UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

JORGE BELÉM E SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DOS CONCURSOS E VESTIBULARES

JUAZEIRO DO NORTE
2021

JORGE BELÉM E SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DOS CONCURSOS E VESTIBULARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

JUAZEIRO DO NORTE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S58a Silva, Jorge Belém e.

Análise combinatória no contexto dos concursos e vestibulares / Jorge Belém e Silva. – 2020.

106f.: il. color.30 cm.

(Inclui bibliografia p.104- 106).

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

1. Análise combinatória. 2. Aplicação da teoria à prática. 3. Concursos. 4. Vestibulares. I. Título.

CDD 511.6

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

JORGE BELÉM E SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DOS CONCURSOS E VESTIBULARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 08/01/2021.

BANCA EXAMINADORA

Francisco de Assis Benjamim Filho.

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Clarice Dias de Albuquerque

Profª. Dra. Clarice Dias de Albuquerque
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e incentivo que eles sempre me oferecem.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos de quem sempre recebo incentivo e apoio incondicionais. Em particular, a minha mãe, que me fez ver desde criança que a escola era o único caminho, sempre me ajudando dentro das suas limitações; a meu irmão Willames, já que foi ele quem me levou à UFCA para que eu pudesse efetuar a primeira matrícula.

A meu amigo e colega Jackson, que me forneceu o meio de deslocamento semanal da Paraíba ao Juazeiro, mesmo quando fiquei sem condições financeiras de contribuir com os gastos. Sem a ajuda dele, eu teria sido forçado a desistir na metade do curso.

Ao meu amigo Sidney Moreira, além da ajuda que tem me dado enquanto colega de trabalho, ele também fez a leitura detalhada do meu texto e forneceu diversas orientações que foram de grande importância para a conclusão deste trabalho.

A minha amiga e colega Érica, que me ajudou bastante durante as disciplinas e também na formatação desse trabalho. Perdi as contas de quantas vezes a ocupei com alguma dúvida minha, e ela sempre paciente e disposta a me ajudar.

A meu ex-professor Tonires (UFCG), que além de me ajudar com problemas na formatação, também me forneceu dicas em relação a alguns tópicos do texto.

Aos demais colegas do mestrado, Victor, Vonaldo, Matheus, Elion, Jéssica, Marcelo, todos foram importantes, principalmente quando nos reuníamos para fazer trabalhos e estudar provas; inclusive, aos que lamentavelmente ficaram pelo caminho, não tinha como não rir com as brincadeiras de "Chiquin" e "Darcio". Fui duas vezes à casa de Chiquin para estudarmos o dia inteiro.

Agradeço muitíssimo ao professor Francisco de Assis Benjamim Filho, meu orientador, que além das orientações valorosas, deu-me o benefício de escolher o tema que eu já tinha em mente antes mesmo de acessar o PROFMAT.

Aos professores Valdinês Leite de Sousa Júnior, Érica Boizan Batista, Vicente Heleno Feitosa Batista Sobrinho, Leandro da Silva Tavares, Francisco Pereira Chaves e Steve da Silva Vicentim, com quem tanto aprendi nas aulas. Agradeço às professoras (coordenadoras) Maria Silvana Alcântara Costa e Clarice Dias de Albuquerque, esta principalmente pela preocupação para com a nossa turma.

Agradeço aos professores João Francisco da Silva Filho, Francisco Pereira Chaves e Clarice Dias de Albuquerque, que compuseram a Banca Examinadora, pelas orientações de grande importância para conclusão deste texto.

Para finalizar, agradeço demais à Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada pela criação desse programa maravilhoso, que hoje está me dando a chance de conquistar o tão sonhado título de mestre, e, além disso, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro importantíssimo, que desde a universidade vem possibilitando os meus estudos.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma abordagem contextualizada para a *Análise Combinatória*, tendo como objetivo explanar esse assunto de forma prática e objetiva, por meio da exploração de problemas. Para isso, recorremos à resolução minuciosa de questões de concursos, vestibulares e livros, e, por meio destas, abordamos os tópicos mais importantes da combinatória ensinados nas escolas. Procuramos estruturar o texto de modo que o nível de dificuldade das questões aumente à medida em que o leitor avança no texto, sem necessidade, porém, do leitor retornar a páginas anteriores para rever um outro problema que sirva de embasamento para o que está sendo apresentado. Tudo para que seja útil como material de estudo para estudantes de concursos e de vestibulares ou como texto de apoio para professores do Ensino Médio utilizarem em suas aulas. Na íntegra, o trabalho leva à conclusão de que o aprendizado da combinatória só é atingível por meio do envolvimento e trabalho duro, isto é, colocando-se em prática aquilo que se estuda.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Aplicação da Teoria à Prática. Concursos e Vestibulares.

ABSTRACT

In this work we present a contextualized approach to Combinatorial Analysis, with the objective of explaining this matter in a practical and objective way, through the exploration of problems. For that, we resort to the detailed resolution of problems extracted from competitions, entrance exams and books, and through them, we cover the most important topics of the combinatorics taught at the schools. We try to structure the text so that the level of difficulty of the questions increases as the reader progresses through the text, without the need, however, for the reader to return to previous pages to review another problem that serves as a basis for what is being presented. Everything to be useful as material of study for students in competitions and entrance exams or as a supporting text for high school teachers to use in their classes. In full, the work leads to the conclusion that the learning of combinatorics is only attainable through involvement and hard work, that is, putting into practice what is studied.

Keywords: Combinatorial Analysis. Application of Theory to Practice. Contests and entrance exams.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante os estudos para concursos públicos e/ou testes vestibulares, por vezes o estudante se vê procurando em livros ou na internet por problemas e pelas soluções daqueles que ele encontra dificuldade em resolver. Essa situação aparece com frequência considerável quando se trata do assunto *Análise Combinatória*. Quando o estudante encontra o material, geralmente os exercícios não trazem as soluções, sendo necessário um outro trabalho dele para obter as respostas na internet, e quando as encontra, muitas vezes elas estão desorganizadas ou até mesmo incorretamente redigidas.

Além disso, dificilmente há disponível um material que contenha um bloco razoável de problemas com suas respectivas soluções bem organizadas e explicadas, que facilite o trabalho do estudante. Levando em consideração os fatos mencionados anteriormente, surgiu a ideia de produzir um texto que procure sanar essas dificuldades, englobando parte considerável do que aparece de Análise Combinatória em provas de concursos e de vestibulares que ocorrem pelo país. A maior parte do material que aqui será abordado está disponível em sites como o do *PCIconcursos* e o do *Qconcursos*. Esse trabalho é fruto da experiência própria do autor, que passou mais de dois anos estudando para provas de concursos públicos.

Os livros didáticos trazem uma gama de problemas acerca de combinatória, mas quem está estudando para um concurso ou um vestibular não tem tempo suficiente para procurar por aqueles que têm características em comum e ajudam a resolver os problemas que realmente são típicos das provas de concursos ou vestibulares. Logo, entende-se ser útil um trabalho que faça uma síntese do que de fato aparece nestas provas. Claro que material de qualidade para estudos dessa natureza certamente já existe, por exemplo, na forma de apostilas e bons livros. Porém, custa algum valor para o candidato adquirir. Esta dissertação, no entanto, estará livre e gratuita na internet aos interessados.

Além disso, fizemos uma pesquisa no site do PROFMAT pelas dissertações que abordam combinatória e encontramos cerca de 83 registos. Porém, somente duas dessas dissertações trabalham especificamente com combinatória em Concursos e Vestibulares, que são os seguintes textos: *Análise Combinatória e Probabilidades nos Concursos Públicos de Nível Médio*, de Oliveira (2018); e, *A Análise Combinatória nos Vestibulares Militares e Olimpíadas*, de Mourão (2018). Logo, há uma escassez de textos voltados para o contexto em questão. Tomamos isso também como uma motivação para escrita deste trabalho. Ressaltamos ainda que a nossa abordagem é diferente das apresentadas nos textos citados. Oliveira (2018) traz uma análise didática e conceitual sobre combinatória e probabilidade, e apresenta alguns problemas resolvidos no final do texto. Já Mourão (2018), apresenta diversas aplicações ao longo do seu texto, mas os problemas que aborda são mais específicos de vestibulares e olimpíadas.

A combinatória, de acordo com Trevizan e Brolezzi (2016) em *Como Ensinar Análise Combinatória*, tem grande potencial em relação à resolução de problemas, mas às vezes ela é ensinada na escola como se fosse um conjunto de fórmulas que o aluno deve aprender a manipular para resolver exercícios. Ela é tida como um tema difícil pelos estudantes e até mesmo pelos professores, em virtude de ser um assunto bastante abstrato. Geralmente, os professores deixam para ensiná-la no fim do ano, e acaba não dando tempo. Por exigir muita abstração, os alunos têm dificuldades de entendê-la e os professores de explicá-la. Quando esse tema aparece nos vestibulares, os alunos acabam se complicando com as questões. Ao ingressar no Ensino Superior, dificilmente vê-se uma disciplina específica sobre combinatória. Daí, quando o estudante termina a faculdade e tenta aprovação num concurso, acaba se perdendo em problemas tecnicamente simples, gerando insatisfação e até dúvida sobre a própria capacidade.

A fim de superar essa dificuldade, muitos estudantes retornam a seus estudos em livros sobre assuntos sobre os quais já deveriam ter conhecimento. Porém, as questões de concursos têm suas especificidades, o que acarreta demora ao estudante se adaptar caso estude apenas do jeito que o conteúdo se apresenta nos livros. O presente texto é resultado de um esforço para concentrar o que há de importante disponível na internet para ser aprendido sobre combinatória que aparece nos concursos para o magistério e vestibulares, como também nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do exame de acesso ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), visto que o grau de dificuldade é semelhante.

É importante ressaltar que uma maneira de solucionar problemas de Matemática Básica é pela resolução de outros problemas semelhantes. Partindo desse pressuposto, é indiscutível a importância da utilização de problemas em Matemática como recurso didático, visto que é por meio destes que a disciplina tem se desenvolvido ao longo do tempo. Resolvendo problemas, o indivíduo aprende a conviver com as dificuldades e a superar barreiras, adquire autonomia de pensar criticamente sobre seu próprio modo de agir diante do conhecimento, isto é, o sujeito aprende a aprender. Isso está de acordo com o que sugerem os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasil (1998), as contribuições da Matemática, acerca do desenvolvimento do nosso modo de pensar e agir, nos fornecem condições de resolvermos problemas genuínos, nos gera hábitos de investigação, melhora nossa confiança e nos ajuda no enfrentamento de novas situações.

Os problemas de combinatória, como de outros assuntos, exigem compreensão do enunciado, ou seja, entendimento das informações presentes na questão por parte do estudante. Para isso, é fundamental que ele tenha um bom domínio de leitura e interpretação de texto; caso contrário, terá sérias dificuldades, sobretudo em problemas mais elaborados e com enunciado extenso. É importante que o estudante utilize tudo o que tiver disponível de ferramenta, se possível, até o traçado de uma figura ajuda a compreender a situação. Nos vestibulares se vê problemas bem contextualizados; já nos concursos, às vezes não há tanta contextualização e o que realmente se cobra do candidato é o domínio de técnicas.

A rapidez de raciocínio também é importante, uma vez que se tem um limite de tempo para resolver as questões durante a aplicação de exames. O estudante precisa trabalhar com a ideia em mente de que ele deve priorizar as soluções que são menos trabalhosas. Sendo assim, em nosso trabalho, com frequência, apresentamos mais de uma solução para o mesmo problema, a fim de que o estudante procure a melhor e mais rápida forma de resolver cada tipo de situação que se coloque diante dele, tornando-o mais habilidoso e preparado.

Além disso, quando uma questão é mais elaborada e difícil, pode ser que o estudante só consiga solucioná-la, durante uma prova, se em seus estudos ele tiver aprendido técnicas que lhe permitam, ao ler tal questão, saber como agir diante dela. Esse tipo de situação exige, em conformidade com o que defende Polya (2006) em *A Arte de Resolver Problemas*, recorrência ao aprendizado anterior, concentração naquilo que se quer, bons hábitos mentais e até mesmo um pouco de sorte. Até porque, às vezes a pessoa já conhece as técnicas necessárias para resolver certo problema, mas a ideia de como utilizá-las simplesmente não vem à mente.

Considerando os três componentes fundamentais que abrangem o ensino da Matemática que, segundo Lima (2007) em *Matemática e Ensino*, são Conceituação, Manipulação e Aplicações, a nossa proposta é resolver questões de combinatória de variados tipos que aparecem nos concursos e vestibulares cujas provas estejam disponíveis na internet, com rigor metodológico apropriado, para que o texto não fique altamente técnico e de difícil entendimento. Ao longo dos dois primeiros capítulos serão resolvidos sessenta e cinco problemas, que servirão de base para a construção da teoria que julgamos necessária para as nossas finalidades. Nestes capítulos, todas as questões correspondentes a provas de Concursos, Enem e Profmat tiveram suas alternativas omitidas e os problemas sem indicação de fonte foram criados pelo autor deste texto.

No segundo capítulo, trabalhamos os conceitos mais básicos e recorrentes em vestibulares e concursos, como o Princípio Fundamental da Contagem, os Arranjos, as Combinações e outros; e resolvemos trinta e nove questões de concursos com muitos detalhes. No terceiro capítulo, tratamos de alguns tópicos importantes, mas que possuem um caráter mais técnico, entre eles, o Binômio de Newton, o Princípio do Terceiro Excluído, Princípio da Casa dos Pombos e outros; e resolvemos vinte e seis questões extraídas de livros de ensino médio e superior. Finalmente, no quarto e último capítulo, disponibilizamos uma lista de noventa questões retiradas de provas de concursos públicos de diversas bancas, com gabarito ao final, as quais englobam os tópicos mais essenciais abordados nos dois primeiros capítulos, para que o leitor possa treinar o que aprendeu.

2 FUNDAMENTOS BÁSICOS DE COMBINATÓRIA

O interesse por questões relacionadas à combinatória existe desde a antiguidade. Há evidências de que povos indianos e islâmicos já lidavam com problemas de combinações alguns séculos antes da Era Cristã. Segundo Katz (2010) em *História da Matemática*, não há justificativas e muito menos provas, mas é possível que os textos mais antigos sobre combinatória tenham surgido na Índia. Inclusive, há indícios de que o tratado médico de Sushruta teria sido escrito no século sexto antes de Cristo, e neste se considera que é possível fazer 63 combinações considerando-se seis gostos diferentes - amargo, azedo, salgado, adstringente, doce e picante - se forem tomados um de cada vez, dois de cada vez, três de cada vez, e assim sucessivamente. Ainda conforme Katz, numa obra também daquele século, de Varahamihira, este considera que "se uma quantidade de 16 substâncias se varia de quatro formas diferentes, o resultado será 1820".

Atualmente a combinatória consiste em um conjunto de técnicas e procedimentos úteis para se efetuar operações de contagem, cujo objetivo é desenvolver métodos de agrupamento dos elementos de um dado conjunto finito de maneira eficiente. Os *arranjos*, as *permutações* e as *combinações* são os principais tipos de agrupamento. Mais formalmente, ela corresponde ao estudo das estruturas e relações discretas ou finitas. De acordo com Iezzi et al. (2018), são característicos da combinatória os problemas do tipo: calcular o total de formas distintas de dez pessoas se posicionarem lado a lado numa fila, saber a quantidade de placas de automóveis que podem ser produzidas sem se repetir letras nem números, contar quantos resultados de seis dezenas podem aparecer num sorteio da Mega-Sena, etc.

De acordo com Morgado et al. (1991), os problemas mais frequentes em combinatória são *contar* ou *demonstrar existência* de subconjuntos compostos por elementos de um conjunto finito que satisfazem certas condições. Ele também considera que os problemas de combinatória exigem do sujeito a postura de saber se colocar no lugar da pessoa que executará a ação pedida; que, caso haja restrições em um dado problema, estas devem ser enfrentadas em primeiro lugar; e que, por vezes, é interessante dividir o problema em casos mais simples, para atender às exigências das eventuais restrições.

A combinatória abordada neste capítulo e em quase todo o restante do texto é essencialmente derivada de um princípio básico, chamado de *Princípio Fundamental da Contagem* ou *Princípio Multiplicativo*. Esse princípio serve de "alicerce" para a construção de processos formais em combinatória e é também a base para obtenção de fórmulas e soluções de quase todos os tipos de problemas combinatórios abordados nas escolas.

2.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Na maioria das vezes é interessante iniciar o estudo de um tópico qualquer de combinatória por meio de um problema motivador, o qual servirá de padrão para se introduzir a teoria correspondente. Então considere o seguinte problema:

Problema 1 *Há quatro estradas ligando as cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantas maneiras distintas pode-se ir de A a C, passando por B?*

Solução: Sejam l_1, l_2, l_3, l_4 as estradas que ligam as cidades A e B e sejam t_1, t_2, t_3 as estradas que ligam as cidades B e C. Para ir de A a C, passando por B, temos que caminhar por uma estrada l_i e em seguida tomar uma estrada t_j, então todas as possibilidades podem ser representadas como segue

$$\begin{array}{ccc} (l_1,t_1), & (l_1,t_2), & (l_1,t_3); \\ (l_2,t_1), & (l_2,t_2), & (l_2,t_3); \\ (l_3,t_1), & (l_3,t_2), & (l_3,t_3); \\ (l_4,t_1), & (l_4,t_2), & (l_4,t_3). \end{array}$$

Observe que são formados 4 grupos de 3, e, portanto, o total de possibilidades pode ser obtido fazendo $4 \cdot 3 = 12$. Logo, são 12 caminhos possíveis.

◇

Vimos, nesse exemplo, que tínhamos duas decisões a tomar, em que a primeira delas era escolher uma das estradas que ligam as cidades A e B, a qual poderia ser tomada de quatro modos; e a segunda, era escolher umas das estradas que ligam as cidades B e C, que poderia ser tomada de três modos. Ao se tomar as duas decisões simultaneamente, o número de caminhos possíveis era dado pelo produto $4 \cdot 3 = 12$. Perceba que esta situação pode ser generalizada para um número qualquer de decisões, cada uma das quais podendo apresentar qualquer número de possibilidades a serem escolhidas. Dessa ideia resulta o *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*[1] ou *Princípio Multiplicativo*, que nos diz que:

Principio Fundamental da Contagem: *Se D_1, D_2,..., D_n são n decisões independentes tais que D_1 pode ser tomada de x_1 modos, D_2 pode ser tomada de x_2 modos, e assim por diante, D_n pode ser tomada de x_n modos, então o número de modos de se tomar todas as n decisões de forma simultânea é dado por $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$.*

De posse do princípio fundamental da contagem e apenas dele já podemos resolver diversos problemas de combinatória. Isso é interessante, pois ele nos dá a possibilidade de

[1]Vide a dissertação de Lima (2015), que apresenta uma abordagem específica e detalhada sobre esse princípio.

evitarmos inclusive o uso de fórmulas, por ser, por si mesmo, um método geral de resolução de problemas de contagem. Inclusive, um texto de Carvalho (2015), sobre "Métodos de Contagem e Probabilidade", traz vários problemas de contagem resolvidos exclusivamente pelo Princípio Multiplicativo.

Claro que existem problemas de contagem que necessitam de técnicas mais específicas que não derivam do princípio fundamental, e, há situações em que, somente aplicar tal princípio, tornaria a solução muito trabalhosa. Porém, nas provas de concursos e vestibulares, esse princípio é amplamente aplicável, como veremos adiante. Vide também "A Matemática do Ensino Médio - Vol. 2" de Lima et al. (2006).

Problema 2 *(VUNESP, 2011) Lançam-se, ao mesmo tempo, uma moeda e dois dados em formato de cubo (um verde e outro amarelo) e anotam-se os resultados das faces superiores, na seguinte ordem: dado verde, moeda e dado amarelo. O número total de respostas possíveis desse experimento é?*

Solução: Cada dado tem 6 faces, numeradas de 1 a 6, e a moeda tem 2 faces, que são cara e coroa. Ao lançar o dado verde, qualquer uma das 6 faces pode ficar voltada para cima, logo há 6 possibilidades. Ao lançar a moeda, há 2 possibilidades, ou ocorre cara ou ocorre coroa. Por fim, também há 6 possibilidades para ocorrer uma face no lançamento do dado amarelo. Portanto, pelo PFC, o total de possibilidades é

$$6 \cdot 2 \cdot 6 = 72.$$

◇

Problema 3 *(VUNESP, 2005) Considere a identificação das placas de veículos compostas de três letras seguidas de 4 dígitos. Sendo o alfabeto constituído de 26 letras, qual o número de placas possíveis de serem constituídas, pensando em todas as combinações possíveis de 3 letras seguidas de 4 dígitos?*

Solução: Imaginemos sete posições em linha tais que as três primeiras serão ocupadas por letras e as quatro últimas por dígitos. A primeira posição pode ser ocupada por qualquer uma das 26 letras do alfabeto dado. Para a segunda e terceira posições também são 26 possibilidades cada, já que não há restrição alguma sobre não repetir letras. O mesmo raciocínio se aplica ao preenchimento das posições dos 4 dígitos, com a ressalva de que os dígitos serão algarismos escolhidos de 0 a 9, ou seja, 10 possibilidades para cada. Assim, pelo PFC, multiplicamos todas as opções e obtemos o número de placas, isto é,

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175760000.$$

◇

Se o problema que acabamos de resolver viesse com a restrição de que as letras e os números da placa não podem se repetir, então faríamos os cálculos considerando 26 letras para ocupar a primeira posição; ocupada a primeira posição, restariam 25 para a segunda; ocupadas as duas primeiras posições, restariam 24 letras para a terceira. Seguindo de forma análoga para os algarismos, a quarta posição poderia ser ocupada por qualquer um dos 10 algarismos, restariam 9 possibilidades para a quinta, 8 para a sexta e 7 para a sétima posição. Daí, multiplicando todos os casos, teríamos $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78624000$, que é um número menor do que o resultado obtido anteriormente, como já era de se esperar. Em geral, sempre que alguma restrição é posta em um problema é natural que ocorra redução no número de possibilidades.

Problema 4 *(UNESP, 2009) Uma rede de supermercados fornece a seus clientes um cartão de crédito cuja identificação é formada por 3 letras distintas (dentre 26), seguidas de 4 algarismos distintos. Uma determinada cidade receberá os cartões que têm L como terceira letra, o último algarismo é zero e o penúltimo é 1. A quantidade total de cartões distintos oferecidos por tal rede de supermercados para essa cidade é?*

Solução: Imaginemos sete posições em linha em que as três primeiras contêm letras e as quatro últimas dígitos. Como as três primeiras posições são ocupadas por letras e a terceira posição tem que ser ocupada pela letra L, só há 1 forma de ocupar esta posição. Para ocupar a primeira posição, só não podemos colocar a letra L (já que é proibido repetir letras), então restam 25 letras para ocupar essa posição, ou seja, 25 possibilidades. E na segunda posição, só não podemos usar a letra L e nem a letra usada na primeira posição, logo restam 24 possibilidades. A sétima e a sexta posições serão dígitos ocupados, respectivamente, pelos algarismos 0 e 1, o que nos dá 1 possibilidade para cada. Na quinta posição, só não podemos utilizar o 1 nem o 0, logo restam 8 possibilidades. E para a quarta posição, não podemos usar nenhum dos algarismos já usados, assim restam 7 possibilidades. Portanto, pelo PFC, o número total de cartões é:

$$24 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 33600.$$

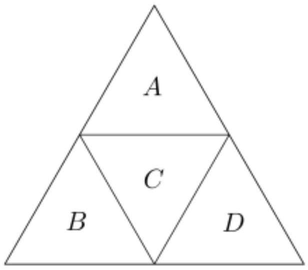
$\diamond$

Problemas envolvendo o cálculo do número de placas de veículos ou cartões telefônicos são geralmente simples e aparecem com bastante frequência nas provas de concursos. Vale a pena analisar as variações deles.

Problema 5 *(PROFMAT, ENA, 2018) Para colorir os quatro triângulos, indicados na Figura 1 por A, B, C e D, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois triângulos com um lado em comum tenham cores diferentes. Obedecendo essa regra e usando no máximo quatro cores, de quantas maneiras distintas pode-se colorir os quatro triângulos?*

Solução: Podemos iniciar colorindo o triângulo C da Figura 1 usando qualquer uma das quatro cores, logo há 4 modos distintos de colori-lo. Em seguida, como o triângulo A tem

Figura 1: Triângulo das cores



Fonte: ENA 2018.
Disponível em: `https://bit.ly/2IKWKbK`

lado comum com C, não podemos usar em A a mesma cor usada em C, logo dispomos de 3 cores para colorir A. Analogamente, temos 3 modos distintos de colorir B e 3 modos distintos de colorir D. Portanto, a resposta é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108.$$

$\diamond$

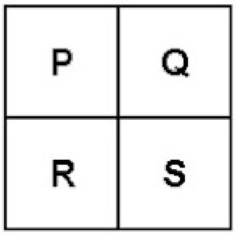
O problema que acabamos de resolver é bastante simples, porém, de repente alguém poderia se complicar com ele. Imagine que a pessoa começasse colorindo primeiro o triângulo A, logo ela teria 4 cores disponíveis; em seguida, colorisse B, neste caso ela teria também 4 opções de cores, pois A e B não têm lado em comum; em seguida, colorisse D, haveria também 4 opções, já que D não tem lado comum nem com A nem com B; quando ela, finalmente, fosse colorir C, logo notaria um problema. Porque se A, B e D tiverem, por exemplo, sido coloridos com uma mesma cor, então a pessoa dispõe ainda de 3 cores para colorir C, e o total de casos seria $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$. Em vez disso, se a pessoa tiver colorido A, B e D com cores distintas, então só resta 1 única cor para se colorir D, logo o número de casos seria $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 64$. Ora, então essa pessoa chegaria a dois resultados diferentes, o que é certamente uma contradição.

Para se evitar erros em combinatória, o mais seguro é optar por tomar as decisões mais restritas em primeiro lugar. Observe que a decisão mais restrita da situação acima é claramente a escolha da cor para o triângulo C, pois ele tem lado em comum com todos os outros. Por isso, devemos começar escolhendo a cor deste triângulo. Vide outros problemas semelhantes a este em "Temas e Problemas Elementares" de Lima et al. (2016).

Analise com cuidado o próximo problema e perceba que, por questão de simplicidade, ele foi dividido em dois itens.

Problema 6 *(UNESP, 2003) Dispomos de 4 cores distintas e temos que colorir o mapa mostrado na Figura 2 com os países P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.*

Figura 2: Mapa colorido



Fonte: Curso Objetivo.

Disponível em: `https://bit.ly/38Q3P5S`

Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:

a) os países P e S forem coloridos com cores distintas.

Solução: Suponhamos que na Figura 2 as cores são azul, vermelha, branca e preta. Se iniciarmos pintando o país P, como podemos usar qualquer uma das quatro cores, temos 4 possibilidades de pintá-lo. Se P foi pintado com a cor vermelha, então, neste caso, o país S não pode ser pintado com a mesma com de P, logo restam 3 cores ou possibilidades de pintarmos S. Para pintarmos Q, não podemos usar a cor usada em P nem a cor usada em S, ou seja, restam 2 possibilidades. E o mesmo ocorre com o país R, há 2 modos de colori-lo. São, portanto,

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$$

as formas de colorir o mapa.

◇

b) os países P e S forem coloridos com a mesma cor.

Solução: Se iniciarmos pintando o país P com qualquer uma das cores, temos 4 possibilidades. Se P foi pintado com a cor vermelha, então o país S deve ser pintado desta mesma cor, logo só há 1 possibilidade de pintarmos S. Para pintarmos o país Q, não podemos usar a cor já usada nos países P e S; como ainda dispomos de três cores, há 3 formas de colori-lo. E o mesmo ocorre com o país R, há 3 modos de colori-lo. São, portanto,

$$4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

as formas de colorir o mapa.

◇

E se o redator do problema acima tivesse simplesmente fornecido o mapa e imposto a restrição de que os países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor, daí perguntado qual o total de formas de se colorir o mapa?

