UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Ana Carolina da Silva Gonçalves

UTILIZANDO O GEOGEBRA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES

Orientadora: Prof.ª Dra. Angela Cássia Biazutti

Rio de Janeiro
2020

Universidade Federal do Rio de Janeiro

UTILIZANDO O GEOGEBRA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES

Ana Carolina da Silva Gonçalves

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 10/09/2020.

Angela Cássia Biazutti / presidente da banca
Doutor – IM/UFRJ, Presidente

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Doutor – IM/UFRJ

Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior
Doutor – IME-UERJ

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu marido e amigo Celso por sempre apoiar minha carreira acadêmica e profissional, compreendendo minhas ausências enquanto estudava e trabalhava durante esses últimos anos.

Aos meus pais Vera Lucia e Luiz Augusto, minha eterna gratidão pelo incentivo aos estudos e apoio em todas as minhas decisões. Saibam que luto diariamente para se orgulharem de mim e terem a certeza de que aproveitei todas as oportunidades que me deram.

Gostaria também de agradecer ao meu irmão e amigo Luiz Filipe por sempre acreditar no meu potencial.

À minha orientadora Angela por sempre despertar indagações, as quais puderam tornar este trabalho cada vez mais rico, e por seu apoio integral durante a elaboração deste.

Muito Obrigada a todos!

RESUMO

A motivação para este trabalho surgiu de uma reflexão sobre a quantidade de dúvidas que os alunos conservam até durante o início de um curso de graduação que lhes exige um certo conhecimento sobre o tópico de funções. Em geral, os alunos do nono ano do Ensino Fundamental começam a estudar as funções com uma abordagem inicial de teoria dos conjuntos, observando inicialmente diversos tipos de relações e estudando as especificidades de uma relação ser ou não uma função. Estes alunos estudam, no máximo, até as funções afim e quadrática, e, no Ensino Médio, voltam a rever suas propriedades, estudam ainda outras funções e alguns problemas que envolvem funções em sua resolução. Portanto, eles têm contato com este tópico durante aproximadamente quatro anos e não deveriam apresentar dúvidas conceituais básicas ao chegarem na graduação. Já que isto ocorre, pode-se concluir que o processo ensino-aprendizagem do tópico funções não está sendo realizado de forma satisfatória.

Com base nisso, o objetivo desta dissertação foi de mostrar que é possível integrar o estudo de funções em sala de aula com atividades utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra em Laboratório de Informática, trabalhando problemas previamente elaborados com itens seguindo uma sequência didática em ordem crescente de dificuldade e, em sua maioria, com respostas objetivas, a fim de facilitar o aprendizado e fixar melhor o conteúdo estudado. Os problemas selecionados foram escolhidos com base numa contextualização adequada para facilitar o processo, para serem interessantes e desafiadores, evitando procedimentos mecânicos com cálculos repetitivos e maçantes.

As atividades envolvendo estes problemas foram realizadas com alunos do nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública federal do Rio de Janeiro, fora e também dentro do horário normal das aulas.

Os resultados obtidos com estas atividades são apresentados e mostram que os estudantes se sentem mais motivados com esta abordagem pedagógica, compartilham seus erros e acertos com os colegas, tendo a ajuda do professor como um mediador, que os questiona em suas escolhas, instigando-os sempre em seu processo de aprendizagem.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Aprendizagem, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Sequência Didática, Geogebra.

ABSTRACT

The inspiration to write this work has come from a reflection about the amount of doubts that students have until the beginning of a graduation course that demands from them a certain level of knowledge on the function subject. Generally, students from the ninth grade in Brazilian Elementary School start studying functions with an initial approach by set theory, observing at first several types of relations and studying the specificities of a relation being or not a function. These students study, at most, up to affine and quadratic functions, and, in Brazilian High School, they review these functions' properties, and even study other functions as well as some mathematical problems that involve functions in their resolution. Therefore, they are exposed to this topic during approximately four years and shouldn't present basic conceptual doubts when getting to college. Since that occurs, it is possible to conclude that the teaching-learning process on the function subject has not been performed in a satisfactory way.

Based on that, the purpose of this dissertation was to present that it is possible to integrate the study of functions in the classroom with activities using the software of dynamical geometry Geogebra in a computer lab, working on previously elaborated mathematical problems with questions following a didactic sequence in ascending order of difficulty and, most of them, demanding objective answers, in order to make learning easier and contribute to better understanding of the topic studied. The mathematical problems selected were chosen based on a suitable contextualization to make the process easier, to be interesting and challenging, avoiding monotonous procedures with repetitive and tedious calculations.

The activities involving these mathematical problems were performed with students from the ninth grade of Brazilian Elementary School and from the first grade of Brazilian High School in a federal public school in Rio de Janeiro, during and outside their class time.

The results obtained with these activities are presented and show that the students feel more motivated with this pedagogical approach, sharing their mistakes and successes with their classmates, being supported by their teacher as a mediator, who questions their choices, always encouraging them in their learning process.

Keywords: Mathematics Education, Learning, Brazilian Elementary School, Brazilian High School, Didactic Sequence, Geogebra.

Lista de Figuras, Gráficos e Tabelas

SUMÁRIO

Introdução

O tema deste trabalho surgiu a partir de observações em sala de aula enquanto graduanda e licenciada. Na metade de 2019 a autora assumiu o cargo de docente na escola em que fizera seu estágio da graduação. Esta escola pertence à rede federal de ensino do Estado do Rio de Janeiro e, enquanto fazia seu estágio, ela observava como alguns professores de Matemática se empenhavam em levar o computador com o projetor para a sala de aula e utilizar o Geogebra para ensinar variados tópicos matemáticos. Apesar de achar a ideia interessante, ela via que os alunos ficavam apenas como espectadores no processo de aprendizagem, e não como protagonistas, na construção de seu conhecimento.

A partir dessa percepção e do que foi notado enquanto professora, lecionando para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio e para alunos de cursos preparatórios para concursos de acesso ao nível médio e superior, foi percebido que muitos alunos não compreendiam o que significava uma relação entre duas variáveis, o que a variação de uma interferia na outra, como era o comportamento gráfico de determinada função, se determinado resultado fazia sentido para um problema dado etc.

Com base nessas observações, a autora teve a ideia de se aprofundar no processo de aprendizagem de funções, mais especificamente para alunos do nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, que são alunos que ainda estão iniciando este estudo e têm muito menos vícios com o uso de fórmulas e processos mecânicos.

O objetivo geral deste trabalho foi ajudar os alunos a aprender o conteúdo de funções com problemas diferentes dos tradicionais, para não se habituarem a fazer uso de procedimentos memorizados que, por vezes, são ineficientes e atrapalham a aquisição completa da compreensão sobre os conceitos. Para isto, foi escolhido o uso do Geogebra como ferramenta auxiliar, a ser utilizada por cada um dos alunos em um Laboratório de Informática, com o objetivo de ser um instrumento mais motivador e esclarecedor, em companhia de um professor mediador. Este software foi escolhido pois a autora o conheceu no início da sua graduação e, apesar de conhecer variados softwares no decorrer de sua faculdade, este chamou mais sua atenção devido aos inúmeros recursos visuais que possui e à sua facilidade de manipulação por parte dos usuários. Além disso a autora fez um curso de Geogebra, oferecido pela UNESPAR, e já conhecia professores que utilizavam o software em sala de aula. O apoio desse software pode permitir que cada aluno crie figuras, expresse funções, entenda comportamentos gráficos e compare com os colegas os resultados obtidos a fim de se questionarem sobre o que faz ou não sentido em um determinado problema. Será também mencionado, nas próximas páginas, que existem variados estudos pautados no uso de softwares, incluindo o Geogebra, que demonstram que os alunos se sentem mais motivados por poderem ser autores de seu processo construtivo de aprendizagem.

Para trabalhar estes tópicos em laboratório, foram escolhidas questões sobre funções afim já aplicadas em provas como a Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas (OBMEP) e outras relacionadas à função quadrática, adaptadas pela autora deste trabalho para explorar estas funções de forma mais realista. Os problemas escolhidos seguem uma sequência didática crescente em dificuldade, para fazer com que os temas sejam mais bem compreendidos e assimilados pelos alunos, além de incitá-los a transitar entre diferentes tipos de representação (algébrica e gráfica).

Apresentamos, no primeiro capítulo, uma fundamentação teórica do nosso trabalho: quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de funções e como o Geogebra pode ser um recurso facilitador e motivador da aprendizagem, além de explicar o porquê de se usar uma sequência didática para trabalhar os problemas escolhidos. Ao integrar a Álgebra com a Geometria este software gratuito pode ser utilizado como recurso visual ligado a problemas significativos para levar o aprendizado da Matemática além de procedimentos mecânicos, os quais reduzem-na a um conjunto de regras, muitas vezes sem a preocupação de justificá-las.

No segundo e terceiro capítulos apresentamos, respectivamente, problemas envolvendo função afim e função quadrática. Estes problemas foram escolhidos de forma a serem mais motivadores e desafiantes do que os que aparecem em geral nos livros didáticos da escola básica. A utilização do software Geogebra para ajudar os alunos a compreender melhor os problemas e facilitar a resolução deles foi também essencial para que eles fossem incluídos.

No segundo capítulo, os problemas escolhidos envolvem também tópicos de geometria, como polígonos e áreas e o tópico de sequências. Um dos objetivos é examinar a existência de valor máximo ou mínimo de uma função, relacionando-o com a propriedade da função ser crescente ou decrescente. Além disso, funções definidas por várias sentenças, tanto contínuas como descontínuas, são utilizadas para modelar problemas contextualizados acessíveis aos alunos.

No terceiro capítulo são apresentados, inicialmente, alguns resultados teóricos sobre funções quadráticas, relacionando-os à existência de máximo ou mínimo de uma função, de uma forma mais natural, e outros que permitem utilizar propriedades destas funções para resolver problemas envolvendo funções mais complicadas. Em seguida são apresentados problemas que aplicam os resultados obtidos anteriormente.

No quarto capítulo são apresentadas, nas primeiras seções, atividades elaboradas a partir de problemas apresentados no segundo capítulo, ou seja, envolvendo somente funções afim, para serem exploradas no Laboratório de Informática com auxílio do Geogebra. Estas atividades foram realizadas por dois grupos distintos de alunos do nono ano do Ensino Fundamental, em duas ocasiões diferentes. Na primeira vez, para alunos no final do quarto bimestre, fora do turno regular de aulas e, na segunda, para alunos começando o primeiro bimestre, em uma aula normal. As respostas a um questionário respondido pelos alunos também são analisadas. Estes alunos ainda não tinham estudado o tópico de função afim nas aulas regulares de Matemática.

Nas seções seguintes são apresentadas as atividades elaboradas a partir de dois problemas, um do segundo (sobre função afim) e outro do terceiro capítulo (envolvendo função quadrática). Estas atividades foram realizadas por alunos do quarto bimestre do primeiro ano do Ensino Médio. Estes alunos já tinham estudado funções nas aulas regulares de Matemática e também são analisadas as respostas deles a um questionário.

A partir da análise do resultado obtido com a realização das atividades, tanto com os alunos do Ensino Fundamental quanto com os do Ensino Médio, foi constatado que seria interessante elaborar atividades complementares, mais simples ou mais sofisticadas. A última seção do quarto capítulo apresenta, então, uma proposta futura de atividades, para ambos os anos escolares, que possam introduzir as ideias que levam ao conceito de função ou explorar ainda mais profundamente suas propriedades.

Algumas conclusões a que chegamos são apresentadas em nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1
Referencial Pedagógico

Neste capítulo serão apresentadas algumas pesquisas sobre dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de funções e suas causas que justificam nosso trabalho, além de outros trabalhos que abordam ferramentas que podem ser utilizadas para facilitar este processo, tais como o uso de tecnologia, por exemplo, o software Geogebra, além das técnicas de sequência didática e resolução de problemas.

1.1 Dificuldades e suas causas no processo ensino-aprendizagem de funções

Segundo diversos estudos recentes dos últimos dez anos, publicados por pesquisadores em conferências, encontros e congressos, como o CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), e também em boletins, como o BOLEMA (Boletim de Educação Matemática) e o BOEM (Boletim Online de Educação Matemática), constatamos que a aprendizagem de funções apresenta diversas dificuldades.

De acordo com Barreto, Castro e Filho (2011), os alunos do Ensino Básico não aprendem de forma consolidada como caracterizar uma função; logo, não sabem garantir se uma relação é ou não uma função. Os autores observaram que os alunos possuem dúvidas especificamente nos conceitos de variável dependente e independente (que os alunos confundem com o conceito de incógnita e não entendem o que as grandezas x e y representam em cada tipo de questão), não sabem como localizar um par ordenado no plano cartesiano, desconhecem o que representa o domínio, contra-domínio, imagem, o que é uma descontinuidade, o que significa uma função ser crescente ou decrescente, entre outros. Sendo assim, o estudante fica inseguro para estabelecer uma ligação desses conceitos com as principais funções estudadas, e, também, para trabalhar com a propriedade de máximo ou mínimo de uma função.

Meneghetti e Redling (2012), em estudo apresentado no BOLEMA, verificaram que os alunos não compreendiam que função é uma relação entre dois conjuntos A e B, tal que todo elemento de A se relaciona com um único elemento de B. Também observaram dificuldade em traçar gráficos e em identificar qual função se associava a um problema. Os alunos, ao tentarem resolver algum problema, muitas vezes se deparam com a pergunta: "Que Matemática utilizar?". Os alunos não conseguem iniciar, com segurança, a resolução de um problema e, quando o fazem, têm dificuldades em validar sua solução de acordo com os dados iniciais. Além disso, não sabem aplicar seus resultados para fazer simples previsões (Júnior e Pereira, 2013).

Em trabalho apresentado no CIAEM por Barreto, Castro e Filho (2011), foram exploradas questões, com respostas numéricas, de associação de uma função com seu gráfico, e também questões de construção gráfica. Verificou-se que os alunos (1º ano do Ensino Médio) apresentavam dificuldades para localizar pontos no plano cartesiano, identificar coordenadas sobre os eixos, ou seja, pontos do tipo (x, 0) e (0, y) e, consequentemente, não conseguiam resolver problemas que envolviam zeros da função. Além disso, a observação gráfica não foi a estratégia mais utilizada pelos alunos nas resoluções das questões. Em verdade, pareceu ser uma prática que os cálculos (algébricos e aritméticos) se sobrepusessem às observações gráficas.

A necessidade do estudo de Função, segundo Caraça (1984), surge da mesma maneira como o número natural, que veio da necessidade da contagem, e dos números racionais, oriundos da necessidade de medição de subdivisões da unidade. O conceito de função, diferente do que muitos alunos podem achar, não emerge de forma pronta e concisa, mas sim do estudo de leis quantitativas onde faz-se necessário a criação de um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

Em artigo publicado por Neves e Resende (2016), os alunos do nono ano, ao tentarem resolver problemas, apresentaram dificuldade em expressar as funções com a linguagem simbólica.

Para comprovar esta dificuldade os autores desenvolveram uma atividade em que entregaram aos alunos um texto que discorria sobre diversas relações, como as que existem entre os seres vivos, as plantas etc. Após esta leitura os alunos deveriam responder questões como: "O que é uma função?", "O que significa uma relação de dependência?", entre outras perguntas que apenas exigiam a interpretação do texto e de suas vivências pessoais.

Ferreira, Geretti, Sanches e Santos (2011) também evidenciaram, em trabalho exposto no CIAEM, que os estudantes do Ensino Médio não detinham o embasamento teórico necessário para trabalhar problemas diversos de funções.

O estudo de funções comumente inicia-se no 9º ano do Ensino Fundamental, quando os conceitos básicos de função são discutidos e são estudadas as funções polinomiais do primeiro e segundo grau com suas construções gráficas. Observamos, hoje em dia, que a metodologia de ensino em sala de aula foca, na maioria das escolas, pouco no porquê de se aprender os conteúdos e muito em decorar e repetir fórmulas e regras para resolver questões sem justificá-las e entender o real processo presente. Dessa forma, os alunos ficam sem perceber a relação do cotidiano com a Matemática.

No Ensino Médio, o estudo de funções é retomado e aprofundado já a partir do primeiro ano. São discutidas ainda outras funções, como as logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. As funções descontínuas, definidas por várias sentenças e as funções inversas são raramente trabalhadas. É discutida de forma muito superficial a função logarítmica como a inversa da função exponencial. E mesmo que falhas de conteúdo como essas existam, ressaltemos que muitas das escolas particulares hoje em dia não utilizam livros didáticos, e sim materiais próprios, que por vezes chegam prontos na escola e que são totalmente dirigidos para a preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e/ou vestibular, não condizendo com o proposto pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (9394/96) para o Ensino Médio, que diz que o objetivo deste ensino não é só aprofundar o conhecimento adquirido no Ensino Fundamental, mas também preparar os alunos para o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, ou seja, a aprovação no vestibular deve ser a consequência de um bom ensino e não o foco principal.

Meneghetti e Redling (2012) ressaltam que, no Ensino Médio, o estudo das funções deve refletir aspectos da realidade, ou seja, compreendendo e caracterizando os processos da vida. Os autores acrescentam que o modo como os professores trabalham os conceitos algébricos em sala de aula, enfatizando o caráter formal (rigor matemático), a memorização de fórmulas e a repetição dos conteúdos ao invés de transferir o cotidiano dos alunos para a sala de aula faz com que os conceitos algébricos acabem se tornando de difícil entendimento para os alunos.

> "A aprendizagem de funções proporciona ao estudante entender a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, e através dela, apresentar correspondência entre grandezas, a fim de, resolver situações-problema. A ênfase nesse estudo deve estar na interpretação de gráficos, conhecimento de suas propriedades e aplicações." (Meneghetti e Redling, 2012)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) afirmam que

> "O conhecimento matemático é necessário em uma grande variedade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, sendo também instrumento para lidar com situações cotidianas, ou como forma de desenvolver habilidades de pensamento" (BRASIL, 2000).

Para Allevato e Onuchic (2004), muitas vezes falta nos alunos motivação e vontade para trabalhar situações que necessitem de um exercício mental mais sofisticado, visto que, na maioria das questões dos livros e provas, a reflexão não é exigida e todas as estratégias para solução estão prontas e ao seu alcance. Neste caso, a memorização e reprodução são fatores considerados como únicos e suficientes. Os alunos possuem dificuldade em passar do nível intuitivo do conhecimento para o lógico, visto que este aspecto exige maior autonomia.

Como apontado por Azevedo, Meneghetti e Neto (2011), os alunos precisam ter a vontade de instruir-se, e o conteúdo a ser aprendido precisa ser de fato significativo para eles. Por isso é muito importante a existência da contextualização.

Num âmbito ainda mais sério, os alunos não compreendem se o gráfico de uma função é formado por um conjunto de pontos finito, por uma curva (reta ou não), ou se é composto pela união de segmentos de retas.

Segundo Duval (1993), as dificuldades que os alunos apresentam na compreensão de um objeto matemático ocorrem por conta da diversidade e complexidade existentes nos diferentes tipos de representações semióticas (meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, e também, essenciais às atividades cognitivas do pensamento) do objeto. Para Duval, o entendimento dos objetos e dos conceitos em Matemática começa somente no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e de coordenar espontaneamente pelo menos dois registros de representação para um mesmo objeto.

No estudo das funções temos a representação verbal, a representação analítica e a representação gráfica. Portanto, para que a aprendizagem do conceito de função se complete, segundo Duval (1993), devem ser enfatizados e aprofundados os diferentes registros de representação. Como veremos na próxima seção, o software Geogebra pode ser muito útil para isto.

1.2 O software Geogebra no ensino de funções

A utilização de recursos computacionais pode favorecer a conexão entre muitas representações de conceitos, maximizando o acervo de compreensão dos alunos, impulsionando-os a pensar, refletir e criar soluções, estimulando, assim, o lado criativo de cada aluno. Além do mais, o auxílio do computador desenvolve o lado cognitivo dos alunos, principalmente por respeitar o ritmo de aprendizagem de cada um, deixando que os estudantes aprendam com seus erros, como Rebello e Rodrigues (2011) puderam notar.

As características do software educacional Geogebra permitem explorar as representações analítica e gráfica de uma função e transitar entre elas. Um recurso importante deste software permite simulações dinâmicas além das estáticas, ou seja, situações tipo “vídeo”, além da opção tipo “foto”. Trata-se de um software gratuito, que integra a Álgebra com a Geometria. Pode ser utilizado como recurso visual ligado a problemas significativos para levar o aprendizado da Matemática além de procedimentos mecânicos, os quais reduzem-na a um conjunto de regras, muitas vezes sem a preocupação de justificá-las, como observado por Allevatto e Onuchic (2004).

Martins e Santos (2016), constatando como a internet e a tecnologia estão fortemente presentes na vida dos jovens, desenvolveram atividades com cerca de 15 alunos do nono ano de uma escola estadual do Paraná. As atividades tinham por finalidade utilizar o Geogebra para aprofundamento das funções polinomiais de primeiro e segundo graus. Para isso, eles precisaram, previamente, relembrar conteúdos como potenciação e radiciação e depois apresentaram a história das equações de segundo grau e sua aplicabilidade nos dias de hoje. Trabalharam problemas simples inicialmente e, quando os alunos estavam mais seguros quanto ao uso do software, incluíram questões mais elaboradas que consistiam em escrever funções para visualização gráfica. Ao término das atividades, os autores relataram significativa melhora nos conhecimentos destes alunos, porém, salientando a necessidade de constância desse tipo de trabalho. Convém destacar que, apesar dos autores se referirem inicialmente às funções polinomiais do primeiro grau, não houve nas atividades a citação destas funções sendo utilizadas com o Geogebra e, além disso, os problemas de equação do segundo grau pedidos aos alunos eram somente sobre plotagem gráfica, sem contextualização com o cotidiano, contrariando a importância que os autores haviam atribuído a isso no objetivo do trabalho.

Com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada, temos o trabalho de Barros, Corrêa, Rodrigues e Suett (2015), que se preocuparam em usar o Geogebra com grupos de 3 e 4 alunos no Laboratório de Informática para resolução de problemas envolvendo função quadrática. No começo, sem uso do software, os alunos tiveram que resolver dois problemas interpretando-os e generalizando-os e, depois, responder um questionário onde escreveram sobre sua percepção dos problemas e dificuldades encontradas. Em um segundo momento os alunos foram apresentados ao Geogebra, puderam manipulá-lo e conhecer um pouco de seu funcionamento, fazendo uso de diversas ferramentas. E, finalmente, num terceiro momento, os alunos tiveram que resolver novamente os dois problemas apresentados anteriormente, porém, agora, com o uso desta ferramenta computacional. Novamente responderam um questionário onde avaliaram sua compreensão do conceito após o uso do software. Comparativamente, os alunos encontraram um pouco mais de dificuldade com o uso do software, pois era uma novidade para eles. No decorrer da atividade surgiram perguntas sobre a construção e visualização gráfica que antes não existiam, ou seja, houve um questionamento maior pelos estudantes. Além disso, cerca de 80% dos alunos consideraram de extrema importância o uso desta tecnologia como aliada no processo de ensino e aprendizagem.

Capela e Capela (2012), seguindo a ideia de introduzir o uso de softwares no processo educacional, realizaram atividades com alunos dos cursos de Farmácia e Bioquímica a fim de melhorarem o aprendizado de Cálculo por eles, visto que, geralmente são alunos que não se interessam pela Matemática. Inicialmente, os alunos fizeram uso do software Winplot traçando gráficos bidimensionais e tridimensionais, e após grande entusiasmo e sucesso, eles fizeram uso do software Maxima, onde puderam trabalhar diferenciação e integração de funções. Esta experiência fez com que o uso desses softwares fosse, de fato, introduzido nos cursos de Química avançada da Unesp em Araraquara para auxiliar os futuros alunos da disciplina de Cálculo.

A próxima seção apresenta alguns trabalhos que comprovam a validade das ferramentas pedagógicas de resolução de problemas, associadas com sequências didáticas, como facilitadoras do processo ensino-aprendizagem. Assim, junto com o software Geogebra, elas podem ser utilizadas para minorar as dificuldades dos alunos com o tópico funções.

1.3 Resolução de Problemas e Sequências Didáticas

Segundo a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), entre as competências específicas de Matemática deve ser incluída "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados"(BNCC, p.267, 2017) e também utilizar diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, entre outros), além de texto escrito na língua materna.

Allevato e Onuchic (2004) salientam que o termo ensino-aprendizagem-avaliação expressa uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento de um determinado conteúdo através da resolução de problemas.

Para Onuchic (1999), a concepção de problema pode ser enunciada como sendo tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que existe interesse em resolver, isto é, qualquer situação que leve os alunos a pensar e que seja desafiadora e não trivial. O estudante precisa compreender o processo de resolução de problemas, onde a principal importância está no raciocínio desenvolvido, ou seja, nos caminhos que ele percorre, e não somente na resposta encontrada.

Em seu livro "A arte de resolver problemas", Pólya (1995) enfatiza que, ao resolver problemas, o estudante precisa primeiro ler o enunciado até que este fique tão bem gravado em sua mente que poderá perdê-lo de vista momentaneamente sem perdê-lo por completo, visualizar o problema como um todo e familiarizar-se com ele. O autor acrescenta que "se não puder resolver o problema proposto, procure primeiro resolver um problema correlato" (Pólya, 1995, p. 6), ou seja, com menos informações, menos sofisticado. Neste livro temos vários relatos de diálogos entre professor e alunos onde o professor está sempre estimulando o raciocínio dos estudantes e indagandoos com perguntas a fim de que eles não só entendam o desenvolvimento da questão como também cheguem à resolução pretendida.

> “A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é, a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus, e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.” (Pólya, 1995, p.3)

Pode-se concluir então que, para uma aprendizagem significativa de funções afim e quadrática, deve-se focar principalmente no estudo de problemas contextualizados, em que os alunos precisem descobrir estratégias para chegar à solução. Alguns desses problemas necessitarão de uma modelagem matemática e, conforme Júnior e Pereira (2013) afirmam, a modelagem auxilia os alunos a supor hipóteses e refutá-las, formular e desenvolver modelos matemáticos e discutir sobre a validade ou não desses modelos. A discussão desses tipos de problemas em sala de aula é uma sugestão recomendada pelos PCN do Ensino Fundamental (1998) para que o raciocínio ocorra de uma maneira um pouco diferente da usual e que pode claramente ser utilizada para os problemas a serem tratados no Ensino Médio.

Os PCN (1998) também afirmam que: “Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la.” (PCN, 1997, p. 29). Nosso objetivo será criar uma sequência didática para levar os alunos a uma compreensão maior do conteúdo utilizando um conjunto de problemas cuidadosamente planejados, a fim de que o processo de ensino seja construído por etapas. Filho e Menezes (2011) destacam a importância em associar o uso de softwares a uma sequência didática desenvolvida a partir de escolhas prudentes e com objetivos bem claros e objetivos para cada questão trabalhada, considerando os cálculos, construções e problemas ligados ao mundo real.

Para Cristovão, Fernandes e Fiorentini (2005), as tarefas que os alunos desenvolvem em sala de aula deveriam visar um caráter mais exploratório-investigativo, mais livres e menos sistemáticos, para que os alunos se sentissem motivados a criar suas próprias estratégias, modificar conhecimentos prévios e construir novos significados. Dessa forma, cada aluno poderia desenvolver sua criatividade e se sentir autogestor de sua formação e construtor de sua trajetória na busca do saber.

Santos e Teixeira (2017) destacam a importância do professor antecipar as respostas dos alunos para as questões trabalhadas. Esta antecipação exige que os professores não só façam as tarefas matemáticas que estão planejando pedir aos alunos, como também que eles se coloquem no lugar de quem questiona e cria diferentes estratégias para obtenção da solução. Dessa forma, o professor aumenta seu acervo de conhecimento sobre as possíveis respostas e questionamentos dos alunos.

Para utilizar de forma positiva as estratégias pedagógicas descritas no capítulo atual, torna-se necessário construir sequências didáticas bem fundamentadas, apoiadas em problemas contextualizados que explorem os conceitos e propriedades que o professor deseja que os alunos aprendam. Os problemas devem ser escolhidos de modo que o software Geogebra realmente seja um agente facilitador. Por último, torna-se essencial experimentar estas atividades em sala de aula e aperfeiçoá-las com base nos resultados obtidos. Estes ajustes só podem ser possíveis com a utilização frequente destas estratégias educacionais.

Nos próximos capítulos serão apresentados problemas contextualizados envolvendo funções afim e quadrática, atividades realizadas com Geogebra e análise dos resultados obtidos.

CAPÍTULO 2
O uso do Geogebra no estudo da Função Afim

Neste capítulo pretendemos abordar sequências didáticas, para quatro diferentes problemas associados a funções polinomiais de primeiro grau, para melhor assimilação dos conteúdos que surgem nesses problemas. Eles podem ser utilizados em aulas comuns, mas serão bem mais interessantes num ambiente colaborativo, como o Laboratório de Informática, com o auxílio do Geogebra.

São explorados, nos problemas, conceitos de domínio e imagem de uma função, função limitada, função contínua, função crescente e decrescente, função definida por mais de uma sentença, além de conceitos de geometria como área de polígonos e, ainda, associação com progressões aritmética. Sempre que possível são abordados valor máximo e valor mínimo de uma função, em situações não triviais, como a não existência ou a ocorrência de valor máximo associado a infinitos valores da variável independente.

2.1 Domínio: Um intervalo da reta real

Nesta seção trataremos de um problema que, à primeira vista, parece expor uma situação puramente geométrica, visto que, na figura apresentada, vemos um quadrado que pode ser subdividido em dois triângulos e um quadrilátero. Aparentemente, a questão poderia tratar somente de um cálculo rápido sobre áreas de figuras planas, com determinadas medidas fornecidas. De fato, o problema aborda o tópico Função, solicitando caracterizar a área sombreada, conforme o ponto P se movimenta no interior do quadrado de forma bem específica como veremos a seguir. O gráfico da função solicitada é um segmento de reta e seu domínio e imagem são intervalos fechados e limitados. Este problema, assim como os demais a serem trabalhados neste capítulo, pode ser utilizado para discutir em sala de aula aspectos como intervalos numéricos da reta real e valores de máximo e mínimo de uma função que é contínua e definida num intervalo fechado e limitado.

Problema 1: O quadrado ABCD tem 8 cm de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo APB. Seja x a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Qual é o gráfico da área da região destacada em cinza em função de x? (Fonte: OBMEP, prova da 1ª fase, questão 13, nível 3, 2019)

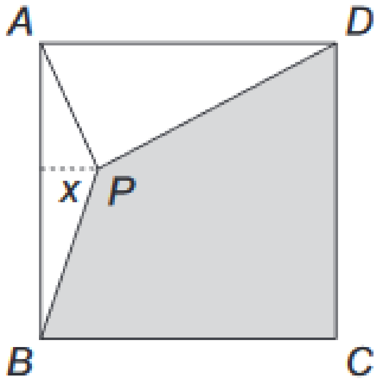


Figura 01: Quadrado ABCD.
Fonte: OBMEP, prova da 1ª fase, questão 13, nível 3, 2019.

