UFRJ

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEUS BORGES SILVEIRA

Rio de Janeiro

2020

UFRJ

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO FUNDAMENTAL

MATEUS BORGES SILVEIRA

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFRJ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Sc. Flávia Landim

Rio de Janeiro

2020

CIP - Catalogação na Publicação

BB732p

Borges Silveira, Mateus
Uma proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci no Ensino Fundamental / Mateus Borges Silveira. -- Rio de Janeiro, 2020.
52 f.

Orientador: Flávia Maria Pinto Ferreira Landim.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.

1. Interdisciplinaridade. 2. BNCC. 3. Pensamento Computacional. 4. Sequência de Fibonacci. I. Landim, Flávia Maria Pinto Ferreira, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Uma proposta de abordagem da sequência de Fibonacci no Ensino Fundamental

Mateus Borges Silveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 11/11/2020

Flávia Landim

Profª. Dra. Flávia Maria Pinto Ferreira Landim (IM/UFRJ)

MLeal

Profª. Dra. Marisa Beatriz Bezerra Leal (IM/UFRJ)

Luzia da Costa Tonon Martarelli

Profª. Dra. Luzia da Costa Tonon Martarelli (UNIRIO)

Rio de Janeiro – novembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, Criador de tudo, pela minha vida e pela dos que amo. Tudo o que faço é para cultivar os talentos recebidos e para que Seu nome seja honrado.

Agradeço aos meus pais e à minha família na pessoa da minha mãe, Rosa Maria, a quem devo minha vida e apoio contínuo durante todo o tempo do curso, apoiando nos momentos de cansaço pelas viagens contínuas para as aulas. Cabe também menção especial à minha avó Jayne (*in memoriam*), que com amor colaborou de maneira especial na minha educação e amadurecimento.

Agradeço aos amigos pelo apoio e estímulo durante o decorrer do curso. Boas amizades fazem com que cheguemos mais longe e tornam o caminho menos penoso.

Agradeço aos colegas de turma do PROFMAT pelo companheirismo e amizade em todo o tempo de curso.

Agradeço à orientadora, prof. Dr. Sc. Flávia Landim pelos direcionamentos e orientação durante a elaboração desse trabalho e também pelas aulas da disciplina Matemática Discreta, que foram muito enriquecedoras. Na sua pessoa agradeço também a todos os professores que ministraram as disciplinas durante o curso.

“Quanto mais eu estudo a natureza, mais me maravilho com a obra do Criador.”

(Louis Pasteur)

RESUMO

O trabalho consiste em um estudo da sequência de Fibonacci e os efeitos desse estudo no intelecto e na motivação do estudante na aprendizagem da Matemática. Trata-se de um conteúdo pouco trabalhado na Educação Básica e que pode ser estímulo para as aulas da disciplina, bem como mostrar que a Matemática possui estreita ligação com a natureza, obras humanas e demais disciplinas, como história e ciências. Resumo teórico, abordagem histórica, demonstração de situações naturais em que é possível observá-la e questões para aplicação aos estudantes são apresentadas ao longo das páginas, oferecendo ferramentas para que os professores do ciclo básico possam apresentar aos estudantes essa parte da disciplina, explorando habilidades da Matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse trabalho também será apresentada uma proposta de abordagem para o sexto ano do fundamental.

Palavras-chave: Interdisciplinaridade; BNCC; Pensamento Computacional; Sequência de Fibonacci

ABSTRACT

The work consists of a study of the Fibonacci sequence and the effects of this study on the intellect and motivation of the student in the learning of mathematics. It is a content little worked in the basic education and that can be a stimulus for the classes of the discipline, as well as show that mathematics has close connection with nature, human works and other disciplines, such as history and sciences. Theoretical summary, historical approach, demonstration of natural situations in which it is possible to observe it and questions for application to students are presented throughout the pages, offering tools for teachers of the basic cycle to present to students this part of the discipline, exploring mathematics skills in the Common National Curriculum Base (BNCC). In this paper will also be presented a proposal for an approach for the sixth year of the fundamental.

Keywords: Interdisciplinarity; BNCC; Computational Thinking; Fibonacci sequence.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 10
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 13
3. HISTÓRIA DE LEONARDO DE PISA E ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 17
3.1 História de Leonardo de Pisa 17
3.2 O problema do coelho 19
3.3 Sequência de Lucas e Fibonacci 21
3.4 Propriedades geométricas decorrentes da sequência de Fibonacci. 22
3.4.1 Número de Ouro 22
3.4.2 Retângulo de Ouro 24
3.4.3 Espiral de Ouro 28
3.4.4 Pentagrama 29
4. APLICAÇÕES 32
4.1 Literatura 32
4.2 Música 32
4.3 Botânica 33
4.4 Fauna 35
4.5 Corpo humano 37
4.6 Artes e Arquitetura 38
4.7 Mercado financeiro 40
5. PROPOSTA DE ATIVIDADES 41
5.1 Metodologia 43
5.2 Ficha de Avaliação 45
5.3 Respostas da ficha de avaliação 48
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 53
APÊNDICE I – QUESTÕES DE VESTIBULAR 56
APÊNDICE II – PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 58

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é ilustrar uma proposta de abordagem da sequência de Fibonacci no Ensino Fundamental. A sequência de Fibonacci é multifacetada uma vez que envolve história, aplicações na natureza, aplicações específicas em Matemática e outros desdobramentos como, por exemplo, o desenvolvimento do pensamento computacional.

É importante mencionar que um dos motivos para a escolha desse tema deve-se a um interesse pessoal por tratar-se de um conteúdo que pode ser aproveitado transversalmente em estudos filosóficos na área de Estética e também em estudos na área de História, disciplina cuja licenciatura também possuo.

Aliada à minha motivação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, aprovada em 2017, apresenta dez competências gerais para a Educação Básica e oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental. Competência, na BNCC, é definida como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida. Destaco a seguir a primeira e segunda competências gerais da Educação Básica.

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2017)

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2017)

Destacam-se ainda a primeira e sexta competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental na BNCC.

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e

> para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017)
> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017)

A descoberta de que o conhecimento matemático é construído ao longo do tempo, com a contribuição de diferentes pessoas em diferentes lugares, é exemplificada com uma pesquisa sobre a história da vida do matemático Leonardo de Pisa e de sua influência na apresentação e utilização dos algarismos indo-arábicos na Europa em vez dos algarismos romanos amplamente utilizados, mas que dificultavam as operações matemáticas e, consequentemente, as relações comerciais.

Ademais, ao trabalharmos com a história de Fibonacci (Leonardo de Pisa), é possível mostrar que a Matemática é desenvolvida com a intenção de resolver problemas reais desde muito tempo, bem como mostrar que o conhecimento que temos hoje é fruto de contribuições de inúmeros estudiosos ao longo da história. Essa abordagem pode estreitar a relação entre os discentes e os grandes nomes da disciplina, fazendo com que esses se tornem mais “humanos” e, por isso, mais próximos e possíveis de serem seguidos.

Além do aspecto histórico do matemático que teve seu nome associado à famosa sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., na qual a partir do terceiro termo vale a regra de que o próximo termo é dado pela soma dos dois anteriores, existem vários exemplos práticos na Natureza em que esse modelo está presente.

Com um olhar mais específico para a Matemática do Ensino Fundamental, a BNCC inclui habilidades na unidade temática de Álgebra para trabalhar com sequências numéricas recursivas nas quais o trabalho com a sequência de Fibonacci se encaixa.

Finalmente, além de todos esses aspectos, pretendo apresentar um possível desdobramento dessa abordagem de modo a estimular o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, propondo a construção de fluxogramas para ilustrar a quantidade de termos na sequência de Fibonacci e suas propriedades no tempo, além de explorar os parâmetros que a caracterizam, para depois sugerir algumas variações desses parâmetros e construir os respectivos fluxogramas.

Na figura 1 apresento um esquema resumindo a proposta a ser apresentada nesse trabalho.

Figura 1: Resumo da proposta de abordagem da sequência de Fibonacci

Esse trabalho foi estruturado de tal maneira que no capítulo 1 incluo os objetivos e motivação. No capítulo 2, a fundamentação teórica da proposta, no qual documentos oficiais da Educação Básica são apresentados. No capítulo 3 será abordada a história de Leonardo de Pisa, suas contribuições na Matemática e propriedades geométricas da sequência de Fibonacci; já no capítulo 4 serão abordadas aplicações da sequência. No capítulo 5 serão propostas atividades envolvendo a sequência de Fibonacci para avaliar a aprendizagem dos fundamentos dessa sequência com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. No capítulo 6, apresento as considerações finais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Sempre foi possível encontrar na Matemática um aparato para o desenvolvimento de novos conhecimentos e ciências, bem como para a boa formação do indivíduo. Desde a Idade Média, com a educação baseada no Trivium (Retórica, Lógica e Gramática) e Quadrivium (Música, Aritmética, Geometria e Astronomia), passando pela Modernidade e Contemporaneidade, a Matemática é um dos fundamentos para a formação do intelecto humano.

Conforme Rico (2019), atualmente há um projeto que se iniciou nos Estados Unidos, conhecido como STEAM, que corrobora com a mesma ideia, uma vez que inclui a Matemática como um dos pilares da potencialização da aprendizagem do indivíduo. Trata-se de uma tendência da educação que defende a ideia de que uma aprendizagem integrada é mais atrativa e eficiente do que aquela em que cada componente do currículo é trabalhado de forma isolada, uma vez que as questões do cotidiano são complexas e envolvem capacidades que são trabalhadas em diversas disciplinas. Nesse sentido, cada uma das letras da sigla STEAM têm o seguinte significado: S (Science/Ciências); T (Technology/Tecnologia); E (Engineering/Engenharia); A (Art/Artes); M (Mathematics/Matemática). A intenção do STEAM, portanto, é fazer com que as particularidades de cada uma das áreas se somem.

Sabendo da importância da Matemática no processo de uma aprendizagem integrada, a abordagem da sequência de Fibonacci no Ensino Fundamental se torna importante por apresentar aos alunos, através da resolução de problemas específicos, as possibilidades de estruturação do raciocínio e de desenvolvimento cognitivo.

Nesse sentido, a aplicação da sequência de Fibonacci é interessante também por colocar em prática princípios relevantes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), que sustentam o que foi dito:

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. (BRASIL, 1997).

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. (BRASIL, 1997).

Também é importante mencionar que ao estudar os problemas pelos quais a humanidade passou e como eles foram resolvidos através da Matemática, o aluno começa a perceber o esforço conjunto na construção desse conhecimento:

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo. (BRASIL, 1997).