Neste caso, a atitude a ser tomada pela pessoa que pretendesse resolver a situação deveria ser a de aplicar praticamente o mesmo raciocínio da situação anterior.

De fato, essa pessoa deveria dividir o problema em dois casos, calcular as possibilidades em cada caso, como feito nos itens (a) e (b), e, no final, somar os resultados. Obtendo, assim, $48 + 36 = 84$ formas de o mapa ser colorido.

Note que as colorações dos mapas do item (a) são distintas das do item (b), isto é, não é possível encontrarmos um mapa no item (a) que tenha o mesmo padrão de cores de um outro no item (b). Como os itens (a) e (b) são complementares, ou ocorre o item (a) ou ocorre o item (b), e também não há solução na interseção desses itens, podemos fazer a soma.

A ideia descrita acima pode ser posta de forma mais geral, dando origem ao que chamamos de **Princípio Aditivo**[2], cujo enunciado está apresentado abaixo:

Princípio Aditivo: *Dados os conjuntos M e N disjuntos ($M \cap N$ é vazio), com m e n elementos, respectivamente, então $M \cup N$ possui $m + n$ elementos.*

Por exemplo, suponhamos que existam quatro estradas ligando as cidades A e B, três estradas ligando as cidades B e D; 5 ligando as cidades A e C, e 2 ligando C e D. Queremos saber de quantas maneiras distintas pode-se ir de A a D.

Primeiro, para irmos de A até D passando por B, note que temos 4 opções de estradas que nos levam de A até B, e, estando em B, temos 3 opções de estradas para irmos até D. Logo, pelo PFC, há $4 \cdot 3 = 12$ estradas possíveis.

Segundo, para irmos de A até D passando por C, veja que temos 5 opções de estradas que nos levam de A até C, e, estando em C, temos 2 opções de estradas para irmos até D. Logo, pelo PFC, há $5 \cdot 2 = 10$ estradas possíveis.

Agora, ir de A até D passando por B é completamente diferente de ir de A até D passando por C, e, neste caso, o princípio aditivo se aplica perfeitamente. Portanto, há $12 + 10 = 22$ formas distintas de irmos de A até D.

Problema 7 *(CONPASS, 2017) Considere os algarismos de 0 a 9. A quantidade de números naturais pares com quatro algarismos distintos é?*

Solução 1: Inicialmente vamos dividir esses números pares em dois grupos, a saber, os que *terminam em 0* e os que *terminam em 2, 4, 6 ou 8*. Começamos o preenchimento pelo quarto dígito. Começando com os números que terminam em 0, há apenas 1 possibilidade de escolha do algarismo que ocupa o quarto dígito (que tem que ser o 0). Como os algarismos precisam ser distintos, o terceiro dígito pode ser ocupado por qualquer algarismo exceto o 0, logo há 9 possibilidades. O segundo dígito só não pode ser os algarismos 0 nem o que foi usado no terceiro dígito, logo há 8 possibilidades. O primeiro dígito só não pode ser ocupado pelos algarismos 0, nem os já usados no segundo e terceiro dígitos, logo restam 7 possibilidades. Assim, a quantidade de pares terminados em 0 é

[2]O Princípio Aditivo, tal como apresentado aqui, está enunciado em Morgado et al. (1991).

$$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 = 504.$$

Considerando agora os números que terminam em 2, 4, 6 ou 8; há 4 modos de escolhermos o algarismo do quarto dígito. Para o primeiro dígito, só não podemos escolher o algarismo 0 e nem o já usado no quarto dígito, logo temos 8 possibilidades. O segundo dígito só não pode ser ocupado pelos algarismos já usados no primeiro e quarto dígitos, logo restam 8 possibilidades. No terceiro dígito só não podem aparecer os algarismos usados no primeiro, segundo e quarto dígitos, temos 7 possibilidades. Assim, a quantidade de pares terminados em 2, 4, 6 ou 8 é

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792.$$

O total de números pares pedido no problema é a soma da quantidade dos números terminados em 0 com a quantidade dos números terminados em 2, 4, 6 ou 8. Portanto,

$$504 + 1792 = 2296.$$

$\diamond$

Perceba que começamos o problema o dividindo em dois casos, e isso foi importante pois, do contrário, teríamos nos deparado com uma complicação. Se não dividirmos em casos, claro que para que um número seja par basta que ele termine com 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, são cinco possibilidades de escolha do quarto dígito. Porém, quando vamos escolher o primeiro dígito, o qual possui a restrição de não poder ser 0, ocorre que se tivermos usado o 0 no quarto dígito, então restarão nove possibilidades de escolha para o primeiro dígito, ou seja, ele pode ser qualquer algarismo exceto o 0; mas, se não tivermos usado o 0 no quarto dígito, então temos oito possibilidades para o primeiro dígito, já que ele não pode ser o zero nem pode ser o mesmo algarismo usado no quarto dígito. Assim, chegamos a uma espécie de contradição ou impasse, isto é, uma vez escolhido o quarto dígito, não sabemos se são 8 ou se são 9 as possibilidades de escolha para o primeiro dígito. Quando dividimos o problema em casos, essa dificuldade deixa de existir.

É possível resolver o mesmo problema sem termos que dividi-lo em casos, é o que faremos a seguir:

Solução 2: Vamos supor que o algarismo 0 possa aparecer em qualquer dígito, inclusive no primeiro. Como o número deve ser par, no quarto dígito pode aparecer qualquer um dos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, temos 5 possibilidades. No terceiro dígito só não podemos colocar o algarismo já usado no quarto dígito, logo temos 9 possibilidades. No segundo dígito só não podemos colocar os algarismos usados no terceiro e quarto dígitos, logo temos 8 possibilidades. No primeiro dígito só não podemos colocar os algarismos usados no segundo, terceiro e quarto dígitos, restam 7 possibilidades. O total desses números é

$$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2520.$$

A contagem acima não é a resposta final porque consideramos números com o algarismo 0 no primeiro dígito como sendo números de quatro dígitos, o que não pode ocorrer. Temos que contar quantos são esses números e em seguida descontar do total acima calculado. Para isso, note que se o 0 é o algarismo que ocupa o primeiro dígito, então há apenas 1 possibilidade de escolha para esse dígito. O quarto dígito pode então ser ocupado por qualquer um dos algarismos pares, exceto o 0, logo são 4 possibilidades. No terceiro dígito só não pode aparecer o 0 nem o algarismo já usado no quarto dígito, temos 8 possibilidades. No segundo dígito só não pode aparecer os algarismos 0 nem os usados nos terceiro e quarto dígitos, restam 7 possibilidades

$$1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 = 224.$$

Portanto, efetuando o desconto, temos

$$2520 - 224 = 2296,$$

que é o resultado já obtido anteriormente.

$\diamond$

Acabamos de ver dois métodos distintos de se resolver um mesmo problema: o primeiro deles consiste em detectar as restrições e daí subdividir o problema em casos mais simples; já o segundo, consiste em ignorar alguma das restrições implicando uma contagem excedente, e, no final, descontar o que foi contado indevidamente.

Problema 8 *(AOCP, 2013) Alberto abre sua geladeira e encontra 9 uvas, 3 maçãs, 4 bananas e 1 abacaxi. De quantos modos Alberto pode fazer sua refeição comendo pelo menos uma fruta e podendo comer até todas elas? (Não importa a ordem em que Alberto come as frutas)*

Solução: Vamos nos imaginar tentando produzir uma dessas refeições. Nessa refeição, podemos escolher colocar nenhuma uva, ou colocar 1, colocar 2, e assim por diante, colocar até 9, o que nos dá 10 possibilidades de escolha da quantidade de uvas; analogamente, podemos colocar nenhuma maçã, ou colocar 1, ou colocar 2, ou colocar 3, logo são 4 possibilidades; podemos colocar nenhuma banana, ou colocar 1, ou colocar 2, e assim por diante, até colocar 4, logo são 5 possibilidades; poderíamos colocar nenhum abacaxi, ou colocar 1, logo são 2 possibilidades. Pelo PFC, temos

$$10 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 400.$$

Mas o valor acima considera até o caso único em que uma refeição é feita sem o uso de nenhuma das frutas, o que não pode ocorrer. Assim, descontando esse caso, temos um total de $400 - 1 = 399$ refeições.

◇

O Enem geralmente preza problemas contextualizados e interessantes e, de acordo com o portal dos *Professores de Matemática*, os *números e operações*, que incluem a *combinatória*, compõe cerca de $3,4\%$ das questões desse exame. Vejamos a seguir dois problemas combinatórios extraídos do Enem. Veja também a Dissertação de Alcântara (2020), na qual o leitor encontrará vários problemas combinatórios de vestibulares resolvidos.

Problema 9 *(ENEM, 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.*
Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.
O coeficiente de melhora da alteração recomendada é?

Solução: No modelo antigo, havia 10 possibilidades para cada dígito, porque os símbolos disponíveis eram apenas os algarismos de 0 a 9. Após recomendação do especialista, surge um novo modelo de senha que considera, além dessas 10 opções, outras 52 possibilidades, que são as letras minúsculas e maiúsculas do alfabeto, e, com isso, tem-se um total de 62 símbolos, pois as letras maiúsculas são consideradas distintas das minúsculas, o que significa um acréscimo de 26 letras minúsculas e 26 maiúsculas. Como a senha é composta por seis dígitos e é permitida a repetição de símbolos, pelo princípio multiplicativo, havia 10^6 maneiras de se criar as senhas no modelo antigo, mas no novo modelo esse número passa a ser de 62^6. Portanto, a razão pedida é $\frac{62^6}{10^6}$.

◇

Problema 10 *(ENEM, 2011) O setor de Recursos Humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e em nenhum deles apareceram dígitos pares.*
Em razão disso, qual é a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913?

Solução: Cada número formado tem 5 algarismos e todos os seus dígitos são ímpares, ou seja, pertencem ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Consideremos a ordem de numeração dos

algarismos da direita para a esquerda. Listando esses números em ordem crescente, queremos saber a posição de 75913, o que equivale a contarmos quantos são os números que vêm antes dele na lista. Para isto, vamos considerar dois casos:
Caso 1 - Os números com algarismos 1, 3 ou 5 no primeiro dígito são todos menores do que o número 75913. Neste caso, o primeiro dígito pode ser escolhido de 3 modos. Escolhido o algarismo do primeiro dígito, podemos alternar os 4 algarismos restantes nos outros quatro dígitos de 4! modos. Então, com 1, 3 ou 5 no primeiro dígito são $3 \cdot 4! = 72$ números.
Caso 2 - Com exceção de 75931, os números que têm 7 como primeiro dígito e 1, 3 ou 5 como segundo dígito são todos menores ou iguais a 75913. Desse modo, podemos escolher o algarismo do primeiro dígito de 1 único modo, que será o 7; o algarismo do segundo dígito pode ser escolhido de 3 modos, que será 1, 3 ou 5; e os 3 algarismos restantes podem alternar-se entre si formando os outros três dígitos de 3! modos. Assim, temos $1 \cdot 3 \cdot 3! = 18$ números com o 7 no primeiro dígito e 1, 3, ou 5 no segundo dígito. Excluindo o número 75931, restam $18 - 1 = 17$ números.

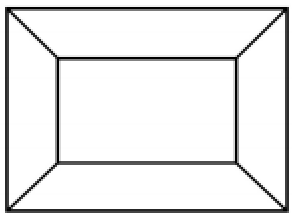
Portanto, o número 75913 está localizado na posição $72 + 17 = 89$ da lista.

◇

Apesar de o problema acima não ser tão difícil quanto o seu enunciado sugere, é preciso que se tenha bastante cuidado com esse tipo de situação, porque as contagens feitas nos dois passos da solução, se feitas rapidamente, como é natural de acontecer em provas do Enem, por exemplo, induzem ao erro.

Problema 11 *(PROFMAT, ENA, 2014) Cada uma das cinco regiões da figura deve ser pintada com uma só cor, escolhida entre verde, amarelo, azul e branco. De quantas maneiras distintas podemos colorir a Figura 3, de modo que regiões adjacentes não fiquem com a mesma cor?*

Figura 3: Regiões adjacentes

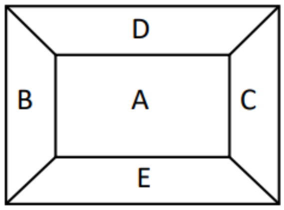


Fonte: ENA 2014.

Disponível em: `https://bit.ly/2IGk4Yr`

Solução: Na Figura 4, as 5 regiões foram denotadas pelas letras A, B, C, D e E. Como cada região deve ser pintada com uma só cor e, além disso, duas regiões adjacentes quaisquer não podem receber a mesma cor, então uma maneira de colorir a figura é escolher em primeiro lugar a cor da região A, que pode ser qualquer umas das 4 cores. Em seguida, dividimos o problema em dois casos:

Figura 4: Regiões A, B, C, D, E



Fonte: ENA 2014.

Disponível em: `https://bit.ly/2IGk4Yr`

Caso 1 - *As regiões B e C têm cores distintas* - Neste caso, dispomos de 4 cores para pintarmos a região A, 3 cores para a região B, 2 cores para a região C. Feito isso, resta apenas 1 das cores com a qual iremos pintar as regiões não adjacentes D e E. Daí, pelo PFC, o total de modos diferentes de pintarmos a figura é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$;

Caso 2 - *As regiões B e C têm cores iguais* - Neste caso, dispomos de 4 cores para pintarmos a região A; 3 cores para B; 1 cor para a região C, já que ela tem a mesma cor de B; 2 cores para pintarmos a região D e, finalmente, 2 para a região E. Daí, o total de formas distintas de colorirmos a figura é $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Destacamos que nenhuma das 24 regiões do *Caso 1* recebe o mesmo padrão de cores de qualquer das 48 regiões do *Caso 2*. Nesta situação dizemos que os *Caso 1* e *2* são independentes, e, quando ocorre a independência de eventos em combinatória, podemos efetuar a soma direta desses eventos, pelo princípio aditivo. Logo, $24 + 48 = 72$ é o total de formas distintas de pintarmos a figura.

$\diamond$

2.2 Permutações simples

Considere que tenhamos n *objetos* distintos e precisamos distribuí-los em exatamente n *posições* em forma de fila. De quantas formas distintas podemos distribuir esses n *objetos* nas n *posições*?

Para respondermos à pergunta acima é importante destacar que todos os elementos são utilizados, isto é, são dados n objetos (elementos) e n lugares (posições) para a alocação desses objetos.

Este problema, cuja solução resulta diretamente do *Princípio Fundamental da Contagem*, é tão frequente em análise combinatória que damos um nome especial para ele, *Problema das Permutações Simples*, e denotamos a sua resposta por P_n.

Suponhamos que existam n pessoas e n cadeiras. Imaginemos uma fila composta pelas n cadeiras, nas quais as n pessoas irão se sentar. Daí, a primeira pessoa a sentar tem disponíveis as n cadeiras, visto que todas as cadeiras estão inicialmente desocupadas; a segunda pessoa, terá disponíveis $n-1$ cadeiras, dado que uma das cadeiras já está ocupada pela primeira pessoa; a terceira, terá disponíveis $n-2$ cadeiras, pois duas cadeiras já estão ocupadas; e assim por diante, a penúltima pessoa terá disponível apenas 2 cadeiras; e, a última, terá à disposição 1 cadeira apenas.

A ordem em que essas pessoas se sentam é importante, e se aplicarmos o *Princípio Multiplicativo*, segue que o número de filas que podemos formar é dado por

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

O produto acima pode escrito como $n!$, que se chama *fatorial de n*, isto é

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Para finalizar, chamando de P_n o produto acima, temos que

$$P_n = n!$$

que é chamado de *permutação de n*, onde n corresponde ao número de pessoas ou objetos quaisquer, todos distintos. Por convenção, $0! = 1$.

Observe que em problemas de permutação simples é sempre possível imaginarmos n objetos distintos dados, todos enfileirados nas n posições disponíveis. Daí, o total de ordenamentos distintos com que esses objetos podem ocupar as posições é o que nos interessa saber, por isso se diz que a ordem dos objetos é importante. A seguir, resolveremos alguns problemas envolvendo a aplicação desse conceito. Veja também Benevides (2016), para maiores detalhes sobre o fatorial de um número e permutações simples.

Problema 12 *João, Maria, Edgar, Rute e Jorge chegaram ao mesmo tempo em uma agência bancária que possui apenas um atendente. De quantas maneiras podemos formar uma fila entre eles, determinando assim a ordem em que eles serão atendidos?*

Solução 1: Para fixar as ideias, note que precisaremos fazer cinco escolhas para organizar a fila. De fato, devemos escolher quem será a primeira, a segunda, a terceira, a quarta e a quinta pessoa da fila. Podemos tomar essas decisões uma a uma, na ordem indicada. Vejamos: o primeiro da fila pode ser qualquer uma das cinco pessoas, logo há 5 possibilidades para a escolha deste. O segundo da fila deve ser alguém diferente do primeiro (que já foi escolhido), e, neste caso, há 4 possibilidades para sua escolha. O terceiro deve ser diferente dos dois primeiros, de forma que há 3 candidatos para essa posição. O quarto deve ser diferente dos três primeiros, logo, há 2 possibilidades para sua escolha. Finalmente, tendo escolhido os quatro primeiros, resta apenas uma pessoa, e, assim, há apenas 1 maneira de escolhermos o quinto da fila. Pelo PFC, o número de maneiras de formar a fila é igual a

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

$\diamond$

Solução 2: Note que a aplicação do conceito de permutação que acabamos de introduzir encurta sobremaneira a solução do problema. Pois, poderíamos ter simplesmente observado que, pelo contexto, estamos diante de um problema de permutação simples de 5 objetos distintos (pessoas), e da mesma forma teríamos

$$P_5 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4) = 5! = 120$$

como solução.

$\diamond$

Problema 13 *Considere a palavra ESTUDO. O número de anagramas que podem ser formados com as letras desta palavra de tal forma que as letras T e U fiquem juntas, nessa ordem, é igual a?*

Solução: Anagramas são rearranjos das letras de uma palavra ou frase, originando novas palavras ou frases com ou sem sentido. Queremos saber quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESTUDO. Ora, como as letras T e U precisam necessariamente ficar juntas, vamos imaginar que elas foram colocadas dentro de uma caixa. Agora vejamos a caixa como uma só letra, e seja Γ essa letra. Então Γ irá permutar conjuntamente com as outras 4 letras, ou seja, vamos fazer permutação de E, S, D, O, Γ. Ora, 5 letras distintas permutam-se de 5! modos. Dentro da caixa as letras T e U precisam ficar nesta ordem, há 1! possibilidade. Portanto, pelo *Princípio Multiplicativo*, a resposta é:

$$5! \cdot 1! = 120.$$

$\diamond$

Problemas envolvendo diretamente o cálculo de anagramas são geralmente artificiais, mas devemos estar atentos a eles porque às vezes surgem situações delicadas em combinatória que se tornam mais simples se as modelarmos na linguagem de anagramas.

Problema 14 *(CETREDE, 2015) De quantas maneiras 10 clientes que estão no caixa podem se posicionar na fila de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?*

Solução: Como as mulheres precisam necessariamente ficar juntas, vamos imaginar que elas foram colocadas alinhadas dentro de uma caixa. Agora vejamos a caixa como um só objeto que irá ser permutado conjuntamente com outros objetos, que são os homens; logo temos um total de 7 objetos distintos, que permutam-se de 7! modos. Note também que as 4 mulheres podem ser permutadas, dentro da caixa, de 4! modos, e cada nova configuração delas gera uma fila distinta. Assim, temos que

$$7! \cdot 4! = 120960$$

é a resposta.

◇

Problema 15 *(FATEC, 2016) Uma pessoa dispõe de 4 discos diferentes de MPB, 4 discos diferentes de rock e 2 discos diferentes de música clássica. O número de modos distintos como essa pessoa pode organizá-los em uma estante, de tal forma que discos do mesmo gênero estejam sempre juntos e os de rock sempre na mesma ordem, é?*

Solução: São 4 discos de MPB os quais desejamos que fiquem sempre juntos, formando um bloco, logo há 4! maneiras de organizá-los nesse bloco. São, também, 4 de Rock, porém, desejamos que eles fiquem sempre na mesma ordem, então existe somente 1! maneira de organizá-los. Temos, ainda, 2 de música clássica, os que desejamos que fiquem sempre juntos, logo há 2! maneiras de organizá-los. Como são 3 categorias de discos distintas, então elas podem ser permutadas entre si de 3! modos. Pelo PFC, tem-se

$$(4! \cdot 1! \cdot 2!) \cdot 3! = (24 \cdot 1 \cdot 2) \cdot 6 = 288$$

formas de organizar esses discos na estante.

◇

Problema 16 *(ENEM, 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?*

Solução: O cliente consegue alugar os 16 filmes que são lançamentos em 8 locações, pois ele pode alugar apenas 2 filmes por vez. Nenhuma das 8 locações conterá dois filmes do mesmo gênero, então em cada uma delas deve haver um e somente um filme de ação. Começando pelo filme de ação, pode ser escolhido qualquer um dos oito filmes para a primeira locação, logo são 8 possibilidades; para a segunda, restam 7 possibilidades; e assim por diante, até a última locação para a qual resta apenas um filme, 1 possibilidade; assim, ele pode escolher um filme de ação para cada uma das 8 locações de $8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 =$

$8!$. Agora ele precisa alugar os filmes de comédia, uma vez que os filmes desse gênero devem ser alugados nas primeiras locações. A situação é análoga à anterior, ou seja, os cinco filmes de comédia ocupam as primeiras cinco locações de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ formas. Finalmente, ele deve alugar os 3 filmes de drama, nas três últimas locações, o que pode ser feito de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$. Portanto, o total de maneiras distintas do cliente alugar todos os filmes é $8! \cdot 5! \cdot 3!$.

◇

2.3 Arranjos simples

Dados n objetos distintos, de quantas maneiras podemos distribuir uma quantidade p desses objetos em uma fila contendo p posições?

Estamos querendo saber quantas filas de p objetos podemos montar ao tomarmos p dentre um total de n objetos dados. Vale ressaltar que a ordem com que esses objetos são dispostos nas suas respectivas posições é importante. Chamamos esse problema de *arranjos simples* e denotamos sua resposta por $A_{n,p}$.

Para buscarmos uma resposta ao problema apresentado acima, podemos começar raciocinando que temos um total de n objetos e destes queremos selecionar p para dispô-los em p lugares, que inicialmente estão vazios. Daí, o primeiro lugar pode ser ocupado por qualquer um dos n objetos dados, logo são n maneiras distintas de ocuparmos a primeira posição. Uma vez ocupado o primeiro lugar, restam $(n-1)$ objetos e podemos escolher qualquer um deles para ocupar qualquer um dos $(p-1)$ lugares que ainda estão vazios, logo existem $(n-1)$ maneiras distintas de ocuparmos a segunda posição. Seguindo esse raciocínio, a p-ésima posição pode ser ocupada de $(n-(p-1))$ maneiras distintas.

Ora, pelo Princípio Multiplicativo, o total de maneiras distintas de se ocupar as p posições é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(p-1)).$$

Assim, obtemos o número de formas de escolhermos p objetos para ocupar p posições, sendo esses tomados de um grupo de n objetos dados, e esse número representa o total de arranjos simples.

Denotando por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n objetos tomados p a p, podemos escrever

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(p-1)).$$

Além disso, se multiplicarmos e dividirmos o lado direito por $(n-p)!$, segue que

$$A_{n,p} = \frac{[(n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(p-1))] \cdot (n-p)!}{(n-p)!}.$$

ou ainda,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!},$$

que é a solução do nosso problema.

Podemos pensar nos arranjos como sendo permutações incompletas, já que agora temos a alternância de p objetos distintos em n posições, onde $p < n$, restando locais vazios pós alocação dos objetos. Neste caso, queremos saber quantas são as filas de p objetos que podemos montar simplesmente mudando a ordem desses objetos nas n posições; ou seja, a ordem dos objetos na fila é, como nas permutações, o que nos interessa. Os problemas a seguir são aplicações dos arranjos simples.

Problema 17 *(CETREDE, 2015) Ana, Camila, Bruna, Lia, Julia e Fernanda gostariam de dançar com Pedro. Ele queria escolher uma para dançar pagode e outra para dançar forró. Qual a quantidade de escolhas distintas que ele poderia fazer?*

Solução 1: Veja que a ordem com que Pedro escolhe as moças é importante, então trata-se de um problema de arranjo simples. São 6 moças, estas devem ocupar as 2 posições (dançar pagode ou forró), logo queremos saber quanto vale $A_{6,2}$, isto é,

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30,$$

então, ele pode fazer 30 escolhas.

◇

Vejamos uma outra solução para o problema anterior utilizando o princípio fundamental da contagem.

Solução 2: Note que a primeira pessoa a ocupar um dos postos pode ser escolhida de 6 modos; escolhida a primeira, a segunda moça pode ser escolhida de 5. Então, podemos obter a solução pelo PFC, isto é, $6 \cdot 5 = 30$, que é a resposta obtida anteriormente.

◇

Problema 18 *(PROFMAT, ENA, 2019) Em um estacionamento há 5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas é possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas*

Solução 1: O primeiro carro pode ser estacionado em qualquer uma das cinco vagas disponíveis para carros, logo temos 5 possibilidades de escolha. Estacionado o primeiro carro, restam quatro vagas livres, logo há 4 possibilidades de escolha para o segundo. Estacionados os dois primeiros carros, restam três vagas livres, logo são 3 possibilidades de escolha para o terceiro. Assim, pelo PFC, o número de possibilidades para o estacionamento dos carros é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Analogamente, são $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ as possibilidades de estacionamento das motos. Para cada uma das 60 possibilidades de estacionamento dos carros tem-se 840 escolhas para o estacionamento das motos.

Portanto, são $60 \cdot 840 = 50400$ o total de possibilidades para estacionarmos os carros e as motos.

$\diamond$

Utilizando a fórmula dos arranjos, temos outra forma ainda mais simples de resolver o problema.

Solução 2: Começamos organizando os 3 carros nas 5 posições disponíveis, o número de modos de se fazer isso é

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$$

Agora podemos organizar as 4 motos nas 7 posições que restaram, e existe um total de

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$$

modos de se fazer isso.

Portanto, o total de modos de tomarmos as duas decisões simultaneamente é

$$60 \cdot 840 = 50400,$$

como já sabíamos.

$\diamond$

2.4 Combinações simples

De quantos modos podemos escolher p objetos dentre um total de n objetos distintos dados?

Considere que alguém possui uma lista contendo n objetos e precisa selecionar um grupo com p objetos dessa lista. Queremos saber de quantas formas diferentes se pode fazer essa seleção. Note que resolver esse problema equivale a calcular o número de arranjos simples de n objetos, porém sem que seja levada em conta a ordem com que esses objetos são escolhidos, isto é, a ordem *não* é importante neste caso. Esse problema é denominada *combinação simples*[3] e sua solução é denotada por $C_{n,p}$.

Sempre que tivermos n elementos dos quais nos interessa escolher uma quantidade p dentre eles, sendo que a ordem com que as escolhas são feitas *não* importa, estaremos diante de um problema de combinação de n elementos tomados de p a p.

[3]Veja também "Arranjos e Combinações Simples" de Benevides (2016).

Imaginemos então as p posições que serão ocupadas por p objetos selecionados aleatoriamente entre os n dados. Ora, o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p para isso acontecer é, como vimos, dado por $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Mas lembre que essa contagem considera a ordem, isto é, as permutações dos objetos colocados nas p posições.

Como queremos apenas escolher p objetos dentre os n, sem nos importar com a ordem, então basta notarmos que cada grupo de p objetos postos nas p posições pode ser permutado de $p!$ modos. Sendo assim, se dividirmos $A_{n,p}$ por $p!$, corrigimos a contagem feita acima e obtemos o número de combinações simples dos n elementos tomados p a p, denotado por $C_{n,p}$, isto é,

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Além disso, quando selecionamos p dentre n elementos dados, restam $n-p$ elementos não selecionados. É interessante perceber que

$$\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot (n-(n-p))!},$$

ou seja,

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}.$$

Isso significa que, selecionar p elementos dentre n elementos dados equivale a escolher os $n-p$ elementos que não foram selecionados. O número $C_{n,n-p}$ será chamado de combinação complementar de $C_{n,p}$.

