta para eliminar dúvidas. Mas faz um alerta de que a demonstração tem outras funções em matemática:

i) **Verificação:** convencer a si próprio e a outros a respeito da verdade de uma afirmação;
ii) **Explicação:** compreender por que uma afirmação tida como verdadeira;
iii) **Descoberta:** de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar alguma hipótese;
iv) **Comunicação:** negociação do significado de objetos matemáticos;
v) **Desafio intelectual:** satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
vi) **Sistematização:** organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Englobando todos esses itens temos que as demonstrações funcionam no despertar do pensamento crítico, na busca por um melhor encadeamento de pensamento através do raciocínio lógico, na apropriação do sentimento de auto confiança e na apropriação de uma comunicação clara.

4.3 Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

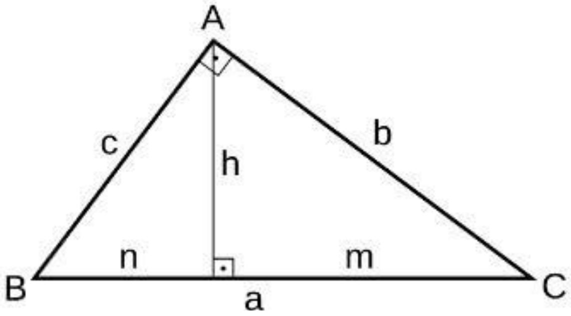
A demonstração do Teorema de Pitágoras tem sido de grande interesse da comunidade matemática ao longo tempo. Muitos matemáticos e estudiosos deixaram suas marcas sobre este assunto, tornando-o tema excelente para discussões em sala de aula. Na sequência mostraremos algumas dessas demonstrações, elaboradas de formas diferentes e formando um verdadeiro acervo eclético.

4.3.1 Demonstração Clássica

É uma das demonstrações mais usadas hoje em dia em sala de aula, seus princípios se baseiam em semelhança de triângulos, por isso se trata de uma poderosa ferramenta de aplicação em sala de aula.

Demonstração: Dado um triângulo retângulo ABC, de altura h relativa à hipotenusa a, com catetos e c e suas projeções m e n respectivamente.

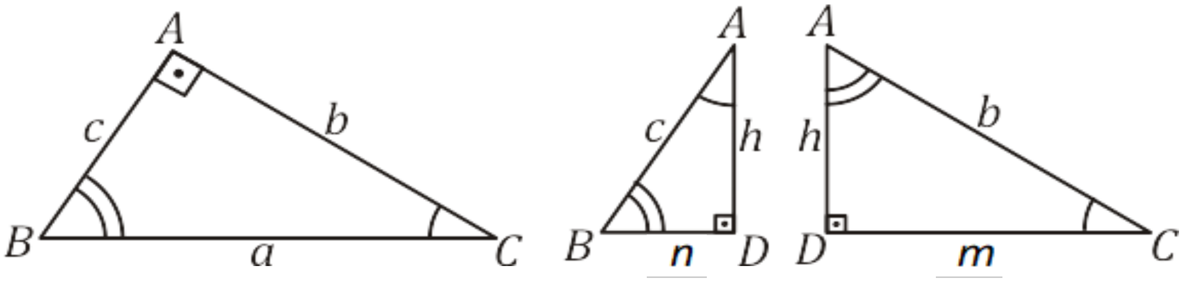
Figura 29. Triângulo retângulo e projeções



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/5 demonstraçoes-do-teorema-de-pitagoras/

Temos 3 triângulos semelhantes pelo caso AA.

Figura 30. Trio de triângulos semelhantes



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/5 demonstraçoes-do-teorema-de-pitagoras/

Desta maneira obtemos Δ ABC ~ Δ DBA ⇔ $\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$, assim temos $c^2 = an$ e Δ ABC ~ Δ DAC ⇔ $\frac{b}{m} = \frac{a}{m}$, logo $b^2 = am$, somando b^2 com c^2 vem que $b^2 + c^2 = am + an = (am + an) = a\,(m + n) = a.a = a^2$. Como queríamos demonstrar.

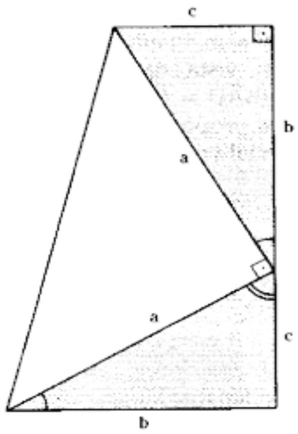
É valido ainda que, o professor ao se utilizar desta demonstração, pode explorar as relações métricas do triângulo retângulo.

4.3.2 A Demonstração de um Presidente

O General James Abram Garfield foi o 20° presidente americano, era um entusiasta da Matemática, não governou por muito tempo (assassinado em 1881 após seis meses e quinze dias na presidência), demonstrou o teorema de Pitágoras por meio de um trapézio. Em 1876, enquanto estava na Câmara de Representantes, rabiscou num papel uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras. O New England Journal of Education publicou esta demonstração.

Observe a figura 30.

Figura 31. Trapézio desenhado por James Abram Garfield



Fonte: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/TCC-REVISADO.pdf

A área do trapézio com bases b, c e altura b + c é igual a soma das áreas de 3 triângulos retângulos; Então

$$\frac{(b+c).(b+c)}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{c.b}{2} + \frac{c.b}{2}$$

$$\frac{b^2+2bc+c^2}{2} = \frac{a^2+2bc}{2}$$

$$b^2+c^2 = a^2$$

4.3.3 Demonstração pela formula de Heron

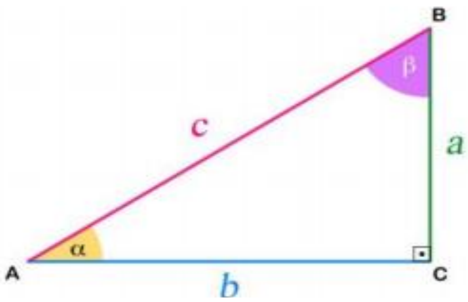
A fórmula de Heron trata-se de uma ferramenta para determinar a área de um triângulo conhecendo-se os lados de um triângulo, sem a necessidade de conhecer sua altura, Heron de Alexandria escreveu a seguinte fórmula:

$$S = \sqrt{p.(p-a).(a-b).(p-c)}$$

Onde a, b e c são os lados do triângulo e p o seu semi perímetro.

Dado um triângulo ABC, de medidas a, b e c então a área deste triângulo deste triângulo será dada por:

Figura 32. triângulo retângulo de lados a, b e c.



Fonte: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/TCC-REVISADO.pdf

$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Tomando p = $p = \frac{a+b+c}{2}$ e substituindo na equação acima teremos

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^{\,2} + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} \qquad \text{(I)}$$

Veja que a área também se dá pela expressão:

$$s = \frac{a.b}{2} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II)

$$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^{\,2} + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{a.b}{2}$$

$$2a^2b^{\,2} + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4b^2a^2$$

$$2a^2c^{\,2} + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 2b^2a$$

Simplificando a expressão teremos:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

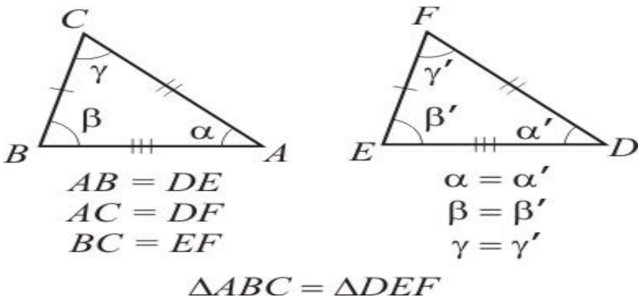
4.3.4 A demonstração de Euclides

Euclides (300 a.C.) foi um professor, matemático platônico e escritor possivelmente grego, tido por muitos historiadores como o "Pai da Geometria". Sua principal obra, foi Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas, geometria esférica e teoria dos números.

A obra Os Elementos foi uma das mais influentes de todos os tempos, estava dividida 13 livros, a proposição 47 do Livro I dos Elementos trata da demonstração do Teorema da Hipotenusa, que conhecemos como Teorema de Pitágoras. Ele baseou essa demonstração em duas preposições contidas em seu livro.

I) **Preposição I-4:** Se dois triângulos possuem dois lados iguais dois a dois, respectivamente, e se o ângulo contido por estes dois lados forem iguais, então eles também têm suas bases iguais. Consequentemente os triângulos serão iguais e os ângulos restantes também serão.

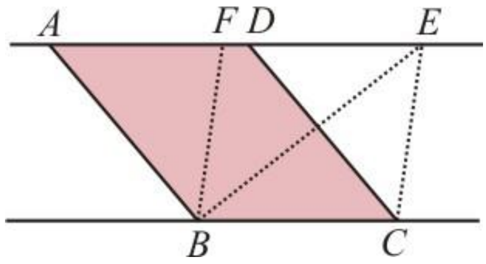
Figura 33. Triângulos congruentes



Fonte:https://www.obaricentrodamente.com/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.

II) **Proposição I−41:** Se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo e estes estão na mesma paralela, então o paralelogramo é o dobro do triângulo.

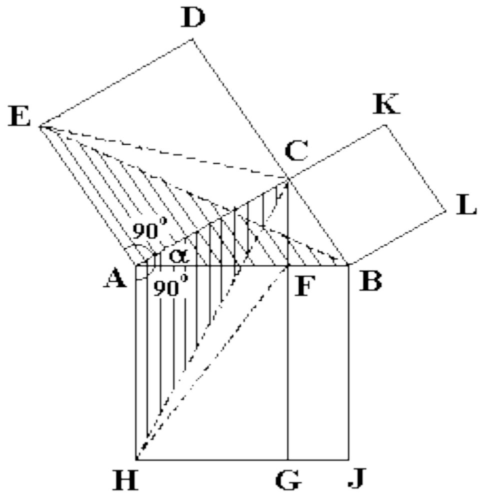
Figura 34. Δ EBC com base no paralelogramo ABCD.



Fonte:https://www.obaricentrodamente.com/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.

Dado ΔABC, retângulo em C, construamos quadrados sobre seus lados, de modo que cada quadrado tenha os lados iguais aos lados do triângulo a que são sobre postos, tracemos uma reta $CG//AB//BJ$.

Figura 35. Triângulo retângulo com quadrados sobrepostos a seus lados.



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/euclides.htm

Façamos um segmento EB, observe que o $\Delta\, EAB\ = \frac{1}{2}\, ACDE$, pois está contido entre as paralelas EA e CB e sua base é a base do quadrado $EACD$.