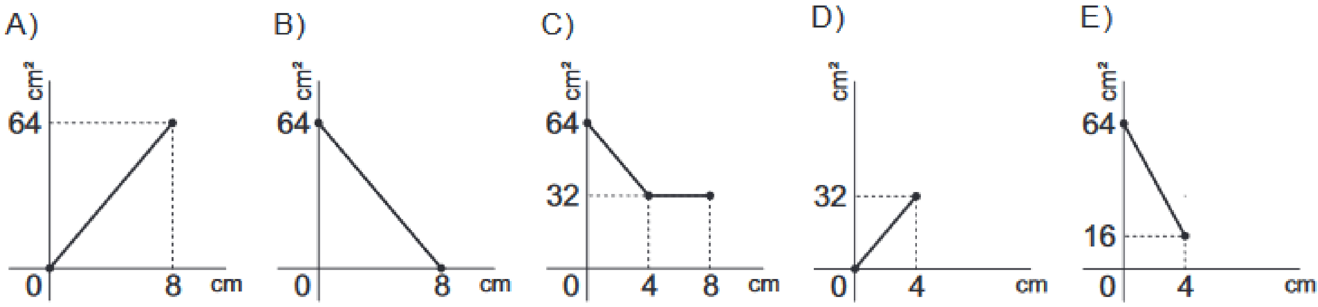


Figura 02: Opções de respostas.
Fonte: OBMEP, prova da 1ª fase, questão 13, nível 3, 2019.

Solução:

Etapa 1: Dados conhecidos: ABCD é um quadrado de lado 8 cm e a área de APB é metade da área de APD. Calcular a área de APB, utilizando AB como base, cuja medida é 8 cm, que será igual a $A_1 = \frac{AB.x}{2} = \frac{8.x}{2}$ Comparar com a área do triângulo APD, utilizando AD como base, que será igual a $A_2 = \frac{AD.h}{2} = \frac{8.h}{2}$. Como $A_2 = 2\ A_1$, tem-se, obrigatoriamente, $h=2x$. Logo, a distância do ponto P a AB é metade da distância de P até AD.

Etapa 2: Com o auxílio do Geogebra, podemos criar o polígono ABCD, de vértices A (0,8), B(0,0), C(8,0) e D(8,8). Observemos que algumas possíveis posições de P são dadas pelos pares ordenados H(1,6), G(2,4), F(3,2) e E(4,0) (consulte a figura da etapa 3). Marcando tais pontos no Geogebra, notamos que estes são pares ordenados cujas coordenadas são números naturais e, além disso, são pontos colineares no plano cartesiano.

Etapa 3: Notemos que o lugar geométrico dos pontos P, cuja distância a AB é a metade da distância até AD, devido à proporcionalidade, é um segmento de reta que passa pelos 4 pontos mencionados na etapa 2, onde P assume qualquer posição pertencente ao segmento de reta que une o ponto A (0,8) ao ponto E ∈ BC, com E (4,0).

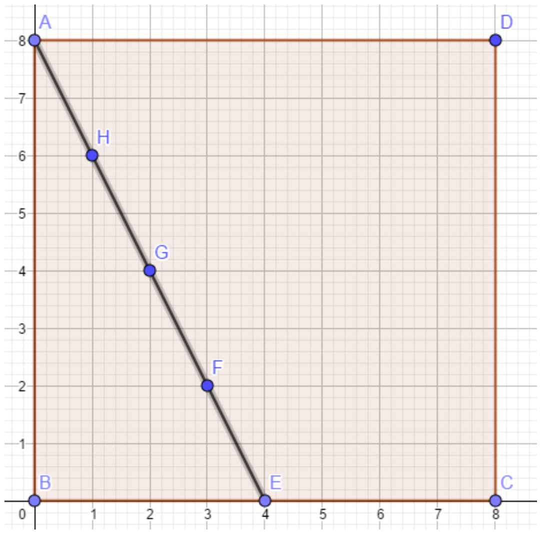


Figura 03: Quadrado com segmento de reta em seu interior.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Etapa 4: Podemos então, caracterizar algebricamente o segmento AE com o auxílio da função polinomial de primeiro grau y = ax + b, onde a e b são os coeficientes a serem determinados com o auxílio de dois pontos. Tomemos os pontos A (0,8) e E (4,0). Então:

A(0,8): $8 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 8$
E (4,0): $0 = a \cdot 4 + 8 \Rightarrow a = -2$
Logo, a função descrita é decrescente e podemos expressá-la por $y = -2x + 8$. Pode-se observar que o valor de x representa a altura do triângulo APB, logo $x \geq 0$. Para ser possível construir os dois triângulos, é necessário que $x \leq 4$, observando a figura 03. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais $x \in [0,4]$ e a imagem é o conjunto dos números reais $y \in [0,8]$.

Etapa 5: Com o apoio do Geogebra e fixando o ponto P no segmento AE, com a ferramenta "Ponto em objeto" colocamos o ponto P livre para se deslocar por AE. Agora podemos criar os triângulos APB, APD e o quadrilátero BCDP. Com a movimentação do ponto P, observamos a variação das áreas dos dois triângulos e do quadrilátero/triângulo formado e que, assim como o quadrado criado no início, apresentam também seus valores de área expressos na janela de álgebra situada à esquerda da tela do Geogebra. Vejamos algumas das possíveis posições de P e observemos a variação das áreas dos três polígonos mencionados na próxima figura.

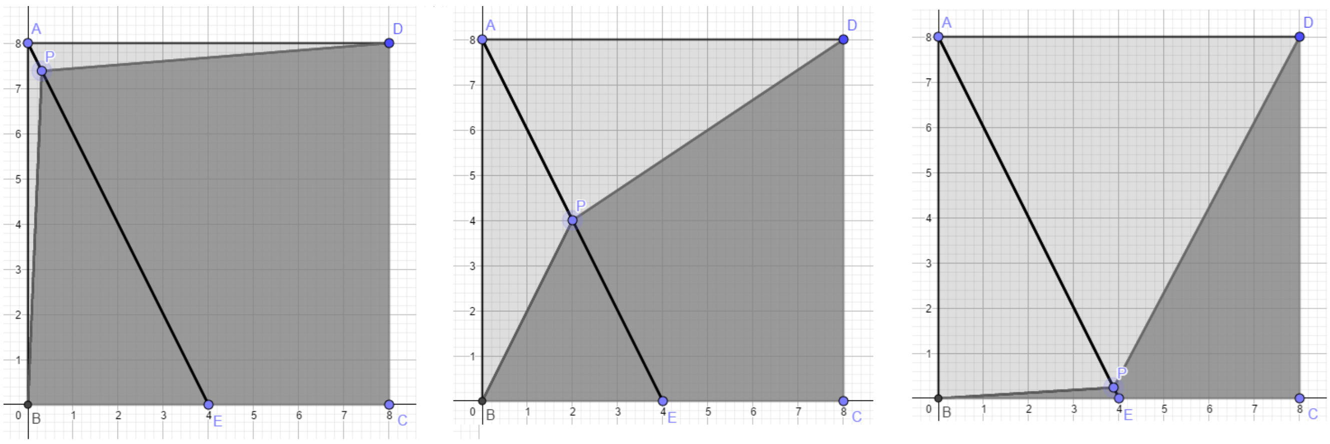


Figura 04: Possibilidades de posições do ponto P no interior do quadrado.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Etapa 6: Para determinarmos a área BCDP, pintada de cinza na figura, basta que calculemos o valor da área total do quadrado e subtraiamos a área dos triângulos APB e APD. Considerando a altura do triângulo APB igual a x, a altura do triângulo APD será, então, 2x e encontramos:

Área pintada = $8^2 - \frac{8x}{2} - \frac{8.2x}{2} = 64 - 4x - 8x = 64 - 12x$, com $x \in [0,4]$.

Quando $x = 0$, a área pintada é de 64 cm^2.
Quando $x = 4$, a área pintada é de 16 cm^2.
Dessa forma, o gráfico que representa tal situação corresponde à letra E, encerrando, assim, a solução do problema.

Outros conceitos também poderiam ser explorados a partir deste problema e de sua solução. A função polinomial de primeiro grau que descreve a variação da área pintada é decrescente, visto que o coeficiente angular encontrado foi igual a -12, o que já era esperado pois, conforme o ponto P se aproxima da coordenada $x = 4$, a área do polígono diminui até que o ponto P coincida com o ponto E. O gráfico da função é representado por um segmento de reta, e consequentemente, a função possui valor máximo e valor mínimo, que são indicados respectivamente por 64 cm^2 e 16 cm^2.

Sabemos que existem problemas que precisam de uma análise diferente da que empregamos aqui. A seguir, abordaremos um problema em que a função associada não tem domínio sendo um intervalo da reta real, mas sim um conjunto discreto de valores, pois valores que não sejam números inteiros não farão sentido para o problema dado.

Devemos chamar atenção dos alunos para a possibilidade de dois diferentes problemas estarem associados a uma mesma lei de formação, porém tendo domínios distintos e, portanto, representações gráficas também distintas. Nesse caso, não correspondem a uma mesma função. É importante construir com os alunos o que significa, então, duas funções serem iguais. Observemos atentamente o exemplo a seguir.

2.2 Domínio: Um conjunto discreto

Nesta seção, abordaremos um problema em que o domínio é formado por um conjunto de números infinito e discreto, ou seja, formado somente por pontos isolados. Vamos, inicialmente, associar o número da figura apresentada no problema com a quantidade de bolinhas nela presentes, que serão respectivamente marcadas sobre os eixos x e y no plano cartesiano onde construiremos o gráfico da função. Será possível criar infinitas figuras, cada uma delas com uma quantidade de bolinhas expressa por um número natural. Neste problema podemos tratar de alguns conceitos como identificar uma função crescente, encontrar o valor mínimo da função, caracterizar uma função ilimitada superiormente, entre outros. Além disso, será possível fazer a relação inversa, que é associar a quantidade de bolinhas ao número da figura. Ao marcar os pontos no plano cartesiano, haverá uma inversão dos valores exibidos anteriormente nos eixos e uma constatação gráfica muito interessante quando ambos os gráficos forem plotados simultaneamente. O domínio e imagem de ambas as funções serão conjuntos discretos e infinitos.

Problema 2: Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura? (Fonte: OBMEP, prova da 1ª fase, questão 15, nível 2, 2019).

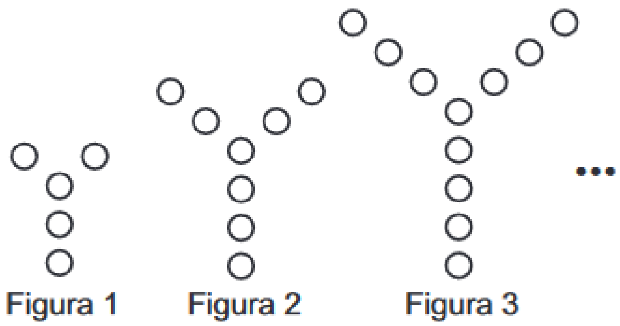


Figura 05: Sequência de imagens no formato de Y's.
Fonte: OBMEP, prova da 1ª fase, questão 15, nível 2, 2019.

Solução:

Etapa 1: Dados conhecidos: Na figura 1 temos 5 bolinhas, na figura 2 temos 8 bolinhas e na figura 3 temos 11 bolinhas. Obviamente, quanto mais figuras fizermos, mais bolinhas teremos em relação à etapa anterior, ou seja, a quantidade de bolinhas se apresenta de forma crescente.

Etapa 2: Como é o processo de formação de cada figura? Vejamos que, da quantidade de bolinhas presentes na figura 1 para a figura 2, há um acréscimo de 3 bolinhas, e da figura 2 para a figura 3 também. Isto ocorre pois, a cada etapa, aumentamos uma unidade de bolinha na vertical e mais uma unidade inclinada para a direita e outra para a esquerda, em relação à etapa anterior, ou seja, o aumento sempre é de 3 unidades analisando etapas consecutivas. Logo há uma conexão direta presente no modo como a quantidade de bolinhas se expressa em relação ao número da etapa. Na etapa 4 ficará mais clara esta conexão.

Etapa 3: Podemos, então, relacionar o número da figura (com valores expressos no eixo x do sistema cartesiano) com a quantidade de bolinhas existentes em cada figura (com valores expressos no eixo y do sistema cartesiano) através de uma função, visto que, para qualquer figura dada, a quantidade de bolinhas é única, ou seja, não existem duas figuras com a mesma quantidade de bolinhas.

Etapa 4: Para chegarmos a uma expressão que relacione o número **n** da figura com a quantidade **f(n)** de suas bolinhas, podemos, com o auxílio de uma tabela, observar o padrão existente nos valores encontrados como se segue:

n	f(n)
1	5
2	8
3	11
...	...

Tabela 01: Relacionando o número da figura à quantidade de bolinhas.
Fonte: Desenvolvida pela autora.

Dessa forma, se estivéssemos nos esquecendo do viés geométrico da questão, poderíamos certamente dizer que para n = 0, temos f (n) = 2, já que precisaríamos apenas subtrair 3 unidades de f (1) = 5. Sendo assim, para descobrirmos um f (n) qualquer, basta somar ao valor 2, uma quantidade fixa de "números três". Observemos o esquema a seguir:

Para n = 0 => f (n) = 2
Para n = 1 => f (n) = 5 = 2 + 3 = 2 + 3 x 1
Para n = 2 => f (n) = 8 = 2 + 6 = 2 + 3 x 2
Para n = 3 => f (n) = 11 = 2 + 9 = 2 + 3 x 3
Temos então, que para um n qualquer, f(n) = 2 + 3n.

Uma maneira alternativa de encontrar tal expressão é feita baseada na relação indicada na tabela 01. Nela, podemos observar que a variação de uma unidade de n, implica na variação de 3 unidades de f(n). Ou seja, é possível observarmos uma relação direta entre essas grandezas, e encontrarmos a função que relaciona n e f(n), que é definida formalmente como um exemplo de uma função afim. Dessa forma, podemos destacar os pares ordenados (1,5) e (2,8) a fim de encontramos a função polinomial do primeiro grau que passa por tais pontos.

Seja f (n) = an + b
(1,5) => 5 = 1a + b; b = 5 – a
(2,8) => 8 = 2a + b; substituindo o resultado acima nesta última expressão, ficamos com:
8 = 2a + 5 – a; 8 = 5 + a; 8 – 5 = a; **a = 3**; logo b = 5 – 2; **b = 3.**

Com o auxílio do comando "Sequência" no Geogebra, podemos facilmente expressar a relação entre o número da figura e a quantidade de bolinhas existentes por: "Sequência((n, 3n+2),n,1,15)" onde serão obtidos os pares ordenados (x, y) = (número da figura, quantidade de bolinhas) correspondentes às figuras 1 até 15 (valor pedido na questão).

Etapa 5: Após escrevermos o comando acima na entrada do Geogebra, aparece na janela de álgebra a seguinte informação:

l1 = Sequência((n, 3 n + 2), n, 1, 15)

→ {(1, 5), (2, 8), (3, 11), (4, 14), (5, 17), (6, 20), (7, 23), (8, 26), (9, 29), (10, 32), (11, 35), (12, 38), (13, 41), (14, 44), (15, 47)}

Os pares ordenados descritos acima são mostrados como observado na imagem a seguir da janela de visualização, após uma redução dos eixos para melhor visualização gráfica.

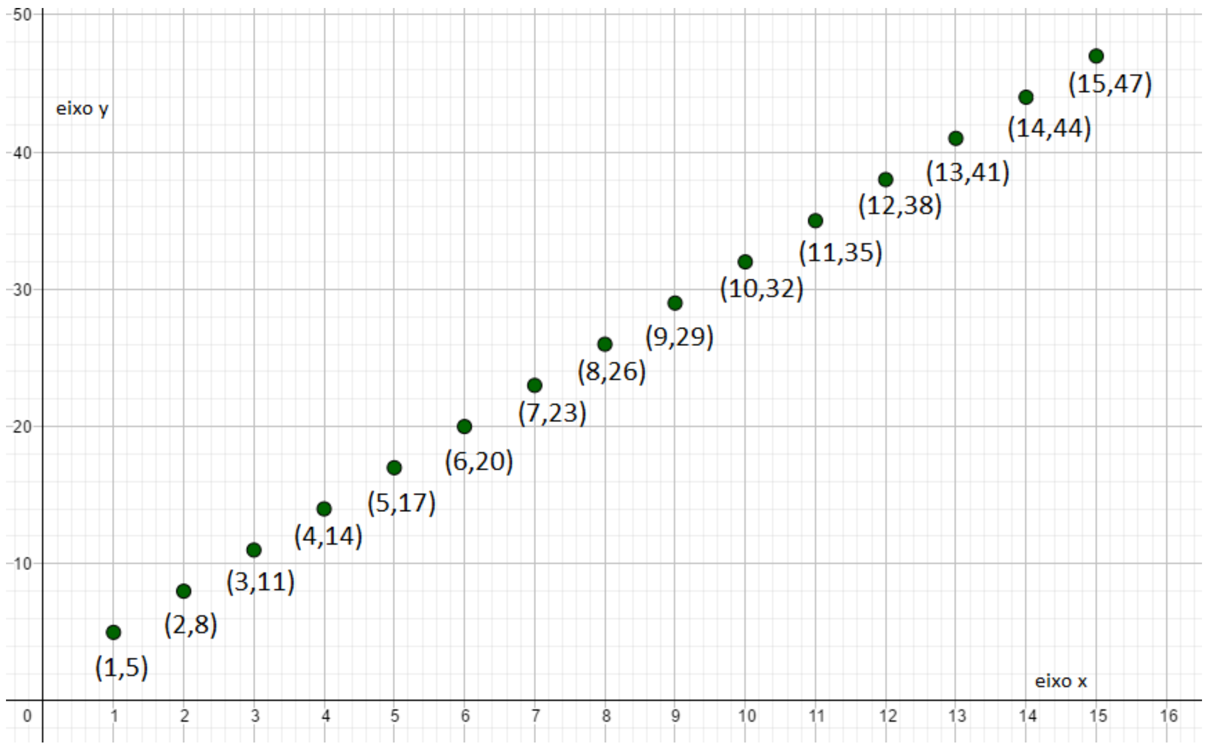


Gráfico 01: Relacionando o número da figura à quantidade de bolinhas.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Etapa 6: Desta forma, fica claro que, na figura 15, teremos 47 bolinhas, que é a resposta do problema.

Se considerarmos apenas a existência das 15 figuras do Gráfico 01 e observarmos o gráfico acima como uma representação de uma função, podemos explicitar, então, seu domínio e imagem, os quais, diferentemente, da questão trabalhada na seção anterior, são ambos conjuntos discretos, e não expressos por intervalos da reta. O domínio seria então o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15}, enquanto sua imagem seria {5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44 e 47}. O gráfico é expresso por um conjunto de pontos claramente isolados.

Supondo que o número de bolinhas possa ser aumentado sempre, o domínio seria o conjunto dos números naturais e a imagem seria um conjunto infinito, enumerável, formado pelos números naturais começando de 5 e acrescentando sempre a quantidade fixa 3, ou seja, a imagem seria representada por uma progressão aritmética com razão 3 com primeiro termo igual a 5.

Podemos observar, ainda, que a função não possui máximo, nesse caso, mas possui valor mínimo, que será a figura com menor quantidade de bolinhas: 5.

Considerando, agora, somente a mesma lei de formação $y = 3x + 2$, como visto na etapa 4, mas com domínio sendo um intervalo não limitado da reta, teríamos o gráfico abaixo, com um outro significado, já que não existe figura 1,234 e nem quantidade de bolinhas 41, 325, por exemplo.

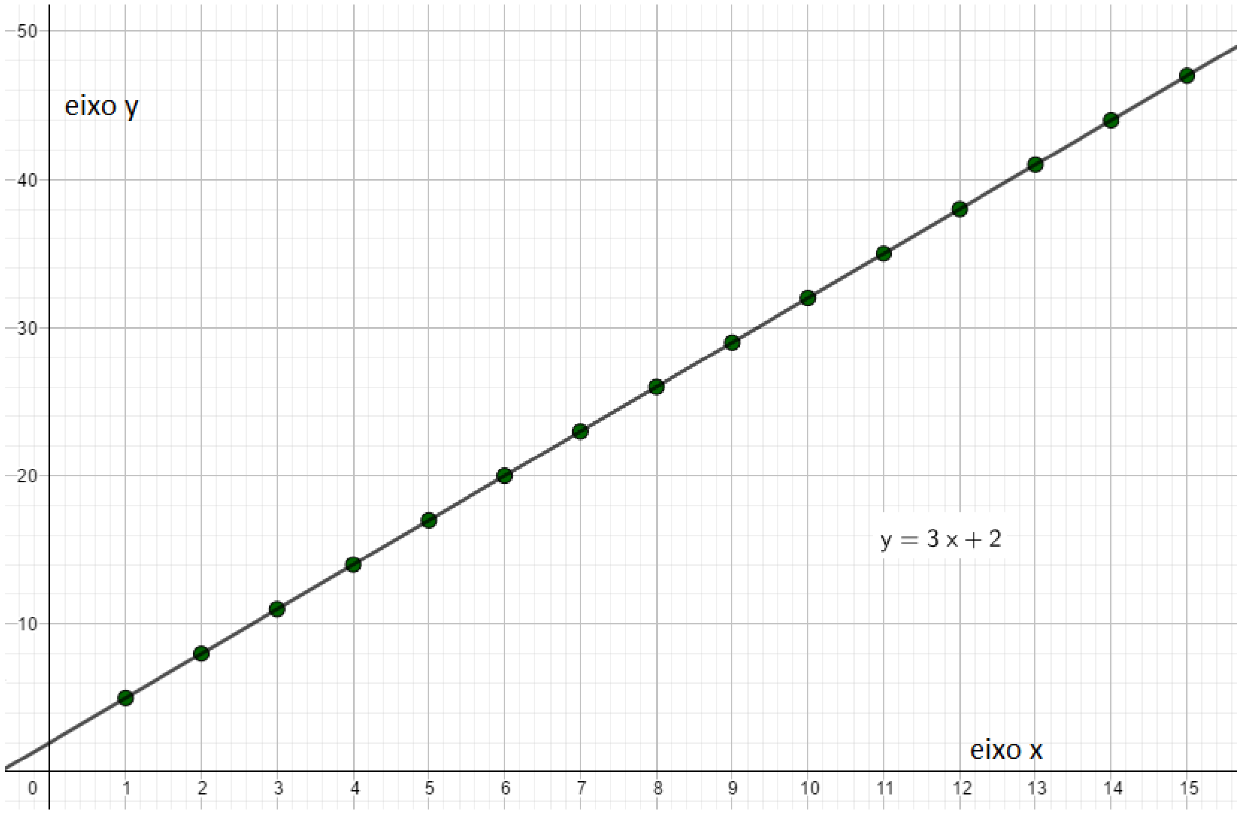


Gráfico 02: Função y = 3x + 2 com domínio real.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Como discutido na introdução desta seção, podemos construir a relação inversa associando a quantidade de bolinhas ao número da figura formada, destacando esses valores nos eixos x e y respectivamente. Podemos observar que esta relação inversa também é uma função, pois a cada quantidade de bolinhas n corresponde uma única figura numerada g(n). Observe a tabela a seguir:

	n	g(n)	
3	5	1	+1
	8	2	
3	11	3	+1
	n	g(n)	

Tabela 02: Relacionando o número de bolinhas ao número da figura.
Fonte: Desenvolvida pela autora.

Para encontrarmos a lei de formação desta função, observamos que o acréscimo de 3 unidades no eixo x implica no acréscimo de 1 unidade no eixo y, e podemos encontrar a seguinte lei de formação:

$$\frac{8-5}{2-1} = \frac{11-8}{3-2} = \frac{n-11}{g(n)-3} = 3$$

Daí,

3 (g(n) – 3) = n – 11
3 g(n) – 9 = n – 11
3 g(n) = n – 11 + 9
3 g(n) = n – 2

Logo: $g(n) = \frac{n-2}{3}$.

Com o auxílio do Geogebra podemos plotar os gráficos das funções f(n) = 3n + 2, g(n) = (n-2)/3 e h(n) = n

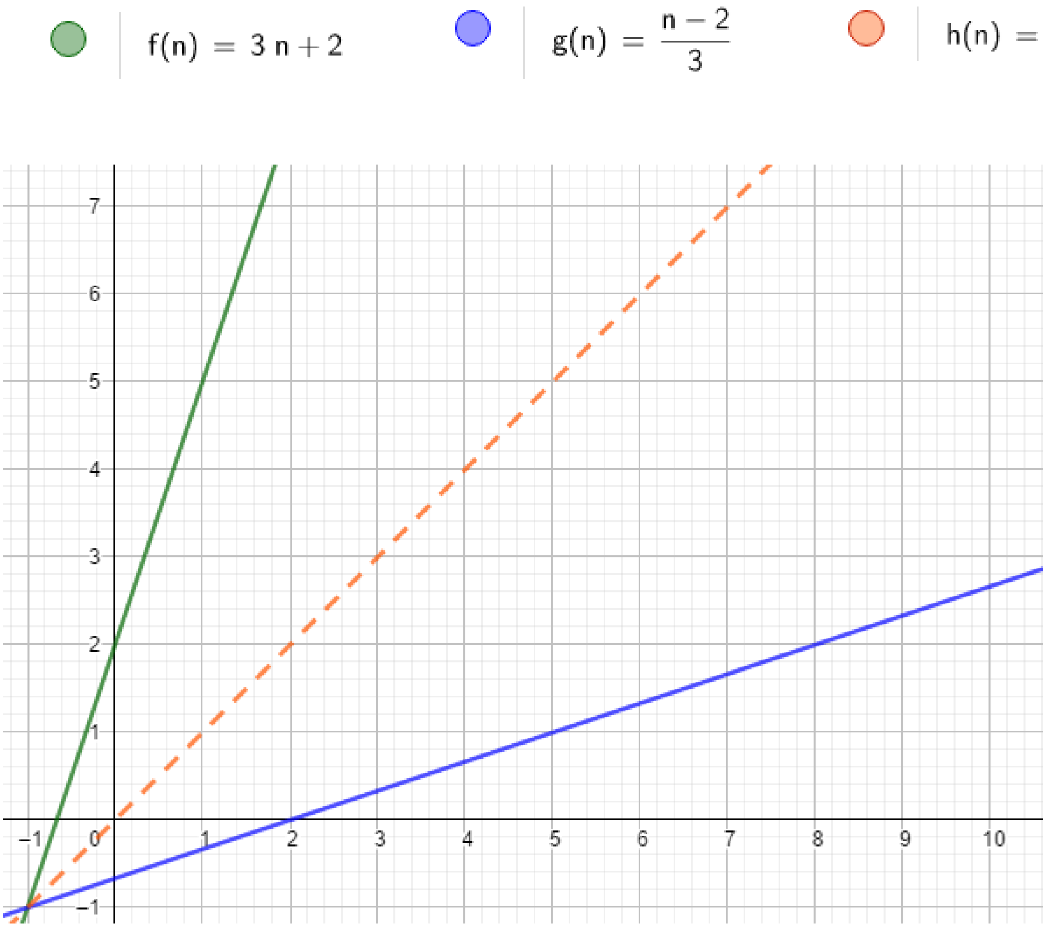


Gráfico 03: Plotagens das funções afim f(n), g(n) e h(n).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Podemos observar que os gráficos das funções f(n) e g(n) são simétricos em relação ao gráfico da função h(n) = n, tracejado, isto ocorre porque o par ordenado (a, b) se torna o par ordenado (b, a) quando os eixos trocam de “nomes”, ou seja, enquanto que em f(n), n representa o número da figura e f(n) a quantidade de bolinhas nela presentes, em g(n), n representa a quantidade de bolinhas e g(n) o número da figura.

Obviamente, estes gráficos não representam a situação do problema em si, visto que não existem valores negativos para o número da figura e nem para a quantidade de bolinhas. Além disso, os gráficos das funções também não poderiam ser linhas contínuas, pois, se fosse assim, $\sqrt{2}$ e π seriam possíveis valores a serem encontrados em ambos os eixos, por exemplo.

2.3 Gráfico: união de segmentos de reta

Agora abordaremos um problema que envolve uma função cujo gráfico é formado pela união de segmentos de reta e cujo domínio e imagem são intervalos limitados da reta real. Semelhante ao problema 1, este problema pede que seja encontrada a área do polígono ADF supondo que o ponto F varia de posição percorrendo 3 segmentos de reta contíguos. Faremos aqui uma análise diferenciada para cada possível posição de F e, com o apoio do Geogebra, será claro ver que existe não só um, mas infinitos valores do domínio aos quais corresponde o valor da área máxima.

Problema 3: Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.
a) Determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento AB.
b) Determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento BC.
c) Determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento CD.
d) Determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF, supondo que a formiga esteja em qualquer ponto do contorno ABCD.
e) Determine onde a formiga deve estar para que a área do triângulo ADF seja máxima.
(Fonte: Adaptada da OBMEP, prova da 2ª fase, questão 2, nível 3, 2014)

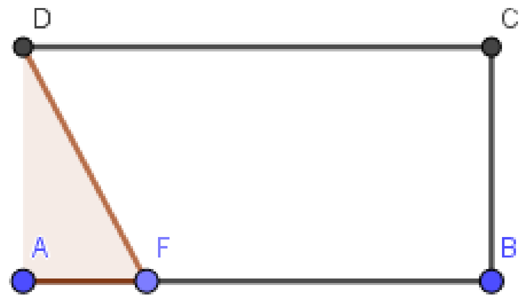


Figura 06: Quadrilátero com ponto F no segmento AB.
Fonte: OBMEP, prova da 2ª fase, questão 2, nível 3, 2014.

Solução:

Ao ler o problema, podemos constatar que a estratégia de separar em vários casos mais simples já foi determinada pela divisão nos itens **a) b), c)** e **d**). Vamos, então, começar sua resolução:

Etapa 1: Dados conhecidos: AD = BC = 10 cm, AB = CD = 20 cm, x = distância de A até F ao longo do contorno (variável independente). Precisamos determinar G(x) = área do triângulo ADF e o valor de *x* para que G(x) tenha o valor máximo.

Etapa 2: Notemos que x varia à medida que a formiga anda de A até D. Os valores possíveis para x são: $x \in [0,50]$, que será o domínio da função área.

Etapa 3: Após ler o problema todo e destacar os dados relevantes, observamos que o tipo de triângulo é o mesmo quando a formiga estiver em um mesmo lado, assim, a fórmula da área do triângulo fornecerá um resultado para cada caso. Observe a etapa 4 a seguir.

Etapa 4: Quando a formiga está no lado AB, ou seja, x ∈ [0, 20], o triângulo ADF é retângulo, relativo ao vértice A. Observemos a seguir dois exemplos de configurações de posição para o triângulo ADF.

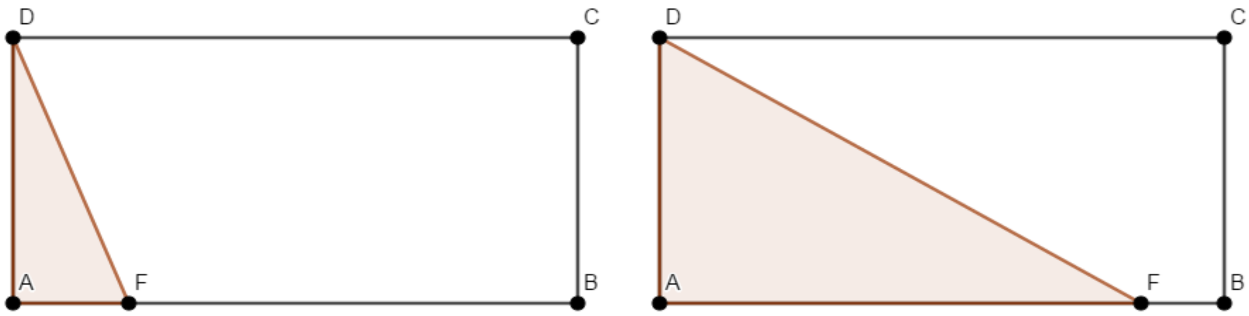


Figura 07: Quadrilátero com ponto F variando no segmento AB.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Notemos que, quanto mais próximo o ponto F estiver do ponto A, menor é a área do triângulo ADF, e quando o ponto F coincidir com o ponto A, a área deste triângulo será zero, uma vez que AF = 0. O oposto ocorre quando F se aproxima do ponto B, que mostra claramente que o valor encontrado para a área se apresenta de forma crescente. E quando o ponto F coincide com o ponto B, temos o valor máximo de área encontrado, que é $\frac{20x10}{2}$= 100.