A diferença entre a *combinação* e o *arranjo* é que nas combinações a ordem segundo a qual os objetos de um grupo podem alternar-se entre si não importa, já nos arranjos a ordem dos objetos dentro do grupo é importante. Podemos pensar que uma combinação equivale a um conjunto e um arranjo corresponde a uma sequência. Em combinações o que se quer é escolher p objetos dentre um total de n, obviamente com $p \leq n$, ou seja, a ideia é montar grupos de p objetos extraídos dos n disponíveis. Neste caso, não interessa qual objeto será selecionado primeiro ou qual será o último, o que importa é quantos deles iremos escolher. Já no caso dos arranjos, a ideia é formar filas, então além de escolher os objetos da fila, é preciso saber em quais posições eles serão colocados na fila.

Os próximos problemas nos mostram como podemos aplicar o conceito de combinação simples na prática.

Problema 19 *Uma microempresa irá escolher, dentre seus 6 funcionários, apenas 2 para representá-la junto ao Ministério Público. Quantas duplas podem ser formadas?*

Solução 1: Não interessa a ordem com que a empresa escolherá os funcionários, logo temos um problema de combinação simples. São 6 funcionários e queremos escolher 2, o número de modos distintos de se fazer isso é

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = 15.$$

◇

Solução 2: Podemos resolver o mesmo problema usando a fórmula dos arranjos. Ou seja, calculamos primeiro o total de arranjos de 2 pessoas que podemos formar, escolhendo estas dentre as 6 pessoas dadas; ou seja, calculamos $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ e já que a ordem não importa, como em cada escolha as duas pessoas podem permutar-se entre si, devemos dividir o resultado obtido por 2!, obtendo como resposta $\frac{A_{6,2}}{2!} = \frac{30}{2} = 15$.

◇

Solução 3: Podemos ainda resolver o problema aplicando o princípio multiplicativo. Para isto, note que há 6 modos de escolhermos o primeiro funcionário; escolhido o primeiro, há 5 modos de escolhermos o segundo. Daí, pelo princípio multiplicativo, temos $6 \cdot 5 = 30$. Porém, essa contagem corresponde ao dobro do valor correto, porque considera a ordem das escolhas dos funcionários. Para descontarmos as permutações dos funcionários escolhidos, dividimos o resultado obtido por $2 \cdot 1 = 2$ e obtemos $\frac{30}{2} = 15$.

◇

Problema 20 *(CETREDE, 2016) Uma empresa tem 5 mestres de obra e 10 pedreiros. Quantas equipes com 1 mestre de obra e 4 pedreiros podem ser formadas?*

Solução: São 5 mestres de obra dos quais queremos escolher 1, o que pode ser feito de $C_{5,1}$ modos; temos 10 pedreiros e precisamos escolher 4 deles, o que pode ser feito de $C_{10,4}$. Pelo princípio multiplicativo, o número de modos de escolher o mestre de obra e o pedreiro simultaneamente é

$$C_{5,1} \cdot C_{10,4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 1050.$$

Logo, são 1050 escolhas possíveis.

◇

Problema 21 *(IBADE, 2017) Para uma atividade lúdica, o professor Márcio dividiu a sua turma de 12 alunos em 3 grupos. De quantas formas distintas, de acordo com a divisão feita em 3 grupos, pelo professor, estes grupos poderiam estar organizados?*

Solução: Suponha que os grupos formados contenham 4 alunos cada. Para formar o primeiro grupo, devemos escolher 4 dentre os 12 alunos citados no problema, isto é, $C_{12,4}$; para formar o segundo grupo, devemos escolher 4 alunos dentre os 8 restantes, logo $C_{8,4}$; e os 4 alunos restantes formam o terceiro grupo, ou seja, $C_{4,4}$. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, temos

$$C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}.$$

Perceba que, no cálculo acima, estamos levando em consideração inclusive a ordem de escolha dos grupos, o que não está de acordo com o enunciado. Veja que 3 grupos podem permutar-se entre si de $3! = 6$ modos, o que implica que para cada escolha de 3 grupos temos 6 cópias idênticas da mesma escolha. Logo, para evitarmos essa contagem excessiva, devemos dividir a expressão acima por $3!$, isto é

$$\frac{C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}}{3!}.$$

Portanto, a quantidade de formas distintas que esses grupos poderiam estar organizados é

$$\frac{C_{12,4} \cdot C_{8,4} \cdot C_{4,4}}{3!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12!}{(12-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{(4-4)! \cdot 4!} = 5775.$$

◇

Problema 22 *(CESPE, 2017) Em 2015, na cidade de São Luís, 1560 docentes atuavam nas escolas de ensino fundamental. Entre eles, havia 450 Marias e 150 Pedros. Esses 1560 docentes eram distribuídos, para cada escola, de forma aleatória. Nessa situação, apresente a expressão que permite determinar a quantidade de possíveis escolhas para a formação do primeiro grupo de 20 professores de maneira que, nesse grupo, não haja nenhuma Maria e nenhum Pedro.*

Solução: Em primeiro lugar, subtraímos o total de Marias e de Pedros do grupo, restando apenas os professores que não são Marias ou Pedros, isto é, $1560 - 450 - 150 = 960$. Agora temos 960 professores dos quais precisamos escolher 20, portanto, trata-se de um problema de combinação. A resposta do problema é

$$\frac{960!}{20! \cdot (960-20)!} = \frac{960!}{20! \cdot 940!}.$$

◇

Problema 23 *(PROFMAT, ENA, 2016) Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meio-campistas e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio-campistas e 2 atacantes?*

Solução: Temos 2 opções de escolha para o goleiro; temos que escolher 4 dentre os 6 zagueiros disponíveis, logo são $C_{6,4} = 15$ opções; temos que escolher 4 dentre os 7 meios-campistas, logo são $C_{7,4} = 35$ opções; e, finalmente, para a escolha dos atacantes temos $C_{4,2} = 6$ opções. Portanto, pelo PFC, o total de modos de escalarmos a seleção é igual a

$$2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 6 = 6300.$$

◇

Problema 24 *(PROFMAT, ENA, 2015) Uma escola de educação básica possui 12 professores de matemática, sendo que 8 atuam exclusivamente no Ensino Fundamental e 4 atuam exclusivamente no Ensino Médio. Para a organização da 1ª Olimpíada de Matemática da escola, será formada uma comissão de 5 professores de matemática, de modo que pelo menos um deles seja professor do Ensino Médio. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada?*

Solução: Inicialmente, observe que ao todo são 15 professores, se quisermos formar comissões de 5 professores sem distinção do nível de atuação, o total de possibilidades é $C_{12,5} = 792$. Além disso, temos 8 professores somente no Ensino Fundamental, se quisermos formar as comissões de 5 professores pondo apenas professores do Ensino Fundamental, o total de possibilidades é $C_{8,5} = 56$. Porém, queremos as comissões que tenham ao menos um professor do Ensino Médio, logo basta calcularmos a diferença $C_{12,5} - C_{8,5} = 792 - 56 = 736$, pois, com isso, eliminamos o total de comissões que têm apenas professores do Ensino Fundamental. Portanto, são 736 modos de formarmos a comissão pedida no enunciado.

◇

2.5 Permutações com elementos repetidos

Suponha que queiramos contar os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra BATATA. Note que existem 3 letras A e 2 letras T repetidas na palavra. Começamos imaginando seis barras horizontais desenhadas num quadro negro, cada uma das quais representando uma posição, nas quais colocaremos as 6 letras que formam a tal palavra. Iniciamos escolhendo três dessas seis posições para colocarmos as letras A. Isso pode ser feito de $C_{6,3}$ formas distintas. Em seguida, das três posições vazias que restam, precisamos escolher duas delas para colocarmos as letras T. O que pode ser feito de $C_{3,2}$ formas distintas. Restando, depois disso, uma única posição vazia na qual devemos colocar a letra P. Há $C_{1,1}$ forma de escolhermos a posição de P. De modo que, pelo PFC, temos um total de

$$C_{6,3} \cdot C_{3,2} \cdot C_{1,1} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{1!}{(1-1)! \cdot 1!} = 20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$$

anagramas para a palavra BATATA.

A situação discutida acima pode ser generalizada. Isto é, suponha que queiramos contar o número de arranjos distintos de n elementos tais que n_i deles são iguais a a_i, com i entre 1 e t, $1 \leq t \leq n$.

A princípio, seja $L_0 = n$ o total de lugares, e suponha que escolhemos n_1 desses n lugares para colocarmos os elementos iguais a a_1. Feita a primeira escolha, restam ainda $L_1 = n - n_1$ lugares dos quais podemos escolher n_2 para colocarmos os elementos iguais a

a_2. Feita a segunda escolha, restam $L_2 = n-(n_1+n_2)$ lugares dos quais podemos escolher n_3 para colocarmos os elementos iguais a a_3. Mantendo esse raciocínio, sucessivamente, teremos

$$L_{i-1} = n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1}) = n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j$$

lugares dos quais devemos escolher n_i para colocarmos os elementos iguais a a_i, com i variando de 1 até t.

Ou seja, para cada valor de i tem-se L_{i-1} lugares dos quais podemos escolher n_i para nestes alocarmos os elementos iguais a a_i.

Ora, já sabemos que escolher n_i dentre L_{i-1} lugares disponíveis equivale à combinação de L_{i-1} tomados n_i a n_i, isto é, C_{L_{i-1},n_i}. Daí, para

- Para $i = 1$, tem-se n_1 e $L_{1-1} = n$, donde vem

$$C_{L_0,n_1} = \frac{n!}{(n-n_1)! \cdot n_1!}.$$

- Para $i = 2$, tem-se n_2 e $L_{2-1} = n - n_1$, donde vem

$$C_{L_1,n_2} = \frac{(n-n_1)!}{[n-(n_1+n_2)]! \cdot n_2!}.$$

- Para $i = 3$, tem-se n_3 e $L_{3-1} = n - (n_1 + n_2)$, donde vem

$$C_{L_2,n_3} = \frac{[n-(n_1+n_2)]!}{[n-(n_1+n_2+n_3)]! \cdot n_3!}.$$

- Sucessivamente, para $i = t$, tem-se n_t e $L_{t-1} = n - \sum_{j=1}^{t-1} n_j$, donde vem

$$C_{L_{t-1},n_t} = \frac{\left[n - \sum\limits_{j=1}^{t-1} n_j\right]!}{\left[n - \left(n_t + \sum\limits_{j=1}^{t-1} n_j\right)\right]! \cdot n_t!}.$$

Portanto, como

$$\left[n - \left(n_t + \sum_{j=1}^{t-1} n_j\right)\right]! = [n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_{t-1} + n_t)]! = 0! = 1,$$

aplicando o princípio multiplicativo e simplificando os termos iguais que aparecem simultaneamente no numerador e no denominador, temos que o número de permutações de n elementos tais que n_i deles são iguais a a_i, com $1 \leq i \leq t$, é dado por

$$C_{L_0,n_1} \cdot C_{L_1,n_2} \cdots C_{L_{t-1},n_t} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_t!}.$$

Chamando de $PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_t}$ o número de *permutações com elementos repetidos*[4], em que se tem n objetos tais que n_i deles são iguais a a_i, temos.

$$PR_{n;n_1,n_2,\ldots,n_t} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_t!}.$$

O método que acabamos de desenvolver é um bom exemplo do tipo de raciocínio que não é interessante de ser executado durante uma prova: porque, além do risco de se cometer um erro em algum dos passos, também se perderá tempo em demasia.

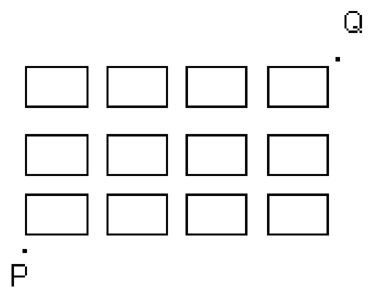
O que ocorre em permutações com elementos repetidos é que a alternância de posições entre si dentre os elementos que estão repetidos não acarreta novas configurações, ou seja, se objetos idênticos trocam de posições entre si, então teremos, no fim, a mesma configuração do início.

Se tivermos n objetos e dentre estes existirem r de um mesmo tipo (iguais), então podemos calcular o total de permutações dos n objetos e em seguida excluir desta contagem as configurações repetidas, ou seja, as configurações que se dão simplesmente pela alternância de posições entre si dos r objetos idênticos; e, neste caso, o total de permutações será dado por $\frac{n!}{r!}$. Se ocorrer de haver outros p elementos de um mesmo tipo, o total de permutações será dado por $\frac{n!}{r! \cdot p!}$. Se ocorrer de existirem mais s elementos de um mesmo tipo, então teremos $\frac{n!}{r! \cdot p! \cdot s!}$, e assim por diante.

O raciocínio anterior consiste em se tomar o total de permutações dos n objetos e sair dividindo pelo total de permutações dos objetos repetidos de cada tipo. Na sequência vamos resolver dois problemas usando essa estratégia.

Problema 25 *Um bairro é formado por 12 quarteirões dispostos segundo a Figura 5. Uma pessoa sai do ponto P e dirige-se ao ponto Q, pelo caminho mais curto, isto é, movendo-se da esquerda para a direita, ou de baixo para cima (na figura).*

Figura 5: Bairro dos 12 quarteirões



Fonte: Fórum PiR2.

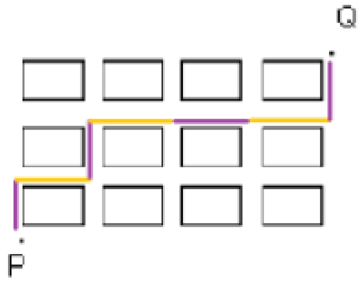
Disponível em: `https://bit.ly/36Jx9bM`

Quantos caminhos diferentes ela poderá fazer?

[4]Veja também "Permutações com Elementos Repetidos" de Benevides (2016).

Solução: Inicialmente podemos usar a figura dada no exemplo para traçar um possível caminho que a pessoa pode percorrer para ir de P a Q, obtendo assim a Figura 6.

Figura 6: Movimento no bairro



Fonte: Fórum PiR2.

Disponível em: `https://bit.ly/36Jx9bM`

Note que a pessoa precisou fazer 7 movimentos para ir de P até Q, isto é, 4 movimentos para a direita e 3 para cima. Pondo D = direita e C = cima, podemos representar o trajeto da Figura 6 da forma:

C,D,C,D,D,D,C

Agora, perceba que para ir de P até Q pelo caminho mais curto serão necessários 4 movimentos para a direita e 3 movimentos para cima. Então, para calcularmos quantos são todos os caminhos, basta sabermos quantos são os anagramas formados pelas permutações das letras da palavra CDCDDDC, que têm repetição de 3 letras C e de 4 letras D.

Se as letras da palavra CDCDDDC fossem todas distintas, como essa palavra tem 7 letras, teríamos 7! anagramas. Esse número conta todas as permutações possíveis, inclusive as das letras C com C e das letras D com D.

Ocorre que as permutações das letras C e das letras D não formam novos anagramas; de fato, geram anagramas repetidos. Note que as 3 letras C podem permutar entre si de 3! modos e as 4 letras D podem permutar entre si de 4! modos.

Podemos nos livrar dos anagramas repetidos dividindo 7! por 3! e por 4!, para descontarmos as permutações das letras C e das letras D, respectivamente. Logo, o total de anagramas é

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

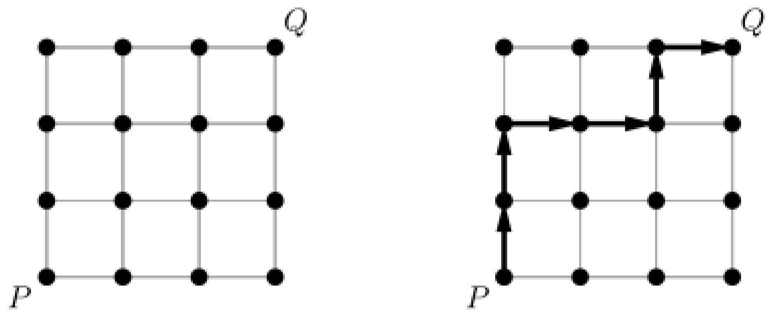
Portanto, 35 é o total de caminhos para se ir de P até Q, pelo caminho mais curto.

◇

Observação 1 *O que fizemos foi calcular o total de anagramas que podemos formar com as letras da palavra CDCDDDC, que têm repetição de 3 letras C e 4 letras D, o que também pode ser calculado pela fórmula das permutações com repetição, isto é,* $PR_{7;3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$.

Problema 26 *(PROFMAT, ENA, 2017) Um jogo é disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador A inicia no ponto P e deve chegar ao ponto Q, podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador B inicia no ponto Q e deve chegar ao ponto P sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador A. Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.*

Figura 7: Jogo da malha



Fonte: ENA 2017.

Disponível em: `https://bit.ly/32PrtvF`

Em uma partida já encerrada, o jogador A percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto Q em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador B pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto P também em 6 jogadas?

Solução: Colocando a figura sobre um sistema de eixos cartesianos, tal que o ponto P recaia sobre $(0, 0)$ e o ponto Q fique sobre $(3, 3)$, então o ponto R de coordenadas $(1, 2)$ será o único ponto de encontro na terceira jogada do jogador A e do jogador B, uma vez que a trajetória de A foi destacada na Figura 7.

Começamos calculando o total de trajetórias possíveis que tem o jogador B ao fazer o percurso de Q até P. Para isto, note que por qualquer caminho que B seguir, sempre serão necessários 3 passos na *vertical* "V", de cima para baixo, e outros 3 passos na *horizontal* "H", da direita para a esquerda. Um caminho possível seria VVHVHH, que significa sair de Q e descer dois passos seguidos, depois dar um passo para a esquerda, em seguida descer mais um passo e, finalmente, dar dois passos seguidos para a esquerda chegando ao ponto P.

Temos que o total de caminhos equivale ao número de formas de permutarmos as letras da palavra VVHVHH, isto é, o número de permutações com repetição de 6 letras em que 3 letras são iguais a V e 3 três letras são iguais a H, cuja solução é $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$.

Agora vamos calcular o total de trajetórias possíveis em que o corredor B passa obrigatoriamente pelo ponto R. Para isto, basta calcularmos o total de caminhos que B têm para ir de Q até R, ou seja, ele precisa dar um passo para baixo e dois passos para a direita, logo são $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ possibilidades. Além disso, estando B em R, o total de caminhos que ele tem para ir de R até P, isto é, dois passos para baixo e um passo para a esquerda, é dado por $\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$.

Logo, existem $3 \cdot 3 = 9$ caminhos possíveis para que o jogador B se desloque do ponto Q ao ponto P, passando pelo ponto R.

Como queremos somente os caminhos em que B não se encontrará com A, existem, portanto, $20 - 9 = 11$ caminhos.

$\diamond$

2.6 Combinações completas

Combinação completa se relaciona com o problema de encontrarmos soluções para uma equação linear. Imagine que temos um número n de objetos distintos e queremos escolher uma quantidade p desses objetos, de tal forma que cada objeto possa ser escolhido até p vezes. Seja x_i o número de vezes que o objeto i é escolhido. O total de modos de selecionarmos p dentre os n objetos dados é equivalente ao número de soluções inteiras *não-negativas* da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p.$$

Para obtermos as soluções dessa equação, vamos representar os p objetos a serem escolhidos por p barras " $|$ " e notemos também que a equação linear acima possui n variáveis, logo tem-se $n-1$ sinais de mais " $+$ " localizados entre essas variáveis. A resposta para o problema equivale ao cálculo do número de formas possíveis de se fazer um arranjo incluindo as p barras e os $n-1$ sinais de mais, isto é, um total de $p+n-1$ elementos. O que significa calcular as permutações de $p+n-1$ elementos com repetição de p barras e de $n-1$ sinais de mais. A solução do problema será dada por

$$PR_{p+n-1;n-1,p} = \frac{(p+n-1)!}{p! \cdot (n-1)!}.$$

Além disso, perceba que o lado direito da equação acima é equivalente à combinação $C_{p+n-1,p}$, em que $p+n-1$ objetos são tomados de p a p. Ou seja,

$$C_{p+n-1,p} = \frac{(p+n-1)!}{p! \cdot (n-1)!}.$$

O número $C_{p+n-1,p} = CR_{n,p}$ nos dá o total das chamadas *combinações completas (ou com repetição)* de $p+n-1$ objetos tomados p a p. Isso mostra que combinações completas nada mais são do que um caso especial de permutações com elementos repetidos, o que faz a análise de uma combinação com repetição recair num caso de permutação com repetição. Vejamos os próximos problemas.

Problema 27 *(UNIRIO, 2000) Uma pessoa quer comprar 6 empadas em uma lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes essa compra pode ser feita?*

Solução: A priori, observe que as empadas são todas idênticas, pois a troca de uma empada de palmito por uma de frango não vai acarretar nova configuração, e isso é característica de um problema de combinação completa ou combinação com repetição. Se os números de empadas de camarão, frango, legumes e palmito forem, respectivamente, C, F, L e P, e a pessoa quiser comprar 6 empadas, podemos escrever a seguinte equação

$$C + F + L + P = 6.$$

Daí, o número de soluções não-negativas da equação acima equivale à resposta ao problema enunciado na questão. Note que, as seis empadas equivalem a 6 barras ' | ' as quais devem ser permutadas conjuntamente com 3 sinais de mais ' + '. Abaixo ilustramos uma das configurações possíveis:

$$| + | | | + | | +$$

Agora, basta calcularmos o total de modos de permutarmos esses 9 objetos, dos quais 6 são barras e 3 são sinais de mais, isto é, uma permutação com repetição, cuja solução é dada por

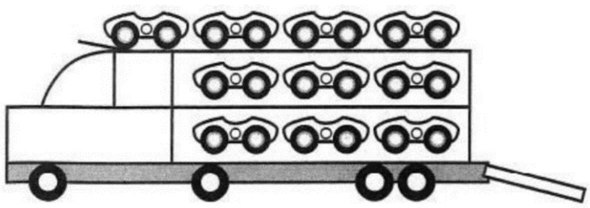
$$PR_{9;4,3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84.$$

◇

Observação 2 *Poderíamos simplesmente usar a fórmula que calcula o número de combinações completas. Bastando fazer* $p = 6$ *e* $n = 4$*, logo* $p + n - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$*, com* p *sendo o número de empadas e* n *o número de variáveis da equação* $C + F + L + P = 6$*. O que gera o mesmo resultado obtido acima, isto é,* $C_{6+3,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{(9-6)! \cdot 6!} = 84$.

Problema 28 *(ENEM, 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.*

Figura 8: Caminhão-cegonha



Fonte: ENEM 2017.

Disponível em: `https://bit.ly/3pFlrr6`

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores: amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Uma mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

Solução: Dispomos de 4 cores para pintar os 10 carrinhos, tal que se tenha pelo menos um carrinho de cada cor. Note que os carrinhos são todos iguais, logo, trata-se de um problema de combinação completa. Então suponha que existem $a+1$ carrinhos amarelos, $b+1$ brancos, $l+1$ laranja e $v+1$ verdes. Somando essas quantidades e igualando a 10, temos:

$$a+1+b+1+l+1+v+1=10,$$

ou seja,

$$a+b+l+v=6.$$

Perceba que já temos garantido que há, no mínimo, um carrinho de cada cor, estes já ocupam 4 posições no caminhão-cegonha, restando apenas 6 posições a serem ocupadas. A resposta do problema agora equivale ao cálculo do número de maneiras de organizarmos 4 carrinhos nas 6 posições restantes, considerando a repetição. Fazendo $p=6$ e $n=4$, então $p+n-1=6+4-1=9$, em que p é o número de carrinhos e n o número de variáveis da equação acima. Daí vem que $C_{n+p-1,p}=C_{9,6}$ corresponde ao número de brinquedos que a empresa poderá produzir. Assim, temos

$$C_{9,6}=\frac{9!}{(9-6)!\cdot 6!}=84.$$

◇

Observação 3 *Embora o problema que acabamos de resolver seja contextualmente diferente do anterior, o fato de eles terem a mesma equação linear os faz possuírem também a mesma solução.*

Problema 29 *(UNIRIO, 2011) Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba, pelo menos, uma bala.*

Solução: Note que o fato das 12 balas serem todas iguais é uma das características das combinações completas. Além disso, como cada criança deve receber, pelo menos, uma bala, então suponha que as crianças C_1, C_2 e C_3 recebam $b_1 + 1$, $b_2 + 1$ e $b_3 + 1$ balas, respectivamente. Assim, temos a equação

$$(b_1 + 1) + (b_2 + 1) + (b_3 + 1) = 12,$$

ou seja,

$$b_1 + b_2 + b_3 = 9.$$

A resposta do problema proposto equivale ao número de soluções não-negativas que a equação acima possui. Nessa equação, temos que o total de balas é 9, as quais representaremos por 9 barras verticais ' $|$ ', que devem permutar-se conjuntamente com 2 sinais de mais ' $+$ '. Abaixo ilustraremos uma das configurações possíveis.

$$|\,|\,|+|\,|\,|\,|+|\,|$$

Agora basta calcularmos o total de modos de permutar esses 11 objetos, dos quais 9 são barras e 2 são sinais de mais. Trata-se de uma permutação com repetição, cuja solução é

$$PR_{11;9,2} = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = 55.$$

$\diamond$

Observação 4 *Poderíamos simplesmente usar a fórmula que calcula o número de combinações completas. Bastando fazer $p = 9$ e $n = 3$, então $p + n - 1 = 9 + 3 - 1 = 11$, com p igual ao número de balas e n sendo o número de variáveis da equação $b_1 + b_2 + b_3 = 9$. Donde $C_{11,6} = \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} = 55$, chegando ao mesmo resultado.*

Problema 30 *(CESGRANRIO, 2010) Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção, era possível comprar três barras de chocolate com desconto, desde que estas fossem dos sabores ao leite, amargo, branco ou com amêndoas, repetidos ou não. Assim, um cliente que comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos, sendo n igual a?*

Solução: Sejam l, a, b e s os sabores *leite*, *amargo*, *branco*, *amêndoas*, respectivamente. Queremos comprar 3 barras de chocolate, então podemos escrever a seguinte equação

$$l + a + b + s = 3.$$

A resposta ao problema proposto equivale ao número de soluções *não-negativas* da equação acima, onde 3 equivale ao total de barras de chocolate, as quais representaremos por 3 barras verticais ‘ $|$ ’, que devem ser permutadas conjuntamente com 3 sinais de mais ‘ $+$ ’. Abaixo, ilustraremos uma das configurações possíveis

$$|+|+|+$$

Agora basta calcularmos o total de modos de permutarmos esses 6 objetos, dos quais 3 são barras e 3 são sinais de mais. Trata-se de uma permutação com repetição, cuja solução é

$$PR_{6;3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

◇

Observação 5 *Poderíamos simplesmente usar a fórmula que calcula o número de combinações completas. Bastando fazer* $p = 3$ *e* $n = 4$, *então* $p + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, *com* p *sendo o número de barras de chocolate e* n *o número de variáveis da equação* $l + a + b + s = 3$. *Logo,* $C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$.