Tracemos uma reta HC e vejamos que o $\Delta CAH\ = \frac{1}{2} AHGF$, pois está contido entre as paralelas AH e CG e sua base é base do retângulo $AHGF$.

Temos que $\Delta EAB = \Delta CAH$, desta forma $\frac{1}{2}\,ACDE = \frac{1}{2}\,AHGF$, portanto $ACDE = AHGF$. Com isto o Teorema de Pitágoras é facilmente demonstrável, pois temos

ACDE = AHGF e BCKL = BFGJ,

o que dá

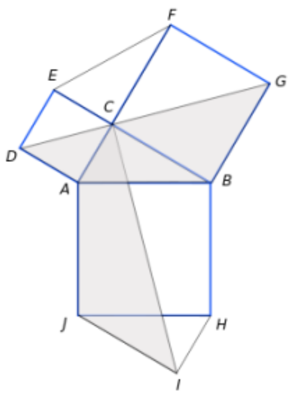
ACDE + BCKL = AHJB.

4.3.5 Demonstração de Leonardo Da Vinci

Nascido na Itália em 15 de abril de 1452, o pintor e escultor Leonardo da Vinci, com certeza foi um dos grandes gênios da humanidade, criador do célebre quadro a Monalisa, também deu sua contribuição no que concerne o Teorema de Pitágoras.

Segundo Lima (2006) Da Vinci se baseou no princípio de comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos.

Figura 36. Hexágonos utilizados por Da Vince



Fonte:https://docplayer.com.br/29832715-O-teorema-de pitagoras-demonstracoes-e-aplicacoes.html

Dessa forma temos os quadriláteros $DEFG$, $ABGD$, $ACIJ$ e $CBHI$ congruentes entre si pois, $DE = DA = CA = HI, EF = AB = AJ = BH$, $FG = GB = CB = IJ \; e \; GD = CI$. Logo os hexágonos $BGFEDA$ e $CAJIHB$ têm a mesma área. Daí resultará que a área do quadrado $BAJH$ é a soma das áreas dos quadrados $ACED$ e $BCFG$. De fato, pois;

Sejam $A1 = área\ (BGFEDA)$ e $A2 = área\ (CAJIHB)$.

Como,

$$A1 = área\ (ABC) + área\ (ACED) + área\ (CBFG) + área\ (CEF)$$

$$A2 = área\ (HIJ) + área\ (ABHJ) + área\ (ABC),$$

$$área\ (ABC) \equiv área\ (HJI) = área\ (ECF)\ e\ A1 = A2,$$

segue que

$$área(ABC) + área(ACDE) + área(ECF) + área(CBFG) = área(HIJ) + área(ABHJ) + área(ABC),$$

$$área(ABC) + área(ACDE) + área(ABC) + área(CBFG) = área(ABC) + área(ABHJ) + área(ABC);$$

por tanto:

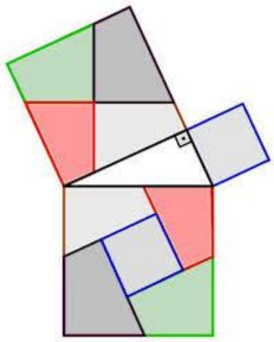
$$área(ACDE) + área(CBFG) = área(ABHJ).$$

4.3.6 Demonstração de Perigal

Henry Perigal (1801-1898), foi corretor na bolsa de valores de Londres, membro da London Mathematical Society de 1868 a 1897 e tesoureiro da Royal Meteorological Society por 45 anos.

Publicou um livreto *Geometric Dissections and Transpositions*,no qual propôs uma demonstração do Teorema de Pitágoras através da dissecação de dois quadrados menores cujas peças formam um quadrado maior.

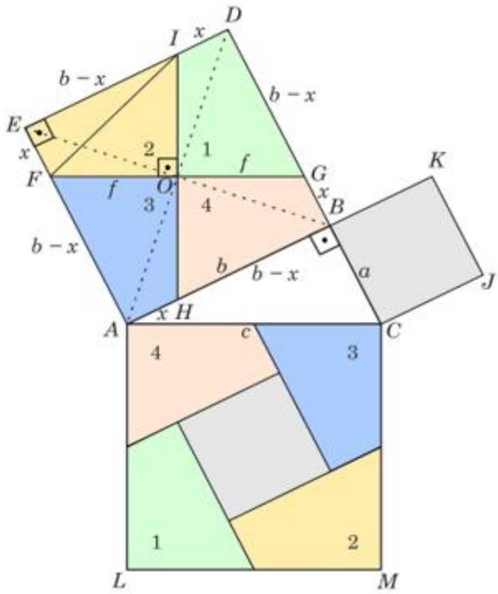
Figura 37. Dissecação de Perigal



Fonte: http://professord1360.blogspot.com/p/artigos.html

Essa demonstração é, com certeza, uma das melhores a se trabalhar em sala de aula, pela sua simplicidade. Constroem-se quadrados sobre sobe os lados de um triângulo retângulo. No quadrado sobre o cateto maior, desenha-se uma reta paralela à hipotenusa e passando pelo centro do mesmo uma reta perpendicular à reta paralela criada, formando assim quatro polígonos congruentes que junto ao quadrado menor cabem no quadrado maior.

Figura 38. Demonstração de Perigal



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/

Seja o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa AC = c e catetos AB = b e AC = a. Construamos um quadrado ABDE sobre o maior cateto, AB. Em seguida, traçamos as diagonais do quadrado AD e BE que determinam o centro do quadrado a partir de sua interseção.

Traçamos o segmento FG, que passa por O e é paralelo à hipotenusa c, e traçando o segmento IH que também passa por O e é perpendicular a FG, assim dividimos o quadrado ABDE em quatro quadriláteros congruentes. Isto pode ser verificado via congruência de triângulos: basta dividir cada um dos quatro quadriláteros em dois triângulos e usando semelhança a partir de seus ângulos e lados, obteremos a congruência de cada um dos quadriláteros.

Temos então que EF = DI= BG = AH = x e como AB = AE = b temos que BH = b – x.

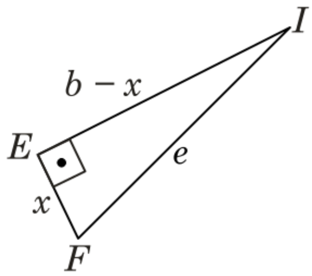
Observe ainda que ACGF é um paralelogramo, pois construímos seus lados sendo opostos e paralelos. Com isso, obtemos que:

$$a + x = b - x$$

$$a = b - 2x$$

Agora vamos analisar o triângulo EFI, com tatetos de medida x, b-x e hipotenusa e:

Figura 39. Δ retângulo EFI



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/

Temos que:

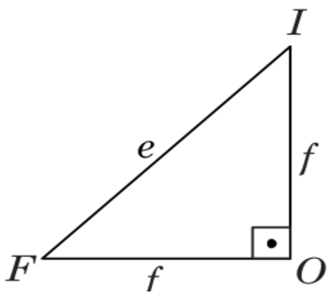
$$e^2 = x^2 + (b - x)^2$$

$$e^2 = x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$e^2 = 2x^2 - 2bx + b^2$$

Veja que **e** também é hipotenusa do triângulo a seguir:

Figura 40. Δ retângulo FOI



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/5-demonstracoes-do-teorema-de-pitagoras/

fazendo o mesmo, obtemos que:

$$e^2 = f^2 + f^2$$

$$2x^2 - 2bx + b^2 = 2f^2$$

$$f^2 = \frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2}$$

$$f = \sqrt{\frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2}}$$

Como a hipotenusa c do triângulo ABC é um dos lados do paralelogramo ACGF temos que c = 2f, isto é:

$$c = 2\sqrt{\frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2}}$$

$$c = \sqrt{4x^2 - 4bx + 2b^2}$$

Agora veja que:

$$c^2 = 4x^2 - 4bx + 2b^2$$

e

$$a^2 + b^2 = (b - 2x)^2 + b^2 = 4x^2 - 4bx + 2b^2$$

Logo, temos que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

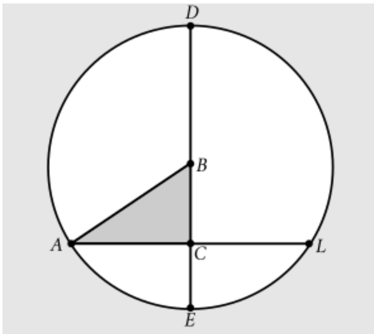
como queríamos demonstrar.

4.3.7 Demonstração pelo teorema das cordas

O teorema das cordas nos diz que se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência se interceptam num ponto P interior à circunferência, então $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$

Seja um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa AB, nele construamos uma circunferência de centro em B e raio AB. Prolonguemos os catetos BC e AC de modo se tornem duas cordas da circunferência AL e DE respectivamente. Pelo Teorema das Cordas, segue que:

Figura 41. Circunferência de raio AB



Fonte: http://obaricentrodamente.com.br

$$AC.CL = DC.CE\ (i)$$

mas veja que:

$$AC = CL$$

$$DC = BE - BC = AB - BC$$

$$CE = BE - BC = AB - BC$$

substituindo as três últimas expressões em (i), obtemos:

$$AC^2 = (AB + BC).(AB - BC) = AB^2 - BC^2$$

Logo,

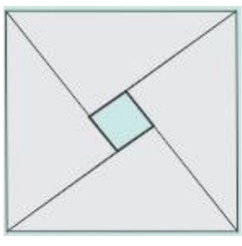
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

como queríamos demonstrar.

4.3.8 Demonstração de Bhaskara

Para Bhaskara esta demostração era tão simples, que considerava que qualquer pessoa somente em olhar para o quadrado da figura abaixo, imediatamente comtemplaria a demosntração do teorema de Pitagoras. Tanto que em sua demonstração simplismente escreveu: contemple!

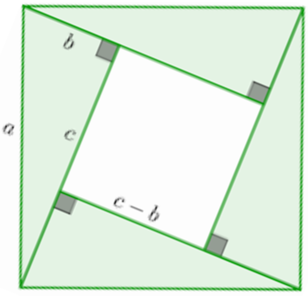
Figura 42. Contemplem



Fonte: http://obaricentrodamente.com.br

Observe que dados quatro triângulos retângulos de catetos b e c e hipotenusa a, e organizando suas hipotenusas sobre um quadrado de lado a, teremos no centro da figura um quadrado menor de lado c -b.