De forma geral, tomando como base o lado AF, que tem medida x, a altura será AD = 10 cm, logo a área do triângulo, para cada x, será o valor da função G(x) = $\frac{x.10}{2}$ = 5x.

Etapa 5: Quando a formiga está no lado BC, ou seja, x ∈ [20,30], simulando posições distintas para a formiga (F), verificamos que podemos sempre tomar como base o lado AD = 10 cm. Observemos duas posições distintas para F em BC.

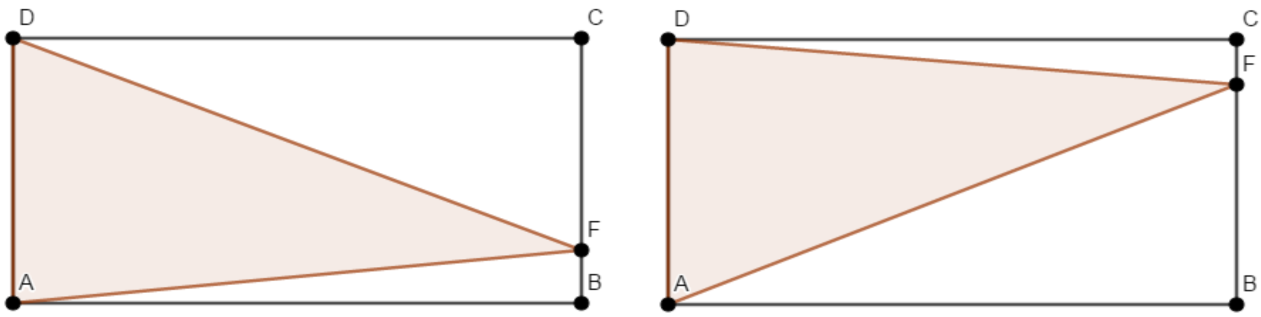


Figura 08: Quadrilátero com ponto F variando no segmento BC.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Notemos que, a altura será a distância do ponto F até AD, que é sempre igual a AB = CD = 20. Neste caso, a área será sempre a mesma, igual a G(x) = $\frac{10.20}{2}$=100 (Observemos que, quando x = 20, a formiga está no vértice comum ao lado AB e ao lado BC, o que está coerente com as duas expressões de G(x) que encontramos nas etapas 4 e 5.

Etapa 6: Quando a formiga estiver no lado CD, ou seja, x ∈ [30,50], teremos triângulos similares aos obtidos quando a formiga estava no lado AB, sendo que a expressão de G(x) para este intervalo deverá fornecer o valor 100, se x = 30, e o valor 0, para x = 50, porque aí o triângulo será degenerado. Vejamos duas possíveis posições de F em CD.

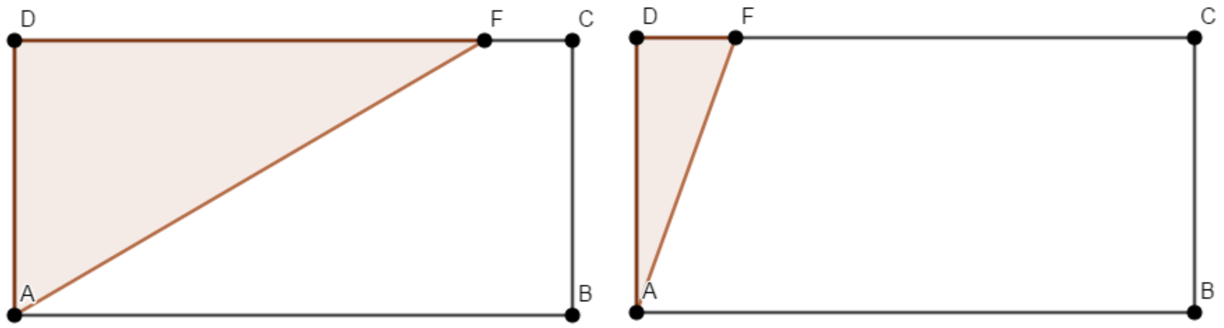


Figura 09: Quadrilátero com ponto F variando no segmento CD.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Atentemos para o fato que o gráfico da função área será um segmento da reta y = 5x, quando x ∈ [0, 20], e um segmento da reta y = 100, quando x ∈ [20,30]. Sendo os triângulos relativos ao lado AB similares aos relativos ao lado CD, concluímos que a função área, quando x ∈ [30,50], também deverá ter um segmento de reta como gráfico, o qual deve ligar os pontos (30,100) e (50,0). Construiremos a expressão para y a partir de:

$\frac{y-0}{x-50} = \frac{100-0}{30-50}$, de onde obtemos y = 5(50 – x).

Outra maneira de chegar a esta expressão é construir um triângulo com o vértice F sobre o lado CD, que será retângulo, no vértice D. Tomando como base o lado DF, a altura será AD = 10. Como x = AB + BC + CF, teremos DF = 20 + 20 + 10 – x = 50 – x.

Nesse caso, a área será G(x) = $\frac{10.(50-x)}{2}$ = 5 (50-x). (veja que estamos, novamente, validando nossos resultados).

A expressão de G (x) será então:

$$G(x) = \begin{cases} 5x, & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \\ 100, & \text{se } 20 \leq x \leq 30 \\ 250 - 5x, & \text{se } 30 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

Etapa 7: Com o auxílio do Geogebra, fazendo uma redução de seus eixos para melhor visualização, temos o seguinte gráfico da função área, cuja expressão analítica foi obtida na etapa 6:

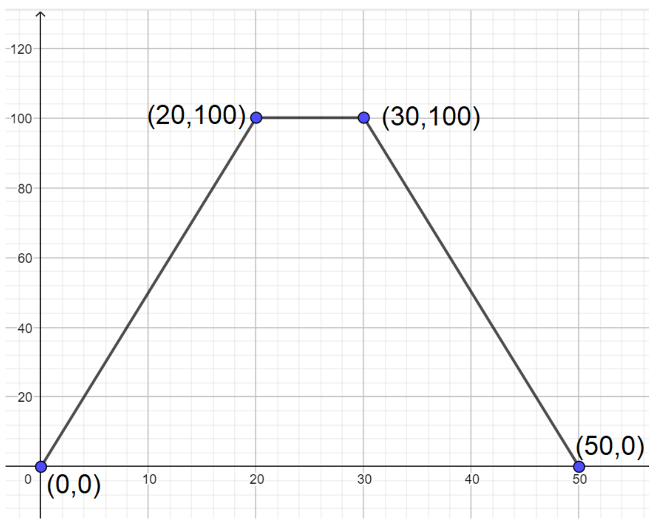


Gráfico 04: Plotagem da função G(x).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Desta forma, é fácil concluir que a área máxima é 100 cm^2, obtida quando a formiga estiver em qualquer ponto do lado BC (ou seja, quando x estiver entre 20 e 30 cm, inclusive).

Podemos notar que existe uma infinidade de pontos onde a formiga deve estar para a área ser máxima, todos situados no segmento que liga os pontos (20,100) e (30,100).

Existem outros tipos de problemas cuja modelagem matemática envolve uma função "afim por partes", ou "definida por várias sentenças", mas, diferente do nosso gráfico, os segmentos de reta não têm extremidades em comum, que é um caso das funções descontínuas. Na próxima seção, trataremos de um problema deste tipo.

2.4 Gráfico: Função descontínua

Nesta seção abordaremos uma situação em que a função é descontínua. Dizemos que f é descontínua em x_* pertencente ao domínio de f quando o $f(x_*)$ não coincide com o valor para o qual f(x) se aproxima quando x fica cada vez mais próximo de x_* ou não existe este último valor. Observaremos que, neste problema, o domínio é um intervalo da reta, mas a imagem é uma união de intervalos disjuntos.

Problema 4: Num certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte forma: os que têm rendimento bruto até 1.500 u. m. (unidades monetárias) anuais, são isentos; aos que possuem rendimento bruto anual acima de 1.500 u. m. até 6.000 u. m., cobra-se um imposto de 10% sobre o total da renda; acima de 6.000 u. m. de rendimento bruto anual, o imposto é de 20% sobre o total da renda.
a) Determine o valor do imposto de duas pessoas, uma com rendimento bruto anual de 5500 u. m. e a outra com 6100 u. m. e compare a renda líquida das duas.
b) Determine a expressão algébrica e esboce o gráfico da função que relaciona o rendimento bruto anual com o imposto cobrado.
c) Determine a expressão algébrica e esboce o gráfico da função que relaciona o rendimento bruto anual com a renda líquida. (Fonte: Questão adaptada da Escola Naval – Concurso Aspirante, 2013)

Solução:

Etapa 1: Dados conhecidos: Vamos colocar as informações relevantes em uma tabela para facilitar os cálculos:

Renda Bruta Anual (u.m.)	Imposto de Renda (%)
0 até 1500	0
Acima de 1500 até 6000	10
Acima de 6000	20

Tabela 03: Relação entre a renda bruta mensal e o imposto de renda.
Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-militares/questoes/0e2f1576-10

Etapa 2: Como 5500 está na segunda faixa de Renda Bruta (RB), o imposto de renda (IR) será de 10% sobre 5500, isto é, 550 u.m.. No caso da segunda pessoa, que está na terceira faixa, com renda bruta de 6100, o imposto cobrado será de 20% sobre 6100, isto é, 1220 u.m.

Etapa 3: A renda líquida (RL) satisfaz a seguinte relação: RL = RB – IR. Observando a etapa 2, a primeira pessoa, com RB 5500 u.m., terá RL = 5500 – 550 = 4950 u.m.. Já a segunda pessoa, com RB = 6100 u.m., terá RL = 6100 – 1220 = 4880 u.m.. Ao comparar as duas rendas líquidas, fica claro que a pessoa com maior renda bruta terá renda líquida inferior à da outra pessoa, o que não parece razoável.

Etapa 4: Se a renda bruta anual for um valor x, quando $x \leq 1500$, o IR a ser pago será de 0 u. m. Já quando a renda bruta anual for um valor x, tal que $1500 < x \leq 6000$, o IR a ser pago será de 10% da quantia, logo será igual a $\frac{x}{10}$. Finalmente, quando a renda bruta for um valor x, tal que $x > 6000$, o IR a ser pago será de 20% da quantia, logo será igual a $\frac{x}{5}$. Teremos, então, a seguinte lei de formação para a função que relaciona a Renda Bruta (x) com o imposto cobrado F(x) correspondente:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1500 \\ \frac{x}{10}, 1500 < x \leq 6000 \\ \frac{x}{5}, x > 6000 \end{cases}$$

Etapa 5: A função F tem expressão similar à da função área do problema 3, mas o valor de F(1500) = 0, calculado utilizando a primeira sentença, não coincide com o valor se fosse calculado utilizando a segunda sentença, que seria $\frac{1500}{10} = 150$. Já o valor F(6000) = 600, calculado utilizando a segunda sentença, também não coincide com o valor se fosse calculado utilizando a terceira sentença, que seria $\frac{6000}{5} = 1200$. Portanto, o gráfico vai apresentar "saltos". Com a ajuda do Geogebra, podemos obter o gráfico de F(x), que associa a cada valor de Renda Bruta o Imposto de Renda cobrado correspondente. Pelo gráfico pode-se obter o domínio de F, que é o conjunto dos reais $x \geq 0$. Já a imagem é formada pela união de 3 conjuntos disjuntos: o conjunto unitário $\{0\}$, o intervalo $(150,600]$ e o intervalo ilimitado $(1200, +\infty)$.

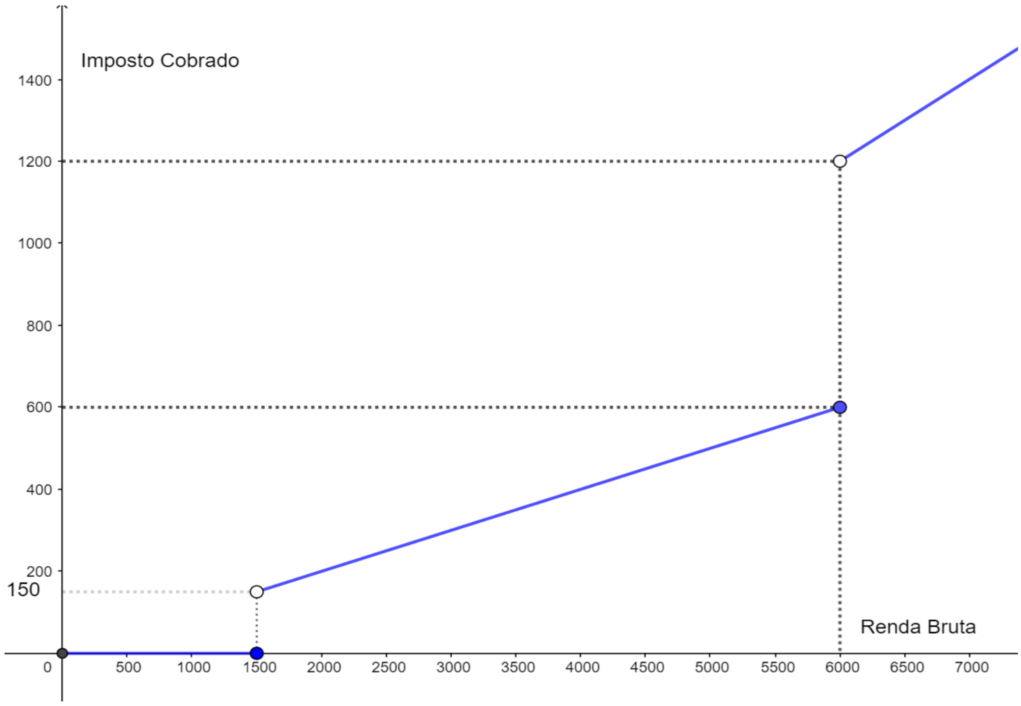


Gráfico 05: Plotagem de F(x).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Etapa 6: Utilizaremos a relação RL = RB – IR da etapa 3 e a expressão algébrica de RL, dada por F(x), vista na etapa 4. Vamos definir a renda líquida por uma nova função G(x). Supondo que a renda bruta é x, temos que, se $x \leq 1500$, o imposto cobrado F(x) será zero; logo, a renda líquida, isto é, G(x), será também igual a x.

Mas, se, $1500 < x \le 6000$, o imposto será de $\frac{x}{10}$; logo, a renda líquida será $G(x) = x - \frac{x}{10}$. Finalmente, se $x > 6000$, o imposto será de $\frac{x}{5}$, logo, a renda líquida será $G(x) = x - \frac{x}{5}$.
Portanto $G(x) = x - F(x)$, para cada faixa de renda bruta x e, utilizando a expressão de F por várias sentenças, G será dada pela expressão a seguir:

$$G(x) = \begin{cases} x, x \le 1500 \\ x - \frac{x}{10}, 1500 < x \le 6000 \\ x - \frac{x}{5}, x > 6000 \end{cases}$$

Etapa 7: Da mesma forma que a função F, teremos que a função G será descontínua, com saltos nos pontos de abscissa 1500 e 6000. O domínio é o mesmo que o da função F, isto é, o conjunto dos números reais não negativos. Já a imagem coincide com o domínio, isto é, o intervalo [0, +∞**),** como se pode ver no gráfico a seguir construído com ajuda do Geogebra:

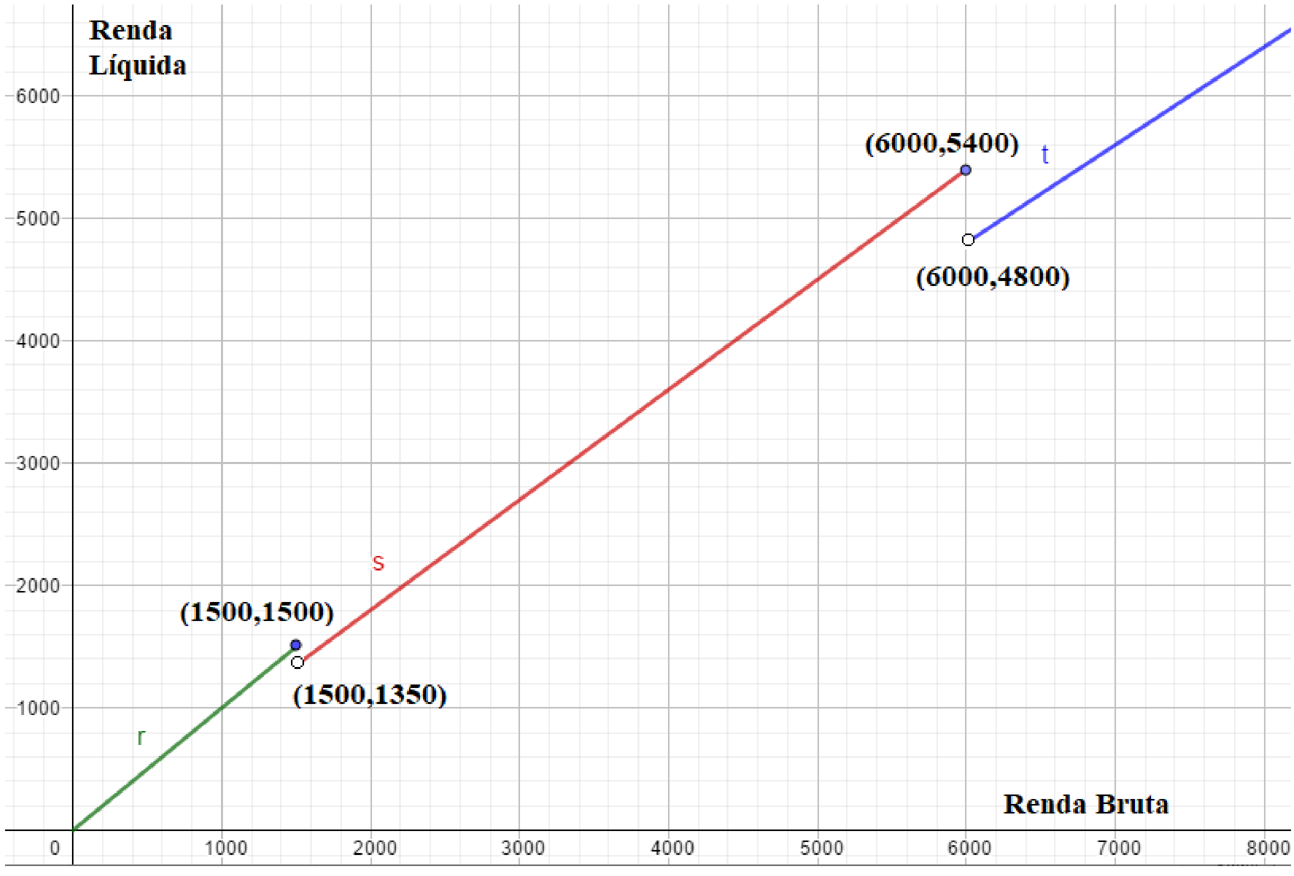


Gráfico 06: Plotagem de G(x).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Resumindo, como já tinha sido constatado na etapa 3, o sistema é injusto, porque os trabalhadores que recebem renda mais alta e mais próxima do limite das faixas, acabam recebendo menos do que os que recebem renda menor e mais próxima destes limites, eliminando, assim, parte de ganhos menores de salário.

Nos gráficos 05 e 06, constatamos que há saltos para cima e para baixo, respectivamente. Como já dito anteriormente, funções com estas representações gráficas são chamadas *descontínuas*. Nas funções ditas *contínuas*, os gráficos nunca apresentam estes "saltos". Mas nem toda função *descontínua* apresenta um salto; pode acontecer simplesmente que ela tenha apenas uma interrupção no gráfico, um “buraco”.

Para concluir, podemos observar que, em todos os problemas apresentados neste capítulo, a utilização do Geogebra foi muito importante para facilitar a compreensão deles e tornar mais simples e rápida a obtenção da solução correta para os mesmos, por parte dos alunos.

No próximo capítulo, veremos alguns problemas que vão necessitar de outro tipo de função para sua modelagem, a função quadrática, seja de forma direta ou indireta, fazendo uso de propriedades de funções.

CAPÍTULO 3
O uso do Geogebra no estudo de aplicações fora do padrão da Função Quadrática

Neste capítulo, abordaremos alguns problemas contextualizados que foram selecionados de forma que seja utilizada a função quadrática, mas que os procedimentos para chegar a uma solução correta não sejam simplesmente mecânicos.

A utilização do Geogebra também será muito importante para abordar estes problemas com os alunos com resultados positivos no que concerne à construção de conhecimento real sobre a função quadrática e propriedades de função em geral.

As aplicações que desenvolveremos são problemas de otimização, ou seja, determinação do máximo ou mínimo (global) de uma função. Este assunto já foi abordado de forma intuitiva em dois problemas do capítulo anterior. Mas agora, torna-se interessante explorar este tópico de forma mais aprofundada com os alunos, utilizando o Geogebra, para que estes consigam enxergar a relação com as propriedades de função crescente e decrescente, contínua e limitada. Sendo assim, eles podem valorizar mais estas propriedades, que são apresentadas de forma abstrata na escola básica. Este será o objetivo da primeira seção deste capítulo.

3.1 Aspectos teóricos

No Ensino Médio, costuma-se apresentar rapidamente propriedades especiais das funções, de forma abstrata e sem associação com outros tópicos ou com problemas desafiadores. Para citar duas delas, f é crescente quando, se $a < b$, tem-se $f(a) < f(b)$. Já no caso de f ser decrescente, se $a < b$, tem-se $f(a) > f(b)$. Por exemplo, dada uma função cujo gráfico é uma reta ou segmento de reta, é fácil identificar pelo gráfico se ela vai ser crescente ou decrescente, como na figura 02, referente às opções de resposta A) e B) para o Problema 1 do capítulo 2.

Mas, já no Problema 3 do mesmo capítulo, a função do gráfico 04 é crescente quando a variável independente $x \in [0,20)$, constante quando $x \in [20,30]$ e decrescente quando $x \in (30,50]$. Se problemas como este fossem trabalhados com frequência na educação básica, com foco no aspecto geométrico facilitado pelo Geogebra por exemplo, haveria uma compreensão melhor destas propriedades e seria mais fácil associar o comportamento de crescimento/decrescimento de uma função à existência de um valor máximo ou mínimo.

Vamos apresentar agora algumas definições importantes para que seja possível trabalhar de forma mais segura com problemas de otimização, isto é, aqueles que envolvem determinar o valor máximo global ou mínimo global de uma função satisfazendo determinadas propriedades.

De acordo com Bartle e Scherbert (2000), se S for um conjunto contido no conjunto dos números reais e f definida para cada $x \in S$, com imagem contida no conjunto dos reais, então f tem valor máximo global(ou absoluto) em S se existe(pelo menos) um número $c \in S$ tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in S$. Por outro lado, f terá um máximo local (ou relativo) em $c \in S$ se existir uma vizinhança V_c de c tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in S \cap V$. Analogamente, definimos também os conceitos de mínimo local(ou relativo) e global (ou absoluto). Nos problemas de otimização selecionados para esta dissertação, S é um intervalo da reta e V_c é um intervalo que contém c e está contido em S.

No caso de um máximo local de uma função, teremos, em geral, um comportamento geométrico como o apresentado na figura a seguir.

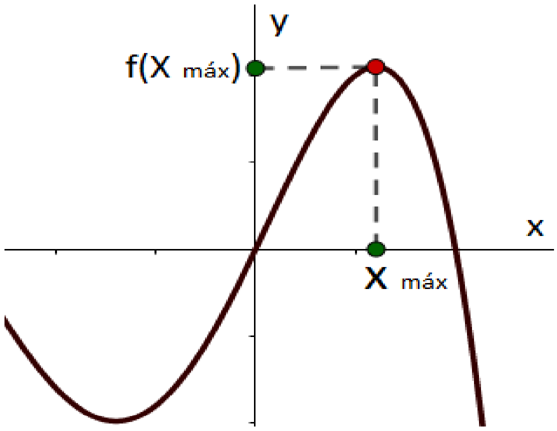


Gráfico 07: Função qualquer com seu máximo local em destaque.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Notemos que, se x é próximo de X máx com x < X máx, a função é crescente e, se x é próximo de X máx com x > X máx, a função é decrescente. Supondo agora que o domínio da função é o intervalo fechado entre as raízes I, o máximo global de f em I coincide com f(X max) e o mínimo global de f em I é o valor zero. Se for considerado o máximo/mínimo global em outro intervalo J, eles poderão ser diferentes.

De forma similar, quando a função tem um mínimo local, teremos, em geral, um comportamento geométrico como o da figura abaixo, em que, se x < X mín com x próximo deste valor, a função é decrescente e, se x > X mín com x próximo deste valor, a função é crescente.

Podemos observar que há dois mínimos locais no gráfico 08, o outro ocorre num ponto onde o gráfico tem um "bico", como o vértice de um cone.

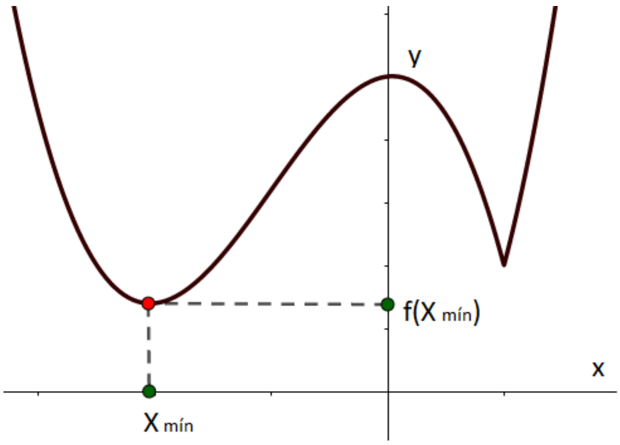


Gráfico 08: Função qualquer com um mínimo local em destaque.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

O gráfico 08 também pode ser utilizado para apresentar um caso de não existência de valor máximo global para uma função, supondo que o domínio seja o conjunto dos números reais, que a função não altere seu comportamento de crescimento/decrescimento e associando a ela a não existência de uma limitação superior. Neste caso o mínimo global será f(X min).

A construção do conhecimento sobre máximo/mínimo global de função pode ser enriquecida considerando, agora, uma modificação da questão, ou seja, a existência do valor máximo para f, quando $x \in [a, b]$, como mostra o gráfico 09 a seguir:

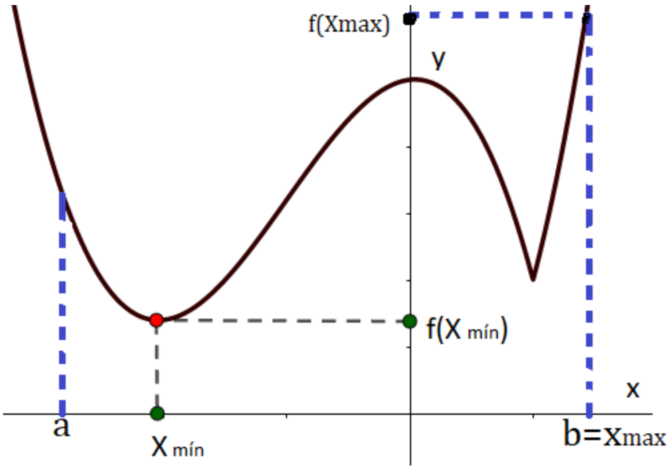


Gráfico 09: Função qualquer com seu máximo/mínimo global em destaque.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

O gráfico acima pode ser ainda utilizado para distinguir valor máximo/mínimo local e valor máximo/mínimo global em um intervalo específico de definição para a variável independente.

Com auxílio do Geogebra, os alunos podem ser incentivados a criar gráficos de funções com vários comportamentos, até que possa ser apresentado de forma natural um resultado que aparece muito mais tarde, já no Ensino Superior: o Teorema de Weierstrass, que diz que, se uma função f é contínua para cada $x \in [a, b]$, então sempre existirá pelo menos um $x_{mín}$ e um $x_{máx}$, no intervalo $[a, b]$, tais que $f(x_{mín}) \leq f(x) \leq f(x_{máx})$, para todo $x \in [a, b]$. Logo $f(x_{mín})$ será o valor mínimo da função neste intervalo de definição e $f(x_{máx})$ será o valor máximo da função neste intervalo.

Voltando ao gráfico 09, onde a função está nas condições do teorema, pode-se discutir com os alunos como procurar o máximo/mínimo globais, se não for conhecido o gráfico da função, ou seja, entre os máximos e mínimos locais e os extremos do intervalo de definição de x.

Uma vez discutidas as propriedades anteriores para funções genéricas, pode-se relacioná-las, a seguir, com a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, podendo ter sua concavidade voltada para cima, quando $a > 0$, ou para baixo, quando $a < 0$.

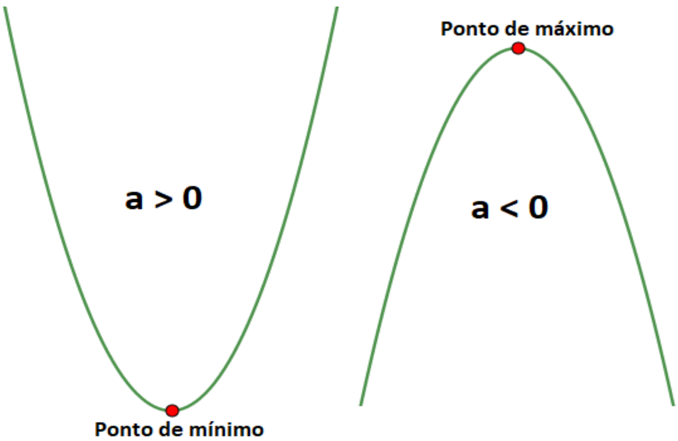


Figura 10: Concavidades de parábolas com seus máximo e mínimo em destaque.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

No caso em que $a > 0$, o gráfico da figura 10 mostra que a função apresenta um valor mínimo local e global no ponto em destaque (vértice da parábola), porém a função não possui valor máximo global, supondo que o domínio de f seja o conjunto dos números reais. Mas, em problemas contextualizados, o domínio de f costuma ser mais restrito. Se for um intervalo fechado e limitado, uma vez que a função quadrática é contínua, haverá um máximo global. De forma similar, se $a < 0$, o segundo gráfico da figura 10 mostra que a função tem um valor máximo local e global no ponto destacado (vértice da parábola), porém a função não tem valor mínimo global, mas, se o domínio de f num problema contextualizado for um intervalo fechado e limitado, ele existirá segundo o Teorema de Weierstrass.