Seguindo adiante, embora o conhecimento matemático tenha surgido a partir da Aritmética e Geometria, que são áreas mais voltadas à necessidade de calcular, medir e organizar o espaço, o surgimento da Álgebra inaugura um novo momento em que teve início a sistematização e organização dos conhecimentos matemáticos. Para evitar uma dissociação entre as partes, o estudo entre elas deve ser interligado para que se desenvolva um sentido de unidade na disciplina. Com isso, a BNCC prevê que a relação da álgebra com o estudo das sequências e dos números deve estar presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, podendo ser realizada de maneira eficaz através da sequência de Fibonacci.

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. (BRASIL, 2017, p. 270)

Se a aplicação da relação entre números e álgebra for feita de modo satisfatório, é possível alcançar o desenvolvimento de um modelo de pensamento eficaz como consequência direta dessa interação, uma vez que os modelos algébricos podem esclarecer e representar de maneira mais precisa as estruturas dos números, das sequências e suas regras de formação:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas,

> fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos (BRASIL, 2017, p. 270).

A mesma BNCC define pensamento computacional como ferramenta que

> Envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos. (BRASIL, 2017).

Cumpre salientar que, além das competências citadas anteriormente, o pensamento computacional é mais uma ferramenta desenvolvida como um desdobramento do estudo das sequências, uma vez que é necessário que os estudantes transformem as informações dadas num problema em relações e cálculos matemáticos. A BNCC dispõe que:

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa [...] Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL, 2017, p. 271).

Por isso, o próprio aprofundamento no estudo da sequência de Fibonacci, que abarca conceitos de números e Álgebra, promove competências matemáticas e trabalha as habilidades propostas na BNCC, desenvolvendo competências que irão colaborar não só com a vida escolar do aluno, mas também com sua capacidade de resolver problemas na vida pessoal e futura vida profissional.

Para concluir esse capítulo, enumero as habilidades da BNCC envolvidas nessa proposta, destacando que existe uma flexibilidade entre elas e os anos escolares, sabendo que pode haver um pequeno adiantamento ou atraso entre anos adjacentes como sexto e sétimo.

- (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
- (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).
- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
- (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
- (EF07MA15): Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- (EF08MA11): Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Pode-se mencionar também algumas habilidades de anos iniciais do Ensino Fundamental.

- (EF01MA10): Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
- (EF02MA09): Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
- (EF02MA10): Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
- (EF02MA11): Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

3. HISTÓRIA DE LEONARDO DE PISA E ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Neste capítulo, será abordada a história de Leonardo de Pisa e da sequência que leva o seu nome. Depois disso, definições e propriedades da Sequência de Fibonacci serão apresentadas.

3.1 História de Leonardo de Pisa

Figura 2. Leonardo de Pisa
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Zahan, 2011, p. 9)

De acordo com Boyer (1974), Leonardo Fibonacci, também chamado de Leonardo de Pisa, nascido em 1170 na cidade italiana de Pisa foi um matemático de grande influência na Idade Média, inclusive sendo considerado por alguns como o maior matemático desse período. Filho de Guglielmo dei Bonacci (de onde vem "Fibonacci", isto é, *filho de* Bonacci), mercador da região de Pisa, acompanhou as atividades do pai no porto da cidade, onde tomou contato com a matemática indo-arábica praticada no comércio oriental.

Conforme Bez (1997), Guglielmo representou, durante algum tempo, os interesses comerciais de Pisa em Bugia, cidade na atual Argélia. Devido a essas viagens de seu pai, Leonardo percorreu todo o Mediterrâneo, passando pela Espanha muçulmana, o Levante e familiarizando-se com a matemática árabe. Em Bugia, Fibonacci teve aulas com um professor muçulmano, através de quem foi apresentado ao sistema de numeração indo-arábico. Ele também apresentou Fibonacci a um livro sobre Álgebra, *Hisab al-jabr w'al muqabalah*, escrito pelo matemático Al-Khowarizmi, de quem o nome origina a palavra *algarismo*.

Em 1200 retornou à Itália convencido de que o sistema de numeração indo-arábico era superior ao romano para a realização de operações matemáticas. Como matemático ainda foi convidado para um torneio pelo imperador romano-germânico Frederico II, onde teve suas habilidades com os números testadas.

> Sob a proteção do imperador Frederico II, e por ter resolvido problemas matemáticos da corte, Fibonacci aprofundou seus estudos sobre matemática, avaliando que os algarismos arábicos seriam mais eficientes que os números romanos para cálculos aritméticos. Isso fez com que o matemático pudesse viver apenas dos estudos e pesquisas. (FRAZÃO, 2017)

Por volta de 1202 publicou o Liber Abaci, dedicado à Geometria, Aritmética e Álgebra Elementar, tratando de problemas algébricos e introduzindo o uso dos numerais indo-arábicos, uma vez que estava convencido de sua superioridade frente ao sistema de numeração romano.

> O Liber Abaci foi um veículo que permitiu difundir na Europa ocidental o sistema de numeração indo-árabe que era usado, ocasionalmente, já há alguns séculos antes de Leonardo de Pisa e que fora trazido pelos mercadores, embaixadores, eruditos, peregrinos e soldados vindo da Espanha e do Oriente. (STRUICK, 1989, p. 139)

Segundo Koshy (2001), por volta de 1240, alguns anos após a morte de Fibonacci, comerciantes italianos começaram utilizar o sistema indo-arábico em seus negócios. A maior parte do continente europeu já o tinha adotado até o fim do século XVI, tendo o Liber Abaci um papel significativo na substituição do sistema de numeração romano para o sistema indo-arábico.

3.2 O problema do coelho

Fibonacci torna-se mais conhecido a partir dessa obra, uma vez que, segundo Boyer (1974), no 12º capítulo do Liber Abaci demonstra a resolução de um problema conhecido atualmente como o problema da reprodução dos coelhos, narrado da seguinte forma: *"Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano, quantos casais de coelhos estão no pátio?"*.

Para fins de estudo, não serão consideradas mortes de alguns dos coelhos ou infertilidade. Sendo assim, no primeiro mês há apenas um casal de coelhos, os quais se tornarão adultos férteis apenas no segundo mês. No terceiro mês esses terão um novo casal de coelhos, os quais também se tornarão férteis no seu segundo mês de vida, e assim por diante. Podemos representar o problema com a tabela a seguir:

Mês	Casais adultos	Casais jovens	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 1. Representação esquemática do problema do coelho. Criada pelo autor

O problema também pode ser apresentado através de um fluxograma, como a figura 3:

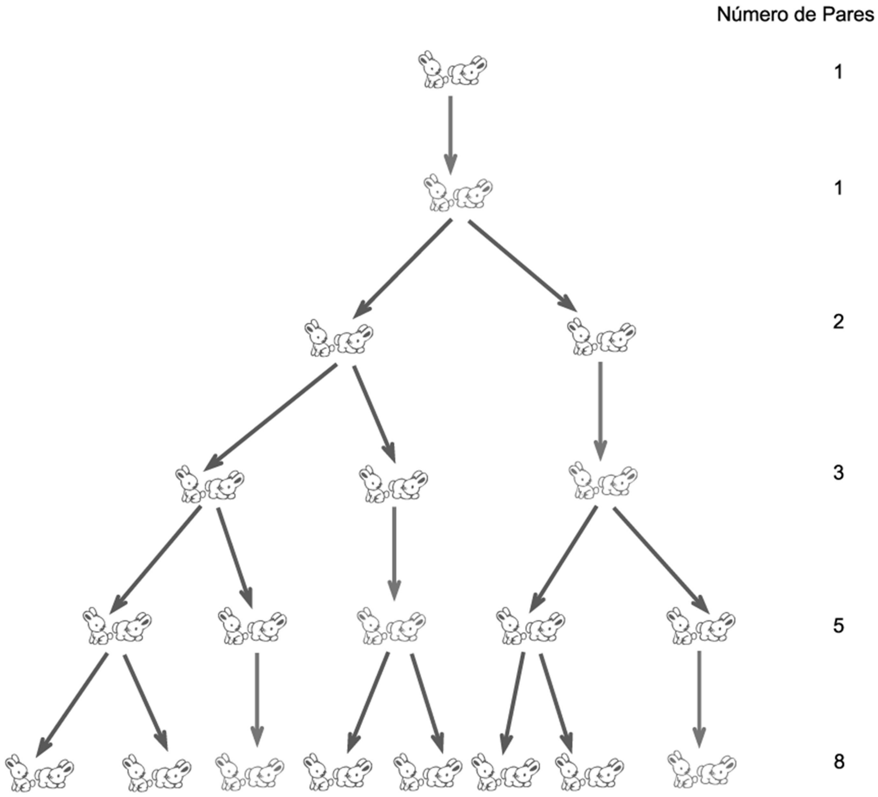


Figura 3. Representação em fluxograma da resolução do problema dos coelhos

A solução do problema é então determinada como 144. Porém, o mais importante para o nosso estudo é perceber que, a partir do terceiro mês, o total de casais de coelhos em determinado mês é igual à soma do número de casais dos dois meses imediatamente anteriores.

3.3 Sequência de Lucas e Fibonacci

Através da solução do problema dos coelhos forma-se a sequência:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

A sequência numérica apresentada acima recebeu o nome de Sequência de Fibonacci por François Edouard Anatole Lucas (1842-1891), um matemático francês que contribuiu também para a Teoria dos Números e desenvolveu volumes sobre matemática lúdica. Uma de suas principais invenções é o que hoje conhecemos como Torre de Hanói (fig. 1), que consiste numa brincadeira cujo objetivo é transferir discos de uma torre à outra, onde o número mínimo de movimentos dá-se pela solução $2^n - 1$, onde n representa a quantidade de discos. Assim, caso a torre apresente três discos, a solução é $2^3 - 1 = 7$.

Figura 4 – Torre de Hanói
Disponível em: <https://www.matematica.pt/fun/torre-hanoi.php>

A Sequência de Fibonacci é então caracterizada como uma recorrência de números naturais. É necessário definir como condição inicial que:

$$f_1 = f_2 = 1$$

Com isso, tem-se a relação de recorrência:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,; \qquad \text{com } n > 2,\ n \in \mathbb{N}$$

3.4 Propriedades geométricas decorrentes da sequência de Fibonacci.

É possível deduzir, a partir da sequência de Fibonacci, algumas consequências matemáticas que serão mostradas a seguir, formando figuras ou padrões que são usados desde simbolismo de sociedades secretas, como o pentagrama, até a fotografia, como a espiral de ouro.

3.4.1 Número de Ouro

A sequência de Fibonacci não está associada historicamente somente ao problema da reprodução de coelhos. Outros problemas clássicos como o triângulo de Pascal ou então a árvore genealógica de um zangão também estão profundamente associados à sequência estudada. Além deles, a sequência de Fibonacci e o número de ouro, isto é, o número que é encontrado a partir dessa sequência, estão presentes em diversas outras realidades da natureza e da humanidade, tais como, dentre outras, a literatura, música, formato de seres vivos e disposição dos galhos das árvores.