Figura 43. Quadrado de Bháskaras



Fonte: http://obaricentrodamente.com.br

Desta forma a área do quadrado de lado **a** é:

$$a^2 = \frac{b.c}{2}.4 + (c-b)^2$$

$$a^2 = 2bc + c^2 - 2bc + b^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como queríamos demonstrar.

4.3.9 A Reciprocidade do Teorema de Pitágoras

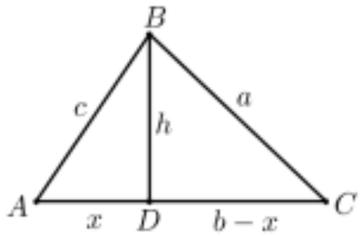
Até aqui vimos que, dado um triângulo retângulo então a soma dos quadrados sobre os catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Mostremos que sua reciproca será verdadeira, ou seja, se se o quadrado de um lado de um triângulo é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, então, esse triângulo é retângulo.

Dividiremos essa demonstração em dois casos.

1º Caso: Â < 90°.

Seja c ≤ b e um ponto D, projeção de B sobre AC, cai no interior do lado AC. Sejam AD = x e BD = h.

Figura 44. Δ ABC



Fonte: http://obaricentrodamente.com.br

Como o triângulo ADB é retângulo, temos que

$$c^2 = h^2 + x^2 \;=>\; h^2 = c^2 - x^2$$

Como o triângulo BDC é retângulo, tem-se que

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

Já que $h^2 = c^2 - x^2$, então:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$$

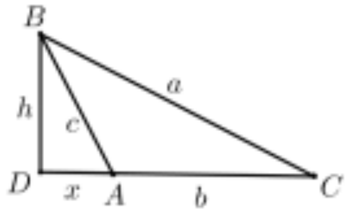
Assim, vem que

$$a^2 < c^2 + b^2$$

2º Caso: A > 90°.

Agora o ponto D cai fora do lado AC.

Figura 45. Δ DBC



Fonte: http://obaricentrodamente.com.br

Como o triângulo DAB é retângulo, tem-se que:

$$\mathrm{c}^2 = \mathrm{h}^2 + \mathrm{x}^2 \;=>\; \mathrm{h}^2 = \mathrm{c}^2 - \mathrm{x}^2$$

Como o triângulo BCD também é retângulo, conclui-se que

$$a^2 = h^2 + (x + b)^2$$

$$a^2 = h^2 + x^2 + 2.b.x + b^2$$

Já que $\mathrm{h}^2 = c^2 - \mathrm{x}^2$, logo

$$a^2 = c^2 - x^2 + x^2 + 2.b.x + b^2$$

$$a^2 = c^2 + 2bx + b^2$$

Assim, vem que

$$a^2 > c^2 + b^2$$

Desta forma se Â < 90°, então $a^2 > c^2 + b^2$, se Â > 90°, então $a^2 > c^2 + b^2$, logo se Â = 90°, então $a^2 = b^2 + c^2$. Como queríamos demonstrar.

5 AS TERNAS PITAGÓRICAS

Ternas Pitagóricas é a denominação que damos a uma trinca (a, b, c), onde a e b são os catetos e c a hipotenusa de um triângulo retângulo e suas medidas pertencem ao conjunto dos números inteiros positivos .

5.1 Definição de Ternas Pitagóricas

Sejam $a, b\ e\ c \in Z_+^*$, denominamos o terno ordenado (a, b, c) uma terna pitagórica se

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Se $mdc(a, b, c) = 1$, dizemos que o terno ordenado (a, b, c) é uma terna pitagórica primitiva.

Exemplo 5.1 As ternas $(3,4,5)\ e\ (5, 12,13)$ são pitagóricas.

Veja que $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $5^2 + 12^2 = 13^2$

Proposição 5.1 Seja um certo $K \geq 1$ e (a, b, c) uma terna pitagórica, então, (ak, bk, ck) também será uma terna pitagórica.

Demonstração Dado ak tomando o lugar a e bk tomando o lugar b teremos

$$(ak)^2 + (bk)^2 = a^2k^2 + b^2k^2 = (a^2 + b^2)k^2$$

, como (a, b, c) é uma terna pitagórica então $a^2 + b^2 = c^2$, logo

$$(ak)^2 + (bk)^2 = a^2k^2 + b^2k^2 = (a^2 + b^2)k^2 = c^2k^2 \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.2 Seja k=4, dada a terna pitagórica (3,4,5) a terna (3.4, 4.4, 5.4) também é pitagórica, pois

$$(3.4)^2 + (4.4)^2 = (5.4)^2$$

$$12^2 + 16^2 = 20^2$$

$$144 + 256 = 400$$

Proposição 5.2 Seja (a, b, c) uma terna pitagórica qualquer e $d = mdc(a, b, c)$, se tomarmos $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_2 = \frac{b}{c}$ e $c_2 = \frac{c}{d}$; obteremos uma terna pitagórica primitiva (a_2, b_2, c_2).

Demonstração Como $d = mdc(a, b, c)$, temos que

$$mdc(a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b, c) = 1$$

. De fato, podemos dividir $a^2 + b^2 = c^2$ por d^2 que ainda obteremos uma terna pitagórica, pois,

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2 + b^2}{d^2} = \frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = a_2^2 + b_2^2 = c_2^2 \quad ■$$

.

Proposição 5.3 Dada uma terna pitagórica primitiva (a, b, c), então $mdc(a, b) = mdc(b, c) = mdc(a, c) = 1$, ou seja, seus termos são primos dois a dois.

Demonstração: Se $d = mdc(a, b)$, logo $d \mid a^2$ e $d \mid b^2$, assim $d \mid a^2 + b^2 = c^2$, portanto $d \mid c$, ora $(a, b, c) = 1$ e por se tratar de uma terna primitiva $d = 1$. Da mesma forma mostramos $mdc(b, c) = mdc(a, c)$.

Teorema 5.1 Seja (a, b, c) uma terna pitagórica primitiva. Então a e b tem paridades distintas e c é ímpar.

Demonstração Sabendo que (a, b, c) é uma terna primitiva, então a e b não podem ser ambos pares pois $mdc(a, b) = 1$, e nem ambos impares pois se $a = 2k + 1$ e $b = 2q + 1$,com k e q naturais, então

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + q^2 + q) + 2$$

, assim $c^2 = 4t + 2$, com $t \in N$. Observe que $2 \mid c^2$ e como 2 é primo então $2 \mid c \Leftrightarrow 4 \mid c^2$, absurdo. Assim se a é par b e c são ímpares.

Proposição 5.4 Sejam os números naturais m, n e c com $mn = c^2$ e $mdc(m, n) = 1$. Então existem números M e N naturais tais que, $m = M^2$ e $n = N^2$.

Demonstração Sejam as fatorações de m e n números primos como

$$m = p_1^{\beta_1} . p_2^{\beta_2} \ldots$$

e

$$n = q_1^{\omega_1} . p_2^{\omega_2} \ldots$$

Como $mdc(m, n) = 1$, então os números $p_i^{\beta_i}$ são diferentes dos número $q_i^{\omega_i}$. Assim

$$m.n = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2} \dots q_1^{\omega_1}.q_2^{\omega_2} \dots.$$

Ora tendo $m.n = c^2$, todos os expoentes da decomposição de $m.n$ e primos, são pares assim $m = M^2$ e $n = N^2$.

5.2 Fórmulas de obtenção das Ternas Pitagóricas e Propriedades

Teorema 5.2 Todas as ternas pitagóricas da equação $a^2 + b^2 = c^2$ são primitivas, se e somente são da forma, $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, onde $mdc(m,n) = 1$, com m e $n \in N$, $n < m$ e com paridades distintas.

Demonstração

⇒ Sejam a, b e c naturais diferentes de zero, componentes de uma terna pitagórica primitiva, então temos que

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b).(c-b)$$

como, b e c são impares, então $(c+b)$ e $(c-b)$ são pares e já que o $mdc(b,c) = 1$, logo o $mdc(b+c,c) = 1$, ainda vem que $b+c$ é par, logo, $mdc(2c, b+c) = 2$ e assim temos que $mdc(c-b, c+b) = 2$, logo $mdc\left(\frac{c-b}{2}, \frac{c+b}{2}\right) = 1$, veja que $(c+b).(c-b)$ é um quadrado, então de acordo com a **Proposição 5.4** $\frac{c-b}{2}$ e $\frac{c+b}{2}$ são quadrados de números naturais.

Assim se tomarmos m e $n \in N$, podemos escrever

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2, a = 2mn \quad e\ mdc(m,n) = 1$$

Das expressões acima ainda obtemos

$$a = 2mn, \qquad b = m^2 - n^2 \ e\ c = m^2 + n^2$$

⇐ Observe $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ é uma terna pitagórica pois

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

Como m e n tem paridades distintas, basta mostrar $mdc(b,c) = 1$, pois teremos a par e os termos b e c. Como $mdc(m,n) = 1$, então $mdc(\ m^2, m^2 + n^2) = 1$, desta forma

$$mdc(b, c) = mdc(m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

$$= mdc(m^2 + n^2, 2m^2)$$

$$= mdc(m^2 + n^2, 2)$$

Observe que $m^2 + n^2$ é ímpar, assim

$$mdc(b, c) = mdc(m^2 + n^2, 2) = 1$$

Proposição 5.5 Existem infinitas ternas pitagóricas

Demonstração Dadas as ternas da forma $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$, seja $n = 1$ e $m = 2k$ e k primo, então $a = 4k$, desta maneira a somente possui dois divisores primos, a saber, 2 e K. Teremos também que b= $4k^2$-1 e c=$4k^2$+1, observe que 2∤ b e 2∤b, além disso k∤b e k∤c. Assim a, b e c são relativamente entre si. Como existem infinitos k primos a assim existem infinitas ternas da pitagórica na forma $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.

Exemplo 5.3 Encontre todas as ternas pitagóricas (a, b, c), onde a^2, b^2 e c^2 estão em progressão aritmética.

Como a^2, b^2 e c^2 estão em progressão aritmética, então

$$a^2 + c^2 = 2b^2 \qquad (i)$$

, o que implica que a e c tem a mesma paridade, assim podemos dizer que existem u e v ϵ Z_+^*, tal que,

$$u = \frac{(a + c)}{2} \; e \; v = \frac{(a - c)}{2}$$

, desta forma

$$a = u + v \; e \; c = u - v.$$

E substituindo em (i) vem que,

$$2b^2 = (u + v)^2 + \; (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2$$

Logo

$$b^2 = u^2 + v^2$$

Assim (u, v, b) é uma terna pitagórica tal que

$$(u, v, b) = (2mnk, (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k)$$

, portanto

$$(a, b, c) = (2mnk + (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k, 2mnk + (m^2 - n^2)k)$$

Com $n \leq m$, $m + n$ impar e $k \in N$.