Problema 31 *(CESGRANRIO, 2012) Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, de caramelo e de coco e pretende montar saquinhos com 13 balas cada, de modo que, em cada saquinho, haja, no mínimo, três balas de cada sabor. Um saquinho diferencia-se de outro pela quantidade de balas de cada sabor. Por exemplo, seis balas de hortelã, quatro de coco e três de caramelo compõem um saquinho diferente de outro que contenha seis balas de coco, quatro de hortelã e três de caramelo. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser montados?*

Solução: Sejam H, M e C os saquinhos com balas dos sabores *hortelã*, *caramelo* e *coco*, respectivamente. Cada saquinho tem que conter 13 balas, então podemos escrever a seguinte equação

$$H + M + C = 13.$$

Além disso, temos a restrição de que cada saquinho deve conter, pelo menos, 3 balas de cada sabor. O que nos sugere uma mudança de variável. Isto é, fazendo $H = 3 + h$, $M = 3 + m$ e $C = 3 + c$ e substituindo na equação acima, temos

$$(3 + h) + (3 + m) + (3 + c) = 13.$$

Reescrevendo,

$$h + m + c = 4.$$

A resposta do problema proposto equivale ao número de soluções não negativas da equação acima, em que 4 equivale ao total de balas que o saco deve conter, as quais representaremos por 4 barras verticais ‘ | ’, a serem permutadas conjuntamente com 2 sinais de mais ‘ + ’. Abaixo, ilustraremos uma das configurações possíveis.

$$|+||+|$$

Vamos calcular o total de modos de permutar esses 6 objetos, dos quais 4 são barras e 2 são sinais de mais. Trata-se de uma permutação com repetição, cuja solução é

$$PR_{6;4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

◇

Observação 6 *Poderíamos simplesmente usar a fórmula que calcula o número de combinações completas. Bastando fazer* $p = 4$ *e* $n = 3$*, então* $p+n-1 = 4+3-1 = 6$*, com* p *sendo o número de barras de chocolate e* n *o número de variáveis da equação* $h+m+c = 4$*. Daí,* $C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!} = 15$.

Problema 32 *Quantas são as formas possíveis de colocarmos 7 anéis idênticos nos dedos de uma das mãos? E se os anéis forem distintos?*

Solução: Se os anéis são *idênticos*, tudo o que temos que fazer é decidir quantos deles devem haver em cada dedo. Eis um problema de combinação completa, observe que a alternância das posições dos anéis não acarreta nova configuração. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as quantidades de anéis nos dedos 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Decidir quantos anéis deve haver em cada dedo equivale a procurar por todas as soluções inteiras e não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$$

na qual $p = 7$, $n - 1 = 4$ e $n + p - 1 = 11$, cuja solução é

$$C_{n+p-1,p} = C_{7+4,7} = C_{11,7} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = 330.$$

Logo, existem 330 formas de escolhermos os 7 lugares em que serão colocados os 7 anéis.

Já se os anéis forem *distintos*, além de escolhermos os lugares que eles devem ficar, o que pode ser feito de 330 formas, também temos que calcular quantas são as formas de permutarmos os 7 anéis de posição, o que pode ser feito de $7! = 5040$ modos. E, neste caso, existem

$$330 \cdot 5040 = 1663200$$

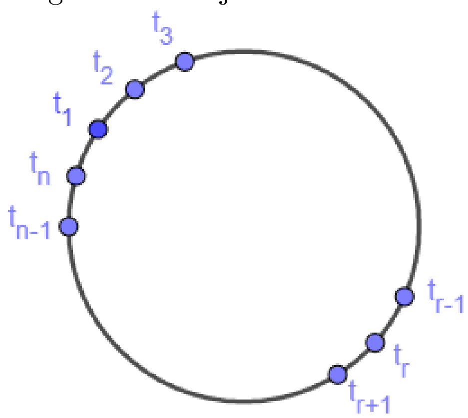
formas de executarmos a ação pedida. ◇

2.7 Permutações circulares

Permutações circulares consistem de agrupamentos de conjuntos de objetos em ordem circular. Ocorrem quando grupos de objetos distintos posicionam-se ao redor de uma circunferência. Isto é, sejam dados $t_1, t_2, ..., t_n$, n elementos distintos. Imaginemos como esses n elementos podem ser posicionados ao redor de um *círculo*, como na Figura 9. Cada uma das maneiras de distribuir tais elementos ao redor do círculo é chamada de permutação circular dos elementos $t_1, t_2, ..., t_n$. Consideramos duas distribuições que coincidem por meio de rotações como sendo a mesma.

A primeira constatação que devemos fazer é que as permutações circulares tais como $(t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$, $(t_2, t_3, ..., t_n, t_1)$,..., $(t_n, t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ são idênticas duas a duas, pelo fato de que qualquer uma delas pode ser obtida de uma das outras por meio de uma simples rotação, isso porque uma rotação muda todos os elementos de posição, porém cada elemento mantém sua posição relativa aos outros elementos que compõem a roda; já $(t_2, t_1, t_3, ..., t_n)$ é uma configuração distinta das anteriores, uma vez que, fixados os outros elementos, t_1 trocou de posição com t_2, e isso *não* pode ser obtido por uma rotação.

Figura 9: n objetos num círculo



Fonte: o autor

A segunda constatação é que com os n elementos em volta do círculo podem ser feitas n rotações, todas elas gerando uma mesma configuração. Já sabemos que n elementos permutam-se de $P_n = n!$ modos, e se esses elementos estão em volta de um círculo, cada permutação terá n cópias idênticas, isto é, que *não* representam novas configurações.

Para eliminarmos as configurações repetidas, basta dividirmos P_n por n. Logo, o número de configurações distintas será dado por

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

em que PC_n denota o número de *permutações circulares* de n elementos.

Problemas de permutações circulares raramente aparecem em provas de concurso público ou vestibulares, mas quando aparecem seguem o modelo dos problemas que veremos a seguir.

Problema 33 *De quantas formas 7 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?*

Solução 1: Inicialmente, imaginemos uma caixa na qual colocaremos João e Maria dentro. Agora vamos permutar essa caixa juntamente com as outras 5 crianças ao redor do círculo, isto é, permutação de 6 elementos. Temos um total de

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 120.$$

Porém, para cada configuração, João e Maria podem permutar de 2! modos dentro da caixa. Pelo PFC, o total de modos de organizar as crianças na brincadeira é

$$2! \cdot PC_6 = 2 \cdot 120 = 240.$$

◇

Solução 2: Podemos utilizar o PFC para resolver esse exercício de uma outra forma. Para isto, tentaremos montar essa roda pondo criança por criança em seus respectivos lugares. Começamos por colocar Maria na roda, uma das crianças da restrição. Se vamos escolher Maria em primeiro lugar, há apenas 1 modo de escolher. Note que qualquer lugar em que ela for colocada será indiferente, já que os lugares não estão inicialmente marcados. Depois que Maria ocupa um lugar na roda, os outros lugares ficam marcados. Vamos agora colocar João na roda. Sabemos que ele deve ficar à esquerda ou à direita de Maria, logo há 2 possibilidades. As outras 5 crianças ocuparão os 5 lugares vazios de 5! modos. Pelo PFC, temos $1 \cdot 2 \cdot 5! = 240$.

◇

Problema 34 *João, Maria e Cristina vão brincar de roda, juntamente com outras 7 crianças. De quantas formas essa roda pode ser formada, de modo que essas três crianças fiquem juntas, sendo que João deve ficar sempre entre Maria e Cristina?*

Solução 1: Inicialmente, imaginemos uma caixa na qual colocaremos João, Maria e Cristina dentro. Agora vamos permutar essa caixa juntamente com as outras 7 crianças ao redor do círculo, isto é, uma permutação de 6 elementos. Temos um total de

$$PC_8 = (8-1)! = 7! = 5040.$$

Dentro da caixa, João deve ficar sempre entre Maria e Cristina, podemos permutar Maria e Cristina de 2! modos. E pelo PFC, o total de modos de organizar as crianças na brincadeira é

$$2! \cdot PC_8 = 2 \cdot 5040 = 10080.$$

◇

Solução 2: Para resolvermos o problema de outra forma, podemos começar a montar essa roda pondo criança por criança em seus respectivos lugares. Iniciamos colocando João na roda, uma das crianças da restrição. Se vamos escolher João em primeiro lugar, há apenas 1 modo de escolher. Note que a posição em que João será colocado é indiferente, já que os lugares não estão inicialmente marcados. Depois que João ocupa um lugar na roda, os outros lugares ficam marcados. Agora devemos colocar as duas meninas "Maria e Cristina" na roda, que devem ficar nas duas posições uma à esquerda outra à direita, ao lado de João, logo há 2! modos de alocarmos as meninas. As outras 7 crianças podem ser distribuídas nas sete posições restantes de $7! = 5040$ modos. Pelo PFC, temos $1 \cdot 2! \cdot 7! = 10080$.

◇

Problema 35 *De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda de forma que cada homem permaneça ao lado de sua mulher? E se houver a restrição de que pessoas do mesmo sexo não podem ficar juntas?*

Solução: Podemos começar calculando o número de formas de se colocar os 5 casais na roda, isto é,

$$PC_5 = (5-1)! = 24.$$

Nessa situação, note que a moça pode estar à esquerda ou à direita do homem formando o primeiro casal, no caso, 2 possibilidades; o mesmo ocorre com os demais casais, 2 possibilidades para cada. Pelo PFC, temos

$$2^5 \cdot PC_5 = 768.$$

Consideremos a restrição de que pessoas do mesmo sexo não podem ficar juntas. Podemos começar pondo os 5 homens na roda, e sabemos que eles podem ser permutados de $PC_5 = 24$ modos. Para distribuirmos as mulheres na roda, temos 2 possibilidades, isto é, cada mulher pode ser posta à esquerda do marido, essa é uma configuração possível, ou cada mulher pode ser posta à direita do marido, que é a outra configuração possível. Pelo PFC, temos

$$2 \cdot PC_5 = 2 \cdot 24 = 48.$$

◇

Problema 36 *De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?*

Solução: Imagine as 5 mulheres dentro de uma caixa. Agora vamos permutar esse bloco conjuntamente com 6 homens, isto é, uma permutação circular de 7 objetos, o que resulta em

$$PC_7 = (7-1)! = 6!.$$

Além disso, perceba que as 5 mulheres podem ser permutadas, dentro da caixa, de 5! modos. Pelo PFC, temos

$$5! \cdot PC_7 = 5! \cdot 6! = 864000.$$

$\diamond$

Problema 37 *De quantos modos 24 crianças podem ocupar os doze bancos de dois lugares numa roda gigante?*

Solução: Já que temos 24 crianças, podemos ocupar cada um dos doze bancos da roda com uma dupla de crianças. O total de modos de fazer isso é

$$PC_{12} = (12-1)! = 11!.$$

Como cada dupla de crianças pode mudar de lugar com o seu parceiro, no banco, há 2 modos de alocarmos a primeira dupla, 2 modos de alocarmos a segunda, e assim por diante. Portanto, o total de modos de executarmos a tarefa é

$$2^{11} \cdot 11! = 39916800.$$

$\diamond$

Problema 38 *Mariana irá fazer uma pulseira cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista, para usar no seu braço esquerdo. De quantas formas isso pode ser feito se a pulseira não terá fecho e o braço puder entrar nela nos dois sentidos?*

Solução: São 6 pedras formando uma pulseira, que tem a forma de um círculo, elas podem ser postas, na pulseira, de

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 120.$$

Note que, se a pulseira não tiver fecho e se ela puder entrar em dois sentidos no braço, cada troca de sentido irá gerar uma configuração que pode ser levada à configuração anterior por meio de uma simples rotação, isto é, trocas de sentido geram configurações repetidas. Para corrigirmos o resultado acima, vamos dividi-lo por 2, isto é,

$$\frac{PC_6}{2} = \frac{120}{2} = 60.$$

$\diamond$

Problema 39 *Cada uma das 8 faces de um prisma hexagonal regular deve ser pintada com uma única cor, escolhida entre 8 cores diferentes, sem que haja repetição de cores. De quantas formas isso pode ser feito?*

Solução: Podemos começar pintando as faces hexagonais. Daí, como cada face do prisma deve ser pintada com uma única cor, precisamos escolher 2 das 8 cores disponíveis para pintarmos as faces hexagonais, o que pode ser feito de

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = 28.$$

Para pintarmos as 6 faces retangulares laterais, perceba que elas formam um círculo, e geram, portanto, uma permutação circular das 6 cores restantes. Logo, o número de modos de pintamos as faces laterais é

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 120.$$

Aplicando o PFC, temos

$$C_{8,2} \cdot PC_6 = 28 \cdot 120 = 3360.$$

◇

3 APROFUNDAMENTOS DE COMBINATÓRIA

Agora trataremos de alguns tipos de problemas de combinatória que aparecem com menor frequência em provas de vestibulares e concursos, porém são bastante úteis para quem quer construir um conhecimento mais profundo acerca do assunto. Antes, vejamos o resultado seguinte que embora seja extremamente simples de enunciar e entender, tem aplicações nada triviais.

3.1 Princípio da Casa dos Pombos

Os métodos de contagem estudados até aqui estão todos relacionados ao cálculo do número de maneiras em que uma determinada experiência pode ocorrer. Agora vamos conhecer um novo instrumento de contagem, cuja finalidade é descobrir se determinado fenômeno pode ou não acontecer, este é denominado *Princípio da Casa dos Pombos* ou *Princípio de Dirichlet*[5]. Esse princípio é de muita utilidade e pode ser apresentado em linguagem popular pela informação óbvia de que, se existirem mais pombos que casas, terá de existir alguma casa com dois ou mais pombos. Em problemas envolvendo esse princípio, será muito útil considerarmos a pior das hipóteses em que o dado fenômeno possa se dar, isto é, o que for mais improvável de ocorrer referente ao determinado fenômeno. O Princípio da Casa dos Pombos, em seu formato mais simples, afirma que:

Princípio da Casa dos Pombos: *Se distribuirmos $n+1$ pombos em n casas, então alguma das casas conterá, pelo menos, dois pombos.*

Para justificar esse princípio, podemos raciocinar por absurdo. Isto é, suponhamos que em nenhuma das casas seja depositado mais de um pombo. Então, em cada uma das n casas haverá um ou nenhum pombo, logo teremos um total de no máximo n *pombos* depositados nas n *casas*, o que é absurdo, já que, por hipótese, devemos ter $n+1$ *pombos*. Ora, a contradição veio de termos suposto que não há casas com mais de um pombo dentro.

Vamos agora utilizar esse princípio para resolver três problemas que ocorrem com frequência em provas.

Problema 40 *Qual o menor número de pessoas num grupo para que possamos garantir que, pelo menos, quatro pessoas "aniversariam" no mesmo mês?*

[5] Vide "Matemática Discreta" de Morgado e Carvalho (2014).

Solução: Vamos imaginar a pior situação possível, isto é, suponha que temos 12 pessoas num grupo e cada uma delas faça aniversário num mês diferente de todas as outras. Logo, cada uma dessas pessoas faz aniversário em um mês diferente das demais, já que temos 12 meses no ano. Daí, se mais 1 pessoa for acrescentada ao grupo, agora com 13 pessoas tem-se, inevitavelmente, que uma delas fará aniversário no mesmo dia de uma das outras pessoas da sala, porque agora o número de meses é inferior ao número de pessoas.

Seguindo esse raciocínio, suponha que temos 36 pessoas no grupo e, na pior das hipóteses, 3 delas nasceram em janeiro, 3 em fevereiro, 3 em março, e assim por diante... então, todos os meses do ano estarão ocupados com exatamente 3 pessoas.

Se considerarmos que mais uma pessoa seja adicionada ao grupo em questão, esta terá que aniversariar num dos meses já ocupados por três pessoas, ou seja, haverá 4 pessoas fazendo aniversário no mesmo mês.

Portanto, o total de pessoas necessárias para garantirmos que 4 delas fazem aniversário no mesmo mês é $36 + 1 = 37$.

$\diamond$

Observação 7 *Podemos raciocinar como se cada pessoa fosse um pombo e cada mês do ano representasse uma casa de pombo. Assim, queremos saber a quantidade mínima de pombos (pessoas) para garantirmos que haverá alguma casa (mês do ano) com, pelo menos, 4 pombos.*

Problema 41 *(FCC, 2014) Uma urna contém 14 bolas vermelhas, 15 pretas, 5 azuis e 11 verdes. Retirando-se ao acaso uma bola por vez dessa urna, o número mínimo de retiradas para se ter certeza que uma bola azul esteja entre as que foram retiradas é?*

Solução: Para termos a certeza de que uma bola azul sairá da urna, nossa estratégia é pensarmos no pior cenário possível, isto é, poderíamos retirar dessa urna ao acaso, em qualquer ordem, de uma em uma as 14 bolas vermelhas, as 15 bolas pretas e as 11 bolas verdes sem que nenhuma das 5 bolas azuis fosse retirada, isto é, um total de 40 bolas. Nessas condições, a urna agora teria apenas bolas azuis. Logo, se mais uma bola for retirada da urna, inevitavelmente, ela será uma bola azul. Portanto, é necessário a extração de, pelo menos, 41 bolas da urna para termos a certeza de que uma delas é uma bola azul.

$\diamond$

Observação 8 *É claro que uma bola azul poderia sair logo nas primeiras extrações, porém não é certo que isso aconteça. O que o problema pede é que se tenha certeza absoluta de que uma bola azul estará entre as extraídas da urna, por isso precisamos considerar um caso extremamente improvável, que é sair todas as bolas de outras cores que não a azul, restando apenas bolas azuis na urna.*

Problema 42 *(FCC, 2019) As peças de um jogo estão todas dentro de um saco opaco. Elas vêm em 4 formatos diferentes e cada peça está numerada com um número dentre os seguintes: 1, 2, 3, 4 ou 5. Qual a menor quantidade de peças que devem ser retiradas aleatoriamente do saco para garantir que se tenha, após a retirada, pelo menos 4 peças de um mesmo formato e 3 peças com a mesma numeração?*

Solução: Queremos retirar do saco, no mínimo, 4 peças de mesmo formato e 3 peças com a mesma numeração. Então vamos imaginar que as peças são em forma de quadrado "Q", triângulo "T", losango "L" e círculo "C". Como cada peça irá receber um número dentre os números 1, 2, 3, 4 e 5, então temos 20 casos possíveis, que são

$$\begin{array}{ccccc} (Q,1) & (Q,2) & (Q,3) & (Q,4) & (Q,5) \\ (T,1) & (T,2) & (T,3) & (T,4) & (T,5) \\ (L,1) & (L,2) & (L,3) & (L,4) & (L,5) \\ (C,1) & (C,2) & (C,3) & (C,4) & (C,5) \end{array}$$

Como são dois modelos distintos de peças, vamos analisá-los individualmente:
I $\mapsto$ *3 peças com mesma enumeração*: Suponha que ocorra a pior situação possível, que seria a de retirarmos as primeiras cinco peças e todas elas terem numerações distintas. Por exemplo, as cinco peças poderiam ser os cinco quadrados $(Q,1)$, $(Q,2)$, $(Q,3)$, $(Q,4)$ e $(Q,5)$ da primeira linha. Se uma sexta peça fosse retirada do saco, digamos $(T,2)$, inevitavelmente, ela teria mesma numeração de alguma das outras peças já extraídas do saco. Suponha que, além dos cinco quadrados, mais cinco peças de numerações distintas são extraídas do saco, por exemplo, os cinco triângulos $(T,1)$, $(T,2)$, $(T,3)$, $(T,4)$ e $(T,5)$. Nessas condições, com qualquer nova peça extraída do saco, digamos $(C,3)$, teremos, inevitavelmente, 3 peças de mesma numeração, isto é, $(Q,3)$, $(T,3)$ e $(C,3)$. Logo, 11 peças são suficientes para garantirmos que ao menos 3 delas tenham a mesma numeração.
II $\mapsto$ *4 peças com mesmo formato*: Suponha que ocorra a pior situação possível, isto é, que retiremos 4 peças e elas sejam todas de formatos distintos, por exemplo, $(Q,1)$, $(T,1)$, $(L,1)$ e $(C,1)$ que são todas de mesma numeração e representam a primeira coluna da tabela. Então, se extraíssemos uma quinta peça, ela seria, inevitavelmente, do mesmo formato que alguma das outras peças já extraídas do saco. Se, além dessas quatro peças, extrairmos mais 4 peças de formatos distintos, digamos $(Q,2)$, $(T,2)$, $(L,2)$ e $(C,2)$, que têm mesma enumeração e estão na segunda coluna da tabela, então a próxima peça que sair nos garante que teremos 3 peças de mesmo formato extraídas do saco. Extraindo mais quatro peças, digamos $(Q,3)$, $(T,3)$, $(L,3)$ e $(C,3)$, teremos, finalmente, a certeza de que, se mais uma peça for extraída do saco, haverá 4 peças de mesmo formato. Por exemplo, se $(Q,4)$ for extraída, teremos $(Q,1)$, $(Q,2)$, $(Q,3)$ e $(Q,4)$, quatro peças de

mesmo tipo. Portanto, é necessária a extração de 13 peças para termos a certeza de que haverá 4 delas de mesmo formato.

Note que com 11 peças ou mais a restrição **I** é atendida e com 13 peças a restrição **II** é atendida, logo bastam 13 peças para garantirmos que sejam atendidas as duas restrições do problema. Portanto, bastam 13 peças serem extraídas para que tenhamos a certeza de que haja 4 peças de mesmo formato e 3 peças de mesma enumeração.

◇

3.2 Binômio de Newton

O *Binômio de Newton* é a expressão que surge quando se faz o desenvolvimento do produto $(x+a)^n$.

Para se desenvolver essa fórmula é necessário algum conhecimento prévio sobre análise combinatória, porque os *coeficientes binomiais*, que são os fatores multiplicativos que aparecem multiplicando as potências de x em cada uma das parcelas do desenvolvimento do binômio, são obtidos pela fórmula que fornece o número de combinações simples de n objetos tomados p a p, isto é, seus coeficientes são da forma $C_{n,p}$, com p entre 0 e n.

O que definimos por Binômio de Newton é a seguinte relação:

$$(x+a)^n = C_{n,0}a^0x^n + C_{n,1}a^1x^{n-1} + C_{n,2}a^2x^{n-2} + \cdots + C_{n,n-1}a^{n-1}x^1 + C_{n,n}a^nx^0$$

em que $C_{n,p}$, com $0 \leq p \leq n$, é o número binomial dado por

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}.$$

O desenvolvimento do binômio é feito multiplicando-se o fator $(x+a)$ por ele mesmo um número n de vezes, isto é,

$$\underbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdots(x+a)}_{n\ vezes}.$$

A prova da validade da expansão binomial pode ser feita aplicando-se *indução sobre n* associadamente à *relação de Stifel*, que afirma que $C_{n+1,p+1} = C_{n,p+1} + C_{n,p}$. Caso o leitor tenha interesse em ver essa prova, ela pode ser encontrada com detalhes numa dissertação de Silva (2013).

Nos interessa descrever um termo geral para o desenvolvimento binomial, isto é, vamos encontrar uma expressão que nos forneça qualquer uma das parcelas que aparecem na expansão de $(x+a)^n$. Para isto, vamos desenvolver $(x+a)^n$ e observar o comportamento dessa expansão.

$$(x+a)^n = \underbrace{C_{n,0}a^0x^n}_{T_1} + \underbrace{C_{n,1}a^1x^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{C_{n,2}a^2x^{n-2}}_{T_3} + \cdots + \underbrace{C_{n,n-1}a^{n-1}x^1}_{T_n} + \underbrace{C_{n,n}a^nx^0}_{T_{n+1}}.$$

Temos que $T_1 = C_{n,0}a^0x^n$ é o *1° termo* da parcela; $T_2 = C_{n,2}a^2x^{n-2}$, o *2° termo*; $T_3 = C_{n,2}a^2x^{n-2}$, o *3° termo*; e assim por diante, $T_{p+1} = C_{n,p}a^{n-p}x^p$ é o $(p+1)-$*ésimo termo*.

Com base nesse padrão, o $(p+1)-$*ésimo termo* da expansão será dito o ***termo geral*** do binômio, ou seja,

$$T_{p+1} = C_{n,p}a^{n-p}x^p.$$

Supondo $x = a = 1$ e substituindo na expressão correspondente do binômio, efetuados os cálculos, vemos que a soma dos coeficientes do binômio resultante tem valor 2^n. Vejamos:

$$(1+1)^n = C_{n,0}\cdot 1^0\cdot 1^n + C_{n,1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1} + C_{n,2}\cdot 1^2\cdot 1^{n-2} + \cdots + C_{n,n-1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + C_{n,n}\cdot 1^n\cdot 1^0,$$

isto é,

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n.$$

Daí, para cada valor de $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$ se tem a soma dos coeficientes relativa à expressão binomial correspondente.

Problema 43 *(PUC/RJ, 2017) Qual é o coeficiente de x^2 no desenvolvimento da expressão $(2x - \frac{1}{x})^6$?*

Solução: Inicialmente, perceba que $(2x - \frac{1}{x})^6$ é um binômio, logo seu termo geral é da forma

$$T_{p+1} = C_{6,p}(2x)^{6-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p = (2^{6-p})C_{6,\,p}x^{6-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p.$$

Perceba que $\frac{x^{6-p}}{x^p} = x^{6-p-p} = x^{6-2p}$. Queremos obter o coeficiente de x^2, ou seja, precisamos descobrir o valor do fator $2^{6-p}C_{6,p}$ quando se tem $x^{6-2p} = x^2$, isto é, quando $6 - 2p = 2$, o que implica $p = 2$.

Daí, substituindo $p = 2$ em $(2^{6-p})C_{6,p}$, temos que

$$(2^{6-2})C_{6,2} = 2^4\cdot\frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = 16\cdot 15 = 240.$$

Portanto, o coeficiente de x^2 é igual a 240.

◇

Problema 44 *(IBADE, 2018) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $(x + \frac{1}{x^2})^9$ é?*

Solução: Temos um binômio cujo termo geral é da forma

$$T_{p+1} = C_{9,p}x^{9-p}\left(\frac{1}{x^2}\right)^P = C_{9,p}x^{9-p}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right).$$

O termo independente do binômio é aquele que não possui potência de x, ou melhor, que apresenta a potência x^0. Assim, queremos obter o coeficiente de x^0.

Para isto, perceba que $x^{9-p}(\frac{1}{x^{2p}}) = x^{9-3p}$. Então, fazendo $x^{9-3p} = x^0$, temos que $9 - 3p = 0$, ou seja, $p = 3$. Agora, basta substituirmos $p = 3$ na expressão do termo geral e simplificarmos, obtendo

$$T_{3+1} = C_{9,3}x^{9-3}\left(\frac{1}{x^{2\cdot 3}}\right) = C_{9,3}x^0 = \left[\frac{9!}{(9-3)!\cdot 3!}\right]x^0 = 84x^0.$$

Portanto, o termo independente do binômio dado é 84.

◇

Problema 45 *(CONSULPLAN, 2010) Qual é o valor do número k no desenvolvimento de $(x^3 + \frac{k}{2x^2})^8$ para que o coeficiente numérico do termo em x^9 seja 56?*

Solução: Começamos escrevendo o termo geral do binômio dado, isto é,

$$T_{p+1} = C_{8,p}(x^3)^{8-p}\left(\frac{k}{2x^2}\right)^p = \frac{C_{8,p}x^{24}x^{-3p}k^p}{2^p x^{2p}} = \frac{C_{8,p}k^p x^{24-5p}}{2^p}.$$

Queremos informação acerca do coeficiente que multiplica a potência x^9; logo, fazendo $x^{24-5p} = x^9$, então $24 - 5p = 9$, ou seja, $p = 3$. Daí, substituindo $p = 3$ na expressão do termo geral, temos

$$T_4 = \frac{C_{8,3}k^3x^{24-5\cdot 3}}{2^3} = \frac{C_{8,3}k^3x^9}{8}.$$

Como foi dado que $T = 56x^9$, fazendo $T_4 = T$, temos que

$$\frac{C_{8,3}k^3}{8}x^9 = 56x^9 \quad \Rightarrow \quad \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{k^3}{8} = 56 \quad \Rightarrow \quad 7k^3 = 56 \quad \Rightarrow \quad k = 2.$$

◇

Problema 46 *(ITA, 2001) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é?*

Solução: Inicialmente, fazemos $x = y = 1$ e substituímos em $(x + y)^m$, donde resulta $(1 + 1)^m = 2^m$.

Sabemos que este valor equivale à soma dos coeficientes do binômio, e o problema nos informa que essa soma é de 1024, isto é, $2^m = 1024$, donde $m = 10$.