Nesta altura, pode ser sugerido aos alunos que utilizem o Geogebra para traçar gráficos de funções quadráticas variando o domínio de definição, como nos dois gráficos a seguir:

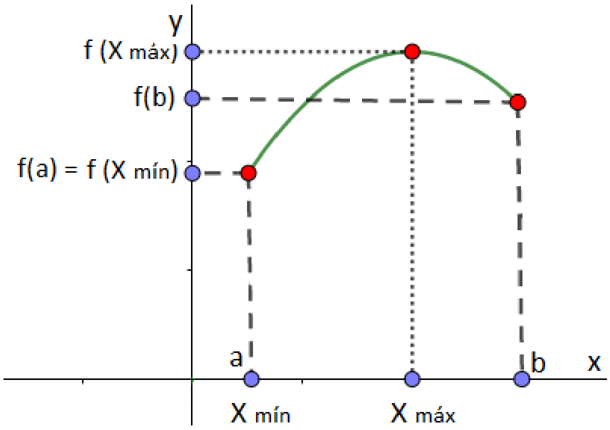


Gráfico 10: Função quadrática com valor máximo em destaque.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

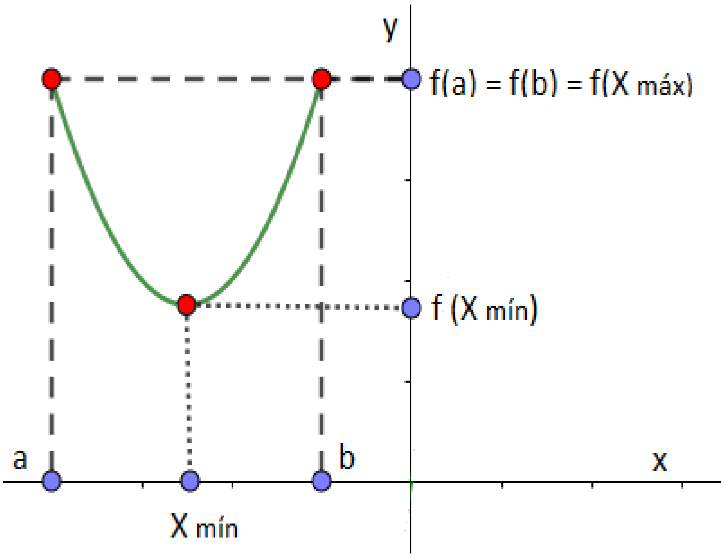


Gráfico 11: Função quadrática com valor mínimo em destaque.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Os alunos poderão fazer simulações até concluírem que devem procurar máximo/mínimo (dependendo do sinal de a) nos extremos do intervalo de definição da variável independente, além de considerar o vértice da parábola. A partir daí, a importância de determinar o domínio da função associada a um problema estará demonstrada para os alunos, percebida por eles com auxílio do Geogebra.

Existem problemas envolvendo funções quadráticas em que o conjunto de valores possíveis não é um intervalo da reta real, mas um subconjunto dos números naturais, ou seja, um conjunto discreto. Se for um conjunto com poucos elementos uma plotagem do gráfico a partir de uma tabela como a apresentada a seguir é suficiente para comparação.

x	f(x)
1	f(1)
2	f(2)
3	f(3)
4	f(4)

Tabela 04: Relação de x com f(x).
Fonte: Desenvolvida pela autora.

Se for um conjunto discreto com muitos elementos, pode-se trabalhar em duas etapas. Primeiramente, se estuda um problema auxiliar estendendo o domínio para o menor intervalo da reta que contenha o conjunto discreto. Uma vez obtido o máximo e/ou mínimo da função deste problema auxiliar, um estudo geométrico do problema original com esta informação poderá levar à solução procurada do problema original. Esta estratégia será utilizada na próxima seção deste capítulo para resolver o problema 1.

As propriedades de crescimento/decrescimento de uma função são tão poderosas que podem ser utilizadas para resolver problemas de otimização envolvendo funções mais gerais, como $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, onde g(x) é uma função quadrática.

Para garantir que exista o máximo/mínimo global da função f, quando x pertence a um conjunto S, é suficiente verificar se ela satisfaz as condições do teorema de Weierstrass, ou seja, f deve ser contínua e o domínio de definição da função deve ser um intervalo fechado e limitado I. Como g é uma função quadrática, logo contínua, basta que este intervalo não inclua nenhuma raiz da equação do segundo grau g(x)=0.

Com auxílio da proposição a seguir, conhecendo o comportamento de g saberemos como será o comportamento da função mais complicada f.

Proposição 1: Suponha g(x) definida para todo $x \in I \subset \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ no intervalo I. Seja $f(x) = \frac{1}{g(x)}$.

a) Se g(x) > 0, para todo $x \in I$, e g crescente (decrescente) em I => f será decrescente (crescente) no intervalo I.

b) Se g(x) < 0, para todo $x \in I$ e g crescente (decrescente) em I => f será crescente (decrescente) no intervalo I.

Prova:

a) Se g é crescente em I, então, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I com $x_1 < x_2$, teremos que $g(x_1) < g(x_2)$, e como $f(x_1) = \frac{1}{g(x_1)}$ e $f(x_2) = \frac{1}{g(x_2)}$, consequentemente $f(x_1) > f(x_2)$ (pois g(x) > 0), o que caracteriza f ser decrescente. Para o caso em que g for decrescente, a prova é análoga.

b) Se g é crescente em I, então, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I com $x_1 < x_2$, teremos que $g(x_1) < g(x_2)$, e como $f(x_1) = \frac{1}{g(x_1)}$ e $f(x_2) = \frac{1}{g(x_2)}$, consequentemente $f(x_1) < f(x_2)$ (pois g(x) < 0) o que caracteriza f ser crescente. Para o caso em que g for decrescente, procedemos de forma análoga.

Já foi constatado anteriormente, nesta seção, que o mínimo global de uma função quadrática com a>0 é também um mínimo local e que o máximo global, se a < 0, é um máximo local, ocorrendo no vértice da parábola. Então a proposição anterior poderá ser utilizada para determinar máximo/mínimo locais de f, utilizando o máximo/mínimo locais de g, como será feito na última seção deste capítulo para resolver o problema 2.

3.2 Função Quadrática: Domínio - conjunto discreto

Nesta seção, abordaremos um problema envolvendo o uso de uma função quadrática de forma pouco convencional. O intuito deste problema será de desmistificar os procedimentos mecânicos, por vezes massivamente trabalhados em sala de aula para o cálculo das coordenadas do vértice de uma parábola. Utilizaremos aqui o apoio do Geogebra para explicitarmos a função trabalhada com o comando “Sequência”, pois utiliza apenas números naturais para a variável independente.

Problema 1: Joana visitará seus pais no Natal. Para isto, comprou uma passagem do Rio de Janeiro para São Paulo. O avião em que Joana viajará possui 200 lugares e cobra 400 reais por passagem, além de um adicional de 16 reais por lugar vago. Qual a quantidade de lugares vagos que proporcionará uma receita máxima para a empresa aérea? (Fonte: Desenvolvido pela autora, 2019.)

Solução:

Etapa 1: Dados conhecidos: O avião possui 200 lugares disponíveis, cobra 400 reais pela passagem aérea e um adicional de 16 reais por lugar vago.

Etapa 2: Como a receita obtida pela empresa depende da quantidade x de lugares vagos, devemos determinar uma função R(x) que relaciona a quantidade de lugares vagos no avião com a receita R obtida pela empresa aérea. Entretanto sabemos que:

R(x) = (preço por passageiro) x (número de passageiros).

Como o preço por passageiro depende de x, este será definido por 400 + 16x, pois 400 é o valor inicial fixo da passagem e 16 é o acréscimo por lugar vago. O mesmo ocorre com o número de passageiros, pois, o avião possui capacidade de 200 lugares, porém, tendo x lugares vagos, temos então 200 – x passageiros. Sendo assim, temos que:

$$R(x) = (400 + 16x)(200-x) = -16x^2 + 2800x + 80.000.$$

Etapa 3: Com R(x) definida, precisamos estabelecer o domínio de definição de acordo com as condições do problema. Como x representa o número de assentos vagos e o avião tem 200 assentos, o domínio de definição possível para a função R é o conjunto discreto finito {0,1,2,3, …, 200}.

Etapa 4: Consideremos o problema auxiliar em que o domínio de R(x) é o menor intervalo da reta que contém o domínio real. Este será o intervalo I = [0,200].

Etapa 5: Para estudar o máximo/mínimo global de R(x), com domínio I, observemos inicialmente que $a = -16 < 0$, $b = 2.800$ e $c = 80.000$. Assim o gráfico de R(x) com domínio I é uma parábola côncava para baixo. Nesse caso, o mínimo global de f em I (que não nos interessa, deveria ser procurado nos valores R(0) e R(200)). O máximo global, considerando o domínio real, deverá ocorrer, realmente, no vértice da parábola V $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. Temos que

$\Delta = b^2 - 4ac = (2.800)^2 - 4(-16)(80.000) = 12.960.000.$

Teremos então que $x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2800}{-32} = 87{,}5$ e que $R(x_{max}) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-12960000}{-64} = 202500$. Como $x_{max}=87{,}5$ pertence ao intervalo I, teremos que o valor máximo de R em I existirá, e será $R(x_{max})$. Resolvemos então o problema auxiliar apresentado na etapa 4.

Etapa 6: Voltemos ao problema original, em que x representa o número de assentos vagos e R(x) a receita. Não faz sentido o número de assentos vagos ser 87,5.

Etapa 7: Com o auxílio do comando "Sequência" do Geogebra, podemos definir uma lista de pontos que retratam a relação entre o número de lugares vagos e a receita obtida. Observemos como:

l1 = Sequência ((n,-16n^2 +2.800n + 80.000), n, 1, 200)

Inserindo este comando, será obtida uma lista dos pares ordenados (x, R(x)) = (n, R(n)), começando de n = 0 até n = 200, onde a letra n representará o valor x dito anteriormente, pois o Geogebra explicita sequências utilizando esta notação. Digitamos este comando obtendo o gráfico da função receita, com domínio sendo o conjunto discreto já mencionado, conforme veremos a seguir.

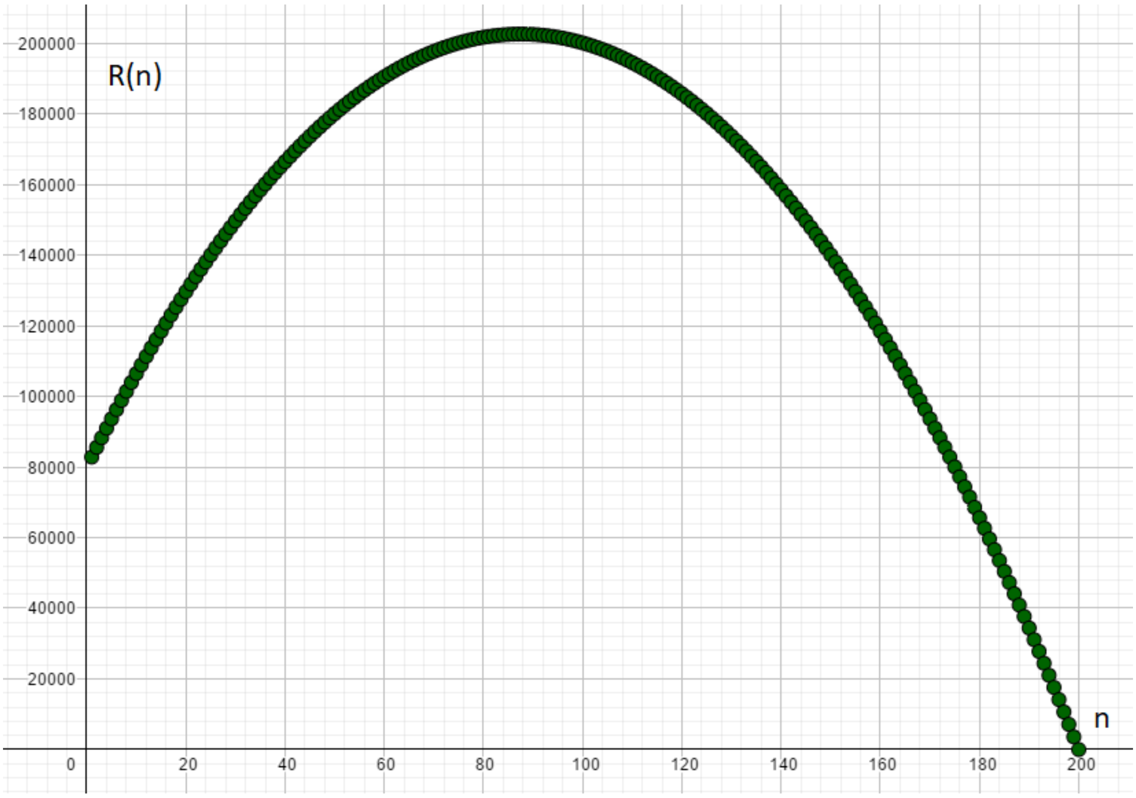


Gráfico 12: Sequência de pontos (n, R(n)).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Observe que a sequência de pontos pode ser dividida em dois momentos, um momento inicial em que ela é crescente, ou seja, conforme a quantidade de lugares vagos aumenta, a receita obtida também aumenta, e em outro momento, em que a quantidade de lugares vagos aumenta mais ainda, porém a receita obtida diminui, apresentando um gráfico decrescente.

Aparentemente, o gráfico representa uma função contínua, pois fica difícil observar o espaçamento entre duas bolinhas destacadas acima. Reparemos que se n representa a quantidade de lugares vagos, sabemos que este só pode ser um valor natural.

Etapa 8: Para melhor visualização, vamos aproximar, no Geogebra, a parte do gráfico próxima do valor obtido anteriormente como $R(x_{min}) = R(87{,}5)$. Para isto basta alterar a escala dos eixos horizontal e vertical na tela de visualização do Geogebra, incluindo a reta x = 87,5.

Vemos que esta reta não possui interseção com o gráfico de R(x), o que já era esperado, já que não se trata de um número natural. Entretanto, será possível visualizar mais claramente os pontos do gráfico que têm a maior ordenada (ou seja, que correspondem à maior receita), que deverão corresponder às abscissas que forem números naturais mais próximos de x = 87,5.

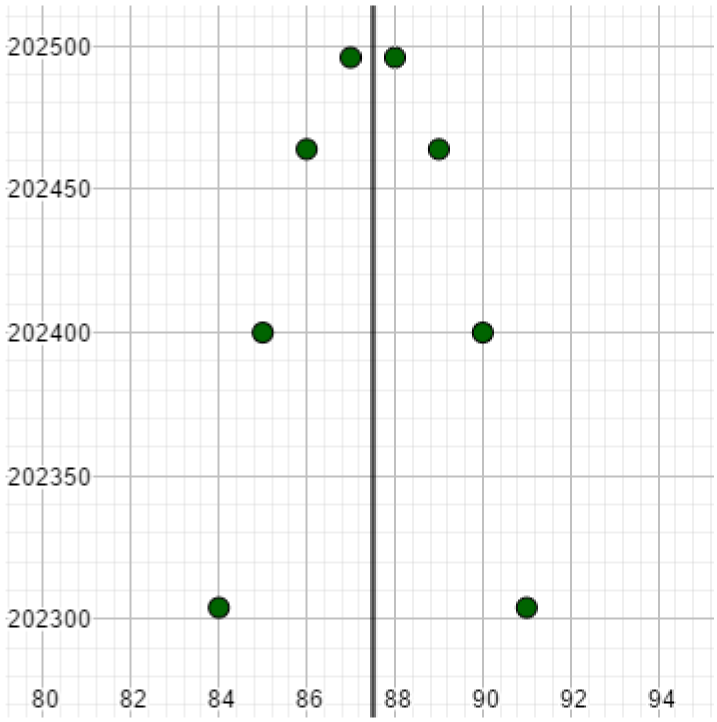


Gráfico 13: Plotagem de R(x) aproximando dos seus valores máximos.
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Como a função R(x) assume receita máxima dentro do intervalo [80,100], como ilustrado acima, calcularemos o valor de R(x) quando x = 87 e quando x = 88 visto que o valor x = 87,5 é um ponto de transição no gráfico, de crescente a decrescente, como já discutido anteriormente, e que os naturais 87 e 88 são os mais próximos deste ponto.

Vamos, então, calcular R(x) para os dois valores citados. Lembrando da definição de R(x) = $-16x^2 + 2800x + 80.000$, temos que R(87) = $-16\ (87)^2 + 2.800\ (87) + 80.000 = 202.496$. Da mesma forma temos que R(88) = $16\ (88)^2 + 2800\ (88) + 80.000 = 202.496$, que não precisaria ser calculado, visto que x = 87,5 é eixo de simetria da parábola e, tanto x=87 quanto x=88 são retas que estão à mesma distância do eixo de simetria.

Podemos constatar então que R(87) = R(88) = Valor de Receita Máxima, ou seja, se houver 87 ou 88 lugares vagos a empresa terá a mesma receita, que será o valor máximo possível dentro das condições do problema.

Algumas considerações sobre o gráfico plotado na Etapa 5 devem ser feitas, como:

- Caso todos os lugares do avião estejam vagos, isto é, x = 200, a receita obtida é zero. Isto já era óbvio, pois se não há passageiros para viajar, a empresa não recebe dinheiro algum. Isto, pode ser demonstrado pela presença do ponto (200,0) no gráfico.
- Caso o avião esteja lotado, ou seja, com seus 200 lugares ocupados, a receita obtida será de 400 x 200 = 80.000, o que confere com a interseção do gráfico com o eixo y, ponto (0,80.000).
- Existem várias duplas de pares ordenados do gráfico que possuem a mesma ordenada. Observe a simetria quando traçamos a reta x = 87,5.

O problema discutido acima foge ao padrão dos que aparecem em livros didáticos, porque tem mais de uma solução. Para encontrá-las, não basta efetuar procedimentos mecânicos associados à função quadrática. É essencial verificar que a função possui um domínio discreto e obter o gráfico real dela para resolver corretamente o problema.

Na próxima seção, será apresentado um problema envolvendo encontrar máximo e mínimo de uma função racional, isto é, um quociente de funções polinomiais. Em geral, este tipo de problema só é resolvido no curso superior, em disciplina de Cálculo, com auxílio da derivada de uma função. Mas isto não será necessário, como veremos.

3.3 Função Racional: Domínio - intervalo da reta

No problema a seguir, precisaremos encontrar o valor máximo e mínimo de litros de água presentes em um reservatório. Utilizaremos aqui o que já discutimos previamente na seção 3.1 sobre uma função racional do tipo 1/f(x), com f(x) sendo uma função quadrática. A representação gráfica será feita para f(x) e 1/f(x) utilizando o Geogebra, porém basta conhecer o comportamento de f(x) para analisar como está ocorrendo a variação da água no reservatório ao longo do dia e conseguir solucionar o problema, utilizando propriedades da função quadrática e a proposição 1 da seção 3.1.

Problema 2: O volume de água em um reservatório de uma residência onde mora uma família com 3 pessoas varia durante o dia conforme a seguinte função: $V(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{6} - 3t + 16}$, com $0 \leq t \leq 24$, medido em horas, com início às 9 h da noite, e V(t) o volume do reservatório medido em metros cúbicos. Quais são os valores máximo e mínimo do volume de água no reservatório? (Fonte: Desenvolvido pela autora)

Solução:

Etapa 1: Dados conhecidos: $V(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{6} - 3t + 16}$ e $0 \leq t \leq 24$ com t = 0 correspondente a 9 horas da noite e V(t) volume expresso em m^3.

Etapa 2: A função $V(t) = \frac{1}{g(t)}$, onde g(t) é a função polinomial de segundo grau em que $a = \frac{1}{6} > 0$, b = -3 e c = 16. Portanto o gráfico de g é uma parábola côncava para cima. Vejamos se V(t) é contínua no domínio I = [0, 24], verificando se $g(t) \neq 0$ neste intervalo.
Como $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\,(1/6)\,(16) = -\frac{5}{3} < 0$, logo g(t) não possui raízes reais. Assim, V é contínua em I, intervalo fechado e limitado. Pelo Teorema de Weierstrass, existe máximo e mínimo de V em I.

Etapa 3: Calculemos agora, a abscissa do vértice da parábola da função g(t), a fim de verificarmos se ela pertence ao intervalo [0,24]: $X_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{(2(\frac{1}{6}))} = 3 \times 3 = 9$. Como $9 \in [0,24]$, seguimos para o objetivo de encontrar o máximo de $\frac{1}{(g(t))}$ em I.

Temos então, que g(t) tem valor mínimo local e global em I, que pode ocorrer no ponto da parábola correspondente ao vértice, cujas coordenadas serão $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. Conforme já visto na seção inicial deste capítulo, antes do t_{min} a função g é decrescente e depois ela será crescente. Além disso tem-se que $g(t_{min}) = \frac{-\Delta}{4a} = -(\frac{-5/3}{4/6}) = \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} > 0$. Sendo assim $g(t) > \frac{5}{2}$, para cada $t \in$ I. Pela proposição 1(a), teremos então que V será crescente antes de t_{min} e será decrescente depois de t_{min}. Portanto V(t) assumirá seu valor máximo em $t_{min} = \frac{-b}{2a} = 9$. Como $V(t) = \frac{1}{g(t)}$, teremos que *o valor máximo de V* será igual a $V(9) = \frac{1}{g(9)} = 0,4\ m^3 = 400$ litros.

Etapa 4: Como a função quadrática g tem domínio de definição para o problema dado por I, seu máximo global deverá ocorrer em um dos extremos do intervalo, ou seja, g(0) ou g(24). Plotando o gráfico de g(t) neste intervalo e incluindo a reta auxiliar x = 9, para destacar o vértice, temos:

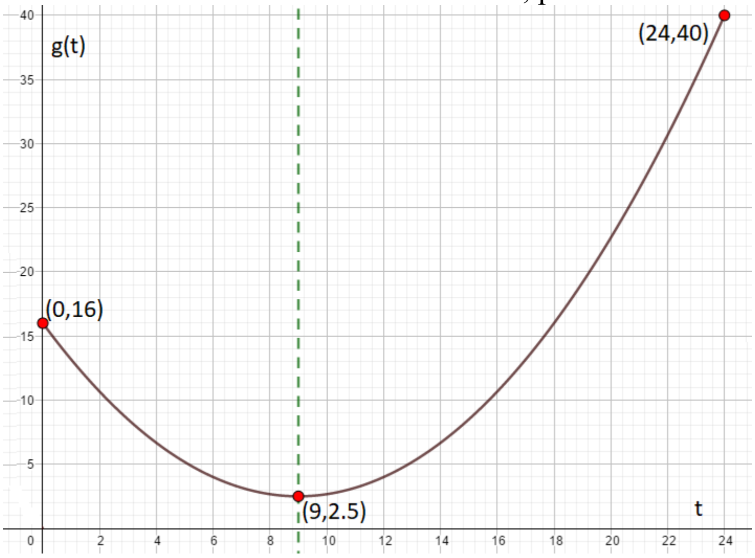


Gráfico 14: Plotagem de g(t).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

Pelo gráfico, verificamos que o valor máximo da função g, no intervalo I, será obtido quando t = 24 e será igual a 40. Como V(t)= 1/g(t), teremos *o valor mínimo* global da função V quando t = 24 e será igual a V(24) = $\frac{1}{g(24)}$= $\frac{1}{40}$= 0,025 m^3 = 25 litros.

Etapa 5: Voltemos ao enunciado do problema para interpretar a solução e analisar a sua validade. O volume será máximo em t=9. Como t=0 corresponde às 9h da noite, teremos que o reservatório estará com reserva máxima às 6h da manhã e estará com reserva mínima às 9h da noite. Este resultado faz sentido numa casa em que as pessoas levantam cedo, por volta de 6h da manhã, gastam água ao longo do dia e dormem cedo, por volta de 9h da noite.

Etapa 6: Mesmo que os alunos da Escola Básica não trabalhem com funções do tipo de V(t), deve ocorrer uma curiosidade natural sobre o seu gráfico. Utilizando o Geogebra, o gráfico de V(t) no intervalo de definição [0,24] se encontra a seguir.

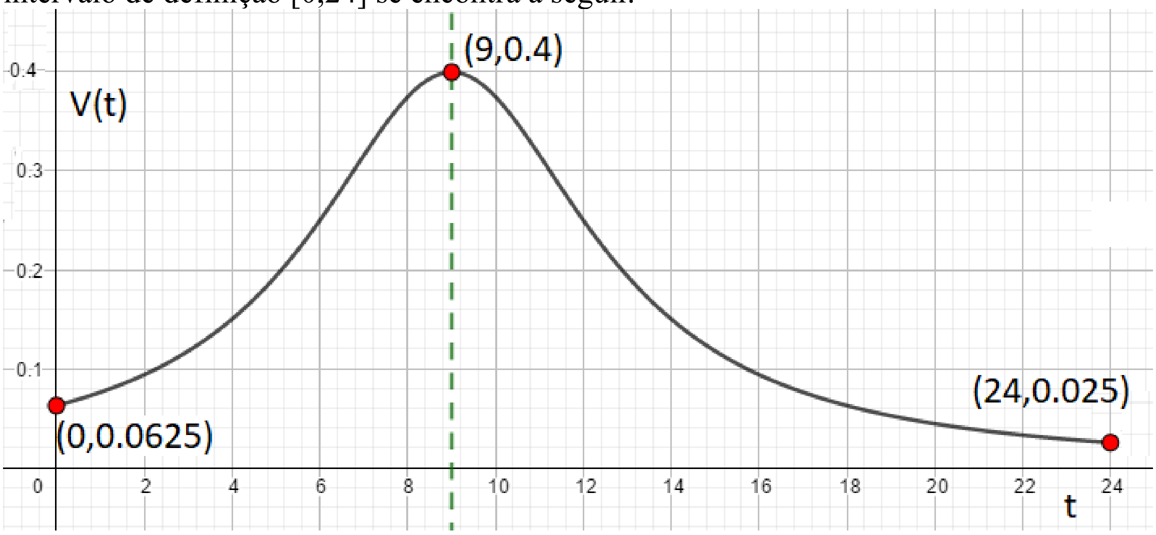


Gráfico 15: Plotagem de V(t).
Fonte: Desenvolvido pela autora no Geogebra.

No próximo capítulo, serão apresentadas atividades realizadas com Geogebra a partir de problemas dos capítulos 2 e 3, utilizando sequências didáticas. Elas foram realizadas em sala de aula, mais precisamente no Laboratório de Informática de uma Escola Básica da Rede Federal de Ensino, com alunos do nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. O capítulo 4 também inclui uma análise sobre o resultado da aplicação das atividades e o envolvimento dos alunos. Estão incluídas fotos, algumas soluções dos problemas obtidas pelos alunos e respostas deles aos questionários que responderam ao final das atividades.

CAPÍTULO 4
Atividades com alunos na Escola Básica

Destinamos este capítulo à descrição, desenvolvimento e análise de problemas trabalhados em sala de aula, mais precisamente no Laboratório de Informática de uma escola da educação básica a partir do início de novembro de 2019. Devido ao espaço físico do Laboratório, foram convidados 10 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 10 alunos do 1º ano do Ensino Médio para trabalharem questões pertinentes ao seu nível acadêmico, em dois diferentes momentos, no contraturno das aulas. Cada aluno pôde usar um computador com o software Geogebra já instalado e todos com a mesma versão do software.

Como prática dos professores de Matemática da escola, era esperado que os estudantes já conhecessem o software previamente. Isto de fato foi constatado entre os alunos do Ensino Médio, mas a maior parte dos alunos do nono ano não tinham utilizado o software antes. O grupo do nono ano fez a atividade em um dia, e o grupo do primeiro ano 3 dias depois.

Cada grupo trabalhou com duas questões. No nono ano, as questões foram sobre função afim, embora nunca tivessem estudado o assunto. No grupo do primeiro ano, uma questão era sobre função afim e a outra sobre função quadrática. A questão de função afim aplicada no Ensino Médio foi uma das escolhidas para o nono ano a fim de verificar como seria o raciocínio nos dois grupos.

Os alunos participantes foram convidados pela professora autora (professora do nono ano) e pelo professor da turma do primeiro ano. Foram convidados todos os alunos de cada turma, mas, dos que aceitaram, foram selecionados em quantidade possível para o número de computadores existente e de forma a criar um grupo heterogêneo para a aplicação. Havia alunos que gostavam de Matemática, mas havia também alunos que não gostavam muito da disciplina. As folhas da atividade eram entregues aos estudantes sempre no mesmo momento, objetivando que o grupo seguisse sempre o mesmo ritmo ao responder as questões.

Devido ao baixo comparecimento de alunos do nono ano no dia marcado e ao fato da atividade incluir muitos itens e o questionário também, o que foi cansativo para os alunos, foi decidido repetir a atividade, o que foi feito, mas com outro grupo de alunos do nono ano, já no início do ano letivo de 2020. A convite do professor da turma, a atividade foi realizada, desta vez, em uma aula normal de Matemática.

Nas seções seguintes, apresentaremos os problemas que foram trabalhados em cada atividade, analisaremos as soluções obtidas pelos alunos e as respostas deles a um questionário sobre a atividade.

4.1 Atividade realizada no 9º ano do Ensino Fundamental

Para realização da atividade, foram selecionados 5 alunos de cada uma das duas turmas do nono ano da escola, que inicialmente se mostraram agradecidos pelo convite e interessados em participar da atividade. O convite foi feito a apenas 10 alunos, pois na semana da aplicação, só havia 10 computadores funcionando no Laboratório de Informática, e, caso algum aluno mencionasse previamente sua ausência, o convite poderia ter sido repassado a outro aluno que pudesse ficar no contraturno. Porém, no dia da atividade, somente 4 alunos compareceram, um deles chegou atrasado e outro precisou sair antes do término, sem responder às cinco últimas questões da atividade.

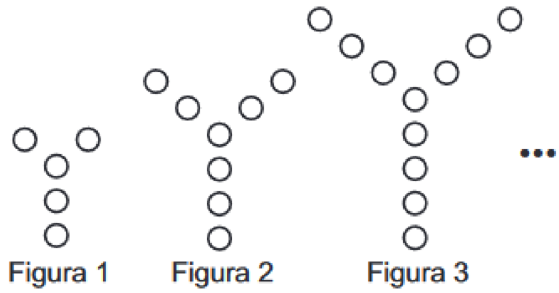
O interessante em trabalhar com este grupo de alunos foi que nenhum deles havia estudado função afim anteriormente, somente plano cartesiano no ano anterior. Dessa forma, tiveram que raciocinar bastante devido à ausência de algumas ferramentas matemáticas que poderiam auxiliá-los, mas que no momento não possuíam. A atividade foi realizada no contraturno das aulas durante dois tempos de aula de 50 minutos cada.

4.1.1 Descrição da Atividade

A atividade consistiu de dois problemas sobre função afim e foi elaborada em uma sequência didática de questões, encadeadas em ordem crescente de dificuldade e com respostas objetivas, em sua maioria. O primeiro problema escolhido foi o problema 2 do capítulo 2 (problema das bolinhas) e o segundo foi o problema 3 do mesmo capítulo (problema da formiga). A seguir, temos a sequência das questões para cada problema.

Atividade no 9º Ano do Ensino Fundamental: Problema 1

1) Na sequência de figuras abaixo, todas elas representam a letra Y. Seguindo o padrão das três primeiras figuras, quantas bolinhas serão utilizadas para compor a letra Y na figura 4?



2) Quantas bolinhas serão utilizadas para compor a letra Y na figura 5? (Faça o desenho ao lado da figura anterior)

3) Faça uma tabela relacionando o número da figura com a quantidade de bolinhas para obter a letra Y, começando da figura 1 até a figura 6.

4) Quantas bolinhas terá a figura 15?

5) Use o Geogebra para marcar os seis pares ordenados no plano cartesiano, em que a abscissa (eixo x) é o número da figura e a ordenada (eixo y) é a quantidade de bolinhas.