Proposição 5.6 Mostre que em uma terna pitagórica primitiva (a, b, c) ao menos um número é múltiplo de 5.

Demonstração Toda terna pitagórica primitiva pode ser escrita na forma

$$(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

, logo se m ou n for, então $a = 10n \; ou \; 10m$, ou seja, a será um múltiplo de 5.

Mas se m e n não forem múltiplos de 5, então m ou n ao quadrado só podem ser congruentes a 1 ou a $4 \; mod5$, pois.

$$1^2 \equiv 1(mod5)$$

$$2^2 \equiv 4(mod5)$$

$$3^2 \equiv 4(mod5)$$

$$4^2 \equiv 1(mod5)$$

Desta forma se m e n tiverem congruências iguais

$$b = m^2 - n^2 \equiv 0(mod5)$$

mas se m e n tiverem congruências diferentes

$$c = m^2 + n^2 \equiv 0(mod5).$$

Como queríamos demonstrar

Exemplo 5.4 Sejam x, y e z inteiros tais que $x^2 + y^2 = z^2$, mostre que xy é múltiplo de 6.

Demonstração Sem perda de generalidade podemos dizer que a terna (x, y, z) é primitiva assim, $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$, ora se se m ou n for múltiplo de 3 e já que x é múltiplo de 2 então, x será múltiplo de seis. Assim devemos analisar os casos em que m e n não são múltiplos de 3, desta forma temos 4 casos a analisar.

1º caso: $m = 3k + 1$ e $n = 3q + 1$.

$$y = (3k+1)^2 - (3q+1)^2$$

$$y = 9k^2 + 6k + 1 - 9q^2 - 6q - 1$$
$$y = 9(k^2 - q^2) + 6(k - q)$$

$$y = 3\{(3k^2 - 3q^2) + (2k - 2q)\}$$

Ou seja y é multiplo de 3 logo xy é múltiplo de 6.

2º caso: $m = 3k + 1$ e $n = 3q + 2$.

$$y = (3k+1)^2 - (3q+2)^2$$

$$y = 9k^2 + 6k + 1 - 9q^2 - 12q - 4$$
$$y = 9(k^2 - q^2) + 3(2k - 4q - 1)$$

$$y = 3\{(3k^2 - 3q^2) + (2k - 4q - 1)\}$$

Então xy é múltiplo de 6.

3º caso: $m = 3k + 2$ e $n = 3q + 1$.

$$y = (3k+2)^2 - (3q+1)^2$$

$$y = 9k^2 + 12k + 4 - 9q^2 - 6q - 1$$
$$y = 9(k^2 - q^2) + 3(4k - 2q + 1)$$

$$y = 3\{(3k^2 - 3q^2) + (4k - 2q + 1)\}$$

Assim xy também é múltiplo de 6.

4º caso: $m = 3k + 2$ e $n = 3q + 2$.

$$y = (3k+2)^2 - (3q+2)^2$$

$$y = 9k^2 + 12k + 4 - 9q^2 - 12q - 4$$
$$y = 9(k^2 - q^2) + 3(4k - 4q)$$

$$y = 3\{(3k^2 - 3q^2) + (4k - 4q)\}$$

Desta forma xy, também será múltiplo de 6. $\blacksquare$

Teorema 5.3 A terna (x, y, z) será pitagórica se e somente se existirem inteiros positivos a e b, tal que $a > b$ com a e b de mesma paridade, de modo que ab um seja um quadrado perfeito**,** então $(x, y, z) = \left(\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

Demostração: Seja (x, y, z) um terno pitagórico, então $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y e z ϵ Z_+^*, podemos escrever

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y).(z - y)$$

Considerando $a = z + y$ e $b = z - y$ observemos que como $z > y, a\ e\ b$ são inteiros positivos e de mesma paridade, tais que $a > b$ e como $x^2 = ab$, então ab é um quadrado perfeito. Do sistema

$$\begin{cases} z + y = a \\ z - y = b \end{cases}$$

Vem que $y = \frac{a-b}{2}$ e $z = \frac{a+b}{2}$, desta forma $(x, y, z) = \left(\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Reciprocamente, seja $a > b$ números naturais de paridade semelhante tais que ab é quadrado perfeito e $(x, y, z) = \left(\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Pelo fato de a e b terem a mesma paridade, $y = \frac{a-b}{2}$ e $z = \frac{a+b}{2}$ são inteiros positivos e pelo fato de ab ser um quadrado perfeito, $x = \sqrt{ab}$ é um número natural. Calculando x^2 + y^2, obtemos z^2, assim temos uma terna pitagórica.

Exemplo 5.5 Determine as todas ternas pitagóricas que tem $x^2 = 144$

Primeiro vejamos as decomposições em 2 fatores de 144

144= 2.72=6.28=4.36=8.18=16.9=48.3

Figura 46. Tabela de operações do exemplo 5.5

a	B	$y = \frac{a-b}{2}$	$z = \frac{a+b}{2}$	(x, y, z)
72	2	35	37	(12,35,37)
36	4	16	20	(12,16,20)
18	8	5	13	(12,18,8)
28	6	11	17	(6,11,17)
16	9	Observe que a não tem a mesma paridade de b		
48	3	Observe que a não tem a mesma paridade de b		

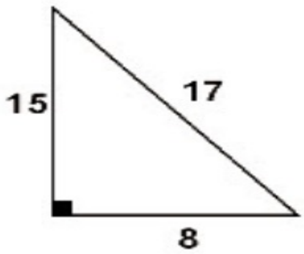
Fonte: Autor

5.3 Triângulos Pitagóricos

Definição 5.3 Chamamos de triângulo pitagórico o triangulo retângulo, cujos lados tem medidas inteiras e obedecem a relação descrita no teorema de Pitágoras.

Exemplo 5.7 Dado o triangulo de ternas (15,8,17) observe que ele é pitagórico.

Figura 47. Triângulo Pitagórico de Lados 8,15,17



Fonte: Autor

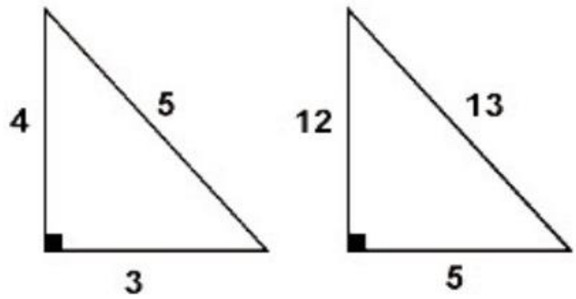
Aplicando o teorema de Pitágoras vem que $15^2 + 8^2 = 17^2$, observe ser verdadeira a igualdade pois resolvendo teríamos $225 + 64 = 289$.

5.3.1Triângulo Pitagórico Primitivo

Definição 5.3.1 Dado um triângulo retângulo cuja suas medidas estejam associadas a ternas primitivas, o denominamos Triângulo Pitagórico Primitivo.

Exemplo 5.8 Dado os triângulos retângulos de lados associado as ternas primitivas $(3,4,5)$ e $(5,12,13)$ dizemos que eles são um Triângulo Pitagórico Primitivos.

Figura 48. Triângulos Pitagóricos



Fonte: Autor da obra

5.4 Número de Triângulos Pitagóricos Primitivos Dada a Paridade de um cateto.

Nesta seção veremos como a partir de um cateto de valor inteiro positivo dado, podemos encontrar quantos triângulos primitivos estão associados a ele.

5.4.1 Número de triângulos pitagóricos primitivos dado um cateto M ímpar

Teorema 5.4 Dado um cateto impar $M = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}$, o número de triângulos pitagóricos primitivos associado a ele será 2^{k-1}.

Demonstração Como queremos um triângulo primitivo, então pelo teorema 5.2 podemos fazer

$$M = p^2 - q^2 = (p-q).(p+q)$$

Façamos $u = p - q$ e $v = p + q$, com p e q primos entre si e $p > q \in Z_+^*$. Desta maneira u e v são primos entre si caso contrário não teremos um triângulo pitagórico primitivo. Assim observe que $M = u.v = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}$, com cada $p_k^{\alpha_k}$ primo. Observe que $u.v$ pode ser feito de k maneiras diferentes de acordo com o esquema abaixo,

$$u.v = \left(p_1^{\alpha_1}\right).(p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k})$$

$$u.v = (p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}).(p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k})$$

$$u.v = (p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}).(\,p_4^{\alpha_4}..p_k^{\alpha_k})$$

$$\vdots$$

$$u.v = (p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}).(\,p_k^{\alpha_k})$$

$$u.v = (p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}).1$$

e em cada, devemos escolher se $p_k^{\alpha_k}$ ϵ a u ou v , assim teremos 2^k triângulos pitagóricos primitivos, mas como $u > v$ teremos $\frac{2^k}{2}$, desta forma temos que o número de triângulos primitivos que podemos formar é igual a 2^{k-1} e k é a quantidade de primos, independente da potência, que compõe $u.v$. ■

Exemplo 5.9 Determine o número de triângulos primitivos que podemos fazer utilizando um cateto de medida 63 e determine suas triplas pitagóricas.

Temos que $63 = 3^2.7$ assim $k = 2$ pois a dois divisores primos, logo o número de triângulos primitivos que podemos fazer será $2^{2-1} = 2$. Assim teremos as coordenadas $(u, v) = (63,1) = (9,7)$, e resolver os sistemas.

$(i)\begin{cases} m+n=63 \\ m-n=1 \end{cases}$ $m = 32;\ n = 31$ e $(ii)\begin{cases} m+n=9 \\ m-n=7 \end{cases}$ $m = 8\ ; n = 1$

$(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$

$(1984, 63\ , 1985)$ $(16, 63, 65)$

Desta maneira teremos que as coordenadas $(x, y, z) = (1984, 63\ , 1985)$ de cada triângulo será de cateto de medida 63 será $(1984, 63\ , 1985)$ e $(16, 63, 65)$.

5.4.2 Número de triângulos pitagóricos primitivos dado um cateto M par

Teorema 5.5 Dado um cateto M par, o número de triângulos pitagóricos primitivos associado a ele será 2^k, onde k é a quantidade de fatores primos impares que compõem M.