Para calcularmos o número de arranjos de 10 elementos tomados 2 a 2, basta fazermos $A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = 90$. Portanto, são 90 casos.

◇

3.3 Triângulo de Pascal

Ao desenvolvermos todas as potências da forma $(x+a)^n$ obtemos as seguintes relações binomiais:

$(x+a)^0 = 1x^0$
$(x+a)^1 = 1x + 1a$
$(x+a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$
$(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$
$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$
$(x+a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$
....
$(x+a)^n = C_{n,0}a^0x^n + C_{n,1}a^1x^{n-1} + \cdots + C_{n,n-1}a^{n-1}x^1 + C_{n,n}a^nx^0$

Agora, coletamos apenas os coeficientes das parcelas dos binômios acima e montamos abaixo a representação do *Triângulo de Pascal*[6], e logo ao seu lado apresentamos o mesmo triângulo escrito na forma de *Números Binomiais*.

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots \\
1 & \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} & \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} & \cdots & \frac{n!}{(n-p)!\cdot p!} & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} & 1
\end{array}$$

Os números, no triângulo acima, podem ser escritos na forma de binomiais, produzindo o triângulo abaixo.

$$\begin{array}{llllllll}
C_{0,0} \\
C_{1,0} & C_{1,1} \\
C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} \\
C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\
C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \\
C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\
\vdots \\
C_{n,0} & C_{n,0} & C_{n,1} & \cdots & C_{n,p} & \cdots & C_{n,n-1} & C_{n,n}
\end{array}$$

[6] Acerca do assunto, vide também o Capítulo 4 de Morgado et al. (1991).

São propriedades do triângulo de Pascal:

a) Note que, pelo padrão estabelecido, a soma dos elementos da *n-ésima linha* terá a forma

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,i} + \cdots + C_{n,n-1} + C_{n,n},$$

que é rigorosamente igual à soma dos coeficientes do *Binômio de Newton*, a qual já sabemos que vale 2^n. Isto é,

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,n} = 2^n.$$

b) Veja que

- $C_{1,0} + C_{1,1} = 1 + 1 = 2 = C_{2,1}$,
- $C_{2,1} + C_{2,2} = 2 + 1 = 3 = C_{3,2}$,
- $C_{4,2} + C_{4,3} = 6 + 4 = 10 = C_{5,3}$,

são casos particulares de um fato que vale em geral: sempre que somamos dois elementos consecutivos numa linha, obtemos o elemento situado abaixo da última parcela. Essa propriedade permite a construção rápida do triângulo de Pascal e é chamada de *Relação de Stifel*, sua forma geral é escrita como

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1},$$

ou seja, somando-se os dois elementos que estão situados na linha n e colunas p e $p+1$, obtém-se o elemento situado na linha $n+1$ e coluna $p+1$.

c) Olhando para os elementos equidistantes dos extremos pertencentes a uma mesma linha do triângulo de Pascal, perceba que esses elementos são sempre iguais. Por exemplo,

$$C_{3,0} = 1 = C_{3,3}, \quad C_{4,1} = 4 = C_{4,3} \quad \text{e} \quad C_{5,2} = 10 = C_{5,3}.$$

Pares de elementos que equidistam dos extremos e pertencem a uma mesma linha são chamados de *combinações complementares*. De forma geral, temos

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}.$$

d) Olhando para as colunas, perceba que

- $C_{0,0} + C_{1,0} + C_{2,0} + C_{3,0} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = C_{4,1}$,
- $C_{1,1} + C_{2,1} + C_{3,1} = 1 + 2 + 3 = 6 = C_{4,2}$,
- $C_{1,1} + C_{2,1} + C_{3,1} + C_{4,1} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = C_{5,2}$.

Ao somarmos os elementos consecutivos de uma coluna do triângulo, começando do primeiro, obtemos o elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma. Em geral,

$$C_{p,p} + C_{p+1,p} + C_{p+2,p} + \cdots + C_{p+n,p} = C_{p+n+1,p+1}.$$

e) Olhando agora para as diagonais, note que

- $C_{0,0} + C_{1,1} + C_{2,2} + C_{3,3} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = C_{4,3}$,
- $C_{1,0} + C_{2,1} + C_{3,2} = 1 + 2 + 3 = 6 = C_{4,2}$,
- $C_{3,0} + C_{4,1} + C_{5,2} + C_{6,3} = 1 + 4 + 10 + 20 = 35 = C_{7,3}$.

A soma dos elementos consecutivos de uma diagonal, começando do primeiro, é igual ao elemento que se encontra imediatamente abaixo da última parcela da soma. Generalizando,

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + C_{n+2,2} + \cdots + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}.$$

A seguir resolvemos três problemas sobre as propriedades do triângulo de Pascal. Caso o leitor queira ver outros exemplos resolvidos, consulte "Análise Combinatória e Probabilidade, com as soluções dos exercícios", de Morgado et al. (2006).

Problema 47 *Calcule o valor da soma dada pela expressão a seguir*

$$1 \cdot C_{100,1} + 2 \cdot C_{100,2} + 3 \cdot C_{100,3} + \cdots + 99 \cdot C_{100,99} + 100 \cdot C_{100,100}.$$

Solução: Seja S o valor da soma. Perceba que uma parcela qualquer dessa soma pode ser representada por $k \cdot C_{100,k}$. Vamos reescrever S na forma de somatório, ou seja,

$$S = 1 \cdot C_{100,1} + 2 \cdot C_{100,2} + 3 \cdot C_{100,3} + \cdots + 99 \cdot C_{100,99} + 100 \cdot C_{100,100} = \sum_{i=1}^{100} k \cdot C_{100,k}.$$

Devemos desenvolver o fator à direita da expressão anterior dado por

$$\sum_{i=1}^{100} k \cdot C_{100,k}.$$

Para isto, na expressão anterior, vamos pôr

$$C_{100,k} = \frac{100!}{(100-k)! \cdot k!}$$

e efetuar as devidas manipulações, ou seja,

$$\begin{aligned}
S=\sum_{k=1}^{100} k\cdot C_{100,k} &= \sum_{k=1}^{100} k\cdot\frac{100!}{(100-k)!\cdot k!}\\
&= \sum_{k=1}^{100} k\cdot\frac{100!}{(100-k)!\cdot k\cdot(k-1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{100} \frac{100!}{(100-k)!\cdot(k-1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{100} \frac{100\cdot 99!}{(100-k)!\cdot(k-1)!}\\
&= 100\cdot\sum_{k=1}^{99} \frac{99!}{(100-k)!\cdot(k-1)!}\\
&= 100\cdot\sum_{i=1}^{99} C_{99,k-1}.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{99} C_{99,k-1} = C_{99,0}+C_{99,1}+C_{99,2}+\cdots+C_{99,99}.$$

Perceba a expressão anterior trata-se da soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal. Logo,

$$C_{99,0}+C_{99,1}+C_{99,2}+\cdots+C_{99,99}=2^{99}.$$

Portanto,

$$S=\sum_{k=1}^{100} k\cdot C_{100,k}=100\cdot 2^{99}.$$

◇

Problema 48 *Calcule o valor da soma dos quadrados de todos os números naturais do 1 ao 100.*

Solução: Se denotarmos por S a soma pedida, podemos escrever essa soma na forma

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+99^2+100^2=\sum_{k=1}^{100} k^2.$$

Pelo termo geral ter a forma de um polinômio, a estratégia de solução passa pela obtenção de uma identidade de polinômios. Além disso, precisaremos reescrever o polinônimo na forma dos números binomiais, já que os binomiais formam o triângulo de Pascal.

Como k^2 é um polinômio de segundo grau, podemos reescrevê-lo por meio dos fatores 1, k e $k(k+1)$. Eventualmente esses fatores permitirão que os números binomiais seja gerados. Para isto, sendo A, B e C três constantes, vamos determinar seus valores para que se tenha

$$k^2 \equiv Ak(k+1) + Bk + C.$$

Ou seja,

$$k^2 \equiv Ak^2 + (A+B)k + C.$$

Donde

$$A = 1, \quad A + B = 0, \; C = 0.$$

Isto é,

$$A = 1, \; B = -1, \; C = 0.$$

Substituindo $A = 1, \; B = -1, \; C = 0$ na primeira expressão, temos

$$k^2 \equiv 1 \cdot k \cdot (k+1) + (-1) \cdot k + 0 \Rightarrow k^2 \equiv k(k+1) - k.$$

Agora, vamos reescrever a soma S como

$$S = \sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} [k(k+1) - k] = \sum_{k=1}^{100} k(k+1) - \sum_{k=1}^{100} k.$$

Note também que

$$k(k+1) = 2 \cdot \frac{(k+1)k(k-1)!}{2(k-1)!} = 2 \cdot \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = 2 \cdot C_{k+1,\,2} \;\text{ e }\; k = \frac{k!}{1!(k-1)!} = C_{k,\,1}.$$

Substituindo as igualdades acima na expressão da soma S, temos

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{100} k(k+1) - \sum_{k=1}^{100} k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} C_{k+1,2} - \sum_{k=1}^{100} C_{k,\,1} \\ &= 2(C_{2,2} + C_{3,2} + \cdots + C_{101,2}) - (C_{1,1} + C_{2,1} + \cdots + C_{101,1}). \end{aligned}$$

As expressões entre parênteses são somas dos elementos de colunas do triângulo de Pascal. Logo,

- $C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + \cdots + C_{102,2} = C_{104,3}$,
- $C_{1,1} + C_{2,1} + C_{3,1} + \cdots + C_{101,1} = C_{103,2}$.

Reescrevendo S, temos

$$S = 2 \cdot C_{104,3} - C_{103,2} = 2 \cdot \frac{104!}{101! \cdot 3!} - \frac{103!}{101! \cdot 2!} = 358440.$$

◇

Problema 49 *Aplique as propriedades do Triângulo de Pascal para encontrar o valor da soma*

$$S = 1 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 25 \cdot 5 + 49 \cdot 6 + \cdots + 197^2 \cdot 101 + 199^2 \cdot 102.$$

Solução: Analisando o padrão, vemos que a soma dada tem a seguinte lei de formação:

$$S = \sum_{k=1}^{100} (2k-1)^2(k+2).$$

Fazendo $T_k = (2k-1)^2(k+2)$, note que

$$T_k = (2k-1)^2(k+2) = 4k^3 + 4k^2 - 7k + 2.$$

Agora vamos procurar por valores A, B, C e D tais que:

$$\begin{aligned} 4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 &= Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D \\ &= Ak^3 + (3A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D. \end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios, segue-se que

$$A = 4, \quad 3A + B = 4, \quad 2A + B + C = -7, \quad D = 2.$$

Substituindo $A = 4$ em $3A + B = 4$, temos

$$3 \cdot 4 + B = 4 \Rightarrow B = -8.$$

Substituindo $A = 4$ e $B = -8$ em $2A + B + C = -7$, temos

$$2 \cdot 4 + (-8) + C = -7 \Rightarrow C = -7.$$

Podemos escrever que

$$4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 = 4k(k+1)(k+2) - 8k(k+1) - 7k + 2.$$

Perceba que:

- $k(k+1)(k+2) = 3! \cdot \dfrac{k(k+1)(k+2)(k-1)!}{3!(k-1)!} = 3! \cdot \dfrac{(k+1)!}{3![(k+2)-3]!} = 3! \cdot C_{k+2,3};$
- $8k(k+1) = 2! \cdot \dfrac{8k(k+1)(k-1)!}{2!(k-1)!} = 2! \cdot \dfrac{(k+1)!}{2![(k+1)-2]!} = 2! \cdot C_{k+1,2};$

- $k = 1!\dfrac{k(k-1)!}{1!(k-1)!} = C_{k,1}$.

Juntando as informações, temos

$$\begin{aligned} T_k &= 4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 \\ &= 4 \cdot 3! \cdot C_{k+2,3} - 8 \cdot 2! \cdot C_{k+1,2} - 7 \cdot C_{k,1} + 2 \\ &= 24 \cdot C_{k+2,3} - 16 \cdot C_{k+1,2} - 7 \cdot C_{k,1} + 2. \end{aligned}$$

Donde vem que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} T_k &= 24\sum_{k=1}^{100} C_{k+2,3} - 16\sum_{k=1}^{100} C_{k+1,2} - 7\sum_{k=1}^{100} C_{k,1} + 2\sum_{k=1}^{100} 1 \\ &= 24 \cdot (C_{3,3} + C_{4,3} + \cdots + C_{101,3}) - 16 \cdot (C_{2,2} + C_{3,2} + \cdots + C_{101,2}) \\ &\quad -7 \cdot (C_{1,1} + C_{2,1} + \cdots + C_{101,1}) + 2 \cdot (1 + 1 + \cdots + 1). \end{aligned}$$

Note que que as expressões entre parênteses são somas de elementos consecutivos de colunas do triângulo de Pascal. Logo,

- $C_{3,3} + C_{4,3} + C_{5,3} + \cdots + C_{101,3} = C_{105,4}$,
- $C_{2,2} + C_{3,2} + C_{4,2} + \cdots + C_{101,2} = C_{104,3}$,
- $C_{1,1} + C_{2,1} + \cdots + C_{101,1} = C_{103,2}$,
- $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 100$.

Além disso, como $S = \sum_{k=1}^{100} T_k = \sum_{k=1}^{100}(2k-1)^2(k+2)$, temos, portanto, que

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{100}(2k-1)^2(k+2) &= 24 \cdot C_{105,4} - 16 \cdot C_{104,3} - 7 \cdot C_{103,2} + 2 \cdot 100 \\ &= 24 \cdot \frac{105!}{101! \cdot 4!} - 16 \cdot \frac{104!}{101! \cdot 3!} - 7 \cdot \frac{103!}{101! \cdot 2!} \\ &= 24 \cdot 4780230 - 16 \cdot 91052 - 7 \cdot 5253 + 2 \cdot 100 \\ &= 113232117. \end{aligned}$$

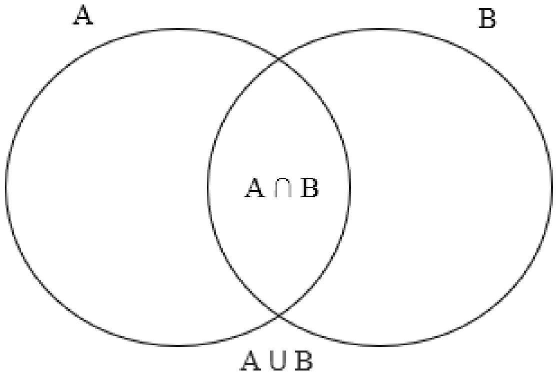
◇

3.4 Princípio da Inclusão e Exclusão

O *Princípio da Inclusão e Exclusão*[7] é uma técnica utilizada em combinatória que serve para se calcular a quantidade de elementos da união de conjuntos finitos.

Considere dois conjuntos quaisquer A e B cuja união, isto é, $A \cup B$ está ilustrada na Figura 10.

Figura 10: União de 2 conjuntos



Fonte: o autor

Sejam $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ e $n(A \cup B)$ as quantidades de elementos dos conjuntos A, B, $A \cap B$ e $A \cup B$, nesta ordem.

Sabemos que tanto o conjunto A quanto o conjunto B contêm o conjunto $A \cap B$. Quando A e B não possuem elementos em comum, $A \cap B$ é vazio, e dizemos que A e B são *disjuntos*. Neste caso, se somarmos diretamente os elementos de A com os de B, ou seja, $n(A) + n(B)$, disso resultará os elementos de $A \cup B$, isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Por outro lado, quando $A \cap B$ não é vazio, ao fazermos a soma $n(A) + n(B)$, os elementos de $A \cap B$ são contados duas vezes, uma vez quando computamos os elementos de A e outra quando computamos os de B. Isso significa que a expressão $n(A) + n(B)$ não equivale a $n(A \cup B)$, para o caso em que A e B não são disjuntos. Claro que essa expressão pode ser modificada de modo que a expressão resultante forneça os elementos de $A \cup B$. Para isso, basta que descontemos uma vez de $n(A) + n(B)$ os elementos que estão duplicados na contagem, que são os elementos de $A \cap B$ e que são no total $n(A \cap B)$. Logo, para o caso de A e B não disjuntos, a expressão que conta os elementos da união é da forma

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Além disso, fazendo $S = n(A \cup B)$, $S_1 = n(A) + n(B)$ e $S_2 = n(A \cap B)$, temos

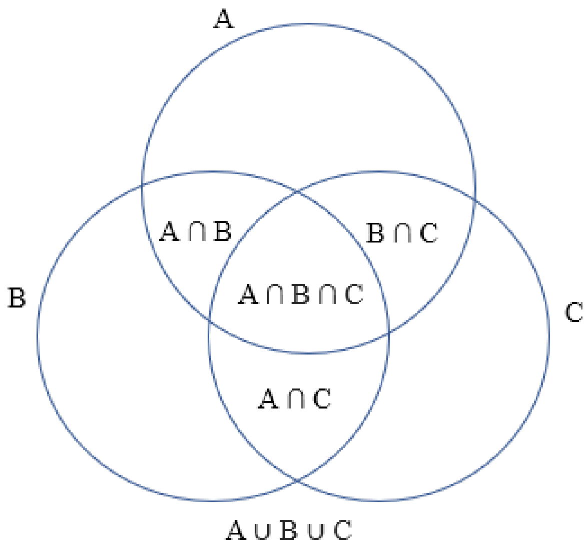
$$S = S_1 - S_2.$$

[7]Para obter mais detalhes sobre o tema, veja o Capítulo 6 de “Introdução à Matemática Combinatória” de Pereira (2013).

Essa fórmula nos permite inclusive deduzir fórmulas para se calcular o número de elementos da união de uma quantidade qualquer de conjuntos.

Vejamos o que ocorre para o caso de três conjuntos A, B e C, ou seja, imagine que queremos calcular o número de elementos de $A \cup B \cup C$, ilustrado na Figura 11.

Figura 11: União de 3 conjuntos



Fonte: o autor

Como obviamente $A\cup B\cup C = (A\cup B)\cup C$, a partir desse fato podemos escrever que

$$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C].$$

Aplicando o fato que já sabemos que é válido para a união de dois conjuntos no lado direito, temos que

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C].$$

Além disso, conhecendo-se a validade da equivalência $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, tem-se

$$\begin{aligned} n[(A \cup B) \cap C] &= n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]. \end{aligned}$$

Substituindo

$$n[(A \cup B) \cap C] = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$

em

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C],$$

temos

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - \{n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\}.$$

Vamos substituir agora $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ na expressão acima, donde, temos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - \{n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)]\}.$$

Para finalizar, recordamos a equivalência $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, e a substituímos na expressão acima. Portanto,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Pondo:

- $S = n(A \cup B \cup C)$;
- $S_1 = n(A) + n(B) + n(C)$;
- $S_2 = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$;
- $S_3 = n(A \cap B \cap C)$.

Temos que, o princípio da Inclusão e Exclusão para o caso de três conjuntos tem a forma

$$S = S_1 - S_2 + S_3.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que a fórmula que calcula o número de elementos da união para o caso de 4 conjuntos A, B, C e D é da forma:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) \quad = \quad & n(A) + n(B) + n(C) + n(D) \\ & -[n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) \\ & +n(C \cap D)] + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) \\ & +n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

Pondo, de modo análogo ao que foi feito antes:

- $S = n(A \cup B \cup C \cup D)$;
- $S_1 = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$;
- $S_2 = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) + n(C \cap D)$;
- $S_3 = n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)$;
- $S_4 = n(A \cap B \cap C \cap D)$.

Obtemos que, para o caso de quatro conjuntos, o princípio da Inclusão e Exclusão tem a forma

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Esse princípio pode ser generalizado para a reunião de um número t qualquer de conjuntos. Para isso, seja A um conjunto e sejam A_1, A_2,..., A_t subconjuntos tais que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$. Além disso, sejam S, S_1, S_2,..., S_t as quantidades de elementos dos seguintes conjuntos:

- $S = n(A)$;
- $S_1 = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} n(A_i)$;
- $S_2 = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_1) + \cdots + n(A_{t-1} \cap A_t) = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq t} n(A_i \cap A_j)$;
- $S_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \cdots + n(A_{t-2} \cap A_{t-1} \cap A_t) = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j < k \leq t} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$;

  $\vdots$
- $S_t = n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t)$.

É possível mostrar que o número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$ é dado por:

$$S = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^t S_t.$$

Para uma demonstração desse fato, vide "O princípio da inclusão e exclusão e suas aplicações" de Godoy (2016).

A fórmula acima calcula o número de elementos de uma reunião finita de conjuntos, sejam esses conjuntos disjuntos ou não.

A seguir apresentamos três problemas que envolvem a aplicação do princípio da inclusão e exclusão. Para ver outros problemas relacionados a esse princípio, consulte o livro "Problemas Resolvidos de Combinatória" de Santos e Estrada (2018).

Problema 50 *Uma loja permite que seus clientes escolham até 3 acompanhamentos para açaí, que são: banana, granola e leite condensado. Em um certo dia, 185 clientes escolheram banana, 143 escolheram granola, 209 escolheram leite condensado, 37 escolheram banana e granola, 43 escolheram granola e leite condensado, 23 escolheram leite condensado e banana, 6 escolheram os 3 acompanhamentos e 65 não pediram nenhum dos 3 acompanhamentos.*
Qual o número de clientes que visitaram a loja nesse dia?

Solução: Denotamos o conjunto dos clientes que escolheram banana por B, os que escolheram granola por G e os que escolheram leite condensado por L.

Perceba que o total de clientes que escolheram acompanhamento para o açaí equivale a

$$n(B \cup G \cup L) = n(B) + n(G) + n(L) - [n(B \cap G) + n(B \cap L) + n(G \cap L)] + n(B \cap G \cap L).$$

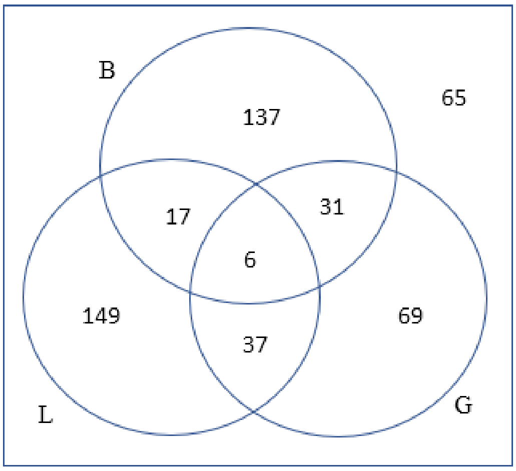
Pelos dados do problema, temos que $n(B) = 185$, $n(G) = 143$, $n(L) = 209$, $n(B \cap G) = 37$, $n(B \cap L) = 23$, $n(G \cap L) = 43$ e $n(B \cap G \cap L) = 6$. Assim,

$$n(B \cup G \cup L) = 185 + 143 + 209 - [37 + 23 + 43] + 6 = 274.$$

Além disso, como 65 clientes não pediram nenhum dos 3 acompanhamentos, temos, portanto, que $274 + 65 = 339$ clientes visitaram a loja naquele dia.

Na Figura 12, representamos a solução encontrada para o problema acima pelo chamado diagrama de Venn.

Figura 12: Diagrama de Venn



Fonte: o autor

◇

Problema 51 *Considere a lista dos números inteiros desde 1 até 10000. Quantos deles são divisíveis por 3 ou 5?*

Solução: Sejam N_3 e N_5 os conjuntos dos múltiplos de 3 e de 5, respectivamente, entre 1 e 1000. Observe que nesses conjuntos existem múltiplos simultaneamente do 3 e do 5, tais múltiplos pertencem ao conjunto interseção, isto é, $N_3 \cap N_5$. Sejam $n(N_3)$ e $n(N_5)$ os totais de elementos dos conjuntos N_3 e N_5, respectivamente.

O problema nos pede para calcularmos o total de elementos tais que estes possam estar em N_3 ou em N_5, o que equivale a calcular os elementos da união destes, ou seja, elementos de $N_3 \cup N_5$. Mas perceba que se fizermos $n(N_3) + n(N_5)$, estaremos contando os elementos que pertencem $N_3 \cap N_5$ duas vezes, uma vez que eles estão tanto em N_3 quanto em N_5, e para evitarmos essa contagem indevida, basta que descontemos dessa soma $n(N_3 \cap N_5)$.

Esse processo pode ser descrito pela fórmula:

$$n(N_3 \cup N_5) = n(N_3) + n(N_5) - n(N_3 \cap N_5).$$

Então, precisamos calcular o total de elementos de cada um dos conjuntos N_3, N_5 e $N_3 \cap N_5$. Vejamos caso a caso:

• Os múltiplos de 3 estão em $N_3 = \{3, 6, 9, ..., 999\}$, que é uma PA de razão 3, cujo total de termos é $n(N_3) = \frac{999-3}{3} + 1 = 333$;
• Os múltiplos de 5 estão em $N_5 = \{5, 10, 15, ..., 1000\}$, que é uma PA de razão 5, cujo total de termos é $n(N_5) = \frac{1000-5}{5} + 1 = 200$;
• Os múltiplos de 15 estão em $N_3 \cap N_5 = \{15, 30, 45, ..., 990\}$, que é uma PA de razão 15, cujo total de termos é $n(N_3 \cap N_5) = \frac{990-15}{15} + 1 = 66$.

Portanto, o total de elementos de $N_3 \cup N_5$ é:

$$n(N_3 \cup N_5) = n(N_3) + n(N_5) - n(N_3 \cap N_5) = 333 + 200 - 66 = 467.$$

◇

Problema 52 *Imagine uma mesa em formato circular contendo 12 assentos à qual irão se sentar 6 casais (marido e mulher). De quantas formas eles podem se sentar de modo que marido e mulher nunca estejam juntos?*

Solução: Se esquecermos da restrição de que marido e mulher não podem ficar juntos, como são 12 pessoas, o número de formas delas sentarem ao redor da mesa é

$$PC_{12} = (12 - 1)! = 11!.$$

Considerando a restrição, chamaremos de A_i o conjunto das configurações em que o i-ésimo casal permanece junto, isto é, marido e mulher se sentam lado a lado. Com isso, o número de permutações circulares nas quais existirá ao menos um dos 6 casais se mantendo junto equivale ao total de elementos da reunião de $A_1, A_2, A_3, ..., A_6$, isto é, corresponde ao número

$$S = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_6).$$

Perceba que o número S conta todas as permutações circulares em que se têm um ou mais casais ficando juntos. Então, os casos em que nenhum casal fica junto pode ser calculado pela diferença

$$PC_{12} - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_6) = 11! - S.$$

Para calcularmos o número S, pensemos nas configurações em que as duas pessoas do casal i ficam juntas no círculo, isto é, quando i é entendido como um objeto único. Neste caso, o casal i junto às outras dez pessoas formam um total de 11 objetos. Sabemos que existem $PC_{11} = (11 - 1)! = 10!$ formas de colocarmos 11 objetos em círculo, e, além disso, como em cada uma das configurações há 2 maneiras de se ordenar as pessoas do casal i, logo, há $n(A_i) = 2 \cdot 10!$ configurações em que o casal i fica junto.

Já as configurações em que os casais i e j formam cada um deles um objeto único, temos que i e j juntamente com as demais 8 pessoas formam 10 objetos. Sabemos que existem $PC_{10} = (10 - 1)! = 9!$ formas de colocarmos 10 objetos em círculo, e, além disso, como em cada uma das configurações há 2 maneiras de ordenarmos as pessoas do casal i e outras 2 de ordenarmos as pessoas de j, há $n(A_i \cap A_j) = 2^2 \cdot 9!$ configurações em que o i e j ficam juntos.

Analogamente, para os casais i, j e k ficarem juntos temos

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2^3 \cdot 8!,$$

em que o fator 2^3 leva em conta a ordem das pessoas dentro de cada casal e o $8!$ corresponde às disposições dos 3 casais juntamente às demais 6 pessoas no círculo.