6) Com base na figura feita no Geogebra, informe se a quantidade de bolinhas utilizadas é ____________________ (crescente/decrescente/constante) à medida que construímos mais figuras.

7) Com base na figura feita no Geogebra, informe se a formação dos Y's tem um número mínimo de bolinhas e, em caso afirmativo, qual é.

8) Volte à tabela da questão 3. Obtenha uma expressão (responda no retângulo abaixo) que relacione o número da figura (considere x sendo o número da figura) com a quantidade de bolinhas (considere y como a quantidade de bolinhas), supondo que haja um número disponível ilimitado de bolinhas para construir Y's .

$$y = \boxed{}$$

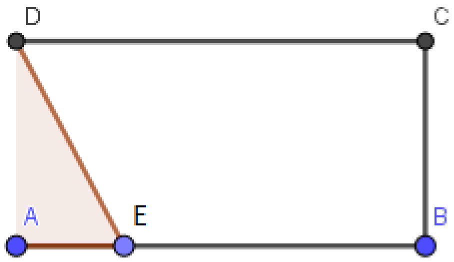
9) Supondo que a quantidade de bolinhas disponíveis para desenhar Y's seja ilimitada, haverá um valor máximo de bolinhas para formar Y's?

10) Utilize o comando "**Sequência**" do Geogebra para exibir uma sequência de pares ordenados (x, y) com x variando de 1 a 15.

11) Supondo que haja uma quantidade ilimitada de bolinhas disponíveis, diga qual o menor subconjunto numérico que engloba todas as possibilidades para os valores numéricos da abscissa e da ordenada.

Atividade no 9º Ano do Ensino Fundamental: Problema 2

1) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto E do contorno.



Determine o valor da área do triângulo ADE se a formiga andar 10 cm.

2) Caso a formiga ande 24 cm, o ponto E estará em qual segmento? Qual será o valor y da área de AED quando x = 24 cm? Faça o mesmo para o comprimento x = 30 cm.

3) Com o auxílio do Geogebra, marque os pontos A(0,0), B (20,0), C(20,10), D (0,10). Em seguida, com a ferramenta "Segmento", trace AB, BC, CD. Marque um ponto E em AB. Com o uso da ferramenta "Polígono", construa um triângulo selecionando os vértices A, E, D, A, nesta sequência. Observe o que ocorre com o valor da área que aparece na lateral esquerda, na janela de visualização. Apague o ponto E em AB e coloque-o em BC, faça novamente o polígono e analise a área, comparando com o resultado que encontrou anteriormente. Faça o mesmo para E em CD.

a) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de A para B?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

b) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de B para C?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

c) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de C para D?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

4) O valor da área do triângulo quando E está em B tendo se deslocado de A para B é o mesmo valor de área quando E está em B tendo se deslocado de C para B?

5) Determine uma expressão que relacione o comprimento x ao valor y da área do triângulo AED, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento AB

$f(x) = y_{AB} =$

6) Faça o mesmo para os segmentos BC e CD.

Cálculos:

$g(x) = y_{BC}$ =

$h(x) = y_{CD}$ =

7) Abra um novo arquivo no Geogebra e escreva as três funções encontradas nos itens 5 e 6, dando a devida atenção aos intervalos em que elas são válidas.

8) Determine uma expressão única para a área do triângulo, onde quer que esteja a formiga no trajeto ABCD.

$F(x) =$

9) O gráfico da função F(x) ficou contínuo? Isto é, se fôssemos desenhá-lo no papel, não precisaríamos "tirar o lápis da folha" (diferente do problema 1 em que, para desenhar aquele conjunto de pontos era preciso "tirar o lápis do papel" várias vezes)?

10) Qual o valor máximo da área do triângulo? E o valor mínimo?

11) Qual o conjunto de valores possíveis de x para os quais a área do triângulo é igual a 100? Estes valores podem ser irracionais? Por quê?

12) O gráfico que você obteve no Geogebra está de acordo com o que você esperava? (Ou seja, fez sentido para você?) Se não, justifique.

4.1.2 Tabela de Resultados

A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos com os 4 alunos que participaram da atividade. Em cada célula da tabela, podemos ver se determinado item respondido pelos alunos está correto (C), errado (E), parcialmente correto (PC) ou foi deixado em branco (B). A célula destacada por C* está correta, porém foi feita com a ajuda e explicação do item pelo aluno A3. As colunas da tabela designam cada um dos 4 alunos, e as linhas, cada um dos dois problemas com seu respectivo item. P1 e P2 correspondem aos problemas 1 e 2, respectivamente.

	A1	A2	A3	A4
P1 item 1	C	C	C	C
P1 item 2	C	C	C	C
P1 item 3	C	C	C	C
P1 item 4	C	E	C	PC
P1 item 5	C	C	C	C
P1 item 6	C	C	C	C
P1 item 7	C	C	C	C
P1 item 8	C*	C*	C	C*
P1 item 9	C	C	C	C
P1 item 10	C	PC	C	C
P1 item 11	C	C	C	C
P2 item 1	C	C	C	C
P2 item 2	C	PC	C	C
P2 item 3	C	C	C	C
P2 item 4	C	C	C	C
P2 item 5	C	C	PC	C
P2 item 6	PC	PC	PC	PC
P2 item 7	E	E	PC	E
P2 item 8	C	B	C	C
P2 item 9	C	B	C	C
P2 item 10	C	B	C	C
P2 item 11	E	B	E	E
P2 item 12	PC	B	PC	PC

Tabela 05: Respostas dos itens dos problemas trabalhados (9º ano).
Fonte: Desenvolvida pela autora no Excel.

Uma análise mais minuciosa mostra que a maioria dos itens foi respondida de forma correta, embora um aluno tenha deixado alguns itens em branco e a turma como um todo, tenha acertado parcialmente alguns itens também.

A seguir, podemos ver algumas imagens dos alunos no Laboratório de Informática resolvendo os problemas durante a atividade.

Figura 11: Alunos do nono ano mexendo no Geogebra.
Fonte: Foto feita pela autora.

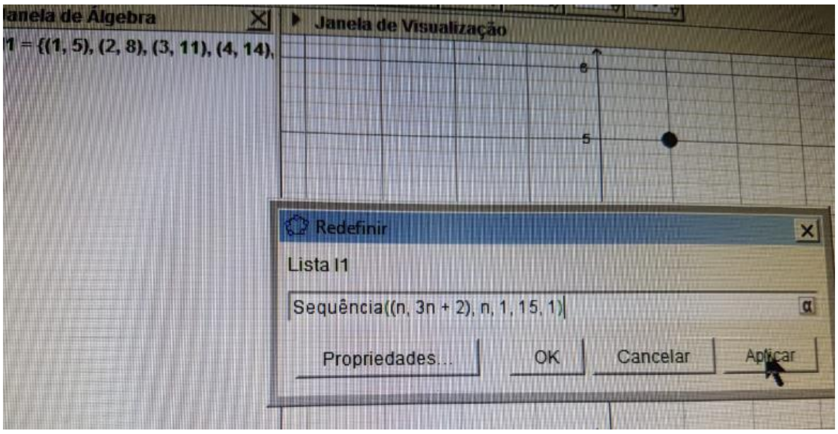


Figura 12: Sequência de pontos (P1 item 10).
Fonte: Foto feita pela autora.

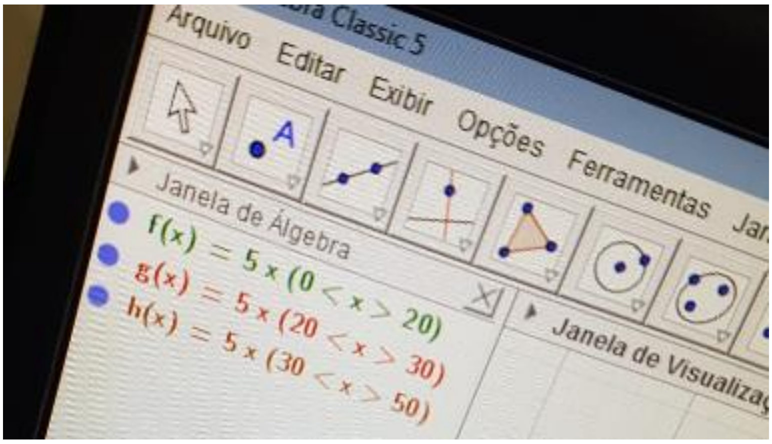


Figura 13: Dificuldade em escrever expressão e determinar intervalos de validade (P2 item 7).
Fonte: Foto feita pela autora.

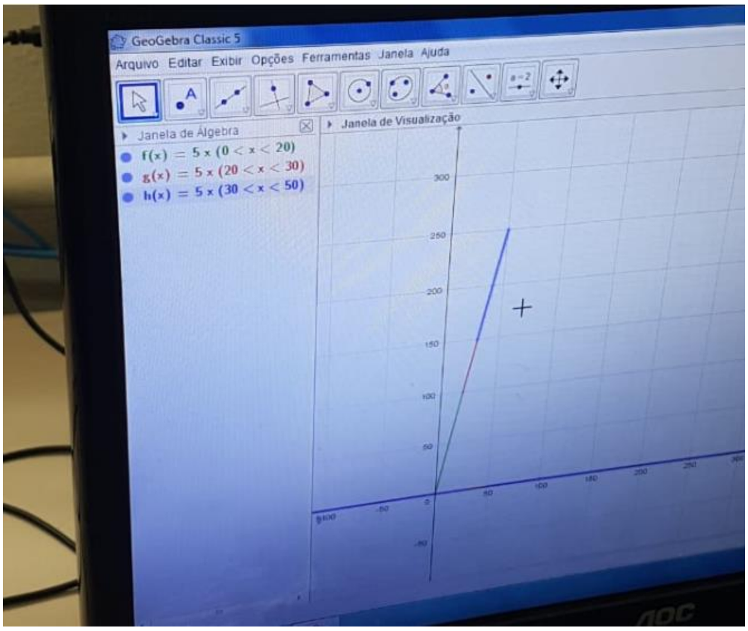


Figura 14: Aluno utilizando mesma lei de formação em três intervalos distintos.
Fonte: Foto feita pela autora.

4.1.3 Descrição e análise dos resultados

O momento em que cada estudante recebeu uma folha com as primeiras questões sobre o problema dos “Y’s” foi de grande euforia. Rapidamente, um aluno identificou que o problema havia sido aplicado anteriormente em uma prova da OBMEP e todos pareceram muito dispostos a resolver logo o que tinham em mãos. Ficaram bastante ansiosos e logo perguntaram: “Já posso começar?”. O que pareceu um impedimento para eles, inicialmente, foi o uso do Geogebra, que já tinha sido utilizado por algum professor, mas eles ainda não o tinham experimentado sozinhos. Ao começar a atividade, me questionaram se podiam discutir com os colegas sobre as questões do problema, e ao dizer-se que sim, rapidamente todos já começaram a resolver e questionar os colegas quando algo estava diferente do que haviam feito. Um dos alunos, ao responder a questão “Quantas bolinhas terá a figura 15?” consultou sua tabela para verificar a quantidade de bolinhas presentes na figura 5 (17 bolinhas), e multiplicou este resultado por 3, já que 3 x 5 é 15, encontrando assim 51 bolinhas (3 x 17).

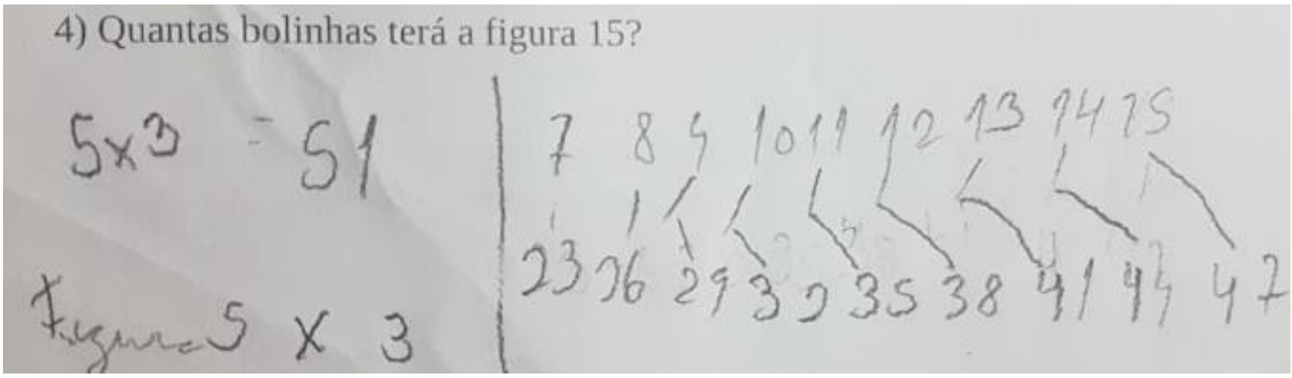


Figura 15: Resolução do P1 item 4, do aluno A2.
Fonte: Foto feita pela autora.

Na mesma hora, os colegas já o questionaram, cada um explicou como havia chegado ao seu resultado, até que todos chegassem a um resultado comum. Uma aluna identificou o padrão de bolinhas, relacionando o número da figura à quantidade de bolinhas antes mesmo de receber a folha para escrever a expressão. Quando os demais estavam na questão 4, ela já sabia responder à questão 8. Neste momento, ela causou uma agitação na sala, pois todos quiseram entender o seu raciocínio para obter a expressão (que conforme ela mesma falou, a quantidade de bolinhas era expressa pelo triplo do (número de avanços – 1) + 5.

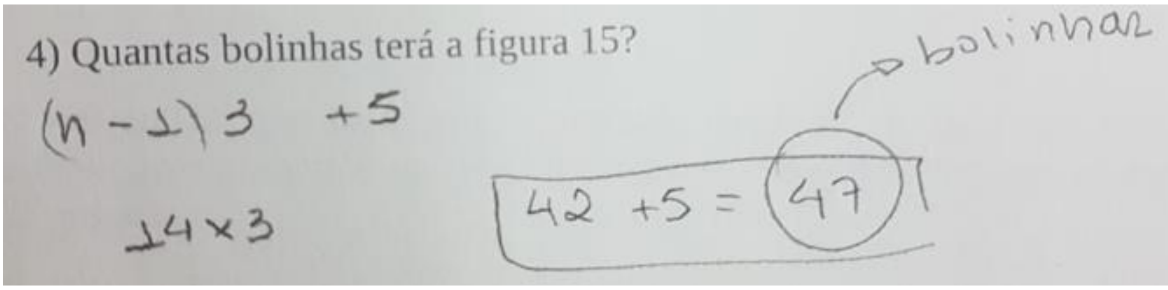


Figura 16: Resolução de P1 item 4, do aluno A3.
Fonte: Foto feita pela autora.

Também houve quem fizesse de forma mais elementar, figura a figura, como a seguir:

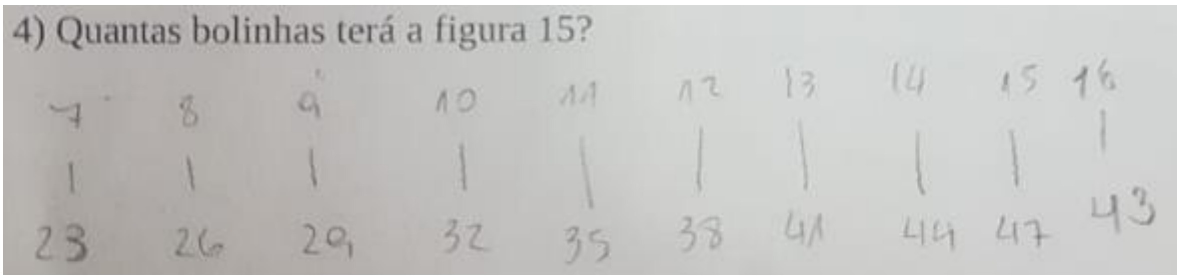


Figura 17: Resolução de P1 item 4, do aluno A1.
Fonte: Foto feita pela autora.

Em meio à conversa, o aluno que respondeu a questão da forma acima questionou a colega que encontrou a expressão dita anteriormente, dizendo: “Eu acho mais fácil fazer y+3 e não esse negócio grande”, e, neste momento, precisei falar de dependência de valores e de recursividade, que a princípio não estava previsto.

Outra solução distinta para este item foi a seguinte: apesar da escrita confusa, pode-se notar que o aluno A4 pegou a quantidade de bolinhas presentes na figura 6, que são 20, e acrescentou 9 avanços de 3 bolinhas cada, até chegar na figura 15.

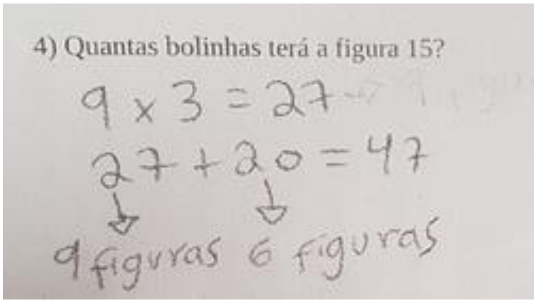


Figura 18: Resolução de P1 item 4, do aluno A4.
Fonte: Foto feita pela autora.

A aluna que identificou a questão da OBMEP (aluno A3) era bem mais rápida que os demais e, às vezes, era difícil conciliar o ritmo dela com os colegas. Durante o processo, algumas dúvidas iam surgindo, como: “O que é abscissa?”, “O que é ordenada?”, “O que significa ser constante?” etc. Com o auxílio do quadro, íamos discutindo e anotando estas informações. Nos momentos em o Geogebra foi usado para a visualização gráfica, eles tiveram certa dificuldade em se expressar, devido ao padrão que deve ser utilizado ao digitar os comandos de entrada do software, por exemplo: 1,5 para o Geogebra é um valor, e não um par ordenado, a menos que seja colocado entre parênteses. Mesmo assim, rapidamente se acostumaram a escrever os comandos. Durante a atividade, os alunos ficaram empolgados e falavam algumas frases como: “Ai que bonito! Tô entendendo!” “Tá lindo!”. Ficavam, de fato, felizes por conseguirem plotar, no plano cartesiano, as informações que iam obtendo.

A seguir, foi apresentado o problema da formiga, que necessita de cálculo de área, assunto que os alunos já haviam estudado em sala de aula. Neste problema, a dúvida inicial foi na compreensão do comprimento x, que se relacionava diretamente com a posição do ponto E em cada um dos três segmentos indicados. A segunda dificuldade foi de como expressar, usando a variável x, a área quando o ponto E estava em cada um dos três segmentos. A percepção para determinar o intervalo numérico de validade utilizando desigualdades também foi uma dúvida recorrente.

Um assunto bastante discutido em sala também foi sobre os números que pertencem a cada um dos conjuntos numéricos que eles já haviam estudado em anos anteriores (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais). Observe, abaixo, algumas respostas obtidas em um dos itens do problema 2.

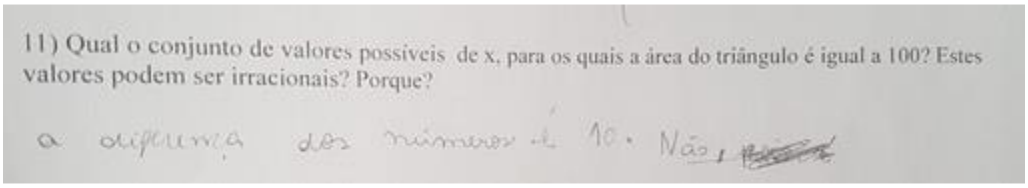


Figura 19: Resolução de P2 item 11, do aluno A1.
Fonte: Foto feita pela autora.

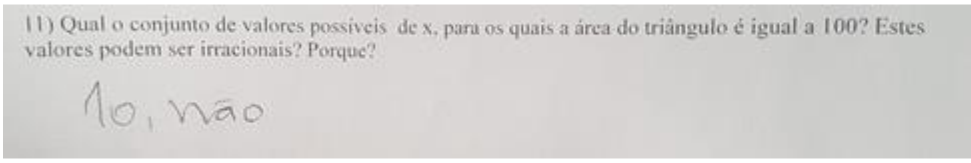


Figura 20: Resolução de P2 item 11, do aluno A4.
Fonte: Foto feita pela autora.

Embora os alunos utilizassem o Geogebra, uma dúvida recorrente foi como entender que valores irracionais também faziam parte deste intervalo. Estas foram apenas algumas respostas encontradas dos alunos na atividade, as demais respostas seguiram mais ou menos o mesmo padrão, visto que os alunos discutiam muito entre eles sobre as questões e comparavam suas respostas com as dos colegas quando algo estava diferente do que haviam pensado.

Devido à grande quantidade de perguntas para dois tempos de aula, os alunos acabaram ficando cansados, prejudicando a finalização das últimas 5 questões.

No final da atividade, houve apenas uma discussão sobre a caracterização de uma função, que é um modo bem particular de relacionar duas grandezas. Falamos sobre o comportamento de uma sequência de pontos ser crescente, decrescente ou constante (um aluno não sabia o que isso significava) e também discutiu-se o conceito de valor máximo global, valor mínimo global, e o de ausência de um ou de dois destes valores.

Os dois problemas da atividade foram bem trabalhados no Laboratório de Informática com muita cooperação e participação dos alunos, porém, devido à idade deles, tiveram um pouco de dificuldade em se concentrar e acabaram demonstrando menos foco do que o esperado. Assim, a atividade durou cerca de 30 minutos além do previsto.

Finalizados os dois problemas, cada aluno recebeu um questionário avaliativo, apresentado a seguir, mas já estavam cansados demais para responder tudo com cuidado.

4.1.4 Análise dos Questionários

Um dos objetivos do questionário foi conhecer um pouco mais sobre os alunos em termos de abrangência e profundidade de conhecimentos matemáticos prévios. O objetivo principal, contudo, foi saber o que eles acharam dos problemas, se gostaram de utilizar o Geogebra e se o software os ajudou no entendimento e resolução dos problemas. Vale ressaltar que, nesta escola, o tópico funções não faz parte do currículo do Ensino Fundamental.

Questionário Avaliativo

1) Você se considera um aluno esforçado em Matemática?
( ) Sim ( ) Não ( ) Mais ou Menos

2) Você já estudou Funções Afim na escola?
( ) Sim ( ) Não ( ) Mais ou Menos

3) Você considera que as questões desenvolvidas hoje fogem do padrão comum da sala de aula?
( ) Sim ( ) Não ( ) Mais ou Menos

4) Você acha que o Geogebra facilitou o entendimento dos problemas?
( ) Sim ( ) Não ( ) Mais ou Menos

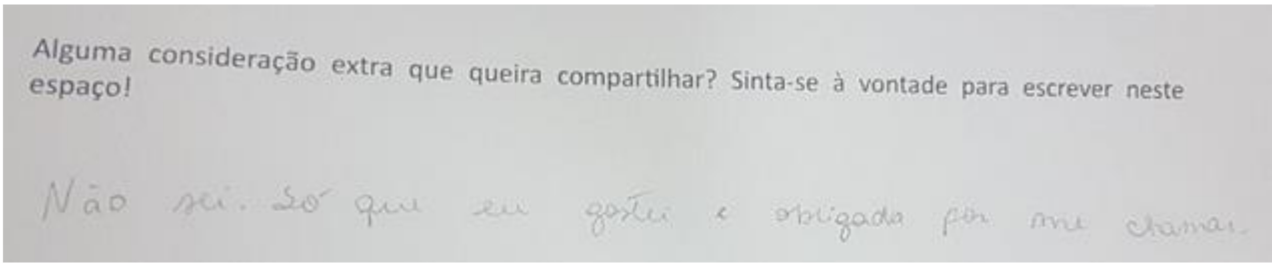
5) O que você achou sobre o gráfico do problema 1 ser uma sequência de pontos espaçada?
( ) Natural ( ) Esperava que fosse contínuo ( ) Não sabia o que esperar

6) Você esperava que o problema 2, da formiga, tivesse uma parte do gráfico constante?
( ) De acordo com meus cálculos sim ( ) Não ( ) Outro: ___________________________

7) Alguma consideração extra que queira compartilhar? Sinta-se à vontade para escrever neste espaço!

Respostas dos Questionários

Todos os quatro alunos se consideravam esforçados em Matemática e nenhum havia estudado Funções Afim como, já dito. Somente um aluno escreveu uma consideração sobre a atividade. Vejamos a seguir:

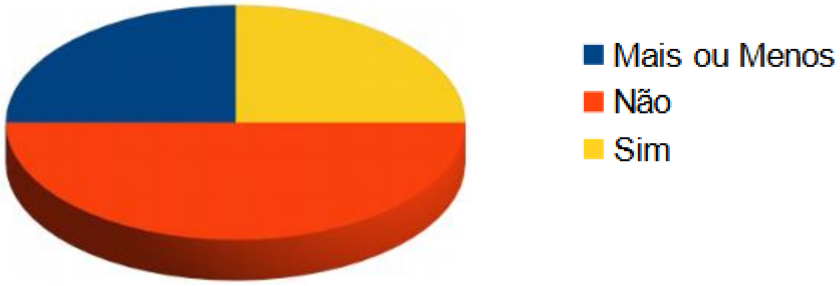

Alguma consideração extra que queira compartilhar? Sinta-se à vontade para escrever neste espaço!

Não sei. Só que eu gostei e obrigada por me chamar.

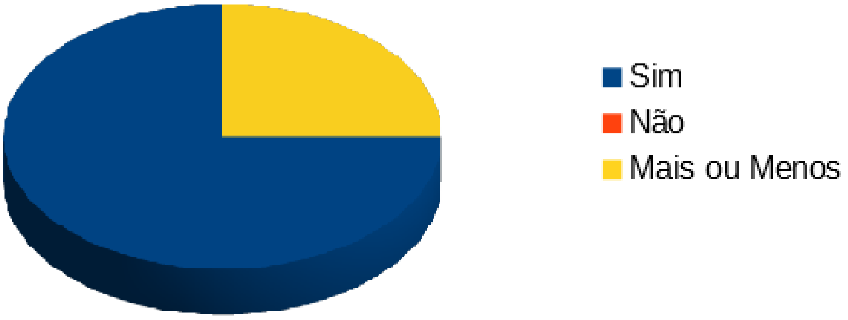
Figura 21: Consideração sobre a atividade do aluno A1.
Fonte: Foto feita pela autora.

A seguir, veremos alguns gráficos mostrando o posicionamento dos alunos sobre as demais perguntas feitas no questionário.

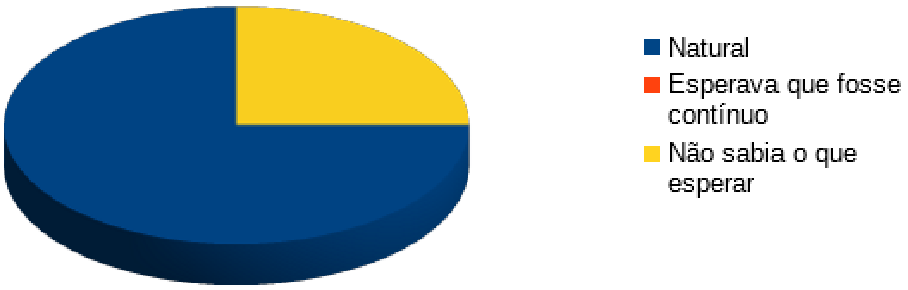
Você considera que as questões desenvolvidas hoje fogem do padrão comum da sala de aula? 50% dos alunos responderam que as questões não fugiram do padrão comum, o que pode ser devido ao padrão de exigência da escola.



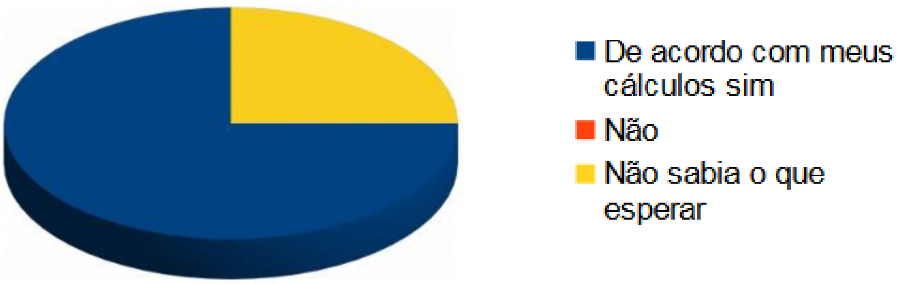
Você acha que o Geogebra facilitou o entendimento dos problemas? 75% responderam sim a esta pergunta.



O que você achou sobre o gráfico do problema 1 ser uma sequência de pontos espaçada? 100% dos alunos já esperavam que esta sequência fizesse parte de uma reta.



Você esperava que o problema 2, da formiga, tivesse uma parte do gráfico constante? 75% dos alunos acharam que sim.



4.2 Atividade realizada no 1º ano do Ensino Médio

Foi feito um convite, nas salas de aula do primeiro ano, para participar, de forma voluntária, de uma atividade no Laboratório de Informática no contraturno das aulas. Cerca de três a quatro alunos de cada turma, num total de dez alunos, aceitaram participar. Era esperada uma participação menos assídua que a dos alunos do nono ano, já que não conheciam a professora, porém o comparecimento foi maior do que no caso do 9º ano. No dia da atividade, seis dos dez alunos compareceram. Chegaram cerca de dez minutos antes do horário e ficaram até o término da atividade. Todos estes alunos já haviam estudado funções afim e quadrática na sala de aula durante o ano em que foi realizada a atividade, e dispunham de mais ferramentas matemáticas para a resolução dos problemas propostos do que o grupo do nono ano do Ensino Fundamental. A atividade foi realizada durante dois tempos de aula de 50 minutos cada.

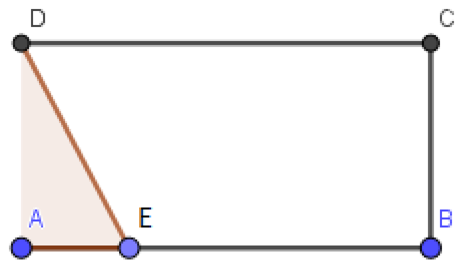
4.2.1 Descrição da Atividade

Assim como no nono ano, foi utilizada uma sequência didática bem encadeada de perguntas para cada um dos dois problemas que foram explorados na atividade. O primeiro problema (problema da formiga) foi o mesmo problema 2, proposto na atividade para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que consta do capítulo 2 deste trabalho. O segundo problema escolhido foi o problema 1 do capítulo 3 (lugares vagos no avião). Ou seja, foram selecionados para a atividade um problema envolvendo função “afim por partes” e um outro envolvendo função quadrática.

Vale observar que o problema da formiga foi incluído nas atividades para alunos do Ensino Fundamental e para alunos do Ensino Médio para que fosse possível comparar os resultados entre os dois grupos de alunos, principalmente no que concerne à utilização do Geogebra. Entretanto o número de questões sobre este problema foi reduzido das 12 iniciais para 10 questões. Isto foi feito porque foi observado que a atividade (no Ensino Fundamental) tinha ficado cansativa devido ao grande número de questões sobre os problemas.

Atividade no 1º Ano do Ensino Médio: Problema 1

1) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto E do contorno.



Determine o valor da área do triângulo ADE se a formiga andar 10 cm.

2) Determine o valor da área quando o ponto E situa-se em BC.

3) Com o auxílio do Geogebra marque os pontos A(0,0), B (20,0), C(20,10), D (0,10). Em seguida, com a ferramenta “Segmento” trace AB, BC, CD. Marque um ponto E em AB. Com o uso da ferramenta “Polígono”, construa um triângulo selecionando os vértices A, E, D, A, nesta sequência. Observe o que ocorre com o valor da área que aparece na lateral esquerda, na janela de visualização.

