



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**MARCOS PAULO BARROS LOPES**

**SIMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NAS RESOLUÇÕES DE  
PROBLEMAS**

**REDENÇÃO-CE  
2021**

MARCOS PAULO BARROS LOPES

SIMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NAS RESOLUÇÕES DE  
PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO-CE  
2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Lopes, Marcos Paulo Barros.

L864s

Simetrias e transformações isométricas nas resoluções de problemas / Marcos Paulo Barros Lopes. - Redenção, 2021.  
115f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof.º Dr.º Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Simetrias. 2. Isometrias. 3. Geometria. 4. Ensino de Matemática. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 516

---

**MARCOS PAULO BARROS LOPES**

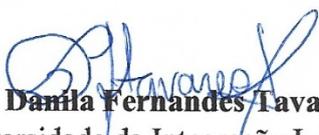
**SIMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NAS RESOLUÇÕES DE  
PROBLEMAS**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 29/01/2021

**BANCA EXAMINADORA**

  
**Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)**  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

  
**Dra. Danila Fernandes Tavares**  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

  
**Dr. Emanuel Mendonça Viana**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente cito Filipenses 4:13 “Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece” e, então, agradeço Àquele que é minha fonte de sabedoria, minha fortaleza e, acima de tudo, que guia meus passos. Quantas vezes pedi em orações forças e luz para permanecer forte em mais uma das grandes batalhas da vida. Ao término desta batalha tão importante, agradeço a Deus por estar comigo.

Neste momento ímpar de felicidade, quero agradecer a enorme motivação, o carinho, a crença e o vultoso amor recebido de meus pais, Maria Helena (Leninha) e Josué.

Ao meu professor e orientador, mais que um grande amigo, Doutor Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela paciência, pelo tempo dedicado, pelas sugestões e correções, pelos acompanhamentos efetuados durante a elaboração desta dissertação e em toda minha trajetória nesse programa. Não poderia deixar de citar também que seu esmero e principalmente suas orações foram fundamentais nos momentos de maior dificuldade.

Aos professores do mestrado que sempre dividiram seus conhecimentos, em especial, à Doutora Danila Fernades Tavares, que ministrou a disciplina de Geometria com grande maestria e com um toque de leveza nas construções e demonstrações, permitindo, assim, aos seus alunos uma observação sob um ângulo diferenciado da Geometria.

À professora e coordenadora do Profmat-Unilab, Doutora Amanda Angélica Feltrin Nunes, sempre muito amável, dedicada, incentivadora, dotada de uma sensibilidade ímpar, além de muito atenciosa com seus alunos.

Ao professor e diretor de ensino do Colégio Ari de Sá, Marcos André Tomaz Lima, pelo apoio e principalmente pela compreensão.

Aos meus colegas de turma em geral, pelo convívio, pela amizade, pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas, em especial, a Kelma Gomes de Melo e José Mário Furtado de Oliveira, pelo apoio, pela colaboração, pelo incentivo e, também, pelo alento, tornando essa batalha menos árdua, nessa expressiva etapa de aprendizado.

Aos meus queridos amigos Francilene da Silva Sales, Francisco Jonas de Sousa Filho, Patricia Freitas Duarte de Sousa e Vânia Maria da Silva Moreira, que foram fundamentais na construção das figuras, animações, hospedagem de *links*, digitações e correções ortográficas desta dissertação.

Aos professores participantes da banca examinadora Doutora Danila Fernades Tavares e Doutor Emanuel Mendonça Viana, pela disponibilidade para a leitura de minha dissertação, os quais, de maneira significativa, abrilhantaram esta pesquisa com sugestões e apontamentos.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão dessa jornada.

“Diga-me e eu esquecerei,  
ensina-me e eu poderei lembrar,  
envolva-me e eu aprenderei.”

BENJAMIN FRANKLIN

## RESUMO

O principal objetivo deste estudo é uma melhor e maior compreensão da Geometria Euclidiana Plana e Espacial para buscar interpretações mais simplórias e apenas visuais das simetrias e transformações isométricas e aplicá-las nas demonstrações de teoremas, resoluções de problemas e nas metodologias pedagógicas dos Ensinos Básico e Superior, facilitando, assim, o processo de ensino e aprendizagem. O estudo é feito sob uma visão holística da simetria e transformações isométricas nas artes, na beleza, na música, na Álgebra, na Geometria e na abordagem de questões de Olimpíadas, de vestibulares em geral, principalmente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e também em questões do Exame Nacional de Qualificação (ENQ) ligado ao PROFMAT. Aborda-se, na medida do possível, não só as simetrias e as transformações isométricas com e sem as formalidades usuais tanto da Álgebra quanto da Geometria, mas também como uma ferramenta de aprendizagem que pode encantar os alunos.

**Palavras-chave:** Simetrias. Isometrias. Geometria. Ensino de Matemática.

## ABSTRACT

The main objective of this study is to develop a better and greater understanding of Euclidean Geometry, Plane and Spatial, to seek simpler and visual interpretations of symmetries and isometric transformations and apply them in theorem demonstrations, problem solving and pedagogical methodologies in Basic and Higher Education, thus facilitating the teaching and learning process of students. This essay was carried out under a holistic view of symmetry and isometric transformations in the arts, beauty, music, algebra, geometry and in the approach Olympic Tests, vestibular in general, highlighting the National High School Exam (*ENEM*) and also doubts about the “National Qualification Exam” (ENQ) linked to *PROFMAT*. It approaches, as far as possible, not only symmetries and isometric transformations with and without the usual formalities of Algebra and Geometry, but also it works as a learning tool that can enchant students.

**Keywords:** Symmetries. Isometries. Geometry. Mathematics Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – O Taj Mahal, em Agra, Índia.....	16
<b>Figura 2</b> – Sede das Nações Unidas: a fachada do edifício é formada por um retângulo de ouro.....	17
<b>Figura 3</b> – Desenhos de Leonardo da Vinci: à esquerda, estudo sobre as proporções da cabeça e dos olhos (Biblioteca Reale, Torino) e, à direita, <i>Homem Vitruviano</i> (Gallerie dell'Accademia, Veneza).....	18
<b>Figura 4</b> – Pentagrama. ....	19
<b>Figura 5</b> – Retângulo áureo. ....	19
<b>Figura 6</b> – Razões para aproximações do $\phi$ . ....	21
<b>Figura 7</b> – Espiral logarítmica. ....	22
<b>Figura 8</b> – Crescimento das folhas ao longo do caule. ....	23
<b>Figura 9</b> – Página do Twitter.....	23
<b>Figura 10</b> – Simetrias de translação, de rotação e de reflexão. ....	24
<b>Figura 11</b> – Simetria de rotação (ângulos). ....	25
<b>Figura 12</b> – Simetria de translação. ....	26
<b>Figura 13</b> – Simetria de reflexão.....	26
<b>Figura 14</b> – A translação determinada pelo vetor $v$ leva toda reta $r$ a uma paralela e transforma o sistema $OXY$ no sistema $O'X'Y'$ .....	30
<b>Figura 15</b> – As coordenadas de $P_1 = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais às coordenadas de $P$ no sistema $OXY$ .....	31
<b>Figura 16</b> – A rotação de centro $O$ e ângulo $\alpha$ leva $P$ a $P_1$ .....	32
<b>Figura 17</b> – O ponto $P_1$ , o triângulo $A_1B_1C_1$ e a mão direita $M_1$ são, respectivamente, as imagens do ponto $P$ , do triângulo $ABC$ e da mão esquerda $M$ pela reflexão em torno da reta $r$ . Note que o sentido do percurso $A_1B_1C_1$ é oposto ao sentido $ABC$ . ....	35
<b>Figura 18</b> – A reflexão em torno de $r$ leva $OX$ a $OX_1$ e $OY$ a $OY_1$ . ....	36
<b>Figura 19</b> – A reflexão em torno da reta $y = ax + b$ leva $P$ a $P_1$ , com as etapas intermediárias $P'$ e $P''$ . ...	36
<b>Figura 20</b> – O triângulo $A_1B_1C_1$ , imagem do triângulo $ABC$ pela reflexão em torno de $r$ com vetor de deslizamento $v$ . ....	37

<b>Figura 21</b> – Pegadas ao longo de um caminho retilíneo ilustram uma reflexão com deslizamento. ....	38
<b>Figura 22</b> – A reflexão em torno de $r$ seguida da translação ao longo de $v$ é a mesma que a reflexão em torno de $s$ com deslizamento ao longo do $w$ . ....	39
<b>Figura 23</b> – Isometria de um plano. ....	40
<b>Figura 24</b> – Isometria de retas perpendiculares contidas no plano. ....	40
<b>Figura 25</b> – Isometria de retas perpendiculares no espaço. ....	41
<b>Figura 26</b> – Inversão de isometrias. ....	41
<b>Figura 27</b> – Simetria em torno de um plano. ....	42
<b>Figura 28</b> – Reflexão em torno de um plano. ....	42
<b>Figura 29</b> – Rotação em torno de um plano. ....	43
<b>Figura 30</b> – Rotação de um plano em torno da reta. ....	44
<b>Figura 31</b> – Translação de segmentos. ....	45
<b>Figura 32</b> – Soma de dois vetores. ....	45
<b>Figura 33</b> – Toda translação é uma isometria. ....	46
<b>Figura 34</b> – Isometria helicoidal. ....	46
<b>Figura 35</b> – Reflexão com deslizamento. ....	46
<b>Figura 36</b> – Rotação refletida. ....	47
<b>Figura 37</b> – Isometria de retas perpendiculares. ....	47
<b>Figura 38</b> – Isometria com três pontos fixos não colineares. ....	48
<b>Figura 39</b> – Isometria do espaço como função identidade. ....	49
<b>Figura 40</b> – Reflexão em torno do plano. ....	49
<b>Figura 41</b> – Translação do losango BPDQ. ....	54
<b>Figura 42</b> – Translação do triângulo BYC. ....	54
<b>Figura 43</b> – Translação do triângulo CWD. ....	54
<b>Figura 44</b> – Translação do triângulo BPQ. ....	55
<b>Figura 45</b> – Translação do triângulo DOQ. ....	55

<b>Figura 46</b> – Translação do triângulo DOP.....	56
<b>Figura 47</b> – Eixos de simetria do quadrado.....	57
<b>Figura 48</b> – Congruência de triângulos.....	58
<b>Figura 49</b> – Reflexão dos triângulos congruentes.....	58
<b>Figura 50</b> – Retas paralelas aos eixos de simetria.....	59
<b>Figura 51</b> – Congruência dos triângulos MXR, MRS, ROS e MSY.....	59
<b>Figura 52</b> – Construção geométrica do Exemplo 4.3.....	60
<b>Figura 53</b> – Eixo de simetria do retângulo.....	60
<b>Figura 54</b> – Rotação de $180^\circ$ no triângulo MPO em torno do ponto O.....	61
<b>Figura 55</b> – Congruência de triângulos.....	62
<b>Figura 56</b> – Translação vertical do triângulo DZC.....	62
<b>Figura 57</b> – Translação horizontal do triângulo AYD.....	63
<b>Figura 58</b> – Congruência de triângulos.....	64
<b>Figura 59</b> – Translação vertical do triângulo CDK.....	64
<b>Figura 60</b> – Translação horizontal do triângulo ADN.....	65
<b>Figura 61</b> – Elipses simétricas por rotação em torno do ponto O.....	66
<b>Figura 62</b> – Ponto A de coordenadas iguais.....	66
<b>Figura 63</b> – Área do círculo menor subtraída da área do hexágono.....	68
<b>Figura 64</b> – Losango $A_1BB_1O$ .....	68
<b>Figura 65</b> – Reflexão em relação à circunferência menor.....	69
<b>Figura 66</b> – Construção geométrica do Exemplo 4.8.....	70
<b>Figura 67</b> – Reflexões dos triângulos ACK e BCM.....	70
<b>Figura 68</b> – Translação de segmentos.....	71
<b>Figura 69</b> – Simetria de rotação.....	72
<b>Figura 70</b> – Construção geométrica do losango AERG.....	74
<b>Figura 71</b> – Triângulos com mesma base e altura.....	75

<b>Figura 72</b> – Translação horizontal de segmentos.....	75
<b>Figura 73</b> – Translação oblíqua de triângulos.....	76
<b>Figura 74</b> – Menor percurso que toca uma reta.....	76
<b>Figura 75</b> – Simetria do ponto A em relação a reta $r$ .....	77
<b>Figura 76</b> – Propriedade fundamental dos espelhos planos.....	78
<b>Figura 77</b> – O caminho mais curto entre dois pontos S e T passando pela reta $r$ .....	79
<b>Figura 78</b> – Simetria por reflexão.....	80
<b>Figura 79</b> – O caminho mais curto.....	81
<b>Figura 80</b> – Simetria das diagonais do retângulo.....	82
<b>Figura 81</b> – Mediana relativa à hipotenusa.....	82
<b>Figura 82</b> – Octaedro.....	83
<b>Figura 83</b> – Construção geométrica do Exemplo 4.16.....	84
<b>Figura 84</b> – Projeção ortogonal do cubo e do octaedro sobre a base ABCD.....	84
<b>Figura 85</b> – Pirâmide regular de base quadrangular com todas as arestas iguais (metade do octaedro).....	85
<b>Figura 86</b> – Rotas entre cidades sem escalas (exemplo).....	86
<b>Figura 87</b> – Todas as rotas entre duas cidades sem escala (Matriz Simétrica).....	86
<b>Figura 88</b> – Todas as rotas de cidade a cidade com uma só escala (Matriz Simétrica).....	87
<b>Figura 89</b> – Todas as rotas de cidade a cidade com duas escalas (Matriz Simétrica).....	87
<b>Figura 90</b> – Quadrado ABCD e as retas paralelas $r$ e $s$ .....	89
<b>Figura 91</b> – Translação horizontal do quadrado ABCD.....	89
<b>Figura 92</b> – Circunferência de centro C.....	89
<b>Figura 93</b> – Translações oblíquas.....	90
<b>Figura 94</b> – Região sombreada interior à circunferência e exterior ao quadrado.....	90
<b>Figura 95</b> – Translações horizontais e verticais.....	91
<b>Figura 96</b> – Translações horizontais e verticais.....	92
<b>Figura 97</b> – Prisma regular.....	93

<b>Figura 98</b> – Prisma regular inscrito no cilindro. ....	94
<b>Figura 99</b> – Seção transversal ( $\alpha$ ) ao prisma regular contendo o ponto M. ....	95
<b>Figura 100</b> – Resolução visual para a soma dos $n$ primeiros números naturais.....	96
<b>Figura 101</b> – Proposição de Diofanto.....	97
<b>Figura 102</b> – Resolução visual para a soma dos $n$ primeiros números ímpares .....	97
<b>Figura 103</b> – Resolução por simetria para a série geométrica.....	98
<b>Figura 104</b> – Quadrado inscrito no semicírculo. ....	98
<b>Figura 105</b> – Quadrado inscrito no círculo. ....	99
<b>Figura 106</b> – Rotações dos triângulos ABC e CDE.....	99
<b>Figura 107</b> – Resolução visual para a desigualdade entre média aritmética e geométrica. ....	100
<b>Figura 108</b> – Meio arco de cicloide e metade da circunferência geradora da cicloide.....	101
<b>Figura 109</b> – Translação de segmentos. ....	101
<b>Figura 110</b> – A área B é igual à metade da área de um retângulo. ....	101
<b>Figura 111</b> – A área da cicloide.....	102
<b>Figura 112</b> – Arco do cicloide. ....	102
<b>Figura 113</b> – O quadrado na demonstração do Teorema de Pitágoras. ....	102
<b>Figura 114</b> – Translações dos triângulos retângulos. ....	103
<b>Figura 115</b> – Interpretação geométrica de $4^1 - 1$ .....	104
<b>Figura 116</b> – Interpretação geométrica de $4^2 - 1$ .....	104
<b>Figura 117</b> – Interpretação geométrica de $4^2 = (3 + 1)^2$ .....	105
<b>Figura 118</b> – Interpretação geométrica de $4^3 = 4 \cdot 4^2 = 4(3 + 1)^2$ . ....	106
<b>Figura 119</b> – Interpretação geométrica de $x = a + 1 \rightarrow x^m = (a + 1)^m$ . ....	107
<b>Figura 120</b> – Pirâmide de Leonardo da Vinci. ....	108
<b>Figura 121</b> – Pirâmide “explodida” (1) de Leonardo da Vinci.....	109
<b>Figura 122</b> – Pirâmide “explodida” (2) de Leonardo da Vinci.....	109
<b>Figura 123</b> – Pirâmide regular de base quadrangular (ABCDE). ....	110

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>2. SIMETRIA.....</b>	<b>16</b>
2.1 O NÚMERO ÁUREO E PROPORÇÃO ÁUREA .....	18
2.2 A CONCHA ESPIRAL.....	22
<b>3. ISOMETRIAS NO PLANO E NO ESPAÇO.....</b>	<b>24</b>
3.1 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO .....	24
3.1.1 SIMETRIA DE ROTAÇÃO .....	25
3.1.2 SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO.....	25
3.1.3 SIMETRIAS DE REFLEXÃO .....	26
3.2 O CONCEITO MATEMÁTICO DE TRANSFORMAÇÕES (ISOMETRIAS).....	26
3.2.1 ISOMETRIAS NO PLANO.....	27
3.2.2 ISOMETRIAS NO ESPAÇO.....	39
<b>4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS USANDO ISOMETRIAS.....</b>	<b>51</b>
<b>5. ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES .....</b>	<b>96</b>
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>113</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>115</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento desta dissertação foi baseado principalmente nas dúvidas e nas dificuldades dos alunos em aprender principalmente Geometria. Pensar em estratégias tentando minimizar essas dificuldades assim como a dificuldade intrínseca de lecionar Geometria, foi fundamental na busca de metodologias e de soluções diferentes das comumente encontradas em diversos periódicos matemáticos do Ensino Básico, porém embasadas segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) numa nova forma de ensinar Geometria. Tentando sempre buscar uma alternativa mais compreensível a aprendizagem dos alunos, o autor se apropriou de um cabedal de conhecimentos fornecido por uma vasta bibliografia utilizada ao longo dos anos e através de observações das reações dos alunos em sala de aula. Assim o autor pode não só lapidar os planejamentos de aulas como também aprimorar a forma de lecionar. De modo empírico o autor foi dando os passos iniciais em um desenvolvimento pedagógico baseado no uso de simetrias e transformações isométricas nas resoluções de diversos problemas matemáticos não somente em Geometria como também em diversos segmentos da Matemática no Ensino Básico e Superior.

Usando simetria na sala de aula o autor despertou nos alunos um maior engajamento e entendimento tanto em Geometria quanto em outros segmentos da Matemática. O fenômeno da simetria e das transformações isométricas nos alunos é encantador. Inicialmente a reação dos alunos ao visualizar resoluções de problemas utilizando simetrias é de dúvida em relação a tais procedimentos, ou seja, se realmente esses argumentos são válidos. Com o passar do tempo, tais procedimentos vão ganhando formalismo e, com a junção de outras ferramentas matemáticas, essas dúvidas vão sendo dirimidas e à proporção que avançamos no conteúdo a simetria vai ganhando força e se tornando cada vez mais uma ferramenta indispensável possibilitando assim uma facilidade em compreender e resolver problemas matemáticos em geral. Esta dissertação trata da experiência fantástica do autor em descobrir soluções diferenciadas para problemas de Matemática em geral. E que tais soluções além de conter formalismos matemáticos mostram uma maior capacidade em envolver os alunos no processo ensino-aprendizagem. O resultado da aplicação de simetrias e transformações isométricas no processo de ensino-aprendizagem é realmente primoroso.

Essa dissertação foi dividida em quatro partes. A primeira delas (capítulo 2) expõe a origem da simetria e algumas curiosidades como a simetria na natureza, no DNA, o número da beleza (número de ouro), na arquitetura, no corpo humano e no design.

Na segunda parte (capítulo 3) temos inicialmente o conceito da simetria no uso comum do nosso cotidiano e posteriormente as propriedades das simetrias e transformações isométricas no plano e no espaço escritas e demonstradas de acordo com as exigências do formalismo matemático dando embasamento necessário para as aplicações nas resoluções de problemas e demonstrações de teoremas.

Na terceira parte (capítulo 4) temos as aplicações das propriedades da simetria e das transformações isométricas na resolução de problemas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de Olimpíadas de Matemática, do Exame Nacional de Qualificação (ENQ) do PROFMAT e de vestibulares em geral.

Na quarta parte (capítulo 5) temos as aplicações das simetrias e das transformações isométricas em diversas propriedades e teoremas, propiciando demonstrações visuais, ou seja, através de desenhos e interpretações geométricas.

## 2. SIMETRIA

A palavra *simetria* tem raízes antigas, vem do grego *sym* e *metria*, que se traduzem em “a mesma medida”. Quando os gregos classificavam como simétricos uma obra de arte ou um desenho arquitetônico, eles queriam dizer que era possível identificar uma pequena parte da obra tal que as dimensões de todas as outras partes continham tal parte um número preciso de vezes (as partes eram “comensuráveis”).

O significado moderno de simetria (introduzido pela primeira vez no final do século XVIII) no sentido matemático preciso é realmente “imunidade a uma possível alteração”.

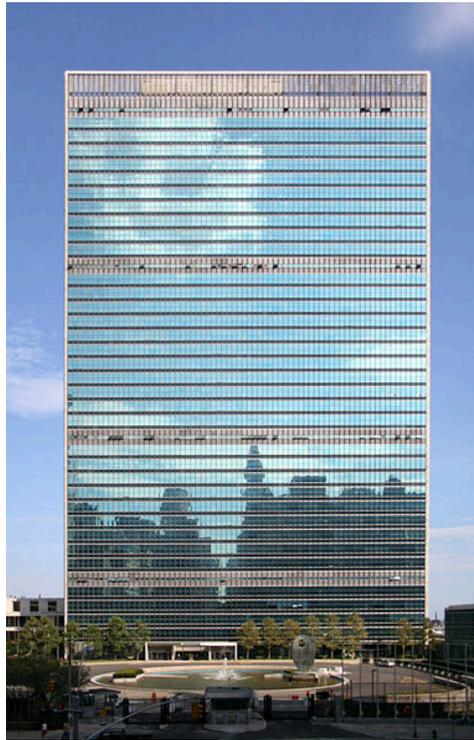
Na concepção e reflexão da maioria das pessoas, a ideia de simetria está mais ligada a pensamentos sobre arte e natureza do que sobre Matemática. Os homens são naturalmente atraídos por simetrias desde a Grécia Antiga. Observando as Figuras 1 e 2, podemos perceber o uso das simetrias na construção civil.

**Figura 1** – O Taj Mahal, em Agra, Índia.



Fonte: Asitjain (2009).

**Figura 2** – Sede das Nações Unidas: a fachada do edifício é formada por um retângulo de ouro.



Fonte: Stefan Schulze (2005).

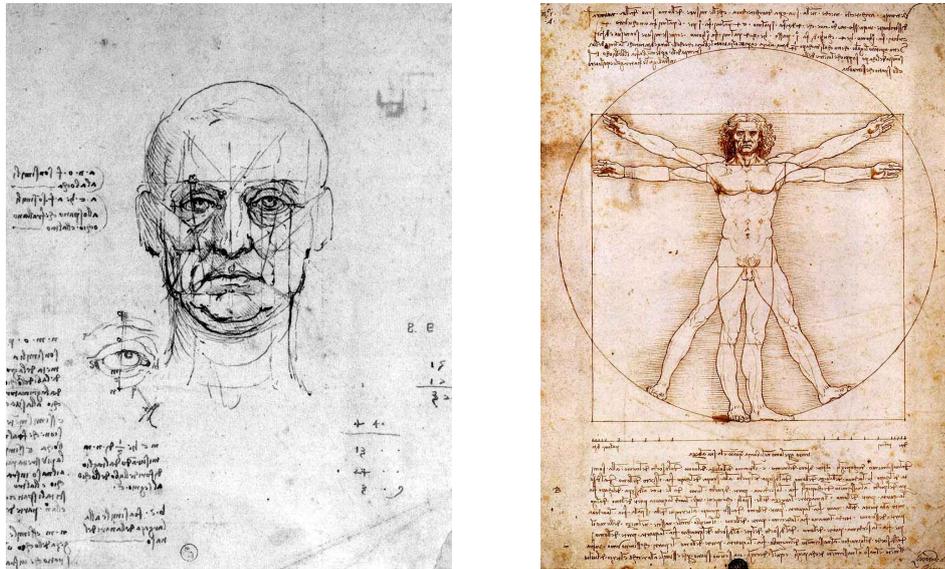
Muito frequentemente, consideramos um rosto muito bonito quando as suas características são simetricamente combinadas. Somos atraídos por proporções equilibradas e nós, humanos, não somos os únicos na natureza a obedecer a este princípio.

Conforme Lívio (2011, p. 13), “a simetria é a ferramenta suprema para preencher a lacuna entre ciência e arte, entre psicologia e matemática. Permeia objetos que vão desde tapetes persas às moléculas da vida, da Capela Sistina à teoria dos grupos”.

A natureza está cercada de simetrias: olhe para seu corpo, olhe para as imagens em um espelho, olhe as asas de uma borboleta, as pétalas de uma flor ou uma concha do mar.

Simetrias também podem ser encontradas na arte, como pode ser observado nos desenhos do corpo mostrados na Figura 3, que são trabalhos de Leonardo da Vinci.

**Figura 3** – Desenhos de Leonardo da Vinci: à esquerda, estudo sobre as proporções da cabeça e dos olhos (Biblioteca Reale, Torino) e, à direita, *Homem Vitruviano* (Gallerie dell'Accademia, Veneza).



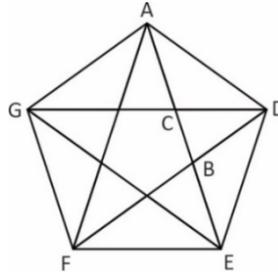
Fonte: Scruton (2013).

Conforme o dicionário Houaiss, Palíndromo significa frase, número ou palavra que se pode ler, indiferentemente, da esquerda para direita ou vice-versa. A invenção dos palíndromos é geralmente atribuída a Sótades, o Obsceno de Maronéia, que viveu no terceiro século a.C., no Egito dominado pelos gregos.

O Cromossomo Y, que define o sexo masculino, possui na a sua estrutura genômica sequências palindrômicas. Os pesquisadores de equipe de sequenciamento gnômica descobriram que o cromossomo Y combate o definhamento da sua carga genética com palíndromos. Cerca de seis milhões de seus cinquenta milhões de letras de DNA formam sequências palindrômicas nas duas fitas da dupla-hélice.

## 2.1 O NÚMERO ÁUREO E PROPORÇÃO ÁUREA

“Onde existe a proporção áurea, existe o número  $\phi$ . É o caso das espirais logarítmicas, tão comuns na natureza e em objetos bonitos. Professores e pais, contudo, na tentativa de entusiasmar os estudantes, não resistem à tentação de ver  $\phi$  até onde ele não existe.” (BLOLEZZI, SANTOS e HAYASHI, 2011).

**Figura 4 – Pentagrama.**

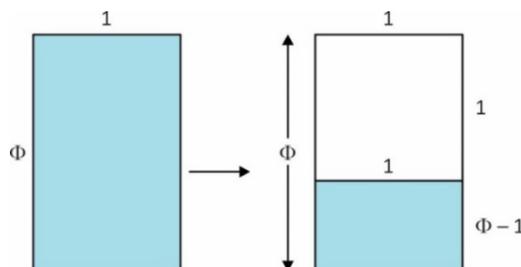
Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

Segundo a lenda, os pitagóricos formavam uma espécie de sociedade secreta, chamada de Fraternidade Pitagórica, em cujas reuniões só entrava quem tinha o pentagrama (Figura 4) desenhado na palma da mão. Eles escolheram o pentagrama porque ele contém a proporção áurea em todo lugar. Mas o que é, exatamente, a proporção áurea? Imagine um segmento de reta AB qualquer. Por meio do ponto C, divida esse segmento AB em dois segmentos menores: AC e CB. Se AB dividido por AC for igual a AC dividido por CB, então essa razão ou proporção comum é chamada de razão áurea ou de proporção áurea, de razão dourada ou de proporção dourada, de razão divina ou de proporção divina. O símbolo é a letra grega fí ( $\phi$ ):

$$\begin{array}{c} | \text{---} | \text{---} | \\ \text{A} \qquad \qquad \text{C} \qquad \qquad \text{B} \end{array}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi$$

Mas quanto vale  $\phi$ ? Para encontrar a resposta, imagine um retângulo áureo (Figura 5). Num retângulo áureo, divide-se o comprimento pela largura e obtém-se  $\phi$ . Além disso, num retângulo áureo, remove-se um quadrado de qualquer uma das pontas, o que sobra é um retângulo semelhante ao original, ou seja, sobra outro retângulo áureo. Sendo assim, para facilitar as contas, imagine um retângulo áureo cujo comprimento é igual a  $\phi$  e cuja largura é igual a 1. O comprimento do retângulo maior dividido pela largura do retângulo maior ( $\phi \div 1$ ) tem de ser igual ao comprimento do retângulo menor dividido pela largura do retângulo menor ( $1 \div [\phi - 1]$ ).

**Figura 5 – Retângulo áureo.**

Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

Dessa forma:

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi-1} \therefore \phi(\phi-1) = 1 \therefore \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Assim, obtém-se uma equação do segundo grau (do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ ) em que  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = -1$ ; ela tem duas raízes, uma negativa (que não nos interessa no momento) e outra positiva. Essa raiz positiva é o valor de  $\phi$ , isto é:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

que, aproximadamente, vale  $\phi = 1,61803$ .

Matemáticos e artistas já estudaram muito a proporção áurea. Em 1509, o matemático italiano Luca Pacioli publicou *A Divina Proporção*, em que listou dezenas de aparições do número  $\phi$  na geometria; o livro foi ilustrado por Leonardo da Vinci. Luca chamou a proporção de *divina* porque ela aparece em objetos que o homem classifica como *belos*; para Luca,  $\phi$  continha algum tipo de mensagem de Deus. O que mais intrigou os matemáticos, contudo, foi a descoberta de que a sequência de Fibonacci contém a razão áurea.

A sequência de Fibonacci ( $f_n$ ) é definida da seguinte forma:  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 1$  e, a partir desses dois primeiros números, pela recorrência.

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, a partir do terceiro termo (inclusive), cada termo da sequência de Fibonacci é igual à soma dos dois termos anteriores, daí a sequência de Fibonacci possuir grau 2. Eis os primeiros 12 termos da sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

No século XVII, o astrônomo alemão Johannes Kepler notou que, quando dividia 8 por 5, ou 13 por 8, ou 21 por 13, ele obtinha um número parecido com  $\phi$ , como mostra a Figura 6.

**Figura 6** – Razões para aproximações do  $\phi$ .

Termos	Valores	Resultado
$\frac{f_2}{f_1}$	$\frac{1}{1}$	1
$\frac{f_3}{f_2}$	$\frac{2}{1}$	2
$\frac{f_4}{f_3}$	$\frac{3}{2}$	1,5
$\frac{f_5}{f_4}$	$\frac{5}{3}$	1,6667
$\frac{f_6}{f_5}$	$\frac{8}{5}$	1,6
...	...	...
$\frac{f_{20}}{f_{19}}$	$\frac{6.765}{4.181}$	1,6180

Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

O número  $\phi$  é irracional, porem ao dividir um número de Fibonacci pelo número imediatamente anterior e conforme a operação tende ao infinito, a razão dos números consecutivos de Fibonacci tende a  $\phi$ .