Demonstração: Como queremos um triângulo primitivo, então pelo teorema 5.2 podemos fazer

$$M = 2pq$$

com p e q são primos entre si e de paridade distinta, caso contrário não teremos um triângulo pitagórico primitivo. Assim observe que $M = 2pq = 2^a p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}$ pois p ou q é par, com cada $p_k^{\alpha_k}$ primo. Observe que pq pode ser feito de k maneiras diferentes de acordo com o esquema abaixo,

$$pq = 2^{a-1}(p_1^{\alpha_1}).(p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k})$$

$$pq = 2^{a-1}(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}).(p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k})$$

$$pq = 2^{a-1}(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}).(\,p_4^{\alpha_4}..p_k^{\alpha_k})$$

$$\vdots$$

$$pq = 2^{a-1}(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}).(\,p_k^{\alpha_k})$$

$$pq = (2^{a-1}p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}.p_k^{\alpha_k}).1$$

Temos k formas de configurar pq, em cada forma, duas maneiras de escolher se os primos $p_k^{\alpha_k}$ compõem p ou q, ainda que $p > q$ e escolher se $2^{a-1}p_1^{\alpha_1}$ faz parte dos primos que compõem p ou q, então o número de triângulos primitivos que podemos fazer utilizando um cateto de medida par é 2^k e k é o número de primos que formam a parte ímpar de pq ■

Exemplo 5.10 Vamos determinar o número de triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual 180.

Veja que pelo teorema 5.2 $2pq = 180 = 2^2.3^2.5 \rightarrow pq = 90 = 2.3^2.5$, e a quantidade de primos impares é 2, logo a quantidade de triângulos pitagóricos primitivos que podemos formar será $2^2 = 4$. Assim as coordenadas pq com pq primos serão (45,2); (90,1); (10,9); (18,5) gerando respectivamente as seguintes ternas (180,2021,2029); (180, 8099, 8101); (180, 19, 181) e (180, 299, 349).

6 - A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

6.1 - Vida e obra de Fibonacci

Durante o período renascentista do século 12, a Europa passa por um grande período de transformações de cunho social, politico econômico e cultural. Houveram mudanças na forma de produzir, o crescimento demográfico e a expansão do comércio.

Segundo SESTITO e OLIVEIRA (2010) é nesse contexto histórico de grandes transformações, que foram surgindo as cidades e a classe burguesa, trazendo assim, um florescimento das práticas comerciais, aumentou a produção na agricultura, na produção artesanal urbana e foram estreitados os laços comerciais com os povos do oriente, desta maneira o comércio ganhou um expressivo impulso, desenvolvendo rotas locais e internacionais, tanto para o norte quanto para o sul. É neste contexto histórico, onde na cidade italiana de Pisa, nasce nosso personagem Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, mais conhecido como Fibonacci..

Figura 49. Leonardo de Pisa

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Leonardo de Pisa foi matemático e comerciante, mais conhecido como Fibonacci, que quer dizer filho de Bonacci, nasceu em 1175 e morreu em 1250. Teve como grande influenciador de sua carreira, o pai Guiglielmo Bonaccio, pois este era um secretário da república italiana de Pisa ligado ao comércio, que levava Fibonacci em suas viagens.

> As grandes cidades comerciarias italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária (EVES, 2011, p. 292).

Tido por muitos historiadores como o maior matemático do início da Idade Média, adquiriu muito de sua bagagem matemática em viagens que fez ao mundo oriental, teve um professor muçulmano, assim teve uma experiência próxima, da maneira matemática dos orientais e árabes de resolução de problemas, passando a defender os números indo-arábicos, os quais conhecera em suas viagens. Fibonacci sentiu uma motivação tal a estudar os números indo-arábicos, que seu aprendizado o levou a escrever uma obra chamada de Liber Abaci (o livro do ábaco ou do cálculo) em 1202, logo depois de retornar à sua cidade natal, sendo este livro reeditado em 1228.

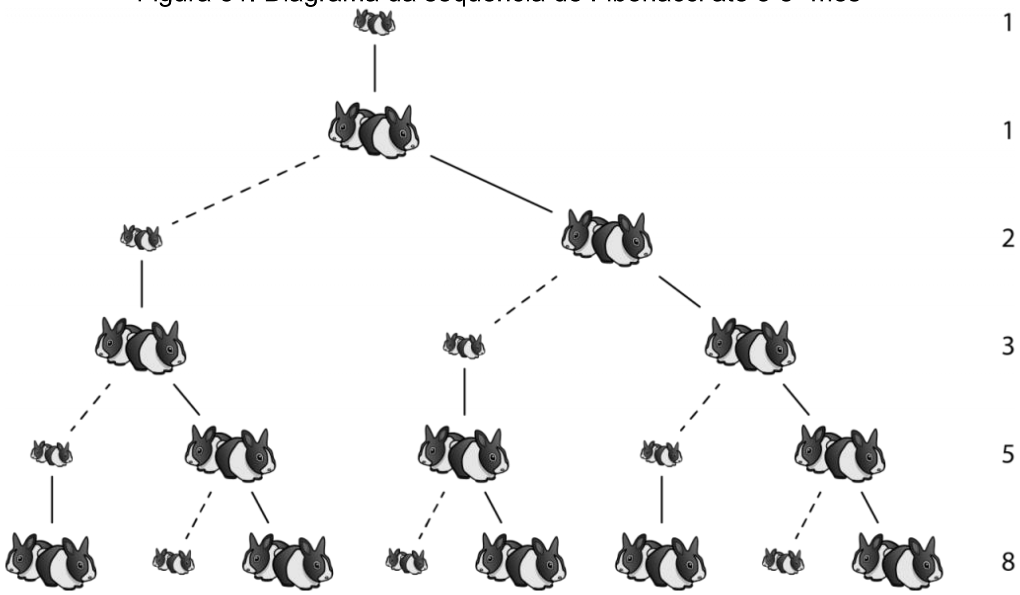
Figura 50. Páginas do livro Liber Abaci

Fonte: https://www.pinterest.pt/pin/546202261028584655/

O Liber Abaci é dividido em 8 capítulos, e traz consigo uma enorme quantidade de problemas geométricos e teoremas que tem como base, Os Elementos de Euclides. Com dedicatória a Dominicus Hispanus, astrônomo imperial que lhe apresentara a Frederico II, imperador germânico. Este livro se inicia com uma ideia que parece quase moderna, mas que era característica da forma da forma de pensar, tanto islâmica quanto cristã, que a geometria e a aritmética se auxiliam mutuamente, fazendo lembrar a álgebra de al-Khowarisme. Mas sem dúvidas um dos problemas contido no Liber Abaci que mais inspirou os matemáticos posteriores foi:

Quantos pares de coelhos são produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Figura 51. Diagrama da sequência de Fibonacci até o 8º mês



Fonte: https://criptofy.com/fibonacci-retracement/

Esse célebre problema deu origem ao que conhecemos hoje como "sequência de Fibonacci" $1,1,2,3,5,8,13, \dots, F_n, \dots$, onde $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, isto é, em que cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois termos imediatamente precedentes.

6.2 Definição da Sequência de Fibonacci

Definição 6.1 Dá-se o nome de sequência de Fibonacci, a sequência definida por $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, com $F_1 = F_2 = 1$, $\forall n > 2$.

6.3 A sequência de Fibonacci numa relação Pitagórica.

A Scripta Mathematica era um periódico trimestral produzido pela Yeshiva University voltado à Filosofia, História e Matemática. Fundada em 1932, na época, era a única revista com assuntos sobre Matemática, que visava o alcance de acadêmicos e leigos. Em um desses periódicos, Charles W. Raine, em 1948 escreve sobre uma curiosa relação, que encontrara, entre a sequência de Fibonacci e as ternas Pitagóricas. Observa-se que tomando quatro números de Fibonacci consecutivos, multiplicando os extremos obteríamos um dos catetos de um triângulo retângulo, multiplicasse os dois termos centrais entre si e em seguida por dois, obteríamos o outro cateto e a hipotenusa seria um número de Fibonacci dado por F_{2n+3}.

Em termos matemáticos termos:

Proposição 6.1 Dado quatro números de Fibonacci consecutivos, F_n, F_{n-1} F_{n-2}, F_{n-3} e a, b e c definidos respectivamente como $a = F_n.F_{n-3}$, $b = 2.F_{n-1.}F_{n-2}$ e $c = {F_{n-1}}^2 + {F_{n-2}}^2$,a terna (a, b, c) é uma terna Pitagórica.

Demonstração Seja $F_{n-3} = x$, $F_{n-2} = y$, $F_{n-1} = x + y$ e $F_n = x + 2y$, com x e y ϵ Z_+^* e $n = 4,5,6. ..$, desta maneira

$$a^2 + b^2 = (F_n.F_{n-3},)^2 + (2.F_{n-1.}F_{n-2})^2$$

$$a^2 + b^2 = \left((x + 2y).x\right)^2 + (2.(x + y).y)^2$$

$$a^2 + b^2 = (x^2 + 2xy)^2 + (2xy + 2y^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

$$a^2 + b^2 = x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

$$a^2 + b^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = (x^2 + 2xy + y^2 + y^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = ((x + y)^2 + y^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = ((x + y)^2 + y^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = \left((F_{n-1})^2 + {F_{n-2}}^2\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Desta forma fica verificado que dado quatro números de Fibonacci consecutivos, podemos gerar uma terna pitagórica.

Exemplo Dada a sequência de Fibonacci $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$, verifiquemos se os números $2,3,5,8$ podem gerar uma terna pitagórica.