De acordo com Lívio (2011), alguns dos maiores matemáticos como Pitágoras, Leonardo de Pisa e o astrônomo Johannes Kepler, bem como cientistas contemporâneos como o físico Roger Penrose dedicam-se ao estudo da sequência e de suas propriedades. Contam-se ainda nessa lista artistas, historiadores, músicos, biólogos, arquitetos e psicólogos. Conforme o mesmo autor, o motivo para toda essa reunião de diferentes especialidades em torno de um mesmo assunto é o número conhecido por vários nomes como "Razão Áurea", "Proporção Divina" ou "Número Áureo".

> De qualquer forma ele foi descoberto, sua presença é marcante não só nos vegetais, mas nos seres vivos em geral, inclusive no homem, nos cristais, na natureza e no próprio cosmos. Depois de sua descoberta, de forma brilhante, o homem, através da álgebra, o equacionou e chegou numa proporção, à qual deu o nome de proporção áurea, e foi através, principalmente, da geometria, que pôde vislumbrar as formas perfeitas que a ele estão relacionadas. Foi através dele que buscou o entendimento não só da estrutura da natureza e do Universo mas, principalmente, do próprio homem. (CONTADOR, 2011, p. 18-19)

Encontramo-lo a partir de uma breve definição disponível no Livro VI dos Elementos de Euclides: um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo. Suponhamos que o segmento tem comprimento total igual a 1 e que o segmento maior tem medida x, conforme imagem abaixo:

Então a definição de Euclides pode ser traduzida na seguinte equação:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

Daí, segue que

$$x^2 + x - 1 = 0$$

E como x é positivo, tem-se que

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Com isso,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{x}{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Portanto, temos que o número de ouro corresponde ao valor aproximado de 1,618 e é denotado pela letra grega φ (phi), em homenagem ao escultor Phideas, que o teria utilizado para construir o Parthenon.

3.4.2 Retângulo de Ouro

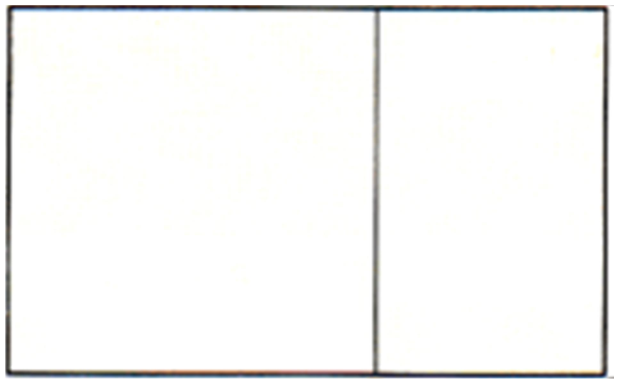


Figura 5. Retângulo de ouro
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Lopes, 2006)

Esse número também pode ser representado a partir do retângulo de ouro. De acordo com Leopoldino (2016 apud. Zahn 2011, p. 31-32), "chama-se retângulo áureo qualquer retângulo no qual a razão de suas medidas obedece à razão áurea com a seguinte propriedade: se dele retirarmos um quadrado, o retângulo restante será semelhante ao retângulo original".

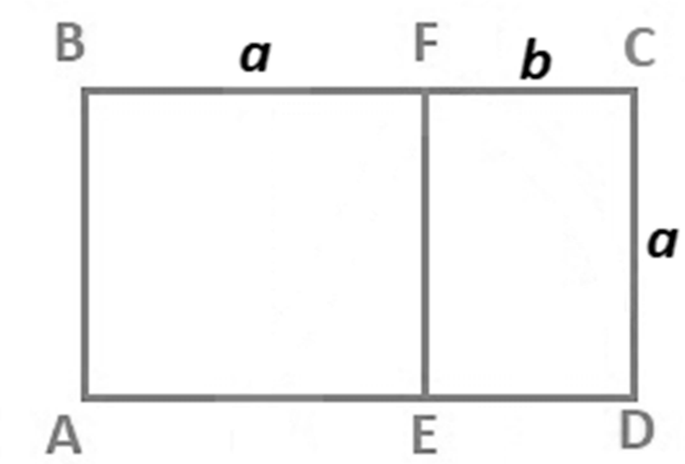


Figura 5.1. Retângulo de ouro

Da figura acima tem-se que

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

De onde se pode tirar

$$ab + b^2 = a^2 \quad (1)$$

Para construí-lo, pode-se obedecer aos seguintes passos:

1) Constrói-se um quadrado ABFE de lado *a* e marca-se o ponto médio da base do quadrado, chamando-o de M.

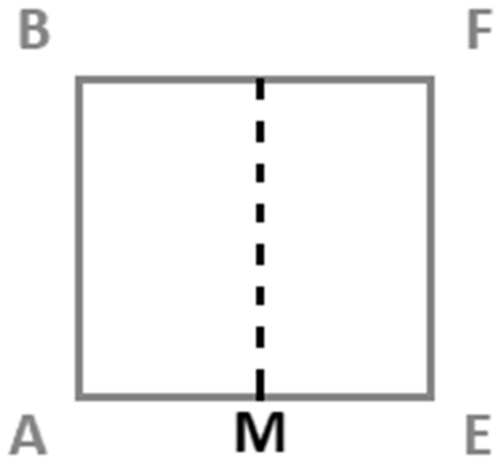


Figura 5.2. Retângulo de ouro (1ºpasso)

2) A partir daí, traça-se a diagonal que liga o ponto médio M ao vértice oposto F.

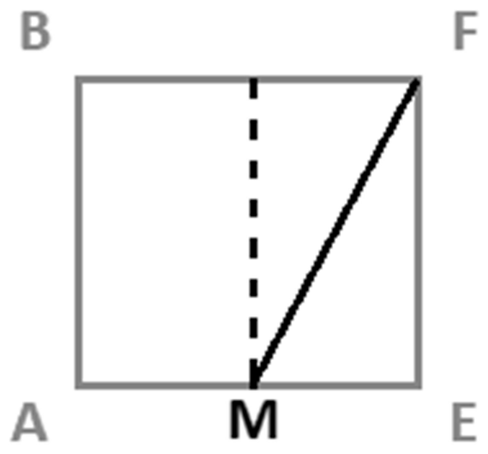


Figura 5.3. Retângulo de ouro (2ºpasso)

3) Fixando a ponta seca do compasso em M, traça-se o arco com comprimento MF até que encontre o prolongamento do segmento de reta AE. O ponto de intersecção do arco com o prolongamento de AE será o ponto D.

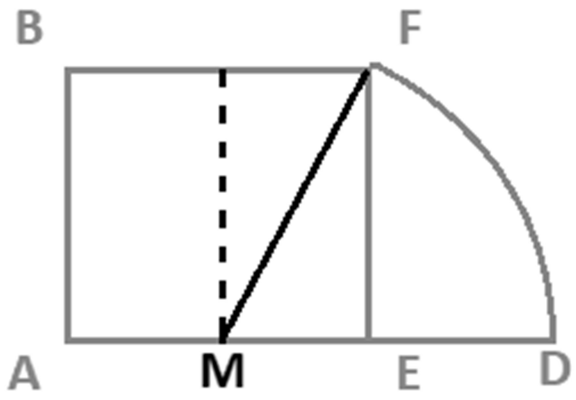


Figura 5.4. Retângulo de ouro (3ºpasso)

4) A partir do ponto D, traça-se um segmento de reta perpendicular ao segmento AD. Depois disso, prolonga-se o lado BF até que encontre o segmento de reta no ponto E.

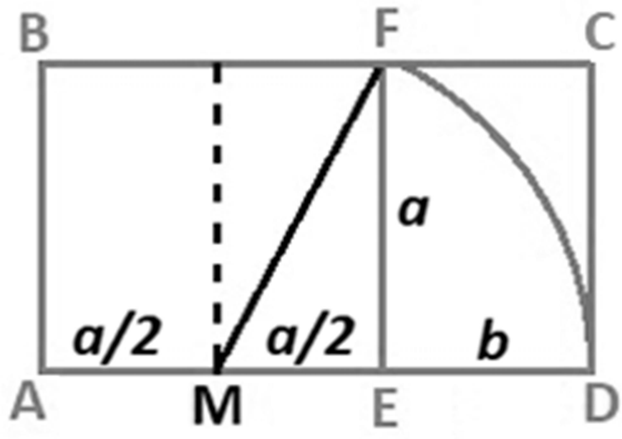


Figura 5.5. Retângulo de ouro (4ºpasso)

Para ter certeza de que se trata de um retângulo de ouro basta notar que:

$$MF = MD = b + \frac{a}{2}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo MEF, têm-se

$$(b + \frac{a}{2})^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$$

Daí vem:

$$b^2 + ab = a^2$$

Conforme a equação (1), demonstrando assim a validade da demonstração.

5) Por fim, está construído o retângulo de ouro.

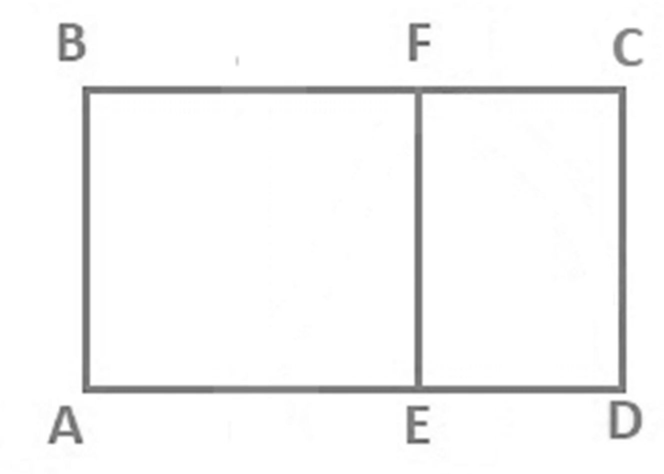


Figura 5.6. Retângulo de ouro concluído

É possível, também, realizar outras construções de retângulos de ouro dentro dos já construídos anteriormente, conforme figura 6.

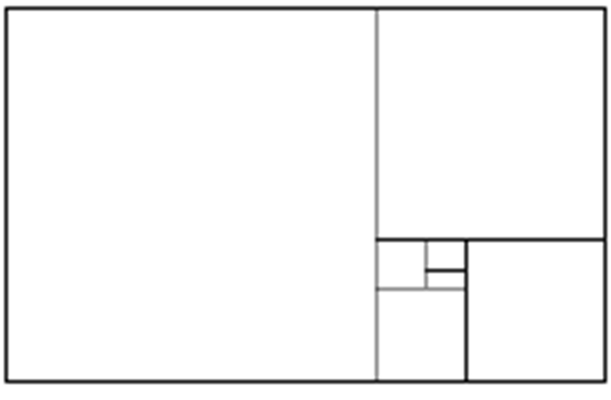


Figura 6. Retângulos de ouro.
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Ramos, 2013, p. 42)

3.4.3 Espiral de Ouro

É possível construir, a partir dos retângulos de ouro, uma curva chamada de espiral de ouro. Leopoldino (2016 apud. Zahn, 2011) explica que é feita utilizando-se o compasso nos quadrados já construídos, traçando-se arcos que são quartos de circunferência contidos em cada um dos quadrados.

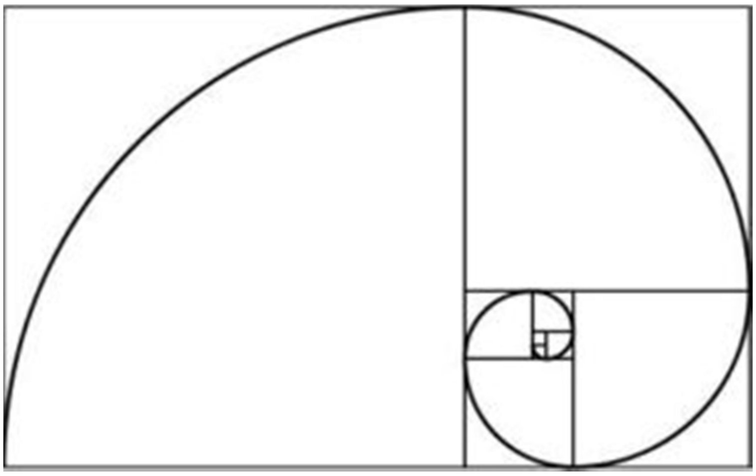


Figura 7. Espiral de Ouro
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Zahn, 2011, p. 32)

É possível também construir uma espiral de ouro a partir dos lados do retângulo áureo, conforme figura abaixo. Considerando que a razão entre o maior e o menor lado do retângulo é igual a φ, traçaremos a espiral a partir dos lados dos retângulos de ouro que são construídos no interior do retângulo anterior, mantendo a mesma razão.

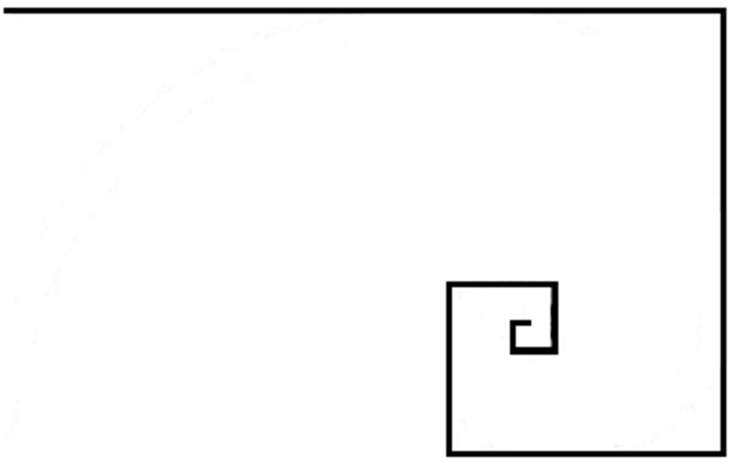


Figura 7.1. Espiral de Ouro

3.4.4 Pentagrama

A definição do pentagrama como uma figura áurea aqui apresentada será baseada em Afeitos (2013). Parte-se do princípio de que existem apenas cinco sólidos platônicos, isto é, figuras tridimensionais cujos lados possuem a mesma medida.

Esses sólidos eram, na Grécia Antiga, relacionados com elementos da natureza, a saber: cubo associado a terra; tetraedro ao fogo; octaedro ao ar; icosaedro à água; e dodecaedro ao cosmos. Dessa forma o dodecaedro é a figura mais importante dentre todas, uma vez que simboliza todo o universo.

A partir dessa figura, formada por doze faces em formato pentagonal é possível formar o pentagrama através da união dos vértices a partir das diagonais.

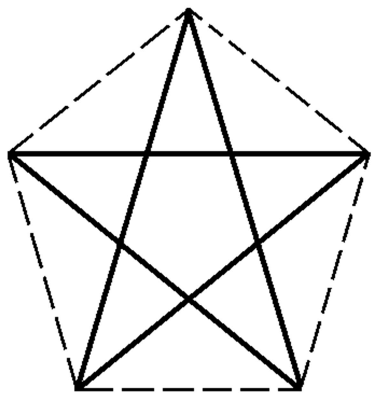


Figura 8. Pentagrama inserido no pentágono

O pentagrama foi também símbolo dos pitagóricos, além de ser associado a sociedades secretas. Além disso, guarda uma relação interessante com o número de ouro. Para analisar essa relação, considere a figura ABCDE.

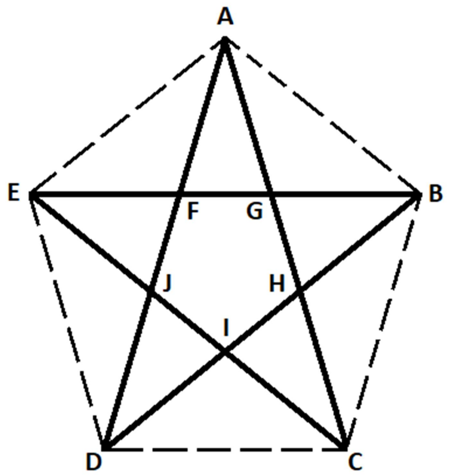


Figura 8.1. Pentagrama inserido no pentágono

Tome agora a diagonal EB e suas intersecções. É possível estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \varphi$$

Para demonstrar a equação acima, considere os triângulos isósceles AEJ e AFG:

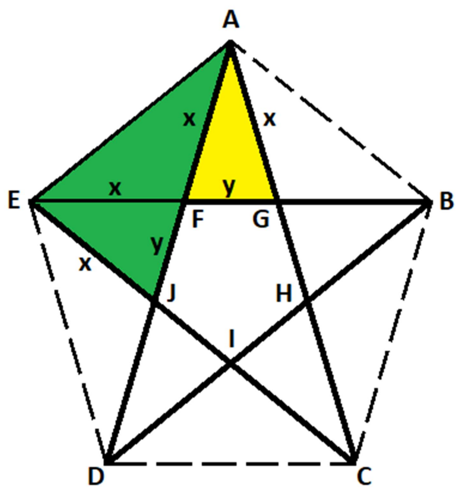


Figura 8.2. Pentagrama inserido no pentágono

Pelos dois triângulos mencionados serem isósceles, é possível fazer a seguinte relação:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \quad (2)$$

Onde $\frac{x}{y}$ é relação no triângulo AFG, enquanto $\frac{x+y}{x}$ é relação no triângulo AEJ.

De (2), vêm que:

$$x^2 = xy + y^2$$

A partir daí, tem-se:

$$x^2 - xy - y^2 = 0$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{y^2}$, encontra-se:

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1 = 0$$

Substituindo $\frac{x}{y}$ por m, obtém-se:

$$m^2 - m - 1 = 0$$

Cuja solução possível é:

$$m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Ou seja,

$$\frac{x}{y} = m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

4. APLICAÇÕES

Nesse capítulo serão abordadas aplicações da sequência de Fibonacci em diversas realidades, sejam elas pertencentes a criações do homem ou à natureza.

4.1 Literatura

O número de ouro encontra sua aplicação mais conhecida, segundo Lívio (2011), no poema de Homero chamado Ilíada, que fala sobre os últimos dias da guerra de Tróia. É possível encontrar um valor próximo ao número 1,618 na razão entre as estrofes maiores e menores.

Já na saga Eneida, de Virgílio, que trata sobre Eneias e como ele é salvo da morte em Tróia, é possível notar a razão divina na proporção entre as estrofes maiores e menores. Por fim, na obra Os Lusíadas, de Luís de Camões, é possível notar que a chegada dos portugueses à Índia divide a obra na razão divina.

4.2 Música

Para que uma música possa ser tida como boa é necessário que disponha de uma boa harmonia entre os acordes, sendo alcançada a partir das razões entre os números obtidos constituintes da escala musical. Conforme Afeitos (2013), a estrutura do ritmo e da harmonia da música é baseada na razão de ouro. Tomando os intervalos musicais, a oitava (2:1) e a quinta (3:2) são os mais simples e agradáveis de ouvir. Olhando com mais atenção, percebe-se que os seus números constituintes são os primeiros da sequência de Fibonacci. A proporção continua ainda com a sexta maior (5:3) e menor (8:5), além da próxima que é (13:8).

O número de ouro também está presente na Sinfonia nº5 e Sinfonia nº 9 de Ludwig van Beethoven. Ainda segundo Afeitos (2013), o compositor e pianista húngaro Béla Bartók utilizava desta proporção em suas obras.

4.3 Botânica

Segundo Rodrigues e Câmara (2008), quando as folhas brotam nos ramos das plantas não se dispõem de modo regular, uma vez que, assim, as folhas superiores fariam sombra nas inferiores. Dessa forma, há uma separação angular das bases de duas folhas sucessivas da planta, cuja medida é feita através de uma espiral traçada da raíz da planta até o ponto de crescimento. Douady e Couder, ambos matemáticos franceses, em 1993 demonstraram matematicamente que o ângulo tem como medida 222º29'34". Esse mesmo ângulo recebeu o nome de "ângulo ótimo".

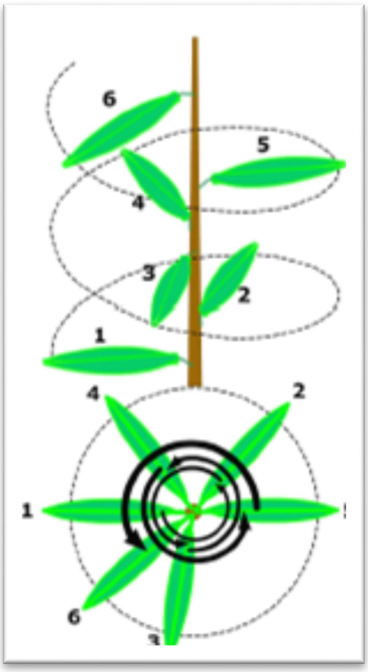


Figura 9. Esquema da disposição das folhas
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Mendes, 2017, p. 131)

Nesse sentido, conforme Rodrigues e Câmara (2008), se uma folha brotar formando esse ângulo com a que fica logo abaixo dela em cada geração sucessiva, a probabilidade de que uma folha venha a se localizar logo acima de outra é reduzida ao mínimo e o aproveitamento de recursos é o máximo possível.

Figura 10. Girassol
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Mendes, 2017, p. 131)

Os autores ainda comentam que o "ângulo ótimo", quando convertido para notação decimal resulta em 222,492º. Esse valor, quando divide 360º tem como resultado aproximado 1,618, ou seja, o próprio número de ouro.

$$\frac{360^{\circ}}{222{,}492^{\circ}} = 1{,}618 = \varphi$$

Conforme Leopoldino (2016 apud. Zahn, 2011), algumas plantas possuem números de Fibonacci escondidos atrás de sua beleza. De maneira geral, as margaridas têm 13, 21, 34, 55 ou 89 pétalas, conforme figura 7; já os crisântemos têm 34 pétalas. Continua afirmando que os girassóis têm suas sementes distribuídas em espirais, normalmente 34 espirais no sentido horário e 21 no sentido anti-horário, de acordo com a figura 8.

Figura 11. Margarida com 34 pétalas
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Zahn, 2011, p. 12)

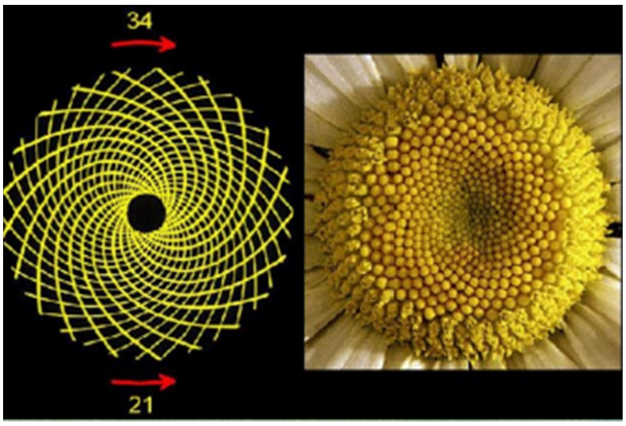


Figura 12. Espirais no girassol
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Ramos, 2013, p.60)

Pode-se dizer também, conforme Rodrigues (2008), que de maneira geral em muitas plantas os galhos e ramos crescem em quantidades baseadas nos números da sucessão de Fibonacci, conforme figura 9.

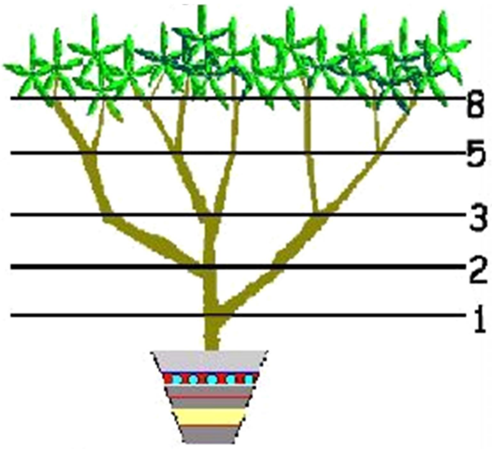


Figura 13. A distribuição de ramos e a sequência de Fibonacci
Fonte: Rodrigues (2008)

Vale ressaltar que, de acordo com Ramos (2013 apud. Lívio, 2011, p. 136), o crescimento da planta também depende de outros fatores, fazendo com que as regras expostas acima não sejam vistas em todas as circunstâncias como uma regra da natureza. Ainda sobre a presença da sequência de Fibonacci na botânica, conforme Ramos (2013), "nas palavras do famoso matemático canadense Coxeter, elas são 'apenas uma tendência fascinantemente predominante'".

4.4 Fauna

Através da espiral de ouro é possível encontrar a Sequência de Fibonacci no reino animal. Pode-se encontrá-la em formatos de galáxias, chifres de alguns animais, conchas do mar, dentre outras.

A título de exemplo é possível citar a concha marinha onde vive o molusco *Nautilus pompilius*. Ramos (2013) afirma que, "à medida que esse molusco cresce dentro da concha, ele constrói câmaras cada vez maiores, onde as menores são fechadas por não serem mais usadas. Tais câmaras sucessivas estão relacionadas, aproximadamente, na Razão Áurea".

Carneiro e seu chifre espiralado

Galáxia

Nautilus pompilius

Redomoinho

Figura 14. Formas espiraladas na Natureza.
Fonte: Ramos (2013)

4.5 Corpo humano

De acordo com Ramos (2013), na Grécia Antiga já havia evidências do conhecimento da presença do número de ouro no corpo humano, fato que passou a ser analisado com maior precisão no Renascimento.

Ainda com Ramos (2013), pode-se dizer que algumas razões no corpo humano tendem a ser áureas, tais como:

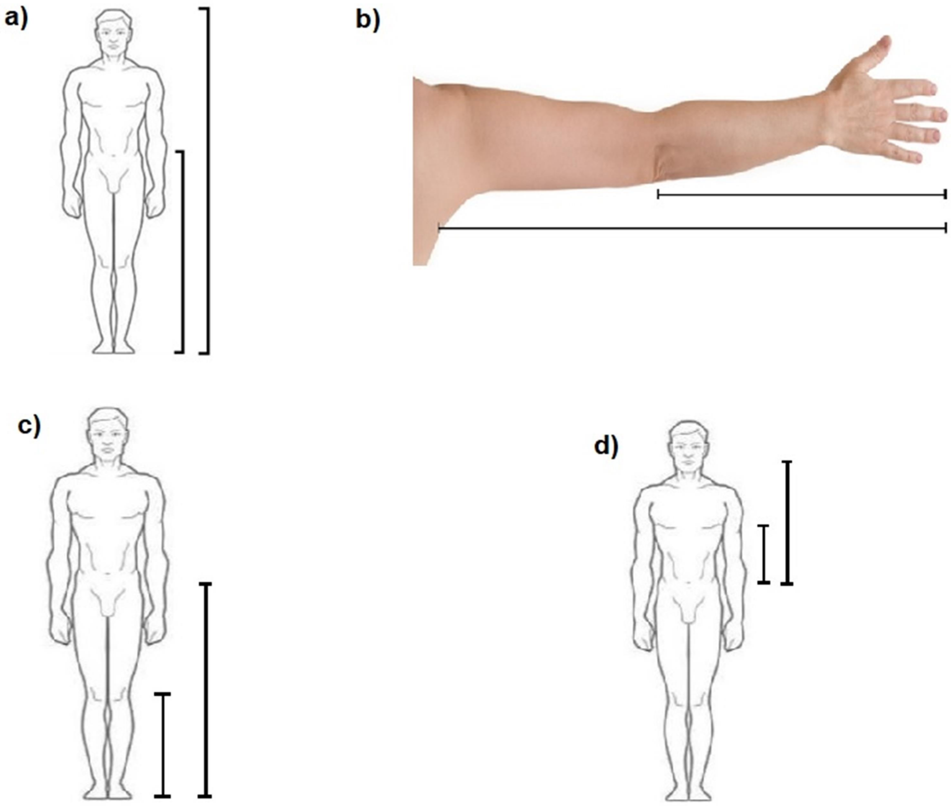


Figura 15. Razões áureas no corpo humano.
Criada pelo autor

a) Razão da altura total pela altura do umbigo;
b) Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio;
c) Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos;
d) Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax;

4.6 Artes e Arquitetura

É dito também que o número de ouro está presente nas técnicas para alcançar a beleza e harmonia nas artes, embora não se encontre em todas as obras.

> Com a insistente busca pela beleza e perfeição em suas obras, renomados artistas, tais como Piet Mondrian, Cândido Portinari, Michelangelo, Salvador Dalí, Albrech Dürer, Leonardo da Vinci, dentre outros, usaram o número áureo, por meio do retângulo de ouro, em suas criações artísticas, para lhes conferir harmonia. (FERRER, 2005, p. 9)

Assim, diversas obras de arte ao longo da história são conhecidas por terem em suas proporções e medidas a razão áurea. Segundo Possebon (2016), Michelângelo pinta, em sua obra “A Criação de Adão”, o dedo de Deus tocando o dedo de Adão no ponto de proporção áurea da largura e altura da área que contém os dois.

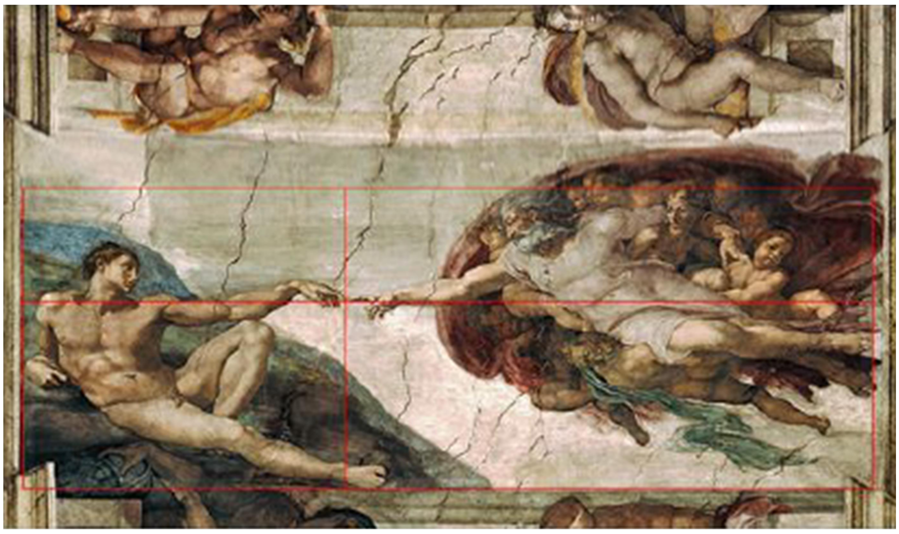


Figura 16. “A Criação de Adão”, de Michelângelo
Fonte: Possebon (2016 apud. Meisner, 2014)

Ainda com Possebon (2016), Salvador Dalí enquadrou sua pintura “O Sacramento da Última Ceia” em um retângulo de ouro, posicionando a mesa na razão áurea da altura da pintura; os discípulos de Jesus Cristo na proporção áurea da largura da obra; e as janelas do fundo formam um dodecaedro, composto por 12 pentágonos, exibindo relações áureas em suas proporções.

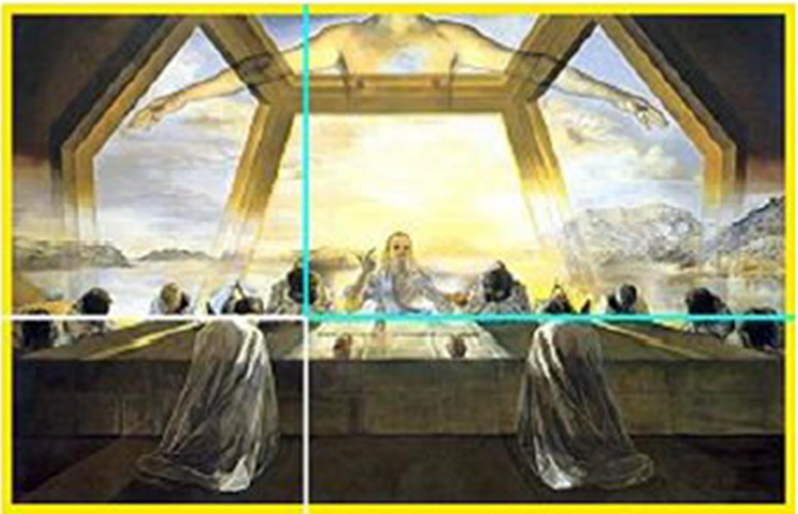


Figura 17. “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí
Fonte: Possebon (2016 apud. Meisner, 2014)

Já sobre a arquitetura,

> Os Egípcios consideravam o número de ouro sagrado tendo uma importância extrema na sua religião e chamavam-no não de número de ouro, mas sim de "número sagrado". Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que, caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar aos deuses, ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao além. Para além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos. (LEOPOLDINO, 2016 apud. VEIGA, 2006, p. 7)

Segundo Saraiva (1990), foi utilizado o triângulo áureo nas faces laterais da pirâmide de Quéops, a maior entre as encontradas na necrópole de Gizé, que se caracteriza como sendo uma pirâmide reta de base quadrada. Essa pirâmide tem 230 metros de base e 142,6 metros de altura, aproximadamente.

Figura 18. Pirâmide de Quéops
Disponível em: < http://filosofiaetecnologia.blogspot.com/2011/07/grande-piramide-de-keops.html>. Acesso em 27 mai. 2020

Conforme Leopoldino (2016 apud. Veiga, 2006), são notadas presenças da razão áurea nas ruínas do Parthenon, templo grego dedicado à deusa Atena, construído em Atenas, na Grécia, entre 447 a.C. e 443 a.C.

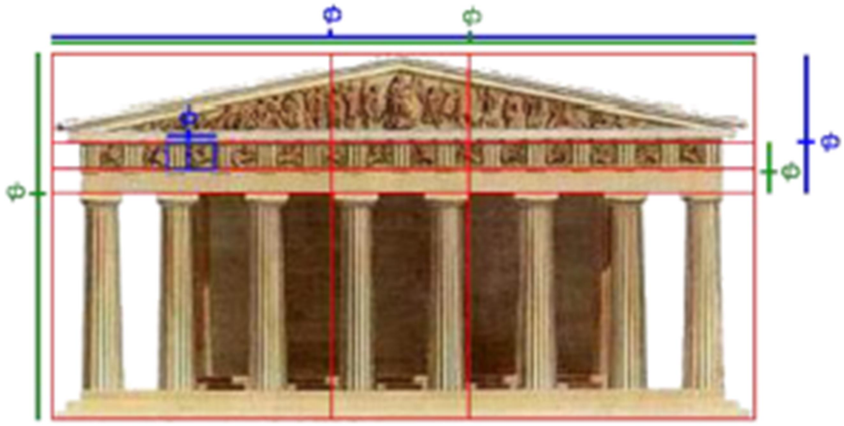


Figura 19. Parthenon
Fonte: Leopoldino (2016 apud. Veiga, 2006, p.11)

4.7 Mercado financeiro

A sequência é utilizada como uma das ferramentas possíveis para projetar o recuo do preço de algum ativo, quando esse está em tendência. Conforme Castilhori (2020), o cálculo da projeção é realizado através de níveis determinados pela razão entre termos da sequência.

> Embora esses níveis sejam utilizados no mercado financeiro é difícil mensurar ou descobrir quando essa abordagem começou a ser utilizada no contexto da análise das movimentações dos preços. A maioria das literaturas já começa falando sobre o assunto sem introduzir quando começou. No entanto, é notório compreender que o olhar para o número de ouro (ou a proporção divina) muitas vezes está associado às crenças e ao misticismo, uma vez que esse número está anexado na natureza e nas formas e é considerado, por muitos, divino e especial. (CASTILHORI, 2020, p.43)

5. PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo serão abordadas atividades propostas para o sexto ano do Ensino Fundamental. Antes disso, é necessário relevar que a Matemática tem sua importância como uma ciência fundamental na solução de variados tipos de problemas, podendo ser descrita, segundo Perius (2012), como um método que fornece instrumentos para compreender e atuar no mundo que nos cerca.

Pode-se afirmar, então, que a Matemática no Ensino Fundamental exerce um papel de facilitadora para o desenvolvimento e estruturação do pensamento do indivíduo, bem como para os primeiros passos na formação da cidadania.

Por isso, de acordo com Giardinetto (1996), o processo de ensino-aprendizagem precisa oferecer condições para que o aluno possa absorver o conhecimento do conteúdo estudado, apropriando-se da lógica das relações existentes, ou seja, aprender o conceito.

Conforme o Plano Curricular Nacional (2006), o processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve ser abordado de modo a levar os alunos a um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático nos aspectos de formular questões, questionar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e criar soluções, apresentar exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar com fundamentação lógico-dedutiva.

Assim, seguindo Giardinetto (1999), a aquisição de conhecimento sistematizado possui como mediador a esfera escolar. Ela tem como função possibilitar a cada indivíduo o acesso às objetivações para si, ou seja, tomar posse do conhecimento acumulado pelas gerações passadas ao decorrer do tempo.

Nesse sentido, as atividades propostas buscam desenvolver o raciocínio dos alunos e relacionar o conhecimento matemático aprendido na sala de aula com a realidade concreta, a partir de exercícios que associam os conteúdos com a Sequência de Fibonacci e suas propriedades.

Com isso, para introduzir a Sequência de Fibonacci nas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental foi apresentado um vídeo da Etérea Studios intitulado *Nature by numbers*. Depois disso, foi narrada a história de Leonardo de Pisa como matemático italiano e também sua importância na transição do uso do sistema de numeração romano, que dificultava os cálculos matemáticos, para o hindu, cujas operações eram realizadas com mais velocidade e precisão.

Assim, na apresentação do problema dos coelhos foi utilizada uma proposta de fluxograma para o estudo da sequência (conforme figura 20), onde os estágios de cada termo seriam caracterizados. Essa proposta facilita o entendimento do desenvolvimento da sequência e é capaz de estimular o raciocínio do aluno na resolução do problema.

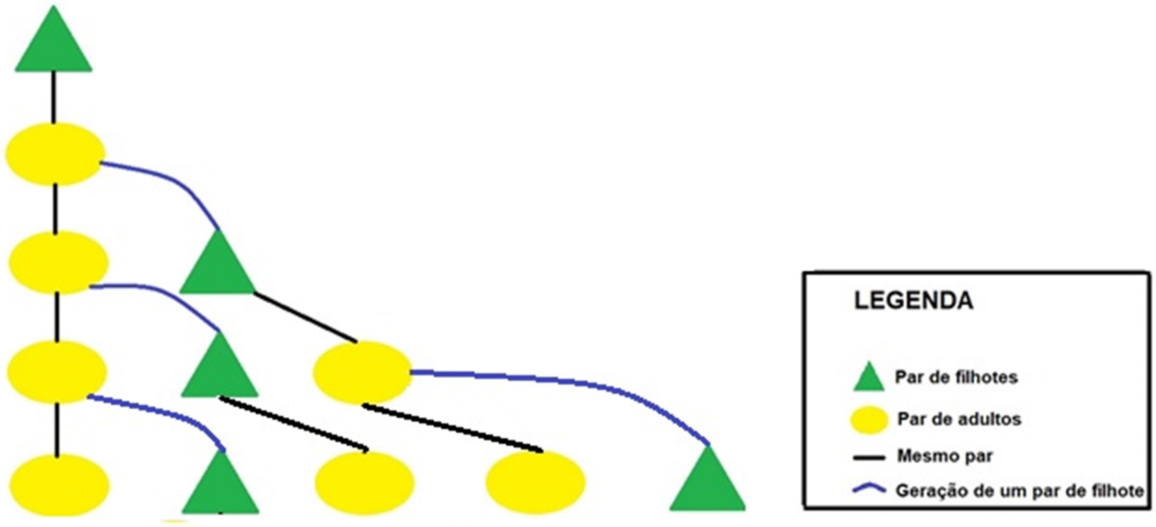


Figura 20. Exemplo de fluxograma utilizado para explicar o problema dos coelhos.
Criada pelo autor

Foram colocadas no Apêndice I, a título de curiosidade, questões de vestibulares brasileiros que abordam o conceito de Sequência de Fibonacci. O intuito com isso é de mostrar que, além de se tratar de um conceito importante para o desenvolvimento do raciocínio do estudante, também se trata de conteúdo que é abordado em vestibulares e, portanto, avaliado como conhecimento para acesso ao ensino superior.

5.1 Metodologia

A aplicação da proposta de atividades e da ficha de avaliação foi feita com quarenta e cinco alunos das turmas de 6º ano de uma escola particular da cidade de Cabo Frio, na região dos lagos do estado do Rio de Janeiro.

Para apresentar o conteúdo da sequência de Fibonacci fez-se uso no primeiro dia de duas vídeo-chamadas, em caráter excepcional por razão da quarentena imposta pelo Covid-19, com duração total de uma hora e quarenta minutos, onde foi explicado o conteúdo tratando da história de Leonardo de Pisa; em seguida foi abordado o problema dos coelhos exposto na obra Liber Abaci e sua resolução; depois foi apresentada a sequência de Fibonacci e suas propriedades básicas. Em seguida, os alunos assistiram ao vídeo *Nature by numbers*, disponível na internet em canais como *youtube*, para que pudessem ter acesso de forma audiovisual às aplicações na natureza da sequência de Fibonacci. Por fim, o problema dos coelhos foi resolvido usando o esquema de fluxograma, para familiarizar os alunos com essa nova ferramenta.

No segundo dia, numa nova vídeo-chamada com duração de cinquenta minutos, o conteúdo apresentado na aula anterior foi revisado e, em seguida, foi apresentada uma ficha de avaliação para que os alunos pusessem em prática o conhecimento adquirido.

A ficha de avaliação é composta de seis questões, onde cada uma aborda as seguintes habilidades da BNCC:

Questão 1:

(EF08MA11) - Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

(EF06MA34) - Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

Questão 2:

(EF08MA11) - Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Questão 3:

(EF08MA11): Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Questão 4:

(EF06MA04) - Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

(EF07MA07) - Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

Questão 5:

(EF08MA11) - Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

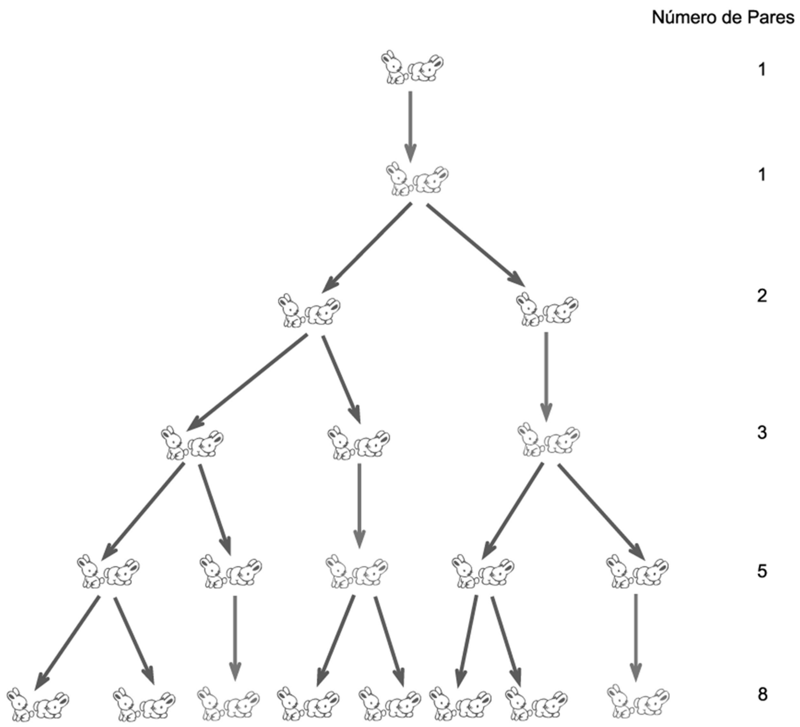
Questão 6:

Primeira competência específica da Matemática para o Ensino Fundamental na BNCC: Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

5.2 Ficha de Avaliação

Questão 1.

Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema dos coelhos: *"Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida"*.



Tomando como verdade que nenhum coelho morreu, responda: Quantos pares de coelhos existirão no 7º mês? Quantos pares de coelhos existirão no 8º mês?

a) 13 e 21
b) 8 e 13
c) 8 e 21
d) 21 e 43

Questão 2.

A concha do molusco Nautilus pompilius serve como casa para o animal. Conforme ele vai crescendo, constrói câmaras cada vez maiores, onde as menores são fechadas por não serem mais usadas. Tais câmaras sucessivas estão relacionadas, aproximadamente, na Razão Áurea. Considerando que as dimensões das câmaras crescem conforme a sequência de Fibonacci e são fechadas uma por ano, qual será o tamanho da câmara do 6º ano sabendo que as dos quatro primeiros anos possuem dimensão 1, 1, 2 e 3 respectivamente?

Nautilus pompilius

a) 5

b) 8

c) 13

d) 21

Questão 3.

Os termos a seguir obedecem a mesma lei de formação da Sequência de Fibonacci, porém iniciamos com os termos 1 e 3, no lugar de 1 e 1. Sabendo disso, determine o valor de A, B e C:

1 3 4 7 11 18 29 (A) (B) (C)

Questão 4.

Agora iremos fazer uma pequena alteração no problema dos coelhos. No lugar de termos apenas um par de coelhos iniciando o problema, teremos dois, mas continuamos com as mesmas regras sobre o tempo dos filhotes se tornarem adultos e a quantidade de filhotes por par. Assim, determine a quantidade de pares de coelhos no final do quinto mês e construa um esquema (fluxograma) para representar essa situação.

Questão 5.

Agora você vai definir as condições iniciais do problema dos coelhos. No problema original era definido que seria um par de coelhos no início, um mês de tempo de amadurecimento dos filhotes e seria gerado um par de filhotes a cada gestação. Dessa vez você irá criar um novo problema e resolvê-lo, baseado no problema dos coelhos. Para isso, você irá utilizar as seguintes faixas de valores:

-Quantidade de pares de coelhos no início: 1 a 3 pares

-Tempo de maturação: 1 a 2 meses

-Quantidade de filhotes: 1 a 2 pares

Com essa sua escolha, quantos pares de coelhos haverá após cinco meses? Lembre-se que não pode deixar todos os valores iguais a 1 (como no problema original), nem com os valores iguais aos da questão anterior, isto é, dois pares de coelhos iniciando o problema, um mês de gestação e um par de filhotes gerados.

Construa um esquema visual (fluxograma) para representar os pares mês a mês.

Questão 6.

Escreva, com suas próprias palavras, o que você achou a respeito da Sequência de Fibonacci, sua presença na natureza e nas obras da humanidade.

5.3 Respostas da ficha de avaliação

O intuito inicial da proposta era de aplicar a ficha de avaliação aos quarenta e cinco alunos das duas turmas de sexto ano. Porém, a realidade das aulas online por conta da quarentena imposta pelo Covid-19 atrapalhou o planejamento inicial, uma vez que para que a escola pudesse se adaptar às novas rotinas, não foi possível inserir a ficha de avaliação como atividade valendo pontuação extra ou alguma pontuação dentro da já estipulada no planejamento. Por isso, a participação na ficha de avaliação foi apenas de alunos voluntários e não de todos os quarenta e cinco alunos, o que explica a participação de apenas oito deles, sendo uma adesão abaixo do desejado.

Questão 1.

Foi possível verificar nas respostas que os alunos entenderam a proposta da questão e a maioria alcançou o resultado esperado. Apenas um aluno errou, provavelmente tomando como base a imagem que ilustra a quantidade de pares até o sexto mês, ignorando o comando de tratar-se dos sétimo e oitavo meses.

Questão 2.

Seis alunos acertaram a resposta, porém, dentre as alternativas incorretas, a única assinalada foi a 5.

Questão 3.

Cinco alunos acertaram a resposta da questão, evidenciando que foram capazes de assimilar a regra geral da sequência. Foi possível perceber também que os erros se devem mais à dificuldade de compreender o enunciado e o que era pedido do que o próprio cálculo da sequência, com cada alternativa incorreta assinalada por um aluno.

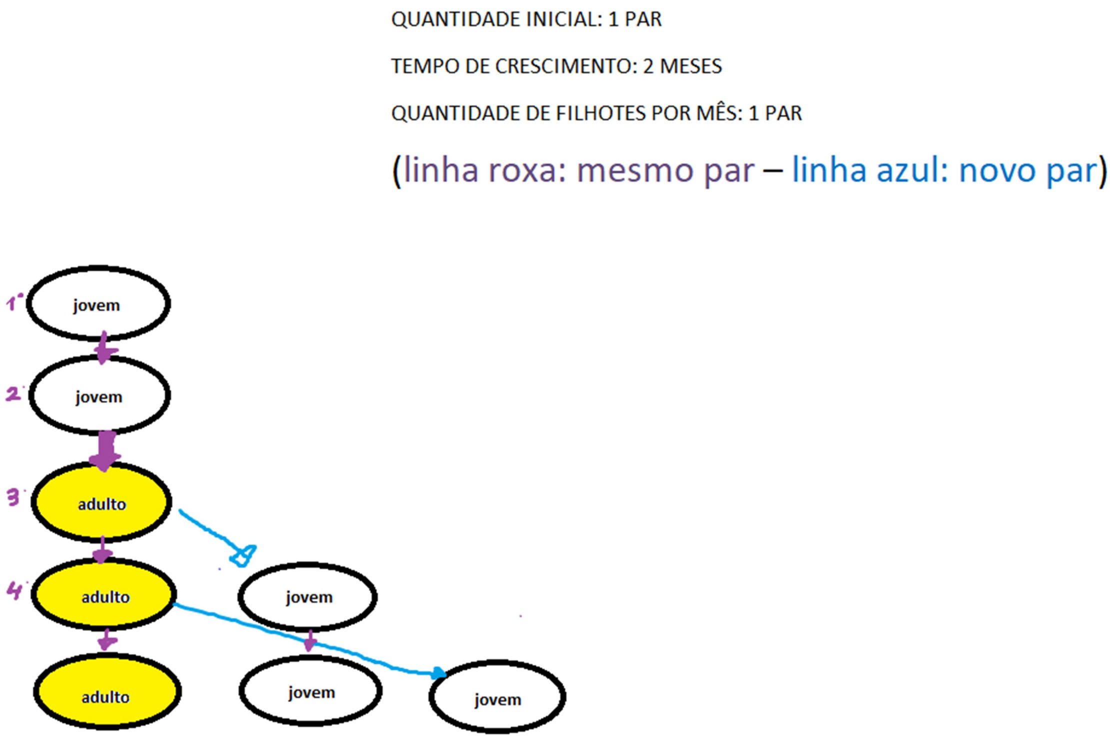
Questão 4

Entre as questões propostas, essa foi uma das que gerou maior dificuldade no alcance da resposta, embora o valor certo tenha sido respondido por cinco dos alunos.

Os outros três alunos responderam que alternativa correta seria a 5, o que sinaliza a falta de atenção dos alunos na leitura do enunciado. Esse número seria a resposta correta caso a situação-problema começasse com apenas um par de coelhos.

Questão 5

Dentre as respostas dadas pelos alunos se destaca o fluxograma apresentado abaixo, em que toda estrutura da sequência e as regras lógicas foram obedecidas. Um único ponto a ser corrigido seria apenas alterar a cor dos círculos que representam o primeiro mês de maturação do par de coelhos para verde, por exemplo, com o intuito de facilitar a análise do esquema. Isso, contudo, não é um demérito para a resposta apresentada, ainda mais se tratando de uma estudante do 6º ano que foi recém-apresentada ao conteúdo.



Questão 6.

Chamaram a atenção no momento da correção dos questionários as seguintes respostas:

- *"A respeito dessa sequencia é incrível, pois os números seguintes são sempre a soma dos dois números anteriores, que é uma sessão de números que aparece em muitos fenômenos da natureza, no nosso cotidiano, e nos organismos vivos. Ao somar esses números de maneira geométrica, podemos formar um espiral por exemplo.";*

- "Eu achei fácil de compreender, pois se seguirmos a sequência, tudo fica mais simples. E também é uma matéria super importante.";

- "Eu achei muito confuso, mas acho que é muito importante para a natureza ficar organizada.";

- "Muito interessante. Porque a muitas coisas segue essa sequência, por exemplo, as folhas das árvores, o girassol, concha dos caracóis, para fazer desenhos perfeitos, na matemática...".

As respostas acima foram destacadas entre as dadas pelos alunos que responderam ao questionário. Percebe-se que a maioria deles interessou-se pela Sequência de Fibonacci e pela sua aplicabilidade. A reação dos alunos quando assistiram ao vídeo apresentado a eles antes da proposta de atividades foi de espanto, gerando reações positivas e estimulando a curiosidade para saberem onde mais era possível aplicar o conceito que aprenderam e como poderiam encontrá-lo em outros lugares.

Destaca-se também um aluno que achou o conteúdo confuso e teve dificuldade em compreender o funcionamento da sequência, porém reconhece as demonstrações de aplicabilidade na natureza e construções humanas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo desse trabalho e das atividades propostas foi apresentar o uso da sequência de Fibonacci nos anos finais do Ensino Fundamental, principalmente no 6º ano. Os capítulos 2 e 3 apresentam uma abordagem histórica e teórica de Leonardo de Pisa e da sequência. O capítulo 4 apresenta algumas aplicações, enquanto o 5 apresenta sugestões de atividades organizadas num questionário, de modo que possa aprofundar o conteúdo e verificar a aprendizagem dos estudantes.

Em princípio nota-se que embora não seja um conteúdo que é apresentado com frequência na Educação Básica, cumpre um papel importante de desenvolver o raciocínio lógico e a estruturação do pensamento do indivíduo, bem como a relação dos alunos com os números, a partir da aprendizagem da regra de formação da sequência. A partir daí é possível trabalhar o desenvolvimento de outras sequências numéricas que, obedecendo a outras regras de formação, possam desenvolver o pensamento matemático e a agilidade nos cálculos, além da resolução de problemas contextualizados a partir de aplicações matemáticas aprendidas.

É importante pontuar também que a Sequência de Fibonacci permite que os estudantes percebam a presença real da Matemática na natureza e no mundo concreto, afastando a disciplina da mesa da sala de aula e aproximando-a da realidade do estudante.

Apesar disso, mesmo que diversas afirmações possam ter sido expostas acima sobre a presença e influência da sequência de Fibonacci em diversos ramos da ciência e da natureza, é importante mencionar um contraponto que, conforme Afeitos (2013), Markowsky (1992) apresenta no artigo *Misconceptions about the Golden Ratio* sobre a utilização do número de ouro na antiguidade, citando para isso trabalhos de François Lasserre. Markowsky ainda critica os trabalhos de Martin Gardner, publicados na *Pyramidology Fallacy* que mostra edifícios em Washington D.C. que usam o número de ouro em sua construção, além das pirâmides egípcias. Por fim, ainda afirma que o número de ouro não aparece no Partenon nem se encontra presente no corpo humano, bem como diversos pintores incluindo Leonardo da Vinci não o utilizaram em suas obras.

Com essa proposta de abordagem, além de trabalhar competências da BNCC (geral e específica de Matemática) do Ensino Fundamental, os alunos têm uma vivência com a Matemática de forma integrada e criativa, como em um projeto STEAM em que se trabalha com tecnologia (introdução ao pensamento computacional), engenharia (modelagens, criação de problemas etc.), ciências (com a integração da sequência aos estudos da natureza), artes e Matemática.

Espera-se, assim, apresentar uma contribuição para tornar o ensino da Matemática no nível fundamental um momento de descoberta sobre a natureza e a realidade que cerca o dia a dia do aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFEITOS, C. D. dos. **O número de Ouro.** 2013. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática no 3o Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário) – Faculdade de Ciências, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2013.

BEZ, Edson. **Relacionando Padrões entre a Sequência de Fibonacci, Seção Aurea e Ternos Pitagóricos.** Florianópolis, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgar blucher. São Paulo: [s.n.], 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. PCN. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias.** 2006. Brasília. v. 2. p. 135.

______. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.** Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

CASTILHORI, J. V. N. **Uma proposta de utilização do mercado financeiro na Matemática do Novo Ensino Médio.** 2020. 91 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

CONTADOR, P. R. M.. **A matemática na arte e na vida.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.

FERRER, J. V. **O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia.** Monografia. Brasilia-DF. 2005.

FRAZÃO, Dilva. Disponível em: < https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/>. Acesso em 25 fev. 2020. 2017.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: Algumas Reflexões**. 1996. Bolema, Presidente Prudente, SP, Ano 11, Nº12, p. 45-57.

LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea. Aplicações no Ensino Básico.** 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

LÍVIO, M. **Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Rio de Janeiro: Record, 2011.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. 1. ed. New York: Wiley, 2001.

MARKOWSKY, G. **Misconceptions about the Golden Ratio**. The College Mathematics Journal, vol. 23, nº. 1, 1992.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A tecnologia aliada ao ensino da Matemática**. 2012. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialista em Mídias na Educação) – Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012.

POSSEBON, J. E. **Fibonacci e a Razão Áurea: Uma abordagem para o Ensino Básico**. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Campus Universitário de Palmas, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

RICO, R. **Entenda o que é STEAM e como levá-lo para sua prática.** Publicado em Nova Escola, ed. 325, em 01 set. 2019. Disponível em: < https://novaescola.org.br/conteudo/18246/entenda-o-que-e-steam-e-como-traze-lo-para-sua-pratica>. Acesso em set. 2020.

RODRIGUES, M. S.; CÂMARA, M. A. **O número fi**, Páginas 81-184. FAMAT em Revista, Uberlândia – MG, 2008. Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/12545941/famat-em-revista-faculdade-de-matematica-universidade->. Acesso em 26 mai. 2020.

SARAIVA, José C. V. **As pirâmides do Egito e a razão áurea.** Revista do Professor de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1990. Disponível em:<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/piramides_razao_aurea.pdf>. Acesso em 27 de mai. 2020.

SILVA, Paulo E. A. da. **A Sequência de Fibonacci e o Ensino Médio.** 2017. 56 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pró Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2017.

STRUICK, Dirk J. **História Concisa das Mateméticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

APÊNDICE I – QUESTÕES DE VESTIBULAR

A sequência de Fibonacci, por se tratar de conteúdo que aplica conceitos matemáticos na realidade, marca presença em diversas provas de vestibulares, ENEM e olimpíadas de matemática. Pode-se apresentar a partir de Silva (2017), como exemplo, as seguintes questões:

(**OBM - 2003)** Na sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\frac{21}{256}+\frac{34}{512}+\frac{55}{1024}+\cdots$$

Onde o n-ésimo termo é o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por 2^n?

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) $\frac{5}{2}$

d) 3

e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(IME - 2008) Uma série de Fibonacci é uma sequência de valores definida da seguinte maneira:

- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, **T1 = T2 = 1**.

- Cada termo, a partir do terceiro, é igual á soma dos dois termos anteriores, isto é: **Tn = Tn-2 + Tn-1**.

Se **T18 = 2584** e **T21 = 10946** então **T22** é igual a:

a) 12225

b) 13530

c) 17711

d) 20412

e) 22121

(ESAF – 2010) A partir da lei de formação da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…, calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11° e o 10° termo.

a) 1,732

b) 1,667

c) 1,618

d) 1,414

e) 1,5

(FDC – 2015) A sequência de números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… é conhecida como sequência de Fibonacci. O 14º termo desta sequência é:

a) 233

b) 273

c) 327

d) 373

e) 377

APÊNDICE II – PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Pode-se apresentar algumas propriedades da sequência. Dentre elas, destacam-se:

- A soma dos *n* termos da Sequência é igual a:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1 \text{ , válida } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Pelo princípio da Indução matemática é possível provar a igualdade acima.

1) A afirmação é verdadeira para n = 1, pois $f_1 = 1$ e $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.
Logo, vale a base da indução.

2) Agora, suponha que a afirmação seja verdadeira para n = k,

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = f_{k+2} - 1\text{; Hipótese de Indução (HI):}$$

3) Devemos mostrar que ela é também verdadeira para n = k + 1, ou seja, mostraremos que:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k + f_{k+1} = f_{(k+1)+2} - 1$$

Realmente, somando f_{k+1} em ambos os membros da HI e considerando que $f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3}$, tem-se

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1} = f_{k+3} - 1 = f_{(k+1)+2} - 1$$

Determinando o resultado ∀n ∈ N.

- Serão primos entre si quaisquer dois números consecutivos na Sequência de Fibonacci, ou seja, possuem máximo divisor comum (MDC) = 1.

Demonstração: A demonstração acima se dará por redução ao absurdo.

Verificando para f_1 e f_2 , tem-se que MDC(1,2) = 1. Portanto é válido para n=1 e n=2.

Agora, suponha que MDC(f_n, f_{n-1}) seja um inteiro c maior que 1, ou seja, f_n e f_{n-1} não são primos entre si. Nessa situação, existe c ∈ ℕ que divide f_n e f_{n-1}.

Contudo, como $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, é possível dizer que c divide f_{n-2}. De $f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}$ vêm que c divide f_{n-3}.

Seguindo sucessivamente, c também irá dividir $f_{n-(n-1)}$, cujo valor é $f_1 = 1$, o que é uma contradição. Logo, MDCf_n, f_{n-1}) = 1.

a) A soma S_n, n>1 dos primeiros n números da sequência de Fibonacci é dada por:

$$S_n = a_{n+2} - 1$$

Demonstração: Considere a relação de recorrência abaixo

$$a_1 = a_3 - a_2$$
$$a_2 = a_4 - a_3$$
$$a_3 = a_5 - a_4$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$
$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

Assim, ao somar todas as igualdades e simplificar termo a termo, tem-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + . . . + a_{n-1} + a_n = a_{n-2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

b) A soma S_{n^2} dos quadrados dos n primeiros tempos da sequência é definida por:

$$S_n{}^2 = a_n . a_{n+1}$$

Demonstração: Tomando $a_1 = a_2 = 1$, tem-se:

$$(a_1)^2 = a_1 . a_2$$

Para k>1,

$$a_k . a_{k+1} = a_k(a_{k+1} - a_{k-1}) = (a_k)^2 \qquad (3)$$

Pela identidade,

$$a_{k+1} = a_{k-1} + a_k$$

Tomando os valores de k=2,3,4,...,n na igualdade (3), obtém-se:

$$(a_1)^2 = a_1 . a_2$$
$$(a_2)^2 = a_2 . a_3 - a_1 . a_2$$
$$(a_3)^2 = a_3 . a_4 - a_2 . a_3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$(a_{n-1})^2 = a_{n-1} . a_n - a_{n-2} . a_{n-1}$$
$$(a_n)^2 = a_n . a_{n+1} - a_{n-1} . a_n$$

Ao somar os membros de todas as n igualdades e simplificar o resultado, obtém-se:

$$S_n{}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + . . . + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_n . a_{n+1}$$

c) Quaisquer quatro números consecutivos da Sequência formam um terno pitagórico.

Demonstração: Para provar a afirmação acima tomemos como exemplo os números 1, 1, 2 e 3. O produto dos números das extremidades, isto é, 1.3 = 3; o dobro do produto dos números de dentro da sequência, isto é, 2.1.2 = 4; já a soma dos quadrados dos números de dentro, isto é, $1^2 + 2^2 = 5$. Os valores citados formam o terno pitagórico 3,4 e 5.

Nesse sentido, ainda é possível notar que o número que corresponde à hipotenusa será sempre um número da sequência de Fibonacci.