A certa altura, o homem percebeu que seu próprio corpo muitas vezes segue a proporção áurea: dividindo a altura de uma pessoa pela altura do umbigo até o chão é provável que o resultado seja um número em torno de  $\phi$ . Na verdade, para onde quer que olhe e veja beleza, o homem acha a sequência de Fibonacci e a proporção áurea. Neste caso, até hoje matemáticos e estetas discutem se uma bela pessoa é bela por causa da proporção áurea ou se procuramos a proporção áurea em todo lugar por causa de pessoas belas.

De fato, o homem tem achado a proporção áurea até onde ela não existe ou, se existe, não foi posta lá intencionalmente. Ela existe na *Mona Lisa*, o famoso quadro de Leonardo da Vinci, mas provavelmente Leonardo não usou a proporção áurea de propósito; talvez seja impossível pintar um quadro como a *Mona Lisa* sem incluir a proporção áurea, a não ser para pintores como Picasso, que distorcem a realidade e usam combinações incomuns de elementos comuns justamente para incomodar o público. Ela não existe no Partenon, em Atenas, nem nas pirâmides de Gizé, no Cairo, embora muita gente diga que existe. (A proporção

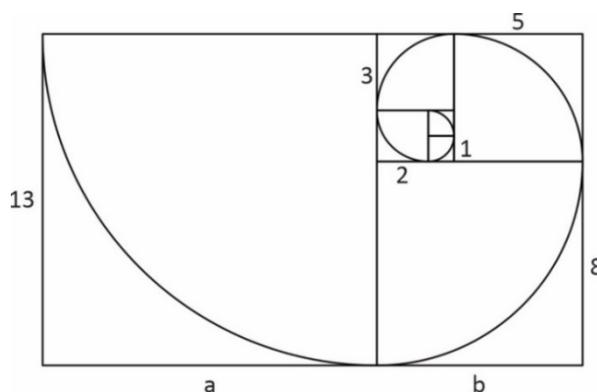
do Partenon e das pirâmides fica próxima da proporção áurea, mas, com o que os historiadores sabem hoje, é impossível afirmar que seus construtores usaram a razão áurea como referência. É mais provável que seja apenas coincidência.)

## 2.2 A CONCHA ESPIRAL

Quando quer citar um exemplo da proporção áurea na natureza, quase todo matemático cita a concha do náutilo, um molusco marinho. Conforme o náutilo vai crescendo, sua concha vai crescendo numa proporção próxima da proporção áurea, isto é, cada câmara da concha do náutilo é 1,618 vezes maior que a câmara anterior. Mas o que isto tem a ver com a proporção áurea, exatamente? A concha do náutilo cresce mais ou menos como uma espiral logarítmica, como mostra a Figura 7.

**Figura 7** – Espiral logarítmica.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \approx 1,61803$$



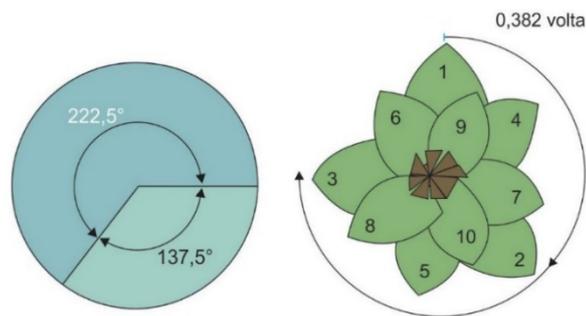
Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

Para desenhar a espiral logarítmica a partir do retângulo áureo: separe um quadrado numa das pontas do retângulo, use um compasso para ligar o canto superior esquerdo do quadrado ao canto inferior direito, e depois repita esse mesmo passo para os retângulos áureos remanescentes dentro do retângulo original. (O desenho mostra um retângulo feito com números da sequência de Fibonacci.)

Folhas, quando se distribuem em torno do caule de uma planta, em geral, distribuem-se segundo uma espiral logarítmica, de modo que cada folha tenha igual acesso à luz do Sol. As folhas se distribuem ao longo do caule num ângulo de 137,5 graus: que é o ângulo áureo. Dividindo-se uma circunferência em dois ângulos que mantenham entre si a proporção

áurea chegar-se-á a 222,5 graus e 137,5 graus, pois  $222,5 \div 137,5 = \phi$  e, muito importante,  $360 \div 222,5 = \phi$ . A primeira folha nasce no caule, a segunda folha nasce 137,5 graus mais adiante, a terceira folha nasce 137,5 graus mais adiante da segunda, a quarta folha nasce 137,5 graus mais adiante da terceira – e, fazendo assim, as folhas se distribuem de modo que haja espaço para que todas recebam um pouco de luz do sol, como mostra a Figura 8.

**Figura 8** – Crescimento das folhas ao longo do caule.

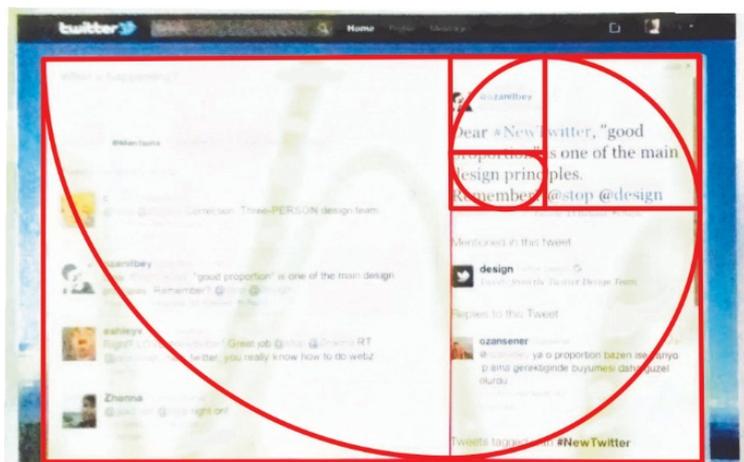


Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

Na Escola Panamericana de Arte, o professor Renato Hayashi sempre dá aulas sobre a proporção áurea e sobre como os alunos devem manejar o número  $\phi$ . Renato diz em suas aulas que clientes convencionais tendem a gostar mais de trabalhos que guardem a razão áurea. Sendo assim, se o profissional de arte vai diagramar uma página de internet, ou vai criar um logotipo, ou vai montar o cenário de uma peça de teatro, então o profissional deve levar o número  $\phi$  em consideração.

Um exemplo moderno é a página do Twitter, na internet, que segue a proporção áurea. Doug Bowman, diretor criativo do Twitter, confirmou a informação numa entrevista.

**Figura 9** – Página do Twitter.



Fonte: Bolezzi, Santos e Hayashi (2011).

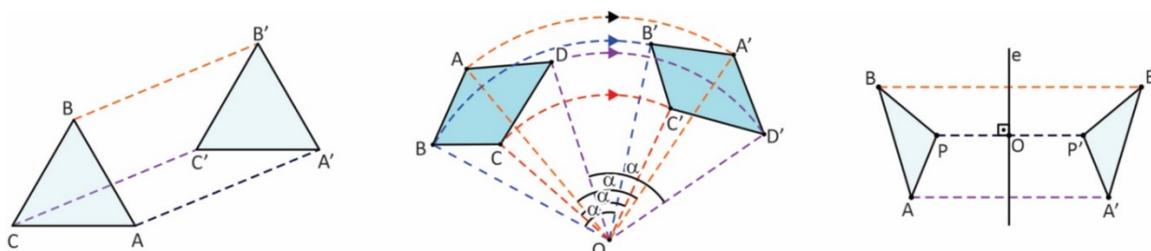
### 3. ISOMETRIAS NO PLANO E NO ESPAÇO

Neste capítulo, além dos conceitos básicos de simetrias já definidos cognitivamente pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na Educação Básica, iremos abordar alguns conceitos matemáticos sobre teoremas, propriedades e exemplos envolvendo simetrias e transformações isométricas no Plano e no Espaço dentro de uma linguagem que envolva formalmente a Matemática, incluindo notações desde os entes primitivos em Geometria Euclidiana (Ponto, Reta e Plano) até conjuntos e funções. As noções básicas de Isometrias no Plano e no Espaço, foram baseadas em Lima (2013), Lima (2007b) e Ledergerber-Ruoff (1982).

#### 3.1 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Em Geometria Plana, dizemos que duas figuras são congruentes se coincidirem perfeitamente, por meio de uma mudança de posição (translações, rotações ou reflexões) ou movimento rígido (movimentos que preservam a forma e o tamanho dos objetos). Na Figura 10 apresentamos alguns exemplos de simetrias.

**Figura 10** – Simetrias de translação, de rotação e de reflexão.



Fonte: Autor.

Em matemática, tais movimentos ou transformações são chamados de **isometrias** (do grego, mesma medida). Pela Figura 10, é fácil concluir o porquê deste nome. Movimentos rígidos ou isometrias devem ser transformações que preservam o comprimento dos segmentos e, conseqüentemente, a distância entre dois pontos quaisquer do plano e, na realidade, é esta a definição matemática de uma isometria.

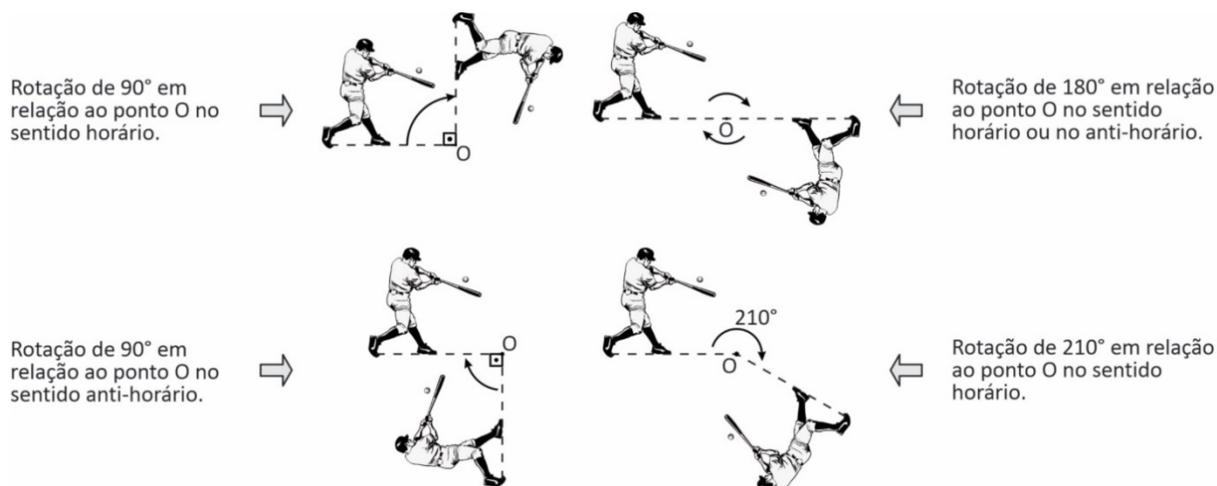
Translações, reflexões e rotações são isometrias, isto é, são transformações que preservam a distância entre dois pontos do plano. A partir desta propriedade, podemos provar que isometrias mudam a posição do desenho, mantendo a forma e o tamanho da figura original. Por isso, figuras obtidas a partir de isometrias são ditas congruentes. Antes de definir, formalmente, as isometrias, vejamos alguns tipos de simetrias.

### 3.1.1 Simetria de rotação

A transformação de uma figura obtida ao girarmos em determinado ângulo cada um de seus pontos em relação a um ponto O, no sentido horário ou anti-horário, é chamada **simetria de rotação**.

Na Figura 11, temos exemplos de rotação em relação ao ponto O.

Figura 11 – Simetria de rotação (ângulos).



Fonte: Autor.

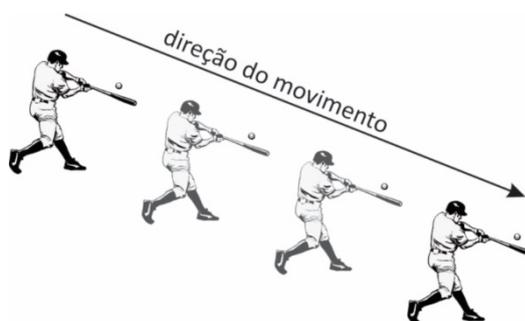
Em uma simetria de rotação, quando o giro for  $180^\circ$ , no sentido horário ou anti-horário, dizemos que esse é um caso de **simetria central**.

### 3.1.2 Simetria de translação

A transformação de uma figura que sofre um deslocamento de acordo com uma distância, uma direção e um sentido, mantendo seu tamanho e sua forma, é chamada **simetria de translação**.

Na Figura 12, a seta em destaque indica que o jogador de beisebol sofreu uma simetria de translação.

**Figura 12** – Simetria de translação.

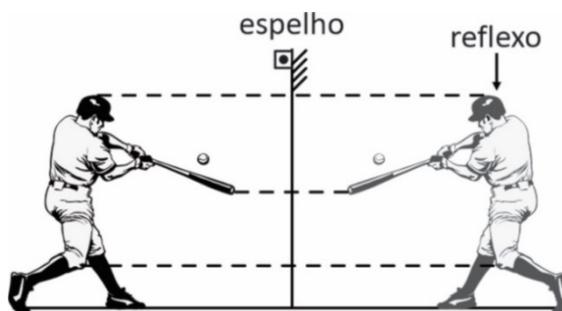


Fonte: Autor.

### 3.1.3 Simetrias de reflexão

Dizemos que duas figuras são simétricas em relação a uma reta qualquer quando uma é a imagem espelhada da outra em relação à reta considerada, chamada eixo de simetria. Isto quer dizer que se desenharmos as figuras em uma folha de papel e dobrarmos o papel de tal modo que a dobra coincida com a reta em questão, as duas figuras coincidirão perfeitamente. Veja o exemplo da Figura 13.

**Figura 13** – Simetria de reflexão.



Fonte: Autor.

## 3.2 O CONCEITO MATEMÁTICO DE TRANSFORMAÇÕES (ISOMETRIAS).

Uma *transformação*  $T$  no plano  $\mathbb{I}$  é uma aplicação  $T : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ , isto é, uma correspondência que associa a cada ponto  $P$  do plano outro ponto  $P_1 = T(P)$  do plano, chamado sua *imagem* por  $T$ .

Lembremos que a transformação  $T : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  diz-se *injetiva* quando pontos distintos  $P \neq Q$  em  $\mathbb{I}$  têm sempre imagens distintas  $T(P) \neq T(Q)$ . Em outras palavras,  $T$  é injetiva quando  $T(P) = T(Q)$  implica  $P = Q$ . Diz-se que  $T$  é *sobrejetiva* quando para todo ponto  $P_1$  em  $\mathbb{I}$  existe  $P$  em  $\mathbb{I}$  tal que  $T(P) = P_1$ .

Uma transformação  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  chama-se *bijetiva*, ou uma *bijeção*, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Isso significa que, para todo ponto  $P_l$  em  $\mathbb{P}$ , existe um único ponto  $P$  em  $\mathbb{P}$  tal que  $T(P) = P_l$ .

Uma transformação bijetiva  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  possui uma inversa  $T^{-1} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ . Para todo  $P_l$  em  $\mathbb{P}$ , sua imagem  $T^{-1}(P_l)$  pela inversa  $T^{-1}$  é o único ponto  $P$  de  $\mathbb{P}$  tal que  $T(P) = P_l$ .

Dadas duas transformações  $S, T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , a *composta*  $S \circ T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  é a transformação que associa a cada ponto  $P$  do plano  $\mathbb{P}$  o ponto  $S(T(P))$ . Portanto, por definição,  $(S \circ T)(P) = S(T(P))$ , ou seja,  $S \circ T$  consiste em aplicar primeiro  $T$  e depois  $S$ .

Uma transformação particular é a *transformação identidade*  $Id : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ . Por definição, tem-se  $Id(P) = P$  para todo  $P \in \mathbb{P}$ .

Dada uma bijeção  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , tem-se

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id,$$

pois

$$T(T^{-1}(P_l)) = T(P) = P_l \quad e \quad T^{-1}(T(P)) = T^{-1}(P_l) = P.$$

Uma vez que um sistema de coordenadas em  $\mathbb{P}$  tenha sido estabelecido, uma transformação  $T$  pode ser descrita por suas *equações*, isto é, pela expressão das coordenadas  $(x_l, y_l)$  do ponto  $P_l = T(P)$ , obtido pela aplicação de  $T$  ao ponto  $P = (x, y)$ .

### 3.2.1 Isometrias no plano

Uma *isomeria* do plano  $\mathbb{P}$  é uma transformação  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  que preserva distâncias. Considerando  $d(P, Q)$  a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ , temos que  $T$  é uma isometria quando se tem

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos  $P, Q$  no plano  $\mathbb{P}$ .

Veremos agora algumas propriedades fundamentais desses tipos de transformações.

**Propriedade 3.1** – Toda isometria  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é injetiva.

Prova: Se  $T(P) = T(Q)$ , então  $d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$ , logo,  $P = Q$ . ■

**Propriedade 3.2** – Sejam  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria e  $P, Q$  pontos distintos de  $\Pi$ .

Prova: Se  $T(P) = P_1$  e  $T(Q) = Q_1$ , então  $T$  transforma todo ponto  $R$  do segmento  $PQ$  em um ponto  $R_1$  do segmento  $P_1Q_1$ . Como  $R$  pertence ao segmento  $PQ$ , temos

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q).$$

Sendo  $T$  uma isometria, temos  $d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$ ,  $d(P_1, R_1) = d(P, R)$  e  $d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$ .

Logo,

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1).$$

Portanto,  $R_1$  pertence ao segmento de reta  $P_1Q_1$ . ■

A propriedade acima diz que toda isometria transforma pontos colineares em pontos colineares e, mais ainda, preserva a ordenação desses pontos colineares. Daí resulta a propriedade seguinte:

**Propriedade 3.3** – A imagem de uma reta  $r$  por uma isometria  $T$  é uma reta  $r_1 = T(r)$ .

Prova: Sejam  $P, Q$  pontos distintos de  $r$  e  $P_1 = T(P)$ ,  $Q_1 = T(Q)$  as imagens desses pontos por  $T$ . Chamemos de  $r_1$  a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $Q_1$ . Dado qualquer outro ponto  $R$  na reta  $r$ , afirmamos que sua imagem  $R_1 = T(R)$  deve pertencer à reta  $r_1$ . Para ver isto, suponhamos, para fixar as ideias, que  $Q$  está entre  $P$  e  $R$ , isto é, que  $Q$  pertença ao segmento  $PR$ . Então, como acabamos de ver,  $Q_1$  está no segmento de reta  $P_1R_1$ , logo  $R_1$  pertence à reta  $r_1$  que liga  $P_1$  a  $Q_1$ . Os casos em que  $P$  está entre  $Q$  e  $R$  ou  $R$  está entre  $P$  e  $Q$  se tratam igualmente.

Acabamos de mostrar que os pontos da reta  $r$  são transformados pela isometria  $T$  em pontos da reta  $r_1$ .

Reciprocamente, se  $R_1$  é um ponto da reta  $r_1$ , suponhamos, para fixar as ideias, que  $P_1$  esteja entre  $R_1$  e  $Q_1$ , ou seja, que  $P_1$  pertença ao segmento de reta  $R_1Q_1$ . Seja  $R$  o ponto da reta  $r$ , situado à esquerda do segmento  $PQ$  e tal que  $d(R, Q) = d(R_1, Q_1)$ , então  $T(R)$  é o ponto de  $r_1$ , à esquerda do segmento  $P_1Q_1$ , e tal que  $d(T(R), Q_1) = d(R_1, Q_1)$ , logo  $T(R) = R_1$ . Assim, todos os pontos da reta  $r_1$  são imagens por  $T$  de pontos da reta  $r$ . Isso conclui a prova de que  $T(r) = r_1$ . ■

**Propriedade 3.4** – *Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Prova: Se  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  é uma isometria e as retas  $r, s$  do plano  $\mathbb{P}$  são paralelas, suas imagens  $r_I = T(r)$  e  $s_I = T(s)$  devem ser paralelas, pois, se existisse um ponto  $P_I$  ao mesmo tempo em  $r_I$  e em  $s_I$ , teríamos  $P_I = T(P)$ , com  $P$  em  $r$  e  $P_I = T(Q)$ , com  $Q$  em  $s$ . Sendo  $T$  injetiva, isso obrigaria  $P = Q$ , e então as retas  $r$  e  $s$  teriam um ponto  $P = Q$  em comum, contradizendo o fato de que são paralelas. ■

**Observação 3.1** – A Propriedade 3.4 não significa que  $T$  transforma qualquer reta  $r$  em uma reta  $T(r) = r_I$  paralela a  $r$ .

**Propriedade 3.5** – *Toda isometria transforma um triângulo retângulo em outro triângulo retângulo.*

Prova: Sejam  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  uma isometria e  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Pondo  $A_I = T(A)$ ,  $B_I = T(B)$  e  $C_I = T(C)$ , o Teorema de Pitágoras assegura que

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

Como  $T$  preserva distâncias, segue-se daí que

$$d(B_I, C_I)^2 = d(A_I, B_I)^2 + d(A_I, C_I)^2.$$

Portanto,  $A_I B_I C_I$  é um triângulo retângulo com ângulo reto em  $A_I$ . ■

Em outras palavras, as isometrias transformam retas perpendiculares em retas perpendiculares, ou seja, preservam ângulos retos.

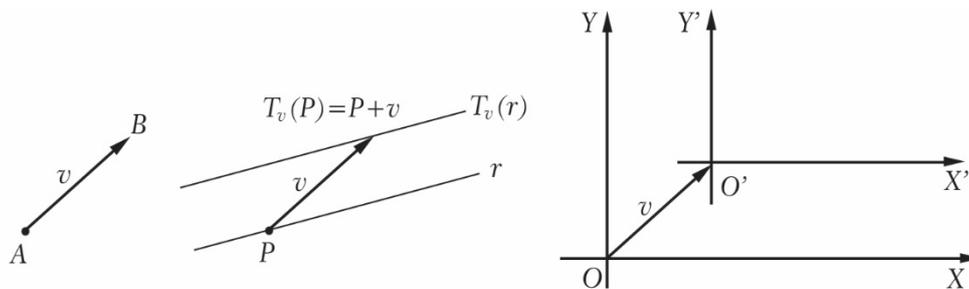
Mas, geralmente, dado qualquer ângulo  $B\hat{A}C$ , sejam  $A_I = T(A)$ ,  $B_I = T(B)$  e  $C_I = T(C)$ . Os triângulos  $ABC$  e  $A_I B_I C_I$  têm lados iguais, pois  $T$  preserva distâncias. Logo, têm ângulos iguais. Em particular,  $B_I \hat{A}_I C_I = B\hat{A}C$ . Portanto, podemos concluir a próxima propriedade.

**Propriedade 3.6** – Uma isometria preserva quaisquer ângulos.

### Translações

As isometrias mais simples são as *translações*. A translação  $T_v : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , determinada pelo vetor  $v$ , é a transformação que leva cada ponto  $P$  do plano  $\mathbb{P}$  ao ponto  $T_v(P) = P + v$ . Desde que  $v = \overline{AB}$ , então  $P + v = Q$  é o ponto tal que o segmento orientado  $PQ$  é equipolente a  $\overline{AB}$ , ou seja, possui mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento de  $\overline{AB}$ . Se, em um dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de  $v$  são  $(\alpha, \beta)$  então, para cada ponto  $P = (x, y)$ , tem-se  $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$ .

**Figura 14** – A translação determinada pelo vetor  $v$  leva toda reta  $r$  a uma paralela e transforma o sistema  $OXY$  no sistema  $O'X'Y'$ .



Fonte: Lima (2013).

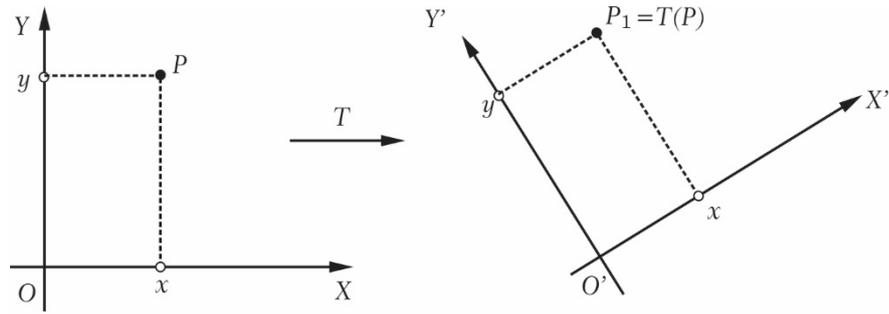
A translação  $T_v$  transforma toda figura  $F$  em uma figura  $T_v(F) = F'$ , cujos pontos  $P + v$  são obtidos transladando-se os pontos  $P$  de  $F$  pelo mesmo vetor  $v$ . Em particular, uma reta  $r$  é transformada na reta

$$T_v(r) = r + v = \{P + v; P \in r\},$$

a qual é paralela a  $r$ . Um sistema de eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$  é transformado por  $T_v$  no sistema  $O'X'Y'$ , cujos eixos são paralelos a  $OX$  e  $OY$ , e têm o mesmo sentido que  $OX$  e  $OY$  (Figura 14). De modo geral, qualquer isometria  $T$  transforma um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  noutro sistema de eixos ortogonais  $O'X'Y'$ . Além disso,  $T$  transforma um ponto qualquer  $P$  do plano noutro ponto  $P_t = T(P)$ , cujas coordenadas no sistema  $O'X'Y'$  são as mesmas coordenadas de  $P$  no sistema  $OXY$ .

Segue-se imediatamente que toda isometria  $T$  é uma transformação sobrejetiva. Como já vimos que  $T$  é injetiva, concluímos que  $T$  é uma bijeção. Sua inversa  $T^{-1}$  é evidentemente uma isometria.

**Figura 15** – As coordenadas de  $P_1 = T(P)$  no sistema  $O'X'Y'$  são iguais às coordenadas de  $P$  no sistema  $OXY$ .



Fonte: Lima (2013).

Sejam  $(a, b)$  as coordenadas de  $O' = T(O)$  no sistema  $OXY$  e  $\alpha$  o ângulo de  $OX$  para  $O'X'$ .

As coordenadas  $(x_1, y_1)$  do ponto  $P_1 = T(P)$  no sistema  $OXY$  são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y_1 = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b, \end{cases} \quad (3.1)$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y_1 = x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha + b, \end{cases} \quad (3.2)$$

conforme  $OXY$  e  $O'X'Y'$  sejam igualmente orientados ou não. No primeiro caso, diz-se que  $T$  *preserva* e, no segundo, que  $T$  *inverte* a orientação do plano.

Assim, quando se fixa um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ , uma isometria qualquer do plano transforma o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $T(P) = P_1 = (x_1, y_1)$  cujas coordenadas, neste mesmo sistema  $OXY$ , são dadas pelas equações (3.1) e (3.2) acima, em que  $(a, b)$  são as coordenadas de  $T(O)$  e  $\alpha$  é o ângulo entre  $OX$  e  $O'X' = T(OX)$ .

Em particular, vê-se mais uma vez que toda isometria é sobrejetiva.

Substituindo  $\cos \alpha$  por  $c$  e  $\operatorname{sen} \alpha$  por  $d$ , observamos que as equações (3.1) e (3.2) de uma isometria  $T$  têm uma das formas:

$$\begin{cases} x_1 = cx - dy + a \\ y_1 = dx + cy + b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = cx + dy + a \\ y_1 = dx - cy + b \end{cases}.$$

No primeiro caso, a matriz “parte linear” de  $T$  é

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

e, no segundo caso, é

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

No primeiro caso,  $T$  preserva a orientação e o determinante

$$\Delta = c^2 + d^2 = 1 > 0$$

enquanto que, no segundo caso,

$$\Delta = -c^2 - d^2 = -1 < 0.$$

Portanto, o sinal do determinante  $\Delta$  permite distinguir as isometrias que preservam das que invertem a orientação do plano. ■

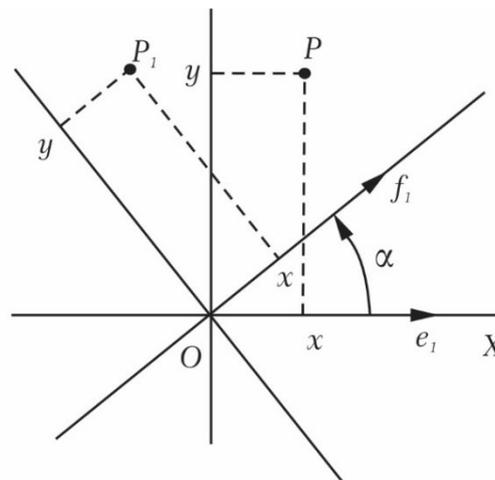
### Rotações

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais do plano.

A rotação do centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  transforma o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  com

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

**Figura 16** – A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  leva  $P$  a  $P_1$ .



Fonte: Lima (2013).

Essa rotação leva o vetor unitário  $e_1$  do eixo  $OX$  ao vetor  $f_1 = (\cos \alpha)e_1 + (\sin \alpha)e_2$  e leva o vetor unitário  $e_2$  do eixo  $OY$  ao vetor  $f_2$ , que se obtém de  $f_1$  por uma rotação positiva de  $90^\circ$ , logo  $f_2 = -(\sin \alpha)e_1 + (\cos \alpha)e_2$ . Temos,

$$\overline{OP} = xe_1 + ye_2$$

e

$$\overline{OP_1} = x_1e_1 + y_1e_2 = xf_1 + yf_2,$$

pois, no sistema de eixos ortogonais  $OX_1Y_1$ , cujos vetores unitários são  $f_1$  e  $f_2$ , o ponto  $P_1$  tem as mesmas coordenadas  $(x, y)$  que  $P$  tem no sistema  $OXY$ . Então,

$$\begin{aligned}x_1 &= \langle \overline{OP_1}, e_1 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_1 \rangle \\ &= x \langle f_1, e_1 \rangle + y \langle f_2, e_1 \rangle = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= \langle \overline{OP_1}, e_2 \rangle = \langle xf_1 + yf_2, e_2 \rangle \\ &= x \langle f_1, e_2 \rangle + y \langle f_2, e_2 \rangle = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Em particular, uma rotação de  $180^\circ$  em torno do ponto  $O$  leva o ponto  $P = (x, y)$  ao ponto  $P_1 = (-x, -y)$ . Neste caso, seja qual for o ponto  $P$  do plano, a origem  $O$  é o ponto médio do segmento  $PP_1$ . Às vezes, diz-se que  $P_1 = (-x, -y)$  é o *simétrico* do ponto  $P = (x, y)$  em relação ao ponto  $O$ . A rotação de  $180^\circ$  em torno de  $O$  coincide, portanto, com a simetria central de centro  $O$ .

As equações (3.1) mostram que toda isometria  $T$  do plano, que preserva orientação, é uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  seguida da translação pelo vetor  $v = \overline{OO_1}$ , em que  $O_1 = (a, b) = T(O)$ . ■

Mostraremos agora que, na realidade, efetuar uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha \neq 0$  e, em seguida, uma translação no plano é o mesmo que efetuar uma única rotação, de mesmo ângulo  $\alpha$ , com centro noutro ponto do plano. Consequentemente, temos o próximo resultado.

**Propriedade 3.7** – *As únicas isometrias do plano que preservam orientação são as rotações (com centros em pontos arbitrários do plano) e as translações (que correspondem a uma rotação de ângulo  $\alpha = 0$ , seguida de uma translação).*

Prova: Todas as coordenadas a seguir serão tomadas em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  prefixado. Temos uma isometria  $T$  que consiste na rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$ , seguida de uma translação pelo vetor  $v = (a, b)$ . Queremos determinar um ponto  $O' = (c, d)$  tal que  $T$  seja a rotação de centro  $O'$  e ângulo  $\alpha$ .