Solução Seja $F_n = 2$, $F_{n-1} = 3$, $F_{n-2} = 5$ e $F_{n-3} = 8$, então:

$$a = F_n.F_{n-3} = 2.8 = 16$$

$$b = 2.F_{n-1.}F_{n-2} = 2.3.5 = 30$$

$$c = {F_{n-1}}^2 + {F_{n-2}}^2 = 3^2 + 5^2 = 34$$

Verifiquemos agora se os números obtidos acima obedecem a relação $a^2 + b^2 = c^2$

De fato:

$$16^2 + 30^2 = 34^2$$

$$256 + 900 = 1156$$

$$1156 = 1156$$

7. PROPOSTAS PEDAGÓGICA PARA ENSINO BÁSICO

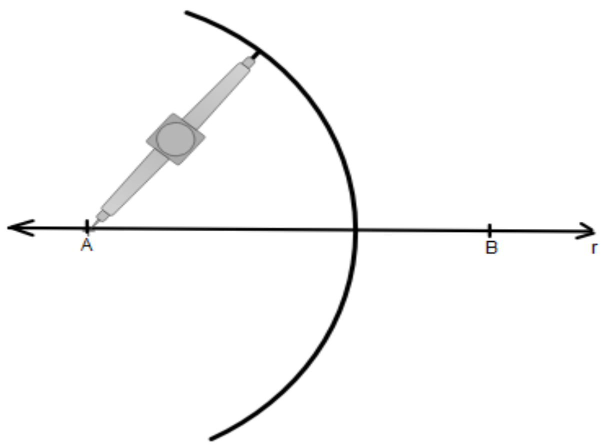
É comum que, cada vez que professor repassa algum conhecimento, as perguntas pra que serve, como utilizo ou em que vou usar, estarão presente nas salas de aula. Essas indagações permeiam, quer seja como docente ou aprendiz, nossa vida acadêmica e profissional. Neste capítulo apresentaremos algumas propostas que o professor pode utilizar em sala de aula para promover o engajamento e o aprendizado dos alunos com os conteúdos aqui apresentados, tornando o aprendizado lúdico e concreto. A proposta na sequência tem como público alvo principal, alunos de 1º ano do ensino médio, pelo fato de já terem uma bagagem com o teorema de Pitágoras.

Proposta 1: Desenho Geométrico (Utilizando Régua e compasso)

A princípio o professor deverá mostrar como construir perpendiculares utilizando régua e compasso como descrito abaixo.

1- Construa um segmento de reta $\overline{AB}$ e sobre ela, com o uso do compasso, lhe dê uma abertura maior que a metade de $\overline{AB}$ e com sua ponta seca em A desenhe um arco no sentido de A para B.

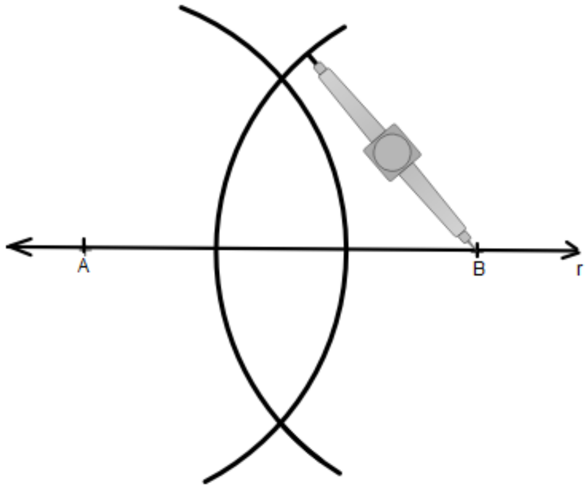
Figura 52. Arco de A para B



Fonte: O Autor

2- Agora com a ponta seca do compasso em B e mesma abertura que em 1, repita o processo de 1 no sentido de B para A.

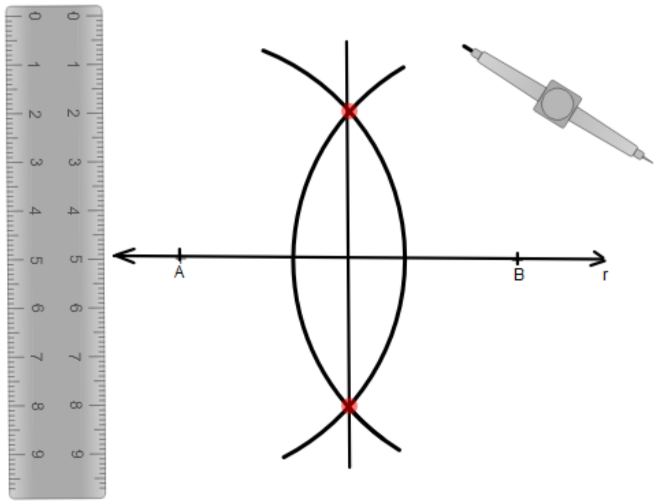
Figura 53. Arco de B para A



Fonte: O Autor

3- Pelos pontos de cruzamento do arco trace uma reta, esta será uma reta perpendicular a $\overline{\mathrm{AB}}$

Figura 54. Ponto de intersecção dos arcos



Fonte: O Autor

4- O professor deve propor o problema abaixo ou semelhante, aconselha-se usar números impares.

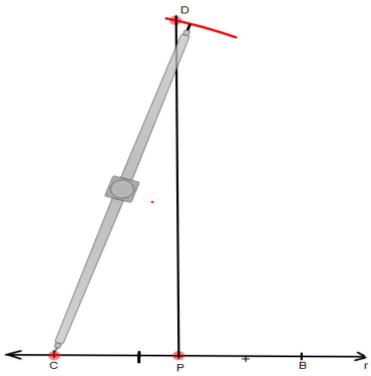
Problema: Usando régua e compasso construa um triângulo pitagórico com um cateto de medida 7cm.

Assim começa o trabalho algébrico. Observe que sendo 7 um cateto podemos, digamos x, então temos que $x^2 = 49$, pelo teorema 5.3, a e b podem ser escritos como: $(a,b) = (49{,}1)$, assim a e b tem mesma, a saber: (6,4) e (12,2). Desta maneira $(x,y,z) = \left(\sqrt{ab}, \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ será

$$(7{,}24{,}25\ )$$

5- De posse das retas perpendiculares marquemos um ponto P na intersecção das retas, escolhamos uma escala de medida conveniente, no caso usaremos 1:2, isto é, cada 1cm do desenho corresponde a 2cm do comprimento real. Em r, com o compasso utilizando abertura b no caso 7 e ponta seca em p marquemos um ponto C. Em seguida com a ponta do compasso em C e abertura c, no caso 12,5cm, tracemos um arco e chamemos de D a intersecção desse arco com a reta perpendicular a r. Desta forma temos um segmento PD= $\sqrt{24}$.

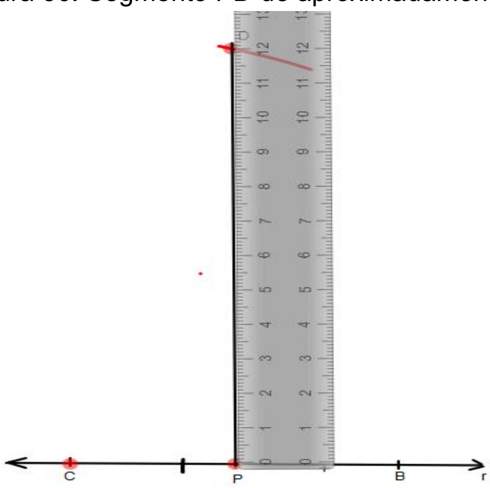
Figura 55. Compasso com abertura c



Fonte: O Autor

Na figura abaixo podemos observar que o segmento PD tem exatamente 12cm, comprovando assim de forma lúdica a eficácia da fórmula dada no teorema 5.3.

Figura 56. Segmento PD de aproximadamente 5cm



Fonte: O Autor

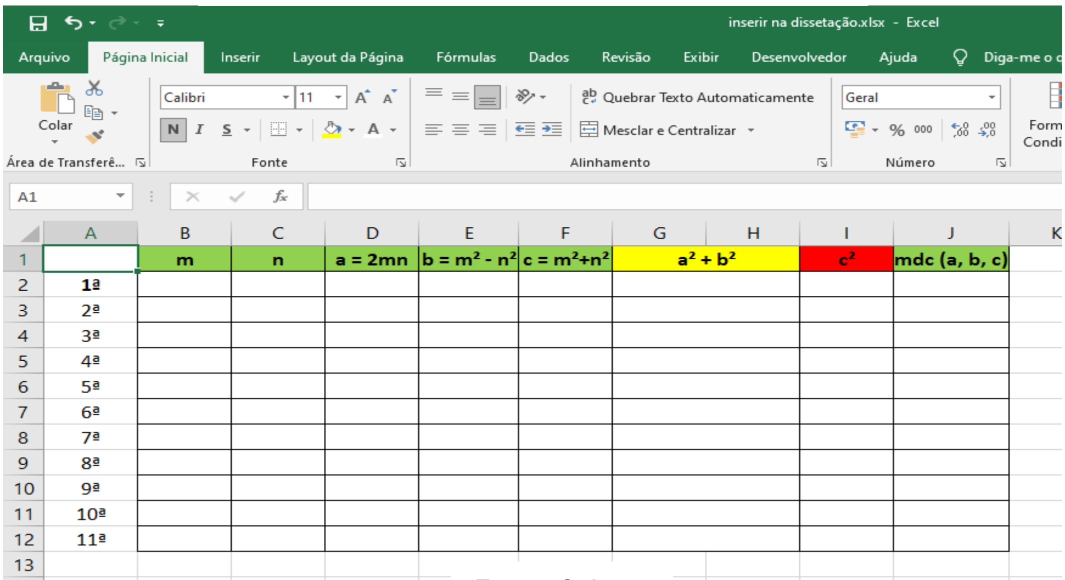
Proposta 2: Uso do Excel como ferramenta para compreensão das Ternas Pitagóricas Primitivas

E em meio a uma estrutura educacional ainda muito carente o Excel se mostra uma ferramenta útil, pela sua facilidade de manuseio e no contexto matemático, por usar algoritmos simples para a produção de cálculos, além de facilitar a observação de padrões por conta da dinâmica de seus gráficos.

O uso de planilhas eletrônicas no ensino da álgebra é particularmente interessante porque permite que o aluno se envolva num processo interativo de resolução ou modelação de um determinado problema. A sua utilização pode ser associada com essas abordagens metodológicas, a resolução de problemas ou a Modelagem Matemática. (ABREU et al, 2002, p.92).

Para esta proposta a princípio sugerimos ao professor conduzir os alunos ao laboratório de informática e familiarizar os alunos com o Excel, sua operacionalização e as fórmulas a serem utilizadas, para este caso necessitaremos de operações soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, estas estão expostas nos Anexo 1e 2. Desta maneira após esta apropriação o aluno estará apto a começar sua inserção no mundo da programação deforma simples, criando seus primeiros algoritmos funcionais. Como primeiro passo para inserir as ternas no contexto, pedimos que os alunos criem uma tabela seguindo o modelo da figura 56.

Figura 57. Planilha de Excel



Fonte: O Autor

Os alunos agora podem começar a construir abaixo de cada fórmula da primeira linha o algoritmo que os levarão a determinar a, b e c componentes de uma Terna Pitagórica Primitiva de acordo com o teorema 5.2.