Para i, j, k e l temos

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = 2^4 \cdot 7!.$$

Para i, j, k, l e m temos

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m) = 2^5 \cdot 6!.$$

Finalmente, para todos os casais ficarem juntos, temos

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_6) = 2^6 \cdot 5!.$$

Para o caso em que um único casal, i, fica junto, existem $C_{6,1} = 6$ formas de escolha desse casal, já que ao todo são seis casais; no caso em que i e j são dois casais cujos integrantes ficam juntos, há $C_{6,2} = 15$ formas de escolha desses casais; para os integrantes dos casais i, j e k ficarem juntos, temos $C_{6,3} = 20$ formas de escolha; e assim por diante, existe $C_{6,6} = 1$, isto é, uma única situação em que todos os casais 1, 2, 3,..., 6 ficam juntos.

Logo, o número S pode ser calculado por inclusão e exclusão, isto é

$$\begin{aligned}
S &= C_{6,1} \cdot n(A_i) - C_{6,2} \cdot n(A_i \cap A_j) + C_{6,3} \cdot n(A_i \cap A_j \cap A_k) - C_{6,4} \cdot n(A_i \cap \cdots \cap A_l) \\
&\quad + C_{6,5} \cdot n(A_i \cap \cdots \cap A_m) - C_{6,6} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6) \\
&= 6 \cdot 2 \cdot 10! - 15 \cdot 2^2 \cdot 9! + 20 \cdot 2^3 \cdot 8! - 15 \cdot 2^4 \cdot 7! + 6 \cdot 2^5 \cdot 6! - 1 \cdot 2^6 \cdot 5! \\
&= 27144960.
\end{aligned}$$

Portanto, existem

$$11! - S = 12771840$$

configurações circulares em que cada esposa fica separada do seu marido.

◇

3.5 Outras técnicas e aplicações de contagem

Neste tópico, apresentamos uma série de problemas que servem de base para introduzir algumas formas de contagem que até então não tinham sido abordadas neste texto. Alguns dos problemas exigem soluções simples, com cálculos básicos, e outros necessitam de técnicas um pouco mais sofisticadas, que não são comumente expostas em livros didáticos do Ensino Médio.

Problema 53 *O dia 13 de fevereiro de um ano bissexto X ocorreu numa quinta-feira. Em qual dia da semana foi registrada a data 18 de outubro de X?*

Solução: Note que contando desde o dia 13 até o dia 29 de fevereiro, passam-se $29 - 13 + 1 = 17$ dias. Assim, entre o dia 13 de fevereiro e o dia 18 de novembro, incluindo esses dias, passam-se $17+31+30+31+30+31+31+18 = 249$ dias. Como tudo começa no dia 13, que é uma quinta feira, vamos contar quantas semanas cabem no intervalo dos 249 dias.

Para isso, basta fazermos $\frac{249}{7} \approx 35,57$, pegando a parte inteira, são 35 semanas. Isso quer dizer que se fizermos $35 \cdot 7 = 245$, o intervalo de 245 dias começa numa quinta-feira e termina numa quarta-feira.

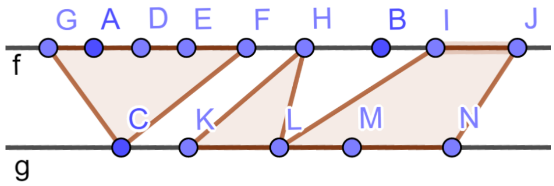
Terminado o intervalo de 245 dias, sendo o último dia deste uma quarta feira, como $249 - 245 = 4$, passados esses quatro dias, a data pedida cairá num domingo.

◇

Problema 54 *Considere duas retas paralelas desenhadas em um plano. Se 9 pontos forem marcados sobre uma delas e 5 pontos sobre a outra, quantos são os triângulos que podem ser formados tomando-se três pontos sobre essas retas? Quantos quadriláteros podem ser formados?*

Solução: Sejam f e g duas retas paralelas nas quais foram marcados 9 e 5 pontos, respectivamente. Na Figura 13 você pode observar os triângulos GCF e HCL, além do quatrilátero ILNJ.

Figura 13: f e g são paralelas



Fonte: o autor

Para calcularmos a *quantidade de triângulos*, tudo o que temos que fazer é ligar 3 pontos, tais que dois deles estão numa das retas e o terceiro ponto pertence à outra reta. Há dois casos:

Caso 1: escolhemos 2 pontos em f, o que pode ser feito de $C_{9,2} = \frac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$ modos, e um ponto em g, o que pode ser feito de 5 modos; neste caso, são $36 \cdot 5 = 180$ possibilidades;
Caso 2: escolhemos 1 ponto em f, o que pode ser feito de 9 modos, e dois pontos em g, o que pode ser feito de $C_{5,2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$; neste caso, são $9 \cdot 10 = 90$ possibilidades.

Logo, o total de triângulos é obtido somando-se $180 + 90 = 270$.

Para obtermos a *quantidade de quadriláteros*, basta tomarmos 2 pontos em cada umas das retas. Podemos tomar dois pontos em f de $C_{9,2} = 36$ modos, e dois pontos em g de $C_{5,2} = 10$. Segue, portanto, que o número de quadriláteros é dado por $C_{9,2} \times C_{5,2} = 36 \times 10 = 360$.

◇

Problema 55 *Quantos são os números pares que são os divisores inteiros e positivos do número 2160? Quantos desses divisores são quadrados perfeitos?*

Solução: A ideia inicial é decompor o número 2160 em seus fatores primos. Quando decomposto ele fica na forma

$$2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Queremos os divisores pares, isto é, aqueles que são múltiplos de 2. Para construirmos um desses divisores, note que em sua decomposição deve constar ao menos um, podendo ser dois, três, ou quatro fatores primos iguais a 2, logo são 4 possibilidades; pode constar nenhum, um, dois, ou três fatores iguais a 3, então são 4 possibilidades; já fatores iguais a 5, pode constar nenhum ou um, isto é, 2 possibilidades.

Portanto, o número 2160 tem $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ divisores pares.

A lista dos divisores pares que são quadrados perfeitos é: $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$ e $2^4 \cdot 3^2 = 144$. Portanto, 4 divisores são quadrados perfeitos.

◇

Problema 56 *(ENA, 2016) Acrescentando-se 3 novos elementos ao conjunto A, obtemos o conjunto B com precisamente 224 subconjuntos a mais do que A. O número de elementos de A é igual a?*

Solução: Suponha que $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ é um conjunto com n elementos. Queremos saber quantos são os subconjuntos de A. Ora, para montarmos um subconjunto X qualquer de A, teremos que decidir quais dos elementos de A devem aparecer em X.

Para isto, temos que tomar n decisões: primeira decisão, escolher se o elemento a_1 *pertence* ou *não pertence* a X, essa decisão pode ser tomada de 2 modos, afinal de contas, ou a_1 pertence ou ele não pertence a X; segunda decisão, escolher se a_2 pertence a X, que de forma análoga pode ser tomada de 2 modos; e assim por diante, a $n-$*ésima* decisão é escolher se a_n pertence ou não a X, a qual pode ser tomada de 2 modos.

O total de modos de tomarmos essas n decisões simultaneamente é:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n\, fatores\, iguais\, a\, 2} = 2^n.$$

Com isso, contamos todas as possibilidades de montarmos subconjuntos a partir dos elementos de A. Logo, A tem 2^n subconjuntos.

Se A é o conjunto dado no problema, então ele tem n elementos e dele se pode montar 2^n subconjuntos. Assim, o conjunto B, também citado no problema, terá $n+3$ elementos e, pela mesma lógica, 2^{n+3} subconjuntos. Nos foi informado que B tem 224 subconjuntos a mais que A, o que nos permite escrever que

$$2^{n+3} = 2^n + 224 \Leftrightarrow 2^n \cdot 2^3 = 2^n + 224 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^n = 224 \Leftrightarrow 2^n = 32 \Leftrightarrow n = 5.$$

Portanto, A tem 5 elementos.

$\diamond$

Problema 57 *Quantas são as formas distintas em que podemos decompor o número 1050 no produto de dois inteiros positivos?*

Solução: A primeira providência é escrever o número 1050 em sua forma fatorada, isto é, podemos escrever

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Tomando os fatores primos distintos nessa decomposição, ou seja, 2, 3, 5 e 7, cujo produto destes é $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, podemos começar decompondo 210 no produto de dois inteiros positivos, o que equivale a obtermos todos os pares de números inteiros positivos (x, y) tais que $x \cdot y = 210$.

De fato, são 8 casos apenas: $(1, 210)$, $(2, 105)$, $(3, 70)$, $(5, 42)$, $(7, 30)$, $(6, 35)$, $(10, 21)$ e $(14, 15)$.

Como $5 \cdot 210 = 1050$, o que precisamos fazer é simplesmente multiplicar uma das coordenadas de cada um dos 8 pares acima por 5. Obtendo, com isso, os pares (x', y') tais que $x' \cdot y' = 1050$.

Observe que são 8 possibilidades de escolha de um par. Escolhido o par, podemos optar por multiplicar uma e somente uma das coordenadas desse par pelo número 5, isto é, são 2 possibilidades de escolha da coordenada. Temos

$$2 \cdot 8 = 16.$$

Mudar a ordem das coordenadas do par (a, b) não produz uma nova dupla a e b de múltiplos, porque (a, b) não é um par ordenado. Devemos considerar um único par de cada tipo. Porém, ao descrevermos todos os 16 casos, vemos que $(5, 210), (10, 105), (15, 70)$ e $(30, 35)$ aparecem repetidos. Ora, temos que excluir as cópias desses 4 pares. Logo, existem

$$16 - 4 = 12$$

formas de dividirmos 1050 no produto de dois inteiros.

◇

Problema 58 *Em uma lista contendo todos os números de 112 até 3319, quantas vezes o algarismo 3 é escrito?*

Solução: Primeiro vamos contar quantas vezes o algarismo 3 aparece no dígito das unidades, depois quantas vezes ele aparece no dígito das dezenas, depois nas centenas e, finalmente, no dígito das milhares.

• Fixando o *3 na unidade*, note que os números que apresentam 3 na unidade são $113, 123, 133, 143, ..., 3303, 3313$. Perceba que antes do 3, podem ser colocados qualquer um dos inteiros 11, 12, 13, 14,..., 330, 331, isto é, são $(331 - 11) + 1 = 321$ possibilidades;

• Fixando o *3 na dezena*, após o 3 podemos colocar qualquer um dos algarismos de 0 a 9, logo temos 10 possibilidades; antes do 3, podemos colocar qualquer um dos inteiros $1, 2, 3, 4, ..., 32$, logo são 32 possibilidades. Então o total de números com 3 fixo na dezena é $32 \cdot 1 \cdot 10 = 320$. Note que o menor dos números formados será o 130 e o maior é o 3239;

• Fixando o *3 na centena*, temos os números que vão de: 300 a 399, 1300 a 1399, 230 a 2399 e 3300 a 3319. Em cada um desses 4 casos tem-se 100 números, logo temos $4 \cdot 100 = 400$ possibilidades;

• Fixando o *3 na unidade de milhar*, podemos completar os três dígitos após o 3 com uma das sequências de 3 algarismos da forma $000, 001, 002, ..., 318, 319$, ou seja, são 320 possibilidades.

Portanto, o algarismo 3 foi escrito $321 + 320 + 400 + 320 = 1361$ vezes.

◇

Problema 59 *Se executássemos o cálculo do fatorial $P_{626} = 626!$, quantas vezes o algarismo 0 seria escrito no número resultante?*

Solução 1: Escrevendo o fatorial, obtemos $626! = 626 \cdot 225 \cdot 624 \cdots 2 \cdot 1$, e tomado um número nesse produto, se em sua decomposição em fatores primos aparecer algum fator 5, isto é, se ele for múltiplo de 5, haverá um 0 no final da terminação do número resultante desse produto, pois $2 \cdot 5 = 10$ implica 0 no final. Observe que essa multiplicação sempre é possível, porque no produto há múltiplos de 2 suficientes para gerar as potências de 2 necessárias. Logo, temos que analisar todos os múltiplos de 5 no fatorial.

Comecemos pelo maior desses múltiplos, o $625 = 5^4$, que possui quatro fatores iguais a 5, e tem-se que $2^4 \times 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10000$, que resulta em *quatro* dígitos 0 na terminação. Em seguida vêm os múltiplos de $125 = 5^3$, excluído o 625, que já foi contado, são os 5 - 1 = 4 múltiplos $\{125, 250, 375, 500\}$, os quais podem ser escritos como $125 = 1 \cdot 125$ e $250 = 2 \cdot 125$, $375 = 3 \cdot 125$, $500 = 4 \cdot 125$, gerando-se *três* dígitos 0 na terminação a partir de cada um deles. Na sequência, vêm os múltiplos de $25 = 5^2$, excluindo os já contados, são eles $\{25, 50, 75, ..., 600\}$, em total são $25-(4+1) = 20$, cada um deles gerando dois dígitos 0 na terminação. E, finalmente, contamos os múltiplos de 5, retirando os já contados $\{5, 10, 15, ..., 615\}$, que no total são $125 - (20 + 4 + 1) = 100$, os quais geram cada qual *um* dígito 0 na terminação.

Portanto, são $4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 100 = 156$ dígitos 0 na terminação de 626!.

◇

Outra forma de solucionar o problema seria por meio da extração de todas as potências de 5 dentro do fatorial de 626!. Isto é

Solução 2:

$$\begin{aligned}
625! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overbrace{(5 \cdot 1)}^{5} \cdot 6 \cdots 9 \cdot \overbrace{(5 \cdot 2)}^{10} \cdot 11 \cdots 624 \cdot \overbrace{(5 \cdot 125)}^{625} \cdot 626 \\
&= \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 9 \cdot 11 \cdots 624 \cdot 626]}_{M} \cdot [(5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdots (5 \cdot 125)] \\
&= M \cdot 5^{125} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 125) \\
&= M \cdot 5^{125} \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overbrace{(5 \cdot 1)}^{5} \cdot 6 \cdots 9 \cdot \overbrace{(5 \cdot 2)}^{10} \cdot 11 \cdots 124 \cdot \overbrace{(5 \cdot 25)}^{125}] \\
&= M \cdot 5^{125} \cdot \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 9 \cdot 11 \cdots 124]}_{N} \cdot [(5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdots (5 \cdot 25)] \\
&= M \cdot 5^{125} \cdot N \cdot 5^{25} \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overbrace{(5 \cdot 1)}^{5} \cdot 6 \cdots 9 \cdot \overbrace{(5 \cdot 2)}^{10} \cdot 11 \cdots 24 \cdot \overbrace{(5 \cdot 5)}^{25}] \\
&= M \cdot N \cdot 5^{150} \cdot \underbrace{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 9 \cdot 11 \cdots 24]}_{S} \cdot [(5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 2) \cdots (5 \cdot 5)] \\
&= M \cdot N \cdot 5^{150} \cdot S \cdot 5^{5} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)}_{T} \cdot 5 \\
&= M \cdot N \cdot S \cdot T \cdot 5^{156}.
\end{aligned}$$

Pela construção que acabamos de executar, o produto $M \cdot N \cdot S \cdot T$ não possui nenhum fator 5, que gera zero no fim do fatorial, isso significa que todos os zeros no fim de 625! provêm da potência 5^{156}. Portanto, existem 156 dígitos 0 no fim de 626!.

◇

Problema 60 *Quantos são os anagramas da palavra PARALELOGRAMO que não possuem letras A juntas?*

Solução: Queremos que as letras A nunca estejam juntas. Então vamos começar organizando as outras letras, deixando sempre um espaço entre duas quaisquer, conforme o esquema abaixo:

$$\_\, P \,\_\, R \,\_\, L \,\_\, E \,\_\, L \,\_\, O \,\_\, G \,\_\, R \,\_\, M \,\_\, O \,\_$$

Observe que deixamos espaços vazios ao redor de cada letra, e nesses espaços introduziremos as letras A, pois dessa forma sempre teremos alguma letra distinta de A entre duas letras A em qualquer posição.

Nosso problema agora é saber quantas são as permutações das letras da palavra PRLELOGRMO, do esquema acima, e de quantas formas podemos escolher três posições dentre os 11 espaços, do esquema, para pormos as letras A. São dois passos:

Passo 1: Obter as permutações da palavra PRLELOGRMO, que tem dois L, dois R e dois O repetidos, ou seja, permutação com repetição. Logo, o total de anagramas é:

$$P_{11;2,2,2} = \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 997920.$$

Passo 2: Calcular o número de formas de se escolher 3 posição dentre 11 dadas, o que pode ser feito de:

$$C_{11,3} = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3!} = 165.$$

Portanto, existem $997920 \cdot 165 = 164656800$ formas dessas duas decisões serem tomadas simultaneamente.

◇

Problema 61 *Obtenha o termo máximo do desenvolvimento da expressão binomial dada por* $(1 + \frac{1}{4})^{101}$.

Solução: Sabemos que a expressão que nos permite calcular o termo geral do binômio $(x + a)^n$ é dada por

$$T_{p+1} = C_{n,p} a^{n-p} x^p,$$

com $C_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$.

A fórmula do termo geral também nos permite encontrar o termo imediatamente anterior a ele. Para isto, vamos começar trocando p por $p - 1$ na fórmula, ou seja,

$$T_{(p-1)+1} = C_{n,p-1} a^{n-(p-1)} x^{p-1} \quad \Rightarrow \quad T_p = C_{n,p-1} a^{n-p+1} x^{p-1},$$

com $C_{n,p-1} = \dfrac{n!}{[n-(p-1)]! \cdot (p-1)!}$.

Podemos agora buscar uma relação entre os termos T_{p+1} e T_p que nos permitirá fazer comparações entre os termos do binômio. Começamos dividindo T_{p+1} por T_p, isto é,

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{C_{n,p}a^{n-p}x^p}{C_{n,p-1}a^{n-p+1}x^{p-1}}.$$

Substituindo os números binomiais, obtemos

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \cdot a^{n-p}x^p}{\dfrac{n!}{[n-(p-1)]! \cdot (p-1)!} \cdot a^{n-p+1}x^{p-1}}.$$

Reescrevendo,

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \cdot \frac{(p-1)! \cdot (n-p+1)!}{n!} \cdot \frac{x^p}{x^{p-1}} \cdot \frac{a^{n-p}}{a^{n-p+1}}.$$

Desenvolvendo e simplificando $p!$ e $(n-p+1)!$, segue

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{(p-1)! \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{p \cdot (p-1)! \cdot (n-p)!} \cdot x \cdot \frac{1}{a}.$$

Fazendo mais uma simplificação, temos

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{x}{a}.$$

Rearranjando,

$$T_{p+1} = T_p \cdot \frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{x}{a}.$$

A fórmula anterior nos permite determinar qual é o *maior termo* ou *termo máximo* do desenvolvimento de um binômio, exatamente o que o problema nos pede.

Queremos que $T_{p+1} \geq T_p$, ou seja, que $\frac{T_{p+1}}{T_p} \geq 1$. Ora, isso equivale a dizer que

$$\frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{x}{a} \geq 1.$$

Além do problema fornecer $n = 101$, podemos tomar $x = 1$ e $a = \frac{1}{4}$. Daí, pondo esses dados na fórmula acima, temos

$$\frac{101-p+1}{p} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} \geq 1.$$

O que implica $p \leq 80$.

Como $T_{80+1} \geq T_{80}$, tem-se que T_{81} é máximo. Portanto, o termo de maior valor é o *octogésimo primeiro.*

◇

Problema 62 *(FCC, 2019) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si. Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação.*
Quantas são as possibilidades? E se fossem 8 funcionários?

Solução: Com apenas 4 funcionários, como informa o problema, supondo que inicialmente os funcionários a, b, c, d ocupam as posições 1, 2, 3 e 4 respectivamente acaba sendo bastante simples resolvê-lo, bastando que sejam descritas todas as possibilidades, que de fato são: (b,a,d,c), (c,a,d,b), (d,a,b,c), (c,d,a,b), (d,c,a,b), (b,d,a,c), (b,c,d,a), (c,d,b,a) e (d,c,b,a). Portanto, para o caso de 4 pessoas, existem 9 possibilidades delas serem trocadas de posição sem nenhuma retorna ao seu lugar primitivo.

A resposta para o caso de 8 funcionários já não é tão simples e necessita de raciocínio mais sofisticado.

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ n objetos distintos e $1, 2, ..., n$ suas respectivas posições primitivas. Chama-se *Permutação Caótica* a qualquer arranjo desses n objetos em que nenhum deles esteja na sua posição primitiva.

Seja D_n o número de *permutações caóticas* dos elementos do conjunto $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Queremos descobrir o valor de D_n.

Para isto, seja A o conjunto de todas as permutações dos elementos de Ω; e seja A_i o conjunto das permutações dos elementos de Ω tais que x_i foi fixado na posição i, com i variando de 1 a n.

O número D_n equivale ao total de elementos do conjunto A que não pertencem a nenhum dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, isto é, elementos que não pertencem ao conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Daí, considere o conjunto A e seus subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Vamos definir que:

- $S_0 = \#(A) = C_{n,0} \cdot (n-0)! = \dfrac{n!}{0!}$;
- $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \#(A_i) = C_{n,1} \cdot (n-1)! = \dfrac{n!}{1!}$;
- $S_2 = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) = C_{n,2} \cdot (n-2)! = \dfrac{n!}{2!}$;
- $S_3 = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = C_{n,3} \cdot (n-3)! = \dfrac{n!}{3!}$;

  $\vdots$
- $S_n = \#(A_1 \cap A_2 \cdots A_n) = C_{n,n} \cdot (n-n)! = \dfrac{n!}{n!}$.

Assim, juntando-se as informações acima e aplicando o princípio da *Inclusão e Exclusão*, temos:

$$D_n = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots (-1)^n S_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Ou ainda,

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Sabendo que,

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Pondo $x = -1$,

$$e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

Portanto, podemos reescrever D_n da forma:

$$D_n \approx n! \cdot (e^{-1}) = \frac{n!}{e}.$$

De fato, D_n é um número inteiro e positivo, então a fórmula acima só nos permite uma aproximação do seu valor. Com efeito, D_n será sempre o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$.

Finalmente podemos responder de quantas formas as 8 pessoas podem ser permutadas caoticamente, basta fazer

$$D_8 \approx \frac{8!}{e} = \frac{40320}{e}.$$

Tomando $e \approx 2,7183$ e fazendo a conta, temos

$$D_8 = 14833.$$

$\diamond$

Problema 63 *Calcule quantos são os divisores positivos de 10800 e o valor da soma desses divisores.*

Solução: Vamos iniciar fazendo a decomposição de 10800 em seus fatores primos, isto é,

$$10800 = 108 \cdot 100 = 3^3 \cdot 2^4 \cdot 5^2.$$

Vamos pensar primeiro nos divisores de 10800 que são múltiplos de 2 ou 3, mas não são múltiplos de 5. Para isto, observe a Tabela 1.

Tabela 1: Divisores múltiplos de 2 ou 3

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	206	432

Fonte: o autor

A primeira linha representa todas as potências de 2 presentes da decomposição de 10800, isto é, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ e $16 = 2^4$; a primeira coluna representa as potências de 3, ou seja, $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$.

Todo elemento que está abaixo da primeira linha e à direita da primeira coluna é obtido por meio da relação $a_{i,1} \cdot a_{1,j} = a_{i,j}$. Por exemplo, $a_{3,1} = 9$ e $a_{1,4} = 8$, então $a_{3,4} = a_{3,1} \cdot a_{1,4} = 9 \cdot 8 = 72$.

Para que percebamos um padrão interessante, vamos chamar de A e de B as somas dos elementos da primeira linha e da primeira coluna, respectivamente, isto é, $A = 1+2+4+8+16 = 31$ e $B = 1+3+9+27 = 40$. Com isso, $A \cdot B = 31 \cdot 40 = 1240$.

Perceba que a soma dos elementos da segunda linha equivale a 3 vezes a soma dos elementos da primeira linha, isto porque obtivemos a segunda linha multiplicando todos os elementos da primeira por 3; a soma dos elementos da terceira linha é 9 vezes a soma dos da primeira; e, da mesma forma, a soma dos elementos da quarta linha é igual a 27 vezes a soma dos da primeira.

Então, para obtermos a soma dos divisores de 10800, que encontram-se na tabela, basta fazermos:

$$1 \cdot A + 3 \cdot A + 9 \cdot A + 27 \cdot A = (1+3+9+27) \cdot (1+2+4+8+16) = 1240.$$

Agora vamos pensar sobre os múltiplos de 5 que dividem 10800. Ora, vimos que se os divisores que compõe a soma não têm múltiplos de 5, o valor da soma é 1240; ocorre que se cada divisor dessa soma fosse multiplicado por 5, o valor da soma seria $5 \cdot 1240 = 6200$; e, se cada divisor da soma fosse multiplicado por 25, teríamos $25 \cdot 1240 = 31000$. Portanto, o valor da soma dos divisores de 10800 é:

$$1 \cdot 1240 + 5 \cdot 1240 + 25 \cdot 1240 = (1+5+25) \cdot 1240 = 38440.$$

Temos o seguinte padrão:

$$(1+3+9+27) \cdot (1+2+4+8+16) \cdot (1+5+25) = 38440.$$

Como $A = 1+2+4+8+16 = 31$ e $B = 1+3+9+27 = 40$, se fizermos $C = 1+5+25$, podemos reescrever a soma como

$$A \cdot B \cdot C = 38440.$$

$\diamond$

Observação 9 *Note que cada um dos termos A, B e C representa a soma de todas as potências de um determinado número primo que aparece na decomposição do número 10800. Este fato sempre acontece. De modo que, dado um número, tudo o que temos que fazer é decompô-lo em seus fatores primos, tomar um desses fatores primos, calcular todas as suas potências que ainda dividem o número dado e somar todas elas; tomar o segundo fator primo e repetir o processo, seguindo dessa forma até que esgotemos todos os primos. Por fim, multiplicamos todos os resultados.*
Por exemplo, vamos calcular a soma dos divisores do número 113400. Para isto, a primeira providência é decompor esse número em seus fatores primos, isto é,

$$113400 = 7^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^3.$$

Agora calculamos a soma das potências de cada fator primo:

- $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$;
- $B = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$;
- $C = 5^0 + 5^1 + 5^2 = 31$;
- $D = 7^0 + 7^1 = 8$.

Por fim, multiplicamos todos os resultados obtidos acima, isto é,

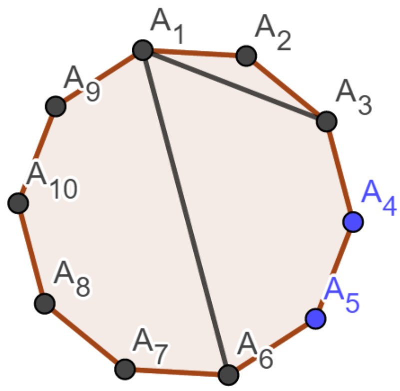
$$A \cdot B \cdot C \cdot D = 450120.$$

Logo, 450120 é a soma dos divisores de 113400.

Problema 64 *Dados um polígono de n lados e a informação de que qualquer segmento de reta que ligue dois de seus vértices não consecutivos corresponde a uma de suas diagonais, calcule o número D_n de diagonais do polígono. Em particular, o polígono regular de 10 lados tem quantas diagonais?*

Solução: Sabemos que um polígono de n lados possui também n vértices, então sejam $A_1, A_2, ..., A_n$, respectivamente, os vértices do polígono dado. Perceba que para montarmos uma de suas diagonais será necessário ligarmos dois de seus vértices por um segmento de reta, por exemplo, A_1A_{n-1} é uma diagonal. Em particular, o polígono regular de $n = 10$ lados é exibido na Figura 14, em que os segmentos A_1A_3 e A_1A_6 são diagonais e A_4A_5 é um de seus lados.