Ora, a rotação de centro  $O' = (c, d)$  e ângulo  $\alpha$  transforma o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $P' = (x', y')$ , tal que

$$\begin{aligned}x' &= (x - c) \cos \alpha - (y - d) \operatorname{sen} \alpha + c \\ y' &= (x - c) \operatorname{sen} \alpha + (y - d) \cos \alpha + d.\end{aligned}$$

A explicação para as equações acima é simples: o ponto  $P'$  é obtido girando-se o vetor  $\overline{O'P} = (x - c, y - d)$  do ângulo  $\alpha$ , obtendo-se o vetor  $\overline{O'P'} = (\bar{x}, \bar{y})$ , em que

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - c) \cos \alpha - (y - d) \operatorname{sen} \alpha \\ \bar{y} &= (x - c) \operatorname{sen} \alpha + (y - d) \cos \alpha,\end{aligned}$$

e, depois, tomando sua extremidade

$$P' = O' + \overline{O'P'} = (\bar{x} + c, \bar{y} + d).$$

Queremos determinar as coordenadas  $(c, d)$  do ponto  $O'$  de tal maneira que o ponto  $P'$  coincida com  $T(P)$ . Considerando as equações em (3.1), devemos ter

$$\begin{cases} (x-c) \cos \alpha - (y-d) \operatorname{sen} \alpha + c = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + a \\ (x-c) \operatorname{sen} \alpha + (y-d) \cos \alpha + d = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b. \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} (1 - \cos \alpha)c + (\operatorname{sen} \alpha)d = a \\ -(\operatorname{sen} \alpha)c + (1 - \cos \alpha)d = b. \end{cases}$$

O determinante deste sistema (cujas incógnitas são  $c$  e  $d$ ) é igual a  $(1 - \cos \alpha)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha$ , portanto é diferente de zero, salvo quando  $\alpha = 0$ , em cujo caso  $T$  é a translação pelo vetor  $v = (a, b)$ . Nos demais casos ( $\alpha \neq 0$ ), o sistema possui uma única solução  $(c, d)$ , formada pelas coordenadas do ponto  $O'$  que procuramos. Não há dificuldade em obter explicitamente os valores de  $c$  e  $d$  em função de  $\alpha, a$  e  $b$ , caso haja necessidade. ■

### Reflexões

O ponto  $P_1$  chama-se o *simétrico* do ponto  $P$  em relação à reta  $r$  quando  $r$  é a mediatriz do segmento  $PP_1$ . Se  $P$  pertencer a  $r$ , diremos que seu simétrico em relação a  $r$  é ele próprio. Evidentemente, se  $P_1$  é o simétrico de  $P$  relativamente a  $r$ , então, reciprocamente,  $P$  é o simétrico de  $P_1$  relativamente à mesma reta  $r$ .

A *reflexão* em torno da reta  $r$  é a transformação  $T$  que faz corresponder a cada ponto  $P$  do plano o ponto  $P_1 = T(P)$ , simétrico de  $P$  em relação a  $r$ . Veja a Figura 17.

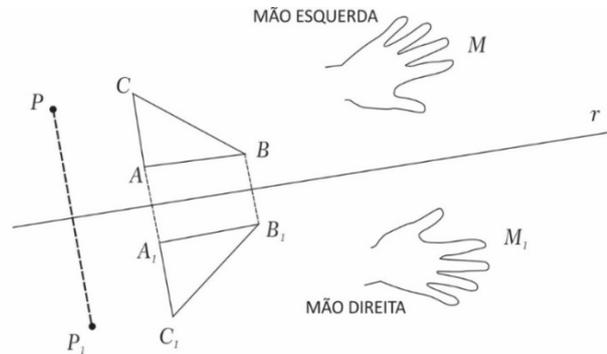
Tomando um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  no qual o eixo  $OX$  coincida com a reta  $r$  em torno da qual se dá a reflexão  $T$ , para cada ponto  $P = (x, y)$ , tem-se  $T(P) = P_1 = (x, -y)$ .

Daí resulta que toda reflexão é uma isometria, pois, se  $P = (x, y)$  e  $Q = (x', y')$ , pondo  $P_1 = (x, -y)$  e  $Q_1 = (x', -y')$ , é óbvio que

$$d(T(P), T(Q)) = d(P_1, Q_1) = d(P, Q).$$

A expressão  $T(P) = (x, -y)$ , quando  $P = (x, y)$ , mostra também que a reflexão  $T$  inverte a orientação do plano, pois deixa o eixo  $OX$  fixo e inverte a orientação de  $OY$ . Em termos dos vetores unitários dos eixos,  $T$  transforma  $e_1$  em si mesmo e  $e_2$  em  $-e_2$ . Evidentemente, o sentido de rotação de  $e_1$  para  $-e_2$  é oposto ao sentido de  $e_1$  para  $e_2$ .

**Figura 17** – O ponto  $P_1$ , o triângulo  $A_1B_1C_1$  e a mão direita  $M_1$  são, respectivamente, as imagens do ponto  $P$ , do triângulo  $ABC$  e da mão esquerda  $M$  pela reflexão em torno da reta  $r$ . Note que o sentido do percurso  $A_1B_1C_1$  é oposto ao sentido  $ABC$ .



Fonte: Lima (2013).

Se  $ABC$  é um triângulo escaleno e  $A_1B_1C_1$  é a imagem desse triângulo pela reflexão em torno de alguma reta, não é possível passar de  $ABC$  para  $A_1B_1C_1$  mediante um movimento que tenha um lugar no plano. A fim de sobrepor um desses triângulos sobre o outro, é necessário sair do plano que os contém e efetuar o movimento no espaço tridimensional.

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais no plano. A reflexão  $T$ , em torno da reta  $r$ , que passa pela origem e faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $OX$ , transforma este eixo noutro,  $OX_1$ , obtido de  $OX$  por rotação de ângulo  $2\alpha$ , e transforma  $OY$  no eixo  $OY_1$ , tal que o ângulo de  $OY$  para  $OY_1$  é  $180^\circ + 2\alpha$ , veja Figura 18.

Portanto, se  $e_1, e_2, f_1$  e  $f_2$  são, respectivamente, os vetores unitários dos eixos  $OX, OY, OX_1$  e  $OY_1$ , temos

$$f_1 = (\cos 2\alpha)e_1 + (\sin 2\alpha)e_2$$

e

$$f_2 = (\sin 2\alpha)e_1 - (\cos 2\alpha)e_2.$$

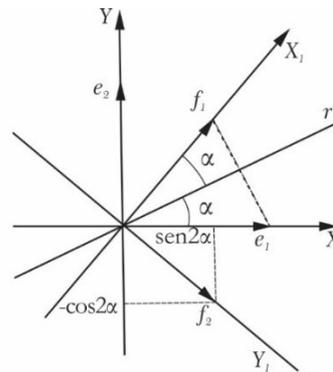
A reflexão  $T$ , sendo uma isometria, transforma o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , tal que  $P_1 = xf_1 + yf_2$ .

Segue-se imediatamente que

$$\begin{cases} x_1 = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y_1 = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (3.3)$$

Essas são, portanto, as equações da reflexão em torno de uma reta que passa pela origem e faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $OX$ .

**Figura 18** – A reflexão em torno de  $r$  leva  $OX$  a  $OX_1$  e  $OY$  a  $OY_1$ .



Fonte: Lima (2013).

Seja agora  $r$  a reta de equação  $y = ax + b$ , que tem inclinação  $a = \operatorname{tg}\alpha$  e corta o eixo  $OY$  no ponto de ordenada  $b$ .

A reta  $r'$ , de equação  $y = ax$ , paralela a  $r$ , passa pela origem e faz com o eixo  $OX$  o mesmo ângulo  $\alpha$ . Para obter a imagem do ponto  $P = (x, y)$  pela reflexão  $T$  em torno da reta  $r$ , primeiro faremos a  $P$  a translação vertical de vetor  $-v = (0, -b)$ , obtendo  $P' = (x, y - b)$ . Em seguida, refletimos  $P'$  em torno da reta  $r'$ , obtendo o ponto  $P'' = (x'', y'')$  com

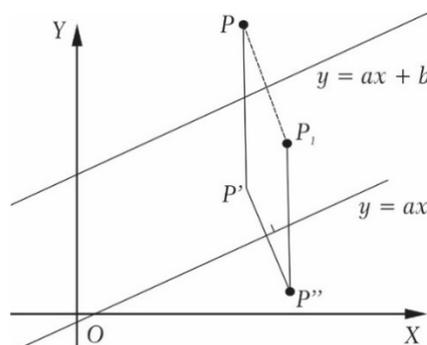
$$\begin{aligned} x'' &= x \cos 2\alpha + (y - b) \operatorname{sen} 2\alpha, \\ y'' &= x \operatorname{sen} 2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Finalmente, damos a  $P''$  a translação vertical de vetor  $v = (0, b)$ , chegando a  $P_1 = T(P) = (x_1, y_1)$ , em que

$$\begin{cases} x_1 = x \cos 2\alpha + (y - b) \operatorname{sen} 2\alpha \\ y_1 = x \operatorname{sen} 2\alpha - (y - b) \cos 2\alpha + b \end{cases} \quad (3.4)$$

Essas equações fornecem as coordenadas do ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , obtido de  $P = (x, y)$  pela reflexão em torno da reta  $r$ , cuja equação é  $y = ax + b$ , com  $a = \operatorname{tg}\alpha$ , como mostra a Figura 19.

**Figura 19** – A reflexão em torno da reta  $y = ax + b$  leva  $P$  a  $P_1$ , com as etapas intermediárias  $P'$  e  $P''$ .



Fonte: Lima (2013).

Devemos modificá-las de modo a eliminar o ângulo  $\alpha$  e exprimir  $x_1$ ,  $y_1$  em função apenas de  $x$ ,  $y$ ,  $a$  e  $b$ . Para isso, empregaremos as clássicas fórmulas que exprimem o seno e o cosseno de um ângulo como funções racionais da tangente do arco metade.

Segundo elas, se  $a = \operatorname{tg} \alpha$ , conclui-se que

$$\cos 2\alpha = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

e

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2a}{1+a^2}.$$

Portanto,

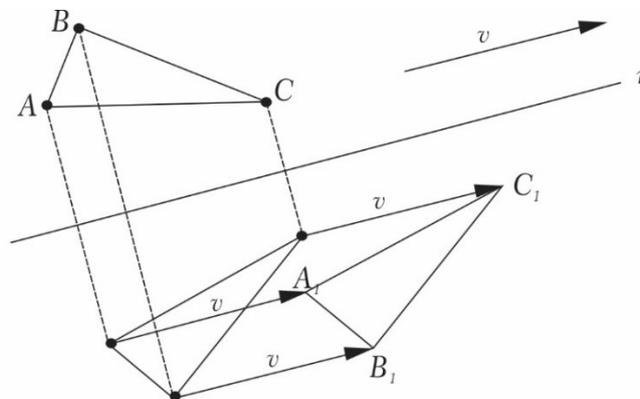
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}(y-b) \\ y_1 = \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b \end{cases} \quad (3.5)$$

são as equações da reflexão em torno da reta  $y = ax + b$ .

Outro tipo de isometria que inverte a orientação do plano é a *reflexão com deslizamento*. Chama-se assim a transformação do plano que consiste na reflexão em torno de uma reta  $r$  seguida de uma translação ao longo de um vetor  $v$ , paralelo a  $r$ , como mostram as Figuras 20 e 21.

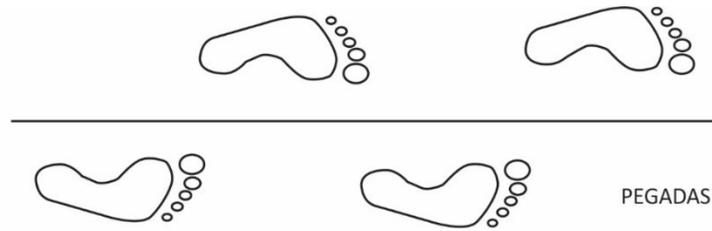
Se a equação da reta  $r$  é  $y = ax + b$  e se as coordenadas do vetor  $v$  são  $(c, ac)$ , então obtêm-se as equações de reflexão em torno de  $r$  com vetor de deslizamento  $v$  somando-se  $c$  à primeira equação do sistema (3.4) e somando-se  $ac$  à segunda equação do sistema (3.4).

**Figura 20** – O triângulo  $A_1B_1C_1$ , imagem do triângulo  $ABC$  pela reflexão em torno de  $r$  com vetor de deslizamento  $v$ .



Fonte: Lima (2013).

**Figura 21** – Pegadas ao longo de um caminho retilíneo ilustram uma reflexão com deslizamento.



Fonte: Lima (2013).

As equações em (3.2) dão as coordenadas do ponto  $P_I = (x_I, y_I)$ , imagem do ponto  $P = (x, y)$  pela isometria mais geral que inverte a orientação do plano. Como viu-se anteriormente, essa isometria  $T$  consiste na rotação de ângulo  $\alpha$  e centro  $O$ , seguida da reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz o mesmo ângulo  $\alpha$  com o eixo  $OX$  e, finalmente, a translação ao longo do vetor  $v = \overrightarrow{OO_I}$ , em que  $O_I = T(O)$ .

Esse resultado pode ser simplificado. Mostraremos agora que qualquer isometria que inverta a orientação do plano é uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento.

Em primeiro lugar, comparando as equações (3.2) com as equações (3.3), vemos que uma rotação de ângulo  $\alpha$  em torno da origem seguida da reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz ângulo  $\alpha$  com o eixo  $OX$  é o mesmo que uma simples reflexão em torno da reta que passa pela origem e faz um ângulo  $\frac{\alpha}{2}$  com o eixo  $OX$ .

Em seguida, mostraremos que, se  $T$  é uma isometria que consiste na reflexão em torno da reta  $r$  seguida da translação ao longo do vetor  $v$  (não necessariamente paralelo a  $r$ ), podemos obter outra reta  $s$  e outro vetor  $w$ , este agora paralelo a  $s$ , de tal modo que  $T$  é a reflexão com deslizamento determinada pela reta  $s$  e pelo vetor  $w$ .

Para isso, tomemos um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  em que  $OX$  coincide com  $r$ . Se  $v = (a, b)$ , então  $T$  transforma o ponto arbitrário  $P = (x, y)$  em

$$T(P) = (x + a, -y + b).$$

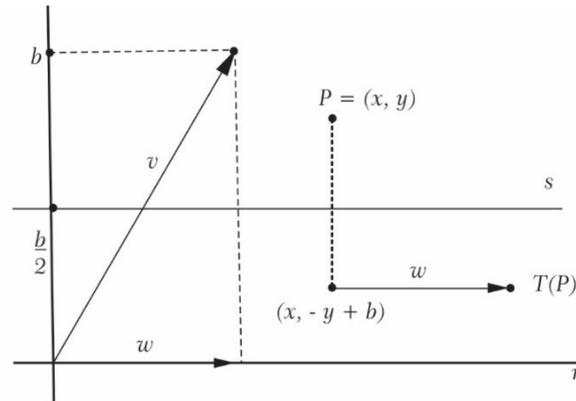
Sejam  $s$  a reta horizontal da equação  $y = \frac{b}{2}$  e  $w = (a, 0)$ . A reflexão com deslizamento em torno

da reta  $s$  com vetor  $w$  transforma o ponto arbitrário  $P = (x, y)$  em

$$(x, b - y) + (a, 0) = (x + a, -y + b),$$

logo, coincide com  $T$ , como mostra a Figura 22.

**Figura 22** – A reflexão em torno de  $r$  seguida da translação ao longo de  $v$  é a mesma que a reflexão em torno de  $s$  com deslizamento ao longo do  $w$ .



Fonte: Lima (2013).

### 3.2.2 Isometrias no espaço

Indicaremos com  $E$  o espaço euclidiano tridimensional.

Uma função  $T : E \rightarrow E$  chama-se uma isometria quando preserva a distância entre pontos de  $E$ , isto é, quando  $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$  para quaisquer  $X, Y \in E$ .

**Propriedade 3.8** – Toda isometria  $T : E \rightarrow E$  é uma função injetiva.

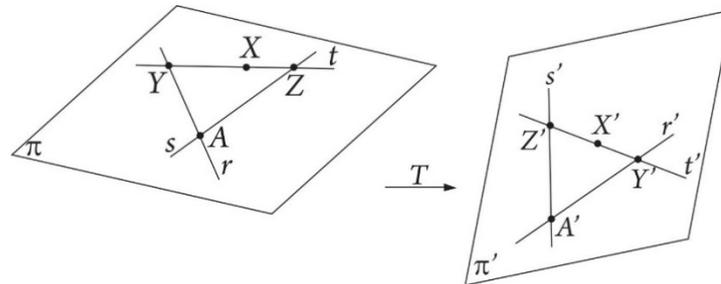
Prova: Se  $T(X) = T(Y)$ , então,  $d(X, Y) = d(T(X), T(Y)) = 0$

Logo,  $X = Y$ . ■

**Propriedade 3.9** – A imagem de um plano  $\Pi \subset E$  por uma isometria  $T : E \rightarrow E$  é um plano  $\Pi' \subset E$ .

Prova: Sejam  $r$  e  $s$  retas no plano  $\Pi$  que se cortam no ponto  $A$ . As imagens dessas retas pela isometria  $T$  são retas  $r'$  e  $s'$  que se cortam no ponto  $A' = T(A)$ . Seja  $\Pi'$  o plano determinado por  $r'$  e  $s'$ . Afirmamos que se  $X \in \Pi$ , então  $X' = T(X) \in \Pi'$ . De fato, dado um ponto arbitrário  $X$  no plano  $\Pi$ , fazemos passar por ele uma reta  $t \subset \Pi$ , que não seja paralela a  $r$  nem a  $s$  e que não passe por  $A$ . A reta  $t$  corta  $r$  no ponto  $X$  e  $s$  no ponto  $Y$ , com  $X \neq Y$ . Logo, sua imagem  $t'$  é uma reta em  $E$  que contém  $X'$  e passa pelos pontos  $Y' = T(Y)$  e  $Z' = T(Z)$ .

Figura 23 – Isometria de um plano.



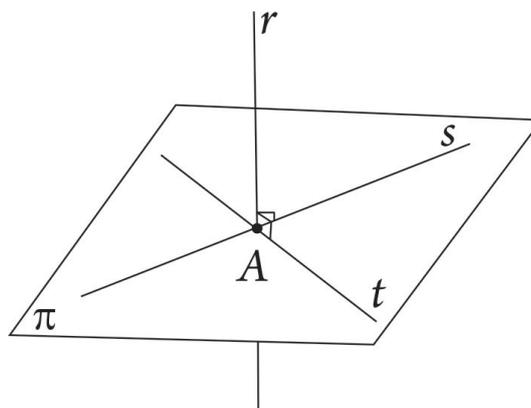
Fonte: Lima (2007).

Como  $Y'$  e  $Z'$  pertencem a  $\Pi'$ , segue-se que  $t' \subset \Pi'$ , donde  $X' \in \Pi'$ . Assim,  $T(\Pi) \subset \Pi'$ . A restrição de  $T$  a  $\Pi$  é uma isometria entre  $\Pi$  e  $\Pi'$ . Como toda isometria entre planos é sobrejetiva, temos  $T(\Pi) = \Pi'$ . ■

Duas retas  $r, s \subset E$  são perpendiculares quando têm um ponto  $A$  em comum e, além disso, tomando-se pontos  $B \in r$  e  $C \in s$ , vale a relação de Pitágoras  $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$ . Segue-se imediatamente que toda isometria  $T : E \rightarrow E$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

Uma reta  $r$ , que corta o plano no ponto  $A$ , diz-se perpendicular a esse plano quando é perpendicular a toda reta de  $\Pi$  que passa por  $A$ . Para que isso aconteça, basta que  $T$  seja perpendicular a duas retas distintas contidas em  $\Pi$  passando por  $A$ , como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Isometria de retas perpendiculares contidas no plano.

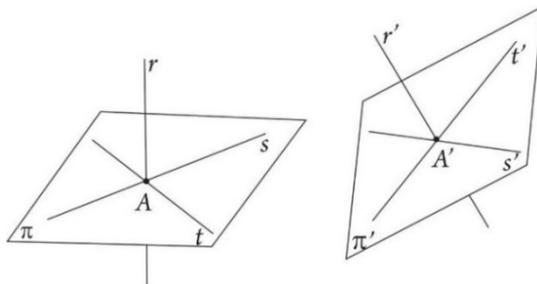


Fonte: Lima (2007).

**Propriedade 3.10** – Seja  $T : E \rightarrow E$  uma isometria. Se a reta  $r$  é perpendicular ao plano, então sua imagem  $r' = T(r)$  é perpendicular ao plano  $\Pi' = T(\Pi)$ .

Prova: Se  $s$  e  $t$  são retas distintas em  $\Pi$ , passando pelo ponto  $A$ , interseção de  $r$  com  $\Pi$ , então  $r' = T(r)$  e  $s' = T(s)$  são retas distintas no plano  $\Pi'$ , passando por  $A' = T(A)$ , como mostra a Figura 25.

**Figura 25** – Isometria de retas perpendiculares no espaço.



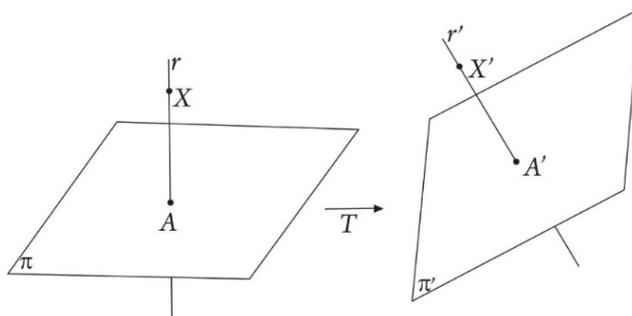
Fonte: Lima (2007).

Como  $r$  e  $\Pi$  são perpendiculares, segue-se que  $s$  e  $t$  são perpendiculares a  $r$ , logo  $s'$  e  $t'$  são perpendiculares a  $r'$ , portanto  $r'$  é perpendicular ao plano  $\Pi'$ . ■

**Propriedade 3.11** – Toda isometria  $T : E \rightarrow E$  é uma bijeção, cuja inversa  $T^{-1} : E \rightarrow E$  é ainda uma isometria.

Prova: Com efeito, dado um ponto arbitrário  $X' \in E$ , a fim de obter um ponto  $X \in E$  tal que  $T(X) = X'$ , consideramos um plano qualquer  $\Pi$  e chamamos de  $\Pi'$  sua imagem por  $T$ . Se  $X' \in \Pi'$ , então existe  $X \in \Pi$  com  $T(X) = X'$ . Se  $X' \notin \Pi'$ , tomamos a reta  $r'$ , perpendicular ao plano  $\Pi'$  passando por  $X'$ . Seja  $A'$  a interseção de  $r'$  com  $\Pi'$ . Como  $\Pi' = T(\Pi)$ , existe  $A \in \Pi$  tal que  $T(A) = A'$ . Seja  $r$  a perpendicular ao plano  $\Pi$  levantada pelo ponto  $A$ .

**Figura 26** – Inversão de isometrias.



Fonte: Lima (2007).

Segue-se da Propriedade 3.10 que  $T(r) = r'$ . Como  $X' \in r'$ , deve haver um ponto  $X \in r$  com  $T(X) = X'$ . Finalmente, dados quaisquer  $X, Y \in E$ , temos  $X = T(T^{-1}(X))$  e  $Y = T(T^{-1}(Y))$ , logo

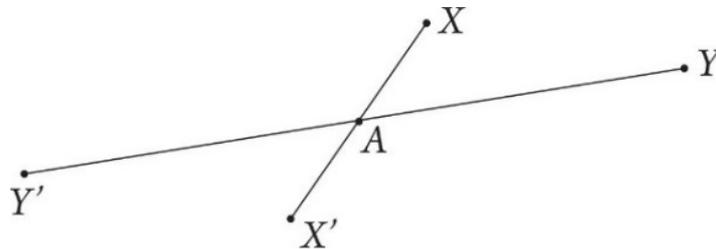
$$d(X, Y) = d(T(T^{-1}(X)), T(T^{-1}(Y))) = d((T^{-1}(X)), T^{-1}(Y))$$

portanto  $T^{-1} : E \rightarrow E$  é uma isometria. ■

Vejam agora alguns exemplos de isometrias no espaço.

**Exemplo 3.1** – (Simetria em torno de um ponto.) Fixado um ponto  $A$  no espaço  $E$ , a simetria em torno de  $A$  é a função  $S_A : E \rightarrow E$  que faz corresponder a cada ponto  $X \in E$  o ponto  $X' = S_A(X)$  tal que  $A$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ . Para ver que  $S_A$  é uma isometria, basta observar que, dados  $X, Y \in E$ , se  $X, Y$  e  $A$  forem não colineares, eles determinam um plano  $\Pi$ , restrito ao qual  $S_A$  é ainda a simetria em torno de  $A$ , logo  $d(S_A(X), S_A(Y)) = d(X, Y)$ . Se  $X, Y$  e  $A$  forem colineares, esta igualdade também é válida. ■

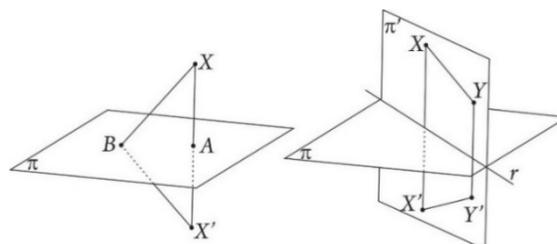
**Figura 27** – Simetria em torno de um ponto.



Fonte: Lima (2007).

**Exemplo 3.2** – (Reflexão em torno de um plano.) Seja  $\Pi \subset E$  um plano. A reflexão em torno de  $\Pi$  é a função  $R_\Pi : E \rightarrow E$  que associa a cada ponto  $X \in E$  o ponto  $X' = R_\Pi(X)$  tal que  $\Pi$  é o plano medidor do segmento  $XX'$ . Isto significa que  $XX'$  é perpendicular a  $\Pi$  e, além disso, se  $\{A\} = XX' \cap \Pi$ , então  $\overline{XA} = \overline{AX'}$ . Logo, para todo ponto  $B \in \Pi$ , tem-se também  $\overline{XB} = \overline{BX'}$ .

**Figura 28** – Reflexão em torno de um plano.



Fonte: Lima (2007).

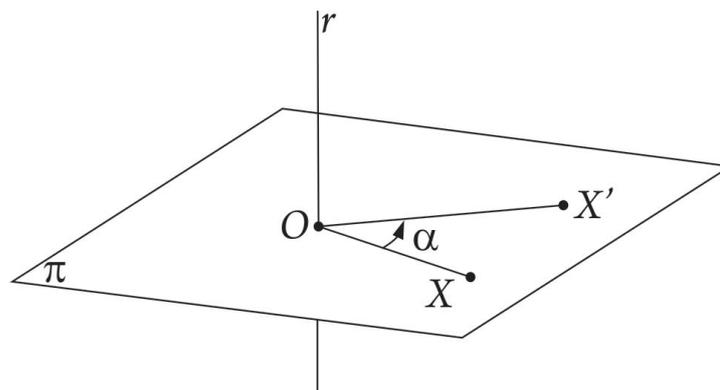
Para mostrar que a reflexão  $R_{\Pi} : E \rightarrow E$  é uma isometria, sejam  $X$  e  $Y$  pontos quaisquer do espaço, com  $X' = R_{\Pi}(X)$  e  $Y' = R_{\Pi}(Y)$ . Se  $X$  e  $Y$  estão ambos em  $\Pi$ , então  $X' = X$  e  $Y' = Y$ , logo  $d(X', Y') = d(X, Y)$ . Veja Figura 28.

Se um desses pontos, digamos  $X$ , não está em  $\Pi$ , consideremos o plano  $\Pi'$  contendo a perpendicular  $XX'$  e o ponto  $Y$ . Seja  $r = \Pi \cap \Pi'$ . Restrita ao plano  $\Pi'$ ,  $R_{\Pi}$  coincide com a reflexão  $R_r : \Pi' \rightarrow \Pi'$ , em torno de  $r$ . Segue-se que  $d(X', Y') = d(X, Y)$ . ■

**Exemplo 3.3** – (Rotação em torno de uma reta.) Sejam  $r$  uma reta e  $\alpha = \widehat{A\hat{O}B}$  um ângulo cujo vértice  $O$  pertence a  $r$  e cujos lados estão sobre um plano perpendicular a  $r$ . O ângulo  $\alpha$  é considerado orientado, isto é, subentende-se que  $AO$  é o primeiro lado e  $OB$  é o segundo. Isto posto, definimos a rotação de ângulo  $\alpha$  em torno da reta  $r$  como a função  $\rho = \rho_{r,\alpha} : E \rightarrow E$ , que faz corresponder a cada ponto  $X$  o ponto  $X' = \rho(X)$  determinado pelas seguintes condições:

- 1)  $X'$  pertence ao plano  $\Pi$  que passa por  $X$  e é perpendicular a  $r$ ;
- 2) se  $O$  é o ponto de interseção desse plano  $\Pi$  com  $r$ , tem-se  $\overline{OX} = \overline{OX'}$ ;
- 3) o ângulo orientado  $\widehat{XOX'}$  é igual a  $\alpha$ .

**Figura 29** – Rotação em torno de um plano.

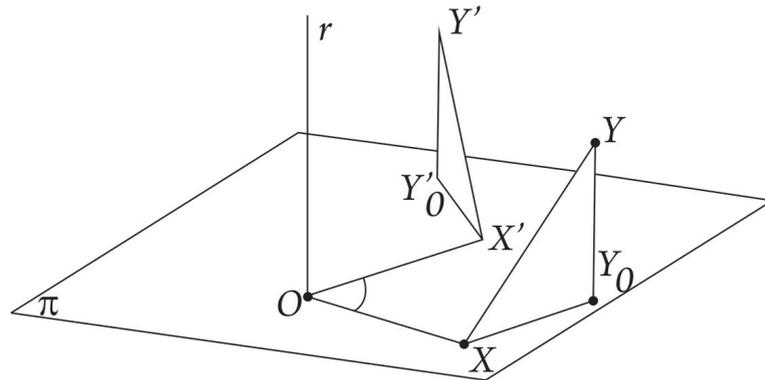


Fonte: Lima (2007).

Para provar que a rotação  $\rho = \rho_{r,\alpha} : E \rightarrow E$  é uma isometria, tomemos dois pontos arbitrários  $X, Y \in E$ , ponhamos  $X' = \rho(X)$ ,  $Y' = \rho(Y)$  e mostremos que  $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$ . Seja o plano perpendicular a  $r$  que contém os pontos  $X$  e  $X'$ . Consideremos os pontos  $Y_0$  e  $Y'_0$ , projeções ortogonais sobre  $\Pi$  dos pontos  $Y$  e  $Y'$ , respectivamente. O segmento de reta  $XY$  é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são  $XY_0$  e  $Y_0Y$ . Analogamente,  $X'Y'$  é hipotenusa do

triângulo retângulo  $X'Y'Y'_0$ , cujos catetos são  $X'Y'_0$  e  $Y'_0Y'$ . Então,  $\overline{X'Y'_0} = \overline{XY'_0}$  porque  $\rho$ , restrita ao plano  $\Pi$ , é uma isometria (rotação de centro  $O = R \cap \Pi$  e ângulo  $\alpha$ ). Além disso,  $\overline{Y'_0Y'} = \overline{Y'_0Y}$ , pois  $Y$  e  $Y'$  pertencem ao mesmo plano perpendicular a  $r$ . Logo  $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$ . ■

Figura 30 – Rotação de um plano em torno da reta.

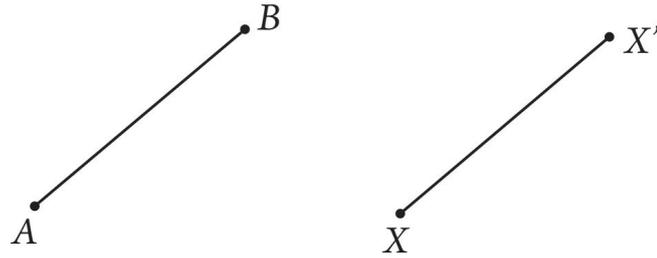


Fonte: Lima (2007).

**Exemplo 3.4** – (Translação.) Assim como no caso do plano, o conceito de translação  $T : E \rightarrow E$  equivale ao de vetor no espaço. Recordemos esta noção. Dois segmentos de reta  $AB$  e  $CD$  no espaço chamam-se equipolentes quando têm o mesmo comprimento, são paralelos (ou, então, colineares) e o sentido  $A \rightarrow B$  coincide com o sentido  $C \rightarrow D$ . Tais condições resumem-se a uma única: a de que os pontos médios dos segmentos de reta  $AD$  e  $BC$  coincidam. Novamente salientamos que, para falar em equipolência, é necessário que se considerem segmentos orientados, ou seja, que se distinga entre  $AB$  e  $BA$  (e, naturalmente, entre  $CD$  e  $DC$ ). Se  $AB$  e  $CD$  são equipolentes, escreve-se  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e diz-se que estes segmentos determinam o mesmo vetor  $v = \overline{AB} = \overline{CD}$ . Quando  $A = B$ , considera-se o vetor nulo  $0 = \overline{AA}$ . Evidentemente,  $\overline{XX} = 0$  para todo  $X \in E$ .

Sejam  $A, B$  pontos distintos do espaço. A translação  $T_{AB} : E \rightarrow E$  é a função que faz corresponder a cada ponto  $X \in E$  o ponto  $X'$  tal que  $\overline{XX'} = \overline{AB}$ , ou seja, tal que  $\overline{XX'} = \overline{AB}$ ,  $XX'$  é paralelo a  $AB$  e o sentido de percurso  $X \rightarrow X'$  coincide com o sentido  $A \rightarrow B$ .

**Figura 31** – Translação de segmentos.



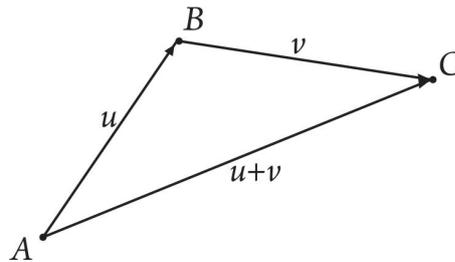
Fonte: Lima (2007).

Evidentemente, os segmentos  $AB$  e  $CD$  são equipolentes (ou seja,  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ) se, e somente se,  $T_{AB} = T_{CD}$ . Podemos escrever  $T_v$  em vez de  $T_{AB}$  se  $v = \overline{AB}$ .

A soma  $u + v$  de dois vetores é definida assim: seja  $u = \overline{AB}$ . Tomamos o ponto  $C$  tal que  $v = \overline{BC}$  e temos  $u + v = \overline{AC}$ . É claro que  $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u = T_{u+v}$ , ou seja, a composta das translações  $T_u$  e  $T_v$  é a translação  $T_{u+v}$ . Analogamente, dado o vetor  $v = \overline{AB}$ , definimos o vetor  $-v = \overline{BA}$  e vemos que  $v + (-v) = 0$  (vetor nulo), que  $T_{-v} = (T_v)^{-1}$ .

A relação  $T_v \circ T_{-v} = \text{identidade}$  nos leva a considerar a função identidade como uma translação  $T_v$  de vetor nulo  $v = 0$ , ou seja, identidade =  $T_{AA}$ . Entretanto, salvo aviso em contrário, quando nos referimos à translação  $T_{AB}$ , estaremos supondo  $A \neq B$ .

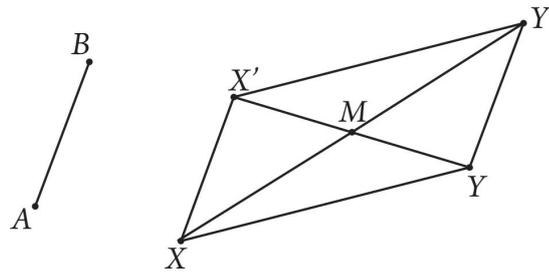
**Figura 32** – Soma de dois vetores.



Fonte: Lima (2007).

Seja  $T_{AB} : E \rightarrow E$  uma translação. Dados os pontos  $X$  e  $Y$ , com  $X' = T_{AB}(X)$  e  $Y' = T_{AB}(Y)$ , temos  $\overline{XX'} = \overline{AB} = \overline{YY'}$ , logo os segmentos  $XX'$  e  $YY'$  são equipolentes, ou seja, os pontos médios de  $XY'$  e  $X'Y$  coincidem. Isto significa também que  $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$ . Portanto, toda translação é uma isometria. Veja Figura 33. ■

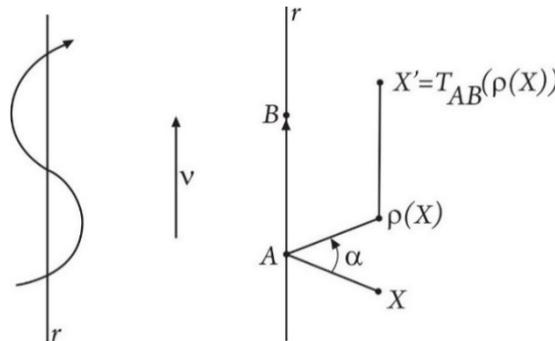
**Figura 33** – Toda translação é uma isometria.



Fonte: Lima (2007).

**Exemplo 3.5** – (Isometria helicoidal.) uma isometria helicoidal  $T : E \rightarrow E$  é a composta  $T = T_{AB} \circ \rho_{r,\alpha} = \rho_{r,\alpha} \circ T_{AB}$  de uma rotação em torno da reta  $r$  com uma translação  $T_{AB}$ , em que o segmento  $AB$  é paralelo à reta  $r$  ou está contido nela. Veja Figura 34.

**Figura 34** – Isometria helicoidal.

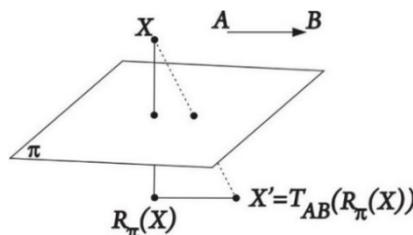


Fonte: Lima (2007).

A isometria helicoidal de fato preserva distâncias, pois é a composta de duas isometrias. Podemos sempre tomar  $A, B \in r$ . ■

**Exemplo 3.6** – (Reflexão com deslizamento.) A reflexão com deslizamento é uma isometria do tipo  $R = T_{AB} \circ R_{\Pi} = R_{\Pi} \circ T_{AB}$ , em que  $R_{\Pi} : E \rightarrow E$  é a reflexão em torno de um plano  $\Pi$  e  $T_{AB}$  e o segmento  $AB$  é paralelo ao plano  $\Pi$  ou está contido nele. ■

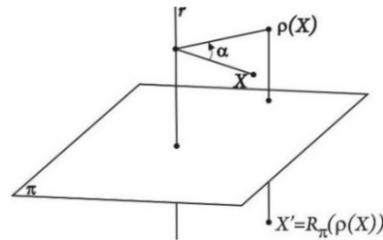
**Figura 35** – Reflexão com deslizamento.



Fonte: Lima (2007).

**Exemplo 3.7** – (Rotação refletida.) Uma rotação refletida  $T : E \rightarrow E$  é a composta  $T = R_{\Pi} \circ \rho_{r,\alpha} = \rho_{r,\alpha} \circ R_{\Pi}$ , em que  $R_{\Pi}$  é a reflexão em torno de um plano  $\Pi$  e  $\rho_{r,\alpha}$  é a rotação de ângulo  $\alpha$  em torno de uma reta  $r$  perpendicular a  $\Pi$ . Quando  $\alpha = 180^\circ$ , a rotação refletida coincide com a simetria em torno do ponto  $O$ , interseção de  $\Pi$  com  $r$ . ■

**Figura 36** – Rotação refletida.



Fonte: Lima (2007).

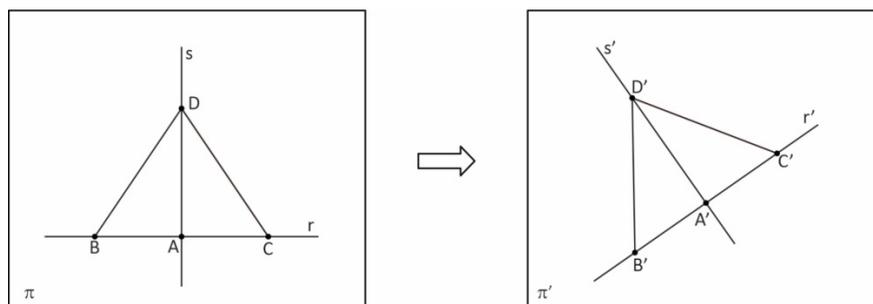
Uma translação, uma isometria helicoidal e uma reflexão com deslizamento são exemplos de isometrias no espaço desprovidas de pontos fixos. A rotação em torno de uma reta deixa fixos todos os pontos daquela reta. A reflexão em torno de um plano deixa todos os pontos desse plano fixos. Uma rotação refletida tem um único ponto fixo, a saber, a interseção do plano de reflexão com a reta de rotação. Para ver demonstrações dos fatos citados consulte *Coordenadas no Espaço*, Lima (2007).

Para as próximas propriedades iremos necessitar dos seguintes lemas.

**Lema 3.1** – *Uma isometria  $T : \Pi \rightarrow \Pi'$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Prova: Sejam as retas  $r$  e  $s$  em  $\Pi$ , consideramos: o ponto  $A$ , e um ponto qualquer  $D$  sobre  $s$ . A isometria  $T$  transforma a mediana  $AD$  do triângulo isósceles  $BCD$  na mediana  $A'D'$  do triângulo isósceles  $B'C'D'$ , logo  $A'D'$  é perpendicular a  $B'C'$ , ou seja,  $r'$  é perpendicular a  $s'$ , como mostra a Figura 37. ■

**Figura 37** – Isometria de retas perpendiculares.

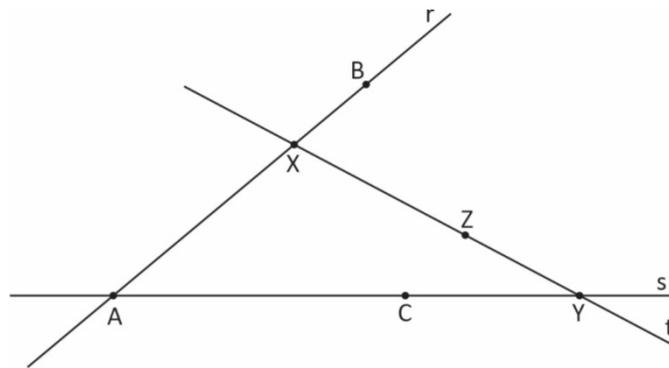


Fonte: Lima (2007).

**Lema 3.2** – Se uma isometria  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  possui três pontos fixos não colineares, então  $T = \text{identidade}$ .

Prova: Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos não colineares no plano  $\Pi$ , tais que  $T(A) = A$ ,  $T(B) = B$  e  $T(C) = C$ . Considere as retas  $r = AB$  e  $s = AC$ . A imagem da reta  $r$  pela isometria  $T$  é a reta que passa pelos pontos  $T(A) = A$  e  $T(B) = B$ . Logo,  $T(r) = r$ . Assim, a restrição  $T|_r$  é uma isometria da reta  $r$ , com dois pontos fixos distintos  $A$  e  $B$ . Tem-se  $T(X) = X$  para todo  $X \in r$  e analogamente se vê que  $T(Y) = Y$  para todo  $Y \in s$ . Seja agora  $Z$  um ponto qualquer do plano  $\Pi$ . Façamos passar por  $Z$  uma reta  $t$  que corta  $r$  e  $s$  respectivamente nos pontos  $X$  e  $Y$ . Como  $T(X) = X$  e  $T(Y) = Y$ , concluímos que  $T$  deixa fixos todos os pontos da reta  $t$ . Em particular,  $T(Z) = Z$ . Sendo  $Z$  um ponto arbitrário de  $\Pi$ , resulta que  $T = \text{identidade}$ , como mostra a Figura 38. ■

**Figura 38** – Isometria com três pontos fixos não colineares.

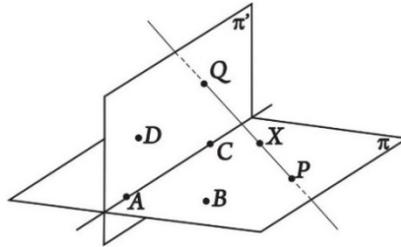


Fonte: Lima (2007).

**Propriedade 3.12** – Uma isometria do espaço que deixa fixos quatro pontos não coplanares é a função identidade.

Prova: Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos não coplanares deixados fixos pela isometria  $T : E \rightarrow E$ . Indiquemos com  $\Pi$  e  $\Pi'$ , respectivamente, os planos determinados pelos pontos  $A, B, C$  e  $A, C, D$ . A isometria  $T$ , em virtude do Lema 3.2, deixa fixos todos os pontos de  $\Pi$  e de  $\Pi'$ . Seja  $X$  um ponto do espaço não pertencente a  $\Pi$  nem a  $\Pi'$ . Façamos passar por  $X$  uma reta que não seja paralela a nenhum desses dois planos.

**Figura 39** – Isometria do espaço como função identidade.



Fonte: Lima (2007).

Ela encontra  $\Pi$  no ponto  $P$  e  $\Pi'$  no ponto  $Q$ . Então,  $T(P) = P$  e  $T(Q) = Q$ . Uma isometria  $T : r \rightarrow r$  que possui dois pontos fixos distintos é a função identidade. Segue que  $T$ , restrita a essa reta, é a identidade, logo  $T(X) = X$ . Assim,  $T$  deixa fixos todos os pontos do espaço. ■

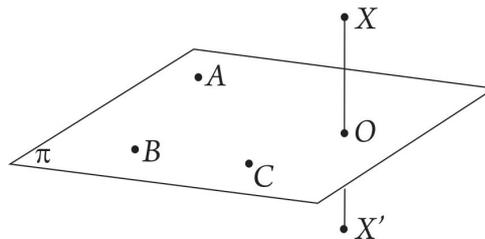
**Propriedade 3.13** – Sejam  $S, T : E \rightarrow E$  isometrias. Se existem quatro pontos não coplanares  $A, B, C$  e  $D$  tais que  $S(A) = T(A)$ ,  $S(B) = T(B)$ ,  $S(C) = T(C)$  e  $S(D) = T(D)$ , então  $S(X) = T(X)$  para todo ponto  $X \in E$ , ou seja,  $S = T$ .

Prova: Nestas condições, a isometria  $S^{-1} \circ T =$  identidade e daí  $S = T$ . ■

**Propriedade 3.14** – Se uma isometria do espaço deixa fixos três pontos não colineares, então ela é uma função identidade ou a reflexão em torno do plano determinado por esses pontos.

Prova: Sejam  $A, B, C$  pontos não colineares, deixados fixos pela isometria  $T : E \rightarrow E$ . Em virtude do Lema 3.2, todos os pontos do plano  $\Pi$ , determinado por  $A, B$  e  $C$ , são fixos por  $T$ . Consideremos um ponto qualquer  $X$  fora de  $\Pi$ , sua imagem  $X' = R_{\Pi}(X)$  pela reflexão  $R_{\Pi}$  é o ponto  $O$ , interseção de  $\Pi$  com a reta  $r$ , perpendicular de  $\Pi$ , passando por  $X$  e  $X'$ .

**Figura 40** – Reflexão em torno do plano.



Fonte: Lima (2007).

Como  $T(O) = O$ , a isometria  $T$  transforma a reta  $r$  em si mesma, em virtude do Lema 3.1. Restrita a  $r$ ,  $T$  é uma isometria com o ponto fixo  $O$ . Logo, ou é a identidade  $r \rightarrow r$  ou a reflexão em torno de  $O$ . No primeiro caso,  $T : E \rightarrow E$  coincide com a identidade  $E \rightarrow E$  nos quatro pontos não colineares  $A, B, C$  e  $D$ . No segundo, coincide com a reflexão  $R_{\Pi}$  nos mesmos pontos. A afirmação alegada segue-se, portanto, da Propriedade 3.12. ■

**Propriedade 3.15** – *Se as isometrias  $S, T : E \rightarrow E$  coincidem nos três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$ , então  $S = T$  ou  $S = R_{\Pi} \circ T$ , em que  $\Pi'$  é o plano determinado pelos pontos  $A' = S(A) = T(A)$ ,  $B' = S(B) = T(B)$  e  $C' = S(C) = T(C)$ .*

Prova:  $S \circ T^{-1} : E \rightarrow E$  é uma isometria que deixa fixos pontos  $A', B'$  e  $C'$ . Reçamos, então, na Propriedade 3.14. ■

#### 4. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS USANDO ISOMETRIAS

A parte central desta dissertação se encontra documentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual determina os conhecimentos e as habilidades essenciais que todos os alunos e alunas têm o direito de aprender.

Ela é obrigatória e está prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e no Plano Nacional da Educação. Os currículos de todas as redes públicas e particulares devem ter a BNCC como referencial.

Observando a BNCC é possível perceber que o objetivo central dessa dissertação se apoia numa nova quebra de paradigmas sobre metodologias de aprendizagens principalmente em Geometria.

Na abordagem da BNCC, temos que a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. A BNCC também considera importante o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo, as simetrias.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o estudo das simetrias deve ser por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano enquanto que, nos anos finais, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações de figuras geométricas planas, identificando seus elementos de figuras geométricas planas, identificando os elementos invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência.

No 7º Ano, no que se trata da unidade temática Geometria, alguns dos objetos de conhecimento contemplam transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano, obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem como também simetrias de translação, rotação e reflexão.

Assim como algumas habilidades consistem em reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem como também reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão.

Já no 8º Ano, no que se trata da unidade temática Geometria, alguns dos objetos de conhecimento contemplam transformações geométricas: simetrias de translação, rotação e reflexão.

Assim como algumas habilidades consistem em reconhecer e construir figuras obtidas por composição de transformações geométricas (translação, rotação e reflexão), com o uso de instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica.

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras.

No Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade. Para que esse propósito se concretize, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

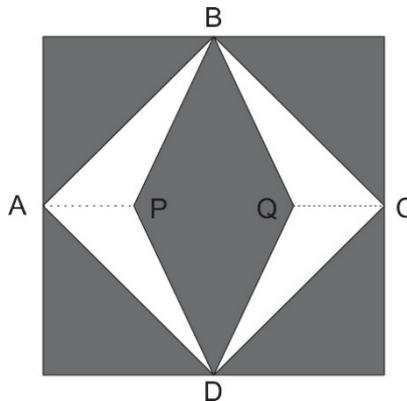
Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, e a representação e a comunicação para se expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Algumas habilidades consistem em utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composição destas) no emprego de diferentes métodos para obtenção da medida da área de uma superfície ou volume de um sólido (reconfigurações, aproximações por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.

Neste capítulo, iremos abordar a aplicação das simetrias em vários problemas de Matemática relacionados ao Ensino Básico, que, em geral, não usam as simetrias em suas resoluções. A atitude de visualizar um problema explorando as simetrias provoca um olhar bastante desafiador de imaginação geométrica, o qual direciona a criatividade para outra forma de pensar e, assim, obter mais clareza na busca de resoluções. Nessas aplicações, podemos perceber que, mesmo usando simetrias, as resoluções não perdem generalizações, padrões, teoremas e propriedades matemáticas.

Ao final de alguns exemplos temos um link em que consta o vídeo da resolução do exemplo.

**Exemplo 4.1** – (ENEM-2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem  $\frac{1}{4}$  da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o  $m^2$ , e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o  $m^2$ .

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- A) R\$ 22,50
- B) R\$ 35,00
- C) R\$ 40,00
- D) R\$ 42,50
- E) R\$ 45,00

**Resolução:**

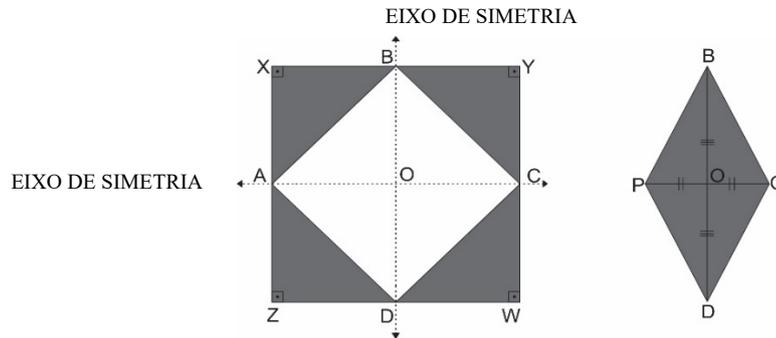
O custo dos materiais usados na fabricação do vitral é igual à soma dos produtos das áreas (clara e sombreada) pelos respectivos preços por  $m^2$  (R\$ 50,00 e R\$ 30,00).

Cálculo das áreas (clara e sombreada) usando isometria (simetria). Pelo texto, temos que  $\overline{AP}$  e  $\overline{QC} = \frac{1}{4}$  da medida do lado do quadrado, portanto, temos  $\overline{PQ} = \frac{1}{2}$  da medida do lado do

quadrado. Além disso os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado.

Observando a figura do exemplo e retirando dessa o quadrilátero BPDQ e traçando os eixos de simetria  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , obtemos o resultado mostrado na Figura 41.

**Figura 41** – Translação do losango BPDQ.

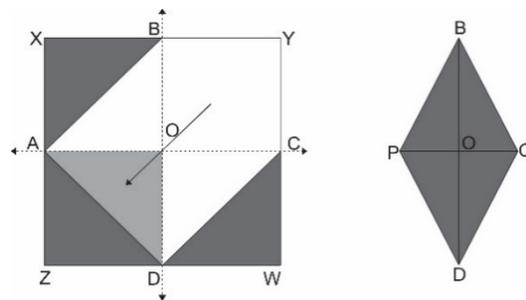


Fonte: Autor.

Podemos observar que, na Figura 41 os quatro triângulos (AXB, BYC, CWD e DZA) são congruentes. Assim como também os quatro triângulos (POB, BOQ, DOQ, DOP) são congruentes todos pelo caso (L.A.L.).

Fazendo, na Figura 41, uma translação oblíqua, podemos movimentar o triângulo (BYC) ocupando o lugar do triângulo (AOD). Logo, temos a translação do triângulo (BYC), como mostra a Figura 42.

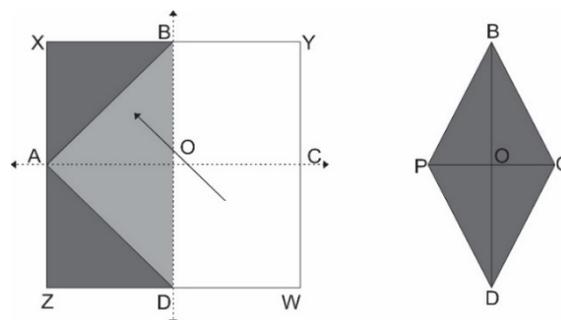
**Figura 42** – Translação do triângulo BYC.



Fonte: Autor.

Procedendo da mesma forma (por analogia), temos a translação do triângulo (CWD), como mostra a Figura 43.

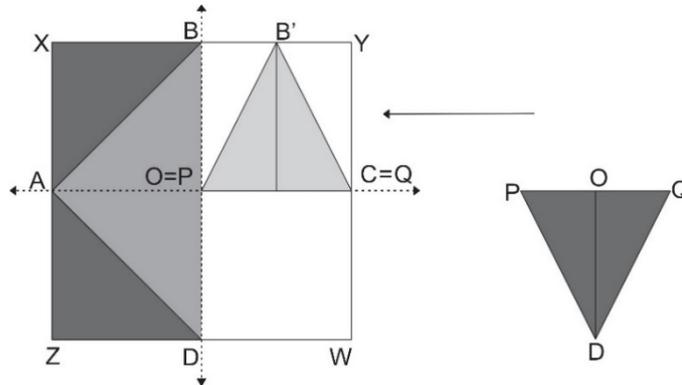
**Figura 43** – Translação do triângulo CWD.



Fonte: Autor.

Fazendo uma translação horizontal do triângulo (BPQ), na Figura 43, obtemos o resultado mostrado na Figura 44.

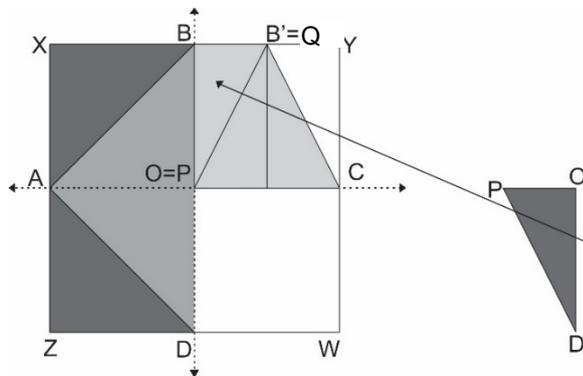
**Figura 44** – Translação do triângulo BPQ.



Fonte: Autor.

Podemos movimentar, por translação oblíqua, o triângulo (DOQ) da Figura 44 de modo a ocupar o lugar do triângulo (OBB'). Observe a Figura 45.

**Figura 45** – Translação do triângulo DOQ.



Fonte: Autor.

Por fim, uma translação oblíqua do triângulo (DOP) da Figura 45 de modo a ocupar o lugar do triângulo (B'CY), obtendo, assim, o resultado mostrado na Figura 46.



O preço das partes cinza, preta e branca é o mesmo. Considerando que não haja desperdício e sobras, o custo para pintar as partes pretas e o custo para pintar as partes brancas serão, respectivamente,

- A) R\$ 320,00 e R\$ 640,00
- B) R\$ 640,00 e R\$ 960,00
- C) R\$ 960,00 e R\$ 1 280,00
- D) R\$ 1 280,00 e R\$ 2 240,00
- E) R\$ 2 240,00 e R\$ 2 560,00

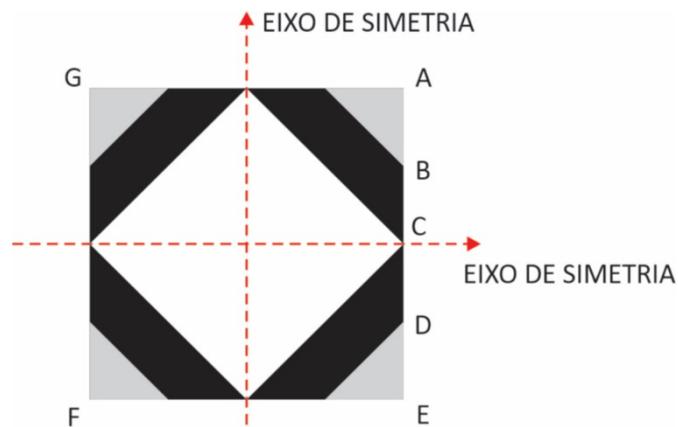
**Resolução:**

Para calcularmos o custo para pintar as partes pretas e as brancas, inicialmente devemos calcular as áreas dessas partes.

Pelo texto, temos  $AB = BC = CD = DE = \frac{1}{4}$  da medida do lado do quadrado.

Traçamos os eixos de simetria (horizontal e vertical) do quadrado, como mostra a Figura 47.

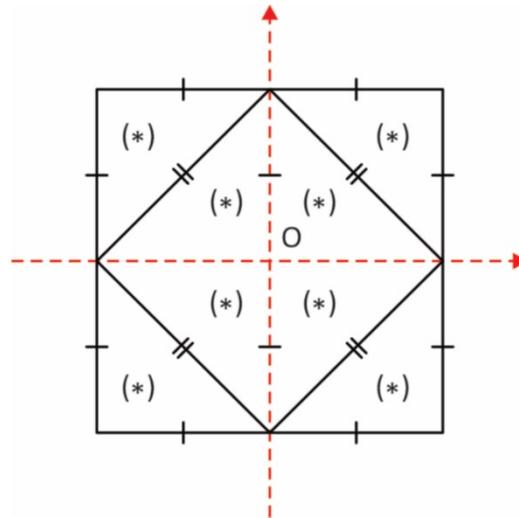
**Figura 47** – Eixos de simetria do quadrado.



Fonte: Autor.

Logo, podemos perceber na Figura 48 que a área branca é igual à metade da área do quadrado, pois todos os triângulos (\*) são congruentes pelo caso (L.L.L.).

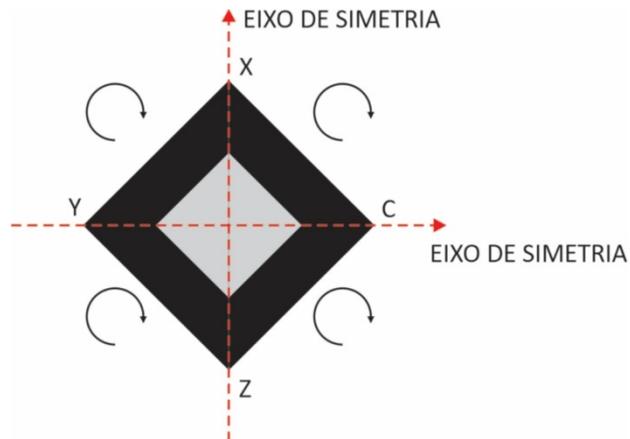
**Figura 48** – Congruência de triângulos.



Fonte: Autor.

Então, por reflexão, podemos obter que a soma da área preta com a área cinza é igual à área branca, como mostra a Figura 49.

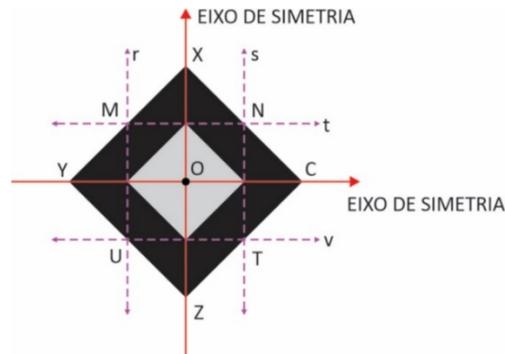
**Figura 49** – Reflexão dos triângulos congruentes.



Fonte: Autor.

Observando a Figura 49 e traçando retas paralelas aos dois eixos de simetria, com tais retas intersectando os pontos médios M, N, T e U dos lados do quadrado XYZC, obtemos o resultado mostrado na Figura 50.

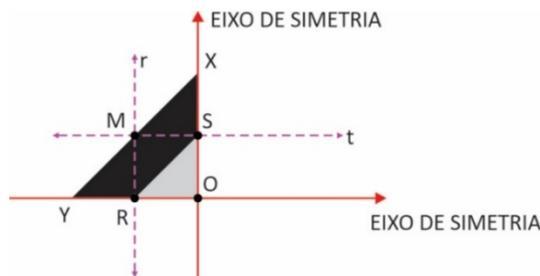
**Figura 50** – Retas paralelas aos eixos de simetria.



Fonte: Autor.

Observe na Figura 51 que tanto R quanto S são pontos médios dos lados a que pertencem. Portanto, os triângulos MXR, MRS, ROS e MSY são congruentes. (Caso de congruência L.L.L.).

**Figura 51** – Congruência dos triângulos MXR, MRS, ROS e MSY.



Fonte: Autor.

Daí, concluímos que a área da parte preta é igual ao triplo da área cinza e, portanto, temos:

$$\begin{cases} \text{custo da parte preta} = 3 \times 320 = \text{R\$ } 960,00 \\ \text{custo da parte branca} = 320 + 960 = \text{R\$ } 1\,280,00 \end{cases}$$

Logo, a resposta correta da questão é o item C.

<https://drive.google.com/file/d/14vK6ydFT1jHOToOZ25dRFgcKB3ecWcn/view?usp=sharing>

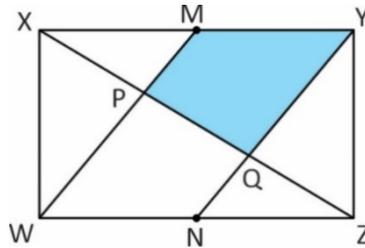
**Exemplo 4.3** – (UECE-2015) Considere o retângulo XYZW no qual as medidas dos lados XY e YZ são, respectivamente, 5 m e 3 m. Sejam M o ponto médio do lado XY, N o ponto médio do lado ZW, P e Q, respectivamente, a interseção dos segmentos WM e NY com a diagonal XZ. A medida da área do quadrilátero convexo MYQP, em m<sup>2</sup>, é

- A) 4,75.
- B) 4,50.
- C) 4,25.
- D) 3,75.

**Resolução:**

Interpretação do texto e construção geométrica do problema.

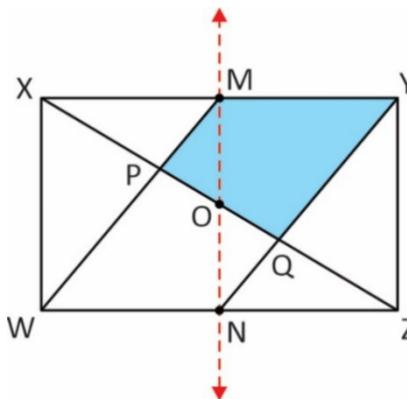
**Figura 52** – Construção geométrica do Exemplo 4.3.



Fonte: Autor.

Na Figura 53, traçando o eixo de simetria do retângulo XYZW passando por M e N, obtemos o resultado mostrado na Figura 53.

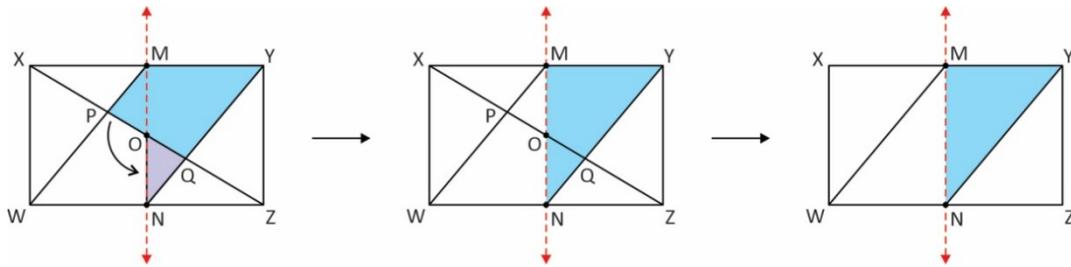
**Figura 53** – Eixo de simetria do retângulo.



Fonte: Autor.

Observe que o ponto O, de intersecção do eixo de simetria  $\overleftrightarrow{MN}$  com a diagonal XZ, é o centro do retângulo, logo O é ponto médio de MN. Se MY é congruente e paralelo a WN, então MW é paralelo a YN. Portanto os triângulos MPO e NOQ são congruentes pelo caso (A.L.A.) ( $\widehat{POM} = \widehat{NOQ}$ ;  $MO = ON$ ;  $\widehat{PMO} = \widehat{OQN}$ ). Então, se aplicarmos uma rotação de  $180^\circ$  no triângulo MPO em torno do ponto O, obtemos que os triângulos MXW, MNW, MNY e NYZ são congruentes, como mostra a Figura 54.

**Figura 54** – Rotação de  $180^\circ$  no triângulo MPO em torno do ponto O.



Fonte: Autor.

Logo, a área (MYQP) é igual à área (MNY) e ainda igual a  $\frac{1}{4}$  da área (XYZW).

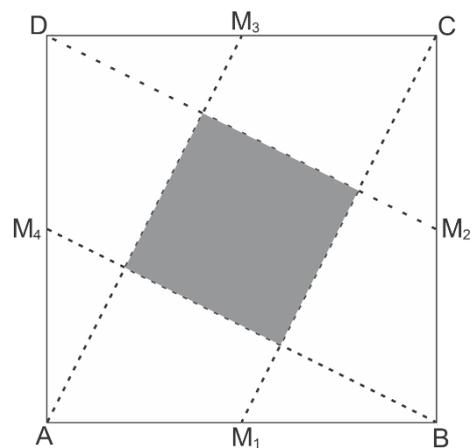
$$\text{Área (MYQP)} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 3 = 3,75.$$

Logo, a resposta correta da questão é o item D.

<https://drive.google.com/file/d/1xXl8v5buppanHyoo3LEvb2wluNVGeHzi/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.4** – (UNIFOR-2013) Um prefeito eleito de uma cidade do interior cearense tinha como uma de suas propostas eleitorais a construção de uma praça localizada próxima à igreja matriz, e que, nessa mesma praça, seria construída uma quadra esportiva. Se o terreno tem a forma de um quadrado ABCD, como mostra a figura abaixo, e sabendo-se que  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  são pontos médio dos lados e que  $AB = 5\sqrt{5}$  m, então a área da região destacada (quadra esportiva) vale

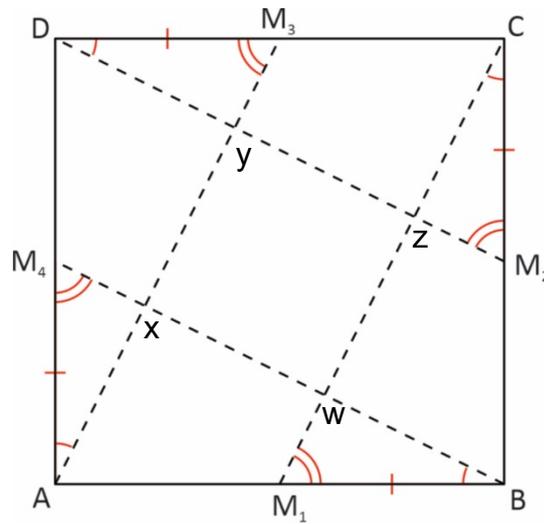
- A)  $20 \text{ m}^2$ .
- B)  $25 \text{ m}^2$ .
- C)  $30 \text{ m}^2$ .
- D)  $35 \text{ m}^2$ .
- E)  $40 \text{ m}^2$ .



**Resolução:**

Podemos observar, na Figura 55, que os triângulos  $ADM_3$ ,  $BAM_4$ ,  $CBM_1$  e  $DCM_2$  são congruentes pelo caso (L.L.L.), enquanto os triângulos  $AXM_4$ ,  $BWM_1$ ,  $CZM_2$  e  $DYM_3$  são congruentes pelo caso (A.L.A.).

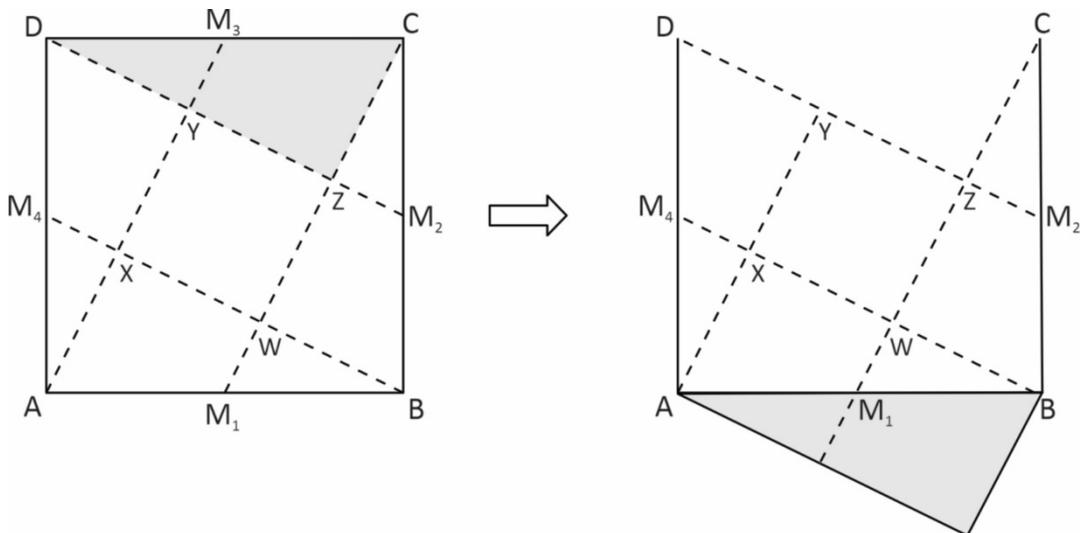
**Figura 55** – Congruência de triângulos.



Fonte: Autor.

Efetuada uma translação vertical do triângulo DZC de cima para baixo, obtemos o resultado mostrado na Figura 56.

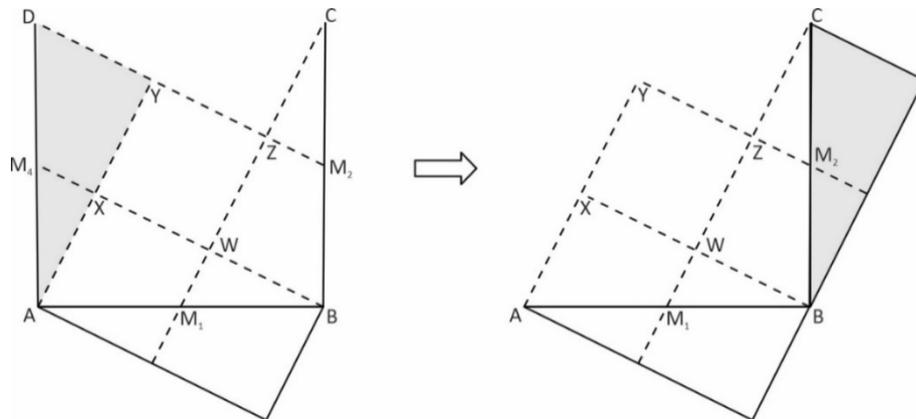
**Figura 56** – Translação vertical do triângulo DZC.



Fonte: Autor.

Efetuada uma translação horizontal do triângulo AYD da esquerda para a direita, obtemos o resultado mostrado na Figura 57.

Figura 57 – Translação horizontal do triângulo AYD.



Fonte: Autor.

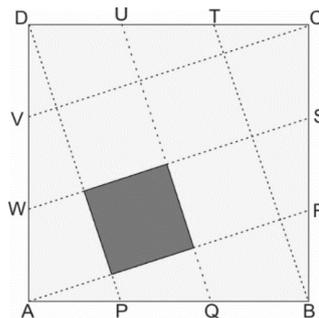
Então, podemos concluir a formação de 5 quadrados iguais ao quadrado XYZW e que possuem a mesma área do quadrado ABCD. Logo,

$$A_{(\text{REGIÃO DESTACADA})} = \frac{(5\sqrt{5})^2}{5} = 25 \text{ m}^2.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item B.

<https://drive.google.com/file/d/1RyZ8MixOJLgxbzjOctaUUI09WG2gZWY/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.5** – (CEFETRJ-2017) Os lados AB, BC, CD e DA de um quadrado foram divididos em 3 partes iguais, respectivamente, pelos pontos P, Q, R, S, T, U, V e W, conforme a figura a seguir.



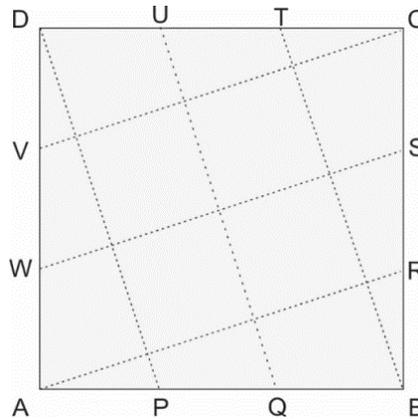
As interseções AR e DP, AR e UQ, WS e DP, WS e UQ são vértices de um quadrado de área 1, ressaltado na figura. Qual a área do quadrado ABCD?

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11
- E) 12

**Resolução:**

Podemos observar, na Figura 58, que os triângulos ADP, BAR, CBT e DCV são congruentes pelo caso (L.L.L.).

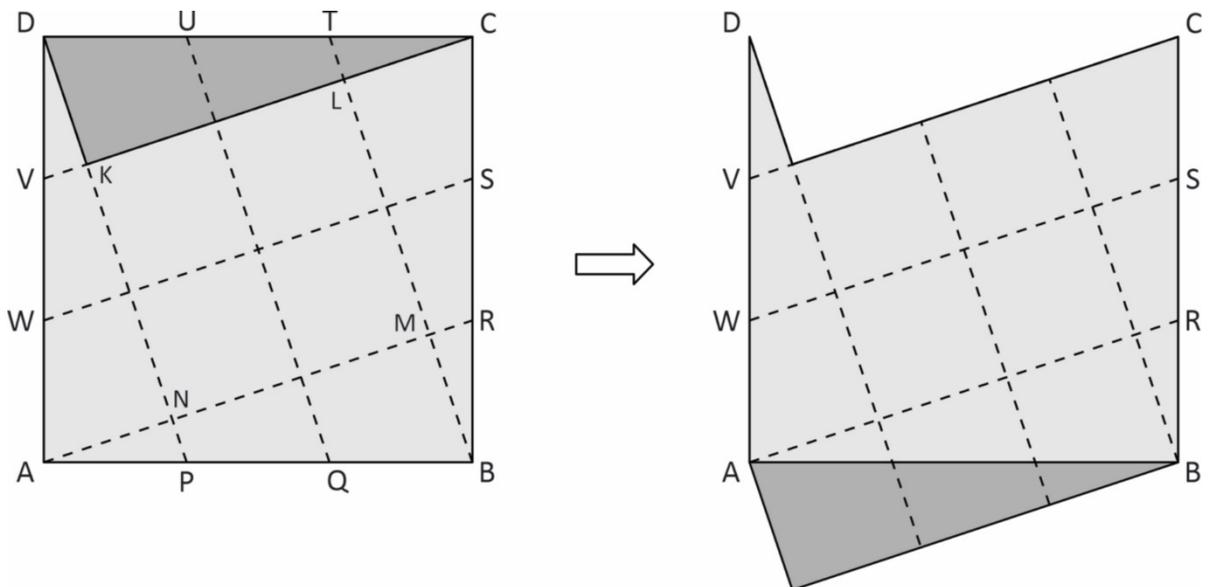
**Figura 58** – Congruência de triângulos.



Fonte: Autor.

Efetuada uma translação vertical do triângulo CDK de cima para baixo, obtemos o resultado mostrado na Figura 59.

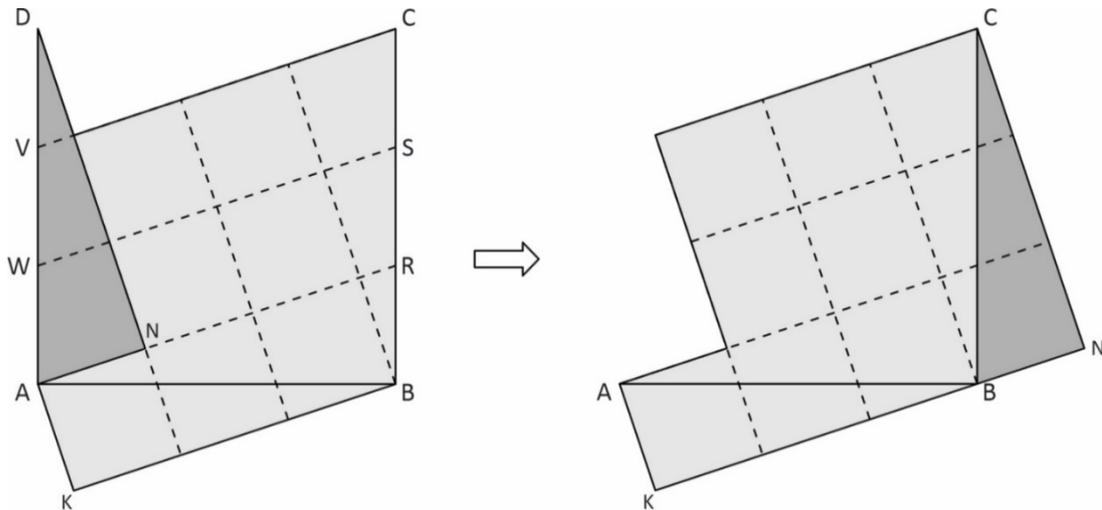
**Figura 59** – Translação vertical do triângulo CDK.



Fonte: Autor.

Efetuada uma translação horizontal do triângulo ADN da esquerda para a direita, obtemos o resultado mostrado na Figura 60.

**Figura 60** – Translação horizontal do triângulo ADN.



Fonte: Autor.

Então, podemos concluir a formação de 10 quadrados iguais e que possuem a mesma área do quadrado ABCD. Logo,

$$A_{(ABCD)} = 10.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item C.

[https://drive.google.com/file/d/11XKUMB493aL-jAIgIdrWwvJOYHnU\\_zH-/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/11XKUMB493aL-jAIgIdrWwvJOYHnU_zH-/view?usp=sharing)

**Exemplo 4.6** – (UECE-2017) No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual, a área do quadrilátero convexo cujos vértices são pontos de interseção das elipses representadas pelas equações  $x^2 + 2y^2 = 2$  e  $2x^2 + y^2 = 2$  é

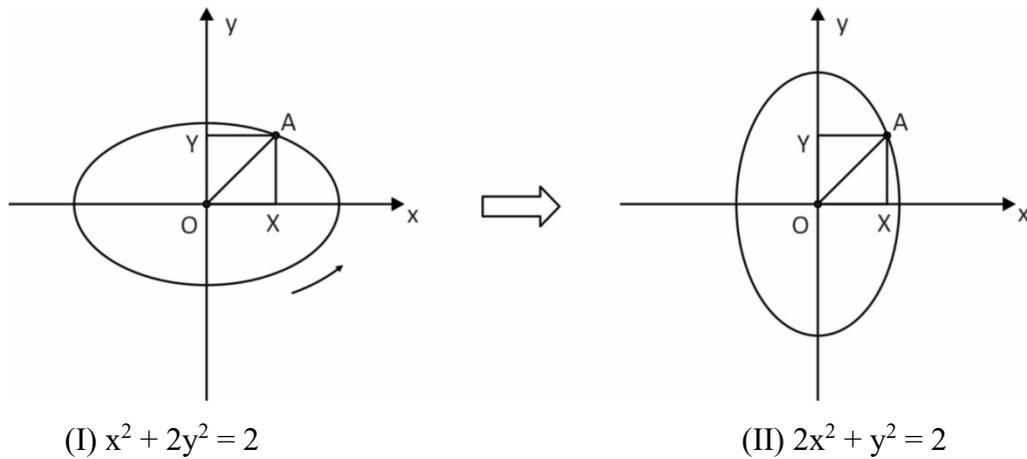
u. a. = unidade de área

- A)  $\frac{9}{2}$  u.a.
- B)  $\frac{8}{3}$  u.a.
- C)  $\frac{7}{3}$  u.a.
- D)  $\frac{5}{3}$  u.a.

**Resolução:**

Observe, na Figura 61, que as elipses são idênticas (com centro na origem, eixo maior (I) e eixo menor (II), porém simétricas por rotação em torno do ponto O).

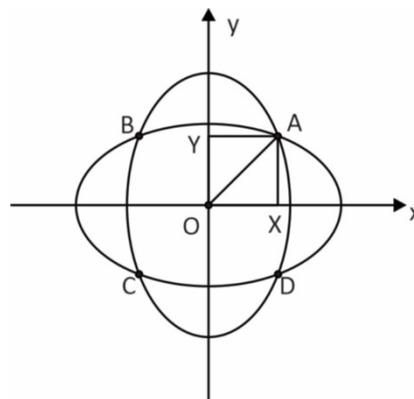
**Figura 61** – Elipses simétricas por rotação em torno do ponto O.



Fonte: Autor.

Observando agora a Figura 62 temos que, no ponto A de interseção das elipses, a coordenada  $x$  é igual a  $y$ , pois ao rotacionarmos na Figura 61 a elipse (I)  $x^2 + 2y^2 = 2$  temos que a coordenada  $x_p$  coincide com a coordenada  $y_p$  da elipse (II)  $2x^2 + y^2 = 2$ .

**Figura 62** – Ponto A de coordenadas iguais.



Fonte: Autor.

Portanto, se  $x^2 + 2y^2 = 2$  e  $x = y$ , então:

$$x^2 + 2x^2 = 2$$

$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

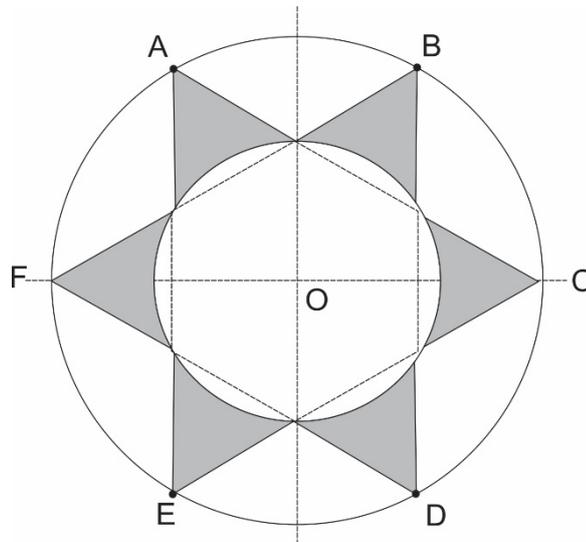
e a área  $(OX_A AY_A) = x^2 = \frac{2}{3}$ . A partir daí, a área do quadrado ABCD é quatro vezes a área do quadrado  $OX_A AY_A$ .

$$\text{Área}_{(ABCD)} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} u \cdot a.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item B.

<https://drive.google.com/file/d/1M3SLQGUyAXKRtPmLHvB8yQIID2dg-rHH/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.7** – (EPCAR/Cpcar-2016) Na figura abaixo, A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1 metro e centro O.



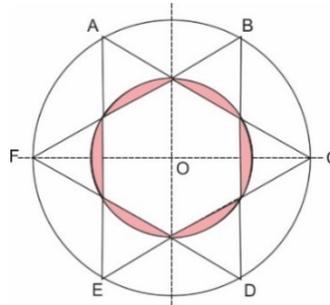
Se ACE e BDF são triângulos equiláteros, então, a área da parte sombreada, nessa figura, em  $m^2$ , é igual a

- A)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
- B)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi$
- C)  $\frac{\sqrt{3} - \pi}{3}$
- D)  $\sqrt{3} - \pi$

**Resolução:**

Observe, na Figura 63, a área vermelha em destaque.

**Figura 63** – Área do círculo menor subtraída da área do hexágono.



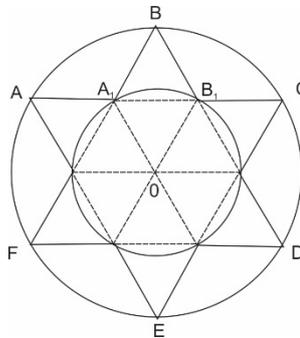
Fonte: Autor

Podemos perceber que a área vermelha ( $A_v$ ) é igual a

$$A_v = \text{Área do círculo menor } (A_c) - \text{Área do hexágono menor } (A_h)$$

Observe, na Figura 64, o losango  $A_1BB_1O$ .

**Figura 64** – Losango  $A_1BB_1O$ .



Fonte: Autor.

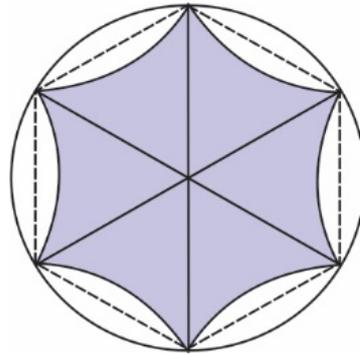
Por simetria, temos que a altura do triângulo  $A_1B_1O$ , também equilátero menor de lado  $\ell$ , é igual à metade do raio do círculo maior. Logo,

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nota:  $\ell$  (lado do hexágono menor) =  $r$  (raio da circunferência menor)

Efetuando-se uma reflexão em relação à circunferência menor, obtemos a Figura 65.

**Figura 65** – Reflexão em relação à circunferência menor.



Fonte: Autor.

Portanto, da Figura 65 podemos perceber que

- i) A área não sombreada é igual ao dobro da área vermelha ( $A_v$ ).
- ii) A área sombreada ( $A_s$ ) é igual à área do círculo menor ( $A_c$ ) subtraída do dobro da área vermelha ( $A_v$ ).
- iii)  $A_s = A_c - 2 \cdot A_v = A_c - 2 \cdot (A_c - A_h) = 2A_h - A_c$

$$A_h = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_c = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Logo, } A_s = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Portanto a resposta correta da questão é o item A.

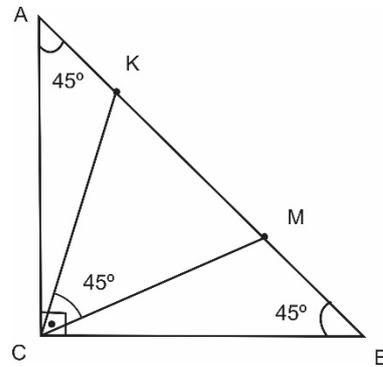
[https://drive.google.com/file/d/1oiERVtZkPwoRE5Yj-\\_-fx4u4IXoC0w/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1oiERVtZkPwoRE5Yj-_-fx4u4IXoC0w/view?usp=sharing)

**Exemplo 4.8** – (OBM NÍVEL 2 – 3ª FASE 2007) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles. K e M são pontos sobre hipotenusa AB, com K entre A e M, e o ângulo  $\angle KCM = 45^\circ$ . Prove  $AK^2 + MB^2 = KM^2$ .

**Resolução:**

Observe a Figura 66.

**Figura 66** – Construção geométrica do Exemplo 4.8.



Fonte: Autor.

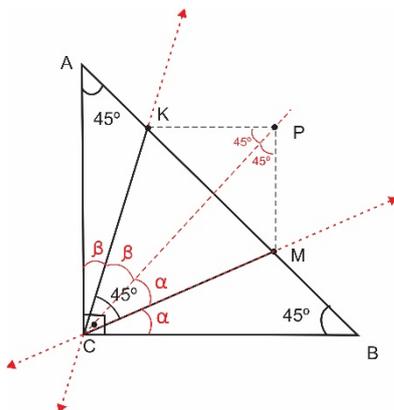
Devemos mostrar que se  $\widehat{KCM} = 45^\circ$ , então  $\overline{AK}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{KM}^2$ .

Inicialmente, podemos pensar simetricamente em duas reflexões:

- i) Reflexão do triângulo BCM em relação à reta  $\overline{CM}$ .
- ii) Reflexão do triângulo ACK em relação à reta  $\overline{CK}$ .

Vejamos:

**Figura 67** – Reflexões dos triângulos ACK e BCM.



Fonte: Autor.

Note:  $\overline{AC} = \overline{CP}$  (reflexão)

$\overline{BC} = \overline{BP}$  (reflexão)

$\overline{AC} = \overline{BC}$  (triângulo retângulo isósceles)

$\overline{AK} = \overline{KQ}$  (reflexão)

$\overline{BM} = \overline{MP}$  (reflexão)

$\widehat{KPM} = 90^\circ$

Portanto, se o triângulo KMP é retângulo, então

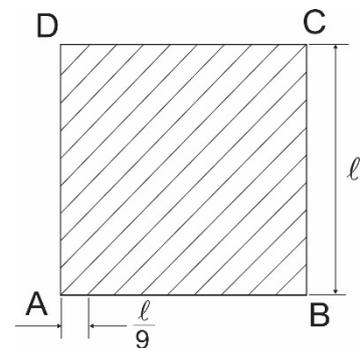
[OBJ]

$$\overline{KP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{KM}^2 \text{ e } \overline{AK}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{KM}^2.$$

<https://drive.google.com/file/d/1oCgWxF7j4Y3Ekj5L-eiQnrQzelzhfoj6/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.9** – (UEPB-2006) Um quadrado ABCD de lado  $\ell$  tem cada um de seus lados dividido em 9 partes iguais. Ligando-se com segmentos de reta os pontos de divisão, segundo a direção da diagonal AC, obtém-se o hachurado mostrado na figura a seguir. A soma dos comprimentos dos 17 segmentos assim obtidos é

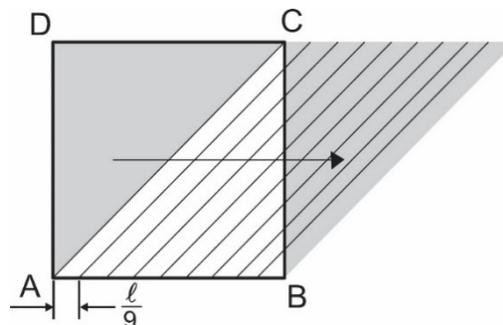
- A)  $9\ell\sqrt{2}$ .  
 B)  $\frac{9\ell\sqrt{2}}{2}$ .  
 C)  $\frac{17\ell\sqrt{2}}{2}$ .  
 D)  $8\ell\sqrt{2}$ .  
 E)  $\frac{19\ell\sqrt{2}}{4}$ .



**Resolução:**

Observe que os ângulos agudos que todos os segmentos formam com os lados são iguais a  $45^\circ$ . Os lados são divididos em partes iguais. Portanto, efetuando uma translação horizontal de todos os segmentos acima da diagonal  $\overline{AC}$  para a direita, obtemos a Figura 68.

**Figura 68** – Translação de segmentos.



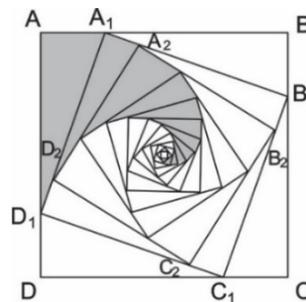
Fonte: Autor.

Logo, podemos concluir que se  $\overline{AC} = \ell\sqrt{2}$ , então a soma de todos os segmentos formados é igual a  $9\ell\sqrt{2}$ .

Portanto a resposta correta da questão é o item A.

<https://drive.google.com/file/d/16xg0zJD6BR3H8BuHE-rYxFRLpVguYVwG/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.10** – (INSPER-2003) Na figura abaixo, temos o quadrado ABCD de lado 4. Dividimos cada lado na razão 1:3 e, com os pontos obtidos, obtemos um outro quadrado,  $A_1B_1C_1D_1$ , inscrito no maior. Dividimos cada lado do quadrado  $A_1B_1C_1D_1$  na mesma razão e repetimos o processo, obtendo o quadrado  $A_2B_2C_2D_2$ , e assim sucessivamente.



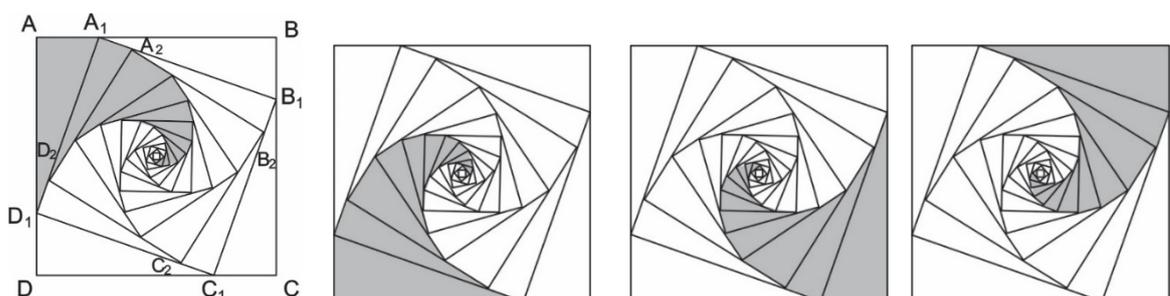
Se  $S_1$  é a área do triângulo  $AD_1A_1$ ,  $S_2$  é a área do triângulo  $A_1D_2A_2$  e assim sucessivamente, então o limite da soma  $S_1 + S_2 + \dots$  é igual a

- A) 1.
- B)  $\sqrt{2}$ .
- C) 2.
- D)  $2\sqrt{2}$ .
- E) 4.

### Resolução:

Podemos observar, na Figura 69, que após todas as rotações em torno de seu centro de  $90^\circ$  no sentido anti-horário efetuadas nos passos a seguir, obtemos que todas as áreas são iguais.

**Figura 69** – Simetria de rotação.



Fonte: Autor.

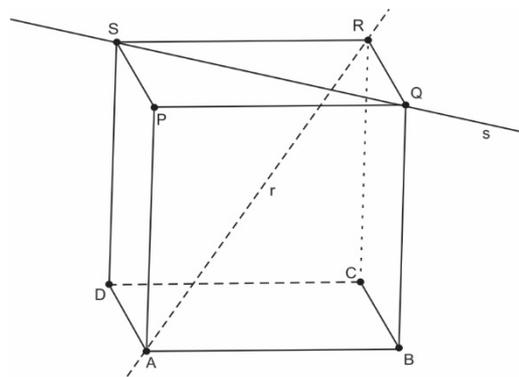
Daí, podemos perceber a cobertura total do quadrado e, então, concluímos que a área sombreada ( $A_s$ ) é igual a um quarto da área do quadrado.

$$A_s = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item E.

<https://drive.google.com/file/d/1KuWRT-J89gEBTCH0qCNuze-be4G8zjsM/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.11** – (ENQ-2018.1) Dadas duas retas reversas  $r$  e  $s$  no espaço, definimos o ângulo entre  $r$  e  $s$  como sendo o menor ângulo entre  $r$  e  $s'$ , em que  $s'$  é qualquer reta paralela a  $s$  e concorrente com  $r$ . Pode-se provar que este ângulo não depende da reta  $s'$  escolhida. Na figura abaixo, as retas reversas  $r$  e  $s$  são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.



Calcule, de acordo com a definição acima, o cosseno do ângulo entre  $r$  e  $s$ .

### Resolução:

De acordo com a definição relembra no enunciado, precisamos determinar o ângulo entre  $r$  e  $s'$ , com  $s'$  paralela a  $s$  e concorrente com  $r$ . Se transladarmos  $s$  verticalmente para baixo, uma distância equivalente à metade da aresta do cubo, obtemos  $s'$ .

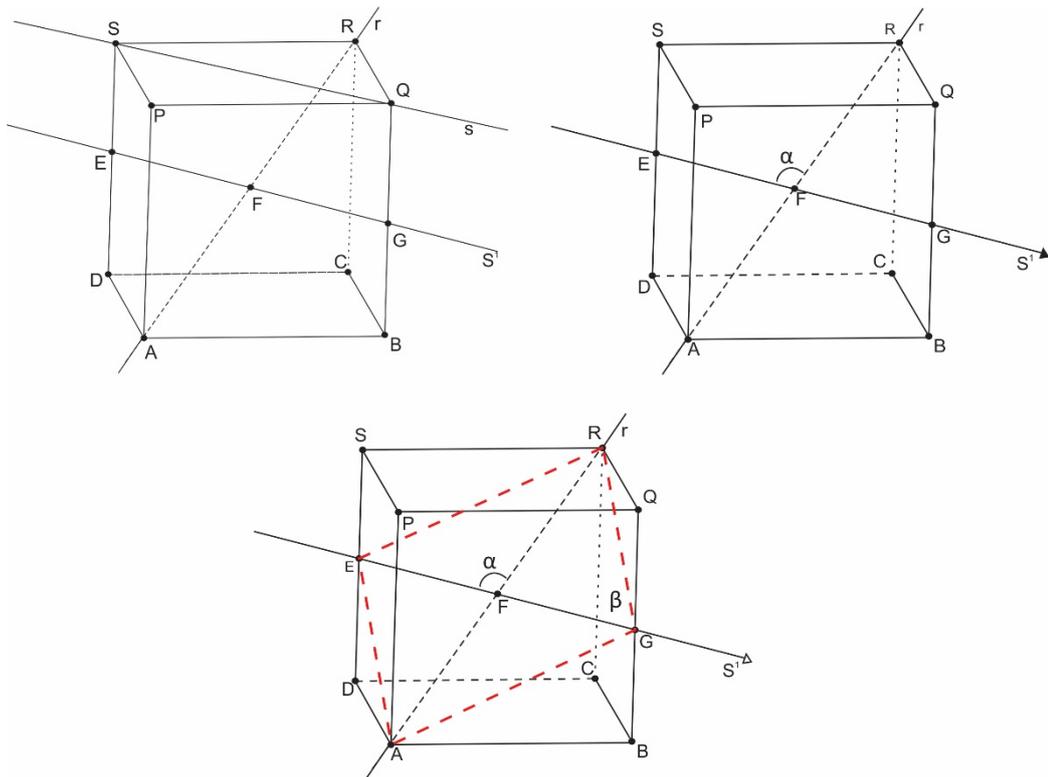
Se a aresta do cubo mede  $a$ , então  $\overline{SE} = \overline{ED} = \overline{QG} = \overline{GB} = \frac{a}{2}$  e  $F$  é o ponto de encontro de  $r$  e  $s'$ . ( $F$  é o centro do cubo).

Devemos observar, também, que, se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

Portanto, podemos pensar em um plano  $\beta$  que contém  $r$  e  $s'$  e, conseqüentemente, os pontos  $A$ ,  $E$ ,  $G$  e  $R$ .

Por simetria das faces do cubo e das condições anteriores, temos que  $\overline{AG} = \overline{GR} = \overline{RE} = \overline{EA}$  (Pitágoras ou congruência de triângulos). Daí, observando o plano  $\beta$ , obtemos o losango AERG, em que  $\overline{EG}$  e  $\overline{AR}$  são as diagonais.

**Figura 70** – Construção geométrica do losango AERG.

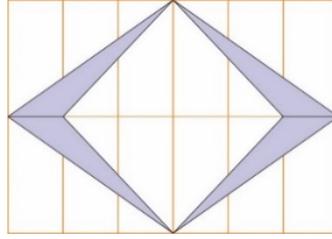


Fonte: Autor.

Concluimos que  $\widehat{E\hat{F}R} = \alpha$  (ângulo entre  $r$  e  $s'$ ) é  $90^\circ$ , pois as diagonais do losango são perpendiculares e  $\cos\alpha = 0$ .

<https://drive.google.com/file/d/110zqgdQ68dhh3e1mFMCD4HaiCiA2vH9F/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.12** – (ENEM-2011) Em uma cidade, a cada inauguração de prédios, a orientação da prefeitura, por meio de uma lei de incentivo à cultura, é a construção de uma obra de arte na entrada ou no *hall* desse prédio. Em contrapartida, a prefeitura oferece abatimento em impostos. No edifício das Acácias, o artista contratado resolveu fazer um quadro composto de 12 mosaicos, de dimensões de 12 cm por 6 cm cada um, conforme a figura.



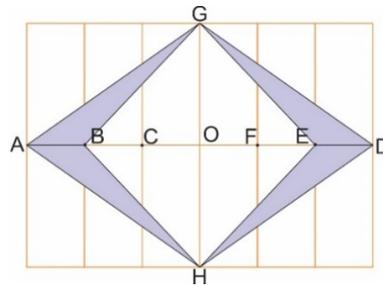
A área da figura sombreada do quadro é de

- A)  $36 \text{ cm}^2$ .
- B)  $72 \text{ cm}^2$ .
- C)  $144 \text{ cm}^2$ .
- D)  $288 \text{ cm}^2$ .
- E)  $432 \text{ cm}^2$ .

**Resolução:**

Observe, na Figura 71, que o  $\triangle ABG$  e o  $\triangle CGO$  possuem mesma base e mesma altura. Assim, como  $\triangle EDG$  e  $\triangle FGO$ ;  $\triangle ABH$  e  $\triangle CHO$ ;  $\triangle EDH$  e  $\triangle FHO$ .

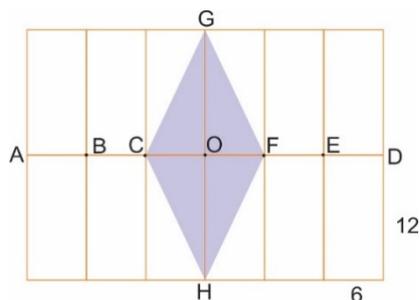
**Figura 71** – Triângulos com mesma base e altura.



Fonte: Autor.

Movimentando por translação horizontal as bases AB e ED para CO e FO, respectivamente, (observe Figura 72), obtemos:

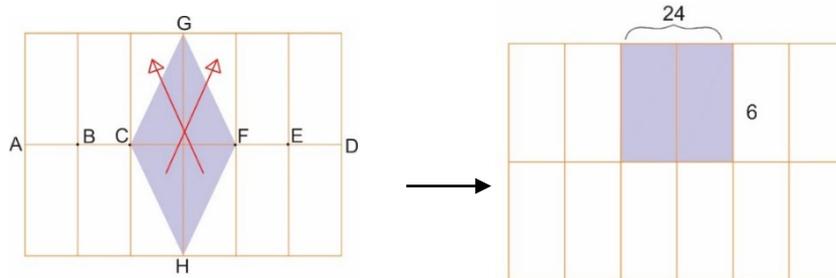
**Figura 72** – Translação horizontal de segmentos.



Fonte: Autor.

Movimentando por translação oblíqua os triângulos CHO e FHO (observe Figura 73), temos:

**Figura 73** – Translação oblíqua de triângulos.



Fonte: Autor.

Daí, podemos perceber que a área sombreada é igual à área do retângulo  $6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$ .

Portanto a resposta correta da questão é o item C.

<https://drive.google.com/file/d/1DiUf2tSztA95WIY00o4nO8d0dLvHwytE/view?usp=sharing>

O próximo exemplo está diretamente relacionado ao **princípio de Fermat** ou *do tempo mínimo*. Modernamente, tal princípio postula que, no vácuo, a luz se propaga, entre dois pontos, de forma a minimizar o tempo total de percurso. Admitindo que a propagação da luz se dê, na ausência de obstáculos, em linha reta, concluímos que a minimização do tempo total de percurso equivale à minimização da distância total percorrida.

Portanto, nas notações da figura, se A denota uma fonte de luz, B um anteparo e  $r$  um espelho plano (todos situados no vácuo), então um raio de luz que emana de A é refletido em um ponto  $P \in r$  e incide em B, percorre uma trajetória tal que a soma  $\overline{PA} + \overline{PB}$  é a menor possível; assim, a análise do exemplo abaixo, permite-nos deduzir, a partir do princípio de Fermat, a **lei da reflexão** da Óptica geométrica: nas condições acima, os ângulos de incidência e reflexão do raio de luz no espelho coincidem.

**Exemplo 4.13:** Na Figura 74, construa com régua e compasso o ponto  $P \in r$  para o qual a soma  $\overline{PA} + \overline{PB}$  seja a menor possível.

**Figura 74** – Menor percurso que toca uma reta.

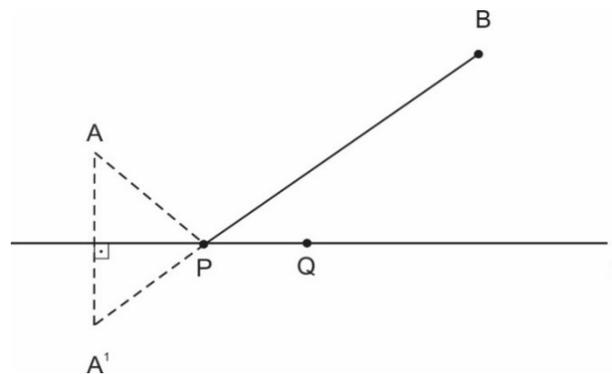


Fonte: Muniz Neto (2013).

**Resolução:**

Se  $A'$  é o simétrico de  $A$  em relação a  $r$  (Sejam dados, no plano, um ponto  $A$  e uma reta  $r$ , com  $A \notin r$ . Dizemos que um ponto  $A'$  é o **simétrico** de  $A$  em relação à reta  $r$  quando  $\overline{AA'} \perp r$  e  $r$  passar pelo ponto médio do segmento  $AA'$ .), afirmamos que o ponto  $P$  desejado é o ponto de interseção de  $A'B$  com  $r$ . Para provar este fato, seja  $Q$  outro ponto qualquer de  $r$ .

**Figura 75** – Simetria do ponto  $A$  em relação a reta  $r$ .



Fonte: Muniz Neto (2013).

Podemos observar que  $r$  é reta mediatriz de  $AA'$  e, então, qualquer ponto sobre  $r$  é equidistante de  $A$  e  $A'$ . Daí o fato de  $A'$  ser o simétrico de  $A$  em relação a  $r$  garante que  $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$  e, analogamente,  $\overline{AP} = \overline{A'P}$ . Tais igualdades, juntamente com a desigualdade triangular, fornecem sucessivamente

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} = A'B < \overline{A'Q} + \overline{BQ} = \overline{AQ} + \overline{BQ}.$$

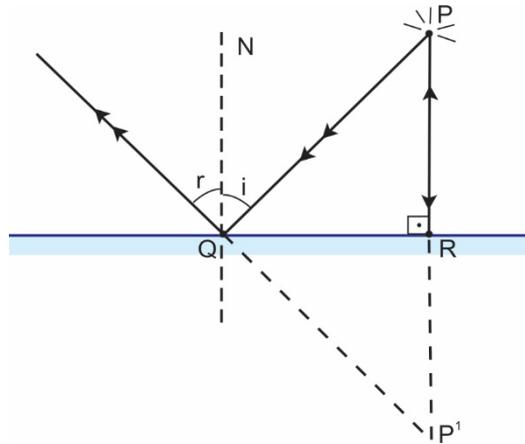
Uma consequência do Exemplo 4.13 por ser encontrada nos espelhos planos.

### **Propriedade fundamental dos espelhos planos: simetria**

Considere o espelho plano representado na Figura 76, diante do qual se situa um objeto luminoso pontual  $P$ . Sejam os raios luminosos  $PR$  e  $PQ$ , que incidem no espelho, respectivamente, normal e obliquamente. O raio  $PR$  se refletirá sobre si mesmo, enquanto  $PQ$  dará um raio refletido oblíquo em relação ao espelho. A imagem de  $P$  é  $P'$ , obtida pelo cruzamento dos prolongamentos dos raios refletidos.

A fim de apresentar a Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos, demonstraremos a congruência dos triângulos  $PQR$  e  $P'QR$ .

**Figura 76** – Propriedade fundamental dos espelhos planos.



Fonte: Helou, Gualter e Newton (2007).

- O lado QR é comum aos dois triângulos.
- $\hat{Q}PR = i$  (alternos internos) e  $\hat{Q}P'R = r$  (correspondentes). Mas, como  $r = i$  (2ª Lei da Reflexão), tem-se  $\hat{Q}P'R = \hat{Q}PR$ .
- $\hat{Q}RP = \hat{Q}RP' = \hat{\text{ângulo reto}}$  (por construção).

Demonstrada a congruência dos dois triângulos, podemos afirmar que:

$$\boxed{PR = P'R}$$

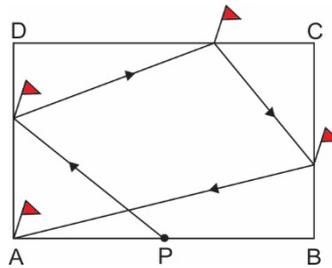
Isso significa que a distância do objeto ao espelho (PR) é igual à distância da imagem ao espelho (P'R). Tal verificação é conhecida por **Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos** e pode ser enunciada assim:

**Propriedade 4.1** – *Nos espelhos planos, a imagem é sempre **simétrica** do objeto em relação ao espelho.*

**Exemplo 4.14** – VELOSO, VIANA, 2008a.

### A corrida das bandeiras

A corrida das bandeiras é feita em um campo retangular de 60 metros de comprimento por 40 metros de largura. Cada concorrente corre sozinho, partindo do ponto médio  $P$  do lado maior  $AB$  com quatro bandeiras na mão. O objetivo é espetar uma bandeira em cada um dos lados  $AD$ ,  $DC$  e  $CB$ , por esta ordem, e colocar a última no canto  $A$ .

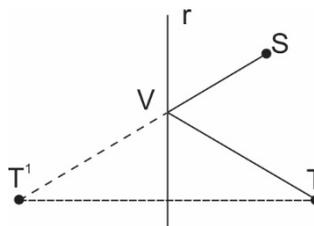


Em que locais deve um concorrente espetar as bandeiras para que o trajeto seja mínimo? Quantos metros tem ele de correr neste caso?

### Resolução:

Temos de encontrar o caminho mais curto entre  $P$  e  $A$  passando pelos segmentos  $AD$ ,  $DC$  e  $CB$ . O caminho mais curto entre dois pontos  $S$  e  $T$  passando pela reta  $r$  se obtém facilmente da seguinte forma:

**Figura 77** – O caminho mais curto entre dois pontos  $S$  e  $T$  passando pela reta  $r$ .



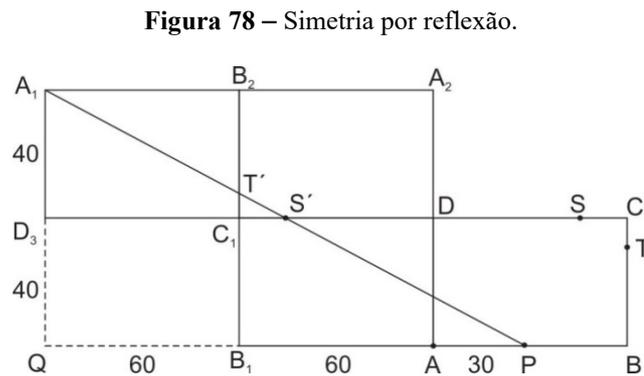
Fonte: Veloso e Viana (2008a).

- Marca-se o ponto  $T'$ , simétrico de  $T$  em relação a  $r$ .
- Une-se  $S$  com  $T'$ , obtendo o ponto  $V$  na reta  $r$ .
- O trajeto mais curto é  $S$ - $V$ - $T$ .

No problema o caminho das bandeiras, vamos seguir o mesmo método, isto é, cada vez que tivermos de passar em um lado de campo, desenhamos a figura simétrica em relação a esse lado.

Assim, partindo do campo ABCD:

– Como a primeira bandeira é espetada em AD, traçamos o retângulo simétrico relativamente a esse lado (retângulo A-B<sub>1</sub>-C<sub>1</sub>D);



Fonte: Veloso e Viana (2008a).

– Como temos de passar no lado CD, desenhamos o retângulo C<sub>1</sub>-B<sub>2</sub>-A<sub>2</sub>-D, simétrico do anterior relativamente a C<sub>1</sub>-D;

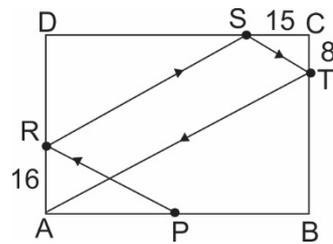
– A terceira bandeira fica em BC, logo traçamos a figura simétrica da anterior relativamente a C<sub>1</sub>-B<sub>2</sub> e obtemos o retângulo C<sub>1</sub>-D<sub>2</sub>-A<sub>3</sub>-B<sub>2</sub>.

Para se obter o caminho mais curto, basta unir P com A<sub>3</sub>. Os pontos R, S' e T' correspondem aos locais onde devem ser espetadas as bandeiras. Efetuando as simetrias inversas das anteriores, obtemos os pontos correspondentes S e T sobre os lados do campo.

A distância percorrida pelo concorrente é equivalente a ir de P até a A<sub>3</sub> e pode calcular-se facilmente aplicando o teorema de Pitágoras. Sabemos que de P a Q são 150 metros e de Q a A<sub>3</sub> são 80. A distância percorrida é a raiz quadrada de  $150^2 + 80^2$ , ou seja, 170 metros.

Os mais interessados podem verificar onde se situam os pontos onde as bandeiras são colocadas:

**Figura 79** – O caminho mais curto.



Fonte: Veloso e Viana (2008b).

- O ponto R fica a 16 metros de A.
- S fica a 15 metros de C.
- T fica a 8 metros de C.

Observamos o paralelismo entre PR e ST e entre RS e TA.

**Exemplo 4.15** – VELOSO, VIANA, 2008b.

As fachadas de dois prédios fazem entre si um ângulo reto. O muro que os separa da rua limita um jardim triangular. O jardim é atravessado por três caminhos que ligam entre si o portão de entrada e as duas portas dos prédios.



O arquiteto que fez o projeto colocou as portas e o portão de tal modo que:

- 1º Cada caminho do portão até as portas é perpendicular ao prédio.
- 2º O caminho que serve para ligar as duas portas é o mais curto possível.

Em que ponto do muro está o portão?

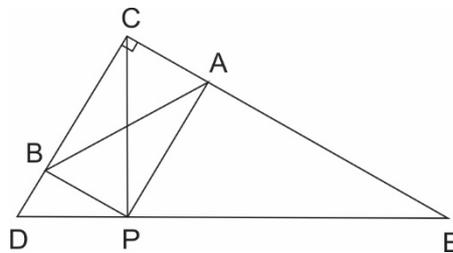
**Resolução:**

Perante um problema desses, de máximos e mínimos, a tentação imediata de muitos matemáticos é descobrir a função que traduz a situação, derivá-la, igualar a zero e fazer cálculos para descobrir as soluções da equação. No entanto, uma simples observação da figura permite-nos encontrar rapidamente a solução sem qualquer trabalho!

Dado que os caminhos PA e PB são perpendiculares aos prédios, o quadrilátero [PACB] é um retângulo tem-se, portanto, que as diagonais são iguais:  $CP = AB$ .

Logo, AB é mínimo quando CP for mínimo, e o mínimo de CP verifica-se quando a linha CP for perpendicular ao muro DE.

**Figura 80** – Simetria das diagonais do retângulo.

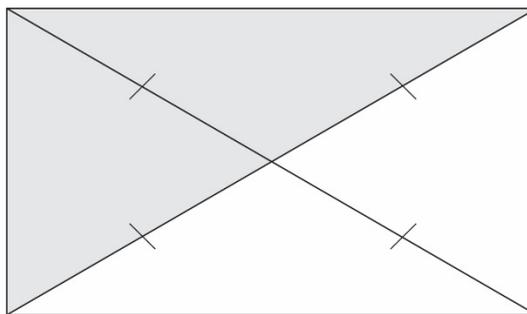


Fonte: Veloso e Viana (2008b).

*Nota: As três distâncias do ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo a seus vértices são iguais.*

Prova: Um triângulo retângulo pode ser entendido como a “metade” de um retângulo. Assim, é só lembrar que um retângulo é um paralelogramo com diagonais congruentes e observar a Figura 81.

**Figura 81** – Mediana relativa à hipotenusa.



Fonte: Autor.

**Exemplo 4.16** – (UECE-2017) Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a 1 m, pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

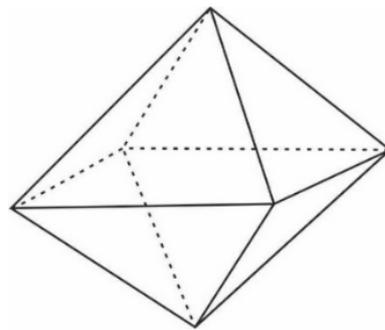
- A)  $\frac{2}{3}m^3$ .
- B)  $\frac{2}{7}m^3$ .
- C)  $\frac{1}{6}m^3$ .
- D)  $\frac{4}{7}m^3$ .

Antes da resolução vamos recordar as características de um octaedro.

### Octaedro

O octaedro é formado por duas pirâmides quadrangulares justapostas pela base e, quando as suas doze arestas são congruentes entre si, temos um octaedro regular. O octaedro regular é simétrico em relação ao centro, a vários eixos de simetria, assim como em relação a vários planos.

**Figura 82** – Octaedro.

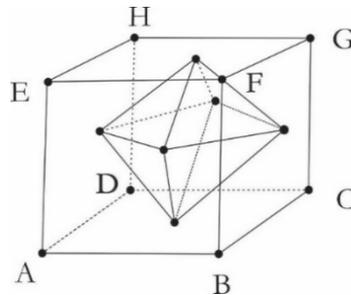


Fonte: Autor.

**Resolução:**

Do enunciado, podemos obter a Figura 83 (um cubo e um octaedro regular).

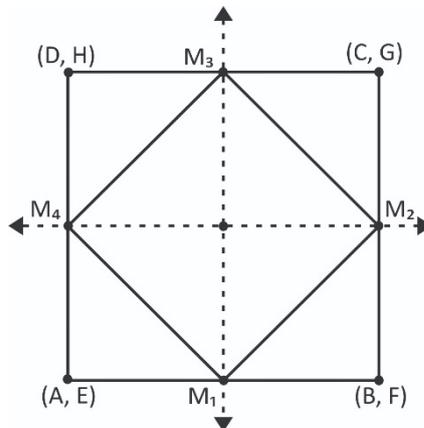
**Figura 83** – Construção geométrica do Exemplo 4.16.



Fonte: Autor.

Observando os sólidos de cima (vista de cima), obtemos a Figura 84. Traçando os eixos de simetria (horizontal e vertical) do quadrado ABCD, podemos perceber que a área do quadrado  $M_1M_2M_3M_4$  é igual à metade da área do quadrado ABCD.

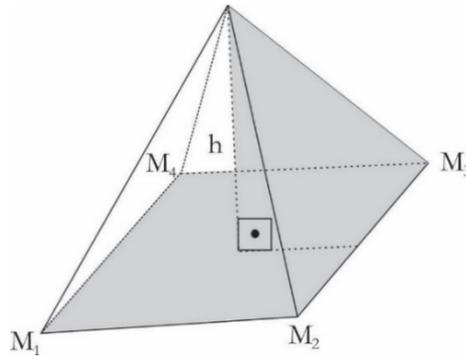
**Figura 84** – Projeção ortogonal do cubo e do octaedro sobre a base ABCD.



Fonte: Autor.

Daí, como o volume do octaedro regular é igual a duas vezes o volume da pirâmide, podemos perceber facilmente que a base da pirâmide é igual ao quadrilátero  $M_1M_2M_3M_4$  e que sua altura  $h$  é igual à metade da altura do cubo.

**Figura 85** – Pirâmide regular de base quadrangular com todas as arestas iguais (metade do octaedro).



Fonte: Autor.

Portanto, o volume do octaedro “regular”  $V$  é igual a

$\text{Área}_{(M_1M_2M_3M_4)} = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}_{(ABCD)} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ m}^2$ .  $\text{Área}_{(M_1M_2M_3M_4)}$  é igual a área da base da pirâmide quadrangular)

$$h_{\text{pirâmide regular quadrangular}} = \frac{1}{2} \cdot h_{\text{cubo}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ m}$$

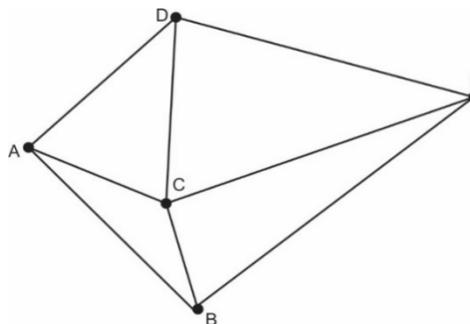
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ m}^3.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item C.

### Exemplo 4.17

#### Trens com um quê calidoscópico

Imagine cinco cidades, cujos nomes são A, B, C, D e E. Há rotas de trem de duas vias (ida e volta) para conectar alguns pares de tais cidades, como mostra a figura. Construa uma tabela 5 por 5 para descrever: (a) o número de rotas sem escala de cidade a cidade; (b) o número de rotas de cidade a cidade com só uma escala; (c) o número de rotas de cidade a cidade com duas escalas.



**Resolução:**

Inicialmente poderíamos escrever uma matriz de números ordenados, com cinco linhas e cinco colunas, na qual as linhas da matriz mostram o ponto de partida, as colunas mostram o ponto de chegada, e o cruzamento entre uma linha e uma coluna mostra a contagem de rotas. Por exemplo, entre A e C só há uma rota sem escalas, e entre A e E não há nenhuma.

**Figura 86** – Rotas entre cidades sem escalas (exemplo).

	A	B	C	D	E	← chegadas
A			1		0	
B						
C	1					
D						
E	0					
↑ partidas						

Fonte: Autor.

Com esse método, construímos a matriz de números mostrada na Figura 87, que representa a resposta à pergunta (a). Tomando algumas decisões por conta própria, visto que o enunciado não dava instruções detalhadas: seria proibido sair de uma cidade para voltar à mesma cidade e, por isso, para o caso “parte de A e chega a A”, adotou uma convenção útil: a contagem vale 0. (Poderíamos ter adotado outro símbolo, como  $\emptyset$ , se isso fosse conveniente.) Além disso, decidimos que seria proibido voltar atrás ou andar em círculos: ADCB seria uma viagem de duas escalas válida entre A e B, mas ACAB não seria.

**Figura 87** – Todas as rotas entre duas cidades sem escala (Matriz Simétrica).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor.

Eis a contagem referente à questão (a). Da mesma forma, para dar resposta à questão (b), construímos outra tabela de números ordenados, usando o mesmo método. Veja a Figura 88.

**Figura 88** – Todas as rotas de cidade a cidade com uma só escala (Matriz Simétrica).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor.

Por fim, contando o número de viagens do tipo “parte-1-2-chega”, sem permitir que o passageiro passe pela mesma cidade duas vezes (do tipo DEBE ou CDCE), obtemos a resposta à pergunta (c). No caso do elemento  $a_{42} = 4$ , por exemplo, consideramos válidas as opções: DACB, DCAB, DCEB e DECB. Veja a Figura 89.

**Figura 89** – Todas as rotas de cidade a cidade com duas escalas (Matriz Simétrica).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

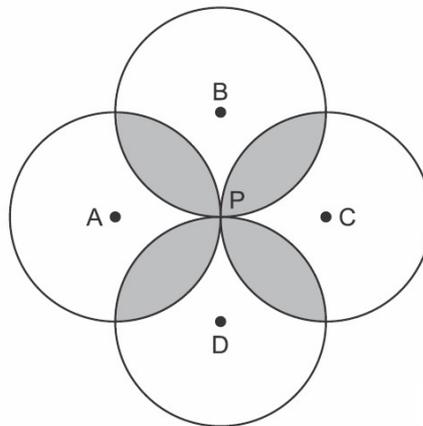
Fonte: Autor.

### Uma curiosidade sobre o Exemplo 4.17

O matemático americano Howard Eves (1911-2004) incluiu este problema no livro *Elementary Matrix Theory*. Muitos problemas reais, inclusive problemas de contagem, em algum momento, transformam-se em matrizes com grande grau de simetria. É por isso que os matemáticos passam tanto tempo examinando matrizes: querem ter a sorte de identificar uma simetria ou repetição e de explicar sua lógica. Hoje, matrizes e álgebra linear aparecem tantas vezes juntas que, às vezes, um estudante pensa que uma coisa não existe sem a outra. Howard toma o cuidado de desfazer essa impressão: “A teoria das matrizes é muito mais extensa do que o estudante de primeiro ano de faculdade pode imaginar. [...] Na matemática e nas aplicações da matemática, os números frequentemente aparecem (ou você pode forçá-los a aparecer) em arranjos retangulares, alguns dos quais exibem simetrias e repetições extraordinárias.”

Howard dá uma breve lista de assuntos cujo estudo é mais fácil com a ajuda de matrizes e algum tipo de álgebra associada a elas (pois existe mais de um): retas, planos, seções cônicas, combinatória, probabilidade, estatística, grafos, números complexos, mecânica quântica, teoria da relatividade, teoria da informação... “Entendi”, escreveu Adélia no caderno: “devo estudar a teoria das matrizes, de preferência sem me preocupar demais com *para que isso serve*, pois serve para muita coisa.”

**Exemplo 4.18** – (CEFETMG-2019) A figura abaixo representa quatro circunferências de mesmo raio e centros A, B, C e D. Essas circunferências tangenciam-se em um único ponto P, comum às quatro circunferências, e o quadrilátero ABCD é um quadrado cujo lado mede  $2\sqrt{2}$  cm.



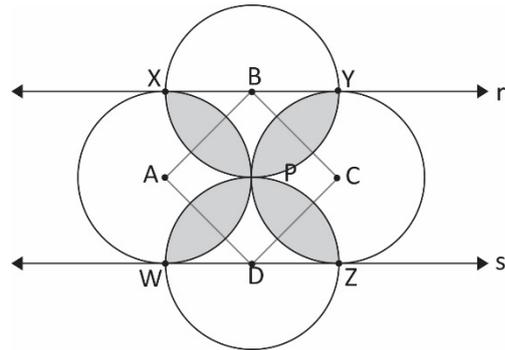
A área da região sombreada na figura, em  $\text{cm}^2$ , é

- A)  $2\pi - 4$ .
- B)  $8\pi - 4$ .
- C)  $8\pi - 16$ .
- D)  $16\pi - 16$ .

**Resolução:**

Observe, na Figura 90, o quadrado ABCD e duas retas paralelas  $r$  e  $s$  passando, respectivamente, por X, B, Y e por Z, D e W.

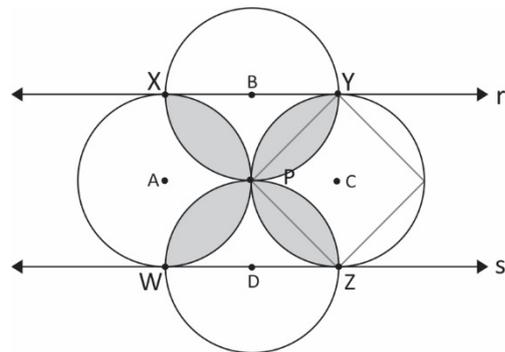
**Figura 90** – Quadrado ABCD e as retas paralelas  $r$  e  $s$ .



Fonte: Autor.

Efetuada uma translação horizontal do quadrado ABCD de modo que o ponto B ocupe o lugar de Y, o ponto A ocupe o lugar de P, o ponto P ocupe o lugar de C e o ponto D ocupe o lugar de Z, pois  $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{BY} = \overline{DZ}$ , obtemos

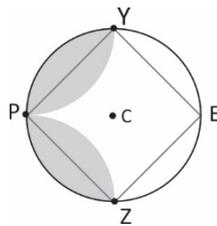
**Figura 91** – Translação horizontal do quadrado ABCD.



Fonte: Autor.

Isolando a circunferência de centro C, obtemos a Figura 92.

**Figura 92** – Circunferência de centro C

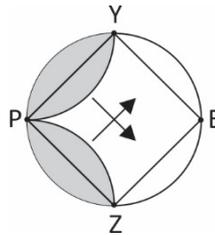


Fonte: Autor.

Observando o quadrado PYEZ, podemos efetuar uma translação oblíqua do segmento PY, assim como a área sombreada abaixo do segmento PY.

Por analogia, podemos também transladar obliquamente PZ, assim como a área sombreada acima do segmento PZ.

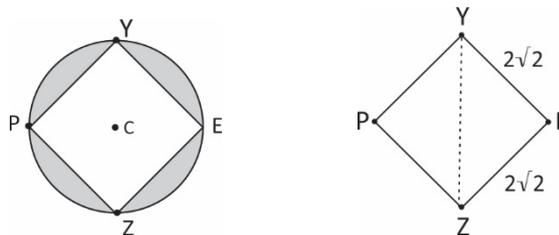
**Figura 93** – Translações oblíquas.



Fonte: Autor.

Calculando a área sombreada da Figura 94.

**Figura 94** – Região sombreada interior à circunferência e exterior ao quadrado.



Fonte: Autor.

A área do quadrado PYEZ é igual a  $(2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ cm}^2$  e o raio R da circunferência é calculado por

$$2R = \overline{YZ} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow 2R = 4 \Leftrightarrow R = 2$$

Logo, a área sombreada da Figura 94 é dada por

$$A = \pi \cdot 2^2 - 8 = 4\pi - 8.$$

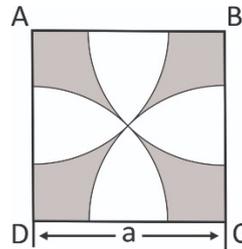
Por analogia (considerando a circunferência de centro A e as mesmas translações) podemos concluir que a área sombreada do problema é igual ao dobro da área da Figura 94. Logo a área pedida é  $2(4\pi - 8) = 8\pi - 16$ .

Portanto a resposta correta da questão é o item C.

<https://drive.google.com/file/d/114njpwSAR0G2nzIgzqNpVskKIsq7jHg/view?usp=sharing>

**Exemplo 4.19** – A figura a seguir representa uma peça de cerâmica, em que ABCD é um quadrado de centro O e a parte destacada é limitada por quartos de circunferências centradas nos vértices e passando por O. Se  $\overline{CD} = 20$  cm, então a área destacada, em centímetros quadrados, é igual a

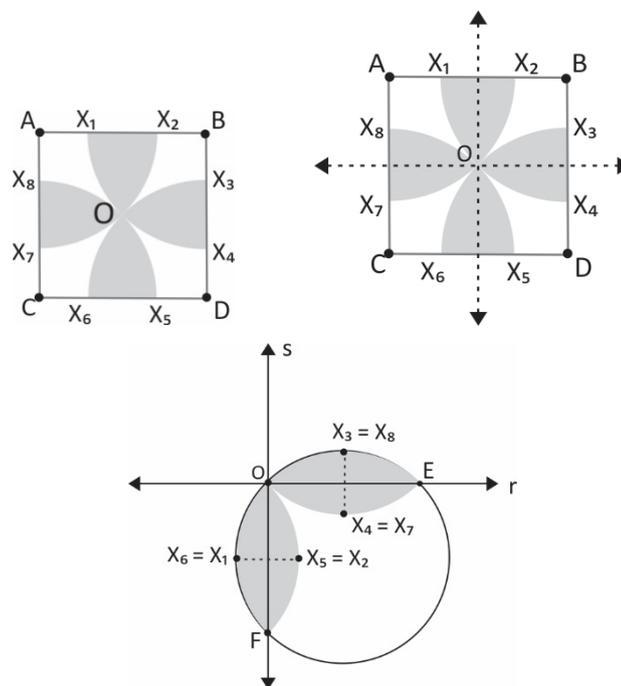
- A)  $100 \cdot (\pi - 3)$  cm<sup>2</sup>.  
 B)  $200 \cdot (\pi - 3)$  cm<sup>2</sup>.  
 C)  $100 \cdot (\pi - 2)$  cm<sup>2</sup>..  
 D)  $200 \cdot (\pi - 2)$  cm<sup>2</sup>..



**Resolução:**

Traçando os eixos de simetria do quadrado e efetuando uma translação vertical para baixo  $OX_1X_2$  fazendo  $X_1$  coincidir com  $X_6$  e  $X_2$  com  $X_5$  e outra translação horizontal para a direita de  $OX_7X_8$  fazendo  $X_7$  coincidir com  $X_4$  e  $X_8$  com  $X_3$ , obtemos a Figura 95.

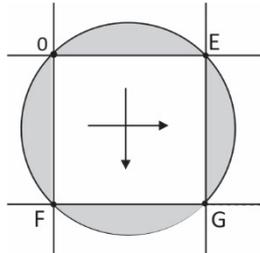
**Figura 95** – Translações horizontais e verticais.



Fonte: Autor.

Efetuada-se uma translação horizontal para a direita da região entre a reta  $s$  e o arco  $\widehat{FX_5O}$  e uma outra translação vertical para baixo da região entre a reta  $r$  e o arco  $\widehat{EX_4O}$ , obtemos a Figura 96.

**Figura 96** – Translações horizontais e verticais.



Fonte: Autor.

Observe que o raio  $R$  do círculo é igual à metade da diagonal  $d$  do quadrado (OFGE).

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Área destacada = Área do círculo – Área do quadrado (OFGE)

$$\text{Área destacada} = \pi \cdot (10\sqrt{2})^2 - 20^2 = 200\pi - 400 = 200(\pi - 2) \text{ cm}^2.$$

Portanto a resposta correta da questão é o item D.

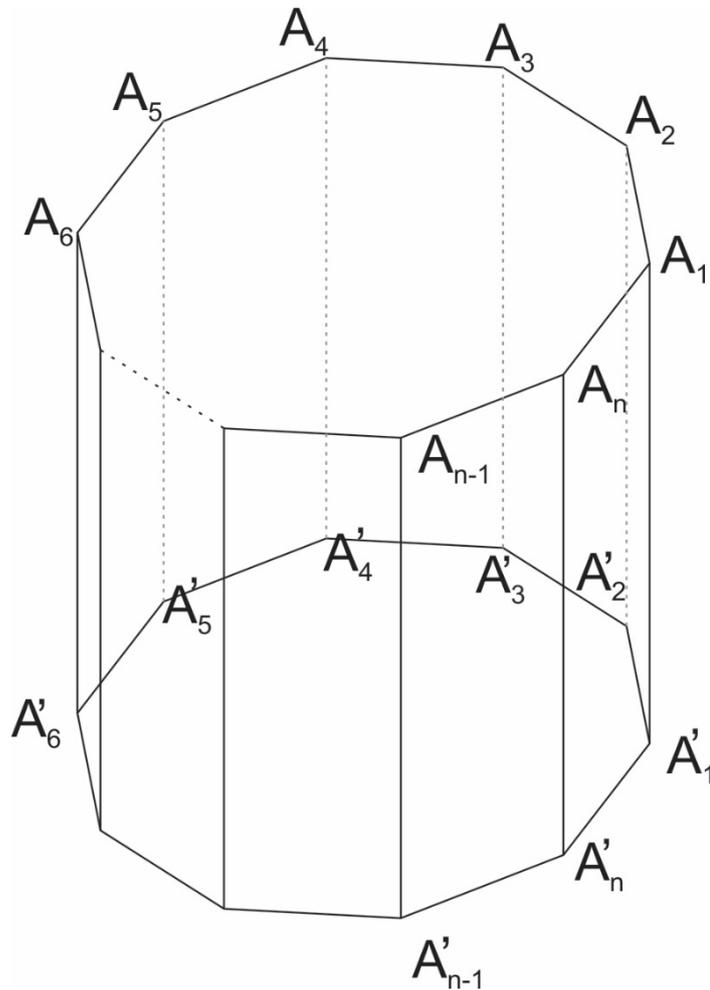
[https://drive.google.com/file/d/1u\\_iv7LT8mQAP63kNsNQIjbFQBafvPOXF/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1u_iv7LT8mQAP63kNsNQIjbFQBafvPOXF/view?usp=sharing)

**Exemplo 4.20** – (ENQ-2020.1) Um poliedro é dito inscritível se existir uma esfera que passa por todos os seus vértices. Mostre que um prisma reto cuja base é um polígono regular é um poliedro inscritível.

**Resolução:**

Seja  $A_1A_2\dots A_n$  o polígono regular de uma das bases do prisma. Como este prisma é reto, a outra base será o polígono  $A'_1A'_2\dots A'_n$  congruente a  $A_1A_2\dots A_n$  e tal que os lados correspondentes  $A_iA_{i+1}$  e  $A'_iA'_{i+1}$  são paralelos.

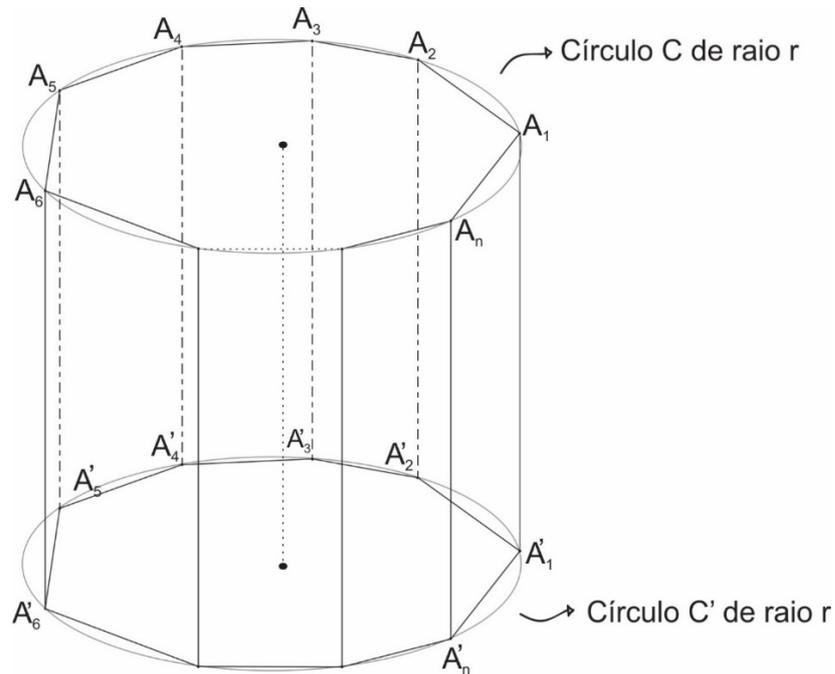
Figura 97 – Prisma regular.



Fonte: Autor.

A base  $A_1A_2\dots A_n$  é regular, podemos considerar o centro  $O$  do círculo  $C$ , de raio  $r$ , que circunscribe este polígono. Como a outra base,  $A'_1A'_2\dots A'_n$ , é congruente a  $A_1A_2\dots A_n$ , ela será inscritível em um círculo  $C'$ , de mesmo raio  $r$  e centro  $O'$ . Como o sólido em questão é um prisma, os planos que contêm as bases são paralelos, e, como este prisma é reto, o segmento  $OO'$  será perpendicular a estes planos e paralelo às arestas  $A_iA'_i$ .

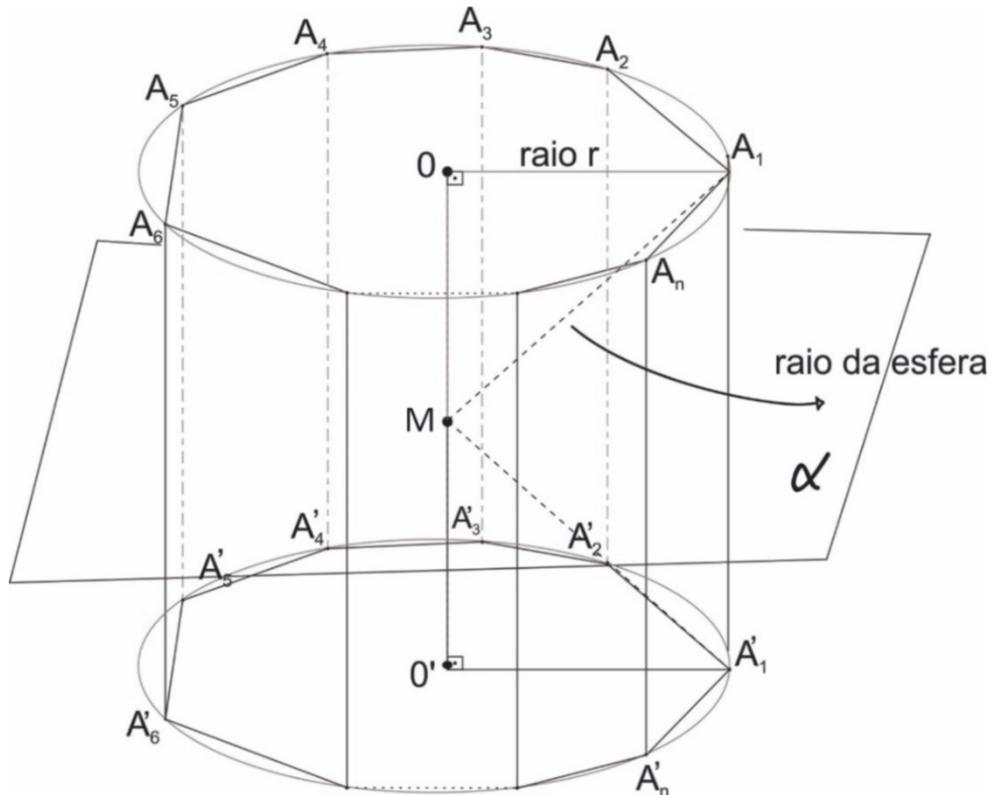
**Figura 98** – Prisma regular inscrito no cilindro.



Fonte: Autor.

Seja  $M$  o ponto médio de  $OO'$  ( $MO \equiv MO'$ ). Cada triângulo  $MOA_i$  é retângulo com catetos de medidas  $\overline{MO}$  e  $r$ . Com isso, todos estes triângulos são congruentes por rotação em torno do eixo  $OO'$  e, conseqüentemente,  $MA_1 \equiv MA_2 \equiv \dots \equiv MA_n$ . Da mesma forma, cada triângulo  $MOA'_i$  é uma reflexão do triângulo  $MOA_i$  em relação ao plano  $\alpha$  que contém  $M$  e é paralelo às bases do prisma. Portanto,  $MA'_1 \equiv MA'_2 \equiv MA'_n$ .

Figura 99 – Seção transversal ( $\alpha$ ) ao prisma regular contendo o ponto M.



Fonte: Autor.

Assim, M é o centro de uma esfera que passa por todos os vértices  $A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n$ , tendo os segmentos  $MA_i$  e  $MA'_i$  como raios.

<https://drive.google.com/file/d/1LFqWHhVjlnVwT3RnmErBbpuaf3iYnhZR/view?usp=sharing>

## 5. ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo, iremos trabalhar a aplicação das simetrias e transformações isométricas em várias, demonstrações ou provas de propriedades matemáticas relacionadas tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior, que, em geral, não usam as simetrias em suas demonstrações.

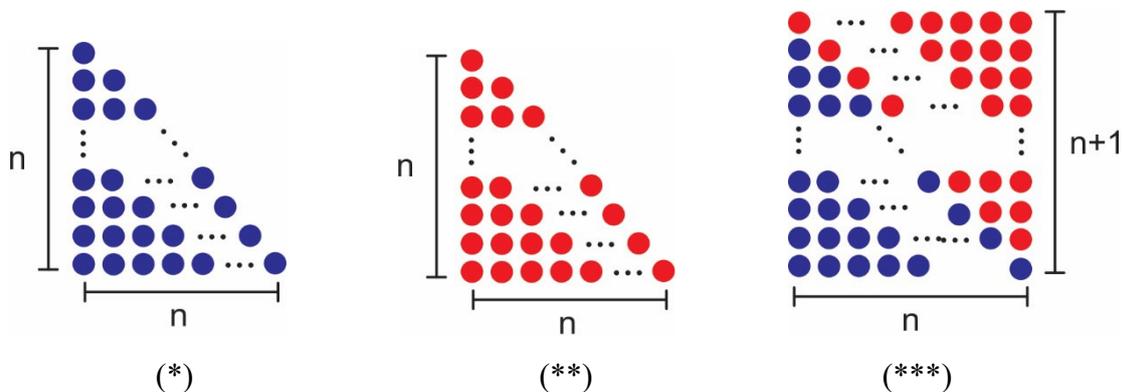
Iremos perceber que o uso das transformações isométricas não só permite uma melhora na compreensão das demonstrações, como também cativa a criatividade despertando procedimentos cada vez mais sofisticados.

**Propriedade 5.1** –  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Considerando  $n$  um número natural qualquer, será que podemos obter facilmente a soma dos  $n$  primeiros números naturais?

Prova: Observe, na Figura 100, que (\*) e (\*\*) juntas (sobrepostas por rotações e translações), formam a (\*\*\*) e daí é possível mostrar visualmente a Propriedade 5.1.

**Figura 100** – Resolução visual para a soma dos  $n$  primeiros números naturais.



Fonte: Autor.

**Propriedade 5.2** – O óctuplo de um número triangular  $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}\right)$ , mais a unidade, é um quadrado perfeito. Algebricamente, temos:

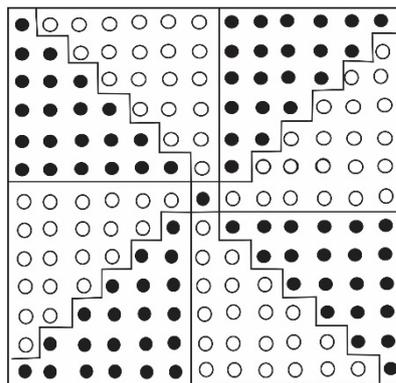
$$\frac{8n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2.$$

Prova: Dá-se o nome de **números triangulares** aos números que acabamos de observar na Propriedade 5.1 e que representam todas as colecções de objetos dispostas regularmente em triângulos.

Esta teoria nasceu às margens do Nilo, em uma época remota, e foi desenvolvida por Diofanto, o pai de aritmética, na escola de Alexandria. No seu tratado, encontra-se a seguinte proposição que dá a condição necessária e suficiente para que um dado número seja triangular: *o óctuplo de um número triangular, mais a unidade, é um quadrado perfeito.*

Esta propriedade torna-se evidente pela simples leitura do tabuleiro na Figura 101.

**Figura 101** – Proposição de Diofanto



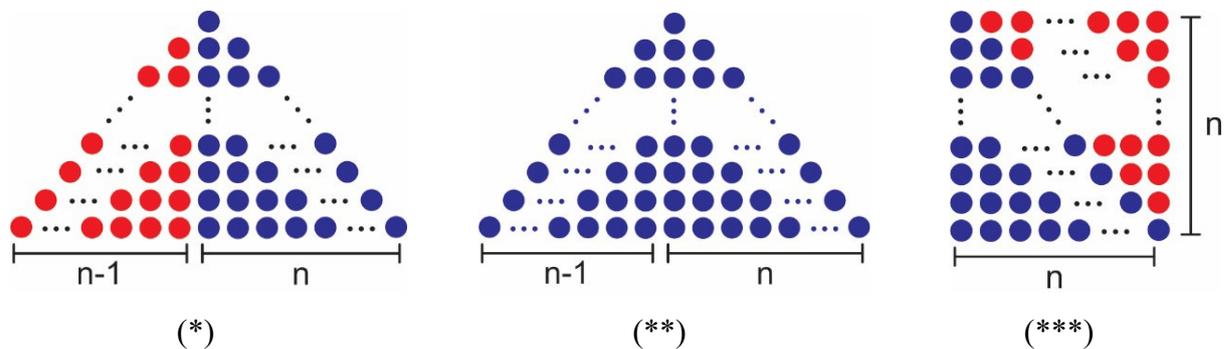
Fonte: Autor.

**Propriedade 5.3** –  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Considerando  $n$  um número natural qualquer, será que podemos obter facilmente a soma dos  $n$  primeiros números ímpares?

Prova: Observe, na Figura 102, (\*) e (\*\*) juntas (sobrepostas por rotações e translações), formam (\*\*\*) e daí é possível mostrar visualmente a Propriedade 5.3.

**Figura 102** – Resolução visual para a soma dos  $n$  primeiros números ímpares



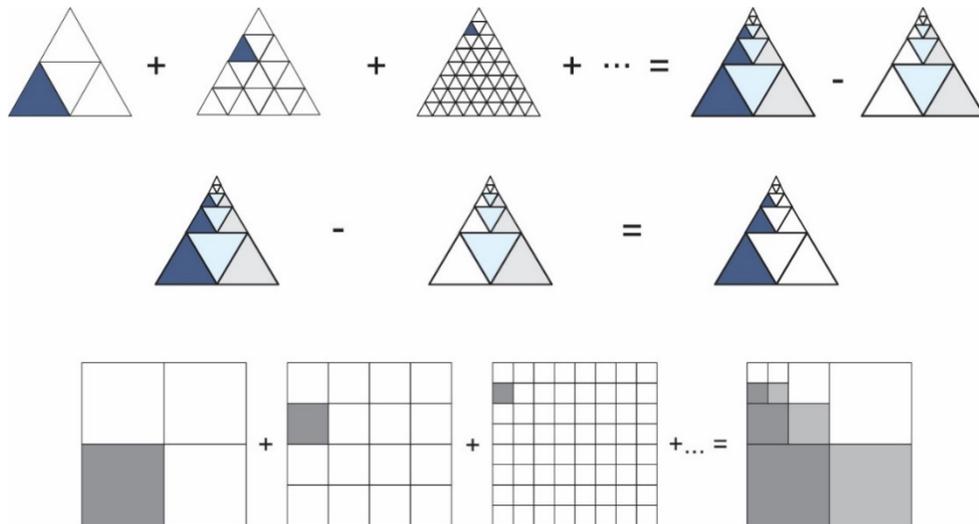
Fonte: Autor.

**Propriedade 5.4** – Observe a interessante série geométrica.

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}.$$

Prova: Usando simetrias e figuras triangulares (triângulos equiláteros) ou figuras quadrangulares (quadrados), podemos mostrar facilmente por geometria e frações a sequência dada. Observe a Figura 103.

**Figura 103** – Resolução por simetria para a série geométrica.

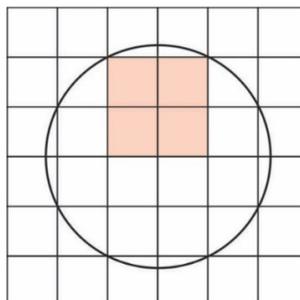


Fonte: Autor.

**Propriedade 5.5** – A área do quadrado inscrito no semicírculo é igual a  $\frac{2}{5}$  da área do quadrado inscrito em um círculo de mesmo raio.

Prova: Inicialmente, construímos um semicírculo e inscrevemos um quadrado inserido em uma malha quadriculada.

**Figura 104** – Quadrado inscrito no semicírculo.

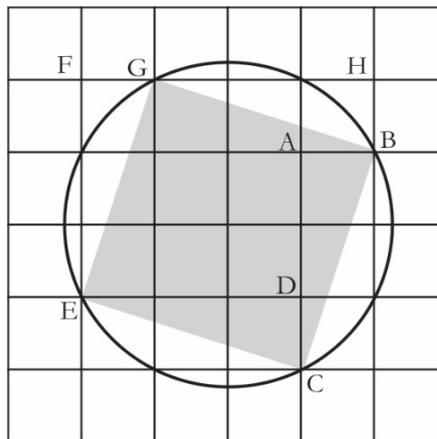


Fonte: Autor.

Agora, construímos um quadrado inscrito em um círculo de raio igual ao semicírculo anteriormente construído (Figura 105).

Por outro lado, a área do quadrado que está inscrito no círculo (Figura 105) é igual à área de **I** (Figura 106), tendo em vista que o triângulo ABC é congruente ao triângulo FEG (caso L.L.L.) e o triângulo DCE é congruente a HBG (caso L.L.L.) e, conseqüentemente, possuem a mesma área.

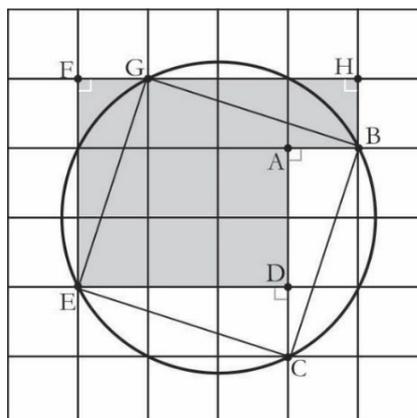
**Figura 105** – Quadrado inscrito no círculo.



Fonte: Autor.

Efetuada uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário do triângulo CDE em torno do ponto E, obtemos o triângulo EFG. Da mesma forma, efetuando uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário do triângulo ABC em torno do ponto B, obtemos o triângulo BGH.

**Figura 106** – Rotações dos triângulos ABC e CDE.



Fonte: Autor.

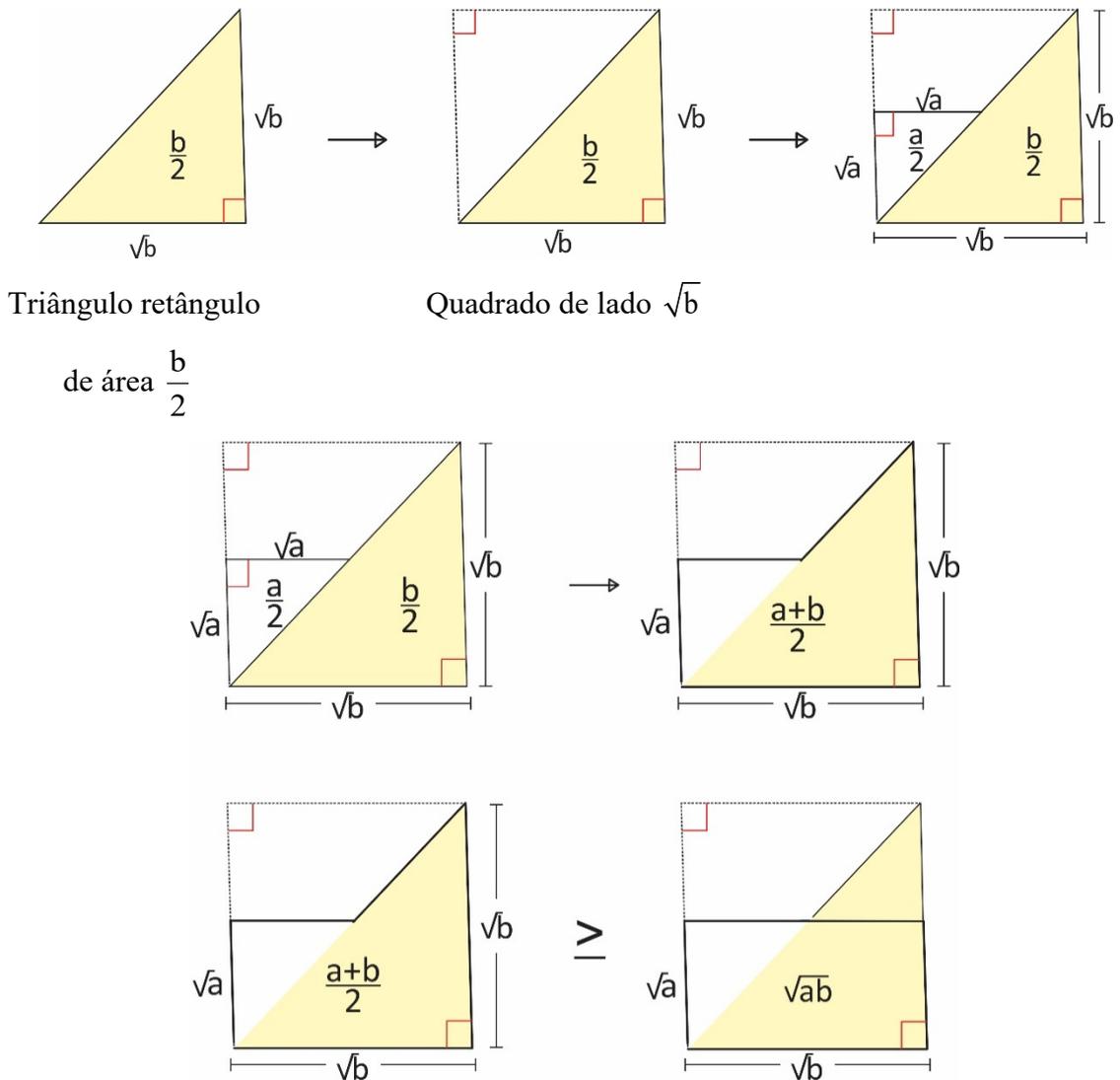
Concluimos o resultado observando que a área de **I** (Figura 106) é igual a 10 quadrados de malha, enquanto a área do quadrado inscrito no semicírculo é igual a 4 quadrados da malha. Portanto, a área do quadrado inscrito em um semicírculo é igual a  $\frac{2}{5}$  da área do quadrado inscrito em um círculo de mesmo raio.

**Propriedade 5.6** – Se  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $a < b$ , então  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . (Desigualdade entre média aritmética e geométrica).

Prova: Resolução visual da desigualdade entre média aritmética e geométrica.

Observe:

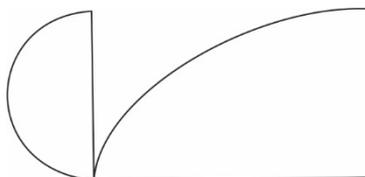
**Figura 107** – Resolução visual para a desigualdade entre média aritmética e geométrica.



**Propriedade 5.7** – A área sob um arco de cicloide é igual a três vezes a área do círculo gerador.

Prova:

**Figura 108** – Meio arco de cicloide e metade da circunferência geradora da cicloide.

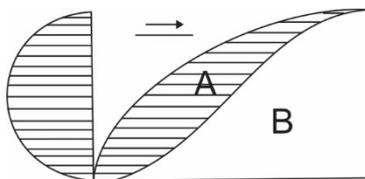


Fonte: Autor.

Para calcular metade da área da cicloide, subtrair-se desta área a área do semicírculo.

Para isso, supõe-se que a área do semicírculo formada por infinitos segmentos. Em seguida efetuamos uma translação horizontal de todos esses segmentos para dentro da cicloide. Desse modo, obtém uma nova curva, a pontilhado, a que chamaremos “a companheira da cicloide” (Figura 109).

**Figura 109** – Translação de segmentos.

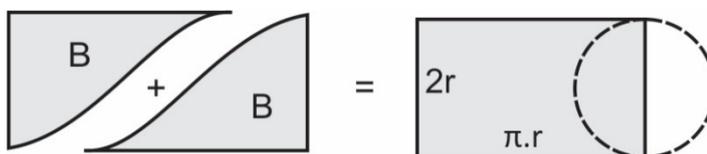


Fonte: Autor.

Assim, a área de metade da cicloide passa a ser formada pela soma de duas áreas:

- A área A entre as duas curvas – a cicloide e a sua companheira – que é igual à metade da área do círculo, ou seja,  $0,5 \pi r^2$ , pois é “formada pelos mesmos segmentos”; este método de cálculo das áreas – chamado dos indivisíveis – deve-se a Cavalieri, um discípulo de Galileu;
- A área B sob a companheira da cicloide; vale metade da área de um retângulo (Figura 110); a altura do retângulo é  $2r$ , e a largura é igual a  $\pi r$ , isto é, metade do perímetro da circunferência geradora da cicloide, pois ela rola sem escorregar; metade da área do retângulo vale, portanto,  $\pi r^2$ .

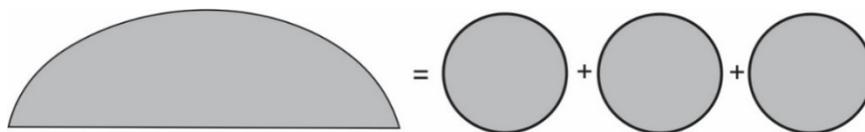
**Figura 110** – A área B é igual à metade da área de um retângulo.



Fonte: Autor.

Assim, metade da área da cicloide é igual a  $1,5 \pi r^2$ . Logo, a área da cicloide é igual a três vezes a área do círculo gerador.

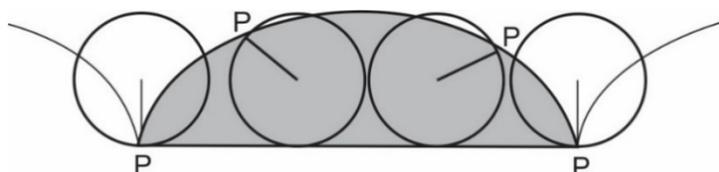
**Figura 111** – A área da cicloide.



Fonte: Autor.

A cicloide é a curva gerada por um ponto P de uma circunferência quando esta rola, sem escorregar, sobre uma reta. A área a calcular é a área sombreada.

**Figura 112** – Arco do cicloide.



Fonte: Autor.

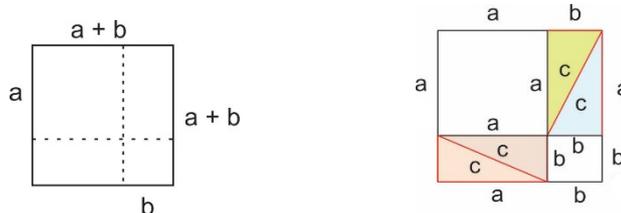
**Propriedade 5.8** – *Teorema de Pitágoras (Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.)*

Prova:

Euclides deixou Pitágoras famoso, pois incluiu uma demonstração do teorema de Pitágoras no livro 1 de *Os Elementos* (é a proposição 47). Mas há evidências de que o teorema era conhecido uns mil anos antes de Pitágoras.

Para reproduzir uma prova conhecida do teorema, começamos examinando a Figura 113. Podemos pensar na possibilidade de construir um quadrado cujos lados sejam iguais a  $a + b$ . A área desse quadrado será:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

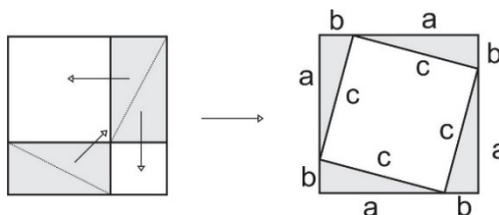
**Figura 113** – O quadrado na demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor.

Note que podemos construir, dentro desse quadrado de lados iguais a  $a + b$ , um quadrado de lado  $a$ , outro de lado igual  $b$  e dois triângulos retângulos iguais de lados  $a$  e  $b$ . Se traçarmos as diagonais dos retângulos, obtemos quatro triângulos retângulos de hipotenusa igual a  $c$  e catetos iguais a  $a$  e  $b$ .

**Figura 114** – Translações dos triângulos retângulos.



Fonte: Autor.

Movimentando os triângulos retângulos por translações e observando as Figuras 115 e 116, obtemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Propriedade 5.9** –  $3 \mid 4^n - 1 : n \in \mathbb{N}$

Prova:

Iremos provar essa propriedade utilizando o método da indução matemática mas não esquecendo o uso de simetrias. Nomeando a propriedade por  $A(n)$ , temos:

$$A(n) : (\forall n \in \mathbb{N})(3 \mid 4^n - 1)$$

Antes de continuarmos, montamos uma breve tabela para alguns valores de  $n$ . Queremos observar como os números se comportam.

$$A(1) : (4^1 - 1 = 3) \text{ e } \left(\frac{3}{3} = 1\right);$$

$$A(2) : (4^2 - 1 = 15) \text{ e } \left(\frac{15}{3} = 5\right);$$

$$A(3) : (4^3 - 1 = 63) \text{ e } \left(\frac{63}{3} = 21\right);$$

$$A(4) : (4^4 - 1 = 255) \text{ e } \left(\frac{255}{3} = 85\right).$$

Percebemos que a afirmação  $A(n)$  vale para  $n = 1$ , isto é, que  $A(1)$  é verdadeira; e sabemos que esse passo é importante na prova por indução. Vemos também que  $A(n)$  é verdadeira até  $n = 4$ , mas não tirar daí nenhuma conclusão. O fato de que  $A(n)$  é verdadeira para  $n$  de 1 a 4, não significa necessariamente que seja verdadeira para todo  $n$ .

Desenhando. “O que significa, num desenho,  $4^1 - 1$ ?” Esboçamos a Figura 115.

**Figura 115** – Interpretação geométrica de  $4^1 - 1$ .

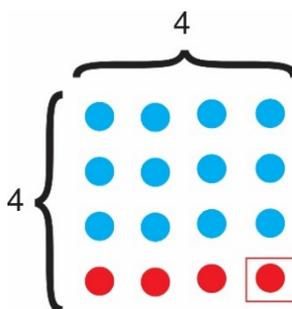


Fonte: Autor.

As três bolas azuis representam as unidades que ficam; a vermelha representa a unidade que será desconsiderada. Deixamos visualmente claro que  $4^1 - 1$  é divisível por 3, visto que, depois das contas, sobram três bolas azuis.

Depois, passamos a estudar o caso  $4^2 - 1$ . Depois de umas poucas tentativas, chegamos ao que está na Figura 116.

**Figura 116** – Interpretação geométrica de  $4^2 - 1$ .



Fonte: Autor.

Observando a Figura 116, podemos pensar que estamos trabalhando com módulos: em cada módulo, há quatro elementos, dos quais vamos considerar 3 e pôr um deles à parte. Quando elevamos 4 ao quadrado, na verdade multiplicamos o módulo básico por 4. Ficamos com quatro módulos de três unidades, cuja soma é divisível por 3, já que a soma de múltiplos de 3 é um número divisível por 3. Além disso, em cada módulo, temos um resto igual a 1. Se multiplicarmos o módulo básico por 4, ficamos com quatro restos iguais a 1, cuja soma não é

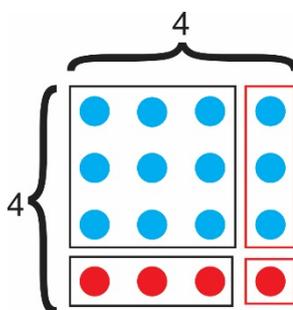
divisível por 3. Mas, se tirarmos uma bola vermelha dessa soma de bolas vermelhas, daí ficamos com três restos iguais a 1, cuja soma é divisível por 3!”

Feito isso, escrevemos o inteiro 4 como uma soma, pois isso facilitará as contas.

$$\begin{aligned} 4 &= (3+1) \rightarrow \\ 4^2 &= (3+1)^2 \rightarrow \\ (3+1)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \\ &= 9 + 6 + 1 \end{aligned}$$

Nessas contas, iremos aplicar o teorema binomial para expandir a expressão dentro dos parênteses; é o notável “quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais quadrado do segundo”. Vemos que “quadrado do primeiro” é o quadrado de 3, e qualquer número multiplicado por 3 é divisível por 3; “duas vezes o primeiro vezes o segundo” é, na prática, multiplicar o primeiro (3) por 2 e por 1, e de novo qualquer número multiplicado por 3 é divisível por 3; por último, “quadrado do segundo” é o quadrado de 1, que é 1. No fim dessas contas, obteremos um somatório: um múltiplo de 3, mais outro múltiplo de 3, mais a unidade, que não é múltiplo de 3. Se desprezarmos a unidade, então ficamos com uma soma divisível por 3. Com essas informações, desenhamos a Figura 117.

**Figura 117** – Interpretação geométrica de  $4^2 = (3 + 1)^2$ .



Fonte: Autor.

Passamos a estudar o caso  $4^3 - 1$ , que, na verdade, é  $(3 + 1)^3 - 1$ . Reconhecemos que, para obter o desenho relativo a  $4^3$ , bastaria multiplicar o desenho de  $4^2$  por 4, e por fim marcar a unidade que deveríamos desprezar.



$$\begin{aligned}(3+1)^{n+1} &= (3+1)^n(3+1) \\ &= \left[ \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 3^{n-r} 1^r \right] \cdot (3+1)\end{aligned}$$

Ao multiplicá-las pelo 3 de  $(3 + 1)$ , obteremos tão somente múltiplos de 3. Ao multiplicá-los pelo 1 de  $(3 + 1)$ , também obteremos múltiplos de 3, exceto no caso da última parcela, que vale  $1 \times 1 = 1$ . Se retirarmos essa única parcela igual à unidade, ficamos apenas com parcelas que são múltiplos de 3, e desse modo o somatório será divisível por 3.” Com isso, provamos que  $A(n)$  implica  $A(n + 1)$ , e provamos a afirmação por indução matemática.

Concluída a prova, façamos um teste: é verdade que 4 divide  $5^n - 1$ , 5 divide  $6^n - 1$  ou que  $723/724^n - 1$ ?

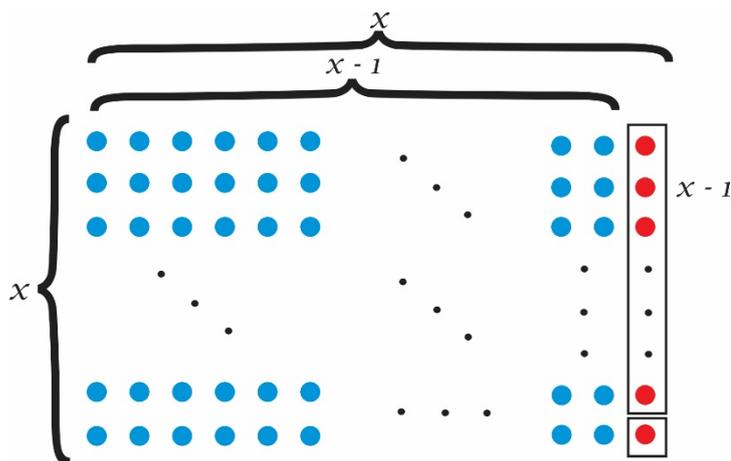
Conseguimos usar o método da indução matemática para generalizar o que descobrimos?

Usando o mesmo método, vemos que 4 divide  $5^n - 1$  e que 6 divide  $7^n - 1$ , elaboramos uma hipótese:

$$[(\forall x, n \in \mathbb{N}) \wedge (x \geq 2)] [(x-1) | (x^n - 1)]$$

Com essa linha, queremos dizer: desde que atribua apenas valores inteiros positivos para as variáveis  $x$  e  $n$  (com  $x$  maior que 1), verá que  $x - 1$  sempre divide  $x^n - 1$ . Depois de experimentar bastante, chegamos a uma prova visual dessa afirmação, que está na Figura 119.

**Figura 119** – Interpretação geométrica de  $x = a + 1 \rightarrow x^m = (a + 1)^m$ .



Fonte: Autor.

Observando o desenho temos como explicar o que está acontecendo: “Se organizarmos um quadrado com  $x$  bolinhas de lado, conseguimos separar  $x$  conjuntos de bolinhas com  $x - 1$  bolinhas cada um. Sobram  $x$  bolinhas de resto, que, no desenho, pintamos de vermelho. Se

tirarmos uma bolinha desse resto, ficamos com  $x - 1$  bolinhas vermelhas. Ao todo, se excluirmos uma bolinha, ficamos com  $x + 1$  conjuntos com  $x - 1$  bolinhas cada um. Ao somarmos as bolinhas desses  $x + 1$  conjuntos, obtemos um número que é, obviamente, divisível por  $x - 1$ , pois esse número claramente vale  $(x + 1)(x - 1)$ , que, fazendo as contas, é  $x^2 - 1$ . Se agora multiplicarmos esse quadrado por  $x^n$ , e tirarmos do total de bolinhas uma única bolinha, ficaremos sempre com um número de bolinhas que é divisível por  $x - 1$ .”

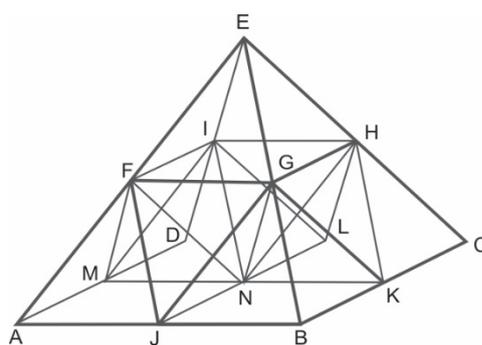
Feito isso, só para garantir, providenciamos uma prova algébrica: fazemos  $x - 1 = a$  para esconder complexidade, e daí  $x = a + 1$  e  $x^n = (a + 1)^n$ . Com o teorema binomial, fica claro que, não importa o valor de  $n$ , sempre obtemos um somatório de parcelas que são múltiplos de  $a$ , exceto a última, que vale 1. Ao tirarmos essa última, o resultado do somatório vira um múltiplo de  $a$ .

**Propriedade 5.10** – *Toda pirâmide de base quadrada e cujas faces laterais são triângulos equiláteros é equivalente (em volume) a dois tetraedros regulares com faces iguais às faces laterais da pirâmide.*

Prova:

Em primeiro lugar, devemos examinar de perto e por simetria o desenho de Leonardo da Vinci. Na Figura 120 repetimos parte do desenho de forma esquemática, acrescentando-lhe algumas letras para melhor referência.

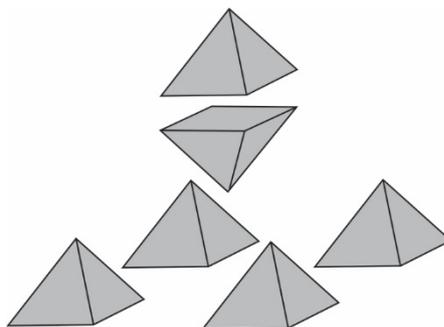
**Figura 120** – Pirâmide de Leonardo da Vinci.



Fonte: Lucas (2008).

Vemos que Leonardo nos sugere a existência de um certo número de pequenas pirâmides de base quadrada interiores à pirâmide grande. A aresta lateral das pirâmides pequenas (por exemplo HC) tem metade do comprimento da aresta lateral da pirâmide grande (EC). Um desenho “explodido” da pirâmide grande pode ajudar-nos bastante.

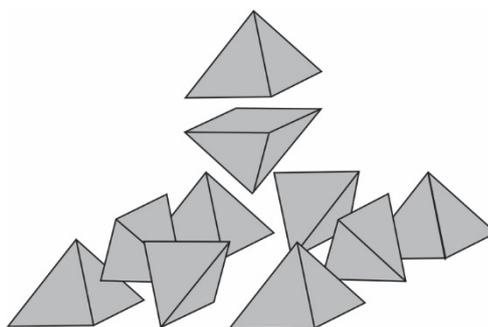
**Figura 121** – Pirâmide “explodida” (1) de Leonardo da Vinci.



Fonte: Lucas (2008).

Mas as seis pequenas pirâmides não chegam para preencher toda a pirâmide grande. Ainda devemos considerar quatro pequenas pirâmides de base triangular igual à face lateral das pirâmides quadrangulares.

**Figura 122** – Pirâmide “explodida” (2) de Leonardo da Vinci.



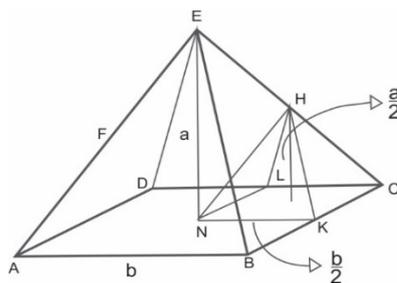
Fonte: Lucas (2008).

Na Figura 122 podemos observar duas pirâmides, uma de base quadrada e outra de base triangular, coladas uma à outra.

Então, neste momento, podemos colocar a hipótese de que Leonardo está querendo demonstrar que cada uma das pirâmides pequenas de base quadrada é igual a duas pirâmides de base triangular representadas na Figura 122. Procuremos provar esta afirmação.

Para fixar ideias, vamos supor que a altura da pirâmide grande é igual a “a” cm e a aresta da base é igual a “b” cm. Então, a altura e a aresta da base da pirâmide quadrangular pequena

serão, respectivamente, iguais a  $\frac{“a”}{2}$  cm e a  $\frac{“b”}{2}$  cm.

**Figura 123** – Pirâmide regular de base quadrangular (ABCDE).

Fonte: Lucas (2008).

O volume de uma pirâmide é igual a  $\frac{1}{3}$  da área da base multiplicada pela altura. Assim, volume

da pirâmide grande será igual a  $\frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot a = \frac{ab^2}{3}$  e o volume da pirâmide pequena será igual a

$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab^2}{24}$ , ou seja, o volume da pirâmide grande é igual a 8 vezes o volume da pirâmide

pequena. Podemos observar que, para pirâmides de base quadrada, quaisquer que sejam a altura e a aresta da base da pirâmide grande, desde que a aresta lateral da pirâmide pequena (e, portanto, também a sua altura) seja igual à metade da aresta da pirâmide grande, como estamos

a supor. Isto resulta do fato de que, sendo a altura da pirâmide pequena  $\frac{1}{2}$  da altura da pirâmide

grande, e a área de base da pirâmide pequena  $\frac{1}{4}$  da área da base da pirâmide grande – dado que

a aresta da base da pequena é  $\frac{1}{2}$  da aresta da base da grande – o volume da pirâmide pequena

é igual a  $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$  do volume da pirâmide grande.

Mas a partir da Figura 122, que mostra a decomposição da pirâmide, vemos que a pirâmide grande contém seis pirâmides pequenas, e o resto do espaço é ocupado por quatro pirâmides triangulares.

Como ao todo a pirâmide grande vale 8 pirâmides das pequenas, então esse resto do espaço equivale a duas pirâmides pequenas, portanto, cada pirâmide pequena equivale a duas pirâmides triangulares.

Um caso particular interessante é aquele em que as faces laterais da pirâmide de base quadrada são triângulos equiláteros. Então, as pequenas pirâmides de base triangular são tetraedros regulares (todas as suas faces são triângulos equiláteros). Muito provavelmente, o enunciado que Leonardo procurava demonstrar seria então: toda pirâmide de base quadrada e cujas faces laterais são triângulos equiláteros é equivalente (em volume) a dois tetraedros regulares com faces iguais às faces laterais da pirâmide.

Por fim, coroando este trabalho, apresento um belíssimo texto do Prof. Marcelo Miranda Viana da Silva, diretor-geral do IMPA, publicado no jornal *Folha de S.Paulo*<sup>1</sup>, o qual retrata muito bem um pouco da história da simetria assim como a simetria no nosso cotidiano e ainda algumas aplicações mais aprofundadas.

### **O Universo é feito de simetrias<sup>1</sup>**

*Formas simétricas estão presentes em seres vivos, minerais e até na arte*

Nossa primeira experiência com simetria ocorre em frente ao espelho, na primeira infância. A fascinação de descobrir o mundo “do outro lado”, estranhamente parecido com o nosso, é inesquecível. Mas simetria é muito mais: sabemos hoje que ela é um aspecto fundamental do tecido do Universo.

“É apenas um pequeno exagero dizer que a física é o estudo da simetria”, dizia Philip Anderson, prêmio Nobel de física em 1977. A matemática Emmy Noether provou que “a cada simetria matemática de um sistema corresponde a uma quantidade física preservada pela evolução desse sistema”. Este teorema tem papel fundamental na física, especialmente na mecânica quântica, onde explica propriedades das partículas subatômicas (carga, *spin* etc.) como resultado de certas simetrias matemáticas do Universo.

A membrana do vírus da gripe é formada por apenas quatro tipos de proteínas, que se encaixam em um padrão geométrico repetitivo: o código genético para construir tal estrutura é mais econômico do que seria necessário para um padrão menos simétrico. Organismos vivos tiram proveito de simetrias de muitas outras formas para economizar no uso de recursos. E minerais estruturam-se em formas cristalinas cheias de simetrias pois essas requerem menos energia.

Simetria também tem protagonismo na arte, claro. Leonardo da Vinci baseou sua *Última Ceia* em uma composição simétrica: a posição de Cristo isolado no centro acentua dramaticamente sua solidão às vésperas da paixão. Perfeita simetria das feições é parte do que faz de Nefertite, rainha do Egito antigo, “a mulher mais bela de todos os tempos”. Também é da simetria dos elementos arquitetônicos que emana o encanto estético do Taj Mahal. Até Johann Sebastian Bach fez uso de padrões simétricos em algumas de suas composições musicais.

---

<sup>1</sup> Jornal Folha de São Paulo Nº 33.012, 21 agosto 2019.

Os dicionários têm muitas definições de simetria, a maioria com referência à “beleza”, “equilíbrio” e “harmonia”. Prefiro a que diz mais sobre o conceito: “invariância (do objeto ou sistema) sob a ação de uma ou mais transformações”. No caso do espelho, a transformação é a reflexão na superfície espelhada. Há versões mais complexas, como caleidoscópios que usam combinações de espelhos, usualmente três, para criar imagens fascinantes.

Também há simetria de outros tipos. A estrela do mar com seus 5 “braços” apresenta simetria de rotação: se rodarmos o corpo  $72^\circ$  ( $= 360^\circ$  dividido por 5) em torno do centro, a aparência fica inalterada (mas o bicho pode ficar um pouco desorientado). Já o calçadão de Copacabana tem simetria de translação: se deslocarmos o padrão da calçada na direção do mar, por uma distância adequada, a sua aparência permanece a mesma.

Um notável resultado matemático, chamado Teorema Mágico, descreve todas as simetrias que existem em duas dimensões.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência do autor como professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, o convívio com outros professores, a prática em sala de aula e sob um olhar mais profundo das simetrias e transformações isométricas apresentadas neste trabalho e aplicadas no decorrer dos anos promoveram uma considerável melhora na aprendizagem dos alunos. Foi observado, também, que esse assunto é recorrente em várias demonstrações necessárias para uma melhor compreensão não somente da Geometria, assim como de outras áreas da Matemática.

O trabalho com simetrias é provocador, pois, a princípio, gera nos alunos não apenas dúvidas, como também muita desconfiança. Simetria não é um assunto que se encontra tão facilmente nos livros didáticos voltados para os ensinos Fundamental e Médio, logo os alunos não possuem conhecimento necessário e dessa forma a prática em manipular figuras simétricas gera descrédito. Com transformações isométricas, isso muda um pouco, pois os alunos são orientados desde cedo sobre o uso de translações (principalmente de segmentos), rotações de figuras (principalmente congruência de triângulos) e reflexões. No início, o ensino das simetrias deve ser informal (conceitos intuitivos) e deve ser introduzido lentamente. Depois de fazer essa análise, o autor percebeu que, para obter a confiança necessária dos alunos, o assunto deve ser ministrado dentro da formalidade exigida pelos padrões matemáticos, ou seja, com o uso de conceitos e demonstrações das propriedades de simetria, permitindo ao aluno uma compreensão da matemática embutida nas simetrias. O autor observou, também, que, na vida escolar dos seus alunos, o estímulo ao uso das simetrias a cada ano de avanço escolar, gera tanto uma maior criatividade como um aumento de percepção, conseqüentemente um maior entendimento da Geometria. A criatividade desenvolvida pelos alunos é surpreendente, pois, em muitas vezes, para um mesmo problema matemático, chega-se a diversas soluções e cada uma mais impressionante que a outra. Superada a fase da desconfiança e da falta de conhecimento, os alunos percebem que as simetrias e as transformações isométricas são ferramentas indispensáveis. Nos anos iniciais do ensino Fundamental, o uso das simetrias é encantador e, com a criatividade aguçada dos alunos, os resultados são fantásticos. Nos anos finais do ensino Fundamental, como há, muitas vezes, uma certa falta de criatividade dos alunos, o trabalho com simetrias é bastante desafiador, pois muitos conceitos matemáticos já estão bastante difundidos e isso dificulta muito a aceitação de formas diferentes de pensar. No ensino médio, o autor percebeu que os alunos aceitam mais facilmente o uso das simetrias em Análise Combinatória do que em Geometria.

A maior preocupação do autor ao fazer esta pesquisa e desenvolver este estudo foi agregar num só trabalho conhecimentos e aplicações que possam despertar no professor de Matemática a busca e o interesse por uma explanação do assunto atrelada aos novos desafios e realidades da sala de aula, além das novas diretrizes descritas na BNCC e que, via de regra, passa a dar um novo rumo à aprendizagem dos alunos. Com essa inovadora metodologia de ensino, objetiva-se proporcionar uma melhor compreensão dos assuntos por parte dos estudantes tornando-os mais capacitados e estimulados a seguir sua trajetória acadêmica e profissional.

## REFERÊNCIAS

Asitjain; **Taj Mahal**; 25 janeiro 2009. 1 fotografia,  $11,081 \times 6.247$  pixels, 22,57 MB, formato jpeg. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Taj\\_Mahal\\_N-UP-A28-a.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Taj_Mahal_N-UP-A28-a.jpg). Acesso em: 10 mar. 2021.

Schulze, Stefan; **Sede das Nações Unidas**; 06 agosto 2005. 1 fotografia,  $2.304 \times 3.456$  pixels, 1,74 MB, formato jpeg. Disponível em: [https://ta.wiktionary.org/wiki/%E0%AE%AA%E0%AE%9F%E0%AE%BF%E0%AE%AE%E0%AE%AE%E0%AF%8D:UNO\\_New\\_York-2.JPG](https://ta.wiktionary.org/wiki/%E0%AE%AA%E0%AE%9F%E0%AE%BF%E0%AE%AE%E0%AE%AE%E0%AF%8D:UNO_New_York-2.JPG). Acesso em: 10 mar. 2021.

BLOLEZZI, Antônio Carlos, SANTOS, Lúcio Tunes dos e HAYASHI, Renato. O número da beleza. **Cálculo Matemática para todos**, São Paulo, ano 1, ed. 10, p. 46-53, Nov. 2011.

FRANCO, Tertuliano. O momento da beleza. **Cálculo Matemática para todos**, São Paulo, ano 4, ed. 37, p. 22-27, Fev. 2014.

LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. **Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1982.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

\_\_\_\_\_. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

\_\_\_\_\_. **Coordenadas no Plano**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIVIO, Mario. **A equação que ninguém conseguia resolver**. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

HELOU, Ricardo Doca, GUALTER, José Biscuola, NEWTON, Villas Bôas. **Tópicos de física: volume 2**. 21. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

LUCAS, Édouard. **O Jogo Militar (Jogos Matemáticos II)**. 1. ed. Espanha: RBA, 2008.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria Coleção Profmat**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

\_\_\_\_\_. **Tópicos de Matemática Elementar**. 2. ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2013a.

SANTOS, Lúcio Tunes dos. Se a humanidade sumir, a matemática também some?. **Cálculo Matemática para todos**, São Paulo, ano 1, ed. 7, p. 29, Ago. 2011.

SCRUTON, Roger. **Beleza**. 1. ed. São Paulo: É Realizações, 2013.

VELOSO, Eduardo e VIANA, José Paulo. **O Caminho Mais Curto (Desafios III)**. 1. ed. Espanha: RBA, 2008.

\_\_\_\_\_. **O Caminho Mais Curto (Desafios IV)**. 1. ed. Espanha: RBA, 2008.