Figura 58. Lista de algoritmos

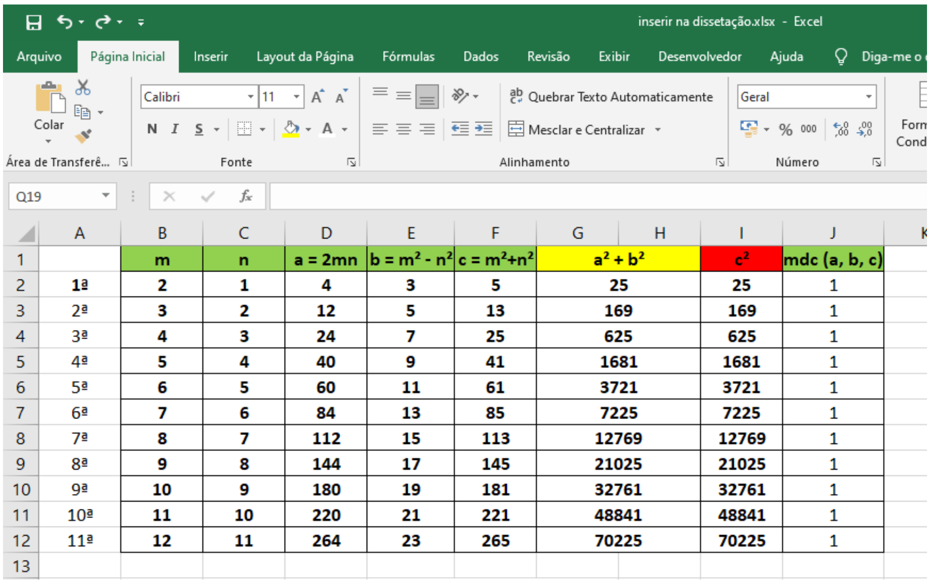
Lista dos algoritmos que foram utilizados para completar a tabela relacionada ao teorema 5.2	
a	=2*B2*C2
b	=B2^2-C2^2
c	=B2^2+C2^2
c^2	=F2^2
$a^2 + b^2$	=D2^2+E2^2
m.d.c. (a, b, c)	=MDC (D2; E2; F2)

Fonte: O Autor

Depois de completar a tabela podemos visualizar na figura 59, a gama de oportunidades como; trabalhar os conceitos de números primos nas colunas B e C, podemos pela coluna J facilmente concluir que todas as ternas geradas são primitivas, instigando mais um pouco da visão do docente, podemos leva-los a conclusões de que em uma terna pitagórica primitiva:

- Os catetos sempre terão paridades distintas.
- O cateto b e a hipotenusa c sempre serão impares.
- Em qualquer Terna seja primitiva ou não, sempre haverá múltiplos de 3, 4 e 5.

Figura 59. Tabela completa de acordo com teorema 5.3



	m	n	$a = 2mn$	$b = m^2 - n^2$	$c = m^2+n^2$	$a^2 + b^2$	c^2	mdc (a, b, c)
1ª	2	1	4	3	5	25	25	1
2ª	3	2	12	5	13	169	169	1
3ª	4	3	24	7	25	625	625	1
4ª	5	4	40	9	41	1681	1681	1
5ª	6	5	60	11	61	3721	3721	1
6ª	7	6	84	13	85	7225	7225	1
7ª	8	7	112	15	113	12769	12769	1
8ª	9	8	144	17	145	21025	21025	1
9ª	10	9	180	19	181	32761	32761	1
10ª	11	10	220	21	221	48841	48841	1
11ª	12	11	264	23	265	70225	70225	1

Fonte: O Autor

Proposta 3: Geometria espacial (Demonstrar aplicação das Ternas e resolução de atividades)

A visão espacial sobre os fatos matemáticos que acontecem ao nosso redor é de suma importância, uma vez que eles podem ser modelados trazendo uma visão papável daquilo que temos como teoria, podendo trazer para o campo aplicabilidade na vida real aquilo que anteriormente tínhamos como abstrato.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino básico, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. - O estudo da geometria é um campo fértil para trabalhar com situações problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades (BRASIL, 1998, p. 51).

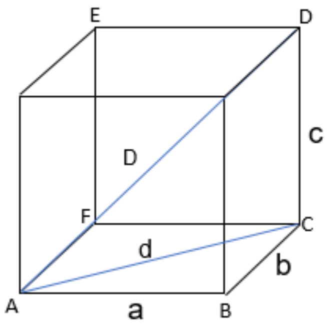
A proposta abaixo é demonstrar a aplicabilidade das Ternas Pitagóricas no campo da geometria espacial, na confecção de caixas em forma de paralelepípedo retângulo em um contesto específico e sua prática é destinada a alunos do segundo ano do ensino médio visto que o assunto é pertinente a essa série.

Situação Problema: Suponha que um o Professor de Matemática deseja montar um negócio, voltado para a confecção de caixas em forma de paralelepípedo retângulo, no qual sejam exigidas as seguintes medidas: a medida do lado menor de cada caixa, obrigatoriamente, tem que ser p $\geq$ 3 (onde p é um primo) e, além disso, a diagonal da base da caixa d e a diagonal da caixa D e as demais dimensões da caixa sejam números inteiros. Quantas caixas diferentes poderão ser confeccionadas? Quais as dimensões de cada caixa?

Solução:

A Figura abaixo é um paralelepípedo retângulo onde podemos observar as dimensões da caixa.

Figura 60. Paralelepípedo



Fonte: O Autor

A fim de que os lados, a altura e a diagonal da base do paralelepípedo sejam números inteiros, basta que os dois ternos (b, a, d) e (c, d, D) sejam pitagóricos.

Seja b o lado menor de cada caixa logo, $d^2 = a^2 + b^2$ ou $(d + a) = \frac{b^2}{d-a}$. Uma vez que d e a são inteiros, logo, $(d- a)$ tem que dividir b^2 sem deixar resto. Logo, $(d- a)$ são os divisores positivos de b^2. Como b é um primo ímpar, os divisores de b^2 são: b^2, b e 1. Substituindo b^2, b e 1 em $(d + a) = \frac{b^2}{d-a}$., obtém-se os seguintes sistemas de equações:

$S_1: \begin{cases} d - a = b^2 \\ d + a = 1 \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} d - a = b \\ d + a = b \end{cases}$ $S_3: \begin{cases} d - a = 1 \\ d + a = b^2 \end{cases}$

De S_1 temos que, é incompatível pois $d + a \neq 1$.

De S_2 temos que, é incompatível pois $d + a \neq b$.

De S_3 temos que $d = \frac{b^2+1}{2}$ e $a = d - 1$, é compatível, assim temos nossas fórmulas geradoras de d e a. Conseguimos, também, observar que como b é um impar primo, $d > b$ é número primo ímpar ou um número ímpar composto e a é par. Se d é primo impar então o triângulo ABC é primitivo. Assim para determinar o número de caixas que podemos fazer bem como as demais dimensões que faltam, aplicamos o teorema 5.3 para descobrir quantas ternas terão o cateto igual d.

Exemplo 1: Suponha que seja feita uma encomenda de caixas, com as seguintes condições: os lados, a altura, a diagonal da base e a diagonal de cada caixa sejam números inteiros e, além disso, o lado menor de cada caixa tenha, por exemplo, 5cm (primo ímpar), quantas caixas poderão ser confeccionadas, e quais as dimensões de cada caixa?

Resolução:

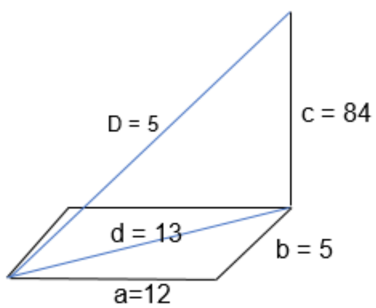
Aplicando as fórmulas encontradas temos que:

$$b = 5,\ d = \frac{b^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = 13,\ a = d - 1 = 13 - 1 = 12$$

Aplicando o teorema 5.3 buscaremos quantas ternas tem cateto igual 13. Queremos então encontrar as ternas em que $x^2 = 169$. Assim a única forma de decompor 169 em dois fatores p e q de modo que $p > q$ e de mesma paridade será $(p, q) = (169,1)$.

Desta forma há somente uma terna $(13{,}84{,}85)$, portanto somente uma caixa poderá ser confeccionada, as dimensões c e D comtempladas aqui serão, $c = 84$ e $D = 85$. A figura abaixo ilustra as medidas da caixa

Figura 61. Parte modelada da caixa do exemplo 1



Fonte: O Autor

Exemplo 2: Suponha que outra encomenda seja feita, com as seguintes condições: os lados, a altura, a diagonal da base e a diagonal de cada caixa sejam números inteiros e, além disso, o lado menor de cada caixa tenha, por exemplo, 7cm (primo ímpar), quantas caixas poderão ser confeccionadas, e quais as dimensões de cada caixa?

Resolução:

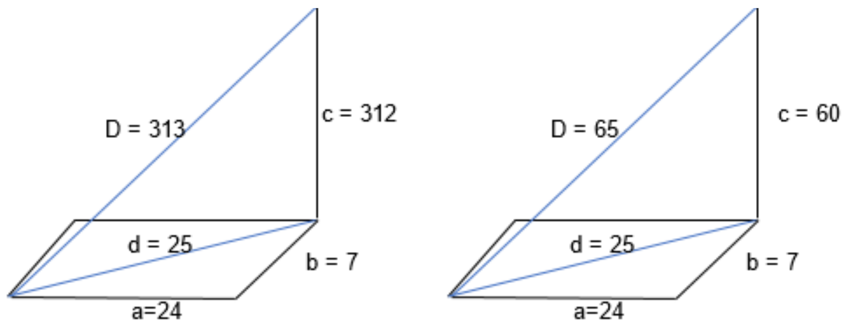
Aplicando as fórmulas encontradas temos que:

$$b = 7,\ d = \frac{b^2+1}{2} = \frac{7^2+1}{2} = 25,\ a = d - 1 = 25 - 1 = 24$$

Aplicando o teorema 5.3 buscaremos quantas ternas tem cateto igual 25. Queremos então encontrar as ternas em que $x^2 = 625$. Assim as formas de decompor 625 em dois fatores p e q de modo que $p > q$ e de mesma paridade será $(p, q) = (625,1), (125,5)$.

Desta forma há duas ternas $(25,312,313)$, (25,60,65) portanto duas caixas poderão ser confeccionadas, as dimensões c e D comtempladas aqui serão, $c_1 = 312$ e $D_1 = 313$ ou $c_2 = 60$ e $D_2 = 65$. A figura abaixo ilustra as medidas das caixas.