Figura 14: Polígono de 10 lados



Fonte: o autor

Ora, escolher 2 vértices dentre os n dados equivale a simplesmente fazer a combinação simples

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}.$$

Porém, na contagem acima consideramos todos os segmentos de reta formados ligando-se dois vértices, e isso inclui segmentos que representam, em vez de diagonais, lados do polígono; por exemplo, o segmento A_1A_n (que é um lado) foi computado nessa contagem. Para corrigirmos a conta acima e descobrirmos D_n, precisamos simplesmente fazer $C_{n,2} - n$, isto é, subtrair o número n de lados. Portanto:

$$D_n = C_{n,2} - n = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Agora, pondo $n = 10$ na expressão acima e efetuando os cálculos, temos que

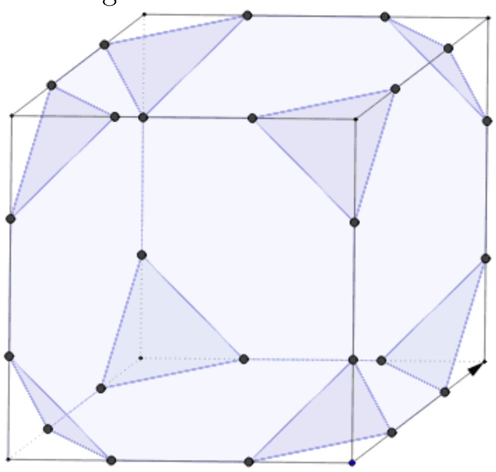
$$D_{10} = \frac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35.$$

Portanto, o polígono de 10 lados têm 35 diagonais.

◇

Problema 65 *De um cubo de aresta a, foi extraído, a partir de cada vértice, uma pirâmide isósceles de base triangular e aresta lateral* $\frac{a}{3}$*. Esse processo, ilustrado na Figura 15, dá origem a um novo sólido cujo nome é cubo truncado.*

Figura 15: Cubo truncado



Fonte: Instituto GeoGebra Portugal.
Disponível em: `http://bit.ly/39IaL46`

Efetuado o processo de truncadura, o sólido resultante será composto por justaposição de faces octogonais e faces triangulares regulares.
Se a diagonal de um poliedro é qualquer segmento de reta que liga dois de seus vértices pertencentes a faces distintas, calcule quantas diagonais possui o cubo truncado.

Solução: É fácil constatar que o cubo truncado da Figura 15 terá 6 faces octogonais e 8 faces triangulares. Perceba que o total de vértices desse sólido pode ser obtido simplesmente contando todos os vértices que compõem as faces triangulares, isto é, são $8 \cdot 3 = 24$ vértices.

Contamos quantos são todos os segmentos de reta que podem ser formados tomando-se 2 vértices quaisquer do poliedro pela $C_{24,2}$, isto é,

$$C_{24,2} = \frac{24!}{(24-2)! \cdot 2!} = 276.$$

Dentre esses segmentos estão computadas as *arestas (A)*, as *diagonais de face (d)* e as *diagonais do poliedro (D)*, então temos que

$$A + d + D = 276.$$

De cada vértice partem exatamente 3 arestas, então ao fazermos $3 \cdot 24 = 72$ deveríamos obter o total de arestas. Porém, perceba que, quando fazemos esse cálculo, cada aresta fica contada duas vezes, por isso efetuamos $A = \frac{72}{2} = 36$ para chegarmos ao resultado correto. Logo, o sólido tem 36 arestas.

As faces triangulares não apresentam diagonais, então as únicas diagonais de face aparecerão nas faces octogonais, e como a quantidade de diagonais de um polígono é dado por $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, logo as 6 faces octogonais juntas possuem $d = 6 \cdot D_8 = 6 \cdot \frac{8 \cdot (8-3)}{2} = 120$ diagonais.

Portanto, o cubo truncado tem um total de diagonais igual a

$$D = 276 - A - d = 276 - 36 - 120 = 120.$$

$\diamond$

3.6 Seleção de Conteúdos

A seleção e a abordagem do conteúdo nos Capítulos 2, 3 e, inclusive, no Capítulo 4, prioriza os concursos para o magistério e a preparação para vestibulares. Como o leitor deve ter percebido, ao longo dos Capítulos 2 e 3 foram resolvidos 32 problemas incluindo Concursos, Ena e Enem[8], selecionados do ano 2000 em diante, cuja distribuição é a da Tabela 2, em que, na primeira coluna, destacamos as *bancas* e na segunda, apresentamos o *número de questões por banca.* Ainda nos Capítulos 2 e 3, há outros 33 problemas sem indicação de fonte, estes foram criados pelo autor deste texto, com base na experiência adquirida ao longo dos seus estudos para concursos públicos.

[8]Não abordamos problemas de olimpíadas neste texto, caso seja do interesse do leitor, vide a dissertação de Américo (2013) acerca da OBMEP.

Tabela 2: Questões coletadas de exames

BANCA	**QUESTÕES**
AOCP	1
CESPE	1
CETREDE	3
CONSUPLAN	1
CONPASS	1
ENA	7
ENEM	4
IBADE	2
ITA	1
FATEC	1
FCC	3
PUC	1
UNIRIO	2
UNESP	2
VUNESP	2

Fonte: o autor

Cada questão escolhida foi resolvida pelo autor durante seus estudos para concursos públicos. O nível de dificuldade varia bastante entre os problemas dos Capítulos 2 e 3. Contudo, perceba que quase todas as questões de concursos e vestibulares que discutimos concentram-se no Capítulo 2, onde estão os tópicos mais básicos. De fato, na pesquisa feita pelos textos que abordam combinatória na internet, percebeu-se que a concentração de conteúdos contempla os tópicos mais básicos. Embora não seja possível afirmar com exatidão, porque mapear conteúdos da internet é uma tarefa difícil, dada a diversidade de *sites* que abordam o tema em estudo, parece existir uma tendência das bancas cobrarem os conceitos mais básicos em seus exames.

Não foi possível analisar e afirmar com precisão a percentagem de questões de combinatória por prova em cada uma das bancas citadas neste texto porque não tivemos à disposição material suficiente para isso. As bancas de concurso não disponibilizam todo o seu acervo de provas na internet. Entramos em contato com algumas delas, com o intuito de obtermos mais conteúdo para termos condições de avaliarmos de forma quantitativa a frequência dos problemas de combinatória nas provas, porém, não obtivemos resposta satisfatória por parte das bancas. Contudo, ao analisarmos 25 provas da Conpass, disponíveis no *site PCIconcursos*, vimos que a cada 28 questões de matemática pelo menos 2 delas são de combinatória.

Parte do conteúdo deste texto baseia-se em pesquisas na internet, tomadas as devidas precauções quanto à confiabilidade dos *blogs* e *sites* aqui utilizados como fonte de informação. O leitor deve ficar atento ao utilizar material da internet, pois há muita informação de origem duvidosa. Por isso, deve-se utilizar sempre *sites* de confiança.

4 PRATIQUE O QUE VOCÊ ESTUDOU

As várias técnicas de contagem discutidas nos Capítulos 1 e 2, uma vez compreendidas, podem ser usadas para resolver a maioria dos problemas de combinatória que aparecem nos concursos públicos. Porém, não basta apenas entender o assunto, é preciso praticar para desenvolver a habilidade de resolver problemas. Quanto mais problemas o estudante resolve, mais apto ele se torna para resolver novos problemas que encontrar.

Por isso, preparamos uma lista contendo 90 questões, incluindo material das bancas: Cespe, Educa, Aocp, Fcc, Cesgranrio, Fgv, Vunesp, Idecan, Idib, Ibade, Legalle e Conpass. Sequenciadas de tal forma que as questões correspondentes a uma mesma banca estão todas juntas[9]. Para que o leitor possa avaliar e melhorar sua habilidade de resolver problemas de combinatória.

A proporção de questões de cada banca está de acordo com a disponibilidade de material na internet, isto é, as bancas que dispõem de mais conteúdo sobre combinatória receberão maior destaque.

Dito isto, é importantíssimo que o leitor tente resolver os problemas da lista a seguir, porque essa é a forma mais efetiva de aprender combinatória (ou qualquer outro assunto relativo à Matemática). Depois confirme sua resposta no gabarito ao final.

4.1 Tente resolver os problemas

01. (CESPE, 2020) Em um sistema de acesso a uma rede de computadores, os usuários devem cadastrar uma senha de 6 dígitos, que deve ser formada da seguinte maneira:
• os 2 primeiros dígitos devem ser letras minúsculas distintas, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto;
• os demais 4 dígitos da senha devem ser números inteiros entre 0 e 9, admitindo-se repetição.
Nessa situação, a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas é igual a
A) 3674. B) 5690. C) 1965600. D) 3276000. E) 6500000.

02. (CESPE, 2019) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar um novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.
Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

[9] Caso o leitor queira praticar uma série de problemas de vestibulares sobre combinatória, consulte "Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade" de Hazzan (2013).

A) 21. B) 42. C) 256. D) 862. E) 5040.

03. (CESPE, 2018) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de tal modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

A) 30. B) 120. C) 330. D)820. E) 1320.

04. (CESPE, 2012) No primeiro turno da eleição em um município, 8 candidatos concorrem ao cargo de prefeito. Considerando a possibilidade de segundo turno, e que quaisquer dois candidatos poderão disputá-lo, é correto afirmar que a quantidade de maneiras distintas de se formar a dupla de candidatos para o segundo turno é igual a

A) 16. B) 28. C) 56. D) 64. E) 256.

05. (CESPE, 2012) De um grupo de 21 pessoas dos quais 11 são homens e 10 são mulheres, o juiz sorteará 7 deles para comporem o corpo de jurados para determinada sessão do tribunal do júri.

Considere que, devido ao caso em julgamento, os advogados de defesa solicitaram e o juiz atendeu, o corpo de jurados deveria ser formado apenas por pessoas do sexo feminino. Nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se formar o corpo de jurados é

A) inferior a 130.

B) superior a 130 e inferior a 140.

C) superior a 140 e inferior a 150.

D) superior a 150 e inferior a 160.

E) superior a 160.

06. (CESPE, 2011) Para se realizar uma experiência, foram colocadas sobre uma bancada 8 substâncias diferentes. Sabe-se que três dessas substâncias não podem ser misturadas duas a duas por formarem um composto que exala gás tóxico. Nessas condições, a quantidade de misturas distintas, com iguais quantidades de 2 dessas 8 substâncias, que se pode realizar é igual a

A) 22. B) 25. C) 50. D) 15. E) 30.

07. (CESPE, 2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

A) 5040. B) 720. C) 576. D) 288. E) 144

08. (CESPE, 2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a

A) 400. B) 380. C) 200. D) 190. E) 160.

09. (EDUCA, 2019) Um torneio de xadrez anual tem 12 participantes inscritos. Na primeira etapa desse torneio, cada participante jogará uma só vez com cada um dos demais participantes. Considerando a forma binomial, o número de jogos da primeira etapa do torneio será:

A) 96. B) 120. C) 76. D) 66. E) 48.

10. (AOCP, 2012) Os funcionários de um setor do Tribunal de Contas do Estado são responsáveis por hastear 7 bandeiras, diariamente, não havendo folga em nenhum dia da semana. Sabe-se que a bandeira do Brasil sempre ocupa o 1º mastro e a colocação das demais bandeiras nunca é a mesma dos dias anteriores. Esses funcionários conseguirão hastear essas bandeiras, cumprindo a condição de não repetir a mesma sequência, durante

A) mais de 2 anos.

B) mais de 1 ano e meio e menos de 2 anos.

C) mais de 1 ano e menos de 1 ano e meio.

D) mais de 6 meses e menos de 1 ano.

E) mais de 3 meses e menos de 6 meses.

11. (AOCP, 2018) Em uma escola com 25 professores, 5 professores devem ser escolhidos para integrar uma equipe que irá participar de um Congresso no Exterior. Como o professor Carlos é um dos 25 professores e é o representante oficial da Escola, então ele já é um integrante dessa equipe, restando escolher mais 4 pessoas para completar a equipe. Nessas condições, o total de equipes que podem ser formadas será igual a

A) 15226. B) 53130. C) 32658. D) 20000. E) 10626.

12. (AOCP, 2018) Um produto deve ser identificado com 10 letras, utilizando 3 letras A, 4 letras B, 2 letras C e 1 letra W. Dessa forma, o total de maneiras diferentes que esse produto pode ser identificado é igual a

A) 1024. B) 12600. C) 8040. D) 6300. E) 512.

13. (AOCP, 2017) Um grupo de amigos com cinco pessoas decidiu participar de uma gincana esportiva. O juiz responsável por uma das provas dessa gincana deve formar uma equipe com uma, duas ou três pessoas desse grupo de amigos. Dessa forma, o número de equipes que esse juiz poderá formar será igual a

A) 5. B) 25. C) 10. D) 20. E) 15.

14. (AOCP, 2015) O prédio de uma empresa possui um total de 300 funcionários que trabalham em alguma das 45 salas disponíveis. Sabe-se que em uma parte dessas salas trabalham 6 funcionários por sala, e que na outra parte trabalham 8 funcionários por sala. O número de salas onde trabalham 6 funcionários é igual a

A) 30. B) 25. C) 20. D) 15. E) 12.

15. (FCC, 2018) Uma pessoa decidiu criar uma senha com dois algarismos ímpares diferentes e uma vogal, em qualquer ordem. O número total de senhas diferentes que ela pode criar é igual a

A) 600. B) 450. C) 300. D) 900. E) 550.

16. (FCC, 2018) Além do Presidente, uma empresa tem 3 diretores e 7 chefes de departamento. O presidente quer formar comissões para reuniões de planejamento que sejam formadas por 2 diretores e por 2 chefes de departamento. A cada reunião de planejamento o Presidente quer que haja alguma diferença na composição da comissão. O número de reuniões possíveis de acontecerem, nessas condições, é igual a

A) 252. B) 180. C) 128. D) 63. E) 24.

17. (FCC, 2019) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

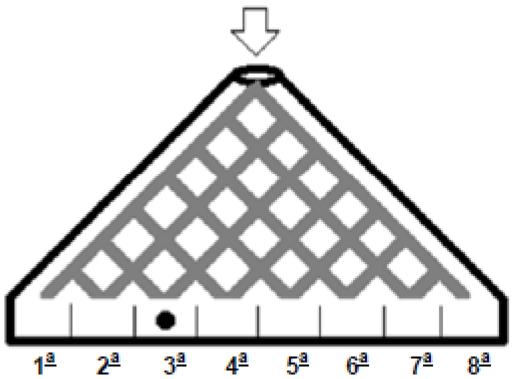
A) 120. B) 24. C) 30. D) 6. E) 4.

18. (FCC, 2018) Em um restaurante, para compor um prato, um cliente deve selecionar quatro ingredientes, sendo que, necessariamente, pelo menos, um deles deve ser um legume e, pelo menos, um deles deve ser uma carne. Há três opções de legumes e quatro opões de carnes. O número de combinações possíveis de pratos é

A) 7. B) 12. C) 64. D) 34. E) 14.

19. (FCC, 2018) Um brinquedo consiste em um dispositivo vertical, de formato aproximadamente triangular, tal como se vê na ilustração abaixo. Uma bolinha é colocada na entrada superior do dispositivo (no local indicado pela seta) e pode percorrer qualquer caminho descendente, por meio das canaletas diagonais representadas em cinza, até chegar a uma das oito caçapas inferiores.

Figura 16: Brinquedo dos caminhos



Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/2UESduf`

Nesse brinquedo, a quantidade de caminhos que podem conduzir a bolinha da entrada até a 3ª caçapa é

A) 21. B) 6. C) 35. D) 10. E) 15.

20. (FCC, 2018) Dez pastas diferentes devem ser guardadas em duas caixas diferentes. Se a única regra é que cada uma das caixas contenha pelo menos uma pasta, então a quantidade de maneiras distintas como se pode guardar essas pastas nas caixas é

A) 510. B) 1022. C) 126. D) 2048. E) 256.

21. (FCC, 2016) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

A) 4. B) 15. C) 6. D) 13. E) 18.

22. (FCC, 2016) O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

A) 2520. B) 1080. C) 840. D) 5040. E) 1980.

23. (FCC, 2016) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2, 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a

A) 499. B) 186. C) 399. D) 144. E) 400.

24. (FCC, 2016) Atenção: Para responder à questão, considere a descrição de sistemas de senhas abaixo.

• Cada senha, do sistema de senhas J, é formada por duas letras dentre as 10 primeiras letras do alfabeto seguidas de três algarismos ímpares.

• Cada senha, do sistema de senhas K, é formada por três letras vogais seguidas de dois algarismos diferentes.

• Cada senha, do sistema de senhas L, é formada por uma letra dentre as dez primeiras consoantes, seguida por duas letras vogais diferentes e ainda seguidas por dois algarismos diferentes dentre os oito primeiros algarismos.

Quanto ao número de senhas diferentes possíveis, a ordenação crescente desses três sistemas é

A) K, L, J. B) J, L, K. C) J, K, L. D) L, K, J. E) K, J, L.

25. (FCC, 2016) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

A) 40. B) 56. C) 30. D) 26. E) 36.

26. (FCC, 2015) Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se

obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a
A) 24. B) 23. C) 21. D) 19. E) 22.

27. (FCC, 2012) Um condomínio de 25 casas terá seu sistema de comunicação por interfone substituído. A empresa contratada informa que usa como identificação de cada residência um código de três dígitos formado pelos algarismos 1, 2 e 3 (distintos ou não). Alguns moradores desconfiaram e alegaram que a quantia de códigos não era suficiente para identificar todas as casas. O representante da empresa apresentou cálculos que comprovavam que o total de possibilidades era suficiente para identificar
A) 25 casas. B) 27 casas. C) 30 casas. D) 32 casas. E) 35 casas.

28. (FCC, 2012) Em uma lanchonete há 5 sabores diferentes de sorvete, 6 sabores diferentes de sucos e 3 tipos diferentes de coberturas, sendo uma de sabor chocolate. Um cliente deseja escolher 1 suco, 1 sorvete e cobertura de chocolate. Nessas condições, a quantidade de formas distintas que pode realizar seu pedido é
A) 90. B) 60. C) 30. D) 10. E) 5.

29. (FCC, 2010) Os 63 novos contratados para o cargo de agente técnico serão alocados em 21 salas atualmente vazias no prédio da Assembleia Legislativa. Cada sala terá pelo menos um agente e todo agente ficará em uma única sala. Nestas condições, pode- se concluir que, necessariamente,
A) haverá três agentes em cada sala.
B) não haverá salas com quatro agentes.
C) poderá haver uma sala com 50 agentes.
D) haverá salas com um único agente.
E) haverá pelo menos uma sala com três ou mais agentes.

30. (FCC, 2010) Um comerciante pediu ao caixa de um banco que lhe trocasse R$ 5,00 em moedas de 10 e 25 centavos; além disso, solicitou também que houvesse pelo menos um tipo de cada moeda e que suas respectivas quantidades fossem números primos entre si. Nessas condições, de quantos modos o caixa pode atender ao pedido desse comerciante?
A) Dois. B) Três. C) Quatro. D) Cinco. E) $n >$ Cinco.

31. (CESGRANRIO, 2018) Uma arena esportiva possui exatamente 8 portões, numerados de 1 a 8. Essa arena é considerada aberta se, e somente se, pelo menos um dos seus portões estiver aberto. Por exemplo, seguem três maneiras diferentes de se ter essa arena aberta:
• quando apenas o portão 3 está aberto;
• quando apenas o portão 6 está aberto;
• quando apenas os portões 3, 7 e 8 estão abertos.
O número total de maneiras diferentes de se ter essa arena aberta é:
A) 40320. B) 40319. C) 256. D) 255. E) 36.

32. (CESGRANRIO, 2018) De um quadro de profissionais com quatro engenheiros e cinco técnicos pretende-se formar um grupo de cinco profissionais com, pelo menos, um engenheiro e um técnico. Nessas condições, quantas possibilidades diferentes existem de formação desse grupo de cinco profissionais?

A) 19. B) 20. C) 120. D) 125. E) 126.

33. (CESGRANRIO, 2018) Considere um conjunto de 10 empresas, denominadas A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Um analista precisa escolher quatro dessas empresas para distribuir quatro serviços diferentes, um para cada uma escolhida. Após uma análise técnica, decidiu que exatamente duas das três primeiras empresas - A, B e C - deveriam fazer quaisquer dois serviços dentre os quatro disponíveis. Os outros dois serviços que sobrassem seriam distribuídos entre duas das sete outras empresas restantes. Nessas condições, o número de possibilidades diferentes para essa distribuição de serviços é igual a

A) 1724. B) 1692. C) 1584. D) 1512. E) 1294.

34. (CESGRANRIO, 2018) Um certo time de vôlei possui 15 jogadores: 4 meios de rede, 5 ponteiros, 3 opostos e 3 levantadores. Desses jogadores, 12 devem ser relacionados para uma partida, sendo que, dentre os jogadores relacionados, deve haver, pelo menos, 1 levantador, 1 oposto, 2 ponteiros e 2 meios de rede para compor o time titular. O treinador deve especificar na súmula quem serão os jogadores titulares e quem serão os reservas. De quantas formas ele pode fazer isso?

A) 540. B) 6480. C) 12960. D) 45360. E) 62370.

35. (CESGRANRIO, 2012) Uma empresa precisa montar um grupo com 5 funcionários para participar de um evento comemorativo. Dos 5 funcionários que formarão o grupo, 2 deverão trabalhar na empresa há menos de 10 anos, e 3 deverão trabalhar na empresa há 10 anos, ou mais. Se a empresa possui 12 funcionários que lá trabalham há menos de 10 anos e 18 funcionários que lá trabalham há 10 anos, ou mais, quantos são os possíveis grupos distintos que podem ser montados para participar do evento?

A) 12. B) 36. C) 53856. D) 646272. E) 17100720.

36. (CESGRANRIO, 2018) Uma Organização sem fins lucrativos decidiu construir 3 estações de monitoramento sísmico, idênticas. Sabe-se que cada estação deverá ficar em um terreno diferente e que a Organização possui um total de 20 terrenos atualmente disponíveis.

De quantas formas diferentes essa Organização poderá escolher os 3 terrenos que receberão as estações, dentre os 20 terrenos que possui?

A) 8000. B) 6840. C) 3420. D) 1140. E) 60.

37. (CESGRANRIO, 2018) Um administrador precisa distribuir cinco tipos de serviços diferentes entre três empresas (A, B e C) já certificadas e autorizadas para prestar qualquer um dos cinco serviços. Para garantir a participação das três empresas, ele precisa distribuir os 5 tipos de serviços, de modo que todas as empresas sejam contempladas com, pelo menos, um serviço, e que todos os serviços sejam realizados. Ele estabeleceu o critério de que um serviço não pode ser executado por duas empresas ao mesmo tempo. No Quadro a seguir, há 5 distribuições diferentes, dentre as muitas outras possíveis distribuições.

Figura 17: Distribuição das empresas

S1	S2	S3	S4	S5
A	A	B	C	C
C	C	A	B	B
B	B	B	A	C
C	C	C	B	A
A	B	C	B	A

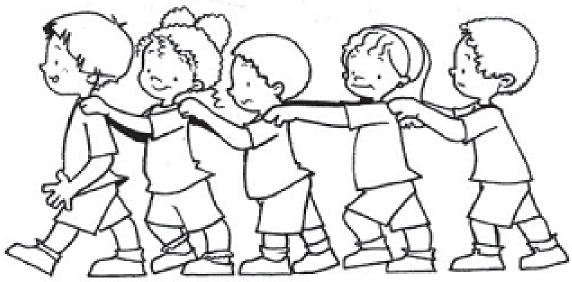
Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/3pICc4I`

Assim, o número total de distribuições diferentes dos cincos serviços entre as três empresas, nas condições apresentadas, é igual a

A) 15. B) 30. C) 120. D) 150. E) 180.

38. (CESGRANRIO, 2018) Considere A o conjunto dos números inteiros maiores que zero, e a função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n)$ = número máximo de filas indianas diferentes contendo n pessoas, que poderiam ser formadas por n pessoas dadas. Duas filas indianas, formadas pelas mesmas pessoas, são diferentes quando há alguma pessoa cuja posição em uma fila é diferente de sua posição na outra.

Figura 18: Uma fila indiana



Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/38SKzos`

Para $n \in A$, a diferença $f(n+1) - f(n)$ é igual a

A) 1. B) $n!$. C) $n \cdot n!$. D) $(n+1)!$. E) $(n+1)\cdot(n-1)$.

39. (CESGRANRIO, 2014) Um sistema computacional listou todas as senhas distintas que podem ser formadas por 3 letras, todas maiúsculas, sendo duas delas vogais e uma consoante. O sistema considerou 5 vogais e 21 consoantes disponíveis para a formação das senhas. Foi permitida a repetição de vogais. São exemplos de senhas admissíveis: FAE, ERE, UOW.

Quantas senhas foram listadas pelo sistema computacional?

A) 3150. B) 2835. C) 2520. D) 1575. E) 315.

40. (CESGRANRIO, 2014) Uma prova semestral é composta por 10 questões. As questões que compõem a prova são selecionadas de um banco com questões de quatro tópicos: T_1, T_2, T_3 e T_4. Cada questão que compõe a prova aborda apenas um desses quatro tópicos e, no banco, há centenas de questões sobre cada um deles. Cada prova possui uma chave (t_1, t_2, t_3, t_4) que indica o número de questões, sobre os respectivos tópicos, que estão presentes na prova. Dessa forma, os números t_1, t_2, t_3 e t_4 são inteiros não negativos e tais que $t_1+t_2+t_3+t_4 = 10$. Por exemplo, uma prova cuja chave é $(3, 2, 4, 1)$ é composta por 3 questões do tópico T_1, 2 questões do tópico T_2, 4 questões do tópico T_3 e 1 questão do tópico T_4. Uma prova com chave $(0, 0, 5, 5)$ não seria composta por questões sobre os tópicos T_1 ou T_2, mas sim por 5 questões do tópico T_3 e 5 questões do tópico T_4.
Qual é o número máximo de chaves distintas que poderiam indicar alguma eventual composição de prova?

A) $\dfrac{13!}{10! \cdot 3!}$. B) $4 \cdot 10!$. C) $4! \cdot 10$. D) $4 \cdot \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$. E) 10^4.

41. (CESGRANRIO, 2010) A olimpíada premia, no pódio, os três melhores atletas de provas de corrida, com medalhas de ouro, prata e bronze. Uma prova de corrida com 8 atletas pode formar quantos pódios diferentes?

A) 24. B) 56. C) 81. D) 168. E) 336.

42. (CESGRANRIO, 2011) Existem 5 estradas entre as cidades A e B. Duas dessas estradas cobram pedágio (em ambos os sentidos). De quantas formas uma pessoa pode ir da cidade A para a cidade B e retornar, pagando pedágio, no máximo, uma vez?

A) 9. B) 12. C) 15. D) 21. E) 23.

43. (CESGRANRIO, 2014) No sistema de numeração de base 8, os números são representados por numerais constituídos de algarismos que variam de zero a sete.
Quantos são os numerais de três algarismos no sistema de numeração de base 8 em que, pelo menos, um algarismo é repetido?

A) 154. B) 294. C) 328. D) 448. E) 572.

44. (CESGRANRIO, 2014) Uma senha de 5 caracteres distintos deve ser formada usando as letras A e O e os números 0, 1, 2. As senhas devem começar e terminar com letras, mas não é permitido usar o 0 (zero) ao lado do O (letra o).
Quantas senhas podem-se formar atendendo às regras estabelecidas?

A) 12. B) 8. C) 6. D) 4. E) 2.

45. (CESGRANRIO, 2008) Um grupo é formado por 7 mulheres, dentre as quais está Maria, e 5 homens, dentre os quais está João. Deseja-se escolher 5 pessoas desse grupo, sendo 3 mulheres e 2 homens. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita de modo que Maria seja escolhida e João, não?

A) 60. B) 90. C) 126. D) 150. E) 210.

46. (CESGRANRIO, 2012) No início de um reality show havia 12 participantes. A primeira prova do programa teve a participação de duas pessoas. De quantas maneiras diferentes o grupo que participou dessa prova poderia ter sido composto?
A) 24. B) 48. C) 66. D) 132. E) 144.

47. (CESGRANRIO, 2012) Quantos anagramas de 5 letras distintas podem ser formados com as letras T, R, A, N e S se o R não pode preceder o T ?
A) 24. B) 48. C) 60. D) 84. E) 120.

48. (CESGRANRIO, 2006) Uma pessoa joga seis partidas, vencendo três e perdendo três. Em quantas ordens diferentes podem ocorrer suas vitórias e derrotas?
A) 18. B) 20. C) 36. D) 48. E) 120.

49. (CESGRANRIO, 2010) Há cinco poços de petróleo a serem perfurados, que são P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, e apenas três sondas disponíveis para perfuração, que são S_1, S_2 e S_3. A sonda S_1 só pode ser utilizada para a perfuração dos poços P_4 e P_5. As sondas S_2 e S_3 podem ser utilizadas para a perfuração de qualquer dos cinco poços. Serão perfurados, inicialmente, apenas três dos cinco poços e, para isso, cada sonda será alocada a um único poço.
Quantas maneiras distintas há para se alocarem as três sondas?
A) 8. B) 10. C) 15. D) 24. E) 40.

50. (CESGRANRIO, 2010) Em uma urna, denominada Urna A, há 12 bolas idênticas, cada uma com um número diferente retirado do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Em uma segunda, denominada Urna B, há 8 bolas idênticas, cada uma com um número diferente retirado do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Duas bolas serão retiradas da Urna A simultaneamente e ao acaso. Em seguida, uma bola será retirada ao acaso da Urna B. De quantas formas diferentes esse processo pode ser feito, de tal maneira que a soma dos três números retirados não ultrapasse 28?
A) 528. B) 525. C) 515. D) 462. E) 459.

51. (CESGRANRIO, 2011) Em uma sala, há n pessoas, dentre as quais estão João e Maria. Serão sorteadas 4 pessoas para fazerem uma entrevista, em grupo, ao mesmo tempo. Maria deseja que João participe do seu grupo de entrevista e está aflita, fazendo as contas para saber as chances que possui de ficar junto com seu amigo. Maria verificou que há 45 possíveis grupos formados por 4 pessoas dos quais ela e João fazem parte.
Assumindo que Maria fez seus cálculos corretamente, tem-se que n é igual a
A) 7. B) 12. C) 66. D) 99. E) 180.

52. (CESGRANRIO, 2011) O diretor, o gerente e quatro funcionários de uma empresa sentam-se em volta de uma mesa circular com 6 lugares para uma reunião. Sabendo-se que o diretor e o gerente não sentam juntos (um ao lado do outro), o número de maneiras diferentes em que essas seis pessoas podem ficar dispostas em volta da mesa é

A) 48. B) 64. C) 72. D) 120. E) 144.

53. (FGV, 2018) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO.

A) 1680. B) 1560. C) 1440. D) 1320. E) 1260.

54. (FGV, 2018) O presidente e o vice-presidente de uma comissão serão escolhidos entre os 10 deputados do Partido X e os 6 deputados do Partido Y. Os Partidos acordaram que os dois cargos não poderão ser ocupados por deputados de um mesmo Partido.

O número de maneiras diferentes de se escolher o presidente e o vice-presidente dessa comissão, é

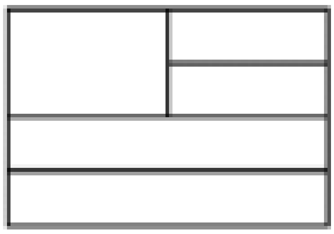
A) 16. B) 32. C) 60. D) 64. E) 120.

55. (FGV, 2018) Manoel possui tintas de 5 cores diferentes e deve pintar a bandeira abaixo de forma que:

• cada região será pintada com uma única cor.

• duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor.

Figura 19: Bandeira das 5 cores



Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/38W42Va`

O número de maneiras diferentes que Manoel pode pintar essa bandeira é

A) 120. B) 180. C) 240. D) 360. E) 720.

56. (FGV, 2016) Regina vai sortear uma menina e um menino entre os estudantes de uma de suas turmas para serem os representantes da turma. Nessa turma há 10 meninas e 12 meninos. O número de duplas diferentes possíveis para representantes da turma é

A) 22. B) 60. C) 72. D) 110. E) 120.

57. (FGV, 2016) O professor Joel vai de sua casa para a escola, de segunda à sexta-feira, de ônibus (O) ou de metrô (M) e, em cada semana, utiliza pelo menos uma vez, cada um desses dois transportes. Joel anota, a cada semana, a ordem dos transportes que utilizou. Por exemplo, OOMOM significa que ele usou o ônibus na segunda, terça e quinta-feira e o metrô nos outros dois dias.

O número de sequências diferentes que Joel pode utilizar os dois transportes em uma semana é

A) 10. B) 14. C) 20. D) 30. E) 32.

58. (FGV, 2016) Lucas foi a uma feira de jogos levando 45 cartas vermelhas e 45 cartas azuis. Em um quiosque ele pode trocar duas cartas vermelhas por uma carta dourada e uma carta azul. Em outro quiosque ele pode trocar três cartas azuis por uma carta dourada e uma carta vermelha. Lucas fez todas as trocas possíveis para conseguir o máximo de cartas douradas.
O número de cartas douradas que Lucas conseguiu com as trocas foi:
A) 59. B) 60. C) 61. D) 62. E) 63.

59. (FGV, 2016) Uma senha de 4 símbolos deve ser feita de forma a conter dois elementos distintos do conjunto A, B, C, D, E e dois elementos distintos do conjunto $0, 1, 2, 3, 4, 5$, em qualquer ordem. Por exemplo, a senha $2EC4$ é uma das senhas possíveis.
Nesse sistema, o número de senhas possíveis é:
A) 2400. B) 3600. C) 4000. D) 4800. E) 6400.

60. (FGV, 2013) Considere os números inteiros positivos de quatro algarismos tais que os quatro algarismos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente decrescente.
A quantidade de tais números é:
A) 210. B) 432. C) 757. D) 3024. E) 6667.

61. (FGV, 2013) Em uma urna há oito bolas brancas e doze bolas pretas, cada uma delas contendo um número. Das oito bolas brancas, seis contêm números maiores do que 7 e das doze bolas pretas nove contêm números maiores do que 7. Retiram-se ao acaso dez bolas da urna.
Sobre essas dez bolas é correto concluir que:
A) no máximo duas são pretas.
B) no máximo duas são brancas.
C) no máximo cinco têm números maiores do que 7.
D) no mínimo cinco têm números maiores do que 7.
E) no mínimo cinco têm números menores ou iguais a 7.

62. (FGV, 2015) João tem 4 primas e 3 primos, deseja convidar duas dessas pessoas para ir ao cinema, mas não quer que o grupo seja exclusivamente masculino.
O número de maneiras diferentes pelas quais João pode escolher seus dois convidados é:
A) 9. B) 12. C) 15. D) 16. E) 18.

63. (FGV, 2014) É possível arrumar as letras da sigla SEDUC de tal forma que as vogais apareçam entre si em ordem alfabética da esquerda para a direita e as consoantes também, entre si, em ordem alfabética da esquerda para a direita. Por exemplo, ECDSU e CEUDS são duas delas.
O número total de tais arrumações é

A) 8. B) 10. C) 20. C) 60. E) 120.

64. (FGV, 2013) Observe o quadro da Figura 20. Note que, começando pela letra S na primeira linha e caminhando consecutivamente sempre para a linha de baixo em diagonal para a coluna imediatamente a esquerda ou para a coluna imediatamente a direita ate chegar na última linha, forma-se sempre a sigla SUDENE.

Figura 20: Quadro dos caminhos

					S					
				U		U				
			D		D		D			
		E		E		E		E		
	N		N		N		N		N	
E		E		E		E		E		E

Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/2IK02Mx`

A quantidade de caminhos possíveis é

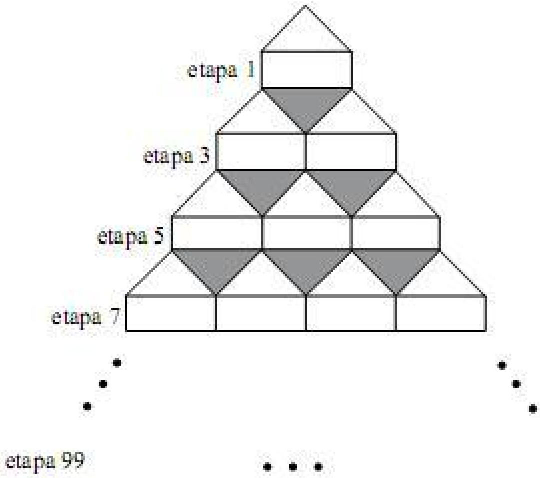
A) 20. B) 21. C) 32. D) 64. E) 720.

65. (FGV, 2014) Com as letras da sigla SEDUCAM podem-se formar pares ordenados do tipo (consoante, vogal). Por exemplo, (S, A) é um desses pares ordenados.
O número total de pares ordenados diferentes que se pode formar do tipo citado é

A) 7. B) 12. C) 14. D) 42. E) 49.

66. (VUNESP, 2012)

Figura 21: Observando o padrão



Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/2HcU7z4`

Mantendo-se o mesmo padrão, ao completar a etapa 99 da Figura 22, o total de triângulos sombreados será igual à soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$, com n igual a

A) 44. B) 45. C) 49. D) 50. E) 99.

67. (VUNESP, 2015) No último dia de aula, a turma de Giovana, João e Luíza, que são irmãos, assinou as camisas uns dos outros. Cada aluno dessa turma assinou a camisa de todos os outros alunos da sala, mas entre os irmãos não houve troca de assinaturas. Nenhum aluno assinou a própria camisa e no total 266 assinaturas foram feitas, o que permite concluir que essa turma tem um número de alunos igual a

A) 15. B) 16. C) 17. D) 18. E) 19.

68. (VUNESP, 2003) O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é o presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

A) 40. B) 7920. C) 10890. D) 11!. E) 12!.

69. (VUNESP, 2003) Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado havia 3 possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e 6 possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador e vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, qual o número de maneiras possíveis de se formar a chapa?

A) 18. B) 12. C) 8. D) 6. E) 4.

70. (IDECAN, 2017) Luana deseja substituir o hábito de tomar refrigerante por suco natural de fruta e consumir a cada dia da semana um único sabor de um grupo de 8 frutas diferentes. De quantas maneiras ela poderá programar o consumo dos sucos no período de uma semana?

A) 5040. B) 10080. C) 20160. D) 40320. E) 60640.

71. (IDECAN, 2016) Para atender uma nova demanda, uma empresa selecionou três de seus 16 funcionários e formou um grupo. Um dos três funcionários do grupo foi designado líder, outro foi designado analista e o outro gerente. O número de combinações possíveis para a formação desse grupo é:

A) 560. B) 680. C) 3360. D) 4080. E) 5430.

72. (IDECAN, 2016) Numa escola de idiomas trabalham 13 professores e cada um deles leciona apenas um idioma sendo que 2 lecionam francês, 4 lecionam espanhol e 7 lecionam inglês. De quantas maneiras pode-se selecionar 2 professores que lecionam idiomas diferentes?

A) 42. B) 50. C) 54. D) 66. E) 80.

73. (IDECAN, 2016) Um plano contém doze pontos. Considerando-se que **não** existem três pontos que estejam alinhados, o número de triângulos que se pode formar com esses pontos é:

A) 120. B) 220. C) 340. D) 720. E) 920.

74. (IDECAN, 2017) Carlos tem 7 camisas de manga longa e 6 de manga curta. Para uma viagem ele deseja separar 5 dessas camisas, sendo que pelo menos 3 delas sejam de manga longa. De quantas maneiras ele poderá fazer a escolha?

A) 564. B) 645. C) 735. D) 756. E) 865.

75. (IDECAN, 2019) Uma determinada prova de um concurso público possui 5 questões de raciocínio lógico. Cada uma dessas questões possui 5 itens a analisar, que devem ser julgados como corretos ou incorretos. De quantas maneiras um candidato pode responder a essas 5 questões, considerando respostas aos itens como corretos e incorretos?

A) 5. B) 625. C) 1024. D) 3125. E) 5000.

76. (IDECAN, 2018) Para uma excursão ao museu, foram selecionados 8 meninos e 10 meninas. A coordenação da escola achou prudente formar uma comissão de liderança entre os estudantes selecionados, sendo que seriam escolhidos 2 meninos e 3 meninas. Quantas comissões podem ser formadas?

A) $A_{10,3} \cdot A_{8,2}$. B) $A_{10,3} + A_{8,2}$. C) $C_{10,3} \cdot C_{8,2}$. D) $C_{10,3} + C_{8,2}$. E) $\dfrac{C_{10,3}}{C_{8,2}}$.

77. (IDECAN, 2018) Uma equipe mista de vôlei de quadra amador conta com um plantei de 15 jogadores, sendo 8 mulheres e 7 homens. Considerando que todos os jogadores podem jogar em todas as posições, a quantidade de equipes distintas que se pode formar com exatamente 3 homens e 3 mulheres é de

A) 1960. B) 1920. C) 1980. D) 1950. E) 1990.

78. (IDECAN, 2018) A família de Levi costuma realizar um tradicional jogo de troca de presentes na véspera de Natal. Mantendo-se essa tradição familiar, se, em um determinado ano da década de 2010 o dia de Natal fosse comemorado em uma sexta-feira, em que dia da semana se realizaria o jogo da família de Levi quatro anos depois?

A) Sábado. B) Domingo. C) Segunda. D) Terça. E) Quarta.

79. (IDECAN, 2015) Num jogo da Copa Sul-Americana de Clubes de Futebol, em 2011, o Vasco da Gama, do Brasil, venceu o Aurora, da Bolívia, por 8 a 3. De quantas maneiras distintas o placar pode evoluir de 0 a 0 para 8 a 3, a favor do Vasco da Gama, levando em conta apenas a ordem em que os times construíram a sequência dos 11 gols?

A) 165. B) 264. C) 275. D) 990. E) 1220.

80. (IDIB, 2019) João e Maria foram comemorar o aniversário de casamento em um restaurante que tem 3 opções de pratos de entrada, 3 opções de prato principal e 4 opções de sobremesa. Sabendo-se que cada pessoa deve escolher 1 prato de entrada, 1 prato principal e 1 sobremesa, assinale a alternativa que indica corretamente o número de maneiras distintas que cada pessoa pode escolher sua comida:

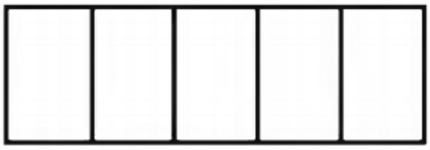
A) 72. B) 36. C) 18. D) 12. E) 9.

81. (IBADE, 2019) Um usuário de um sistema informatizado deseja criar uma senha começando com quatro letras, escolhidas entre as vogais, seguidas de cinco algarismos ímpares distintos. O total de senhas possíveis é:

A) 75000. B) 125000. C) 150000. D) 625000. E) 1953125.

82. (IBADE, 2018) Uma bandeira retangular é formada por 5 faixas verticais, como visto na figura abaixo. As faixas dessa bandeira serão pintadas, uma de cada cor, com as cores: azul, vermelho ou verde. O número de maneiras distintas que tal bandeira poderá ser pintada, com a restrição de que duas faixas consecutivas não sejam pintadas com a mesma cor é:

Figura 22: Bandeira das 5 faixas



Fonte: Qconcursos.
Disponível em: `https://bit.ly/3pEvZqx`

A) 128. B) 48. C) 120. D) 243. E) 64.

83. (IBADE, 2018) Um **anagrama** de uma palavra é obtido através da alteração da ordem das letras dessa palavra, mantendo-se a mesma quantidade de letras da palavra inicial. A própria palavra inicial é considerada um dos seus anagramas e não há necessidade de que o termo formado tenha significado no nosso idioma. Por exemplo, um dos anagramas da palavra **roupa** é o termo **apour**. Dessa forma, podemos afirmar que a quantidade de anagramas da palavra mercado, iniciados por uma consoante é:

A) 2880. B) 1440. C) 14200. D) 5040. E) 12000.

84. (IBADE, 2019) Se uma determinada senha de site de internet é formada por 6 letras minúsculas distintas do nosso alfabeto de 26 letras, a quantidade de senhas possíveis para esse site, iniciadas por **cb**, é:

A) 255024. B) 284200. C) 182350. D) 164000. E) 128900.

85. (IBADE, 2017) Uma equipe com seis analistas deve ser formada a partir de um grupo de dez analistas previdenciários (entre eles Marcos e Gabriel). O número total de equipes que se pode formar, se Marcos e Gabriel devem necessariamente fazer parte, é:

A) 60. B) 35. C) 70. D) 65. E) 90.

86. (IBADE, 2017) Em um departamento, trabalham seis técnicos em tecnologia da informação e quatro técnicos em suporte e manutenção em informática, o número de equipes distintas com três técnicos, sendo pelo menos um técnico em tecnologia da informação, que se pode formar é:

A) 116. B) 80. C) 36. D) 20. E) 96.

87. (LEGALLE, 2015) Um químico dispõe de 7 substâncias e quer misturar 4 delas. Porém, 2 das substâncias não podem ser misturadas, pois podem explodir. Desse modo, o número de misturas que o químico poderá efetuar é:

A) 15. B) 20. C) 25. C) 30. E) 35.

88. (CONPASS, 2018) Considere dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dados por $p(x) = x^{150} + x^{149} + x^{148} + \cdots + x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \cdots + x^2 + x + 1$.
No produto $p(x) \cdot q(x)$ qual é o coeficiente de x^{125}?

A) 100. B) 101. C) 102. D) 99. E) 98.

89. (CONPASS, 2018) Em uma reunião, cada um dos participantes cumprimenta cada um dos demais uma única vez. Se o número de cumprimentos entre dois homens foi 21 e entre duas mulheres foi 45, quantos foram os cumprimentos entre um homem e uma mulher?

A) 60. B) 80. C) 65. D) 75. E) 70.

90. (CONPASS, 2016) Em uma lanchonete existem 8 tipos de verduras e 5 tipos de tempero. Sabendo que uma pessoa deve preparar uma salada com pelo menos 1 tipo de verdura e nenhum ou 1 tipo de tempero, o número de saladas que contenham obrigatoriamente a verdura A é igual a

A) 768. B) 762. C) 756. D) 640. E) 630.

4.2 Gabarito

01 ⊢ E; 02 ⊢ B; 03 ⊢ B; 04 ⊢ B; 05 ⊢ A; 06 ⊢ B; 07 ⊢ E; 08 ⊢ D; 09 ⊢ D; 10 ⊢ B;

11 ⊢ E; 12 ⊢ B; 13 ⊢ B; 14 ⊢ A; 15 ⊢ A; 16 ⊢ D; 17 ⊢ B; 18 ⊢ D; 19 ⊢ A; 20 ⊢ B;

21 ⊢ E; 22 ⊢ B; 23 ⊢ D; 24 ⊢ D; 25 ⊢ D; 26 ⊢ B; 27 ⊢ B; 28 ⊢ C; 29 ⊢ E; 30 ⊢ C;

31 ⊢ D; 32 ⊢ D; 33 ⊢ D; 34 ⊢ D; 35 ⊢ C; 36 ⊢ D; 37 ⊢ D; 38 ⊢ C; 39 ⊢ D; 40 ⊢ A;

41 ⊢ E; 42 ⊢ D; 43 ⊢ A; 44 ⊢ B; 45 ⊢ B; 46 ⊢ C; 47 ⊢ C; 48 ⊢ B; 49 ⊢ D; 50 ⊢ B;

51 ⊢ B; 52 ⊢ C; 53 ⊢ A; 54 ⊢ E; 55 ⊢ E; 56 ⊢ E; 57 ⊢ D; 58 ⊢ C; 59 ⊢ B; 60 ⊢ A;

61 ⊢ D; 62 ⊢ C; 63 ⊢ E; 64 ⊢ B; 65 ⊢ B; 66 ⊢ C; 67 ⊢ C; 68 ⊢ C; 69 ⊢ C; 70 ⊢ D;

71 ⊢ C; 72 ⊢ B; 73 ⊢ B; 74 ⊢ D; 75 ⊢ D; 76 ⊢ C; 77 ⊢ A; 78 ⊢ D; 79 ⊢ A; 80 ⊢ B;

81 ⊢ A; 82 ⊢ B; 83 ⊢ E; 84 ⊢ A; 85 ⊢ C; 86 ⊢ A; 87 ⊢ C; 88 ⊢ A; 89 ⊢ A; 90 ⊢ B.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se não houvesse dificuldades no ensino e na aprendizagem da *análise combinatória*, este trabalho talvez fosse desnecessário. Ocorre que a combinatória é um tema gerador de obstáculos, tanto durante a jornada escolar dos alunos quanto para aqueles que ao terminarem a vida estudantil precisam, em algum momento, aplicar conhecimentos referentes a esse tema em alguma situação de eventual necessidade. O objetivo principal desse trabalho gira em torno de mostrar a aplicabilidade dos principais tópicos de combinatória, frequentes em concursos e em vestibulares, formulando pois uma abordagem direcionada, objetiva e contextualizada.

Ao analisar questões de combinatória que apareceram em centenas de provas de concursos, englobando diversas bancas, disponibilizadas na internet, foi possível chegar à conclusão que as bancas apresentam uma tendência a trazer problemas relacionados ao *teorema fundamental da contagem*, aos *arranjos*, às *combinações*, isto é, as examinadoras se atentam às técnicas básicas de contagem, as que foram abordadas no *Capítulo 2* deste texto. Questões relacionadas ao *princípio da casa dos pombos*, ao *binômio de Newton*, ao *princípio da inclusão e exclusão*, *Capítulo 3*, por exemplo, aparecem com menor frequência nas provas.

Procuramos desenvolver o raciocínio de cada questão apresentada ao longo do texto de forma detalhada, tentando desenvolver todo o processo, evitando o uso de fórmulas sempre que isso não implicasse trabalho mais árduo para se obter as soluções. Embora isso possa tornar o texto levemente repetitivo, também o deixa menos técnico e de mais simples entendimento para o leitor. Além disso, vale salientar que focamos na clareza dos conceitos e, principalmente, das aplicações que foram expostas. Já existem muitos livros, artigos e dissertações que abordam combinatória, mas os estudantes continuam tendo dificuldade com esse assunto, principalmente quando tentam usar as técnicas que aprenderam na resolução de problemas. Por isso, este trabalho está totalmente focado na aplicação das técnicas de contagem, para facilitar a vida do estudante.

O que fica implícito ao longo das páginas é que a forma mais simples de se aprender combinatória é realmente praticando, resolvendo problemas, se familiarizando com os conceitos; adquirindo intuição, estratégia e autoconfiança. Quanto mais problemas resolvemos, ficamos mais aptos a resolver outros que vierem. Porém, se o estudante dispuser de pouco tempo e tiver que resolver muitos problemas para conseguir dominar certo assunto, isso representará uma dificuldade. Essa situação poderá ser vencida com organização e estratégia de estudo. Foi pensando nisso que escolhemos os problemas que aparecem com maior frequência nas provas de concursos e vestibulares e os apresentamos no Capítulo 2, para que o estudante consiga, ao terminar de ler, adquirir uma base sólida de conhecimentos que o prepare para resolver essas provas.

A estratégia de estudos do autor deste trabalho ilustra o que acabamos de dizer: ao longo de cinco anos, ele disputou, sem êxito, cerca de dezesseis concursos públicos durante os quais estudou de forma ineficaz, supervalorizando quase que exclusivamente a teoria presente nos livros didáticos e praticamente ignorando a parte prática de resolver problemas. Bastaram mais dois anos de preparação utilizando a estratégia recomendada neste trabalho, isto é, a resolução de questões de concurso encontradas na internet, para conseguir duas aprovações consecutivas.

Este trabalho é acessível, em termos de didática, a professores e a estudantes em geral e desejamos que contribua para o processo de ensino e aprendizagem deles. Haja vista que a democratização do conhecimento é do interesse de todos. Esperamos que o material coletado e organizado nesse texto sirva como referência para que professores de Matemática o usem em suas aulas e para os estudantes que buscam os conhecimentos de combinatória com exemplos práticos. Enfim, pelo que expusemos acima, cremos que os objetivos deste trabalho foram atingidos.

REFERÊNCIAS

[1] ALCÂNTARA, E. Ferreira. **A Matemática Básica em Provas do Enem**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Centro de Ciências e Tecnologia. Juazeiro: UFCA, 2020, 216p. Disponível em: "https://bityli.com/LzeAK". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[2] AMÉRICO, G. Virgolino. **Resolução de Problemas sobre Análise Combinatória para as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Belém: UFPA, 2013, 30p. Disponível em: "https://bit.ly/3u7YhMv". Acesso em: 17 de fevereiro de 2021.

[3] BENEVIDES, F. Siqueira. **O Fatorial de um Número e as Permutações Simples**. Revisão Antonio Caminha M. Neto. 2016, 7p. Disponível em: "https://bit.ly/2M98jfe". Acesso em: 30 de janeiro de 2021.

[4] BENEVIDES, F. Siqueira. **Arranjos e Combinações Simples**. Revisão: Antonio Caminha M. Neto. 2016, 9p. Disponível em: "https://bit.ly/3j1efD1". Acesso em: 30 de janeiro de 2021.

[5] BENEVIDES, F. Siqueira. **Permutações com Elementos Repetidos**. Revisão: Antônio Caminha M. Neto. 2016, 6p. Disponível em: "https://bit.ly/3rhrAKn". Acesso em: 30 de janeiro de 2021.

[6] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] CARVALHO, Paulo. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em "https://bit.ly/2IK4XND". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[8] GODOY, Filho J. H. B. **O Princípio da Inclusão e Exclusão e Suas Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Dourados: UFGD, 2016, 44p. Disponível em: "https://bit.ly/3m5GMIk". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[9] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar, 5: Combinatória, Probabilidade**. Samuel Hazzan. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

[10] IEZZI, Gelson. et al. **Matemática, Ciência e Aplicações - Volume 2.** 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[11] KATZ, Victor J. **A História da Matemática**. 3ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[12] LIMA, A. P. B. de. **Princípio Fundamental da Contagem: Conhecimentos de Professores de Matemática sobre seu uso na Resolução de Situações Combinatórias**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: UFPE, 2015, 138p. Disponível em: "`https://bityli.com/pgPxy`". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[13] LIMA, Elon. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 2**. Coleção do professor de Matemática. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[14] LIMA, Elon. **Matemática e Ensino**. Coleção do professor de Matemática. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

[15] LIMA, Elon. et al. **Temas e Problemas Elementares**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[16] MORGADO, Augusto. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do professor de Matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[17] MORGADO, Augusto; CARVALHO, Paulo. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[18] MORGADO, Augusto. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade, com as soluções dos exercícios**. Coleção do professor de matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[19] MOURÃO, W. Lacerda. **A Análise Combinatória nos Vestibulares Militares e Olimpíadas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Centro de Ciências Exatas e da Natureza. João Pessoa: UFPB, 2018, 43p. Disponível em: "`https://bit.ly/38ZA96o`". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[20] OLIVEIRA, L. José. **Analise Combinatória e Probabilidades nos Concursos Públicos de Nível Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas.Viçosa: UFV, 2018, 50p. Disponível em: "`https://bit.ly/2IVMqy2`". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[21] PEREIRA, J. M. S. S. **Introdução à Matemática Combinatória**. Rio de Janeiro: Interciência, 2013.

[22] POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[23] SANTOS, J. Plínio; ESTRADA, E. Luis. **Problemas Resolvidos de Combinatória**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2018.

[24] SILVA, S. D. da. **Estudo do Binômio de Newton**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Centro de Ciências Exatas e da Natureza. João Pessoa: UFPB, 2013, 60p. Disponível em: "https://bit.ly/3nKm8xL". Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[25] TREVIZAN, Wanessa; BROLEZZI, Antônio. **Como Ensinar Análise Combinatória.** São Paulo: Livraria da Física, 2016.

[26] <https://www.pciconcursos.com.br/>. Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[27] <http://bit.ly/2LUogoS>. Acesso em: 14 de janeiro de 2021.

[28] <https://www.qconcursos.com/>. Acesso em: 14 de janeiro de 2021.