Apague o ponto E em AB e coloque-o em BC, faça novamente o polígono e analise a área comparando com o resultado que encontrou anteriormente. Faça o mesmo para E sobre CD.

a) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de A para B?

( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

b) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de B para C?

( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

c) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de C para D?

( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

4) Determine uma expressão que relacione o comprimento x ao valor y da área do triângulo AED, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento AB.

$f(x) = y_{AB} =$

5) Faça o mesmo para os segmentos BC e CD.

Cálculos:

$g(x) = y_{BC} =$

$h(x) = y_{CD} =$

6) Abra um novo arquivo no Geogebra e escreva as três funções encontradas nos itens 5 e 6, dando a devida **atenção aos intervalos** em que elas são válidas.

7) Determine uma expressão única para a área do triângulo, onde quer que esteja a formiga no trajeto ABCD.

$F(x) =$

8) O gráfico da função F(x) ficou contínuo? Isto é, se fôssemos desenhá-lo no papel, não precisaríamos "tirar o lápis da folha"?

9) Qual o valor máximo da área do triângulo? E o valor mínimo?

10) Qual o conjunto de valores possíveis de x para os quais a área do triângulo é igual a 100? Estes valores podem ser irracionais? Por quê?

Atividade no 1º Ano do Ensino Médio: Problema 2

1) Joana visitará seus pais durante o Natal e, para isto, comprou uma passagem do Rio de Janeiro para São Paulo. O avião em que Joana viajará possui 200 lugares e cobra 400 reais por passagem, além de um adicional de 16 reais por lugar vago. Considerando x como a quantidade de lugares vagos no avião, encontre uma expressão que caracterize a receita R(x) obtida pela empresa aérea.

2) Encontre a(as) interseção(interseções) do gráfico de R(x) com o eixo x.

3) Com o auxílio do comando "Sequência" no Geogebra, encontre uma lista de pares ordenados que expresse todas as possibilidades para (x, R(x)).

4) A função R(x) é contínua? Por quê?

5) Qual é o valor x de lugares vagos que retorna R(x) máximo?

6) Qual é o valor x de lugares vagos que retorna R(x) mínimo?

7) Qual é o menor subconjunto numérico que engloba todas as possibilidades para os valores numéricos da abscissa e da ordenada para este problema?

4.2.2 Tabela de Resultados

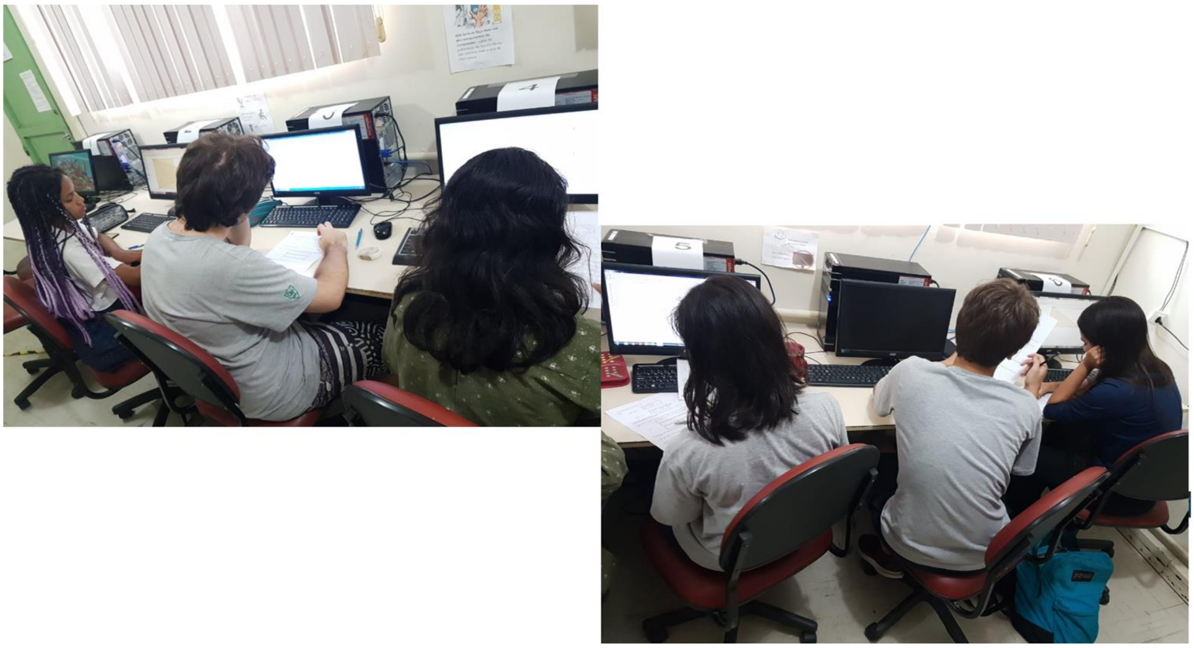
A seguir, podemos conferir os resultados que cada um dos seis alunos obteve ao resolver os problemas. A tabela foi construída seguindo o mesmo padrão da tabela para os alunos do nono ano. A maioria das questões dos problemas foi respondida sem ajuda da professora, mas, na tabela abaixo, as células indicadas por C** e PC** indicam que houve necessidade de mediação da professora, tirando dúvidas e questionando algumas escolhas de respostas.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
P1 item 1	C	C	C	C	C	C
P1 item 2	C	C	C	C	C	C
P1 item 3	C	C	C	C	C	C
P1 item 4	C	C	C	C	C	PC
P1 item 5	C**	C**	C**	C**	C**	E
P1 item 6	C	C	C	C	C	E
P1 item 7	C	C	C	C	C	E
P1 item 8	C	C	C	C	C	C
P1 item 9	C	C	C	C	C	C
P1 item 10	C	C	C	PC	C	C
P2 item 1	C**	C**	PC**	PC**	C**	C**
P2 item 2	C	C	C	C	C	PC
P2 item 3	C	C	PC	PC	C	C
P2 item 4	PC	C	C	E	C	C
P2 item 5	E	E	C	E	E	PC
P2 item 6	E	E	C	E	E	C
P2 item 7	PC	PC	PC	C	PC	PC

Tabela 06: Respostas dos itens dos problemas trabalhados (1º ano).
Fonte: Desenvolvida pela autora no Excel.

Ao analisarmos a tabela, verificamos que, embora muitos itens tenham apresentado uma resolução correta, dois itens necessitaram de maior intervenção da professora mediadora. Além disso, apesar de algumas discussões terem sido realizadas de forma mais individualizada (comparada ao nono ano), alguns alunos tiveram bastante dificuldade, exibindo respostas parcialmente corretas e também incorretas. Vale ressaltar, que nesta aplicação, nenhum dos alunos deixou algum item em branco.

A seguir, veremos fotos dos alunos utilizando o software Geogebra e algumas fotos do que eles plotaram ao longo da realização da atividade.



Figuras 22 e 23: Alunos do primeiro ano utilizando o Geogebra.
Fonte: Foto feita pela autora.

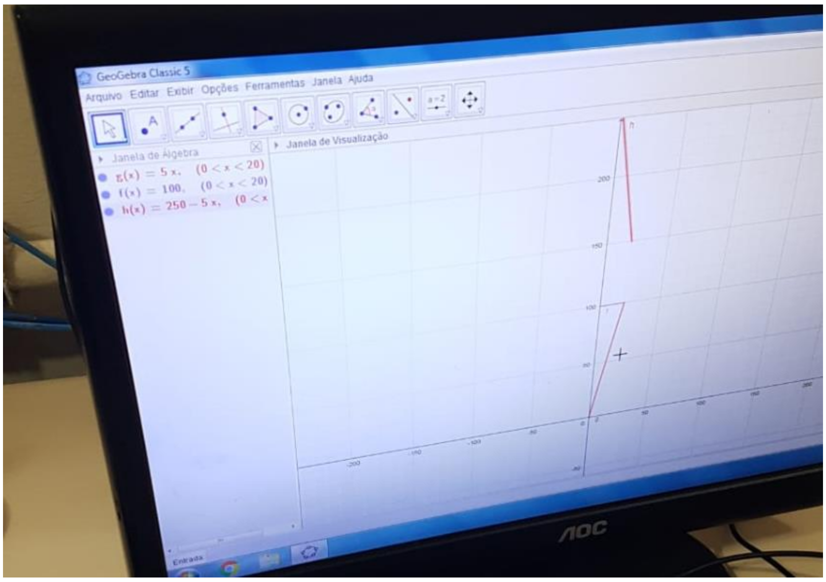
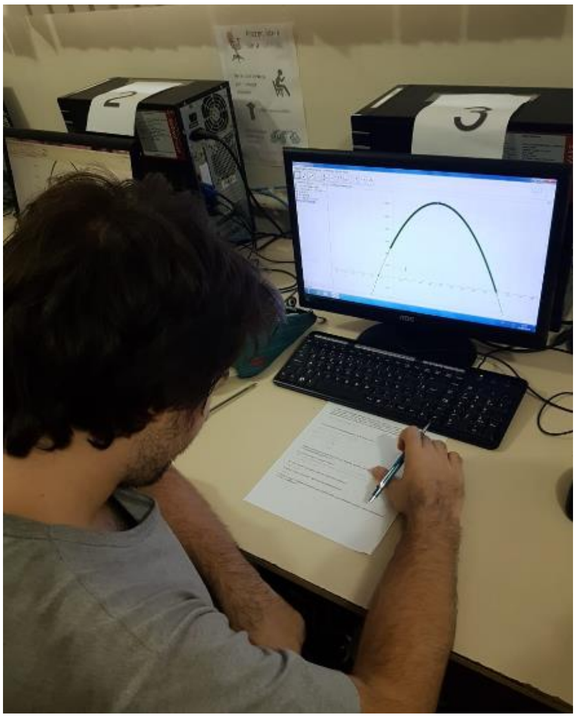
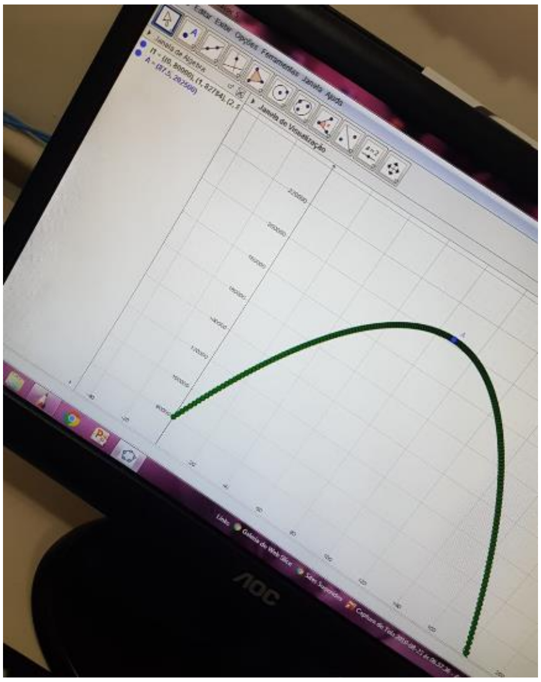


Figura 24: Gráfico incorreto com as funções bem definidas, porém, com intervalos incoerentes.
Fonte: Foto feita pela autora.





Figuras 25 e 26: Aluno analisando sequência de pontos com função contínua auxiliar.
Fonte: Foto feita pela autora.

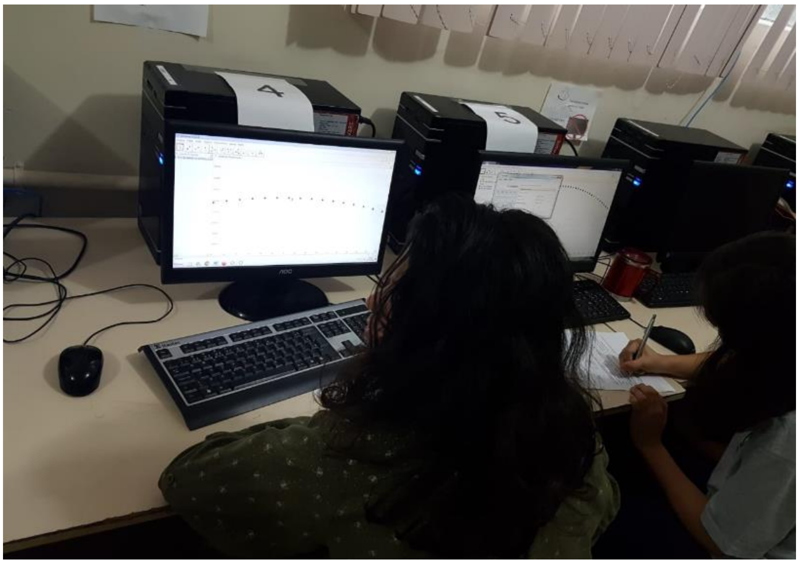


Figura 27: Alunos analisando diferentes alterações nos eixos.
Fonte: Foto feita pela autora.

4.2.3 Descrição e análise dos resultados

A atividade com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio ocorreu de forma bem mais harmônica como um todo. Começou pontualmente e com todos em sala no horário previsto.

Apesar de serem seis alunos, ao invés de quatro como na atividade para o nono ano do Ensino Fundamental, eles se mostraram muito mais comprometidos e trabalharam de forma muito mais concentrada que os alunos do nono ano. Eles também interagiram com os colegas, porém muito menos, e metade da turma era mais introspectiva, o que tornou necessário verificar mais de perto o que cada um fazia.

Nesta turma, três alunos também possuíam a experiência de ter manipulado o software Geogebra antes, logo já estavam mais seguros quanto aos recursos disponíveis e como utilizá-los. Quando um aluno tinha dúvida sobre o uso do Geogebra, rapidamente um colega ao lado já tentava ajudá-lo.

No primeiro problema (problema da formiga), a dúvida inicial foi saber em que ponto de BC estaria o ponto E, pois, a princípio, eles precisavam fixar este ponto para calcular o valor da área do triângulo ADE. Após fixá-lo em diferentes pontos de BC, eles mesmos observaram que o valor da área do triângulo não mudava e que era possível encontrar triângulos retângulos, isósceles e escalenos dependendo de onde o ponto E se situava.

Uma discussão interessante no cálculo da área dos triângulos ocorreu quando um aluno disse: “Quando temos um triângulo retângulo, um cateto é base e o outro é altura!”, e a professora autora, em seguida, o questionou perguntando o porquê da hipotenusa não ser uma possibilidade para base ou altura também. Ele respondeu “Bem, eu sempre faço isso e dá certo”. Nesse momento, foi discutido com os alunos que a escolha da base é opcional e que qualquer lado do triângulo pode ser visto como base, basta que a altura seja um segmento perpendicular a ele ou ao prolongamento dele e encontre o vértice oposto à base.

Ainda neste mesmo problema, a professora autora precisou intervir na hora dos alunos montarem a expressão que caracterizava a área quando E estava em CD. Embora eles já tivessem observado a variação do valor da área quando mexiam no ponto E no Geogebra, expressar isso algebricamente ainda era uma dificuldade. Todos acertaram esta questão, inclusive ao escrever a desigualdade, após breve discussão sobre como utilizar os sinais > e <. Abaixo, temos uma resposta que, apesar de correta, teve uma indicação ao lado direito um pouco incoerente.

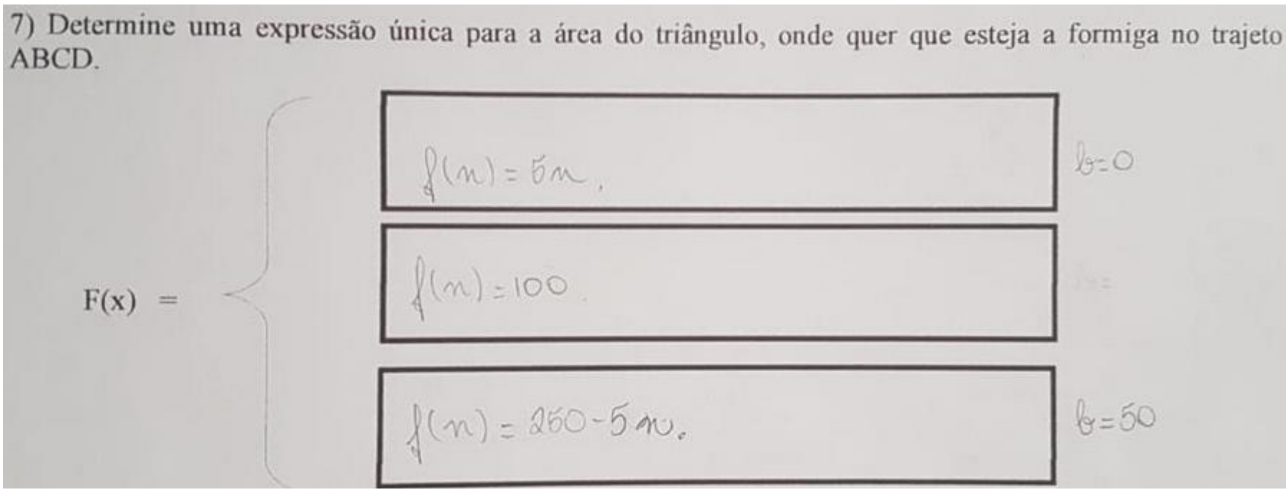
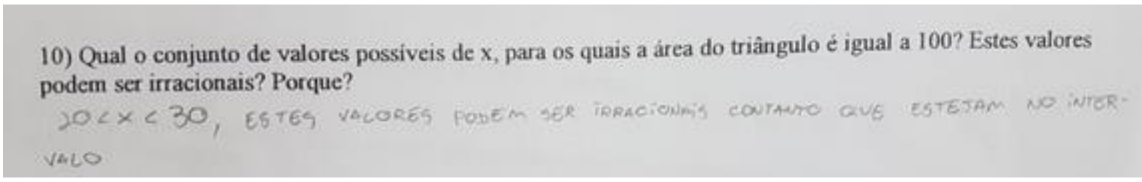


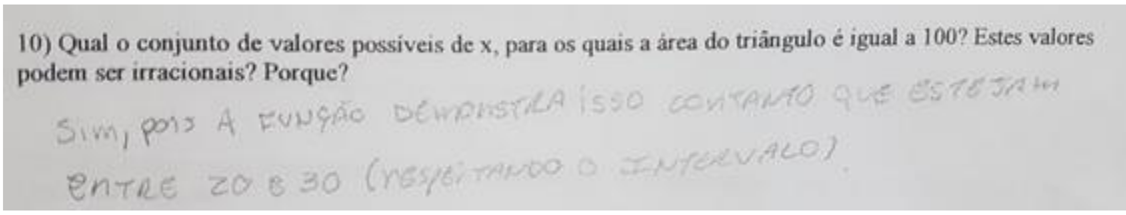
Figura 28: Resolução de P1 item 7, do aluno A2.
Fonte: Foto feita pela autora.

Quanto à questão que pedia o conjunto de valores possíveis de x para os quais a área do triângulo era 100, diferente dos alunos do nono ano, quando os alunos foram questionados perguntando se $20 + \pi$ era uma possibilidade de valor para x, todos afirmaram em coro que sim, podia! Vejamos algumas respostas:


10) Qual o conjunto de valores possíveis de x, para os quais a área do triângulo é igual a 100? Estes valores podem ser irracionais? Porque?

20 < x < 30, ESTES VALORES PODEM SER IRRACIONAIS CONTANTO QUE ESTEJAM NO INTERVALO

Figura 29: Resolução de P1 item 10, do aluno A3.
Fonte: Foto feita pela autora.


10) Qual o conjunto de valores possíveis de x, para os quais a área do triângulo é igual a 100? Estes valores podem ser irracionais? Porque?

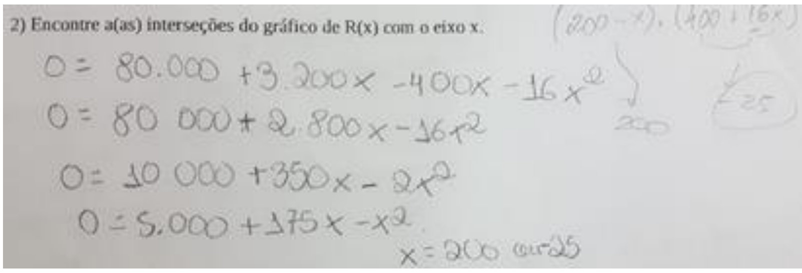
Sim, pois A FUNÇÃO DEMONSTRA ISSO CONTANTO QUE ESTEJAM ENTRE 20 E 30 (RESPEITANDO O INTERVALO)

Figura 30: Resolução de P1 item 10, do aluno A6.
Fonte: Foto feita pela autora.

Com o auxílio do Geogebra, também foi fácil para os alunos verificarem os valores de área máxima e mínima e não tiveram dúvida sobre qual valor seria para cada caso. Também perceberam, rapidamente, a parte do gráfico constante representada pelo segmento de reta paralela ao eixo x no intervalo [20,30]. Em suma, foi um problema em que os alunos tiveram dúvidas bem pontuais, resolvidas em conversas em conjunto.

Para o segundo problema, que abordava uma função quadrática, também foi necessário fazer uma modelagem, criando uma expressão que caracterizasse a situação do enunciado, e este foi o primeiro empecilho. Algumas das respostas iniciais para R(x) foram: R(x) = 400 + 16x, R(x) = (400+16x)200 e R(x) = (400 + 16x)200x. À primeira vista, eles estavam muito ansiosos querendo acertar a expressão, porém sem êxito na resposta. A professora autora questionou os alunos sobre qual o valor da receita quando tivesse um assento vago, dois assentos vagos…. e 200 assentos vagos. Após alguns cálculos básicos, eles já montaram a expressão correta e, além disso, já verificaram que a expressão para R seria do segundo grau e já calcularam as raízes. Um aluno disse que, quanto mais passageiros viajassem, mais lucro a empresa aérea teria, o que foi constatado brevemente que não seria verdadeiro.

Após encontrar R(x) = (200-x)(400+16x), alguns alunos pensaram instantaneamente em utilizar a propriedade distributiva para obter a forma padrão da função e calcular as raízes em seguida, encontrando o discriminante e utilizando a fórmula para resolução da equação do segundo grau. Após iniciarem este procedimento, acabaram desistindo pelo excesso de cálculo. Todos finalmente igualaram a zero cada parcela dentro dos parênteses, encontrando as raízes. Vejamos abaixo, algumas respostas.


2) Encontre a(as) interseções do gráfico de R(x) com o eixo x.

(200 - x) . (400 + 16x)

$0 = 80.000 + 3.200x - 400x - 16x^2$

$0 = 80\,000 + 2.800x - 16x^2$

$0 = 10\,000 + 350x - 2x^2$

$0 = 5.000 + 175x - x^2$

x = 200 ou -25

Figura 31: Resolução de P2 item 2, do aluno A2.
Fonte: Foto feita pela autora.

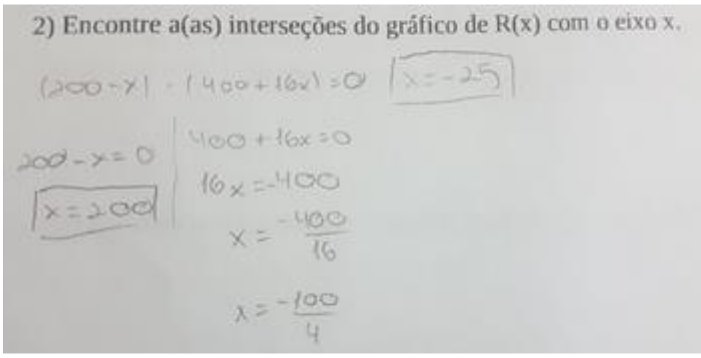


Figura 32: Resolução de P2 item 2, do aluno A3.
Fonte: Foto feita pela autora.

Este mesmo aluno que apresentou a resposta acima, aluno A3, utilizou a propriedade distributiva na primeira questão para apresentar a expressão na forma $ax^2 + bx + c$ e dividiu seus coeficientes por 16. Na hora de plotar o gráfico ele teve um problema que os demais não tiveram, pois o gráfico da função dele ficou deformado por ter dividido por 16. Após encontrar um valor diferente para o máximo desta função, ele questionou sobre a possibilidade de multiplicar seu resultado por 16 e encontrar o valor real da solução. Com base nesse questionamento, e com auxílio do quadro da sala de aula, chegou-se à conclusão que a diferença entre os gráficos ocorreu devido à alteração dos coeficientes da expressão. Dessa forma, as raízes ficariam mantidas e o eixo de simetria permaneceria o mesmo, acarretando Xv idêntico em ambos os casos. Para Yv (máximo da função), ocorreria variação, e através de alguns cálculos e observação gráfica no Geogebra, verificou-se a possibilidade da multiplicação do valor encontrado por 16, para encontrar o valor real da solução do problema.

Nenhum dos alunos mostrou dificuldades relevantes para expressar a sequência de pontos na tela e entender que a função seria descontínua. Alguns questionaram o Yv não pertencer ao gráfico, mas rapidamente viram que não seria possível ter uma quantidade de lugares sendo 87,5. Algumas respostas ainda incoerentes, foram observadas como abaixo:

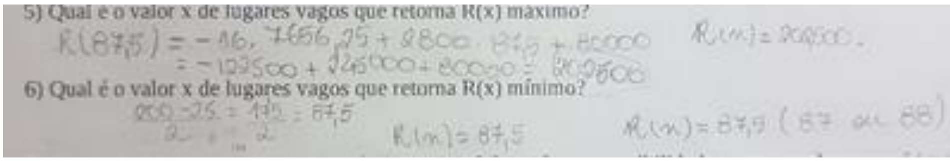


Figura 33: Resolução de P2 itens 5 e 6, do aluno A4.
Fonte: Foto feita pela autora

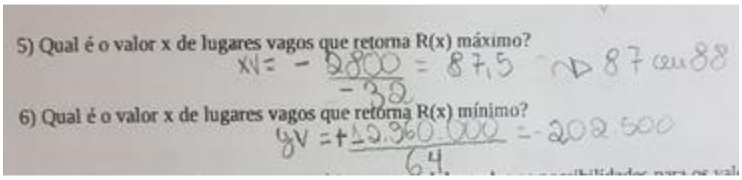


Figura 34: Resolução de P2 itens 5 e 6, do aluno A2.
Fonte: Foto feita pela autora

Outras dúvidas também apareceram, tais como: “A quantidade de lugares vagos mínima é 200?”, “Esta função é de natural para natural?”, “Ou de natural para racional?”. Nesse momento, discutiu-se sobre a impossibilidade de um lugar e meio e sobre a possibilidade da receita não ser expressa com centavos.

No momento do cálculo do valor de x que retornaria R(x) máximo, o aluno A3 teve a ideia de traçar uma mediatriz entre as raízes e ficou alguns segundos sem entender o porquê dela não interceptar os pontos da sequência de pontos traçados. A dúvida aqui foi: confiar no gráfico ou no cálculo para Xv? Nessa etapa foi necessário observar o domínio do problema, que não era real, mas sim discreto. Inicialmente, os alunos tenderam a confiar no cálculo, porém, após discussão sobre a possibilidade de 87,5 lugares vagos e sobre o gráfico não se tratar de uma função contínua, eles mudaram sua opinião.

4.2.4 Análise dos Questionários

Similarmente aos alunos do nono ano, os alunos do primeiro ano do ensino médio também responderam um questionário avaliativo ao término da resolução dos dois problemas trabalhados. A seguir, temos o modelo do questionário entregue aos alunos:

Questionário Avaliativo

1) Você se considera um aluno esforçado em Matemática?
(   ) Sim   (   ) Não   (   ) Mais ou Menos

2) Você já estudou Funções Afim na escola?
(   ) Sim   (   ) Não   (   ) Mais ou Menos

3) Você já estudou Funções Quadráticas na escola?
(   ) Sim   (   ) Não   (   ) Mais ou Menos

4) Você considera que as questões desenvolvidas hoje fogem do padrão comum da sala de aula?
(   ) Sim   (   ) Não   (   ) Mais ou Menos

5) Você acha que o Geogebra facilitou o entendimento dos problemas?
(   ) Sim   (   ) Não   (   ) Mais ou Menos

6) O que você achou sobre o gráfico do problema 1 ter uma infinidade de valores que retornam área 100?
(   ) Natural   (   ) Achei que fosse enumerável   (   ) Não sabia o que esperar

7) Você esperava que o problema 2, do avião, tivesse o valor máximo de R(x) em um ponto que não era o vértice da parábola?
(   ) De acordo com meus cálculos sim   (   ) Não   (   ) Outro: ___________________________

Alguma consideração extra que queira compartilhar? Sinta-se à vontade para escrever neste espaço!

Respostas dos questionários

De acordo com as respostas obtidas, cinco dos seis alunos se consideravam esforçados em Matemática e somente um, não. Estranhamente, três responderam que não haviam estudado função quadrática e três responderam que sim. Quanto às considerações finais, 5 dos 6 alunos escreveram sua opinião sobre a atividade, um aluno disse que achou legal e os demais escreveram o que podemos conferir a seguir:

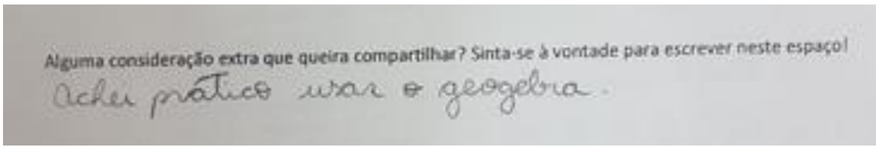


Figura 35: Consideração sobre a atividade do aluno A1.
Fonte: Foto feita pela autora.

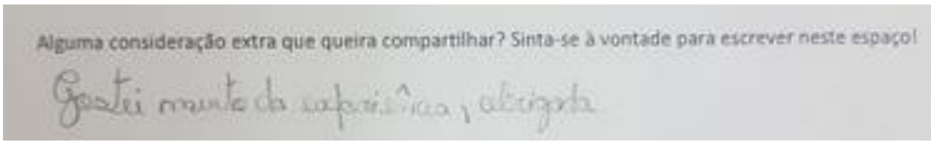


Figura 36: Consideração sobre a atividade do aluno A2.
Fonte: Foto feita pela autora.

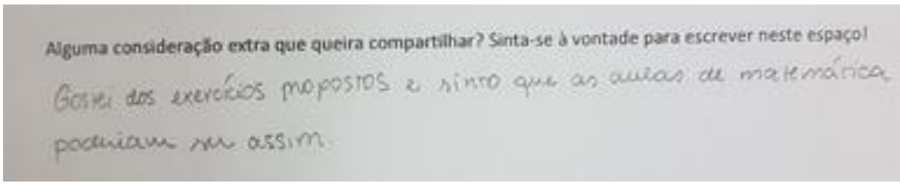


Figura 37: Consideração sobre a atividade do aluno A5.
Fonte: Foto feita pela autora.

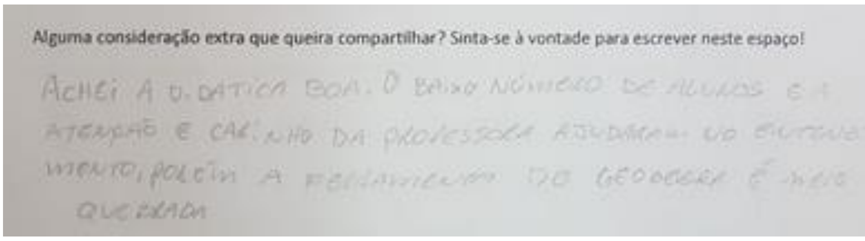
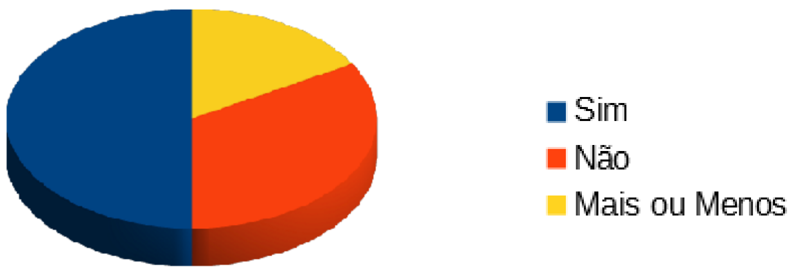


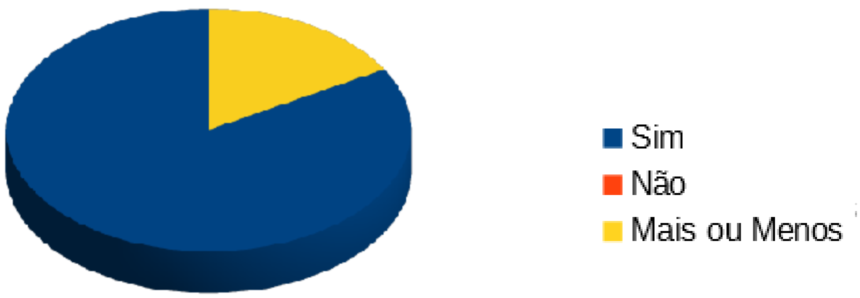
Figura 38: Consideração sobre a atividade do aluno A6.
Fonte: Foto feita pela autora.

A seguir, são apresentados gráficos indicando as respostas dos alunos às outras questões.

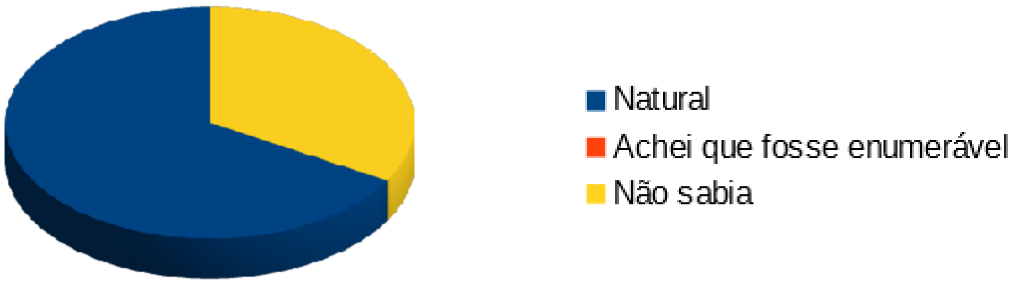
Você considera que as questões desenvolvidas hoje fogem do padrão comum da sala de aula? 50% dos alunos responderam afirmativamente.



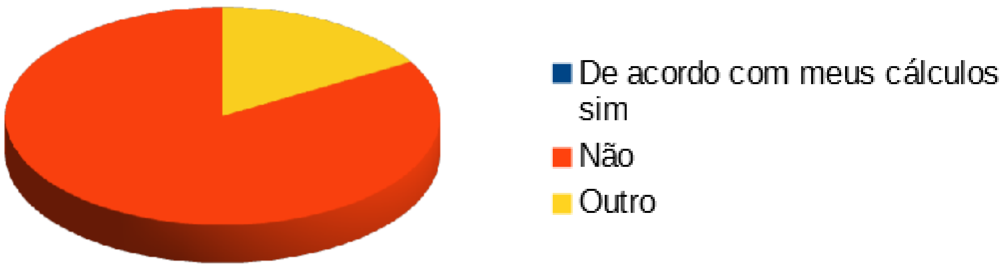
Você acha que o Geogebra facilitou o entendimento dos problemas? 83% responderam afirmativamente a esta pergunta.



O que você achou sobre o gráfico no problema 1 ter uma infinidade de valores que retornam área 100? 75% acharam natural.



Você esperava que o problema 2, do avião, tivesse o valor máximo de R(x) em um ponto que não era o vértice da parábola? 83% dos alunos não esperava.



Significado de “Outro”: a resposta escolhida foi “Imaginei de acordo com o problema”.

4.3 Reaplicação da atividade no 9º ano do Ensino Fundamental

Visando a realização mais satisfatória da atividade no Laboratório de Informática com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, houve uma readequação da quantidade de perguntas nas sequências didáticas dos problemas escolhidos anteriormente. Salientemos que o grupo de alunos que participaram desta nova atividade foi diferente do anterior, pois estes eram alunos do primeiro bimestre do nono ano do Ensino Fundamental, no ano letivo de 2020, enquanto que os da primeira aplicação da atividade eram alunos do último bimestre do nono ano, durante o ano letivo de 2019.

Diferente das atividades realizadas anteriormente, esta não pode ser realizada no contraturno e o professor de Matemática da turma aconselhou dividi-la em dois grupos de 15 alunos, com ele e a professora autora responsável por cada um dos grupos. O professor da turma ficou com 15 alunos em sala de aula e a professora autora, no Laboratório de Informática, com o restante da turma. Os alunos foram selecionados segundo o mesmo critério das outras atividades aplicadas. Foi criado um grupo heterogêneo, composto por alunos que gostavam e que não gostavam da disciplina, incluindo alunos com bastante e pouca dificuldade. A ideia inicial era que a atividade fosse também realizada de forma individual porém, ao verificar o Laboratório previamente, somente 7 dos 15 computadores apresentavam bom funcionamento. Desta forma, a atividade não foi realizada de forma individual, e os alunos tiveram a liberdade de escolher sua dupla ou trio caso fosse necessário. Dos 15 alunos que participariam da atividade, somente 13 foram à escola, havendo, assim, 5 duplas e 1 trio trabalhando no Laboratório.

4.3.1 Descrição da Atividade e Questionário Avaliativo

Assim como foi feito para as outras duas aplicações, esta atividade foi desenvolvida em dois tempos de 50 minutos de aula. Os problemas trabalhados foram os mesmos que os da primeira aplicação, porém com algumas alterações nas perguntas, visando melhor aproveitamento do tempo para permitir uma discussão sobre o que é uma função e como ela pode apresentar diferentes representações gráficas. Abaixo, seguem os problemas trabalhados com este novo grupo de alunos e o questionário avaliativo reduzido a apenas duas perguntas sobre a utilização do software Geogebra.

Atividade no 9º Ano do Ensino Fundamental: Problema 1

1) Na sequência de figuras abaixo, todas elas representam a letra Y. Seguindo o padrão das três primeiras figuras, quantas bolinhas serão utilizadas para compor a letra Y na figura 4?

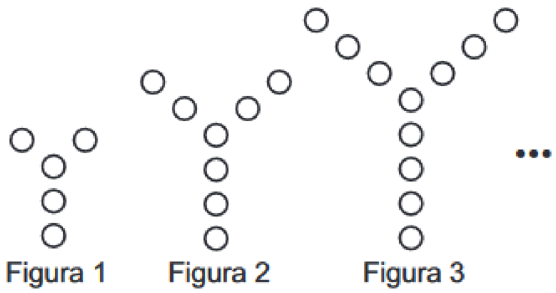


Figura	Bolinhas

2) Faça uma tabela relacionando o número da figura com a quantidade de bolinhas para obter a letra Y começando da figura 1 até a figura 6.

3) Quantas bolinhas terá a figura 15?
4) À medida que desenhamos mais figuras em formato de Y's, a quantidade de bolinhas:
( ) cresce ( ) diminui ( ) permanece igual

5) Volte à tabela da questão 2. Obtenha uma expressão que relacione o número da figura com a quantidade de bolinhas (considere y a quantidade de bolinhas), supondo que haja um número disponível ilimitado de bolinhas para construir Y's. (Considere x sendo o número da figura)

$$y = \boxed{\qquad\qquad}$$

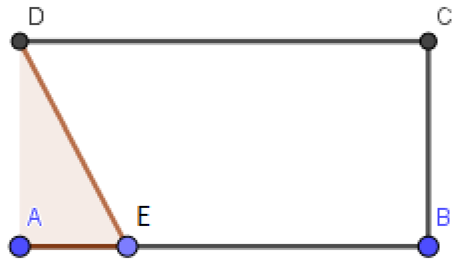
6) Utilize o comando "**Sequência"** do Geogebra para exibir uma sequência de pares ordenados (x, y) com x variando de 1 a 15.

7) Com base na figura feita no Geogebra, informe se a formação dos Y's tem um número mínimo de bolinhas e, em caso afirmativo, qual é.

8) Se dispusermos de uma quantidade de bolinhas ilimitadas, haverá um valor máximo de bolinhas para formar Y's?

Atividade no 9º Ano do Ensino Fundamental: Problema 2

1) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto E do contorno.



Determine o valor da área do triângulo ADE se a formiga andar 10 cm.

2) Qual será o valor y da área de AED quando x = 24 cm?

3) Com o auxílio do Geogebra marque os pontos A(0,0), B (20,0), C(20,10), D (0,10). Em seguida, com a ferramenta "Segmento", trace AB, BC, CD. Marque um ponto E em AB. Com o uso da ferramenta "Polígono", construa um triângulo selecionando os vértices A, E, D, A, nesta sequência. Observe o que ocorre com o valor da área que aparece na lateral esquerda, na janela de visualização. Apague o ponto E em AB e coloque-o em BC, faça novamente o polígono e analise a área comparando com o resultado que encontrou anteriormente. Faça o mesmo para E sobre CD.

a) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de A para B?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

b) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de B para C?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

c) O que acontece com o valor da área do triângulo quando a formiga se desloca de C para D?
( ) decresce ( ) permanece constante ( ) cresce

4) Determine uma expressão que relacione o comprimento x ao valor y da área do triângulo AED, supondo que a formiga se desloque ao longo do segmento AB. (Não esqueça de colocar o intervalo de validade de x)

$f(x) = y_{AB} =$ $\boxed{}$

5) Faça o mesmo para os segmentos BC e CD.

Cálculos:

$g(x) = y_{BC} =$ $\boxed{}$

$h(x) = y_{CD} =$ $\boxed{}$

6) Abra um novo arquivo no Geogebra e escreva as três funções encontradas nos itens 4 e 5 dando a devida atenção aos intervalos em que elas são válidas.

7) Os gráficos das funções f(x), g(x) e h(x) que aparecem ao mesmo tempo no Geogebra representam, combinados, uma função contínua? Isto é, se fossemos desenhá-las no papel, não precisaríamos "tirar o lápis da folha" (diferente do problema 1; onde para desenhar aquele conjunto de pontos, era preciso "tirar o lápis do papel" várias vezes)?

8) Qual o valor máximo da área do triângulo? E o valor mínimo?

9) O gráfico que você obteve no Geogebra está de acordo com o que você esperava? (Ou seja, fez sentido para você?) Se não, justifique.

Questionário Avaliativo

1) Achou que o uso do Geogebra como recurso visual facilitou o entendimento?

Sim ( )   Não ( )   Mais ou menos ( )

2) Gostaria de fazer algum comentário sobre a atividade? (Gostou? Achou diferente das outras aulas de matemática?)

Obrigada!

Como podemos observar e comparar, houve uma sintetização das perguntas feitas na atividade atual em relação à atividade realizada anteriormente com outros alunos do nono ano. Antes, tínhamos um total de 23 itens nos 2 problemas, agora, somente 17. Além disso, o questionário avaliativo, como deixou de ser individual, requisitou apenas a opinião sobre o software como recurso facilitador, e caso os alunos quisessem, poderiam fornecer algum comentário. Dessa forma, a atividade tinha por objetivo ser completada integralmente nos 2 tempos de aula, o que de fato ocorreu. Todos os alunos consideraram que a utilização do Geogebra facilitou a compreensão e resolução correta dos problemas.

4.3.2 Tabela de Resultados

A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos pelas duplas identificadas nas colunas como D1, D2, D3, D4 e D5 e pelo único trio T1. As respostas encontradas estão designadas por C (correta), E (errada), B (em branco), PC (parcialmente correta) e C* (correta, porém feita após exposição do raciocínio pela dupla D5).

	D1	D2	D3	D4	D5	T1
P1 item 1	C	C	C	C	C	C
P1 item 2	C	C	C	C	C	C
P1 item 3	C	C	E	C	C	C
P1 item 4	C	C	C	C	C	C
P1 item 5	C*	C*	C*	C*	C	C*
P1 item 6	C	C	C	C	C	C
P1 item 7	B	C	B	C	C	C
P1 item 8	B	C	B	C	C	C
P2 item 1	C	C	C	PC	PC	C
P2 item 2	E	C	C	C	PC	C
P2 item 3	C	C	C	C	PC	C
P2 item 4	PC	PC	C	C	C	PC
P2 item 5	PC	C	C	C	C	B
P2 item 6	C	C	C	C	C	C
P2 item 7	C	C	C	C	C	C
P2 item 8	C	C	C	C	C	B
P2 item 9	C	C	C	C	C	B

Tabela 07: Respostas dos itens dos problemas trabalhados (Reaplicação 9º ano).
Fonte: Desenvolvida pela autora no Excel.

Uma análise da tabela mencionada acima mostra que a maioria dos itens respondidos estavam corretos. Duas duplas e um trio de alunos deixaram itens em branco, e somente dois itens no total, foram respondidos de forma incorreta.

Abaixo, temos algumas fotos dos alunos no Laboratório de Informática resolvendo os problemas.

Figura 39: Alunos do nono ano de 2020 discutindo sobre a atividade.
Fonte: Foto feita pela autora.

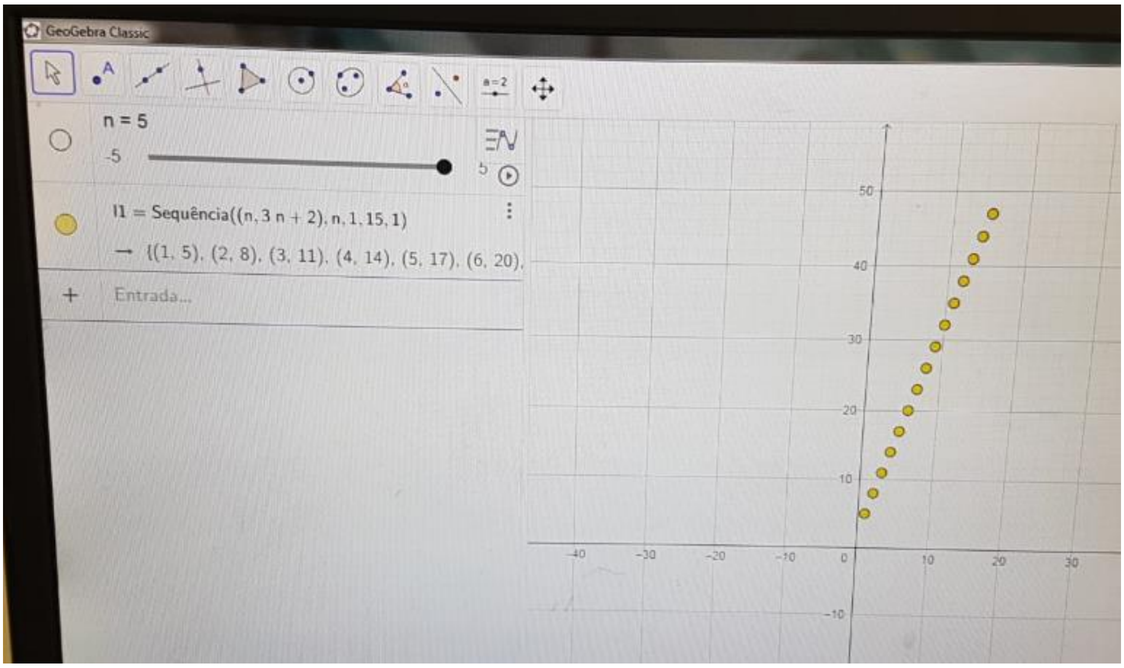


Figura 40: Realização de mudança de cor da sequência de pontos de forma voluntária (P1 item 6).
Fonte: Foto feita pela autora.

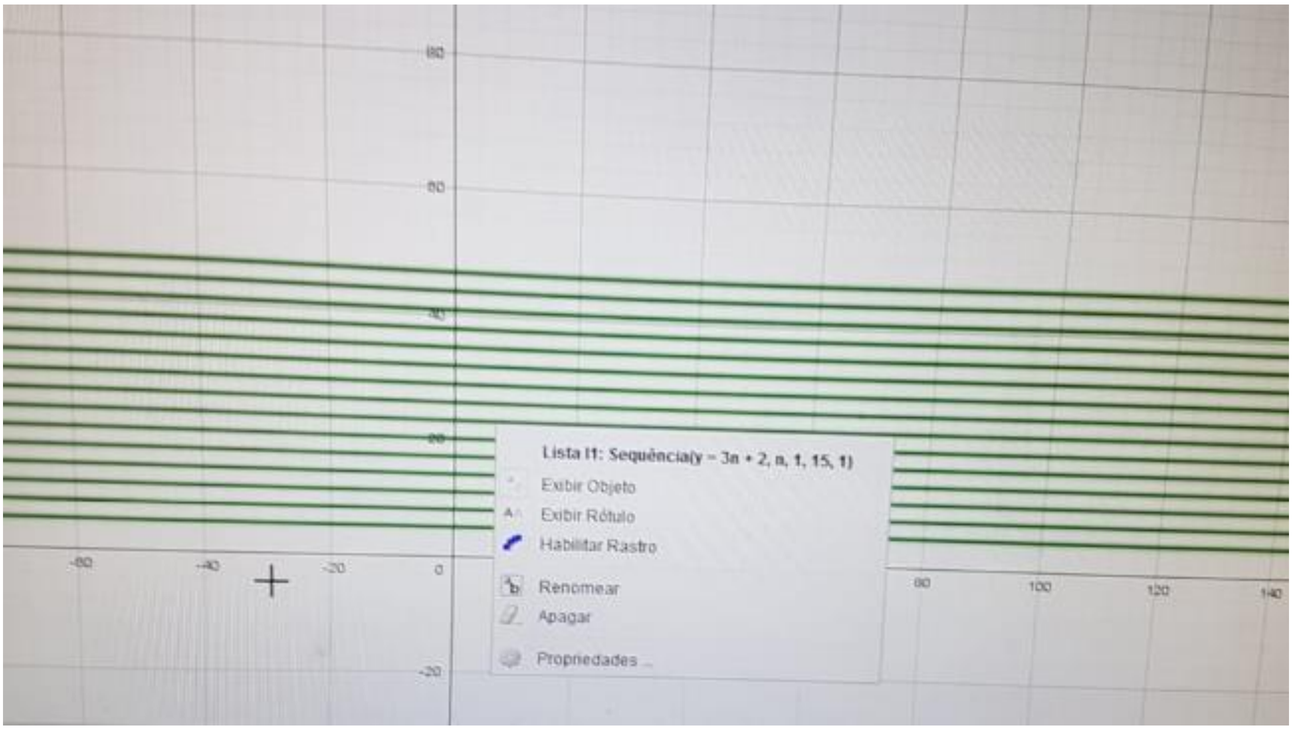


Figura 41: Escrita incorreta para o comando sequência utilizando notação de função (P1 item 6).
Fonte: Foto feita pela autora.

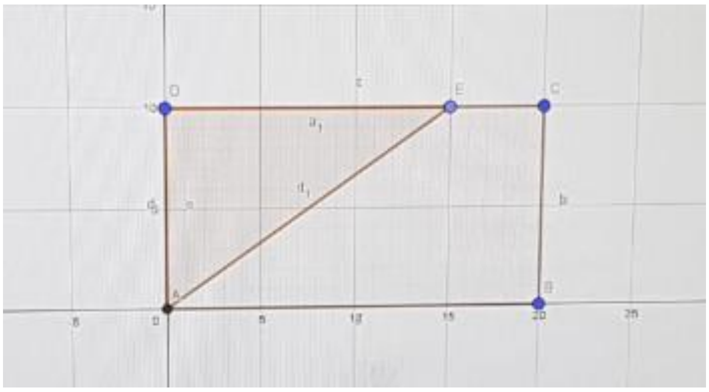


Figura 42: Variação do ponto E no segmento CD (P2 item 3).
Fonte: Foto feita pela autora.

4.3.3 Descrição e análise dos resultados e dos Questionários

Ao iniciar a aula no Laboratório, alguns alunos já começaram mexendo no software e fazendo polígonos, retas etc. Todos queriam conhecer o programa e testar suas ferramentas. Após explicar que o software era apenas um recurso de apoio e que o usaríamos em breve, pedi aos alunos que começassem a ler o primeiro problema para tentar resolvê-lo.

Iniciada a atividade com a questão dos Y's, as duas primeiras perguntas foram respondidas rapidamente por todos, da quantidade de bolinhas presentes na figura 4 e da confecção da tabela com o número de bolinhas da figura 1 até 6. Porém, apenas duas respostas apresentavam a quantidade de bolinhas escritas conforme solicitado no enunciado e não só o desenho como as demais. Na questão seguinte, da quantidade de bolinhas presentes na figura 15, houve duas duplas que raciocinaram de modo incorreto. Uma dupla disse que eram 44 bolinhas, mas logo viu seu erro e corrigiu a tempo. A outra, seguiu o mesmo argumento de um aluno do nono ano do ano anterior. Observe abaixo:

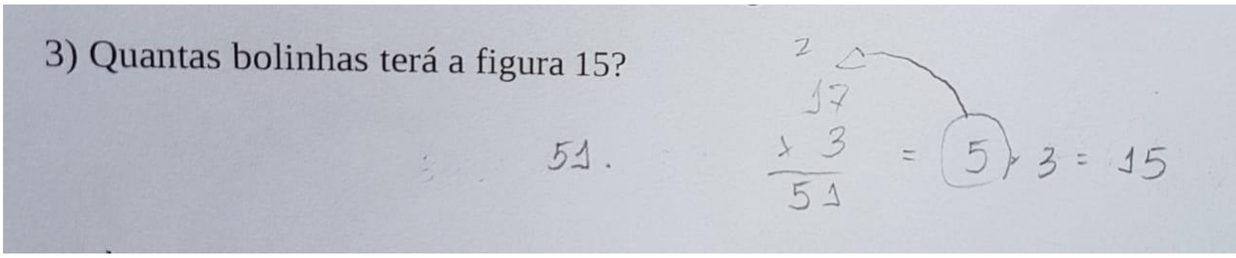


Figura 43: Resolução de P1 item 3, da dupla D3.
Fonte: foto feita pela autora.

Após a maioria dos alunos dizer que a quantidade era de 47 bolinhas, houve a contestação de uma dupla sobre o porquê do padrão não seguir da forma como exposta acima na figura. Seguindo o raciocínio da dupla, os alunos foram questionados se, olhando a tabela que haviam construído, seria possível dizer que a figura 4 tem o dobro de bolinhas da figura 2, já que 4 é dobro de 2. Rapidamente, ela respondeu que não e conseguiu entender seu erro.

No item que pedia uma expressão que relacionasse o número da figura à sua quantidade de bolinhas, um aluno disse que a expressão 3n – 1 apresentaria o número da figura, se considerássemos n como sendo o número de bolinhas. Ele explicou que, pela sequência de bolinhas se apresentar de forma crescente somando sempre 3 unidades, poderíamos pensar nos múltiplos de 3, que designamos por 3n, mas precisaríamos descontar 1 unidade deste valor, pois esta é a diferença quando comparamos a figura 1 com a 2, a figura 2 com a 3 e assim sucessivamente. Isto foi um equívoco, pois ele misturou informações que não faziam sentido juntas a fim de obter uma expressão. Nesta hora, a professora autora foi ao quadro e testou se esta expressão funcionaria para encontrar a quantidade de bolinhas (n) presentes na figura 1. Ficamos com $1 = 3n - 1 \Rightarrow 2 = 3n \Rightarrow n = 2/3$, o que de imediato eles concordaram que não faria sentido, pois o número de bolinhas é sempre um número natural.

Após essa discussão, os alunos expuseram uma nova solução de raciocínio simples e diferente das obtidas nas outras aplicações já realizadas. Neste momento, havia alunos que já haviam concluído a expressão e alunos que estavam na espera pelo momento de utilizar o comando "Sequência" no Geogebra. A dupla D5 explanou seu raciocínio para os colegas que ainda não haviam finalizado a expressão. Explicaram que sendo n o número da figura, então n + 2 é a quantidade de bolinhas presentes na vertical e 2n é a soma da quantidade de bolinhas que ficam inclinadas para a direita e para esquerda. Confira abaixo a resolução de D5.

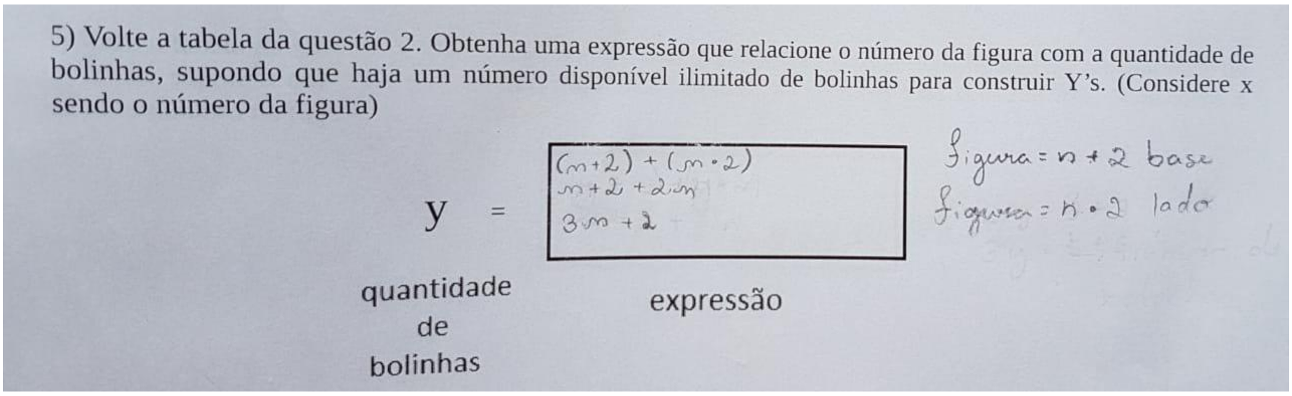


Figura 44: Resolução de P1 item 5, da dupla D5.
Fonte: Foto feita pela autora.

No item acima, solicitamos uma expressão que relacione a quantidade de bolinhas com o número da figura. Nela, x representa o número da figura, mas, como podemos ver, a dupla utilizou a letra n. Ou seja, houve apenas uma mudança de letra para a variável em questão. No item seguinte, sobre a utilização do comando "Sequência", a maioria obteve o gráfico corretamente, exceto por uma dupla, que escreveu o seguinte na entrada do programa: "Sequência (y = 3n + 2, n,1,15,1)", este comando retornou todas as retas paralelas ao eixo x com n variando de 1 a 15 com incremento 1, ou seja, 15 retas ao todo. A representação gráfica pode ser revista na seção anterior na figura 41.

Para finalizar o primeiro problema, discutiu-se sobre haver ou não um número mínimo e máximo de bolinhas presentes na formação das figuras, caso a quantidade de bolinhas fosse ilimitada. A professora autora indagou também, os alunos sobre a possibilidade de haver duas figuras com a mesma quantidade de bolinhas. Após o questionamento, os alunos responderam que não, pois a quantidade de bolinhas de uma figura é sempre maior ou menor que uma outra dada. Ou seja, é sempre um único valor de bolinhas associado a uma única figura, caracterizando a relação obtida ser, de fato, uma função.

Todos os alunos acertaram o primeiro item do problema 2, uma aluna inclusive pensou em construir um quadrado de lado 10 cm e, após calcular sua área, dividir o valor encontrado por 2 para obter a área do triângulo. No segundo item, uma dupla errou, pois utilizou 24 cm como altura e 10 cm como base, encontrando 120 cm^2 como valor da área do triângulo. Esta dupla questionou se a área do triângulo não era feita multiplicando base por lado, o que apresenta dois erros neste caso: a área de um triângulo não se calcula dessa forma e 24 cm não representa o lado do triângulo. Isto ocorreu após ser discutido em sala que a formiga andou 4 cm após passar por B, indo em direção a C. Vale ressaltar que, nenhum dos alunos utilizou as unidades de medida de área em nenhuma das questões, mesmo após a professora autora chamar atenção sobre isso em sala.

Nos itens seguintes, foi feita a construção do quadrilátero no Geogebra com E variando em cada uns dos três segmentos e observou-se a variação da área de ADE nos 3 casos. Neste item, uma dupla marcou a opção de crescimento no valor da área, com E se deslocando de C para D, o que não conferiu com o que a dupla disse em sala. Sobre a expressão para caracterizar a área quando E estivesse no segmento AB, após uma breve discussão sobre o significado de x representar um comprimento variável, a maioria escreveu corretamente dando atenção ao intervalo, porém uma dupla escreveu que a expressão era somente: “20 < x < 30”. A pergunta: “Não tem como eu descobrir o valor de x?” também surgiu e foi necessário explicar sobre os intervalos de validade e sobre o valor máximo de comprimento que ela pode andar.

No item 5, o trio T1 o deixou em branco, a dupla D1 apresentou uma resposta incorreta e as demais acertaram. Observe abaixo dois exemplos de respostas dados.

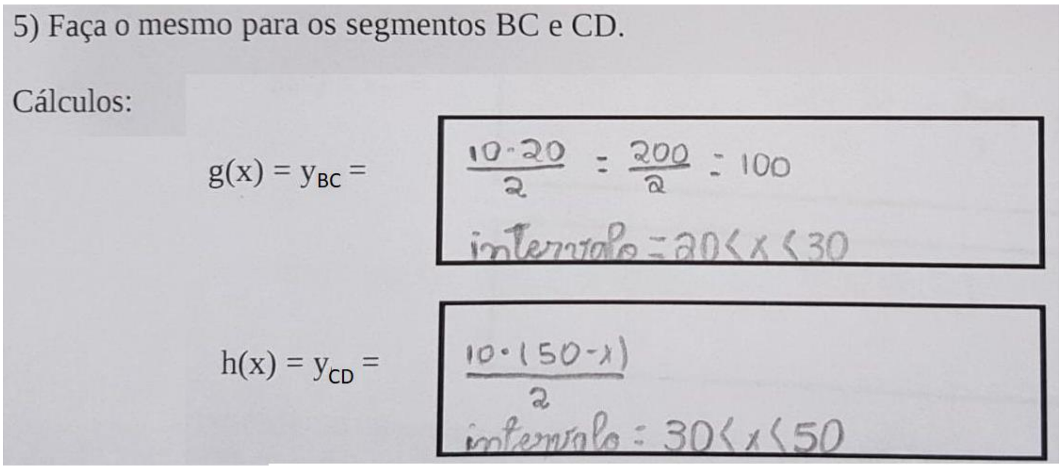


Figura 45: Resposta de P2 item 5, da dupla D3.
Fonte: Foto feita pela autora.

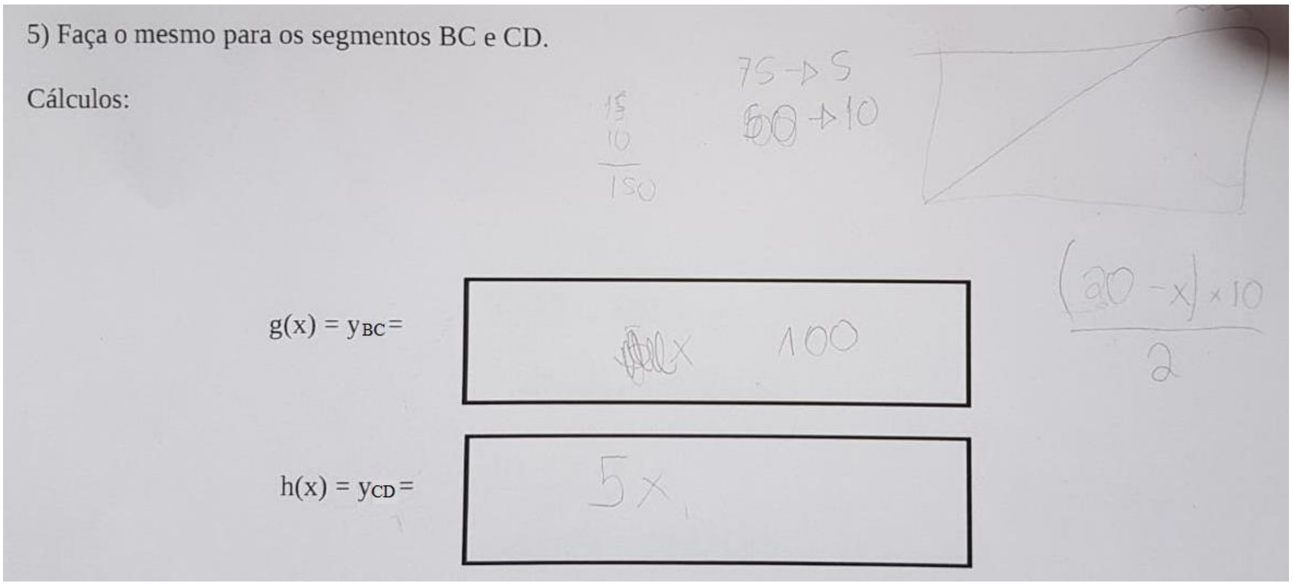
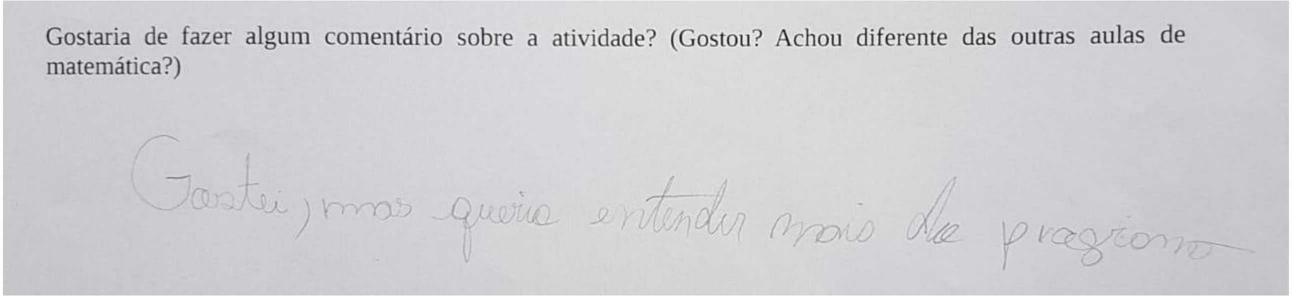


Figura 46: Resposta de P2 item 5, da dupla D1.
Fonte: Foto feita pela autora.

A representação geométrica do comprimento x foi fortemente discutida em sala e foi bastante exercitado, com auxílio do software Geogebra, o deslocamento do ponto E. Uma das alunas inicialmente não havia entendido o fato do ponto E não ser fixo, mas variável, e uma outra dúvida colocada por um aluno, após encontrar g(x), foi como isso representa uma função se assume um valor constante.

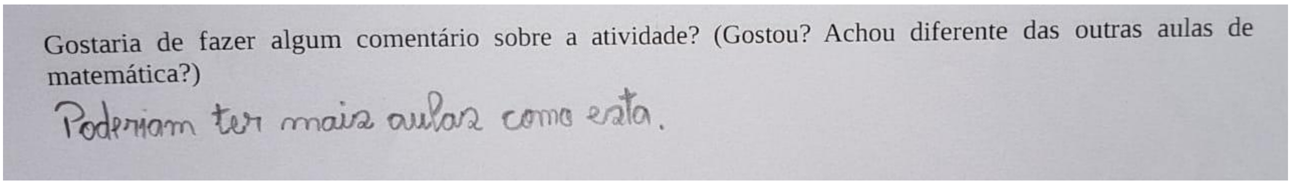
Sobre os valores máximo e mínimo, as cinco duplas concordaram com a resposta e conseguiram obter o resultado olhando apenas para o gráfico construído no Geogebra, porém o trio T1 deixou novamente esta questão em branco.

Ao término da atividade, todos os alunos disseram ter gostado de resolver os problemas com o auxílio do software e concordaram que ele era, de fato, um recurso visual facilitador em sala. Alguns comentários deixados pelos alunos podem ser conferidos a seguir:


Gostaria de fazer algum comentário sobre a atividade? (Gostou? Achou diferente das outras aulas de matemática?)

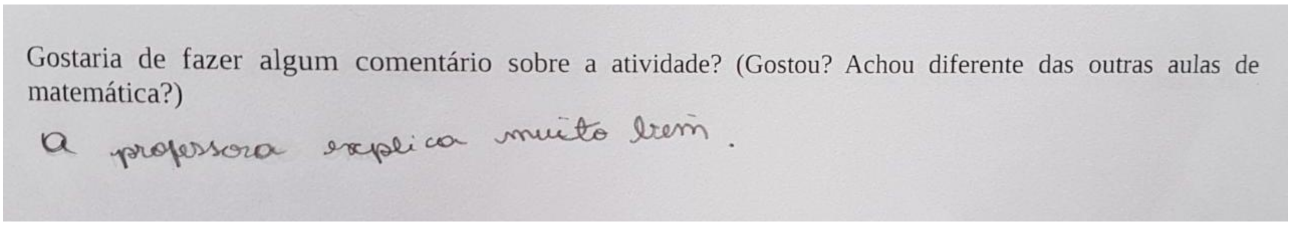
Gostei, mas queria entender mais do programa

Figura 47: Consideração sobre a atividade da dupla D1.
Fonte: Foto feita pela autora.


Gostaria de fazer algum comentário sobre a atividade? (Gostou? Achou diferente das outras aulas de matemática?)

Poderiam ter mais aulas como esta.

Figura 48: Consideração sobre a atividade da dupla D3.
Fonte: Foto feita pela autora.


Gostaria de fazer algum comentário sobre a atividade? (Gostou? Achou diferente das outras aulas de matemática?)

a professora explica muito bem.

Figura 49: Consideração sobre a atividade da dupla D5.
Fonte: Foto feita pela autora.

4.4 Atividades a realizar

Com base nos resultados analisados ao experimentar as atividades, observamos que algumas mudanças poderiam ser feitas a fim de facilitar o aprendizado dos estudantes, respeitando melhor o tempo de cada um. Como na época não foi viável fazer mais oficinas de atividades com o software Geogebra, cada uma das turmas trabalhou dois problemas por dia, porém estes problemas poderiam ser diluídos em outros dias e trabalhados outros tópicos matemáticos relacionados, objetivando uma aula mais leve e focada em poucos conteúdos matemáticos por vez.

Aspectos como a duração das oficinas de atividades, a quantidade de informações discutidas em sala de aula, o nível de maturidade dos alunos, entre outros, devem ser levados em consideração de forma cuidadosa antes de uma futura aplicação em sala. Estas observações não invalidam as atividades realizadas, mas sim, complementam, enriquecendo um trabalho futuro a ser realizado em sala de aula. Com base nisso, abordaremos a seguir uma proposta de oficinas de atividades planejadas com práticas a serem exploradas futuramente com os alunos de cada um dos anos em que trabalhamos.

Atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental

Para trabalhar os conceitos matemáticos com os alunos do nono ano, devemos considerar que estes podem ter mais dificuldade de concentração durante as atividades em sala, principalmente pelo fato do Laboratório de Informática ainda ser um espaço pouco explorado no ambiente escolar. Para um resultado mais positivo, seria importante que mais oficinas de atividades fossem realizadas, não só para o ambiente do Laboratório se tornar mais natural para eles, como também para trabalhar cada vez mais situações-problema que fogem do ensino tradicional. Para isto, precisamos primeiramente garantir que os alunos que farão tais atividades tenham um conhecimento matemático mínimo para que a aula flua sem dúvidas triviais. Estes alunos precisam, ao menos, ter estudado o plano cartesiano e já estarem familiarizados com termos como abscissa, ordenada, par ordenado, quadrante, etc.

Com estes conceitos já conhecidos previamente, uma primeira oficina a ser realizada seria com uma atividade lúdica, como por exemplo o jogo de batalha naval disponível no próprio site do Geogebra. Nesta atividade, o submarino fica indicado em uma posição do plano cartesiano e o aluno indica suas coordenadas através dos controles deslizantes exibidos para x e y. Observe, a seguir, um exemplo onde o par ordenado correspondente ao submarino está indicado corretamente.

Figura 50: Par ordenado indicado no plano cartesiano.
Fonte: https://www.geogebra.org/m/d5cnrys7

Na atividade acima, é possível testar várias posições do submarino explorando os quatro quadrantes, pois é sempre possível indicar um novo par ordenado ao clicar em “nova posição”, como é visto na imagem anterior. O professor pode relembrar rapidamente conceitos como abscissa, ordenada, posição dos quadrantes e marcação dos valores positivos e negativos nos eixos.

Podemos, também, discutir que a indicação da posição seguindo eixos perpendiculares está presente em outras situações. Observe, a seguir, uma sala de cinema com um lugar indicado por uma letra e um número.

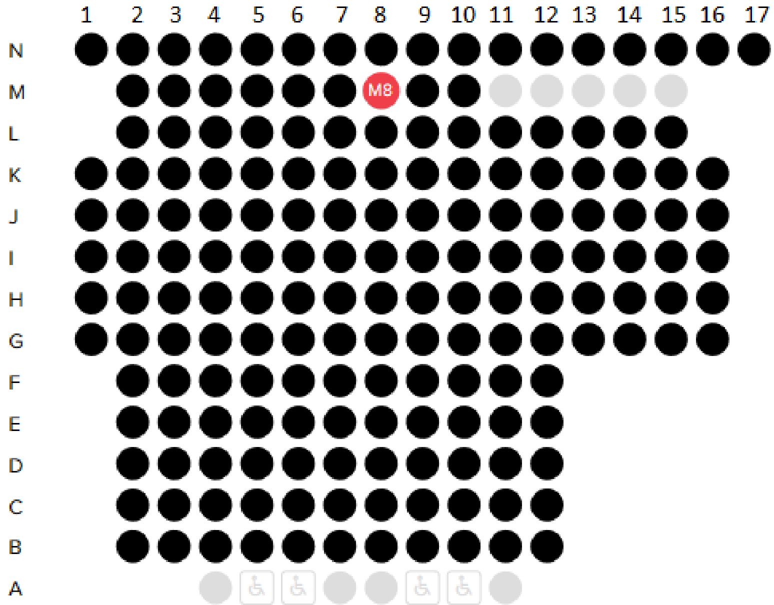


Figura 51: Sala de cinema com o assento M8 indicado.
Fonte: https://www.cinesystem.com.br

Aqui, diferentemente do caso da batalha naval, a indicação se faz pela letra, que está na vertical e só depois pelo número, que está na horizontal.

A indicação da localização geográfica no Planisfério também é muito importante. Ao trabalhar conceitos como longitude e latitude, que são discutidos na disciplina de Geografia no Ensino Fundamental, o aluno percebe que a troca das coordenadas de um par ordenado, pode acarretar uma mudança de continente, como vemos a seguir:

Figura 52: Marcação dos pontos (20°, 40°) e (40°, 20°) no Planisfério.
Fonte: www.sextoanostaclara.wordpress.com

Após trabalhar esta atividade, os alunos poderiam explorar mais o software Geogebra, inicialmente para consolidar a aprendizagem de plano cartesiano (marcando pontos no plano diretamente na janela de visualização ou digitando um par ordenado na entrada), e, em seguida para criar segmentos de reta e desbravar outras ferramentas como a criação de polígonos, controles deslizantes e fixação de um ponto. Observe, a seguir, uma proposta de construção de um quadrado com um quadrado e arcos em seu interior.

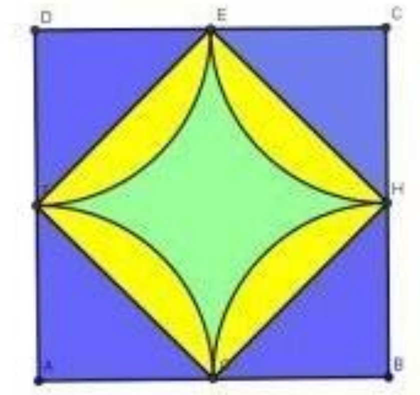


Figura 53: Quadrado ABCD com quadrado e arcos em seu interior.
Fonte: https://sites.google.com/site/oficinageogebra/geogebra/atividades-ludicas-1

Esta construção pode ser realizada marcando os pontos ou usando a ferramenta "Polígono". O Geogebra também poderia ser utilizado para relembrar o que é ponto médio de um segmento, o quadrante de um círculo, simetria e até mesmo discutir sobre o Teorema de Pitágoras e áreas.

Uma outra construção simples, porém usando uma nova ferramenta, seria criar polígonos regulares com medida de lados previamente estabelecidas, utilizando um controle deslizante "a" variando de 3 a 5 com incremento 1. Vejamos:

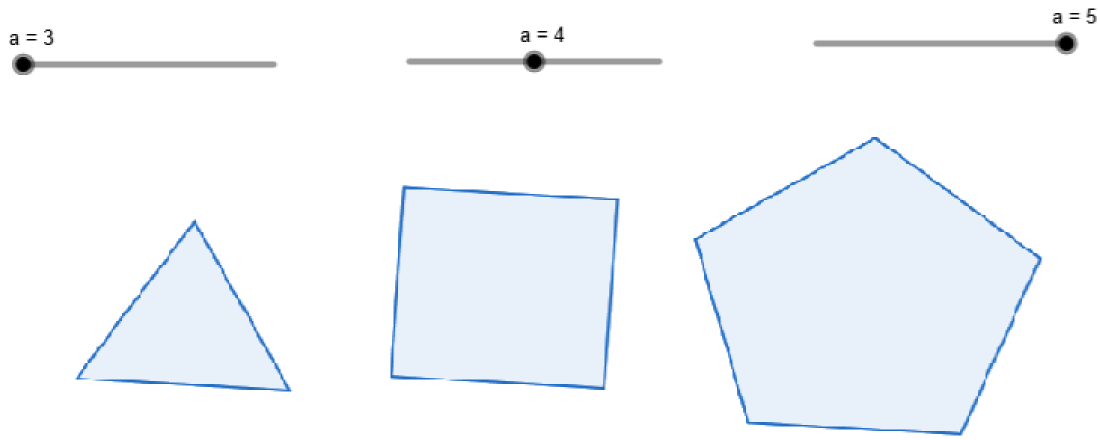


Figura 54: Polígonos Regulares utilizando controle deslizante.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Em uma segunda (ou terceira) oficina de atividades, seria então apresentada a atividade do problema 1, da formação dos Y's com bolinhas, realizada para este trabalho com os alunos do nono ano. Desta forma ela seria encarada com mais tranquilidade e o aproveitamento seria mais profundo. Poderíamos também relembrar alguns tópicos que eles precisassem, discutir sobre os números que pertencem a cada um dos conjuntos numéricos já estudados nos anos anteriores e definir o que é uma função utilizando exemplos gráficos como abaixo, representando-a como um gráfico em que, ao traçarmos retas verticais, cada uma delas só o intercepte em um único ponto.

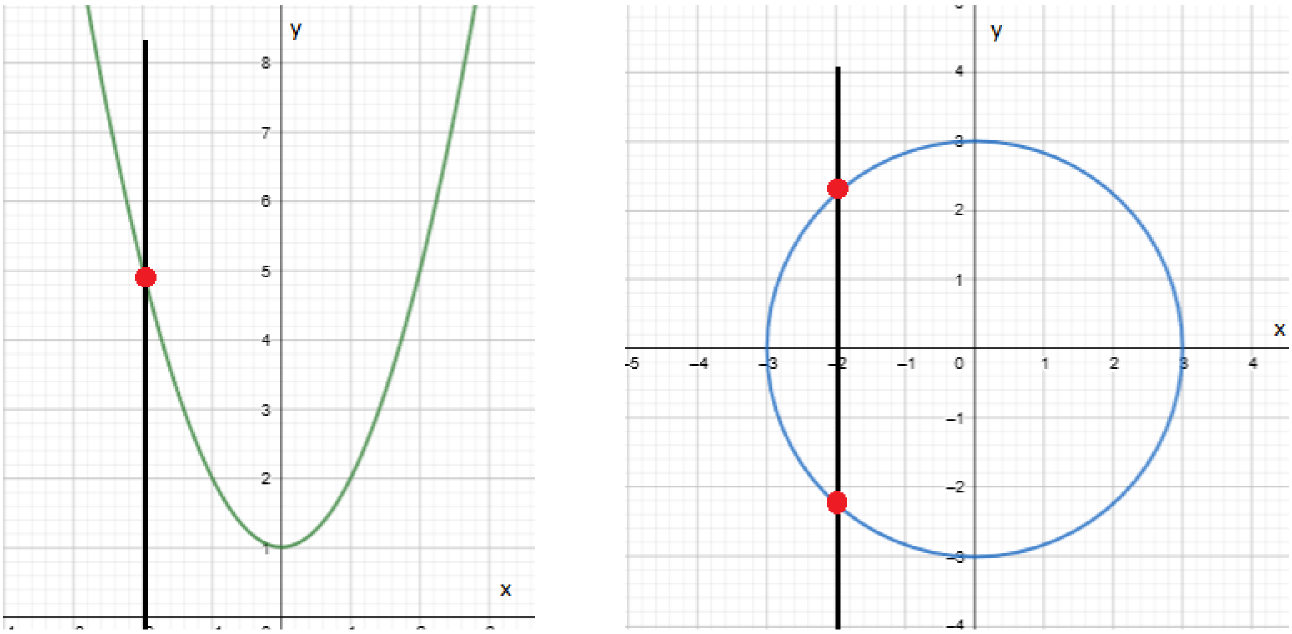


Figura 55: Gráfico que é função X Gráfico que não é função.
Fonte: Desenvolvida pela autora no Geogebra.

Trabalharíamos também as funções tendo apenas as relações explícitas algebricamente e teríamos mais tempo para verificar o porquê de algumas relações encontradas pelos alunos estarem incorretas. Em uma oficina posterior, o problema da formiga, que é expresso por uma função contínua, poderia ser trabalhado com mais liberdade de tempo. Discussões sobre uma função ser crescente, constante ou decrescente seriam enriquecidas com outros exemplos, assim como os conceitos de máximo e mínimo de função.

Devemos lembrar que os problemas selecionados para as oficinas nesta escola tiveram que ser um pouco mais simples do que os que tradicionalmente escolheríamos para o nono ano, já que os alunos ainda não haviam estudado nada sobre funções. Nas escolas em que os alunos já tivessem visto as funções afim e quadrática, todos os problemas expostos aqui anteriormente poderiam ser trabalhados, porém alguns, como o problema 2 do capítulo 3 (função racional), seria mais desafiador e demandaria bastante envolvimento por parte dos alunos.

Atividades para o 1º ano do Ensino Médio

A ideia de ter mais oficinas de atividades não seria única e exclusiva para os alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Os alunos do primeiro ano do Ensino Médio também deveriam ter mais oficinas, visto que a prática do uso do Laboratório seria muito proveitosa se feita ao longo do ano periodicamente. Para estes alunos, seria possível manter a primeira oficina seguindo o cronograma inicial desta dissertação e trabalhando a questão da formiga e do avião para os dois tempos de aula previstos. Uma segunda oficina trabalharia o problema da função racional, que é bem desafiador comparado aos demais aqui expostos. A seguir, temos a sequência de perguntas preparadas para uma possível atividade envolvendo o problema do reservatório de água (problema 2 da seção 3.3).

Atividade para o 1º Ano do Ensino Médio: problema 3

1) Considere a função $g(t) = \frac{t^2}{6} - 3t + 16$, com $0 \leq t \leq 24$.

a) Faça o gráfico de g utilizando o Geogebra.

b) Determine o par ordenado que representa o valor mínimo de g.

c) Os valores de g no intervalo considerado são sempre positivos?

d) Expresse o par ordenado que representa o valor máximo de g.
e) Especifique o intervalo de variação de t quando a função g for:
crescente: ___________________ decrescente: _________________

2) Seja V(t) = $\frac{1}{g(t)}$, $0 \leq t \leq 24$. Supondo que seja apenas conhecida a expressão de g(t) e nada mais, responda:
a) Os valores de V(t) são sempre positivos? Por quê?
b) No intervalo de variação de t _________________ V(t) é sempre crescente. Por quê?
c) No intervalo de variação de t ____________________ V(t) é sempre decrescente. Por quê?
d) Encontre o par ordenado que representa o mínimo de V(t).
e) Encontre o par ordenado que representa o máximo de V(t).
f) Sabe-se que o volume de água de um reservatório residencial de uma família com 3 pessoas, varia durante o dia conforme a seguinte função: $V(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{6} - 3t + 16}$, com $0 \leq t \leq 24$, com t medido em horas, com início às 9 horas da noite, e V(t) sendo o volume do reservatório, em metros cúbicos. Quais são os valores máximo e mínimo do volume de água no reservatório?
g) Faça o gráfico de V(t) e compare-o com o gráfico de g(t), ambos expressos ao mesmo tempo no Geogebra. O que você pode notar?

Com isso encerramos mais uma possível atividade, que pode ser feita com alunos do primeiro ano do Ensino Médio e que necessitam apenas de um conhecimento prévio básico de função quadrática. Com esta atividade, podemos explorar conceitos como a representação gráfica do valor mínimo e máximo de forma não convencional feita em sala de aula. O processo de descoberta de que o mínimo de g(t) implica no máximo de V(t) e vice-versa não ocorreria de imediato, e esta discussão poderia ser realizada sem pressa, não esquecendo de focar nos intervalos crescente/decrescente e como garantir a existência de mínimos/máximos em uma função. O diferencial desta questão é que, somente com o gráfico de g(t), é possível encontrar o valor mínimo e máximo do volume de água no reservatório sem fazer cálculos com a função V(t). Como mencionado no início dessa dissertação, o aluno precisa aprender a transitar entre diferentes representações de funções para que o processo de aprendizagem seja, de fato, bem sucedido.

Outras atividades posteriores utilizando Geogebra poderiam ser realizadas envolvendo funções importantes como as funções periódicas seno e cosseno e as funções exponencial e logarítmica. Muitos alunos que chegam ao Ensino Superior em área de Ciências Exatas se queixam de não terem aprendido ou de terem estudado apenas superficialmente estas funções. Este software, com seus vários recursos, pode ajudar muito a reforçar o processo de ensino-aprendizagem de funções no Ensino Médio, evitando, assim, que os alunos, ao cursar disciplina de Cálculo, tenham desempenho acadêmico ruim.

Considerações Finais

O conteúdo de funções é bem abrangente e pode explorar diversos outros tópicos e conceitos matemáticos. A ideia de utilizar o Geogebra como apoio à resolução de problemas menos convencionais teve como objetivo instigar o aluno a pensar de forma diferenciada, fazendo que ele se questione e interaja com os colegas buscando solucionar os problemas propostos. As atividades desenvolvidas com os dois grupos de alunos, do nono ano e do primeiro ano, pareceram muito motivadoras quando implementadas e despertaram nos alunos o senso de coletividade.

Para os alunos do nono ano, o ideal seria explorar mais ainda o Geogebra, iniciando com atividades lúdicas e manipulando suas ferramentas básicas de geometria, como proposto na última seção do capítulo 4. Assim, os alunos, já conhecendo bem o Geogebra, estariam aptos a utilizar os seus recursos nas atividades mais sofisticadas descritas nesta dissertação, de forma a aproveitar de modo mais abrangente a experiência para auxiliar o processo de aprendizagem de função e suas propriedades. Atividades menos longas também podem ser mais positivas para evitar que eles se cansem e fiquem distraídos.

Para o Ensino Médio, o ideal seria trabalhar mais atividades desafiadoras, continuando a partir das que foram realizadas para esta dissertação, a fim de estimular o raciocínio dos alunos e mostrar que existem vários outros casos em que a memorização de fórmulas não soluciona problemas contextualizados mais realistas. Para estes alunos, outras oficinas explorando funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas agregariam, também, muito valor à sua formação básica.

Um resultado comparativo mostrou que os alunos mais novos se cansaram mentalmente mais rápido que os mais velhos e necessitaram de maior apoio no decorrer das questões, enquanto os alunos do Ensino Médio mostraram maior autonomia na execução dos problemas. Ambos os grupos estavam bem aplicados respondendo às perguntas das atividades que foram entregues, discutindo com os colegas e tirando dúvidas com a professora autora. O uso do Geogebra facilitou bastante a visualização gráfica das funções: quando alguns deles não sabiam como seriam expressas e a plotagem dos pontos através do comando "Sequência" e criação de polígonos pareceu bastante motivadora.

A aplicação de mais atividades ao longo do ano, escolhendo cuidadosamente os problemas e a quantidade de perguntas feitas em cada uma, deixaria o aprendizado mais fluido e o ambiente de estudo mais agradável. Além disso, trabalhar com uma quantidade de alunos reduzida, facilitou muito a experiência deste trabalho. Uma forma de implementação real na escola seria dividir a turma em dois grupos e trabalhar com eles separadamente, de acordo com o espaço disponível na escola em que for praticada a atividade. Neste momento, a turma que não estivesse no Laboratório faria outro tipo de atividade em sala de aula monitorada por outro professor. Ou então, juntar duplas de alunos para que cada dupla usasse um computador, mas respondesse as folhas de perguntas de forma individual.

A experiência com a elaboração deste trabalho enriqueceu muito a formação da professora autora, que espera ter oportunidade de aplicar de novo as atividades já realizadas para outros alunos, combinadas com as outras que foram descritas no final do último capítulo, possibilitando o aperfeiçoamento deste material didático. Assim ele poderá ser utilizado por outros professores que acreditam que o uso da tecnologia em sala de aula é um aliado importantíssimo no processo de aprendizado de Matemática, fugindo do padrão tradicional da sala de aula.

Referências

ALLEVATO, G; ONUCHIC, L. R. *Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs). Educação Matemática - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

AZEVEDO, M. F; MENEGHETTI, R. C. G; NETO, J. A. S., *Resolução de problemas e aprendizagem significativa em processos de educação não formal,* CIAEM, 2011. Disponível em <https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/809/112>. Acesso em: 26/05/2019.

BARRETO, A. L. O; CASTRO, J. B; FILHO, J. A. C; *Teoremas-em-ação na compreensão do conceito de funções*, CIAEM, 2011. Disponível em <https://xiii.ciaem-redumate.org /index.php/xiii_ciaem /xiii_ciaem/paper/viewFile/1397/742>. Acesso em 26/05/2019.

BARROS, M. D; CORREA, M. S; RODRIGUES, P. F. C. R; SUETT, W. B. *Resolução de Problemas: abordagem ao ensino da Função Quadrática*, CIAEM, 2015. Disponível em <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/616/36>. Acesso em: 26/05/2019.

BARTLE, R.G.; SHERBERT, D.R.; *Introduction to Real Analysis*, Ed. Wiley, 3rd Ed, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. BNCC. 2017. Disponível em:< http://base nacional comum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 17/08/ 2020.

BRASIL, *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* L9394, 1996.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*, 2000.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Fundamental)*, 1998.

BRASIL, Prova de concurso público para admissão à Escola Naval, Disponível em https://www.marinha.mil.br/sspm/sites/www.marinha.mil.br.sspm/files/provas_gabaritos_anteriores/PSAEN_2013.zip,_2013, Acesso em 17/08/2019.

CARAÇA, B.J, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, 1984.

CAPELA, J. M. V; CAPELA, M. V. *Uso de softwares de Domínio Público nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral*, CNMAC, 2012. Disponível em <http://arquivo.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiv_cnmac/pdf/549.pdf >. Acesso em: 26/05/2019.

CRISTOVÃO, E. M; FERNANDES, F. L. P; FIORENTINI, D. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.* In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, Porto, Portugal. Anais**.** Lisboa: APM, 2005. v.1. p.1 – 13, CD – ROM.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*, 1993 (Tradução). Disponível em <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiDpdzp-_frAhXjHbkGHWFHAJ0QFjAAegQIBhAB&url = https%3A%2F%2F periodicos.ufsc.br%2Findex.php%2Frevemat%2Farticle%2Fdownload%2F1981-1322.2012v7n2p266 %2F23465&usg=AOvVaw0TbtYKKmC8IARV_DxFLVX1> Acesso em: 15/06/2019.

FERREIRA, C. C; GERETTI, L. V., SANCHES, D. G. R; SANTOS, M. B. *O ensino de funções com o apoio de materiais manipuláveis*, CIAEM, 2011. Disponível em <https://xiii.ciaem-redumate.org /index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2478/220>. Acesso em: 26/05/2019

FILHO, M. A. S. M; MENEZES, J. E. *Possibilidades e dificuldades de uma sequência didática para o ensino de funções instrumentalizado por uma ferramenta computacional*, CIAEM, 2011. Disponível em <https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile /2227/897> Acesso em 26/05/2019.

JÚNIOR G. S; PEREIRA, R. S. G. *Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico,* BOLEMA, 2013. Disponível em <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46 /v27n46a13.pdf> Acesso em 29/05/2019.

MARTINS, C. A; SANTOS, L. A. *O uso do Geogebra no processo de ensino e aprendizagem de funções do 1° e 2° graus*. Paraná, 2016. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br /portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unesparparanavai_cleitonantunesmartins.pdf> Acesso em: 29/05/2019.

MENEGHETTI, R. C. G; REDLING, J. P. *Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio*, BOLEMA, 2012. Disponível em <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42a/10.pdf>. Acesso em: 29/05/2019.

NEVES, J.D; RESENDE, M.R. *O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural*. UNIUBE, 2016.

OBMEP, *Banco de questões. Prova de 2014.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2014. pdf> Acesso em 29/05/2019.

ONUCHIC, L. R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.* In: Bicudo, M. A.V. (Org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. Editora UNESP, São Paulo (SP), 1999.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas – um novo aspecto do método matemático*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo - UFRJ, 1995.

REBELLO, A. P. S; RODRIGUES, M. A. R. *GeoGebra: alternativa para o estudo dos parâmetros de funções na educação básica,* CIAEM, 2011. Disponível em <https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1267/739>. Acesso em: 26/05/2019.

SANTOS, E. R; TEIXEIRA, B. R. *Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: alguns aspectos orientadores para a prática docente*, BoEM, 2017. Disponível em <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjZkpmw_vfrAhXUHrkGHdvaCoQQFjAAegQIBxAB&url=https%3A%2F%2Fwww.periodicos.udesc.br%2Findex.php%2Fboem%2Farticle%2Fview%2F8895%2F6868&usg=AOvVaw11fJxeXRCoRCOXlHJLyfdS>. Acesso em: 29/05/2019.