Figura 62. Parte modelada das caixas do exemplo 2



Fonte: O Autor

Usando estas informações o professor pode propor a confecção de caixas com cartolina, utilizando um $b \geq 3$ primo, pré estabelecido.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Pitágoras é um dos assuntos mais importantes do ensino básico, devido às suas aplicações. Neste trabalho vimos o que o Teorema de Pitágoras, pode ser demonstrado, utilizando semelhança de triângulos, congruência de triângulos, composição e dissecação de figuras geométricas, valendo-se de Álgebra e Geometria ofertando ao professor, um leque de formas de abordar o tema com seu aluno, podendo utilizar a forma que melhor se encaixe nas características de sua turma, podendo tornar o aprendizado mais atraente ao aluno. A apresentação e a apropriação de formulas geradoras de Ternos Pitagóricos, trazem a possibilidade de o aluno criar seus ternos, provocando um senso investigativo e reforçado de atividades lúdicas, que mostram a versatilidade dos ternos e sua aplicação prática. Desta maneira concluímos a força das demonstrações do Teorema de Pitágoras e a apropriação das fórmulas geradoras de Ternas, são imprescindíveis para desenvolvimento cognitivo estudante mediante suas variedades de apresentações e aplicações respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, Maria Auxiliadora Maroneze de.[et al],**Metodologia do ensino de matemática**. Florianópolis: UFSC/LED, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, Trad. Elsa F. Ghomide, São Paulo, Ed. Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília, MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília, MEC, 2000.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2011.

MOREY, B, B. **Tópicos de História da Trigonometria**. In: FOSSA, J.A. Matemática e medida: Três momentos históricos. 1 ed. São paulo: Editora: Editora da Física, 2009.

SESTITO, E. A. B.; OLIVEIRA, T. **As Transformações do Pensamento na Baixa Idade Média e as Mudanças na Arte**. Londrina, 2010.

VILLIERS, Michael de. Mike de Villiers: **Dynamic Math Learning**. Disponível em www.mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html, consultado em 03 de Janeiro de 2021.

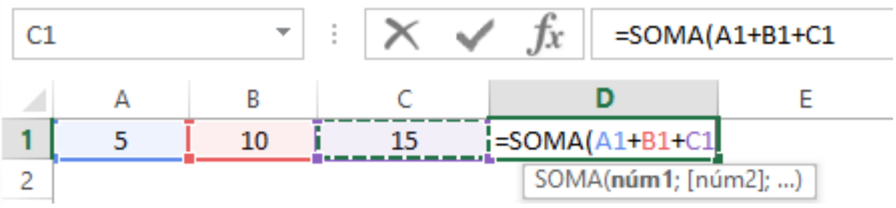
ANEXO 1

As Operações Básicas de matemática no Excel: soma, subtração, multiplicação e divisão

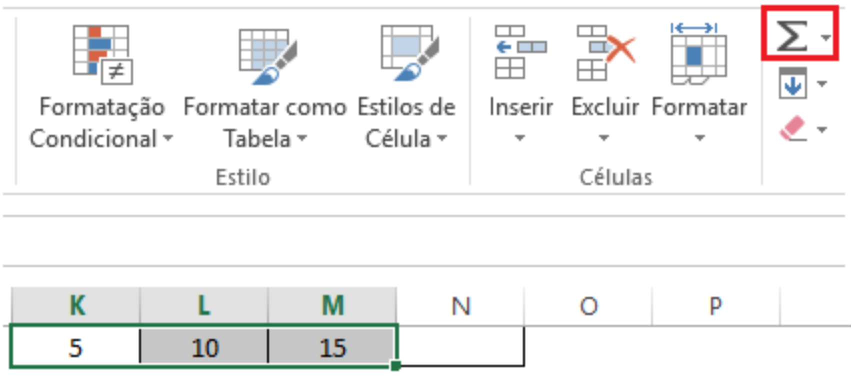
Como somar no Excel

Somar utilizando o Excel é mais simples do que muita gente imagina. Existem duas maneiras principais de configurar o programa para que ele chegue automaticamente ao resultado da soma dos valores de duas ou mais células.

A fórmula básica da operação é =SOMA(Célula1+Célula2). Nesse caso, basta clicar na célula onde deseja ver o resultado e escrever a fórmula acima, trocando onde se lê " Célula1" e " Célula2" pelas células que você deseja somar (por exemplo, A1+A2+A3).



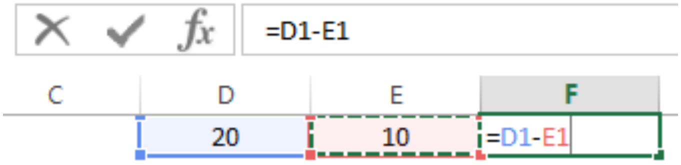
A segunda maneira é mais simples ainda: selecione todas as células que deseja somar, arrastando o mouse entre elas e clique no símbolo "Σ". O programa vai fazer a fórmula automaticamente, entregando o resultado para você.



Como subtrair no Excel

Subtrair no Excel não é muito diferente de somar. Assim como na operação anterior, também existem duas maneiras principais para que o programa execute a conta para você.

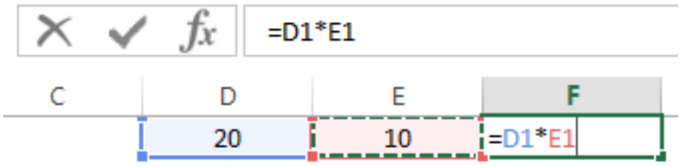
A primeira é utilizando a fórmula = Célula1-Célula2. Assim como na soma, selecione a célula onde deseja ver o resultado da subtração e substitua onde se lê "Célula1" e " Célula2" na fórmula acima pelas células que você quer subtrair.



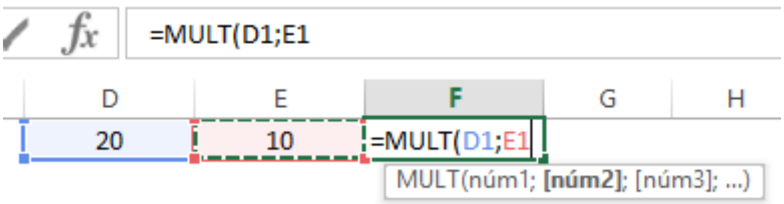
Já a segunda é interessante para conhecer, mas não muito prática para utilizar no dia a dia: use a fórmula de soma (conforme as instruções do tópico anterior), mas com os números negativos. Dessa maneira você pode obter o resultado da subtração.

Como multiplicar no Excel

A fórmula de multiplicação do Excel é Célula1*Célula2. Assim como nas operações que citamos anteriormente, selecione a célula onde deseja ver o resultado da multiplicação e escreva a fórmula, substituindo onde se lê "Célula1" e "Célula2" pelas células cujo valor você deseja multiplicar.

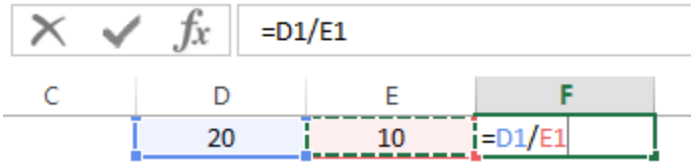


Você também pode multiplicar utilizando a fórmula Célula1=MULT(Célula2: Célula3). Nesse caso, o resultado da multiplicação estará em " Célula1" (que você deve trocar pela letra e número da célula onde deseja ver o resultado). Caso você adicione mais de duas células, o Excel sempre multiplicará o resultado das duas primeiras células pelo da terceira. E assim sucessivamente.



Como fazer divisão no Excel

A divisão é a operação mais simples que você pode fazer utilizando o programa da Microsoft. Para isso, selecione a célula onde quer ver o resultado e escreva a fórmula = Célula1/Célula2.



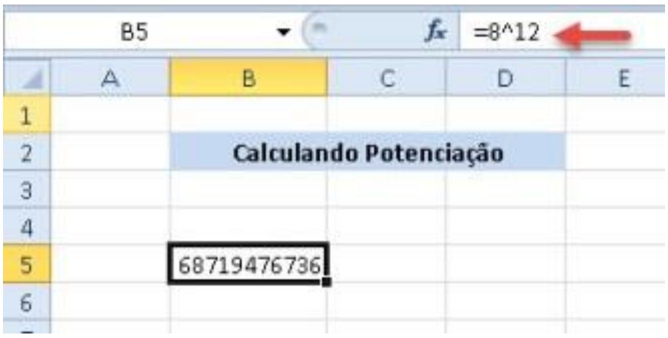
Assim como na soma e na subtração, substitua onde se lê "Célula1" e "Célula2" pelas células que deseja dividir. Por exemplo =A1/A2. Caso você selecione mais células (=A1/A2/A3) o programa vai dividir o resultado da primeira operação (A1/A2) pelo valor da terceira, ou seja, o resultado da divisão entre A1 e A2 dividido por A3.

Fazer as operações básicas no Excel auxilia muito a eficiência e agilidade para fazer suas atividades. Elas tornam as tabelas mais dinâmicas, uma vez que, a cada alteração de um valor, o resultado é atualizado.

ANEXO 2

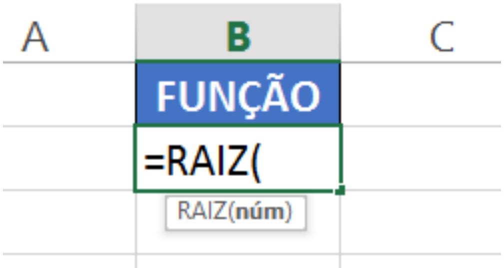
Potenciação no Excel

Vamos calcular a potência de 8 na 12, ou matematicamente falando: 8^{12}. Para isso escolha uma célula, e insira os seguintes comandos **=8^12** onde o sinal de igual indica ao Excel que queremos começar uma conta ou função e o sinal ^ representa a potenciação. Dê um "enter" e veja o resultado rapidamente:

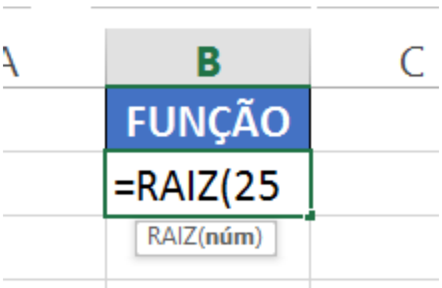


Raiz quadrada no Excel

Clique click em alguma célula célula e na planilha e digite **=RAIZ(**



Digite o número **25**, por exemplo, em seguida pressione a tecla **Enter**:



Veja nosso resultado: