

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**Diagonalização de Operadores e Formas Lineares:  
Cônicas e Quádricas**

Autor: João Victor Bolssone Carl

Orientador: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

São Carlos – SP

Fevereiro de 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

## Diagonalização de Operadores e Formas Lineares: Cônicas e Quádricas

João Victor Bolssone Carl

Orientador: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos – SP

Fevereiro de 2021





# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

## Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Victor Bolssone Carl, realizada em 18/02/2021.

### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa (UFSCar)

Prof. Dr. Sandra Maria Semensato de Godoy (USP)

Prof. Dr. Renato Jose de Moura (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.



*Dedico este trabalho  
a minha esposa e familiares pelo apoio, carinho  
e compreensão. Faço uma dedicatória especial  
ao professor Dr. Ivo Machado da Costa, que  
foi meu norte neste trabalho.*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, inteligência e oportunidades a mim oferecidas.

Ao professor Dr. Ivo Machado da Costa pelas valiosas orientações.

A minha esposa e familiares pelo apoio.

Ao professor Dr. João Carlos Vieira Sampaio pela ajuda com a linguagem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ .

Aos docentes e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).



# Resumo

Neste trabalho vamos fazer aplicações de Álgebra Linear às cônicas e às quádricas. Iremos discutir sobre a rotação e a translação dessas particulares curvas e superfícies e entender porque o processo de rotação tem a ver com a diagonalização de matrizes. Veremos que a forma quadrática de uma cônica ou quádrica está associada a uma forma bilinear simétrica e, portanto, a um operador linear autoadjunto. Diante desse fato e através de teoremas de Álgebra Linear, mostraremos que os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  admitem uma base ortonormal constituída de autovetores. Base essa que será utilizada para criar um novo sistema ortogonal de eixos, sob o qual, a cônica ou quádrica não estará mais rotacionada, ou seja, a matriz da forma quadrática se tornará diagonal e, com isso, a forma quadrática perderá o(s) termo(s) misto(s). Além disso, traremos exemplos de cônicas e quádricas em suas formas canônicas e, também, mostraremos os casos degenerados. Ainda mostraremos alguns exemplos de cônicas e um exemplo de quádrica quando estão rotacionadas e transladadas em relação ao sistema cartesiano canônico.

Palavras-chave: base ortonormal, cônica, diagonalização, forma bilinear simétrica, operador autoadjunto, quádrica.



# Abstract

In this work we will make applications of Linear Algebra to conics and quadrics. We will discuss the rotation and translation of these particular curves and surfaces and understand why the rotation process relates to with matrix diagonalization. We will see that the quadratic form of a conic or a quadric is associated to a symmetric bilinear shape and therefore to a self-adjoint linear operator. Given this fact and through theorems of Linear Algebra, we will show that the vector spaces  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  admit an orthonormal basis consisting of characteristic vectors. That basis that will be used to create a new system of orthogonal axis under which the conical or quadric will no longer be rotated, that is, the matrix of the quadratic form will become diagonal and with that property the quadratic form will lose mixed terms. In addition, we will bring examples of conics and quadrics in their canonical forms and we will also show the degenerate cases. We will still show some examples of conics and an example of quadric when they are rotated and translated in relation to the canonical cartesian system.

Keywords: orthonormal base, conic, diagonalization, symmetric bilinear shape, self-adjoint operator, quadric.



# Lista de Figuras

3.1	Elipse com reta focal sobre $OX$ e centro na origem . . . . .	52
3.2	Elipse com reta focal sobre $OY$ e centro na origem . . . . .	52
3.3	Elipse com reta focal sobre $\overline{OX}$ e centro em $\overline{O}$ . . . . .	55
3.4	Elipse com reta focal sobre $\overline{OY}$ e centro em $\overline{O}$ . . . . .	56
3.5	Hipérbole com reta focal sobre $OX$ e centro na origem . . . . .	62
3.6	Hipérbole com reta focal sobre $OY$ e centro na origem . . . . .	62
3.7	Hipérbole com reta focal sobre $\overline{OX}$ e centro em $\overline{O}$ . . . . .	64
3.8	Hipérbole com reta focal sobre $\overline{OY}$ e centro em $\overline{O}$ . . . . .	65
3.9	Parábola com reta focal sobre $OX$ , vértice na origem e foco à direita da diretriz . .	69
3.10	Parábola com reta focal sobre $OX$ , vértice na origem e foco à esquerda da diretriz	70
3.11	Parábola com reta focal sobre $OY$ , vértice na origem e foco acima da diretriz . . .	71
3.12	Parábola com reta focal sobre $OY$ , vértice na origem e foco abaixo da diretriz . . .	72
3.13	Parábola com reta focal sobre $\overline{OX}$ , vértice em $\overline{O}$ e foco à direita da diretriz . . . .	73
3.14	Parábola com reta focal sobre $\overline{OX}$ , vértice em $\overline{O}$ e foco à esquerda da diretriz . . .	74
3.15	Parábola com reta focal sobre $\overline{OY}$ , vértice em $\overline{O}$ e foco acima da diretriz . . . . .	75
3.16	Parábola com reta focal sobre $\overline{OY}$ , vértice em $\overline{O}$ e foco abaixo da diretriz . . . . .	76
3.17	Elipse $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ . . . . .	89
3.18	Elipse $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + y - 5 = 0$ . . . . .	93
3.19	Hipérbole $11x^2 + 50\sqrt{3}xy - 39y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$ . . . . .	96
3.20	Parábola $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 5y - 8 = 0$ . . . . .	99
4.1	Elipsoide $9x^2 + y^2 + 4z^2 = 9$ . . . . .	103

4.2	Secção elítica $y^2 + 4z^2 = 9$ . . . . .	104
4.3	Secção elítica $9x^2 + 4z^2 = 9$ . . . . .	104
4.4	Secção elítica $9x^2 + y^2 = 9$ . . . . .	105
4.5	Hiperboloide de um folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . . . . .	108
4.6	Secção hiperbólica $y^2 - z^2 = 1$ . . . . .	109
4.7	Secção hiperbólica $x^2 - z^2 = 1$ . . . . .	109
4.8	Secção hiperbólica $x^2 + y^2 = 1$ . . . . .	110
4.9	Hiperboloide de duas folhas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ . . . . .	110
4.10	Hiperboloide de duas folhas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ . . . . .	111
4.11	Secção hiperbólica $x^2 - z^2 = 1$ . . . . .	112
4.12	Secção hiperbólica $x^2 - y^2 = 1$ . . . . .	112
4.13	Cone de duas folhas . . . . .	113
4.14	Cilindro parabólico $x^2 = y + z$ . . . . .	117
4.15	Cilindro elítico $2x^2 + 5y^2 = z$ . . . . .	117
4.16	Reta $2x^2 + 5y^2 = 0$ . . . . .	118
4.17	Paraboloide hiperbólico $2x^2 - y^2 = z$ . . . . .	119
4.18	Planos concorrentes $3x^2 - 5y^2 = 0$ . . . . .	119
4.19	Cilindro elítico $3x^2 + 5y^2 = 3$ . . . . .	120
4.20	Cilindro hiperbólico $3x^2 - y^2 = 3$ . . . . .	121
4.21	Cilindro parabólico $x^2 = 4y$ . . . . .	122
4.22	Planos coincidentes $3x^2 = 0$ . . . . .	122

# Lista de símbolos

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos Números Naturais sem o Zero
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais ou Corpo Real
$\mathbb{R}^2$	Espaço Vetorial Real de Duas Dimensões
$\mathbb{R}^3$	Espaço Vetorial Real de Três Dimensões
$\mathbb{C}$	Conjunto dos Números Complexos ou Corpo Complexo
$\forall$	Para Todo
$\in$	Pertence



# Sumário

<b>1</b>	<b>Espaços Vetoriais e Transformações Lineares</b>	<b>5</b>
1.1	Corpos Comutativos e Espaços Vetoriais . . . . .	5
1.2	Operadores e Funcionais Lineares . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Operadores Autoadjuntos e Formas Bilineares</b>	<b>21</b>
2.1	Espaços com Produto Interno . . . . .	21
2.2	Operadores Autoadjuntos . . . . .	34
2.3	Formas Bilineares . . . . .	41
2.4	Formas Bilineares Simétricas e Formas Quadráticas . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Aplicação - Cônicas em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>47</b>
3.1	Elipse . . . . .	48
3.2	Forma canônica da elipse . . . . .	49
3.2.1	Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX . . . . .	49
3.2.2	Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY . . . . .	50
3.2.3	Esboço da Elipse . . . . .	51
3.2.4	Translação de eixos coordenados . . . . .	53
3.2.5	Forma canônica da elipse transladada . . . . .	53
3.2.6	Elipse centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX . . . . .	54
3.2.7	Elipse centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY . . . . .	55
3.2.8	Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C > 0$ . . . . .	56
3.3	Hipérbole . . . . .	58
3.4	Forma canônica da hipérbole . . . . .	59

3.4.1	Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX	59
3.4.2	Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY	60
3.4.3	Esboço da Hipérbole . . . . .	61
3.4.4	Forma canônica da hipérbole transladada . . . . .	62
3.4.5	Hipérbole centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX .	63
3.4.6	Hipérbole centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY .	64
3.4.7	Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C < 0$ . . . . .	65
3.5	Parábola . . . . .	67
3.6	Forma canônica da parábola . . . . .	67
3.6.1	Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX	68
3.6.2	Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco à direita da diretriz . . . . .	68
3.6.3	Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco à esquerda da diretriz . . . . .	69
3.6.4	Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY	70
3.6.5	Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco acima da diretriz . . . . .	70
3.6.6	Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco abaixo da diretriz . . . . .	71
3.6.7	Parábola com Vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX . .	72
3.6.8	Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX e foco F à direita da diretriz . . . . .	73
3.6.9	Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX e foco F à esquerda da diretriz . . . . .	73
3.6.10	Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY e foco F acima da diretriz . . . . .	74
3.6.11	Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY e foco F abaixo da diretriz . . . . .	75
3.6.12	Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C = 0$ . . . . .	76
3.7	Equação Geral de uma Cônica - Equação do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	79
3.7.1	O que fazer? Como proceder? . . . . .	81

<b>4</b>	<b>Aplicação - Quádricas em <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>101</b>
4.0.1	Quádricas e suas formas canônicas . . . . .	102
4.0.2	Elipsoide com centro na origem e “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica. . . . .	103
4.0.3	Elipsoide com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$ e “eixos focais” paralelos aos eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica. . . . .	105
4.0.4	Equação geral da quádrlica em que $B^2 + C^2 + E^2 = 0$ e $A, D$ e $F$ tendo o mesmo sinal. . . . .	106
4.0.5	Hiperboloide de uma folha, Cone de duas folhas e Hiperboloide de duas folhas - com centro na origem e “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e suas formas canônicas. . . . .	107
4.0.6	Hiperboloide de uma folha, Cone de duas folhas e Hiperboloide de duas folhas - com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$ e “eixos focais” paralelos aos eixos do sistema cartesiano - e suas formas canônicas. . . . .	113
4.0.7	Equação geral da quádrlica em que $B^2 + C^2 + E^2 = 0$ e dois dos coeficientes $A, D$ e $F$ tendo o mesmo sinal, porém, contrário ao sinal do terceiro. . . . .	114
4.0.8	Cilindro Parabólico - e sua forma canônica. . . . .	116
4.0.9	Paraboloide elítico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e uma Reta - e suas formas canônicas. . . . .	117
4.0.10	Paraboloide hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e Planos concorrentes - e suas formas canônicas. . . . .	118
4.0.11	Cilindro elítico e Cilindro hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e Conjunto vazio - e suas formas canônicas. . . . .	120
4.0.12	Cilindro hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica. . . . .	121
4.0.13	Cilindro parabólico com “eixos focais” e “reta diretriz” sobre os eixos do sistema cartesiano e Par de planos coincidentes - e suas formas canônicas. . . . .	121
4.0.14	Quádricas com termos mistos. . . . .	122



# Introdução

Historicamente falando, uma cônica é uma curva plana obtida a partir da intersecção entre um plano e um cone de duas folhas. Dependendo da escolha da posição do plano e do cone, a figura obtida pode ser uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, duas retas concorrentes, um ponto, etc.

Já uma quádrlica pode ser uma superfície gerada pela revolução de uma cônica no espaço, entre outras superfícies que veremos adiante. São exemplos de quádrlicas: elipsoides, hiperboloides, paraboloides, cilindros, cones, etc.

Fruto do aprofundamento de estudos das cônicas, podemos redefini-las através de certas propriedades geométricas que elas possuem, propriedades estas que podem ser traduzidas por meio de equações polinomiais do segundo grau em duas variáveis. Por isso que, muitas vezes, nos referimos às cônicas como o conjunto solução de uma equação polinomial completa do segundo grau em duas variáveis da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$  e em que  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ . Obviamente tais conjuntos soluções são curvas em  $\mathbb{R}^2$ , ou algumas degenerações.

De forma inteiramente análoga, podemos também nos referir às quádrlicas como o conjunto solução de uma equação polinomial completa do segundo grau em três variáveis da forma

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + B_1x + B_2y + B_3z + C = 0,$$

em que  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, B_1, B_2, B_3, C \in \mathbb{R}$  e em que  $A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{23}^2 > 0$ . Tais conjuntos soluções são superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , ou superfícies degeneradas.

O estudo e reconhecimento de tais curvas e/ou superfícies não é uma tarefa tão simples. Em geral quando as equações de tais curvas e/ou superfícies estão em certas formas especiais, o reconhecimento das mesmas é mais fácil. Essas formas especiais são as chamadas **formas canônicas** que apresentaremos e discutiremos adiante.

Através da aplicação da Álgebra Linear ao estudo de tais curvas e/ou superfícies podemos sempre transformar a equação geral de uma cônica ou de uma quádrlica em sua **forma canônica** e, assim, reconhecer a curva ou a quádrlica mais facilmente.

Quando definimos uma cônica, vários elementos aparecem na descrição da mesma. Por isso termos como centro, foco, vértices, vértices imaginários, eixo focal, eixo não focal, retângulo base, assíntotas e reta diretriz fazem parte de uma nomenclatura básica e pertinente ao estudo das mesmas.

Certas degenerações dessas tradicionais curvas e/ou superfícies podem aparecer e serão referidas como situações degeneradas. No decorrer desse trabalho e em um momento mais apropriado falaremos sobre essas situações.

Este nosso trabalho tem como objetivo estudar a contribuição da Álgebra Linear na tarefa de facilitar o reconhecimento de tais curvas e/ou superfícies e darmos exemplos que descrevam o processo, fundamentado na Álgebra Linear, de classificação de tais curvas e/ou superfícies.

Fundamentalmente esse processo refere-se a dois movimentos clássicos da Geometria Analítica: o movimento de rotação e o movimento de translação de eixos coordenados.

O processo de rotação para cônicas e quádrlicas tem o objetivo fundamental de eliminar os chamados termos mistos da equação. O processo de translação tem como objetivo eliminar a chamada parte linear da equação, quando possível.

No capítulo 1 faremos um breve resumo sobre corpos comutativos, espaços vetoriais, operadores e funcionais lineares. Veremos também que um operador é diagonalizável se, e somente se, possui uma base constituída de autovetores.

No capítulo 2 introduziremos o produto interno e faremos comentários sobre os operadores autoadjuntos e as formas bilineares. Veremos que as formas quadráticas estão associadas às formas bilineares simétricas, que por sua vez, estão associadas a operadores autoadjuntos. Este fato garante a criação de uma base ortonormal de vetores e em relação a essa base, a matriz da forma quadrática se torna diagonal.

No capítulo 3 iremos fazer aplicações de Álgebra Linear às cônicas e criar um procedimento para o reconhecimento delas quando estão em sua forma canônica. Traremos exemplos das principais cônicas e seus casos degenerados. Ao final do capítulo, traremos os principais exemplos de cônicas rotacionadas e transladadas em relação ao sistema cartesiano canônico e a aplicação do método para encontrar as formas canônicas e classificá-las.

No capítulo 4 iremos fazer aplicações de Álgebra Linear às quádricas, abordaremos suas formas canônicas e também um procedimento para reduzir a forma geral de uma quádrica para a sua forma canônica. Ao final do capítulo, traremos um exemplo de um elipsoide rotacionado e transladado em relação ao sistema cartesiano canônico e a aplicação do método para encontrar a sua forma canônica.



# 1

## Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

### 1.1 Corpos Comutativos e Espaços Vetoriais

Como falamos em nossa introdução, a Álgebra Linear nos fornecerá subsídios fundamentais para atingirmos nosso objetivo principal: embasar um processo operacional de classificação de cônicas e quádricas. Por esse motivo vamos fazer uma descrição, essencial em nosso entendimento, de alguns conceitos deste importante ramo da matemática.

Faremos o estudo da estrutura algébrica conhecida como **espaço vetorial** e o estudo de funções entre essas estruturas conhecidas pelo nome de **transformações lineares**. Quando os espaços vetoriais tem dimensões finitas, tais transformações são naturalmente descritas por matrizes.

Ainda nos utilizaremos de conceitos de formas bilineares, particularmente de formas bilineares simétricas e, por consequência, de formas quadráticas.

A estrutura vetorial exige uma estrutura subjacente, ou seja, a estrutura de corpo [comutativo]. Portanto iniciaremos por essa estrutura.

**Definição 1.1.** *Denominamos de **corpo [comutativo]** um conjunto  $F$  não vazio, munido de duas operações (comumente denominadas de **adição** (+) e **multiplicação** (.)) e que satisfazem*

às seguintes propriedades:

O par  $(F, +)$  tem uma estrutura de grupo comutativo ou abeliano, a saber:

(A.1) (Associativa da adição)  $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in F;$

(A.2) (Elemento neutro da adição) Existe um elemento indicado por  $0$  pertencente a  $F$  tal que  $x + 0 = x = 0 + x, \quad \forall x \in F;$

(A.3) (Elemento simétrico da adição (neste caso, também chamado de oposto)) Para cada  $x$  em  $F$ , existe o elemento indicado por  $-x$  em  $F$ , tal que  $x + (-x) = 0 = (-x) + x;$

(A.4) (Comutativa da adição)  $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in F;$

(M.1) (Associativa da multiplicação)  $x(yz) = (xy)z, \quad \forall x, y, z \in F;$

(M.2) (Elemento neutro da multiplicação) Existe o elemento indicado por  $1$  em  $F$  tal que  $1x = x, \quad \forall x \in F;$

(M.3) (Elemento simétrico da multiplicação (chamado de inverso)) Para cada  $x \in F^* = F - \{0\}$ , existe o elemento indicado por  $x^{-1}$  em  $F$  tal que  $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1}x;$

(M.4) (Comutativa da multiplicação)  $xy = yx, \quad \forall x, y \in F;$

(D) (Distributiva)  $x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in F.$

**Exemplo 1.1.** São corpos comutativos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , os conjuntos dos números reais e complexos, respectivamente.

**Observação 1.1.** Neste trabalho usaremos os corpos  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , sendo que este último será pouco abordado.

Agora vamos definir o objeto principal da Álgebra Linear, ou seja, **Espaço Vetorial**.

**Definição 1.2.** Denominamos **espaço vetorial** à uma quádrupla  $(V, F, +, \cdot)$  consistindo de um conjunto abstrato  $V$  cujos elementos denominaremos **vetores**, um corpo  $F$  denominado

de corpo de escalares [no nosso caso  $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \mathbb{C}$ ], de uma operação, denominada **adição** sobre  $V$  e de uma lei de composição externa, denominada **multiplicação escalar** sobre  $V$ , em que:

- O par  $(V, +)$  tem uma estrutura de grupo abeliano ou comutativo, isto é, a operação de adição sobre  $V$ , isto é:  $+: V \times V \rightarrow V$  satisfaz:

$$(A.1) \text{ (Associativa da adição)} \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V;$$

$$(A.2) \text{ (Elemento neutro da adição)} \text{ Existe o elemento indicado por: } 0 \text{ em } V \text{ tal que}$$

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha, \quad \forall \alpha \in V;$$

$$(A.3) \text{ (Elemento oposto)} \text{ Para cada vetor } \alpha \text{ em } V, \text{ existe o elemento indicado por: } -\alpha$$

$$\text{em } V \text{ tal que } \alpha + (-\alpha) = 0 = (-\alpha) + \alpha;$$

$$(A.4) \text{ (Comutativa)} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

- A **multiplicação escalar** - lei de composição externa sobre  $V$  tendo  $F$  como conjunto de escalares, isto é:  $\cdot: F \times V \rightarrow V$ , associa a cada par  $(c, \alpha) \in F \times V$  um vetor, indicado por  $c \cdot \alpha$  em  $V$  satisfazendo:

$$(M1) \text{ (Associativa)} \quad (c_1 \cdot c_2) \cdot \alpha = c_1 \cdot (c_2 \cdot \alpha), \quad \forall \alpha \in V \quad \text{e} \quad \forall c_1, c_2 \in F;$$

$$(M2) \text{ (Distributiva da multiplicação escalar em relação à soma de vetores)} \quad c \cdot (\alpha + \beta) =$$

$$c \cdot \alpha + c \cdot \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in V \quad \text{e} \quad \forall c \in F;$$

$$(M3) \text{ (Distributiva da soma de vetores em relação à multiplicação escalar)} \quad (c_1 +$$

$$c_2) \cdot \alpha = c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \alpha, \quad \forall \alpha \in V \quad \text{e} \quad \forall c_1, c_2 \in F;$$

$$(M4) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in V.$$

**Exemplo 1.2. (O espaço vetorial das  $n$ -uplas sobre  $F$ )** Seja  $F$  um corpo arbitrário e seja  $V = F^n$  o conjunto de todas as  $n$ -uplas sobre  $F$ . A soma de duas  $n$ -uplas  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  em  $F^n$  é a  $n$ -upla sobre  $F$  definida por  $\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ , com  $x_i, y_i \in F$ . O produto do escalar  $c$  pela  $n$ -upla  $\alpha$  é a  $n$ -upla sobre  $F$  definida por  $c \cdot \alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$ , com  $x_i \in F$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Este conjunto  $V$  munido destas duas operações tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo  $F$ .

**Exemplo 1.3. (O espaço vetorial das  $m \times n$  matrizes sobre  $F$ )** Seja  $F$  um corpo arbitrário e seja  $V = \mathbb{M}(m \times n, F)$  o conjunto de todas as  $m \times n$  matrizes sobre  $F$ . A soma de duas matrizes  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{M}(m \times n, F)$  é definida por:  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ . O produto de um escalar  $c$  por uma matriz  $A$  em  $\mathbb{M}(m \times n, F)$  é definido por:  $(cA)_{ij} = cA_{ij}$ . Este conjunto  $V$  munido das duas operações anteriormente definidas tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo  $F$ .

Este espaço  $V = \mathbb{M}(m \times n, F)$  também pode ser denotado por  $V = F^{m \times n}$ .

**Definição 1.3 (Combinação linear).** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$ . Um vetor  $\beta$  pertencente a  $V$  é uma **combinação linear [finita]** dos vetores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  em  $V$  se, e somente se, existem os escalares  $c_1, \dots, c_n$  em  $F$  tais que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n.$$

**Definição 1.4 (Subespaço vetorial).** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$  e seja  $W$  um subconjunto de  $V$ . Dizemos que  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se, as seguintes condições estiverem verificadas:

1.  $W$  é fechado em relação à operação de adição e é estável em relação à multiplicação escalar.
2. As operações induzidas sobre  $W$  pelas operações de  $V$  definem uma estrutura de espaço vetorial sobre  $W$ .

Este próximo teorema nos dá uma condição, necessária e suficiente, para que um subconjunto  $W$  de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $F$  seja um subespaço vetorial de  $V$ . A demonstração não será feita.

**Teorema 1.1.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $F$  e  $W$  um subconjunto de  $V$ . Então  $W$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:

- (1)  $0 \in W$ .
- (2) se  $\alpha, \beta \in W$  então  $\alpha + \beta \in W$ .

(3) se  $c \in F$  e  $\alpha \in W$  então  $c\alpha \in W$ .

**Teorema 1.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $F$ . A intersecção de uma família não vazia de subespaços de  $V$  é um subespaço de  $V$ .*

*Demonstração.* Seja  $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma família não vazia de subespaços de  $V$  e seja  $W = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$  a sua intersecção, ou seja,  $W$  é o conjunto dos elementos pertencentes simultaneamente a cada  $W_\lambda$ , qualquer que seja  $\lambda \in \Lambda$ . Como cada  $W_\lambda$  é um subespaço, todos contêm o vetor nulo e portanto  $W$  é não vazio. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  vetores em  $W$  e seja  $c$  um escalar. Os vetores  $\alpha$  e  $\beta$  pertencem a cada  $W_\lambda$ , e como cada  $W_\lambda$  é um subespaço, o teorema anterior garante que o vetor  $c\alpha + \beta$  está em todo  $W_\lambda$ , logo em  $W$  e, portanto,  $W$  é um subespaço de  $V$ .  $\square$

**Definição 1.5 (Subespaço gerado).** *Seja  $S$  um conjunto de um espaço vetorial  $V$ . O subespaço gerado por  $S$  é definido e denotado por  $[S]$  como sendo a intersecção de todos os subespaços de  $V$  que contêm a parte  $S$ . Quando  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  é um conjunto finito de vetores, denominaremos  $[S]$  de subespaço gerado pelos vetores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Em qualquer situação o conjunto  $S$  é denominado de conjunto de geradores do subespaço  $[S]$  ou também de sistema de geradores do subespaço  $[S]$ .*

Um detalhe importante e que não demonstraremos é que o subespaço gerado por uma parte não vazia  $S$  de um espaço vetorial  $V$  coincide com o conjunto de todas as combinações lineares [finitas] de elementos de  $S$ .

**Definição 1.6 (Dependência linear).** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $F$ . Um subconjunto  $S$  de  $V$  é dito **linearmente dependente (LD)** se, e somente se, existem vetores distintos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  em  $S$  e escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  em  $F$ , não todos nulos, tais que*

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0.$$

**Definição 1.7 (Independência linear).** *Um subconjunto  $S$  de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $F$  é denominado **linearmente independente (LI)** se, e somente se, para qualquer subconjunto finito  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  em  $S$ , a equação  $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$  admite uma única solução, a saber,  $c_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

**Definição 1.8 (Base de um espaço vetorial).** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Uma base de  $V$  é qualquer subconjunto linearmente independente de vetores em  $V$  que seja um sistema de geradores de  $V$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita, isto é, um espaço vetorial que admite um sistema de geradores finito. A **dimensão** de  $V$ , indicada por  $\dim(V)$ , é definida como sendo o número de elementos de qualquer base de  $V$ .*

**Exemplo 1.4. (Base canônica do  $\mathbb{F}^n$ )** *Seja  $F$  um corpo. Consideremos o subconjunto  $\mathcal{B}$  do espaço vetorial  $V = \mathbb{F}^n$  definido por*

$$\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\} = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}.$$

*Esse conjunto é linearmente independente e um sistema de geradores de  $\mathbb{F}^n$ , logo uma base do  $\mathbb{F}^n$ . Essa base é denominada a base canônica do  $\mathbb{F}^n$  e portanto  $\mathbb{F}^n$  tem dimensão  $n$ .*

Sejam  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita e  $\alpha$  um elemento  $V$ , logo existe uma única família finita de escalares  $x_1, \dots, x_n$  em  $F$  tal que  $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$ . O escalar  $x_i$  é denominado a  $i$ -ésima **coordenada** de  $\alpha$  em relação a  $\mathcal{B}$ . A matriz  $[\alpha]_{\mathcal{B}} \in M(n \times 1, F)$  definida por

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é denominada **matriz das coordenadas do vetor  $\alpha$  em relação à base  $\mathcal{B}$** .

## 1.2 Operadores e Funcionais Lineares

Definiremos agora funções entre espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $F$  de escalares, um dos principais conceitos e objeto de estudo na Álgebra Linear.

**Definição 1.10.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $F$ . Denominamos*

**transformação linear** de  $V$  em  $W$  a toda função  $T : V \longrightarrow W$  que satisfaça às seguintes condições:

1.  $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$  quaisquer que sejam  $\alpha$  e  $\beta$  em  $V$ ;
2.  $T(c\alpha) = cT(\alpha)$  quaisquer que sejam  $\alpha \in V$  e  $c \in F$ .

Essas duas condições podem ser resumidas em

3.  $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$  para quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$  em  $V$  e  $c$  em  $F$ .

Afirmamos, sem demonstração, que o conjunto de todas as transformações lineares de  $V$  em  $W$ , isto é

$$L(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \mid T \text{ seja uma transformação linear}\}$$

tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o mesmo corpo de escalares  $F$ .

No caso particular em que  $V = W$  a transformação linear é denominada **endomorfismo linear**, mais comumente denominado de **operador linear** [sobre  $V$ ].

**Observação 1.2.** Denotaremos  $L(V, V) = L(V)$  o espaço vetorial de todos os operadores lineares sobre  $V$ .

No caso particular em que  $W = F$  a transformação linear é chamada de **funcional linear** sobre o espaço vetorial  $V$ .

Geralmente encontramos na literatura a notação  $V^*$  denotando o espaço vetorial de todos os funcionais lineares sobre  $V$ .

Há ainda mais um tipo especial de função entre espaços vetoriais e que será importante em nosso trabalho que são as formas bilineares, as quais definiremos oportunamente.

Cabe citar que neste trabalho as transformações lineares, os operadores lineares, os funcionais lineares e as formas bilineares sempre estarão definidas sobre espaços vetoriais de dimensão finita.

Agora vamos enunciar e demonstrar a caracterização das transformações lineares sobre espaços vetoriais quando o espaço de saída tem dimensão finita.

**Teorema 1.3.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo de escalares  $F$  e suponhamos que  $V$  tenha dimensão finita  $n$ . Se  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  é uma base de  $V$  e se  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  é uma família qualquer de elementos de  $W$ , então existe uma única transformação linear  $T : V \longrightarrow W$ , tal que  $T(\alpha_i) = \gamma_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demonstração.* É relativamente simples verificar que a função  $T : V \longrightarrow W$  definida por

$$T(\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i,$$

para todo

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i,$$

é uma transformação linear que satisfaz  $T(\alpha_i) = \gamma_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Por outro lado se  $S : V \longrightarrow W$  é uma transformação linear de  $V$  em  $W$  e que satisfaz  $S(\alpha_i) = \gamma_i$ , temos

$$S(\alpha) = S\left(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i S(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = T(\alpha),$$

para todo  $\alpha$  em  $V$ , portanto  $S = T$ . □

Esse teorema nos evidencia que uma transformação linear  $T : V \longrightarrow W$ , fica completamente determinada quando são dados os transformados dos elementos de uma base de  $V$ ; em outras palavras, para se definir uma transformação linear  $T : V \longrightarrow W$  basta definir  $T$  nos elementos de uma dada base de  $V$ .

**Teorema 1.4.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $F$  e seja  $T$  uma transformação linear de  $V$  em  $W$ . O conjunto de vetores  $\alpha$  em  $V$  tais que  $T\alpha = 0$  é um subespaço vetorial de  $V$ , denominado **núcleo de  $T$**  ou também **kernel de  $T$** , indicado por  $\text{Nuc}(T)$  ou  $\text{Ker}(T)$ .*

*Demonstração.* O núcleo de  $T$  é o conjunto de vetores  $\alpha$  em  $V$  tais que  $T\alpha = 0$ . Como  $T$  é linear, então  $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$ . Agora, se  $T(0) = T(0) + T(0)$ , então

$$\begin{aligned} T(0) &= 0 + T(0) \\ &= [-T(0) + T(0)] + T(0) \\ &= -T(0) + [T(0) + T(0)] \\ &= -T(0) + T(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo  $0 \in \text{Nuc}(T)$ . Agora sejam  $\alpha_1, \alpha_2$  vetores em  $\text{Nuc}(T)$  e  $c$  um escalar em  $F$ . Vemos que  $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = T(c\alpha_1) + T(\alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c0 + 0 = 0$ . Logo  $c\alpha_1 + \alpha_2$  está em  $\text{Nuc}(T)$  e concluímos que  $\text{Nuc}(T)$  é um subespaço de  $V$ .  $\square$

**Teorema 1.5.** *Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre um mesmo corpo  $F$  e seja  $T$  uma transformação linear de  $V$  em  $W$ . O conjunto de vetores  $\beta$  em  $W$  tais que  $T\alpha = \beta$  é um subespaço vetorial de  $W$ , denominado **imagem de  $T$** , indicada por  $\text{Im}(T)$ .*

*Demonstração.* A imagem de  $T$  é o conjunto dos vetores  $\beta$  em  $W$  tais que  $T\alpha = \beta$  para algum  $\alpha$  em  $V$ . Vimos no teorema 1.4 que  $T(0) = 0$ , logo  $0 \in \text{Im}(T)$ . Agora sejam  $\beta_1, \beta_2$  vetores em  $W$ . Se  $T$  é uma transformação de  $V$  em  $W$ , então existem vetores  $\alpha_1, \alpha_2$  em  $V$  tais que  $T(\alpha_1) = \beta_1$  e  $T(\alpha_2) = \beta_2$ . Logo  $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = T(c\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$  e então  $c\beta_1 + \beta_2$  está em  $\text{Im}(T)$ . Concluímos que  $\text{Im}(T)$  é um subespaço de  $W$ .  $\square$

**Definição 1.11.** *Seja  $T$  uma transformação linear de  $V$  em  $W$ , sendo  $V$  de dimensão finita. O **posto de  $T$**  é a dimensão da imagem de  $T$ . A **nulidade de  $T$**  é a dimensão do núcleo de  $T$ .*

**Exemplo 1.5.** *Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$  definida por*

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y & 0 \\ 0 & z - y \end{bmatrix}.$$

*Vamos determinar a nulidade e o posto desta transformação linear. Com efeito, vemos que*

$(x, y, z) \in \text{Nuc}(T)$  se e somente se  $x + y = 0$  e  $z - y = 0$ , isto é, se e somente se  $x = -y$  e  $z = y$ . De fato,

$$T(-y, y, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O núcleo de  $T$  é gerado pelo conjunto  $\{(-y, y, y)\}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Se  $(a, b, c) \in \text{Nuc}(T)$ , então  $(a, b, c) = y(-1, 1, 1)$  e isso quer dizer que  $\{(-1, 1, 1)\}$  é uma base de  $\text{Nuc}(T)$  e por isso a nulidade de  $T$  é 1.

Por outro lado, a imagem de  $T$  é formada pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & z-y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Portanto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador de  $\text{Im}(T)$ . Como  $B$  não é LI, então

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de  $\text{Im}(T)$  e concluímos que o posto de  $T$  é 2. De fato, a nulidade de  $T$  mais o posto de  $T$  é igual à dimensão do espaço de saída, ou seja, é igual a dimensão do  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.12.** Se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais sobre o corpo  $F$ , uma transformação linear bijetora  $T$  de  $V$  em  $W$  é denominada um **isomorfismo** de  $V$  em  $W$ .

**Definição 1.13.** Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre um mesmo corpo de escalares  $F$  e de dimensões finitas  $n$  e  $m$  respectivamente. Sejam  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  bases ordenadas de  $V$  e  $W$  respectivamente. Seja  $T: V \rightarrow W$  uma transformação de  $V$  em  $W$ . A matriz da transformação  $T$  em relação ao par de bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  é a  $m \times n$  matriz  $A$

cujos elementos  $A_{ij}$  são definidos pelas equações

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

A matriz  $A$  será denotada por  $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ .

Vale lembrar que os elementos da  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$  são os elementos da matriz das coordenadas do transformado  $T\alpha_j$  do vetor  $\alpha_j$  pertencente à base  $\mathcal{B}$ .

A matriz  $A$  será denotada por  $[T]_{\mathcal{B}}$  quando  $V = W$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ .

**Exemplo 1.6. (Matriz de um operador sobre o  $\mathbb{R}^2$ )** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (2y, 3x - y)$ . Seja ainda  $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ , em que  $\epsilon_1 = (1, 0)$  e  $\epsilon_2 = (0, 1)$ . Se o vetor  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , então  $(a, b) = a\epsilon_1 + b\epsilon_2$ . Agora a transformação linear  $T\epsilon_1 = A_{11}\epsilon_1 + A_{21}\epsilon_2 = (0, 3) = 0\epsilon_1 + 3\epsilon_2$  e também  $T\epsilon_2 = A_{12}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2 = (2, -1) = 2\epsilon_1 - 1\epsilon_2$ . Logo

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez definida a matriz de uma transformação linear, particularmente, de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  em que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, gostaríamos de destacar a relação que existe entre a matriz das coordenadas de um vetor  $\alpha \in V$  e a matriz das coordenadas de seu transformado usando a matriz do operador em relação a uma única base para o domínio e para o contradomínio do operador.

Isso quer dizer que se  $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j$  é expressão do vetor  $\alpha \in V$  em relação a uma base  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $V$  então

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Agora } T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \alpha_i.$$

Isto nos mostra que

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{nj}x_j \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Outra fato importante e que precisaremos saber é o que acontece com as matrizes de representação de um operador quando mudamos de base.

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear sobre um espaço  $V$  de dimensão finita e sejam  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  duas bases ordenadas quaisquer de  $V$ .

Nossa pergunta é: qual é a relação que existe entre  $[T]_{\mathcal{B}}$  e  $[T]_{\mathcal{B}'}$  ?

Para respondermos a questão, observemos inicialmente o que acontece com a matriz das coordenadas de um vetor dado, se considerarmos bases diferentes.

Expressemos os vetores da base  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  na base  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , ou seja

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

Com isso nós obtemos uma matriz que indicaremos por  $P = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  e denominamos de matriz mudança de base, também conhecida como matriz de passagem da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ .

Se  $\alpha \in V$  é um vetor qualquer em  $V$ , temos

$$\alpha = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j = \sum_{j=1}^n y_j \beta_j.$$

Agora

$$\alpha = \sum_{j=1}^n y_j \beta_j = \sum_{j=1}^n y_j \left( \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n P_{ij} y_j \right) \alpha_i = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

E assim vemos que

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n P_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n P_{nj}y_j \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P \cdot [\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

Agora estamos em condições de respondermos ao último questionamento.

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}},$$

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}'},$$

$$[T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}P \cdot [\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T]_{\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

Uma vez que  $P$  é inversível, temos

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

Essa é a resposta à nossa indagação.

**Definição 1.14 (Subespaço invariante por um operador).** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$ ,  $T$  um operador linear sobre  $V$  e  $W$  um subespaço vetorial de  $V$ . Dizemos que  $W$  é **subespaço invariante sob  $T$**  se para cada vetor  $\alpha$  em  $W$  o vetor  $T\alpha$  está em  $W$ , isto é, se  $T(W)$  está contido em  $W$ .*

Isso particularmente nos diz que a restrição de um operador linear  $T$  sobre um espaço vetorial  $V$  ainda é um operador linear sobre qualquer subespaço  $T$ -invariante  $W$  de  $V$ .

**Definição 1.15 (Autovalor e Autovetor de um operador).** *Seja  $T$  um operador sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$ . Um **autovalor** de  $T$  é um escalar  $c$  em  $F$  tal que exista um vetor **não nulo**  $\alpha$  em  $V$  com  $T\alpha = c \cdot \alpha$ .*

*Se  $c$  é um autovalor de  $T$ , então todo vetor  $\alpha$  tal que  $T\alpha = c \cdot \alpha$  é denominado **autovetor** de  $T$  associado ao autovalor  $c$ .*

**Observação 1.3.** O conjunto de autovetores de um operador  $T$  é um subespaço vetorial de  $V$  de dimensão maior ou igual a 1.

**Exemplo 1.7.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ . Observe que  $T(5, 2) = (4 \cdot 5 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 5 + 2) = (30, 12) = 6 \cdot (5, 2)$ . Portanto o vetor  $(5, 2)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor 6.

Como determinar os autovalores, caso existam, de um operador?

Como determinar autovetores associados a autovalores?

No caso em que o espaço vetorial tenha dimensão finita podemos usar o seguinte procedimento descrito no teorema abaixo.

Antes disso convém observar que pouco acima mostramos a relação que existe entre as matrizes de um mesmo operador linear em relação a bases diferentes. Vimos que

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P. \quad (1.1)$$

Lembrando que essas matrizes são quadradas e que o Teorema de Binet para determinantes estabelece que:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

Podemos então definir  $\det(T)$ , em que  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita como sendo o  $\det([T]_{\mathcal{B}})$  qualquer que seja a base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , pois pela equação 1.1,

$$\det([T]_{\mathcal{B}'}) = \det(P^{-1}) \cdot \det([T]_{\mathcal{B}}) \cdot \det(P) = \det([T]_{\mathcal{B}}).$$

**Teorema 1.6.** Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear sobre  $V$ . As seguintes condições são equivalentes:

1.  $c$  é um autovalor de  $T$ .
2. O operador  $(T - cI)$  é singular (não inversível).
3.  $\det(T - cI) = 0$ .

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , essa matriz nos permite definir o operador  $T : F^{n \times 1} \rightarrow F^{n \times 1}$  tal que  $T(X) = A.X$ , em que  $X \in F^{n \times 1}$  é o espaço vetorial das matrizes de ordem  $n \times 1$ . Portanto quando dissermos que  $c$  é um autovalor de  $A$  podemos interpretar que  $c$  é um autovalor desse operador.

Os autovalores de  $A$  são exatamente os escalares  $c$  em  $F$  tais que  $f(c) = 0$ , em que  $f(c) = \det(A - cI)$ . Por essa razão  $f$  é denominado o **polinômio característico** de  $A$ , ou **polinômio característico** do operador  $T$  associado a  $A$ . Lembre-se que  $f$  é função polinomial de grau  $n$ .

**Definição 1.16.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $F$  e de dimensão finita. Seja  $T$  um operador linear e  $\mathcal{B}$  uma base de  $V$ . O polinômio característico de  $T$  é definido por  $p_T(c) = \det([T - cI]_{\mathcal{B}})$ .*

**Exemplo 1.8. (Polinômio característico)** *Seja  $T$  o operador linear sobre o  $\mathbb{R}^2$  que é representado em relação à base canônica pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*O polinômio característico de  $T$  (ou de  $A$ ) é*

$$\det(cI - T) = \det \left( c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} c-1 & -2 \\ -3 & c-4 \end{bmatrix} = c^2 - 5c - 2$$

**Definição 1.17 (Auto espaço de um operador associado a um autovalor).** *Seja  $T$  um operador linear sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$  e  $c \in F$  um autovalor de  $T$ . O autoespaço de  $T$  associado ao autovalor  $c$  é o subespaço vetorial  $\text{Nuc}(T - cI)$  de  $V$ .*

O processo que nos permite classificação de uma cônica ou de uma quádrlica passa pelo seguinte questionamento: Sob que condições sobre um operador linear  $T : V \rightarrow V$  existe uma base do espaço vetorial  $V$  constituída por autovetores de  $T$ ?

Primeiramente, isso não é verdade em geral, mas existem classes de operadores em que isto é verdade. Iniciaremos com a definição seguinte.

**Definição 1.18 (Operador diagonalizável).** *Seja  $T$  um operador linear sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $T$  é um operador diagonalizável se, e somente se,  $V$  possui uma base constituída por autovetores de  $T$ .*

**Exemplo 1.9.** *Seja  $T$  o operador linear sobre o  $\mathbb{R}^2$  definido por  $T(x, y) = (6x - y, 3x + 2y)$ . A matriz de  $T$  em relação à base canônica do  $\mathbb{R}^2$  é*

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

*O polinômio característico de  $T$  é  $\det(cI - A) = c^2 - 8c + 15 = (c - 3)(c - 5)$ . Logo os autovalores de  $T$  são  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 5$ . A matriz*

$$\begin{bmatrix} c_1 - 6 & 1 \\ -3 & c_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

*Essa matriz é singular e um vetor  $\alpha = (x, y)$  solução da equação matricial*

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*equivale ao sistema homogêneo  $-3x + y = 0$ , que possui como sistema de geradores do espaço solução o vetor não nulo  $\alpha_1 = (1, 3)$ . Portanto  $\alpha_1$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $c_1$ . De modo análogo,  $\alpha_2 = (1, 1)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $c_2$ . Então  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$  que consiste de autovetores de  $T$ . Assim  $T$  é diagonalizável e tem representação matricial*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## 2

# Operadores Autoadjuntos e Formas Bilineares

## 2.1 Espaços com Produto Interno

O produto interno é um conceito que enriquece e muito a estrutura de um espaço vetorial permitindo a utilização de uma linguagem geométrica e propiciando que determinados tipos particulares de operadores respondam positivamente ao questionamento anteriormente formulado, ou seja, permitindo que particulares operadores sobre espaços de dimensão finita admitam uma base constituída por autovetores.

O produto interno sobre um espaço vetorial vai nos proporcionar conceitos de caráter geométrico tais como, ângulo, ortogonalidade, distância, etc.

O produto interno é um tipo particular de forma sesquilinear sobre um espaço vetorial  $V \times V$ .

**Definição 2.1 (Produto Interno).** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $F$ . Aqui necessariamente  $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \mathbb{C}$ .*

*Denominamos de **produto interno** sobre  $V$  a toda função  $f : V \times V \longrightarrow F$  que associa a cada par ordenado  $(\alpha, \beta) \in V \times V$  um escalar  $f(\alpha, \beta)$  em  $F$  satisfazendo as seguintes condições:*

$$1. f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma), \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in V^3;$$

$$2. f(c.\alpha, \gamma) = c.f(\alpha, \gamma), \quad \forall(c, \alpha, \gamma) \in F \times V^2;$$

$$3. f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}, \quad \forall(\alpha, \beta) \in V^2, \text{ em que a barra indica conjugação complexa};$$

$$4. f(\alpha, \alpha) > 0, \quad \forall \alpha \neq 0 \in V.$$

É relativamente comum a notação  $\langle, \rangle$  para produto interno em lugar de  $f$ , isto é, na maioria das vezes vemos escrito assim  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ao invés de  $f(\alpha, \beta)$ .

Tendo um produto interno sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$  podemos definir sobre  $V$  uma **norma** da seguinte forma

$$\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Seja  $z = a + bi$  um número complexo e  $\bar{z} = a - bi$  o seu conjugado. Vemos que  $z + \bar{z} = 2a$ , ou seja,  $z + \bar{z}$  é igual a duas vezes a parte real de  $z$ , a qual geralmente denotamos por  $\text{Re}(z)$ . Agora  $-iz = b - ia$ , ou seja, a parte imaginária de  $z$  coincide com a parte real de  $-iz$ , geralmente denotada por  $\text{Im}(z)$ .

**(Identidade de Polarização)** Tomemos  $V$  como um espaço vetorial complexo com produto interno e sejam  $\alpha, \beta \in V$ . Temos

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \|\alpha\|^2 + \langle \alpha, \beta \rangle + \overline{\langle \alpha, \beta \rangle} + \|\beta\|^2 \\ &= \|\alpha\|^2 + 2 \text{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) + \|\beta\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
 \|\alpha - \beta\|^2 &= \langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle = \\
 &= \langle \alpha, \alpha \rangle - \langle \alpha, \beta \rangle - \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\
 &= \|\alpha\|^2 - \langle \alpha, \beta \rangle - \overline{\langle \alpha, \beta \rangle} + \|\beta\|^2 \\
 &= \|\alpha\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) + \|\beta\|^2.
 \end{aligned}$$

Agora,  $\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 = 4 \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle)$ .

Logo, no caso real, isto é  $F = \mathbb{R}$ ,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) = \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2).$$

Podemos também escrever

$$\operatorname{Re}(\langle \alpha, i\beta \rangle) = \frac{1}{4}(\|\alpha + i\beta\|^2 - \|\alpha - i\beta\|^2).$$

Logo, no caso complexo, isto é,  $F = \mathbb{C}$ ,  $\langle \alpha, \beta \rangle$  é um número complexo, então

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha, \beta \rangle &= \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) + i \operatorname{Im}(\langle \alpha, \beta \rangle) \\
 &= \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) + i \operatorname{Re}(\bar{i} \langle \alpha, \beta \rangle) \\
 &= \operatorname{Re}(\langle \alpha, \beta \rangle) + i \operatorname{Re}(\langle \alpha, i\beta \rangle) \\
 &= \frac{1}{4}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2) + \frac{i}{4}(\|\alpha + i\beta\|^2 - \|\alpha - i\beta\|^2) \\
 &= \sum_{i=1}^4 \frac{i^n}{4} \|\alpha + i^n \beta\|^2.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1. (Produto interno canônico em  $F^n$ )** *O exemplo clássico de produto interno sobre  $F^n$  é*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

em que  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  estão em  $F^n$ .

*Demonstração.* Sejam  $\gamma = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  um vetor em  $F^n$  e  $c$  um escalar em  $F$ , então:

$$\begin{aligned}
 (1.) \quad \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle \\
 &= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle \\
 &= [x_1 + y_1]\bar{z}_1 + [x_2 + y_2]\bar{z}_2 + \dots + [x_n + y_n]\bar{z}_n \\
 &= x_1\bar{z}_1 + y_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + y_2\bar{z}_2 + \dots + x_n\bar{z}_n + y_n\bar{z}_n \\
 &= [x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + \dots + x_n\bar{z}_n] + [y_1\bar{z}_1 + y_2\bar{z}_2 + \dots + y_n\bar{z}_n] \\
 &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle + \langle (y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle \\
 &= \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.) \quad \langle c\alpha, \beta \rangle &= \langle c(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle \\
 &= \langle (cx_1, cx_2, \dots, cx_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle \\
 &= cx_1\bar{y}_1 + cx_2\bar{y}_2 + \dots + cx_n\bar{y}_n \\
 &= c[x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n] \\
 &= c \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle \\
 &= c \langle \alpha, \beta \rangle;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.) \quad \langle \alpha, \beta \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle \\
 &= x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n \\
 &= \bar{y}_1x_1 + \bar{y}_2x_2 + \dots + \bar{y}_nx_n \\
 &= \bar{y}_1 \overline{x_1} + \bar{y}_2 \overline{x_2} + \dots + \bar{y}_n \overline{x_n} \\
 &= \overline{y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n} \\
 &= \langle \overline{(y_1, y_2, \dots, y_n)}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle \\
 &= \langle \overline{\beta}, \alpha \rangle;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.) \quad \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle \\
 &= x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n \\
 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2, \text{ logo } \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ maior que } 0 \text{ se } \alpha \neq 0.
 \end{aligned}$$

□

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) e seja  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base de  $V$ . Um produto interno sobre um espaço de dimensão finita sempre pode ser escrito em termos de uma dada base por meio de uma matriz, ou seja, ele é completamente determinado pelos valores  $A_{ki} = \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle$  que assume sobre pares de vetores em  $\mathcal{B}$ .

Seja  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow F$  um produto interno sobre  $V$  e sejam

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i \quad \text{e} \quad \beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n = \sum_{k=1}^n y_k\alpha_k.$$

Seja

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$X \in \mathbb{M}(n \times 1, F)$ , a matriz das coordenadas de  $\alpha$  em relação à base  $\mathcal{B}$ .

Seja

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$Y \in \mathbb{M}(n \times 1, F)$ , a matriz das coordenadas de  $\beta$  em relação à base  $\mathcal{B}$  e seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$A \in \mathbb{M}(n \times n, F)$ , a matriz do produto interno em relação a  $\mathcal{B}$ .

Como consequência da propriedade (3.) da definição de produto interno, segue que a matriz  $A$  coincide com a sua transposta conjugada, ou seja,  $A$  é uma **matriz hermitiana**, isto é,

$A = A^*$  em que  $A^* = \overline{A^t}$ . De fato,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{k=1}^n y_k \alpha_k \right\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i \overline{y_k} \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{y_k} x_i \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{y_k} x_i A_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \overline{y_k} A_{ki} x_i \\ &= \begin{bmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= Y^* A X \text{ (que é uma matriz } 1 \times 1\text{)} \\ &= (Y^* A X)^t \text{ (pois uma matriz } 1 \times 1 \text{ é igual a sua transposta)} \\ &= X^t A^t (Y^*)^t \\ &= X^t A^t \overline{Y} \\ &= \overline{Y^t A^t X} \text{ (pois } \langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle}\text{)} \\ &= \overline{Y^t} \overline{A^t} \overline{X} \\ &= Y^* A^* X. \end{aligned}$$

Como  $Y^* A X = Y^* A^* X$ , então  $A = A^*$  e a matriz  $A$  é hermitiana.

**Definição 2.2 (Espaço com Produto Interno).** *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial munido de um produto interno definido sobre esse espaço.*

Um espaço vetorial real munido de produto interno e de dimensão finita é frequentemente

denominado um **espaço euclidiano**. Um espaço vetorial complexo munido de um produto interno é conhecido como um **espaço unitário**.

**Teorema 2.1.** *Se  $V$  é um espaço com produto interno, então, para quaisquer vetores  $\alpha, \beta$  em  $V$  e todo escalar  $c$ :*

1.  $\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$ ;
2.  $\|\alpha\| > 0$  para  $\alpha \neq 0$ ;
3.  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$  (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**);
4.  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$  (**Desigualdade Triangular**).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 (1.) \quad \|c\alpha\| &= \sqrt{\langle c\alpha, c\alpha \rangle} \\
 &= \sqrt{c\bar{c} \langle \alpha, \alpha \rangle} \\
 &= \sqrt{|c|^2 \langle \alpha, \alpha \rangle} \\
 &= \sqrt{|c|^2} \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \\
 &= |c| \|\alpha\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.) \quad \|\alpha\| &= \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \\
 &> 0, \text{ se } \alpha \neq 0
 \end{aligned}$$

(3.) Se  $\alpha = 0$ , então  $|\langle \alpha, \beta \rangle| = 0$ , e ainda  $\|\alpha\| \|\beta\| = 0$ , logo  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$  e está demonstrado. Se  $\alpha \neq 0$ , então tomemos  $\gamma = \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha$ , logo

$$\begin{aligned}
 \|\gamma\|^2 &= (\sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle})^2 \\
 &= |\langle \gamma, \gamma \rangle| \\
 &= \left| \left\langle \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha, \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha \right\rangle \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\langle \beta, \beta \rangle| - \left| \left\langle \beta, \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha \right\rangle \right| - \left| \left\langle \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha, \beta \right\rangle \right| + \left| \left\langle \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha, \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha \right\rangle \right| \\
&= \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \beta, \alpha \rangle| - \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \beta \rangle| + \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle| |\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \alpha \rangle| \\
&= \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \beta, \alpha \rangle| - \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \beta \rangle| + \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle| |\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} \|\alpha\|^2 \\
&= \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \beta, \alpha \rangle| - \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \beta \rangle| + \frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \beta \rangle| \\
&= \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|}{\|\alpha\|^2} |\langle \alpha, \beta \rangle| \\
&= \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\alpha\|^2}.
\end{aligned}$$

Como  $\|\gamma\|^2 \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\gamma\|^2 &\Leftrightarrow 0 \leq \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\alpha\|^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\alpha\|^2} \leq \|\beta\|^2 \\
&\Leftrightarrow |\langle \alpha, \beta \rangle|^2 \leq \|\beta\|^2 \|\alpha\|^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2} \leq \sqrt{\|\beta\|^2 \|\alpha\|^2} \\
&\Leftrightarrow |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\beta\| \|\alpha\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.) \quad \|\alpha + \beta\|^2 &= (\sqrt{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle})^2 \\
&= |\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle| \\
&= |\langle \alpha, \alpha \rangle| + |\langle \alpha + \beta, \alpha \rangle| + |\langle \beta, \alpha \rangle| + |\langle \alpha, \alpha \rangle| \\
&= \|\alpha\|^2 + |\langle \alpha, \beta \rangle| + |\langle \overline{\alpha}, \beta \rangle| + \|\beta\|^2 \\
&= \|\alpha\|^2 + 2 |\langle \alpha, \beta \rangle| + \|\beta\|^2, \text{ pois } \mathbb{C} + \overline{\mathbb{C}} = 2 \operatorname{Re}(\mathbb{C}) \\
&\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \|\beta\| + \|\beta\|^2, \text{ por causa de (iii)} \\
&\leq (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2,
\end{aligned}$$

logo  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ .

□

**Definição 2.3 (Vetores Ortogonais).** *Sejam,  $V$  um  $F$ -espaço vetorial munido de um produto interno,  $\alpha$  e  $\beta$  vetores em  $V$ . Dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  são **ortogonais** se, e somente se,  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ , isto é, o produto interno entre eles é zero.*

*Se  $S$  é um subconjunto de vetores em  $V$ , dizemos que  $S$  é um **conjunto ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos em  $S$  são ortogonais. Um subconjunto  $S$  de  $V$  é denominado **conjunto ortonormal** se, e somente se, for um conjunto ortogonal  $S$ , com a propriedade adicional que  $\|\alpha\| = 1$  para todo  $\alpha$  em  $S$ .*

Uma observação simples, mas, muito relevante:

**Teorema 2.2.** *Um subconjunto ortogonal de vetores **não nulos** de um espaço vetorial munido de um produto interno é sempre linearmente independente.*

*Demonstração.* Seja  $S = \emptyset$  então  $S$  é trivialmente um conjunto ortonormal, pois o mesmo não viola a definição de conjunto ortonormal. Suponhamos agora que  $S$  seja um subconjunto ortogonal constituído de vetores não nulos em um  $F$ -espaço vetorial com produto interno. Suponhamos que  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sejam vetores distintos em  $S$  e que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m = \sum_{j=1}^m c_j\alpha_j.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \beta, \alpha_k \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle c_j\alpha_j, \alpha_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m c_j \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \\ &= c_k \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle \quad (\text{pois } S \text{ é um conjunto ortogonal}) \\ &= c_k \|\alpha_k\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } c_k = \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Assim, obviamente concluímos que  $\beta = 0$ , se, e somente se cada  $c_k = 0$  para  $k = 1 \dots m$ , logo  $S$  é um conjunto linearmente independente.  $\square$

O corolário seguinte nos diz como é a expressão de  $\beta \in [S]$  no caso em que  $S$  é um subconjunto ortogonal constituído de vetores não nulos de um  $F$ -espaço vetorial munido de um produto interno.

**Corolário 2.1.** *Se um vetor  $\beta$  é uma combinação linear de um conjunto ortogonal de vetores não nulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , então  $\beta$  é exatamente a combinação linear*

$$\beta = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

*Demonstração.* Seja  $\beta = (c_1, \dots, c_n)$ , pelo teorema 2.2, vemos que  $c_k = \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2}$ . Agora, como

$$\beta = \sum_{k=1}^m c_k \alpha_k, \text{ então } \beta = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \beta, \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

□

Este próximo teorema nos diz que em um  $F$ -espaço vetorial  $V$  de dimensão finita e munido de um produto interno podemos sempre construir uma base ortonormal para este espaço à partir de qualquer base de  $V$ . O processo descrito abaixo para transformar uma base qualquer de  $V$  numa base ortonormal é conhecido pelo nome de “Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt”.

**Teorema 2.3. (Ortonormalização de Gram-Schmidt)** *Todo espaço de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal.*

*Demonstração.* Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial com produto interno. Se  $\dim V = 0$  nada a fazer, pois sua única base é o conjunto vazio  $\emptyset$  o qual é trivialmente ortonormal, pois o mesmo não viola tal definição. Suponhamos agora que  $\dim V = n > 0$  e seja  $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  uma base de  $V$ . Seja  $\alpha_1 = \beta_1$  e tomemos  $\alpha_2 = \beta_2 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1$ . Como  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são LI, então  $\alpha_2 \neq 0$ , pois caso contrário teríamos  $0 = \beta_2 - \frac{\langle \beta_2, \beta_1 \rangle}{\|\beta_1\|^2} \beta_1 \Leftrightarrow \beta_2 = \frac{\langle \beta_2, \beta_1 \rangle}{\|\beta_1\|^2} \beta_1$ , ou seja,  $\beta_2$  seria um múltiplo escalar de  $\beta_1$  e assim eles seriam LD. Além disso,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são

ortogonais, pois

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \left\langle \alpha_1, \beta_2 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 \right\rangle \\
 &= \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle - \left\langle \alpha_1, \frac{\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 \right\rangle \\
 &= \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle - \frac{\overline{\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle}}{\|\alpha_1\|^2} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \\
 &= \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle - \frac{\langle \alpha_1, \beta_2 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \|\alpha_1\|^2 \\
 &= \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle - \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Agora, seja  $\alpha_3 = \beta_3 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2$ . Como  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  são LI, então  $\alpha_3 \neq 0$ , pois, caso contrário,  $\beta_3$  seria uma combinação linear de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  e eles seriam LD.

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle &= \left\langle \alpha_1, \beta_3 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \right\rangle \\
 &= \langle \alpha_1, \beta_3 \rangle - \frac{\overline{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}}{\|\alpha_1\|^2} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle - \frac{\overline{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}}{\|\alpha_2\|^2} \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \\
 &= 0, \text{ pois já vimos que } \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle &= \left\langle \alpha_2, \beta_3 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \right\rangle \\
 &= \langle \alpha_2, \beta_3 \rangle - \frac{\overline{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}}{\|\alpha_1\|^2} \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle - \frac{\overline{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}}{\|\alpha_2\|^2} \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Como  $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 0$ , então  $\alpha_3$  é ortogonal a  $\alpha_1$  e a  $\alpha_2$ .

Agora, seja  $\alpha_j$  igual a  $\beta_j$  menos a combinação linear de  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}$ , para  $2 \leq j \leq k$ .

Tomemos

$$\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j,$$

então

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{k+1}, \alpha_i \rangle &= \left\langle \beta_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j, \alpha_i \right\rangle \\ &= \langle \beta_{k+1}, \alpha_i \rangle - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \beta_{k+1}, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \\ &= \langle \beta_{k+1}, \alpha_i \rangle - \frac{\langle \beta_{k+1}, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle, \text{ pois } \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0 \text{ se } i \neq j \\ &= 0, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Assim,  $\alpha_{k+1}$  é ortogonal a cada um dos vetores  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Se  $\alpha_{k+1} = 0$ , então  $\beta_{k+1}$  seria uma combinação linear de  $\beta_1, \dots, \beta_k$ . Portanto  $\alpha_{k+1} \neq 0$  e obtemos o conjunto ortogonal não nulo  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  contendo  $n$  vetores distintos. Esse conjunto é LI, portanto é uma base. Agora coloquemos

$$\left\{ \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}, \dots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|} \right\}$$

e temos a base ortonormal desejada. □

**Definição 2.4. [ Suplementar ortogonal de um conjunto]** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial com produto interno e seja  $S$  um subconjunto qualquer de vetores em  $V$ . Denominamos de **suplementar ortogonal** de  $S$  o conjunto, às vezes, denotado por:  $S^\perp$  e definido por:  $S^\perp = \{\beta \in V \mid \langle \beta, \alpha \rangle = 0, \quad \forall \alpha \in S\}$ . Isto é,  $S^\perp$  é o conjunto de todos os vetores de  $V$  que são ortogonais à qualquer vetor de  $S$ . Este conjunto  $S^\perp$  é um subespaço vetorial de  $V$ .*

Convém destacar que o conjunto  $S^\perp$  tem estrutura de um  $F$ -subespaço vetorial de  $V$  independentemente de qualquer estrutura sobre o conjunto  $S$ . Particularmente  $\emptyset^\perp = V$ .

No caso particular em que  $S = W$  e  $W$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de um  $F$ -espaço vetorial  $V$  munido de um produto interno temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.** *Se  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço  $V$  com produto interno, então:  $V = W \oplus W^\perp$ .*

*Demonstração.* Segue do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt que  $W$  admite uma base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ . Se  $\beta$  é um vetor qualquer de  $V$ , então

$$\beta = \sum_{k=1}^m \langle \beta, \alpha_k \rangle \alpha_k + \gamma,$$

logo

$$\gamma = \beta - \sum_{k=1}^m \langle \beta, \alpha_k \rangle \alpha_k.$$

Uma vez que  $\langle \gamma, \alpha_j \rangle = 0$  para todo  $\alpha_j$ , então  $\gamma \in W^\perp$ . Logo  $V = W + W^\perp$ .

Ainda, de  $\gamma \in W \cap W^\perp$ , então pela definição de  $W^\perp$  segue que  $\gamma = 0$  e isto nos permite dizer que a soma dos subespaços é direta.  $\square$

Este próximo teorema pode ser chamado, guardadas as devidas proporções, de Teorema de Representação de Riesz. Ele tem por finalidade dar uma caracterização para todos os funcionais lineares sobre um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno.

Esse resultado é bastante relevante para garantir a existência do operador adjunto  $T^*$  de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  no caso de  $V$  ser um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

**Teorema 2.5. [Teorema da Representação de Riesz]** *Sejam  $V$  um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e  $f : V \rightarrow F$  um funcional linear sobre  $V$ . Nessas condições, existe um único vetor  $\beta$  em  $V$  tal que  $f(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$  para todo  $\alpha$  em  $V$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ ,  $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$  e  $\gamma = z_1\alpha_1 + \dots + z_n\alpha_n$  vetores em  $V$ . Temos

$$\langle \alpha, \gamma \rangle = x_1\bar{z}_1 + \dots + x_n\bar{z}_n = \sum_{j=1}^n x_j\bar{z}_j.$$

Seja  $f : V \rightarrow F$  um funcional linear arbitrário sobre  $V$ , temos

$$f(\alpha) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{c}_j = \langle \alpha, \beta \rangle,$$

em que  $c_j = \overline{f(\alpha_j)}$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $\beta = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j$ . □

## 2.2 Operadores Autoadjuntos

Levando em consideração nosso objetivo principal, qual seja, um procedimento relativamente prático de classificação de cônicas e quádricas, passaremos agora a estudar um particular e útil tipo especial de operadores lineares, a saber, os operadores autoadjuntos.

Iniciemos por definir o operador adjunto de um dado operador  $T : V \longrightarrow V$  definido sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$  munido de produto interno.

**Definição 2.5 (Operador Adjunto).** *Seja  $T : V \longrightarrow V$  definido sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$  munido de produto interno. Dizemos que  $T$  possui um operador adjunto, se e somente se, existe um operador [denotado por  $T^*$ ],  $T^* : V \longrightarrow V$  satisfazendo a relação*

$$\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle,$$

quaisquer que sejam os vetores  $\alpha$  e  $\beta$  em  $V$ .

Em geral nem sempre existe tal operador, mas, no seguinte caso existe.

**Teorema 2.6. [Existência do operador adjunto no caso em que  $V$  tem dimensão finita]** *Qualquer operador linear  $T : V \longrightarrow V$  sobre um espaço  $V$  de dimensão finita com produto interno, sempre admite [um único] operador linear adjunto  $T^*$ .*

*Demonstração.* Inicialmente provaremos a existência de  $T^*$ .

Seja  $\beta$  um vetor em  $V$ . Consideremos o funcional linear  $f : V \longrightarrow F$  definido por

$$f(\alpha) = \langle T\alpha, \beta \rangle.$$

O teorema de Representação de Riesz garante que existe um único vetor  $\beta'$  em  $V$ , dependente de  $\beta$  tal que  $f(\alpha) = \langle \alpha, \beta' \rangle$ , isto é,  $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta' \rangle$  para todo  $\alpha$ . Isso nos

permite associar a cada  $\beta \in V$  um único vetor  $\beta' \in V$  satisfazendo a igualdade acima. Com isso, podemos inicialmente construir uma função  $T^* : V \rightarrow V$  definida por  $\beta' = T^*(\beta)$ .

Provemos que  $T^*$  é linear e única. Sejam  $\beta, \gamma \in V$  e seja  $c$  um escalar. Então, para qualquer  $\alpha \in V$  temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha, T^*(c\beta + \gamma) \rangle &= \langle T\alpha, c\beta + \gamma \rangle \\ &= \langle T\alpha, c\beta \rangle + \langle T\alpha, \gamma \rangle \\ &= \bar{c} \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha, \gamma \rangle \\ &= \bar{c} \langle \alpha, T^*\beta \rangle + \langle \alpha, T^*\gamma \rangle \\ &= \langle \alpha, cT^*\beta \rangle + \langle \alpha, T^*\gamma \rangle \\ &= \langle \alpha, cT^*\beta + T^*\gamma \rangle \end{aligned}$$

Uma vez que  $\alpha$  é um elemento qualquer de  $V$  concluímos que  $T^*(c\beta + \gamma) = cT^*\beta + T^*\gamma$ , portanto  $T^*$  é linear. O mesmo raciocínio e a linearidade do produto escalar nos permitem concluir a unicidade de  $T^*$ .  $\square$

Este próximo teorema vem mostrar a praticidade na determinação da matriz de um operador linear sobre um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita e munido de produto interno fixada uma base, mas, desde que a base escolhida seja ortonormal.

**Teorema 2.7.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ . Seja  $T$  um operador linear sobre  $V$  e seja  $A$  a matriz de  $T$  em relação à base ordenada  $\mathcal{B}$ . Então  $A_{kj} = \langle T\alpha_j, \alpha_k \rangle$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathcal{B}$  é uma base ortonormal, pelo corolário 2.1 temos

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \langle \alpha, \alpha_k \rangle \alpha_k, \quad \text{logo} \quad T\alpha_j = \sum_{k=1}^n \langle T\alpha_j, \alpha_k \rangle \alpha_k.$$

Agora pela definição (1.13), vemos que

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj} \alpha_k.$$

Concluimos que  $A_{kj} = \langle T\alpha_j, \alpha_k \rangle$ . □

Decorrencia desse resultado,

$$B_{kj} = \langle T^*(\alpha_j), \alpha_k \rangle = \langle \alpha_j, T(\alpha_k) \rangle = \overline{\langle T(\alpha_k), \alpha_j \rangle} = \overline{A_{jk}}.$$

Essa relação nos mostra que a matriz do operador  $T^*$  adjunto do operador  $T$  em relação à base ortonormal é a transposta conjugada da matriz do operador  $T$  em relação à mesma base.

**Teorema 2.8.** *Seja  $V$  um espaço de dimensão finita com produto interno. Se  $T$  e  $U$  são operadores lineares sobre  $V$  e  $c$  é um escalar, então valem as seguintes igualdades:*

1.  $(T + U)^* = T^* + U^*$ ;
2.  $(cT)^* = \bar{c} T^*$ ;
3.  $(TU)^* = U^*T^*$ ;
4.  $(T^*)^* = T$ .

Resumindo: todo operador linear sobre um  $F$ -espaço de dimensão finita com produto interno possui um adjunto. Se  $T$  é um operador linear sobre um espaço de dimensão finita com produto interno, então  $T^*$  é o adjunto de  $T$ . O adjunto de  $T$  depende não só de  $T$ , mas também do produto interno.

**Definição 2.6.** *Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Um operador linear  $T$  sobre  $V$  tal que  $T = T^*$  é **autoadjunto**.*

Resumindo: se  $\mathcal{B}$  é uma base ortonormal de um espaço  $V$  sobre  $F$ , então  $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^*$ , e então  $T$  é autoadjunto (hermitiano) se, e somente se, sua matriz em relação a toda base ortonormal é uma matriz autoadjunta (hermitiana).

Na direção de nosso objetivo, formularemos uma questão e a responderemos parcialmente, mas esta resposta será o suficiente para a nossa meta. Eis a pergunta:

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear sobre um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita e munido de um produto interno. Sob que condições o espaço  $V$  admite uma base ortonormal em relação a qual a matriz deste operador é diagonal, isto é, os elementos dessa base, são autovetores de  $T$  ?

Admitamos que tal base exista e deduziremos condiç(ão)(ões) necessária(s) sobre o operador  $T$ .

Suponhamos que exista uma base  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ortonormal de  $V$  satisfazendo

$$T\alpha_k = c_k\alpha_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Isso se traduz dizendo que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é uma matriz diagonal, cujos elementos de sua diagonal principal são  $c_1, \dots, c_n$ .

Vimos anteriormente que  $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^*$ , ou seja,  $[T^*]_{\mathcal{B}}$  é também uma matriz diagonal, cujos elementos de sua diagonal principal são exatamente  $\overline{c_1}, \dots, \overline{c_n}$ .

Isso nos diz que se  $V$  for um espaço real então necessariamente  $T = T^*$ , isto é o operador  $T$  necessariamente precisa ser autoadjunto.

Agora se  $V$  for um espaço complexo então  $T$  não necessariamente precisa ser autoadjunto, mas podemos afirmar que  $T.T^* = T^*.T$ , isto é que  $T$  comuta com  $T^*$ . É surpreendente que essa condição necessária [comutatividade entre  $T$  e  $T^*$ ] também seja suficiente.

Para nossos objetivo basta então que  $T$  seja autoadjunto, pois estamos trabalhando com espaços vetoriais reais.

Vamos mostrar a suficiência da condição.

**Teorema 2.9.** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial munido de um produto interno e  $T$  um operador linear autoadjunto sobre  $V$ . Nessas condições qualquer autovalor de  $T$  é real. Além disso, autovetores de  $T$  associados a autovalores distintos são ortogonais.*

*Demonstração.* Seja  $c \in F$  um autovalor de  $T$ , isto é, que  $T\alpha = c\alpha$  para algum vetor não nulo  $\alpha \in V$ . Então:

$$c \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle c\alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T^*\alpha \rangle = \langle \alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, c\alpha \rangle = \bar{c} \langle \alpha, \alpha \rangle$$

Como  $\alpha \neq 0$  segue que  $c = \bar{c}$ , em que  $c \in \mathbb{R}$ .

Agora, suponhamos que  $T\beta = d\beta$ , com  $\beta \neq 0$ . Então:

$$c \langle \alpha, \beta \rangle = \langle c\alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle = \bar{d} \langle \alpha, \beta \rangle = d \langle \alpha, \beta \rangle$$

Logo, se  $c \neq d$ , então  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  e assim  $\alpha$  e  $\beta$  são ortogonais.  $\square$

Convém destacar que esse teorema não garante nada sobre a existência de autovalores ou autovetores.

A prova da existência de algum autovalor ou autovetor inicia-se neste próximo teorema.

**Teorema 2.10.** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita e positiva munido de produto interno. Nestas condições todo operador linear autoadjunto  $T : V \rightarrow V$  possui (pelo menos) um autovalor.*

*Demonstração.* Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n > 0$  e munido de produto interno sobre o corpo  $F$ ,  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear autoadjunto sobre  $V$  e  $A = [T]_{\mathcal{B}}$ . Como  $T$  é autoadjunto se, e somente se,  $[A]_{\mathcal{B}}$  é autoadjunta, então  $A = A^*$ .

Agora, sejam  $W$  o espaço das  $n \times 1$  matrizes sobre o corpo  $\mathbb{C}$  munido do produto interno definido por:  $\langle X, Y \rangle = Y^*X$ ,  $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  a base canônica de  $W$  e  $U : W \rightarrow W$  o operador linear definido por:  $U(X) = AX$ . Uma vez que  $A = [U]_{\mathcal{E}}$  e  $A$  é uma matriz autoadjunta segue que o operador  $U$  é autoadjunto. Como  $\mathbb{C}$  é um corpo algebricamente fechado, o polinômio característico de  $U$  [que é o mesmo polinômio característico de  $A$ ], possui, pelo menos, uma raiz complexa e assim existe um número complexo  $c$  tal que  $p_U(c) = 0$ . Pelo teorema 1.6,  $A - c.I$  é uma matriz singular, equivalentemente,  $U - c.I$  é um operador não injetor, portanto existe um autovetor não nulo  $X \in W$  tal que  $(U - c.I)X = 0$ , ou seja  $U(X) = A.X = c.X$ .

Temos dois casos a analisar:

Primeiro: se  $V$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, isto é, se  $F = \mathbb{C}$ , então seja  $\alpha \in V$  definido por

$$\alpha = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j,$$

em que  $x_1, \dots, x_n$  são as coordenadas do vetor  $X$  expresso na base  $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ .

Pela definição, temos

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i,$$

então

$$\begin{aligned} T\alpha &= T \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j T\alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n c x_i \alpha_i \\ &= c \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \\ &= c \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Assim está provado a existência de, pelo menos um autovalor  $c$  e, pelo menos um autovetor não nulo  $\alpha$ , associado ao autovalor  $c$ .

Segundo: se  $F = \mathbb{R}$ , então, neste caso, observemos que a matriz  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ , isto é, a matriz  $A$  é real. Acima não precisamos citar, mas, aqui fazemos referencia ao teorema 2.9, que nos afirma que o autovalor  $c$  é real e assim a matriz  $A - cI$  é real e singular, equivalentemente, o operador  $T - cI$  é não injetor. Portanto existe um vetor  $\alpha \in V$  não nulo, tal que  $(T - cI)\alpha = 0$ , ou seja,  $T\alpha = c\alpha$  e assim está provado a existência de um autovalor  $c$  real e de um respectivo autovetor  $\alpha \neq 0$  para o operador  $T$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 2.11 (Suplementar ortogonal  $T^*$  invariante).** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita e munido de um produto interno e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear arbitrário sobre  $V$ . Suponhamos que  $W$  seja um subespaço de  $V$  que seja invariante sob  $T$ . Então o suplementar ortogonal de  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  invariante sob  $T^*$ .*

*Demonstração.* Seja  $W$  um subespaço invariante sob  $T$ , isto quer dizer que se  $\alpha$  está em  $W$  então  $T\alpha$  está em  $W$ . Queremos mostrar que se  $\beta$  em  $W^\perp$  então  $T^*(\beta)$  está em  $W^\perp$ . Se  $\alpha$  é um elemento qualquer de  $W$  então  $T\alpha$  está em  $W$ , pois  $W$  é  $T$ -invariante. Com isso, vemos que  $\langle T\alpha, \beta \rangle = 0, \forall \beta \in W^\perp$ . Portanto segue da definição de operador adjunto que  $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle$ . Então  $\langle T^*\beta, \alpha \rangle = 0$  qualquer que seja  $\alpha \in W$ . Isto mostra que  $T^*(\beta) \in W^\perp$ . Portanto  $W^\perp$  é invariante sob  $T^*$ .  $\square$

Finalmente um de nossos principais teoremas,

**Teorema 2.12.** *Sejam  $V$  um  $F$ -espaço de dimensão finita e com produto interno e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear autoadjunto sobre  $V$ . Nestas condições existe uma base ortonormal de  $V$ , constituída de vetores autovetores de  $T$ .*

*Demonstração.* Se  $\dim V = 0$  o resultado é trivialmente verdadeiro. Suponhamos então que  $\dim V = n > 0$ . Se  $T$  é autoadjunto, então pelo teorema 2.10,  $T$  possui um autovetor  $\alpha \neq 0$ . Seja  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ , então  $\alpha_1$  é ainda um autovetor de  $T$ .

Provemos nosso teorema por indução sobre  $\dim V$ .

Se  $\dim V = n = 1$  nosso teorema está terminado, pois,  $\mathcal{B} = \{\alpha_1\}$  torna-se uma base ortonormal de  $V$ .

Suponhamos que o teorema seja válido para qualquer  $F$ -espaço vetorial  $V$  com dimensão estritamente menor que  $n$ , em que  $n \geq 1$  é um número natural.

Nesse caso lembre-se que o  $F$ -subespaço vetorial  $W = [\alpha_1]$  é um subespaço invariante sob  $T$ , pois  $\alpha_1$  é um autovetor de  $T$ .

Portanto pela definição (2.4)  $W^\perp$  é um  $F$ -subespaço vetorial de  $V$ ,  $\dim W^\perp = n - 1$  [teorema (2.4)] e pelo teorema (2.11) este subespaço é invariante por  $T^* = T$ . Agora o operador

$U = T|_{W^\perp}$  é ainda autoadjunto. Portanto a hipótese da indução nos garante a existência de uma base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  de  $W^\perp$  constituída de autovetores de  $U$ , portanto de  $T$ . O teorema (2.4) nos assegura que  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  é uma base ortonormal de  $V$  constituída de vetores característicos de  $T$ , como queríamos provar.

□

## 2.3 Formas Bilineares

Nesta seção vamos estudar e descrever as formas bilineares sobre espaços vetoriais de dimensão finita direcionadas para o nosso objetivo principal, ou seja, classificação de cônicas e quádras. Continuamos destacando que o corpo  $F$  de escalares dos espaços vetoriais, abaixo referidos, sempre será  $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \mathbb{C}$ .

**Definição 2.7.** *Uma forma bilinear sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$ , real ou complexo, é uma função sobre  $f : V \times V \longrightarrow F$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $f(c \cdot \alpha_1 + \alpha_2, \beta) = c \cdot f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$
2.  $f(\alpha, c \cdot \beta_1 + \beta_2) = c \cdot f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2)$

para todos  $\alpha, \beta$  em  $V$  e todo escalar  $c$ .

Assim, uma forma bilinear é uma função  $f : V \times V \longrightarrow F$  de duas variáveis tal que se fixarmos qualquer uma dessas duas das variáveis  $f$  se torna uma forma [ou funcional] linear na variável não fixada.

Afirmamos sem demonstração que o conjunto

$$B(V, V) = B(V) = \{f : V \times V \longrightarrow F \mid f \text{ seja uma forma bilinear}\}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo  $F$ .

**Teorema 2.13.** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno e  $f$  uma forma bilinear sobre  $V$ . Então existe um único operador linear  $T = T_f : V \rightarrow V$  tal que  $f(\alpha, \beta) = \langle T\alpha, \beta \rangle$ , para todos  $\alpha, \beta$  em  $V$ . Além disso a aplicação  $\varphi : B(V) \rightarrow L(V)$  em que  $B(V)$  é o  $F$ -espaço vetorial de todas as formas bilineares sobre  $V$  e  $L(V)$  é o  $F$ -espaço de vetorial de todos os operadores lineares sobre  $V$ , definida por  $\varphi(f) = T_f$ , é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Pelo Teorema da Representação de Riesz, 2.5, para cada  $\beta \in V$  existe um único vetor  $\beta' \in V$  tal que,  $f(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta' \rangle$  para todo  $\alpha$ . Seja  $U : V \rightarrow V$ , tal que  $U\beta = \beta'$ . Então

$$\begin{aligned} \langle \alpha, U(c\beta + \gamma) \rangle &= f(\alpha, c\beta + \gamma) \\ &= \bar{c}f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ &= \bar{c} \langle \alpha, U\beta \rangle + \langle \alpha, U\gamma \rangle \\ &= \langle \alpha, cU\beta + U\gamma \rangle, \end{aligned}$$

para todos  $\alpha, \beta, \gamma$  em  $V$  e todos os escalares  $c$ . Logo:  $U(c\beta + \gamma) = cU\beta + U\gamma$ .

Isso nos mostra que  $U$  é um operador linear sobre  $V$ . Seja  $T = U^*$ , então  $T$  é o operador que afirmamos sua existência e que satisfaz

$$f(\alpha, \beta) = \langle T\alpha, \beta \rangle,$$

para todos  $\alpha, \beta$  em  $V$ .

Suponhamos a existência de outro operador  $T'$  satisfazendo

$$f(\alpha, \beta) = \langle T'\alpha, \beta \rangle,$$

para todos  $\alpha, \beta$  em  $V$ .

Então  $\langle T\alpha - T'\alpha, \beta \rangle = 0$ , para todos  $\alpha, \beta$ . Assim,  $T\alpha = T'\alpha$  para todo  $\alpha$  e então para cada forma  $f$ , existe um único operador linear  $T_f$  tal que  $f(\alpha, \beta) = \langle T_f\alpha, \beta \rangle$  para todos

$\alpha, \beta$  em  $V$ . Se  $f$  e  $g$  são formas bilineares e  $c$  um escalar,

$$\begin{aligned} \langle T_{cf+g}\alpha, \beta \rangle &= (cf + g)(\alpha, \beta) = cf(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta) = \langle cT_f\alpha, \beta \rangle + \langle T_g\alpha, \beta \rangle = \\ &= \langle (cT_f + T_g)\alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

para todos  $\alpha, \beta$  em  $V$ . Portanto,  $T_{cf+g} = cT_f + T_g$ , de modo que  $f \rightarrow T_f$  é uma aplicação linear. Evidentemente  $T = T_f = 0 \leftrightarrow f = 0$ , portanto  $\varphi$  é injetora. Além disso  $\varphi$  é sobrejetora pela própria definição e assim  $\varphi$  é um isomorfismo.  $\square$

**Definição 2.8 (Matriz de uma forma bilinear).** *Sejam  $f : V \times V \rightarrow F$  é uma forma bilinear sobre um  $F$ -espaço vetorial  $V$  de dimensão finita e com produto interno e  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base ordenada arbitrária de  $V$ . A matriz  $A \in M(n \times n, F)$  em que  $n = \dim V$ , cujos elementos são definidos por:  $A_{jk} := f(\alpha_j, \alpha_k)$  é denominada a **matriz da forma bilinear  $f$  em relação à base ordenada  $\mathcal{B}$** .*

Esta definição simplesmente se inspira no seguinte fato:

$$\begin{aligned} \text{Sejam } \alpha &= \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \text{ e } \beta = \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j \text{ dois elementos quaisquer de } V, \text{ então:} \\ f(\alpha, \beta) &\equiv [f(\alpha, \beta)] = [f(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j)] = [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i f(x_i \alpha_i, \alpha_j) y_j] = \\ &= [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{ij} y_j] = [\alpha]_{\mathcal{B}}^t A [\beta]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

## 2.4 Formas Bilineares Simétricas e Formas Quadráticas

**Definição 2.9. (Forma bilinear simétrica)** *Seja  $f : V \times V \rightarrow F$  uma forma bilinear sobre o  $F$ -espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $f$  é **simétrica** se, e somente se,  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$  para todos os vetores  $\alpha, \beta$  em  $V$ .*

É relativamente simples verificar que o conjunto

$$B_s(V) = \{f : V \times V \rightarrow F \mid f \text{ seja bilinear e simétrica}\}$$

é um subespaço vetorial do espaço  $B(V)$  de todas formas bilineares sobre  $V$ .

Caso o  $F$ -espaço vetorial  $V$  tenha dimensão finita, uma forma bilinear  $f : V \times V \rightarrow F$  sobre  $V$  é simétrica se, e somente se, a matriz  $A$  de  $f$  em relação à qualquer base de  $V$  é uma matriz simétrica. Isto é decorrência do fato que:  $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ji}$ .

**Definição 2.10. (Forma quadrática)** *Seja  $V$  um  $F$ -espaço vetorial e  $q : V \rightarrow F$  uma função. Dizemos que  $q$  é uma forma quadrática se, e somente se, existe uma forma bilinear  $f : V \times V \rightarrow F$  tal que  $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$  para todo  $\alpha \in V$ .*

**Observação 2.1.** *Se  $f : V \times V \rightarrow F$  é uma forma bilinear qualquer, então a função  $g : V \times V \rightarrow F$  definida por  $g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$  é uma forma bilinear simétrica e vale*

$$q_1(\alpha) = g(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}[f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \alpha)] = f(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$$

Por esse motivo que, não há perda de generalidade em supor que uma forma quadrática  $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$  é oriunda de uma forma bilinear simétrica ou não.

Daqui para a frente, e por opção, quando nos referirmos a formas quadráticas, entenderemos que as mesmas sejam provenientes de uma forma bilinear simétrica.

Temos uma vantagem ao fazer isso. A forma bilinear  $f$  simétrica associada a uma dada forma quadrática  $q$  sobre um espaço vetorial  $V$  e pode ser obtida através da chamada **forma polar de  $f$** , facilmente dedutível, dada por

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)].$$

Finalizamos a parte referente à Álgebra Linear em nosso trabalho com nosso principal resultado, a saber:

**Teorema 2.14.** *Seja  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$  munido de um produto interno; Nestas condições  $B_s(V)$  é isomorfo ao subespaço  $L_a(V) := \{T \in L(V) \mid T \text{ é um operador auto adjunto sobre } V\}$  de  $L(V)$ .*

*Demonstração.* Consideremos a função  $\Phi : L_a(V) \longrightarrow B_s(V)$  definida por

$$\Phi(T)(\alpha, \beta) = \langle T(\alpha), \beta \rangle,$$

em que  $\alpha, \beta$  são elementos quaisquer de  $V$ .

Afirmamos que  $\Phi$  é um isomorfismo.

Com efeito, sejam  $T$  e  $S$  dois elementos quaisquer de  $L_a(V)$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Nestas condições temos  $\Phi(cT + S)(\alpha, \beta) = \langle (cT + S)(\alpha), \beta \rangle = c \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle S\alpha, \beta \rangle = c\Phi(T)(\alpha, \beta) + \Phi(S)(\alpha, \beta) = [c\Phi(T) + \Phi(S)](\alpha, \beta)$ , em que  $\alpha, \beta$  são elementos quaisquer de  $V$ .

Portanto

$$\Phi(cT + S) = c\Phi(T) + \Phi(S).$$

Isto mostra que a  $\Phi$  é uma transformação linear.

Afirmamos que  $\Phi$  é injetora. Provemos que  $\ker(\Phi) = \{0\}$ .

Com efeito, seja  $T \in L_a(V)$  tal que  $\Phi(T) = 0$ . Isto equivale a dizer que:  $\langle T(\alpha), \beta \rangle = 0$ , para quaisquer que sejam  $\alpha$  e  $\beta$  em  $V$ . Tomemos  $\beta = T(\alpha)$ . Logo  $T(\alpha) = 0$  para qualquer que seja  $\alpha \in V$  e isto significa que  $T = 0$ .

Afirmamos que  $\Phi$  é sobrejetora. Seja  $f \in B_s(V)$ , pelo teorema 2.13, existe um único  $T \in L_a(V)$  tal que  $f(\alpha, \beta) = \langle T(\alpha), \beta \rangle$ .

Para terminarmos resta mostrar que  $T$  é autoadjunto se, e somente se,  $\Phi(T)$  é simétrica. Com efeito

$$\Phi(T)(\alpha, \beta) = \langle T(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, T^*(\beta) \rangle = \langle T^*(\beta), \alpha \rangle,$$

quaiquer que sejam  $\alpha$  e  $\beta$  em  $V$ .

Portanto se  $T = T^*$  então teremos

$$\Phi(T)(\alpha, \beta) = \langle T^*(\beta), \alpha \rangle = \langle T(\beta), \alpha \rangle = \Phi(T)(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

E assim concluímos que  $\Phi(T)$  é simétrica.

Por outro lado se  $\Phi(T)$  é simétrica,

$$\langle T^*(\beta), \alpha \rangle = \Phi(T)(\alpha, \beta) = \Phi(T)(\beta, \alpha) = \langle T(\beta), \alpha \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

Isto nos diz que  $T = T^*$ , ou seja,  $T$  é autoadjunto. □

Encerramos dizendo que o teorema (2.12) e este teorema (2.14) acima garantem que se  $V$  é um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita  $n \geq 1$  munido de um produto interno e se  $f$  é uma forma bilinear e simétrica, então existe uma base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que:  $A = [f]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$  é uma matriz diagonal.

Essa base é constituída de autovetores do único operador linear  $T$  [da matriz  $A$ ] sobre  $V$  associado a  $f$  e os elementos da diagonal da matriz  $A$  são os autovalores do operador  $T$  [da matriz  $A$ ].

# 3

## Aplicação - Cônicas em $\mathbb{R}^2$

Agora faremos um sucinto estudo sobre Cônicas tendo como objetivo principal a descrição de um procedimento para o reconhecimento delas quando não estão em sua forma canônica. Esse processo ou procedimento se fundamenta no estudo direcionado sobre alguns aspectos da Álgebra Linear.

Iniciamos dando uma definição algébrica do que seja uma cônica.

**Definição 3.1.** *Denominamos de cônica o subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$ , solução de uma equação polinomial completa e de grau 2 em duas variáveis, isto é, conjunto solução de uma equação da forma*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.1)$$

em que  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ . Isso é uma forma compacta de dizer que algum "monômio" de grau 2 dessa equação tem coeficiente não nulo.

Dependendo dos valores dos coeficientes dessa equação o seu conjunto solução pode ser: uma elipse, um ponto, conjunto vazio, uma circunferência, uma hipérbole, duas retas concorrentes, uma parábola, duas retas paralelas, ou ainda, uma reta.

As figuras geométricas [curvas] mais relevantes são elipse, circunferência, hipérbole e parábola. Todos os outros tipos de figuras serão consideradas como degenerações de uma dessas figuras principais.

Faremos uma descrição geométrica de cada uma dessas curvas e as apresentaremos numa

forma considerada a mais simples e chamada **forma canônica da cônica**, devido a uma posição especial que a mesma pode assumir num sistema cartesiano bidimensional, e por consequência o formato mais simples das equações que as descrevem. As equações dessas curvas nessa forma canônica permitem uma identificação mais natural com as mesmas devido à simplicidade da forma da equação, mas, em situações mais gerais o reconhecimento de tais curvas exigirá procedimentos mais trabalhosos e alguns destes procedimentos serão obtidos via aplicações de resultados de Álgebra Linear que aqui descrevemos.

Primeiramente vamos estudar o que seja uma cônica e descrevê-la quando a mesma estiver numa posição privilegiada - qual seja - centro (caso a mesma tenha) num ponto qualquer do plano e retas focal e não focal ou reta focal e reta diretriz paralelas aos eixos coordenados.

Ainda, gostaríamos de deixar enfatizado que a palavra **plano**, a qual usaremos livremente, refere-se aqui ao espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$  munido de suas clássicas operações de adição e multiplicação escalar, além de assumirmos também que sobre esse espaço estamos considerando o produto interno canônico.

### 3.1 Elipse

**Definição 3.2.** *Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos quaisquer do plano. Uma elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cuja soma das distâncias de  $P$  a  $F_1$  e de  $P$  a  $F_2$  é uma constante positiva que denotaremos por  $2a$ , estritamente maior que a distâncias entre os focos e que denotamos por  $2c$ .*

Quando nos referimos a uma elipse, alguns elementos pertinentes a ela recebem nomes específicos. Vamos à descrição de tal **nomenclatura**.

1. Os pontos já mencionados  $F_1$  e  $F_2$  são chamados **focos** da elipse.
2. A reta  $l$  que contém os focos é denominada **reta focal**.
3. A intersecção da elipse com a **reta focal**  $l$  consiste, exatamente, de dois pontos,  $A_1$  e  $A_2$ , chamados **vértices sobre a reta focal**.

4. O segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$  é denominado o **eixo focal**.
5. O **centro**  $C$  da elipse é o ponto médio do **eixo focal**  $A_1A_2$ .
6. A **reta não focal** é a reta  $l'$  perpendicular a  $l$  que passa pelo centro  $C$ .
7. A intersecção da elipse com a **reta não focal**  $l'$  consiste de dois pontos,  $B_1$  e  $B_2$ , chamados **vértices da elipse sobre a reta não focal**.
8. O segmento  $B_1B_2$  é o **eixo não focal** da elipse, de comprimento  $2b$ , em que  $b^2 = a^2 - c^2$ .
9. O número  $e = \frac{c}{a}$  é denominado **excentricidade** da elipse. Observe que, pela definição de excentricidade,  $0 \leq e < 1$ .

## 3.2 Forma canônica da elipse

O que denominamos **forma canônica da elipse** é a descrição algébrica [via uma equação] da elipse em posição “canônica”, isto é, que seu centro esteja na origem do sistema cartesiano [sistema de eixos ortogonais] e que suas retas focais e não focais coincidam com os eixos coordenados. Portanto teremos duas situações.

### 3.2.1 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, podemos considerar  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  em que  $c \geq 0$ . Observe que da definição de elipse temos que  $0 \leq c < a$ . Vamos indicar por  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Observe que necessariamente  $0 < b < a$ , se  $c > 0$ .

Logo  $P = (x, y) \in \mathcal{E}$  se, e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Isso é equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essa equação é denominada de forma canônica da elipse [centrada na origem e de raio focal coincidente com o eixo OX] se  $a > b$ , lembrando que  $a^2$  é o denominador de  $x^2$  enquanto que  $b^2$  é o denominador de  $y^2$ . Não estamos considerando o caso  $a = b$ , isto é,  $c = 0$ . Neste caso temos uma circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $a$ .

### 3.2.2 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, podemos considerar  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ . Analogamente, da definição de elipse temos que  $0 < c < a$ . Vamos indicar por:  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Observe que necessariamente  $0 < b < a$ , se  $c > 0$ .

Logo  $P = (x, y) \in \mathcal{E}$  se, e somente se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Isso é equivalente a

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a.$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Essa equação é denominada de forma canônica da elipse [centrada na origem e de raio

focal coincidente com o eixo OY se  $a > b$ , lembrando que  $a^2$  é o denominador de  $y^2$  enquanto que  $b^2$  é o denominador de  $x^2$ .

### 3.2.3 Esboço da Elipse

Agora vamos esboçar uma elipse  $\mathcal{E}$  numa situação especial, ou seja, aquela cujo centro da mesma está na origem e a reta focal coincide com o eixo OX. Como vimos, sua expressão analítica é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Explicitando  $y$  em função de  $x$  obtemos:  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ .

É fácil ver que se  $P = (x, y) \in \mathcal{E}$ , então todos os pontos:  $P = (-x, y)$ ,  $P = (x, -y)$ ,  $P = (-x, -y)$  também pertencem à elipse  $\mathcal{E}$ . Portanto basta plotarmos a parte da elipse, gráfico da função:  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  que teremos a curva toda devido às suas simetrias em relação às retas focal, e não focal.

Portanto seguindo as aplicações de derivadas temos:

1.  $f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ . Em que  $f'(x) < 0$  para  $0 < x < a$ . Portanto o gráfico de nossa função é estritamente decrescente no intervalo  $[0, a]$ ;
2.  $f'(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \infty$ ;
3.  $f''(x) = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ . Em que  $f''(x) < 0$  para  $0 < x < a$ . Portanto o gráfico de nossa função tem concavidade voltada para baixo no intervalo  $[0, a]$ .

Esses elementos são suficientes para descrevermos a nossa elipse, ou seja,

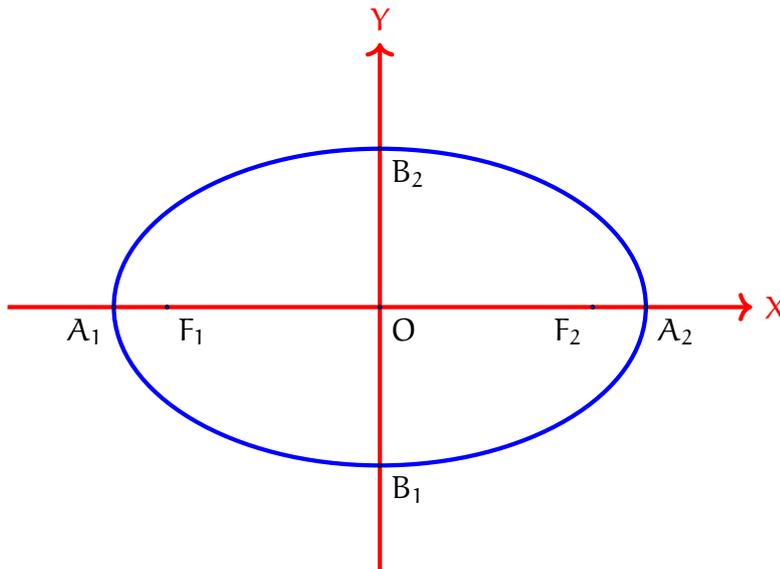


Figura 3.1 Elipse com reta focal sobre OX e centro na origem

Podemos repetir o mesmo processo para o caso em que o centro da elipse  $\mathcal{E}$  está na origem e o eixo focal está sobre o eixo OY, ou seja, sua forma canônica é

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

em que novamente  $a > b$ .

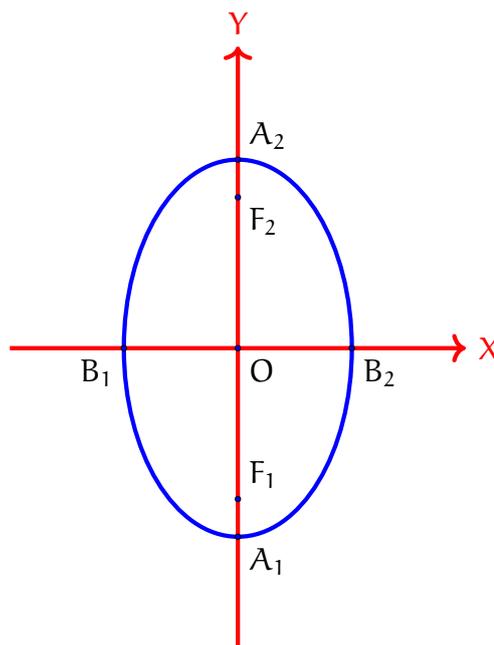


Figura 3.2 Elipse com reta focal sobre OY e centro na origem

### 3.2.4 Translação de eixos coordenados

Consideremos: o sistema cartesiano  $OXY$  de eixos ortogonais,  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$ , o sistema cartesiano  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  de eixos ortogonais tal que os eixos  $\bar{O}\bar{X}$  e  $\bar{O}\bar{Y}$  sejam paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$  e tenham os mesmos sentidos.

No sistema  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  vamos designar as coordenadas de um ponto  $P$  pela notação  $P = P(\bar{x}, \bar{y})$  e por  $P = P(x, y)$  as coordenadas do mesmo ponto mas no sistema cartesiano  $OXY$ .

Seja  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Nestas condições podemos escrever

$$\vec{OP} = x \cdot e_1 + y e_2$$

$$\vec{\bar{O}P} = \bar{x} \cdot e_1 + \bar{y} e_2$$

$$\vec{O\bar{O}} = x_0 \cdot e_1 + y_0 e_2$$

Uma vez que

$$\vec{OP} = \vec{O\bar{O}} + \vec{\bar{O}P},$$

chegamos a

$$x \cdot e_1 + y e_2 = (x_0 \cdot e_1 + y_0 e_2) + (\bar{x} \cdot e_1 + \bar{y} e_2) = (\bar{x} + x_0) \cdot e_1 + (\bar{y} + y_0) e_2.$$

Desta forma podemos dizer que a relação entre as coordenadas do ponto  $P$  nos dois sistemas  $OXY$  e  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$  é

$$x = \bar{x} + x_0;$$

$$y = \bar{y} + y_0.$$

### 3.2.5 Forma canônica da elipse transladada

Na subsecção anterior falamos sobre translação de eixos. Agora veremos como se expressa a equação de uma elipse que tenha centro em um ponto  $C = (x_0, y_0)$  do sistema  $OXY$  e retas

focal e não focal paralelas aos eixos coordenados  $OX$  e  $OY$ .

Portanto consideraremos o sistema cartesiano  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$  em que  $C = \overline{O} = (x_0, y_0)$ . Teremos, como fizemos anteriormente, duas situações.

### 3.2.6 Elipse centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$

Nestas condições temos:

1. O centro da elipse é  $C = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{C} = (0, 0)$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$
2. A reta focal  $l : y = y_0$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{l} : \overline{y} = 0$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$
3. Os focos da elipse são:  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{F}_1 = (-c, 0)$  e  $\overline{F}_2 = (c, 0)$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$

Portanto a equação canônica de nossa elipse no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$  é dada por

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1,$$

em que  $a \geq b$ .

Portanto em função da relação das coordenadas que vimos anteriormente, a **forma canônica da equação da elipse com centro em  $C = (x_0, y_0)$**  será

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

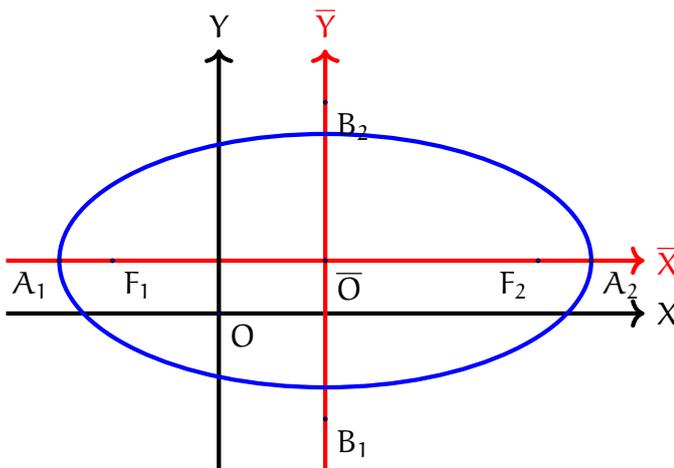


Figura 3.3 Elipse com reta focal sobre  $\overline{OX}$  e centro em  $\overline{O}$ .

De forma inteiramente análoga obteremos:

### 3.2.7 Elipse centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$

Nessas condições temos:

1. O centro da elipse é  $C = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{C} = (0, 0)$  no sistema  $\overline{OX}\overline{Y}$
2. A reta focal  $l : x = x_0$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{l} : \overline{x} = 0$  no sistema  $\overline{OX}\overline{Y}$
3. Os focos da elipse são:  $F_1 = (x_0, y_0 - c)$  e  $F_2 = (x_0, y_0 + c)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{F}_1 = (0, -c)$  e  $\overline{F}_2 = (0, c)$  no sistema  $\overline{OX}\overline{Y}$

Portanto a equação canônica de nossa elipse no sistema  $\overline{OX}\overline{Y}$  é dada por

$$\frac{\overline{y}^2}{a^2} + \frac{\overline{x}^2}{b^2} = 1,$$

em que  $a \geq b$ .

Portanto em função da relação das coordenadas que vimos anteriormente, a **forma canô-**

nica da equação da elipse com centro em  $C = (x_0, y_0)$  será

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

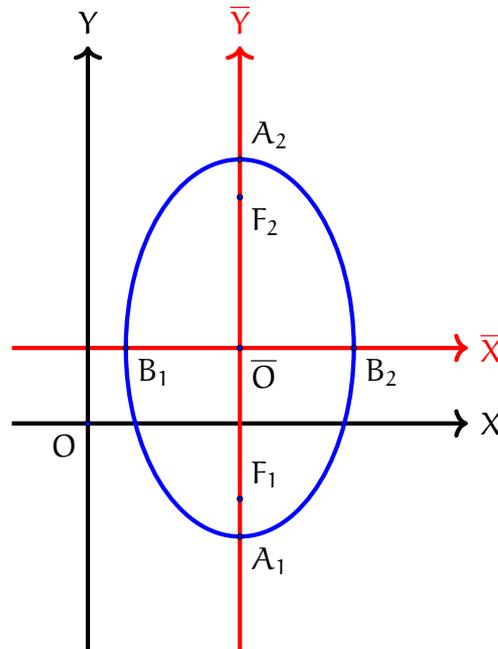


Figura 3.4 Elipse com reta focal sobre  $\overline{O\bar{Y}}$  e centro em  $\overline{O}$

### 3.2.8 Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C > 0$

Consideremos a equação de uma elipse  $\mathcal{E}$  centrada em um ponto  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela a um dos eixos coordenados no nosso tradicional sistema cartesiano de eixos ortogonais  $OXY$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Se nós expandirmos os termos dessa equação chegaremos na seguinte forma equivalente

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Essa equação pode ser identificada com a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que  $A = b^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = a^2$ ,  $D = -2b^2x_0$ ,  $E = -2a^2y_0$  e  $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ .

Isso nos permite observar que  $B = 0$  e  $A.C > 0$ . Baseado nessas observações, podemos inferir e demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.** *Se os coeficientes  $A$  e  $C$  da seguinte equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.2)$$

*têm o mesmo sinal, isto é,  $AC > 0$ , então o conjunto solução dessa equação será:*

1. *Uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
2. *Um ponto.*
3. *O conjunto vazio*

*Demonstração.* Inicialmente dividamos a equação 3.2 por  $AC$ . Assim obteremos

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0.$$

Desenvolvendo obtemos a equação equivalente

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} + \frac{[4AC^2F - C^2D^2 - ACE^2]}{4A^2C^3} = 0.$$

Portanto

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{S}{4A^2C^3} \quad (3.3)$$

em que  $S = [ACE^2 + C^2D^2 - 4AC^2F]$ .

Finalmente, se  $S \neq 0$ , podemos escrever a equação (3.3) na forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{S}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{S}{4AC^3}} = 1 \quad (3.4)$$

E assim podemos concluir que:

1. Se  $S = 0$ , então a equação (3.3) representa um ponto.
2. Se  $S > 0$ , então a equação (3.4) representa uma elipse centrada em  $C = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ .
3. Se  $S < 0$ , então a equação (3.4) representa o conjunto vazio.

□

Os casos em que a equação do segundo grau (3.3) representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipse**.

### 3.3 Hipérbole

Em segundo lugar vamos estudar o que seja uma hipérbole e descrevê-la, quando a mesma estiver numa posição privilegiada - qual seja - centro num ponto qualquer do plano e retas focal e não focal paralelas aos eixos coordenados.

**Definição 3.3.** *Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos do plano. Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cujo módulo da diferença das distâncias de  $P$  a  $F_1$  e de  $P$  a  $F_2$  seja uma constante positiva que denotaremos por  $2a$ , estritamente menor que a distâncias entre os focos e que denotamos por  $2c$ . Neste caso  $c > 0$ .*

Quando nos referimos a uma hipérbole, alguns elementos pertinentes à mesma recebem nomes específicos. Vamos à descrição de tal **nomenclatura**.

1. os pontos já mencionados  $F_1$  e  $F_2$  são chamados **focos** da hipérbole.
2. A reta  $l$  que contém os focos é denominada **reta focal**.
3. A intersecção da hipérbole com a **reta focal**  $l$  consiste, exatamente, de dois pontos,  $A_1$  e  $A_2$ , chamados **vértices [reais] da hipérbole**.
4. O segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$  é o chamado **eixo focal da hipérbole**.

5. O centro  $C$  da hipérbole é o ponto médio do eixo focal  $A_1A_2$ .
6. A reta não focal é a reta  $l'$  perpendicular a  $l$  que passa pelo centro  $C$ .
7. O segmento  $B_1B_2$  contido na reta não focal  $l'$  e que tem  $C$  como ponto médio e comprimento  $2b$ , em que  $b^2 = c^2 - a^2$ , é denominado eixo não focal da hipérbole e  $B_1$  e  $B_2$  são chamados vértices [imaginários] da hipérbole.
8. O número  $e = \frac{c}{a}$  é denominado excentricidade da hipérbole. Observe que, por definição,  $e > 1$ .
9. O retângulo de base da hipérbole é o retângulo de lados paralelos às retas focal e não focal e cujos lados têm  $A_1, A_2, B_1, B_2$  como pontos médios.
10. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são chamadas de assíntotas da hipérbole  $\mathcal{H}$ .

### 3.4 Forma canônica da hipérbole

O que denominamos **forma canônica da hipérbole** é a descrição algébrica [via uma equação] da hipérbole em posição “canônica” isto é, seu centro está na origem do sistema cartesiano [sistema de eixos ortogonais] e suas retas focal e não focal coincidem com os eixos coordenados. Portanto teremos duas situações.

#### 3.4.1 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, podemos considerar  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ ,  $c > 0$ . Observe que da definição de hipérbole temos que  $0 < a < c$ . Vamos indicar por:  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

Logo  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$  se, e somente se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Isso é equivalente a

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essa equação é denominada de forma canônica da hipérbole [centrada na origem e de reta focal coincidente com o eixo OX].

### 3.4.2 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, podemos considerar  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ ,  $c > 0$ . Analogamente, da definição de hipérbole temos que  $0 < a < c$ . Vamos indicar por:  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

Logo  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$  se, e somente se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Isso é equivalente a

$$|\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}| = 2a.$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Essa equação é denominada de forma canônica da hipérbole [centrada na origem e de reta focal coincidente com o eixo OY].

### 3.4.3 Esboço da Hipérbole

Agora vamos esboçar uma hipérbole  $\mathcal{E}$  numa situação especial, ou seja, aquela cujo centro está na origem e a reta focal coincide com o eixo OX. Como vimos, sua expressão analítica é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Explicitando  $y$  em função de  $x$  obtemos  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ .

É fácil ver que se  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ , então todos os pontos:  $P = (-x, y)$ ,  $P = (x, -y)$ ,  $P = (-x, -y)$  também pertencem à hipérbole  $\mathcal{H}$ . Portanto basta plotarmos a parte da elipse, gráfico da função:  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  que teremos a curva toda devido às suas simetrias em relação às retas focal, e não focal.

Portanto seguindo as aplicações de derivadas temos:

1.  $f'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$ . Em que  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x$ ,  $0 < x < a$ .. Portanto o gráfico de nossa função é estritamente decrescente no intervalo  $[a, \infty)$ .

2.  $f'(a) = \infty$ .

3.  $f''(x) = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$ . Em que  $f''(x) < 0$ ,  $\forall x$ ,  $x > a$ . Portanto o gráfico de nossa função tem concavidade voltada para baixo no intervalo  $[a, \infty)$ .

Esses elementos são suficientes para descrevermos a nossa hipérbole, ou seja,

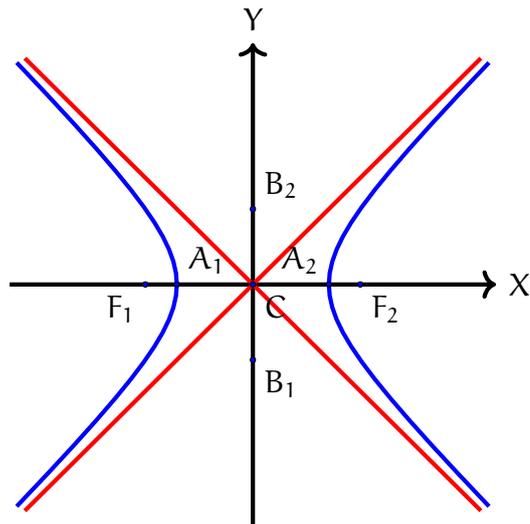


Figura 3.5 Hipérbole com reta focal sobre OX e centro na origem

Podemos repetir o mesmo processo para o caso em que o centro da hipérbole  $\mathcal{H}$  está na origem e o eixo focal está sobre o eixo OY, ou seja, sua forma canônica é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

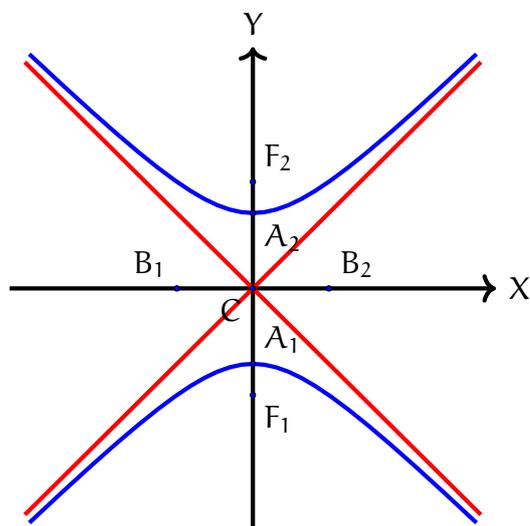


Figura 3.6 Hipérbole com reta focal sobre OY e centro na origem

### 3.4.4 Forma canônica da hipérbole transladada

Já falamos anteriormente sobre translação de eixos. Agora veremos como se expressa a equação de uma hipérbole que tenha centro em um ponto  $C = (x_0, y_0)$  do sistema OXY e

reta focal e não focal paralela aos eixos coordenados  $OX$  e  $OY$ .

Portanto consideraremos o sistema cartesiano  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$  em que  $C = \overline{O} = (x_0, y_0)$ . Teremos, como fizemos anteriormente, duas situações.

### 3.4.5 Hipérbole centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$

Nessas condições temos:

1. O centro da hipérbole é  $C = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{C} = (0, 0)$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$
2. A reta focal  $l : y = y_0$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{l} : \overline{y} = 0$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$
3. Os focos da hipérbole são:  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\overline{F}_1 = (-c, 0)$  e  $\overline{F}_2 = (c, 0)$  no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$

Logo a equação canônica de nossa hipérbole no sistema  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$  é dada por

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1.$$

Portanto em função da relação das coordenadas que vimos anteriormente, a **forma canônica da equação da hipérbole com centro em  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal sobre  $\overline{O}\overline{X}$**  será

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

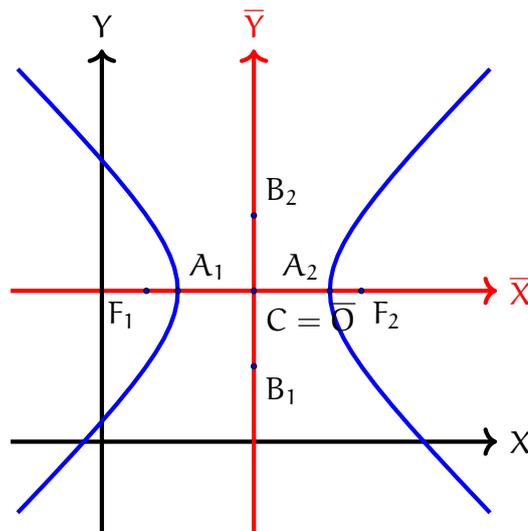


Figura 3.7 Hipérbole com reta focal sobre  $\overline{O\bar{X}}$  e centro em  $\overline{O}$

De forma inteiramente análoga obtemos:

### 3.4.6 Hipérbole centrada em $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$

Nessas condições temos

1. O centro da hipérbole é  $C = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\bar{C} = (0, 0)$  no sistema  $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$
2. A reta focal  $l : x = x_0$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\bar{l} : \bar{x} = 0$  no sistema  $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$
3. Os focos da hipérbole são:  $F_1 = (x_0, y_0 - c)$  e  $F_2 = (x_0, y_0 + c)$  no sistema  $OXY$ , mas,  $\bar{F}_1 = (0, -c)$  e  $\bar{F}_2 = (0, c)$  no sistema  $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$

Logo a equação canônica de nossa hipérbole no sistema  $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$  é dada por

$$\frac{\bar{y}^2}{a^2} - \frac{\bar{x}^2}{b^2} = 1.$$

Portanto em função da relação das coordenadas que vimos anteriormente, a **forma canônica da equação da hipérbole com centro em  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal sobre  $\overline{O\bar{Y}}$**

será

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

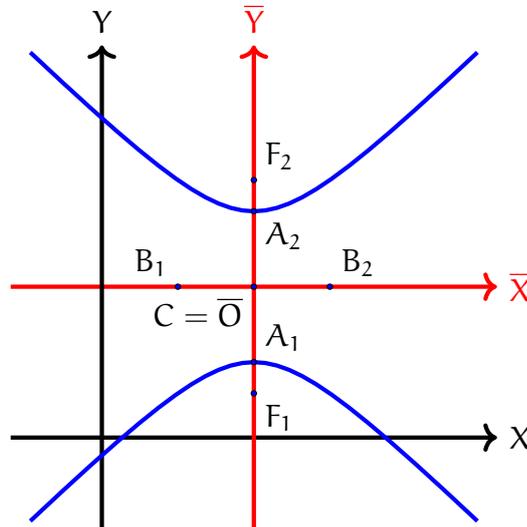


Figura 3.8 Hipérbole com reta focal sobre  $\overline{O\bar{Y}}$  e centro em  $\overline{O}$

### 3.4.7 Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C < 0$

Consideremos a equação de uma hipérbole  $\mathcal{H}$  centrada em um ponto  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela a um dos eixos coordenados no nosso tradicional sistema cartesiano de eixos ortogonais  $OXY$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Se nós expandirmos os termos dessa equação chegaremos na forma

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Essa equação pode ser identificada com a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que  $A = b^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = -a^2$ ,  $D = -2b^2x_0$ ,  $E = 2a^2y_0$  e  $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$ .

Isso nos permite observar que  $B = 0$  e  $A.C < 0$ .

Conclusões idênticas se obtêm quando a hipérbole tem eixo focal paralelo ao eixo OY.

Baseado nestas observações podemos inferir e demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.** *Se os coeficientes A e C equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.5)$$

*têm sinais contrários, isto é,  $AC < 0$ , então o conjunto solução dessa equação será:*

1. *Uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
2. *Um par de retas concorrentes.*

*Demonstração.* Não há perda de generalidade em supor  $A > 0$  e  $C < 0$ . Nestas condições temos

$$\begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \Leftrightarrow \\ (Ax^2 + Dx) - (-Cy^2 - Ey) &= -F \Leftrightarrow \\ A\left(x^2 + 2 \cdot \frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) - (-C)\left(y^2 + 2 \cdot \frac{E}{2C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) &= -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \Leftrightarrow \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} \Leftrightarrow \\ \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}. \end{aligned}$$

E assim podemos concluir que, se  $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$ , então o conjunto solução da equação (3.5) é uma hipérbole;

Se  $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ , então o conjunto solução da equação (3.5) são duas retas concorrentes assim definidas:

$$y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{\frac{-A}{C} \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}.$$



Essa situação em que a equação do segundo grau (3.5) representa um par de retas concorrentes é denominado **caso degenerado da hipérbole**.

## 3.5 Parábola

**Definição 3.4.** *Sejam  $\mathcal{L}$  uma reta,  $F$  um ponto não pertencente a  $\mathcal{L}$ . Denominamos de **parábola de foco  $F$  e reta diretriz  $\mathcal{L}$**  ao conjunto de todos os pontos  $P$  do plano tais que as distâncias de  $P$  até  $F$  e de  $P$  até a reta  $\mathcal{L}$  sejam iguais. Escrito de outra forma temos*

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}.$$

Quando nos referimos à uma parábola, alguns elementos pertinentes a ela recebem nomes específicos. Vamos à descrição de tal **nomenclatura**.

1. O ponto  $F$  mencionado na definição acima é chamado **foco da parábola**.
2. A reta  $\mathcal{L}$  mencionada na definição acima é chamada **reta diretriz da parábola**.
3. A reta  $l$  que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz  $\mathcal{L}$  é denominada **reta focal da parábola**.
4. O ponto de intersecção  $V$  da parábola com a **reta focal  $l$**  é denominado **vértice da parábola**.
5. O número  $2p = d(F, \mathcal{L})$  é chamado **parâmetro da parábola**.

## 3.6 Forma canônica da parábola

O que denominamos **forma canônica da parábola** é a descrição algébrica [via uma equação] da parábola em posição “canônica” isto é, que seu **vértice** esteja na origem do

sistema cartesiano [sistema de eixos ortogonais] e que sua reta focal coincida com um dos eixos coordenados. Portanto teremos, inicialmente, duas situações.

### 3.6.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Esse caso se divide em dois outros casos:

### 3.6.2 Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco à direita da diretriz

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, temos que  $V = (0, 0)$ ,  $F = (p, 0)$  e reta diretriz  $\mathcal{L} : x = -p$  uma vez que  $2p = d(F, \mathcal{L})$  é o parâmetro da parábola.

Nessas condições temos

$$P = P(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}).$$

Isso equivale dizer que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4.p.x.$$

Essa equação é denominada de **forma canônica da parábola** [ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco F à direita da reta diretriz  $\mathcal{L}$  ].

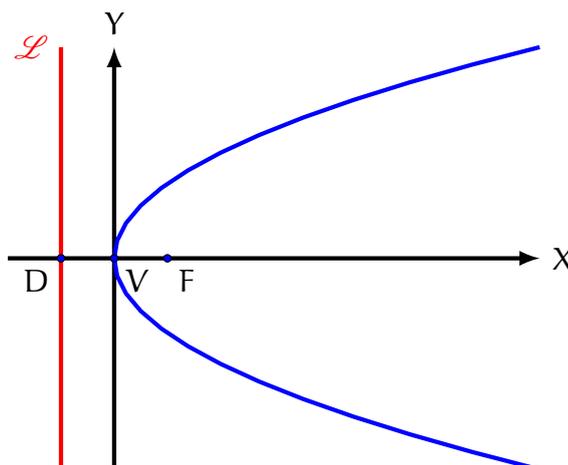


Figura 3.9 Parábola com reta focal sobre OX, vértice na origem e foco à direita da diretriz

De forma inteiramente análoga temos:

### 3.6.3 Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco à esquerda da diretriz

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, temos que  $V = (0,0)$ ,  $F = (-p,0)$  e reta diretriz  $\mathcal{L} : x = p$  uma vez que  $2p = d(F, \mathcal{L})$  é o parâmetro da parábola.

Nessas condições temos

$$P = P(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}).$$

Isso equivale dizer que

$$\sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p| \Leftrightarrow (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \Leftrightarrow y^2 = -4.p.x.$$

Essa equação é denominada de **forma canônica da parábola** [ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco F à esquerda da reta diretriz  $\mathcal{L}$  ].

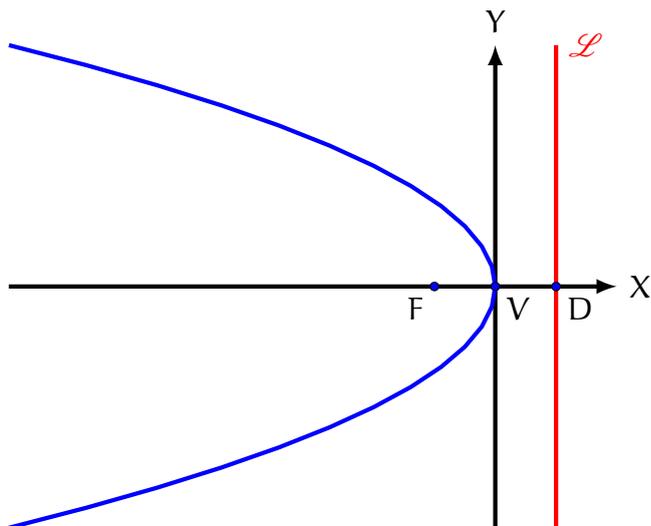


Figura 3.10 Parábola com reta focal sobre  $OX$ , vértice na origem e foco à esquerda da diretriz

Segunda situação:

### 3.6.4 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

Esse caso se divide em dois outros casos:

### 3.6.5 Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo $OY$ e foco acima da diretriz

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, temos que  $V = (0, 0)$ ,  $F = (0, p)$  e reta diretriz  $\mathcal{L} : y = -p$  uma vez que  $2p = d(F, \mathcal{L})$  é o parâmetro da parábola.

Nessas condições temos

$$P = P(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}).$$

Isso equivale dizer que

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot p \cdot y.$$

Essa equação é denominada de **forma canônica da parábola** [ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco F acima da reta diretriz  $\mathcal{L}$  ].

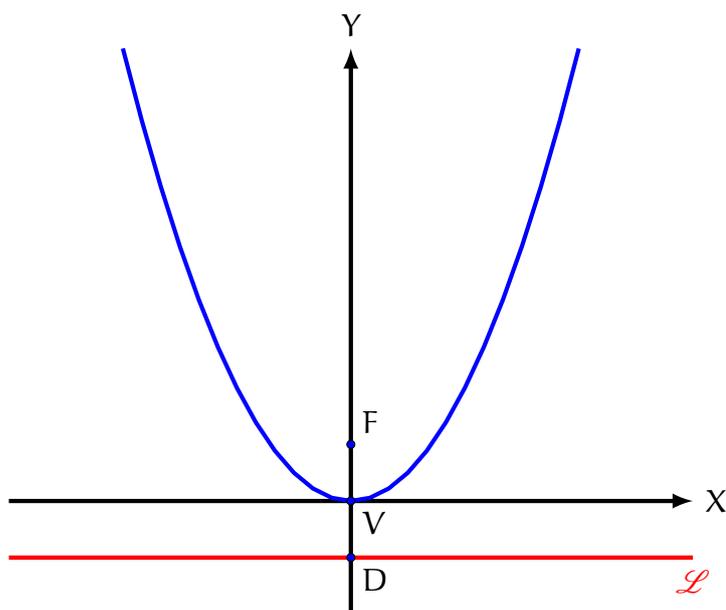


Figura 3.11 Parábola com reta focal sobre OY, vértice na origem e foco acima da diretriz

De forma inteiramente análoga temos:

### 3.6.6 Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco abaixo da diretriz

Sob as hipóteses que o subtítulo descreve, temos que  $V = (0,0)$ ,  $F = (0,-p)$  e reta diretriz  $\mathcal{L} : y = p$  uma vez que  $2p = d(F, \mathcal{L})$  é o parâmetro da parábola.

Nessas condições temos

$$P = P(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}).$$

Isso equivale dizer que

$$\sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \Leftrightarrow (x + p)^2 + y^2 = (x - p)^2 \Leftrightarrow x^2 = -4.p.y.$$

Essa equação é denominada de **forma canônica da parábola** [ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco F abaixo da reta diretriz  $\mathcal{L}$  ].

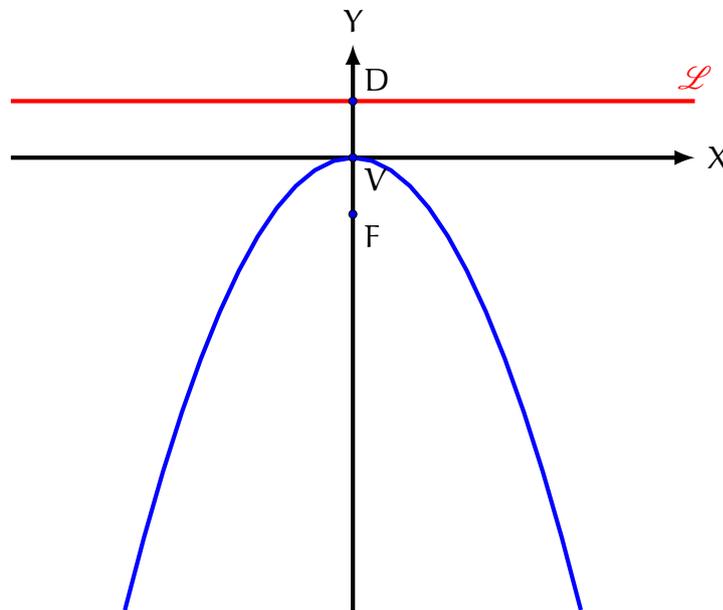


Figura 3.12 Parábola com reta focal sobre o eixo OY, vértice na origem e foco abaixo da diretriz

### 3.6.7 Parábola com Vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX

Obviamente estamos pensando em dois sistemas cartesianos ortogonais e de eixos paralelos. Temos duas situações diferentes, onde cada uma admite dois casos diferentes.

### 3.6.8 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$ e foco $F$ à direita da diretriz

Obviamente estamos imaginando um sistema cartesiano ortogonal  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ . Neste sistema a equação de nossa parábola  $\mathcal{P}$  é dada por:  $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$ , seu vértice  $\overline{V} = (0, 0)$ , foco  $\overline{F} = (p, 0)$  e reta diretriz  $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = -p$ .

Uma vez que

$$x = \overline{x} + x_0$$

e

$$y = \overline{y} + y_0,$$

a equação da parábola  $\mathcal{P}$  torna-se

$$(y - y_0)^2 = 4.p.(x - x_0).$$

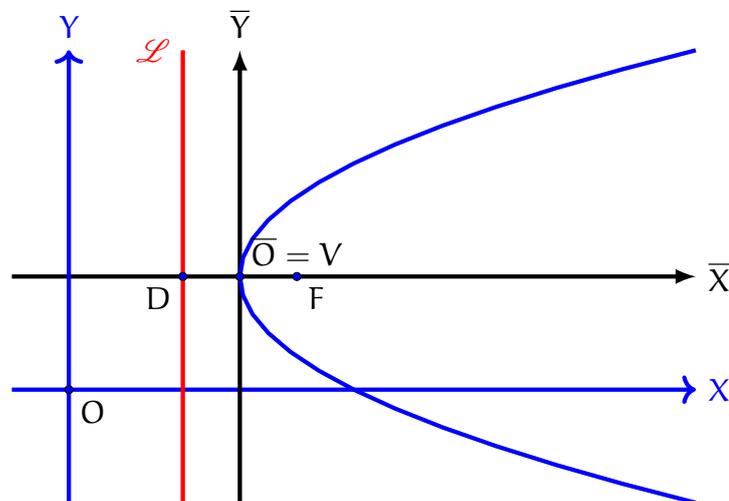


Figura 3.13 Parábola com reta focal sobre  $\overline{O}\overline{X}$ , vértice em  $\overline{O}$  e foco à direita da diretriz

### 3.6.9 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$ e foco $F$ à esquerda da diretriz

Obviamente estamos imaginando um sistema cartesiano ortogonal  $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ . Neste sistema a equação de nossa parábola  $\mathcal{P}$  é dada por:  $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$ , seu vértice  $\overline{V} = (0, 0)$ , foco

$\bar{F} = (-p, 0)$  e reta diretriz  $\bar{\mathcal{L}} : \bar{x} = p$ .

Uma vez que

$$x = \bar{x} + x_0$$

e

$$y = \bar{y} + y_0.$$

A equação da parábola  $\mathcal{P}$  torna-se

$$(y - y_0)^2 = 4 \cdot p \cdot (x - x_0).$$

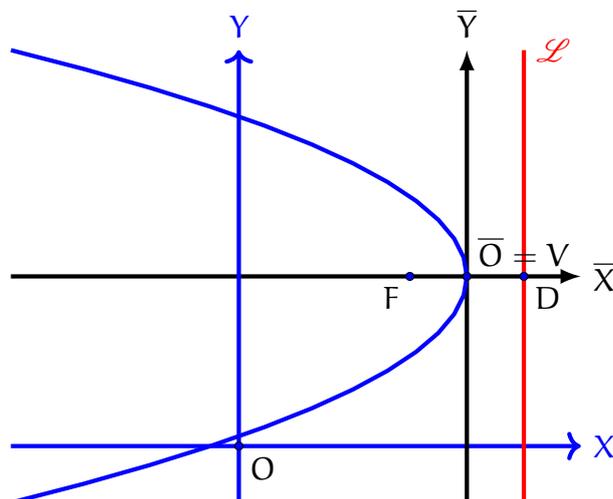


Figura 3.14 Parábola com reta focal sobre  $\bar{O}\bar{X}$ , vértice em  $\bar{O}$  e foco à esquerda da diretriz

### 3.6.10 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$ e foco $F$ acima da diretriz

Obviamente estamos imaginando um sistema cartesiano ortogonal  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ . Neste sistema a equação de nossa parábola  $\mathcal{P}$  é dada por:  $\bar{x}^2 = 4p\bar{y}$ , seu vértice  $\bar{V} = (0, 0)$ , foco  $\bar{F} = (0, p)$  e reta diretriz  $\bar{\mathcal{L}} : \bar{y} = -p$ .

Uma vez que

$$x = \bar{x} + x_0$$

e

$$y = \bar{y} + y_0,$$

a equação da parábola  $\mathcal{P}$  torna-se

$$(x - x_0)^2 = 4 \cdot p \cdot (y - y_0).$$

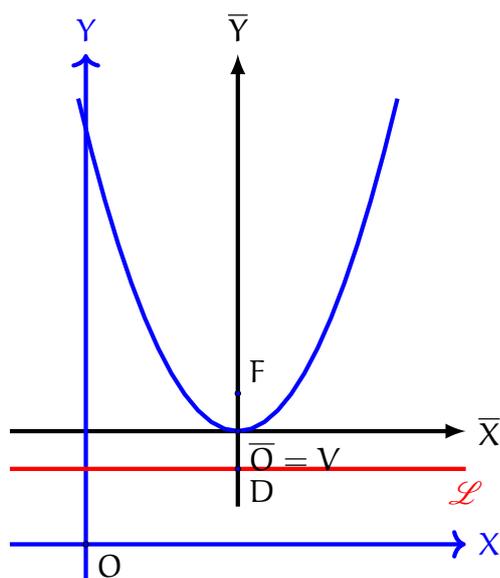


Figura 3.15 Parábola com reta focal sobre  $\bar{O}\bar{Y}$ , vértice em  $\bar{O}$  e foco acima da diretriz

### 3.6.11 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$ e foco $F$ abaixo da diretriz

Obviamente estamos imaginando um sistema cartesiano ortogonal  $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ . Neste sistema a equação de nossa parábola  $\mathcal{P}$  é dada por:  $\bar{x}^2 = -4p\bar{y}$ , seu vértice  $\bar{V} = (0, 0)$ , foco  $\bar{F} = (0, -p)$  e reta diretriz  $\bar{\mathcal{L}} : \bar{y} = -p$ .

Uma vez que

$$x = \bar{x} + x_0$$

e

$$y = \bar{y} + y_0,$$

a equação da parábola  $\mathcal{P}$  torna-se

$$(x - x_0)^2 = -4.p.(y - y_0).$$

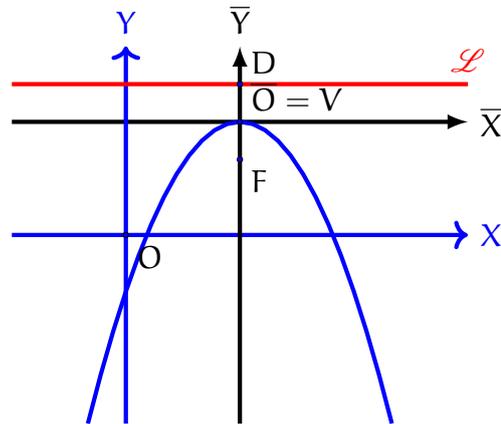


Figura 3.16 Parábola com reta focal sobre o eixo  $\overline{O\bar{Y}}$ , vértice em  $\bar{O}$  e foco abaixo da diretriz

### 3.6.12 Equação geral do segundo grau em que $B = 0$ e $A.C = 0$

Consideremos a equação da parábola  $\mathcal{P}$  centrada em um ponto  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$  no tradicional sistema cartesiano de eixos ortogonais  $OXY$ :

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0).$$

Se nós expandirmos os termos dessa equação chegaremos na forma equivalente

$$y^2 \mp 4px - 2y_0y + y_0^2 \pm x_0 = 0.$$

Essa equação pode ser identificada com a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

em que  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = \mp 4p$ ,  $E = -2y_0$  e  $F = y_0^2 \pm 4px_0$ .

De forma inteiramente análoga, se a reta focal da parábola estiver sobre uma reta paralela

ao eixo OY e vértice  $V = (x_0, y_0)$ , a equação dessa parábola será

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0).$$

Se nós expandirmos os termos dessa equação chegaremos na seguinte forma equivalente

$$x^2 - 2x_0 \cdot x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0.$$

Essa equação pode ser identificada com a seguinte forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

em que  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = -2x_0$ ,  $E = \mp 4p$  e  $F = x_0^2 \pm 4py_0$ .

Isso nos permite observar que ou  $A = 0$ ,  $B = 0$  e  $C \neq 0$ , ou  $A \neq 0$ ,  $B = 0$  e  $C = 0$ .

Em qualquer situação temos  $B = 0$  e  $A \cdot C = 0$ .

Portanto temos o seguinte:

**Teorema 3.3.** *Consideremos equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3.6)$$

*Se  $A = 0$  e  $C \neq 0$ , então o conjunto solução dessa equação será:*

- 1. Uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX, caso  $D \neq 0$ ;*
- 2. Um par de retas paralelas ao eixo OX, se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF > 0$ ;*
- 3. Uma reta paralela ao eixo OX, se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF = 0$ ;*
- 4. O conjunto vazio, se  $D = 0$  e  $E^2 - 4CF < 0$ .*

*Se  $A \neq 0$  e  $C = 0$ , então o conjunto solução dessa equação será:*

- 1. Uma parábola com reta focal paralela ao eixo OY, caso  $E \neq 0$ ;*

2. Um par de retas paralelas ao eixo OY, se  $E = 0$  e  $D^2 - 4AF > 0$ ;
3. Uma reta paralela ao eixo OY, se  $E = 0$  e  $D^2 - 4AF = 0$ ;
4. O conjunto vazio, se  $E = 0$  e  $D^2 - 4AF < 0$ .

*Demonstração.* Se  $A = 0$  e  $C \neq 0$  a equação 3.6 pode ser escrita da forma

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando-se quadrado, obtemos

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0.$$

Se  $D \neq 0$  a equação acima pode ser escrita na seguinte forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C} \left( x + \frac{C}{D} \left( \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} \right) \right).$$

Isso nos evidencia que temos a equação de uma parábola, cuja reta focal é uma reta paralela ao eixo OX e cujo vértice é o ponto  $V = \left( -\frac{4CF - E^2}{4CD}, -\frac{E}{2C} \right)$ .

Se  $D = 0$  então a equação 3.6 se resume a

$$Cy^2 + Ey + F = 0.$$

E o conjunto solução desta equação  $\mathbb{R}^2$  representa:

- Duas retas paralelas ao eixo OX se  $\Delta = E^2 - 4CF > 0$ .
- Uma reta paralela ao eixo OX se  $\Delta = E^2 - 4CF = 0$ . Ou;
- O conjunto vazio se  $\Delta = E^2 - 4CF < 0$ .

Agora, se  $A \neq 0$  e  $C = 0$ , a equação 3.6 pode ser escrita assim

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Completando-se quadrado, obtemos

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} = 0.$$

Se  $E \neq 0$  a equação acima pode ser escrita na seguinte forma

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A} \left( x + \frac{A}{E} \left( \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} \right) \right).$$

Isso nos evidencia que temos a equação de uma parábola, cuja reta focal é uma reta paralela ao eixo OY e cujo vértice é o ponto  $V = \left( -\frac{4AF - D^2}{4AE}, -\frac{D}{2A} \right)$ .

Se  $E = 0$  então a equação 3.6 se resume a

$$Ax^2 + Dx + F = 0.$$

E o conjunto solução desta equação em  $\mathbb{R}^2$  representa:

- Duas retas paralelas ao eixo OY se  $\Delta = D^2 - 4AF > 0$ .
- Uma reta paralela ao eixo OY se  $\Delta = D^2 - 4AF = 0$ .
- O conjunto vazio se  $\Delta = D^2 - 4AF < 0$ . □

Os casos em que a solução da equação do segundo grau 3.6 representa duas retas paralelas ou uma reta ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da parábola**.

### 3.7 Equação Geral de uma Cônica - Equação do Segundo Grau em $\mathbb{R}^2$

Nosso objetivo aqui é finalizarmos o nosso estudo sobre cônicas em geral. Resta-nos tratar o caso geral de uma cônica, ou seja estudar a equação da cônica (3.1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

no caso geral em que o coeficiente  $B$  do termo misto possa ser diferente de zero.

Destacamos que tudo que foi feito antes tinha como premissa o detalhe do termo misto  $Bxy$  não aparecer na equação, isto é, caso em que  $B = 0$ .

Quando o termo misto  $Bxy$  aparece em nossa equação, isto é,  $B \neq 0$  significa que nossa cônica não tem suas retas focais e não focais, ou sua reta focal e sua reta diretriz, paralelas aos eixos coordenados. Óbvio que estamos falando dos casos não degenerados.

O que de fato faremos daqui para frente é mostrar que, usando o que estudamos na parte inicial de nosso trabalho, no que se refere à Álgebra Linear, podemos determinar um novo sistema de eixos cartesianos ortogonais nos quais a equação de nossa cônica, neste novo sistema não terá o termo misto, isto é, seu coeficiente será zero. Isto será referido como **“efetuar uma rotação de eixos coordenados”**.

Isso é possível, pois a matriz da forma quadrática associada à nossa equação acima, é oriunda de uma forma bilinear e simétrica e como já dissemos [teorema (2.14)], essa forma está univocamente associada a um operador linear autoadjunto e isto nos permitirá a determinação de uma base ortonormal de autovetores desse operador [vide teorema (2.12)], de forma que a matriz desse operador, ou seja, da forma bilinear e simétrica, nessa base ortonormal se torne uma matriz diagonal. Vamos aos fatos.

Associada a equação (3.1) acima, temos a forma quadrática  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Essa forma quadrática pode ser vista como proveniente da forma bilinear e simétrica  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela forma polar

$$f((x, y), (z, w)) = \frac{1}{2}[q(x + z, y + w) - q(x, y) - q(z, w)] = Axz + \frac{1}{2}B[xw + yz] + Cyw.$$

A matriz dessa forma bilinear e simétrica  $f$  é dada por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Matriz essa que será a mesma matriz do único operador linear autoadjunto associado à forma bilinear  $f$  conforme o teorema (2.14).

### 3.7.1 O que fazer? Como proceder?

Uma vez que a matriz  $\mathcal{M}$  acima é simétrica, ou, equivalentemente, o único operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  associado à forma bilinear e simétrica  $f$  é autoadjunto, então o teorema (2.12) garante a existência de uma base de  $\mathbb{R}^2$  ortonormal e constituída de autovetores.

Portanto uma das formas de se resolver a questão da eliminação do termo misto passa pela determinação dos autovalores da matriz  $\mathcal{M}$  e dos respectivos autovetores associados a esses autovalores.

Vale lembrar que, se os autovalores forem distintos, os autovetores correspondentes são ortogonais - veja o teorema (2.9).

Se os autovalores forem iguais, o autoespaço associado terá dimensão dois, pois gera o espaço  $\mathbb{R}^2$  e portanto, podemos encontrar uma base de autovetores associados a esse autovalor e depois aplica-se o processo de ortogonalização Gram Schmidt [teorema (2.3)]. Normalizá-la é fácil.

Enfatizamos que, no particular caso das cônicas, poderíamos enunciar e demonstrar um teorema específico que traduziria, resumidamente, tudo que falamos e até poderíamos deduzir alguns resultados técnicos dos capítulos 1 e 2 mais diretamente. Acontece porém que no caso das quádricas, nós, até o momento, não chegamos a enunciar e demonstrar um teorema equivalente, por isso optamos por formalizar a parte da Álgebra Linear desenvolvida nos capítulos 1 e 2.

Rescrevendo a equação (3.1) de nossa cônica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Vemos que ela possui a parte quadrática  $q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ , a parte linear  $L(x, y) = Dx + Ey$  e o termo constante  $F$ . A forma  $q$  está associada a uma forma bilinear simétrica  $f$ , como já mencionamos.

A matriz de  $f$  em relação à base canônica é dada por  $[f]_{\mathcal{E}} = \mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ .

Como já mencionamos, o espaço  $\mathbb{R}^2$  admite uma base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  é uma matriz diagonal. Assim, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , em que  $\alpha = x'\alpha_1 + y'\alpha_2$ , vamos ter que

$$q(x', y') = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

ou seja,  $q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$  e assim eliminamos o termo misto do segundo grau.

Uma vez que estamos em  $\mathbb{R}^2$ , os vetores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são ortonormais, logo podemos determinar um único  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ \alpha_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{cases}$$

Logo a frente comentaremos como determinar esse  $\theta$  em função dos coeficientes da forma quadrática  $q$ .

A matriz abaixo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

É denominada **matriz mudança de coordenadas**, pois, se  $v \in \mathbb{R}^2$  e se  $v = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  e se  $v = x'\vec{\alpha}_1 + y'\vec{\alpha}_2$ , então a relação entre as coordenadas de  $v$  em relação às duas bases

citadas é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Isto é,

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y = -x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{cases}$$

Além disso, temos

$$\mathcal{A}^t \mathcal{M} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Aqui  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores da matriz  $\mathcal{M}$  da forma quadrática, ou da forma bilinear e simétrica, ou se quiser, do operador linear associado à forma bilinear e simétrica, em que

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Substituindo (3.7) em

$$q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

obtemos

$$q(x', y') = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Agora, efetuando uma mudança de coordenadas na equação da cônica obteremos  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ , com  $x'$  e  $y'$  sendo as coordenadas de  $\alpha$  na base  $\mathcal{B}$ . Com isso, encontramos um sistema de eixos ortogonais  $(O, X', Y')$  de forma que os eixos principais da cônica sejam paralelos aos eixos coordenados..

Após completar quadrados e fatorar [realizar uma translação], isto é, realizando uma nova

mudança de coordenadas, em que colocamos

$$\begin{cases} x'' = x' - x_0 \\ y'' = y' - y_0 \end{cases}$$

e com isso encontramos a forma reduzida da cônica no novo sistema  $(\bar{O}, X'', Y'')$ , em que  $\bar{O} = (x_0, y_0)$ . Resumindo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = \left\langle \mathcal{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + F.$$

Substituindo (3.7) nesta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathcal{M} \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}, \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + F = \\ & \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathcal{A}^t \mathcal{M} \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{A}^t \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + F = \\ & \left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} D' \\ E' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle + F = \\ & \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F. \end{aligned}$$

Aqui temos

$$\begin{bmatrix} D' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}.$$

Faremos finalmente um comentário sobre as formas de se determinar os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e os respectivos autovetores de forma conveniente no caso em que o termo misto  $B \neq 0$ .

É claro que um caminho seria tomar a matriz  $\mathcal{M}$  escrever o seu polinômio característico e em seguida determinarmos autovetores associados aos respectivos autovalores. Isto é um caminho. Mas existe um outro caminho aparentemente melhor.

Lembrando que os autoespaços são espaços vetoriais, no caso que  $B \neq 0$  poderemos

### 3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM $\mathbb{R}^2$ 85

reordenar de forma conveniente os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , isto caso necessário e assim determinarmos um ângulo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  de forma que os autovetores, vamos aqui chamá-los de  $v_1$  e  $v_2$ , associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  já convenientemente escolhidos sejam tais que  $v_1$  esteja no primeiro quadrante e  $v_2$  esteja no segundo quadrante.

Considerando a expressão (3.1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

E após desenvolvermos o segundo membro de (3.8) e compará-lo com o terceiro membro obteremos

$$B \cos(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta) = 0.$$

Podemos concluir que quando  $B \neq 0$ , podemos tomar  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , no caso particular em que  $A = C$  e tomarmos  $\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}$ , no caso em que  $A \neq C$ .

É uma identidade trigonométrica conhecida que

$$1 + \tan^2(2\theta) = \sec^2(2\theta).$$

Uma vez que estamos limitando  $\theta$  ao intervalo aberto  $(0, \frac{\pi}{2})$  temos que  $2\theta \in (0, \pi)$  e nesse intervalo a função tangente e a função cosseno tem o mesmo sinal, portanto, vemos que

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \quad \text{se } \frac{B}{A - C} > 0;$$

$$\cos(2\theta) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\theta)}}, \quad \text{se } \frac{B}{A - C} < 0.$$

Outra vez, segue de identidades trigonométricas conhecidas que

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

e

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}.$$

Portanto encontramos

$$v_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

e

$$v_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

ou seja, encontramos  $\theta$  em função dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  da forma quadrática.

Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são facilmente determinados via (3.8).

**Exemplo 3.1. (Elipse)** Considere a cônica definida pela equação

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0 \quad (3.9)$$

*Classifique-a e reduza-a a sua forma canônica.*

**Solução:**

Os coeficientes da equação de nossa cônica na ordem que temos convencionado são

$$A = 14, \quad B = 24, \quad C = 21, \quad D = -4; \quad E = 18 \quad \text{e} \quad F = -139.$$

O indicador dessa cônica é

$$I = B^2 - 4AC = 24^2 - 4 \cdot 14 \cdot 21 = 576 - 1.176 = -600 < 0.$$

Isto signifca que nossa equação representa, ou uma elipse, ou uma elipse degenerada, isto é, um ponto ou o conjunto vazio.

Passemos a determinar a base de vetores ortonormais nos quais nossa equação deixa de ter o termo misto.

3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM  $\mathbb{R}^2$  87

Sabendo-se que  $A \neq C$  temos

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{24}{14 - 21} = -\frac{24}{7} < 0.$$

Portanto

$$\cos(2\theta) = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)}} = -\frac{7}{25}.$$

A partir desse valor e considerando que  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  temos

$$\cos(\theta) = \frac{3}{5}, \quad \sin(\theta) = \frac{4}{5}.$$

Portanto a base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$$v_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad v_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Então as relações de mudanças de coordenadas são

$$\begin{cases} x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}$$

A equação nas coordenadas  $x', y'$  será

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

Em que

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos calcular  $D'$  e  $E'$ :

$$\begin{bmatrix} D' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Lembre-se que  $F = -139$ .

Portanto a equação dada, nas coordenadas  $x', y'$  será

$$30x'^2 + 5y'^2 + 12x' + 14y' - 139 = 0.$$

Completando-se quadrados obteremos

$$\frac{(x' + \frac{1}{5})^2}{5} + \frac{(y' + \frac{7}{5})^2}{30} = 1.$$

Agora em um novo sistema  $\overline{OX''Y''}$  em que a nova origem  $\overline{O} = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$  seja o centro da elipse e que  $\overline{OX''}$  e  $\overline{OY''}$  sejam paralelos e de mesmo sentido que os eixos  $OX'$  e  $OY'$ , obtemos a forma canônica da elipse com centro em  $\overline{O}$ .

De fato, efetuando a translação

$$\begin{cases} x'' = x' - x_0 \\ y'' = y' - y_0 \end{cases}$$

obtemos a forma canônica da elipse

$$\frac{(x'')^2}{5} + \frac{(y'')^2}{30} = 1.$$

### 3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM $\mathbb{R}^2$ 89

Em que  $\bar{O}$  tem coordenadas  $(0, 0)$  no sistema  $\bar{O}X''Y''$ ,

$\bar{O} = (x_0, y_0)$  tem coordenadas  $(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$  no sistema  $OX'Y'$ .

Para encontrarmos as coordenadas de  $\bar{O}$  no sistema de coordenadas  $OXY$  basta fazermos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, temos  $\bar{O} = (1, -1)$  no sistema  $OXY$ .

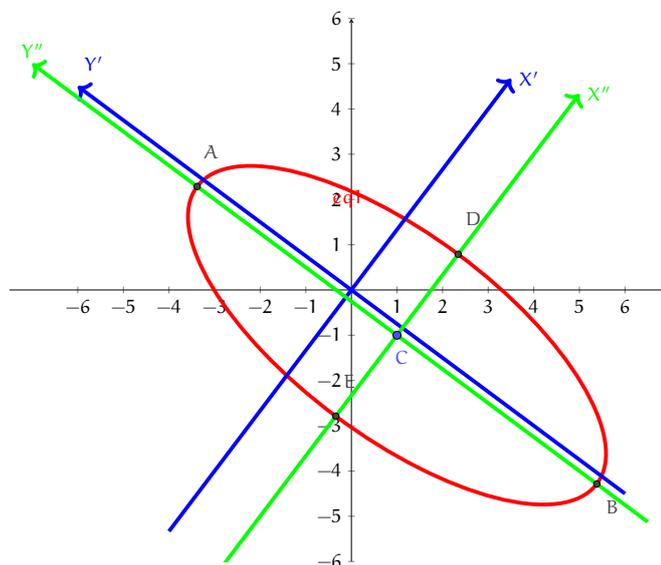


Figura 3.17 Elipse  $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

**Exemplo 3.2. (Elipse)** Considere a cônica definida pela equação

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + y - 5 = 0. \quad (3.10)$$

*Classifique-a e reduza-a a sua forma canônica.*

Escrevendo a equação acima na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [5] = [0]. \quad (3.11)$$

Agora vamos encontrar os valores e autovetores da matriz. Um procedimento padrão, mas, ligeiramente diferente do anterior:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico

$$p_{\mathcal{M}}(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - \mathcal{M}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 1$$

possui raízes  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Vamos determinar um autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda_1 = 4$ :

$$[\lambda_1 - \mathcal{M}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uma solução imediata é  $(1, 1)$ . Normalizando obtemos o autovetor

$$\alpha_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

associado ao autovalor  $\lambda_1 = 4$ .

Repetindo para  $\lambda_2 = 2$ , temos

$$[\lambda_2 - \mathcal{M}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que  $(-1, 1)$  é uma solução e foi escolhida de modo a representar um giro de  $90^\circ$  no sentido anti-horário de  $(1, 1)$  e que normalizando obtemos

$$\alpha_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

associado ao autovalor  $\lambda_2 = 2$ .

### 3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM $\mathbb{R}^2$ 91

Assim, encontramos uma nova base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  constituída de auto-vetores do operador associado à matriz  $\mathcal{M}$ .

A matriz de mudança da base  $\mathcal{E}$  para a base  $\mathcal{B}$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}.$$

Esses vetores implicarão em um novo sistema de eixos ortogonais que consiste num giro de  $45^\circ$  no sentido anti-horário do sistema original.

A relação entre as coordenadas de um vetor na base antiga  $\mathcal{E}$  e as coordenadas do mesmo vetor na base nova  $\mathcal{B}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Substituindo em (3.11) nossa equação matricial original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - [5] = [0].$$

E assim, completando-se quadrados e fazendo algumas manipulações algébricas chegamos a

$$4x'^2 + 0x'y' + 2y'^2 + 0y' + \sqrt{2}x' - 5 = 0 \iff \frac{(x' + \frac{\sqrt{2}}{8})^2}{\frac{41}{32}} + \frac{(y' - 0)^2}{\frac{41}{16}} = 1.$$

Agora em um novo sistema  $\overline{OX''Y''}$  em que a nova origem  $\overline{O} = (x_0, y_0)$  no sistema  $OXY$  seja o centro da elipse e que  $\overline{OX''}$  e  $\overline{OY''}$  sejam paralelos e de mesmo sentido que os eixos  $OX'$  e  $OY'$ , obtemos a forma canônica da elipse com centro em  $\overline{O}$ .

De fato, efetuando a translação

$$\begin{cases} x'' = x' - x_0 \\ y'' = y' - y_0 \end{cases}$$

obtemos a forma canônica da elipse

$$\frac{(x'')^2}{\frac{41}{32}} + \frac{(y'')^2}{\frac{41}{16}} = 1.$$

Em que  $\bar{O}$  tem coordenadas  $(0, 0)$  no sistema  $\bar{O}X''Y''$ ;

$\bar{O} = (x_0, y_0)$  tem coordenadas  $(-\frac{\sqrt{2}}{8}, 0)$  no sistema  $OX'Y'$ .

Para encontrarmos as coordenadas de  $\bar{O}$  no sistema de coordenadas  $OXY$  observemos que da relação (3.12) obtemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, temos  $\bar{O} = (-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$  no sistema  $OXY$ .

A elipse no sistema  $\bar{O}X''Y''$  tem como eixo focal o eixo  $\bar{O}Y''$ , eixo não focal o eixo  $\bar{O}X''$ ,  $a = \frac{\sqrt{41}}{4}$ ,  $b = \frac{\sqrt{82}}{8}$  e  $c = \frac{\sqrt{82}}{8}$ .

No sistema  $OX'Y'$  o centro é  $C' = (-\frac{\sqrt{2}}{8}, 0)$ ; os vértices são  $A'_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{-\sqrt{41}}{4})$ ,  $A'_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{41}}{4})$ ,  $B'_1 = (\frac{\sqrt{82}-\sqrt{2}}{8}, 0)$  e  $B'_2 = (\frac{-\sqrt{82}-\sqrt{2}}{8}, 0)$ ; os focos são  $F'_1 = (\frac{-\sqrt{2}}{8}, \frac{-\sqrt{82}}{8})$  e  $F'_2 = (\frac{-\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{82}}{8})$ .

Agora, utilizamos a matriz de mudança da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{E}$  para localizar os elementos da elipse no sistema  $OXY$ . O centro já determinamos e o mesmo é  $C = (-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$ .

Para encontra os vértices, o processo é o mesmo, logo  $A_1 = (\frac{\sqrt{82}-1}{8}, \frac{-\sqrt{82}-1}{8})$ ,

3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM  $\mathbb{R}^2$  93

$$A_2 = \left( \frac{-\sqrt{82}-1}{8}, \frac{\sqrt{82}-1}{8} \right), B_1 = \left( \frac{\sqrt{41}-1}{8}, \frac{\sqrt{41}-1}{8} \right) \text{ e } B_2 = \left( \frac{-\sqrt{41}-1}{8}, \frac{-\sqrt{41}-1}{8} \right).$$

Os focos são

$$F_1 = \left( \frac{\sqrt{41}-1}{8}, \frac{-\sqrt{41}-1}{8} \right) \text{ e } F_2 = \left( \frac{-\sqrt{41}-1}{8}, \frac{\sqrt{41}-1}{8} \right).$$

E assim terminamos nossa análise.

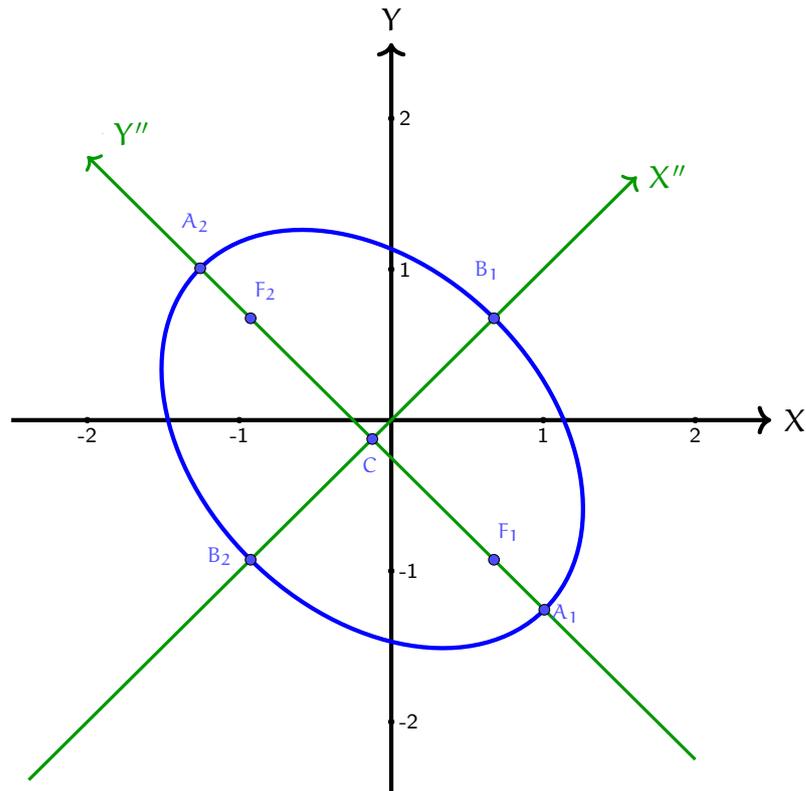


Figura 3.18 Elipse  $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + y - 5 = 0$

**Exemplo 3.3. (Hipérbole)** Consideremos a cônica dada pela equação

$$11x^2 + 50\sqrt{3}xy - 39y^2 - 4x + 8y - 6 = 0.$$

*Classifique-a e reduza à sua forma canônica.*

*Reescrevendo a equação na forma matricial temos*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 25\sqrt{3} \\ 25\sqrt{3} & -39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0.$$

Vamos encontrar os valores e autovetores da matriz

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 11 & 25\sqrt{3} \\ 25\sqrt{3} & -39 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico dessa matriz é

$$p_{\mathcal{M}}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 11 - \lambda & 25\sqrt{3} \\ 25\sqrt{3} & -39 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 28\lambda - 2304,$$

que possui raízes  $\lambda_1 = 36$  e  $\lambda_2 = -64$  as quais são os autovalores de  $\mathcal{M}$ .

Determinemos um autovetor da matriz  $\mathcal{M}$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 36$ , temos

$$[\lambda_1 \mathbf{I} - \mathcal{M}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -25\sqrt{3} \\ -25\sqrt{3} & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Um autovetor solução desse sistema é  $(\sqrt{3}, 1)$  o qual normalizado é

$$\alpha_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Repetindo o mesmo procedimento para o autovalor  $\lambda_2 = -64$ , temos

$$[\lambda_2 \mathbf{I} - \mathcal{M}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 & -25\sqrt{3} \\ -25\sqrt{3} & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e encontramos o autovetor  $(-1, \sqrt{3})$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = -64$  o qual é o rotacionado do vetor  $(\sqrt{3}, 1)$  no sentido anti-horário de  $45^\circ$ .

Normalizando se torna

$$\alpha_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Assim, encontramos a nova base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  na qual eliminamos o termo misto de nossa equação.

### 3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM $\mathbb{R}^2$ 95

A relação entre as coordenadas de um vetor na base antiga  $\mathcal{E}$  e as coordenadas do mesmo vetor na base nova  $\mathcal{B}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Substituindo em (3.11) nossa equação matricial original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - [6] = [0].$$

logo

$$36x'^2 + 0x'y' - 64y'^2 + (4 - 2\sqrt{3})x' + (2 + 4\sqrt{3})y' - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(6x' + \frac{(4 - 2\sqrt{3})}{12}\right)^2 - \left(8y' - \frac{2 + 4\sqrt{3}}{16}\right)^2 = \frac{3451 - 100\sqrt{3}}{576} \Leftrightarrow$$

$$36\left(x' + \frac{(2 - \sqrt{3})}{36}\right)^2 - 64\left(y' - \frac{1 + 2\sqrt{3}}{64}\right)^2 = \frac{3451 - 100\sqrt{3}}{576} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x' + \frac{(2 - \sqrt{3})}{36}\right)^2}{\frac{3451 - 100\sqrt{3}}{20736}} - \frac{\left(y' - \frac{1 + 2\sqrt{3}}{64}\right)^2}{\frac{3451 - 100\sqrt{3}}{36864}} = 1.$$

Portanto essa cônica é uma hipérbole e de forma inteiramente análoga ao que fizemos no exercício anterior obtemos

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{3451 - 100\sqrt{3}}{20736}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{3451 - 100\sqrt{3}}{36864}}\right)^2} = 1.$$

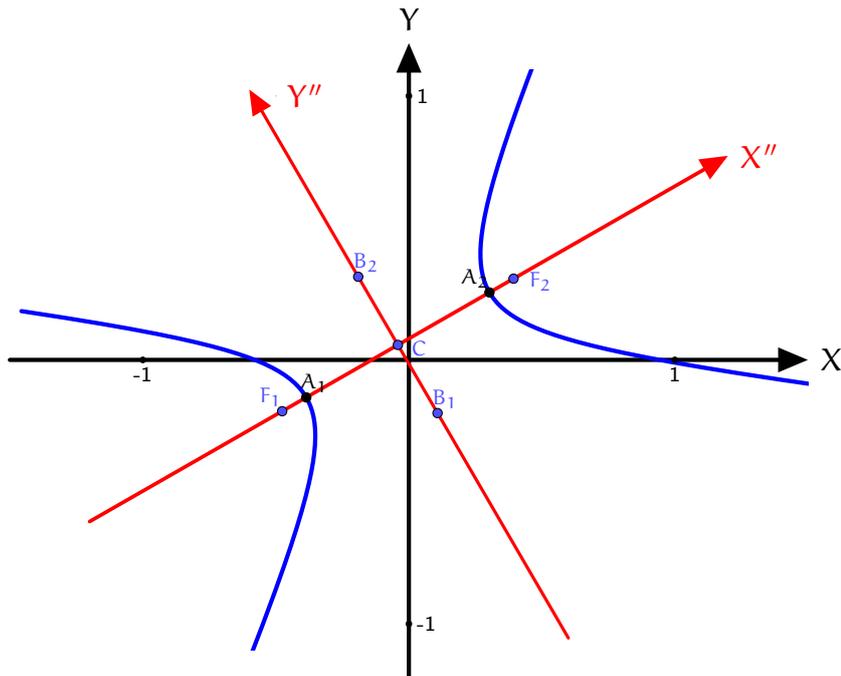


Figura 3.19 Hipérbole  $11x^2 + 50\sqrt{3}xy - 39y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

**Exemplo 3.4. (Parábola)** Consideremos a cônica dada pela equação

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 5y - 8 = 0.$$

*Classifique-a e reduza-a à sua forma canônica.*

*Primeiro vamos reescrevê-la na sua forma matricial*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - [8] = [0]. \quad (3.14)$$

*Agora vamos encontrar os autovalores da matriz*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM $\mathbb{R}^2$ 97

O polinômio característico

$$p_{\mathcal{M}}(\lambda) = \det[\lambda I - \mathcal{M}] = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1,$$

cujas raízes  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$  são os autovalores de  $\mathcal{M}$ .

Vamos determinar uma base de  $\mathbb{R}^2$  constituída de autovetores de  $\mathcal{M}$ .

Vamos determinar um autovetor de  $\mathcal{M}$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 0$ , temos

$$[\lambda_1 - \mathcal{M}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uma solução não nula desse sistema é  $(1, 1)$ , portanto  $\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  é um autovetor de  $\mathcal{M}$  de norma igual a 1 associado ao autovalor  $\lambda_1 = 0$ .

Repetindo o mesmo procedimento para  $\lambda_2 = 2$  temos

$$[\lambda_2 - \mathcal{M}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uma solução não nula desse sistema é  $(-1, 1)$ , vetor este, perpendicular ao vetor  $(1, 1)$  obtido deste, girando-o  $90^\circ$  no sentido anti-horário e portanto

$$\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

é outro autovetor de  $\mathcal{M}$  de norma igual a 1 associado ao autovalor  $\lambda_2 = 0$ .

Assim, encontramos uma nova base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

A matriz de mudança da base  $\mathcal{E}$  para a base  $\mathcal{B}$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\text{sen}(\frac{\pi}{4}) \\ \text{sen}(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}.$$

Portanto podemos encontrar um novo sistema de eixos coordenados obtidos a partir do antigo girando-o  $45^\circ$  no sentido anti-horário.

A relação entre as coordenadas de um vetor na base antiga  $\mathcal{E}$  e as coordenadas do mesmo vetor na base nova  $\mathcal{B}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14) obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - [8] = [0],$$

logo

$$\begin{aligned} 0x'^2 + 0x'y' + 2y'^2 - 4\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' - 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ 2y'^2 - 4\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' - 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ y'^2 - 2\sqrt{2}x' - \frac{\sqrt{2}y'}{2} - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\sqrt{2}x' - \frac{33}{8} &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 &= 2\sqrt{2} \left(x' + \frac{33\sqrt{2}}{32}\right). \end{aligned}$$

Devemos criar um novo sistema  $\overline{OX''Y''}$  de tal forma que a origem  $\overline{O} = \left(-\frac{33\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

3.7. EQUAÇÃO GERAL DE UMA CÔNICA - EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU EM  $\mathbb{R}^2$  99

no sistema  $OX'Y'$  seja o vértice da parábola, obviamente  $\bar{O} = (0, 0)$  no sistema  $\bar{O}, X'', Y''$ .

Para isto basta tomarmos

$$x'' = x' + \frac{33\sqrt{2}}{32} \quad \text{e} \quad y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

A cônica é uma parábola e a forma reduzida da parábola é

$$y''^2 = 2\sqrt{2}x''.$$

Seu eixo focal está sobre o eixo  $\bar{O}X''$ , logo  $p = \sqrt{2}$ .

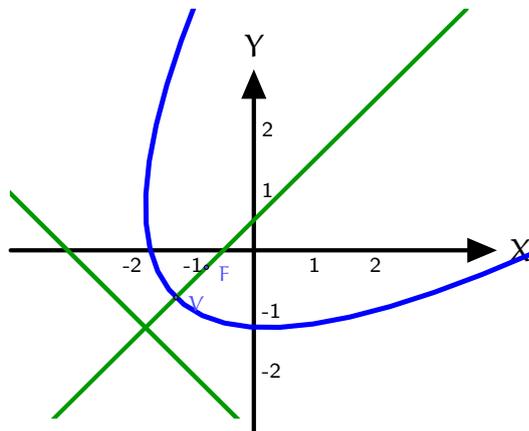


Figura 3.20 Parábola  $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 5y - 8 = 0$



## 4

# Aplicação - Quádricas em $\mathbb{R}^3$

Nosso objetivo aqui não é discorrer sobre o assunto geral de superfícies, mas descrevermos sobre uma particular “classe” de superfícies denominadas “quádricas”. Vamos abordar as formas canônicas das mesmas e também a redução da forma geral para a forma canônica a exemplo do que foi feito em cônicas.

**Definição 4.1 (Algébrica).** *Quádrica é o nome dado ao conjunto solução em  $\mathbb{R}^3$  de uma equação polinomial de grau 2 em três variáveis.*

Às vezes nos referiremos à mencionada equação na forma

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + M = 0 \quad (4.1)$$

em que  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$

Às vezes, assim também

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz + Ex + Fy + Gz + D = 0 \quad (4.2)$$

em que  $A^2 + B^2 + C^2 + p^2 + q^2 + r^2 > 0$ . Isto é para caracterizar que se trata de uma equação polinomial de grau 2.

Ou, às vezes, também assim

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + Gx + Hy + Iz + M = 0 \quad (4.3)$$

em que  $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij}^2 > 0$ .

Assim como ocorreu com as cônicas, caso a quádrlica tenha um ponto de simetria [denominado - **centro da quádrlica**] na origem, isto se traduzirá pelo fato da equação da quádrlica na forma reduzida não apresentar termos lineares, ou seja, na forma reduzida, os coeficientes dos monômios na variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  serão nulos.

Da mesma forma como falamos em cônicas, existem quádrlicas **sem centro** e, assim, algum termo linear aparece mesmo quando a equação está em sua forma reduzida.

A existência de algum [ou todos] termos chamados mistos  $2Bxy$ ,  $2Cxz$ ,  $2Eyz$  indicam, à semelhança do que ocorreu com as cônicas, que eixos e planos de simetria estão rotacionados quando comparados aos eixos e planos coordenados.

Inicialmente queremos deixar claro que não faz sentido falarmos em **focos para quádrlicas**. Os termos “**eixos focais**” e “**reta diretriz**” que iremos mencionar a partir de agora, referem-se aos eixos focais e à reta diretriz (quando houver) das secções obtidas pela intersecção dos planos coordenados com a quádrlica em questão.

Cabe dizer que à semelhança com as cônicas, temos também quádrlicas degeneradas.

#### 4.0.1 Quádrlicas e suas formas canônicas

Um pouco diferente do que fizemos com as cônicas vamos explorar as possibilidades para reconhecimento da equação da quádrlica, a menos de nomes específicos dos eixos.

#### 4.0.2 Elipsoide com centro na origem e “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica.

O elipsoide que nos referimos é a quádrlica centrada na origem e na seguinte forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.4)$$

Aqui estamos supondo  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ .

Abaixo está a representação gráfica de um exemplo particular desta superfície quádrlica em  $\mathbb{R}^3$  no caso em que  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $c = \frac{3}{2}$

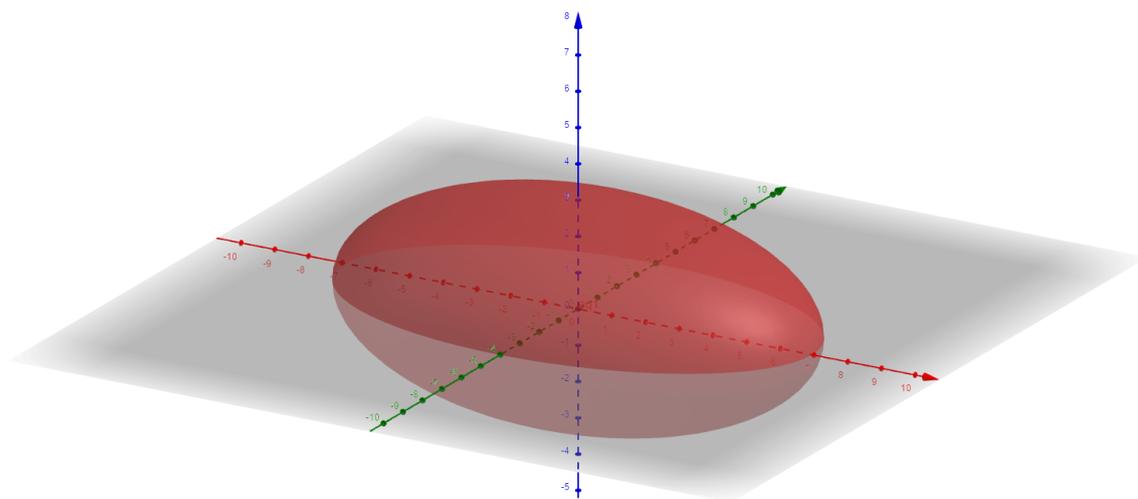


Figura 4.1 Elipsoide  $9x^2 + y^2 + 4z^2 = 9$

É recomendado observar algumas secções dessa e de qualquer outra quádrlica com os chamados planos coordenados e também com planos paralelos aos planos coordenados.

Por exemplo, a intersecção dessa quádrlica com o plano  $X = 0$ , também conhecido como

plano OYZ, resulta numa elipse nesse plano, cuja equação é dada por

$$\frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1 \quad \text{ou} \quad y^2 + 4z^2 = 9.$$

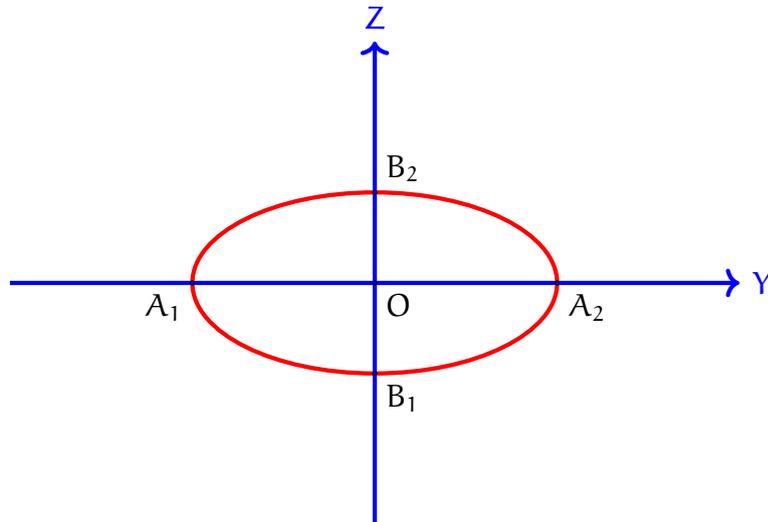


Figura 4.2 Secção elítica:  $y^2 + 4z^2 = 9$

Outra secção: intersecção da quádrlica com o plano  $Y = 0$ , também conhecido como plano OXZ, resulta numa elipse nesse plano, cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1 \quad \text{ou} \quad 9x^2 + 4z^2 = 9.$$

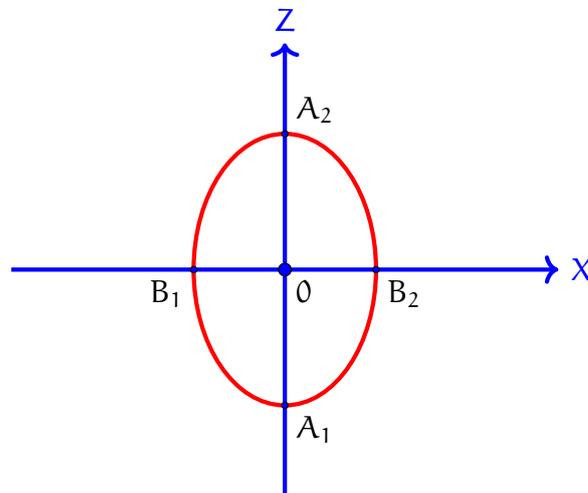


Figura 4.3 Secção elítica:  $9x^2 + 4z^2 = 9$

Finalmente a interseção dessa quádrlica com o plano  $Z = 0$ , também conhecido como plano  $OXY$ , resulta numa elipse nesse plano, cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \text{ou} \quad 9x^2 + y^2 = 9.$$

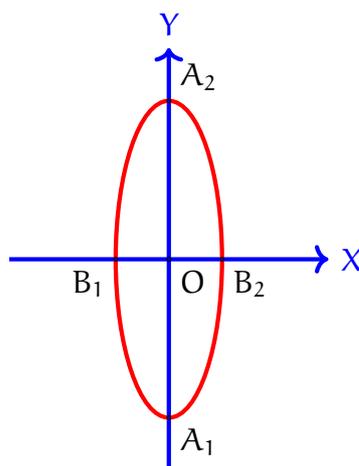


Figura 4.4 Secção elítica:  $9x^2 + y^2 = 9$

#### 4.0.3 Elipsoide com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$ e “eixos focais” paralelos aos eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \quad (4.5)$$

Aqui estamos supondo  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ .

Expandindo obtemos uma equação da forma

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + M = 0,$$

em que  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$ .

#### 4.0.4 Equação geral da quádrlica em que $B^2 + C^2 + E^2 = 0$ e $A$ , $D$ e $F$ tendo o mesmo sinal.

Consideremos a equação de um elipsóide  $\mathcal{E}$  centrado em um ponto  $C = (x_0, y_0, z_0)$  e cujas “retas focais” sejam paralelas aos eixos coordenados no nosso tradicional sistema cartesiano de eixos ortogonais  $OXYZ$ .

Expandido (4.5) obtemos

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 + (-2b^2c^2x_0)x + (-2a^2c^2y_0)y + (-2a^2b^2z_0)z - a^2b^2c^2 = 0.$$

Comparando-se com a equação (4.1) vemos que  $A = b^2c^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $D = a^2c^2$ ,  $E = 0$ ,  $F = a^2b^2$ ,  $G = -2b^2c^2x_0$ ,  $H = -2a^2c^2y_0$ ,  $I = -2a^2b^2z_0$ ,  $M = -a^2b^2c^2$

**Teorema 4.1.** *Se os coeficientes  $A$ ,  $D$  e  $F$  da seguinte equação do segundo grau;*

$$Ax^2 + Dy^2 + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + M = 0 \quad (4.6)$$

*são diferentes de zero e têm o mesmo sinal, então o conjunto solução dessa equação será*

1. *Uma elipsóide com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
2. *Um ponto.*
3. *O conjunto vazio.*

*Demonstração.* Não há perda de generalidade em supor que os coeficientes  $A$ ,  $D$  e  $F$  sejam todos positivos, pois, caso contrário multiplicaríamos a equação (4.6) por  $-1$ .

Inicialmente dividamos a equação (4.6) por  $ADF$ . Assim obtemos

$$\frac{x^2}{DF} + \frac{G}{ADF}x + \frac{y^2}{AF} + \frac{H}{ADF}y + \frac{z^2}{AD} + \frac{I}{ADF}z + \frac{M}{ADF} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x^2 + \frac{G}{A}x \right] + \frac{1}{AF} \left[ y^2 + \frac{H}{D}y \right] + \frac{1}{AD} \left[ z^2 + \frac{I}{F}z \right] + \frac{M}{ADF} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x + \frac{G}{2A} \right]^2 + \frac{1}{AF} \left[ y + \frac{H}{2D} \right]^2 + \frac{1}{AD} \left[ z + \frac{I}{2F} \right]^2 + \frac{M}{ADF} - \frac{G^2}{4A^2DF} - \frac{H^2}{4AD^2F} - \frac{I^2}{4ADF^2} = 0$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x + \frac{G}{2A} \right]^2 + \frac{1}{AF} \left[ y + \frac{H}{2D} \right]^2 + \frac{1}{AD} \left[ z + \frac{I}{2F} \right]^2 = \frac{G^2DF + H^2AF + I^2AD - 4MADF}{ADF}.$$

Indicando-se por  $K = \frac{G^2DF + H^2AF + I^2AD - 4MADF}{ADF}$ , temos

1. Se  $K > 0$  temos o elipsoide (4.5), em que:  $x_0 = -\frac{G}{2A}$ ,  $y_0 = -\frac{H}{2D}$  e  $z_0 = -\frac{I}{2F}$ .  
 $a = \sqrt{KDF}$ ,  $b = \sqrt{KAF}$  e  $c = \sqrt{KAD}$
2. Se  $K = 0$  temos o ponto  $C = (x_0, y_0, z_0)$  em que  $x_0 = -\frac{G}{2A}$ ,  $y_0 = -\frac{H}{2D}$  e  $z_0 = -\frac{I}{2F}$ .
3. Se  $K < 0$  temos o conjunto vazio.

□

Os casos em que  $K = 0$  ou  $K < 0$  são considerados casos degenerados do elipsóide.

#### 4.0.5 Hiperboloide de uma folha, Cone de duas folhas e Hiperboloide de duas folhas - com centro na origem e “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e suas formas canônicas.

Estamos considerando a quádrlica que na sua forma canônica e centrada na origem é dada por:

**CASO 1 - HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.7)$$

ou, é dada por

**CASO 2 - HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.8)$$

**CASO 3 - CONE DE DUAS FOLHAS:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.9)$$

Em todos os casos estamos supondo  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ .

Isso tudo a menos de renomear eixos.

Exemplo para o **CASO 1**:

Abaixo está a representação gráfica de um exemplo particular desta superfície quádrlica em  $\mathbb{R}^3$  no caso em que  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$

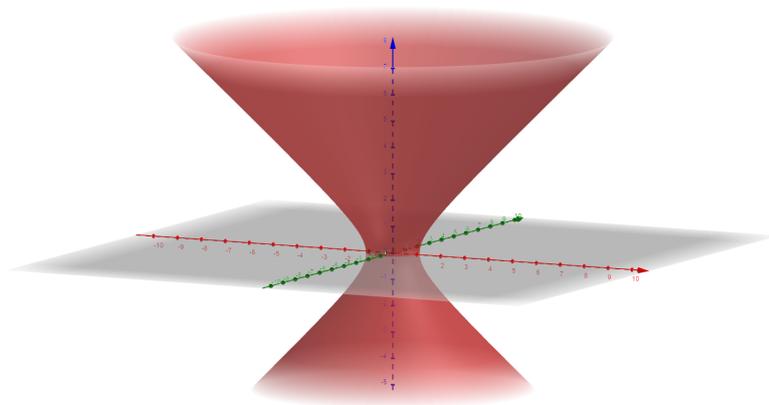


Figura 4.5 Hiperboloide de uma folha  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

É recomendado sempre observar algumas secções dessa [e de qualquer outra] quádrlica com os chamados planos coordenados e também com planos paralelos aos planos coordenados.

Por exemplo, a intersecção dessa quádrlica com o plano  $X = 0$ , também conhecido como plano OYZ, resulta numa hipérbole nesse plano, cuja equação é dada por

$$y^2 - z^2 = 1.$$

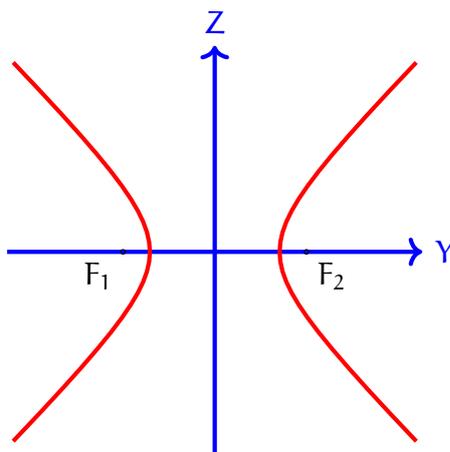


Figura 4.6 Secção hiperbólica  $y^2 - z^2 = 1$

A intersecção dessa quádrlica com o plano  $Y = 0$ , também conhecido como plano OXZ, resulta numa hipérbole nesse plano, cuja equação é dada por

$$x^2 - z^2 = 1.$$

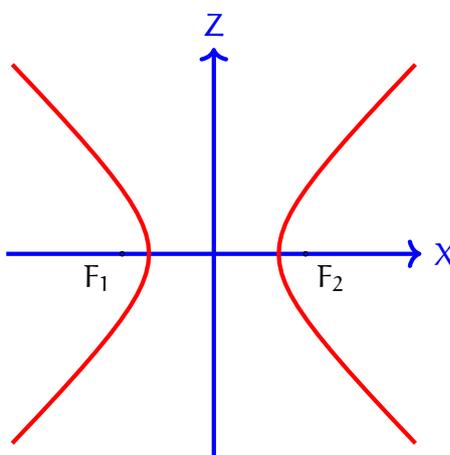


Figura 4.7 Secção hiperbólica:  $x^2 - z^2 = 1$

A interseção dessa quádrlica com o plano  $z = 0$ , também conhecido como plano OXZ resulta numa circunferência [poderia ser uma elipse] nesse plano, cuja equação é dada por

$$x^2 + y^2 = 1.$$

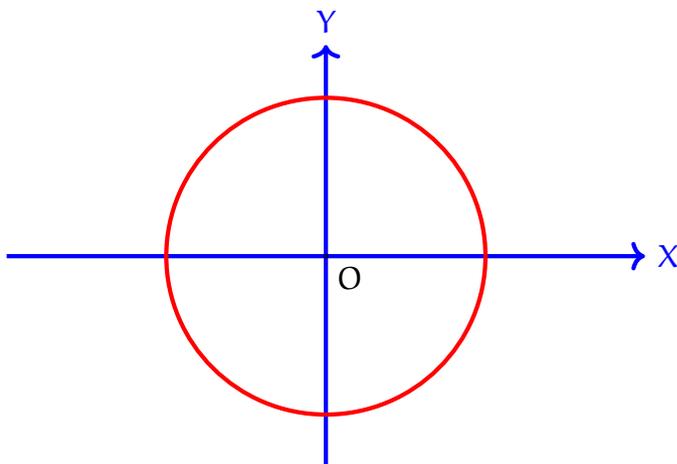


Figura 4.8 Secção circular:  $x^2 + y^2 = 1$

Exemplo para o **CASO 2**:

Abaixo está a representação gráfica de um exemplo particular desta superfície quádrlica em  $\mathbb{R}^3$  no caso em que  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$

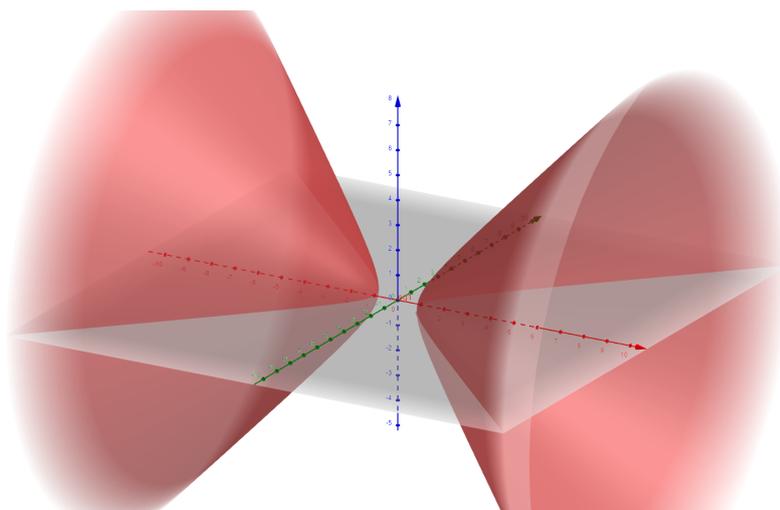


Figura 4.9 Hiperbolóide de duas folhas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

Ou ainda podemos vê-lo assim:

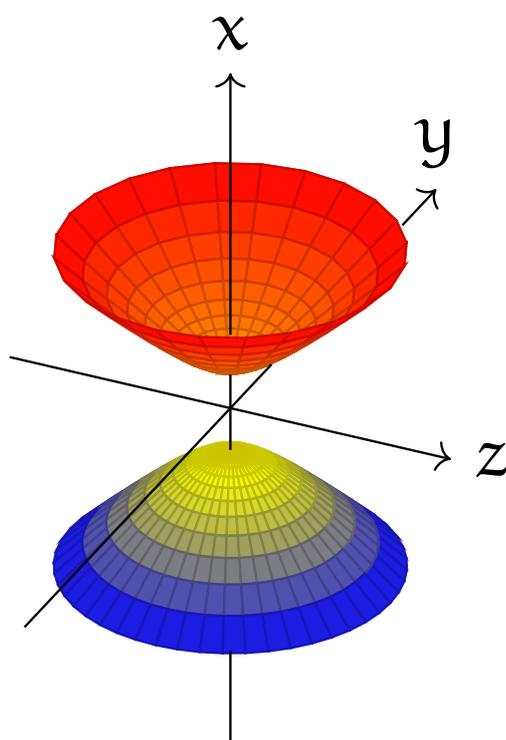


Figura 4.10 Hiperboloide de duas folhas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

É recomendado sempre observar algumas secções dessa [e de qualquer outra] quádrlica com os chamados planos coordenados e também com planos paralelos aos planos coordenados.

Por exemplo, a intersecção dessa quádrlica com o plano  $X = 0$ , também conhecido como plano  $OYZ$  resulta numa elipse [ou circunferência] [imaginária] nesse plano, cuja equação é dada por

$$-y^2 - z^2 = 1.$$

Obviamente o conjunto solução dessa equação em  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto vazio.

A intersecção dessa quádrlica com o plano  $Y = 0$ , também conhecido como plano  $OXZ$  resulta na hipérbole cuja equação é dada por

$$x^2 - z^2 = 1.$$

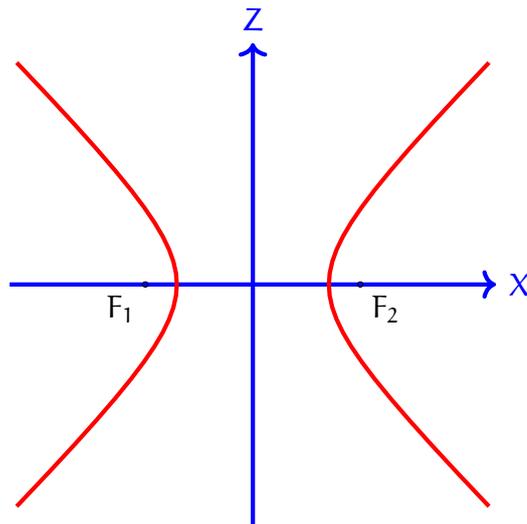


Figura 4.11 Secção hiperbólica:  $x^2 - z^2 = 1$

A interseção dessa quádrlica com o plano  $Z = 0$ , também conhecido como plano  $OXZ$ , resulta numa hipérbole nesse plano, cuja equação é dada por

$$x^2 - y^2 = 1.$$

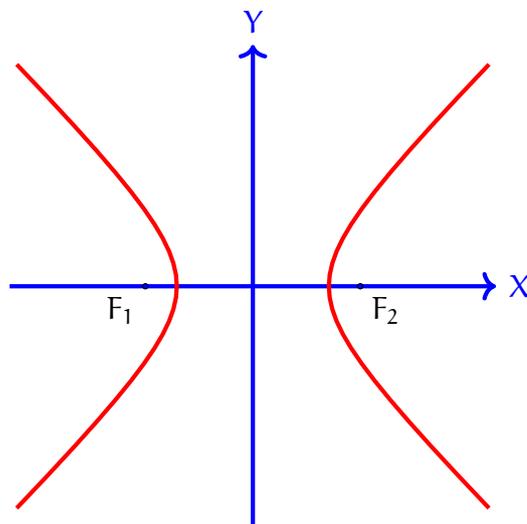


Figura 4.12 Secção hiperbólica:  $x^2 - y^2 = 1$

Exemplo para o **CASO 3**:

Abaixo está a representação gráfica de um exemplo particular dessa superfície quádrlica em  $\mathbb{R}^3$  no caso em que,  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$

O conjunto solução desta equação, denominado **cone de duas folhas** é gráficamente dado por

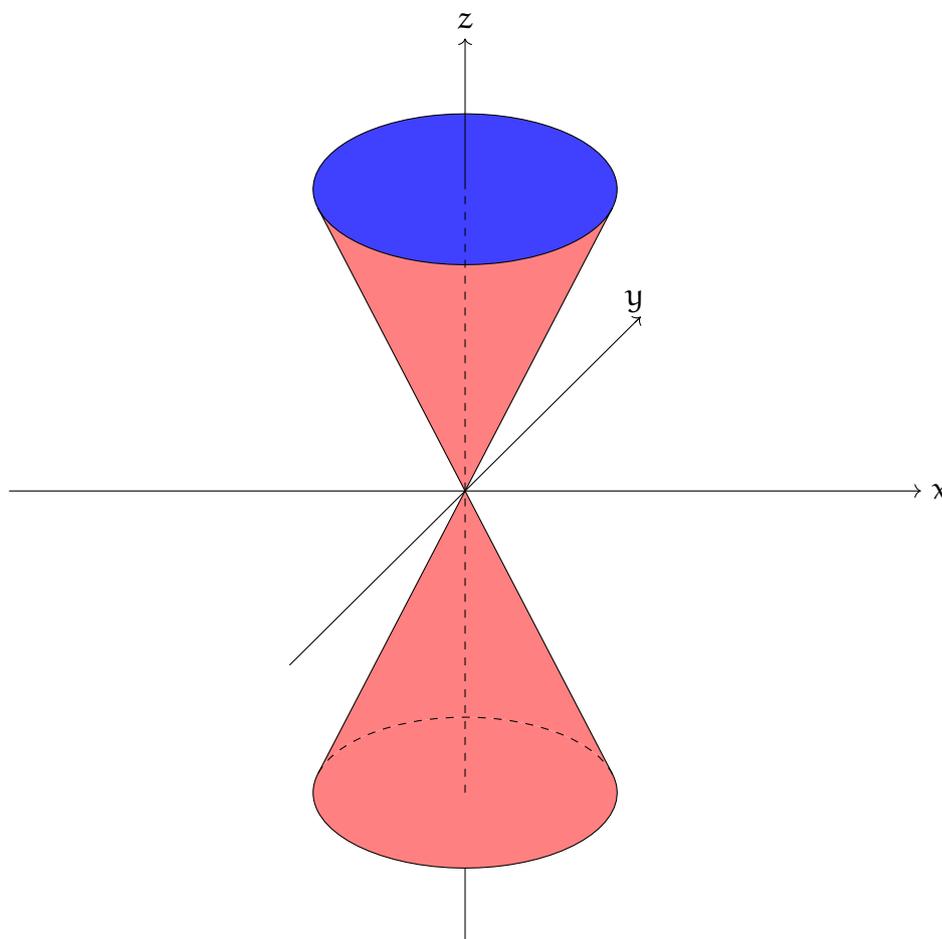


Figura 4.13 Cone de duas folhas

**4.0.6 Hiperboloide de uma folha, Cone de duas folhas e Hiperboloide de duas folhas - com centro em  $C = (x_0, y_0, z_0)$  e “eixos focais” paralelos aos eixos do sistema cartesiano - e suas formas canônicas.**

**CASO 1 - HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA:**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \quad (4.10)$$

ou

**CASO 2 - HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS:**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 \quad (4.11)$$

ou

**CASO 3 - CONE DE DUAS FOLHAS:**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0 \quad (4.12)$$

Estamos supondo  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ .

#### 4.0.7 Equação geral da quádrlica em que $B^2 + C^2 + E^2 = 0$ e dois dos coeficientes $A$ , $D$ e $F$ tendo o mesmo sinal, porém, contrário ao sinal do terceiro.

Consideremos a equação de um hiperboloide  $\mathcal{H}$  ou um cone de duas folhas centrados em um ponto  $C = (x_0, y_0, z_0)$  e cujas “retas focais” sejam paralelas aos eixos coordenados no nosso tradicional sistema cartesiano de eixos ortogonais OXYZ:

Expandido as equações (4.10), (4.11) e (4.12) obtemos **CASO 1:**

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 + (-2b^2c^2x_0)x + (-2a^2c^2y_0)y + (2a^2b^2z_0)z + b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

**CASO 2:**

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 + (-2b^2c^2x_0)x + (2a^2c^2y_0)y + (2a^2b^2z_0)z + b^2c^2x_0^2 - a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

**CASO 3:**

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 + (-2b^2c^2x_0)x + (-2a^2c^2y_0)y + (2a^2b^2z_0)z + b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2 = 0$$

Comparando-se com a equação 4.1 vemos que:

**CASO 1:**

$$A = b^2c^2, B = 0, C = 0, D = a^2c^2, E = 0, F = -a^2b^2, G = -2b^2c^2x_0, H = -2a^2c^2y_0, I = +2a^2b^2z_0, M = b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2 - a^2b^2c^2$$

**CASO 2:**

$$A = b^2c^2, B = 0, C = 0, D = -a^2c^2, E = 0, F = -a^2b^2, G = -2b^2c^2x_0, H = +2a^2c^2y_0, I = +2a^2b^2z_0, M = b^2c^2x_0^2 - a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2 - a^2b^2c^2$$

**CASO 3:**

$$A = b^2c^2, B = 0, C = 0, D = a^2c^2, E = 0, F = -a^2b^2, G = -2b^2c^2x_0, H = -2a^2c^2y_0, I = +2a^2b^2z_0, M = b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 - a^2b^2z_0^2$$

**Teorema 4.2.** *Sejam os coeficientes  $A > 0$ ,  $D > 0$  e  $F > 0$  da seguinte equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Dy^2 - Fz^2 + Gx + Hy + Iz + M = 0 \quad (4.13)$$

*Nestas condições o conjunto solução da equação (4.13) será*

1. *Um hiperboloide de uma folha e com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
2. *um cone de duas folhas e com eixos paralelos aos eixos coordenados.*
3. *um hiperboloide de duas folhas e com eixos paralelos aos eixos coordenados.*

*Demonstração.* Inicialmente dividamos a equação 4.13 por ADF. Assim obteremos

$$\frac{x^2}{DF} + \frac{G}{ADF}x + \frac{y^2}{AF} + \frac{H}{ADF}y - \frac{z^2}{AD} + \frac{I}{ADF}z + \frac{M}{ADF} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x^2 + \frac{G}{A}x \right] + \frac{1}{AF} \left[ y^2 + \frac{H}{D}y \right] - \frac{1}{AD} \left[ z^2 - \frac{I}{F}z \right] + \frac{M}{ADF} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x + \frac{G}{2A} \right]^2 + \frac{1}{AF} \left[ y + \frac{H}{2D} \right]^2 - \frac{1}{AD} \left[ z - \frac{I}{2F} \right]^2 + \frac{M}{ADF} - \frac{G^2}{4A^2DF} - \frac{H^2}{4AD^2F} - \frac{I^2}{4ADF^2} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{DF} \left[ x + \frac{G}{2A} \right]^2 + \frac{1}{AF} \left[ y + \frac{H}{2D} \right]^2 - \frac{1}{AD} \left[ z - \frac{I}{2F} \right]^2 = \frac{G^2DF + H^2AF + I^2AD - 4MADF}{ADF}.$$

Indicando-se por  $K = \frac{G^2DF + H^2AF + I^2AD - 4MADF}{ADF}$ , temos

1. Se  $K > 0$  temos o hiperboloide (4.10), em que:  $x_0 = -\frac{G}{2A}$ ,  $y_0 = -\frac{H}{2D}$  e  $z_0 = -\frac{I}{2F}$ .  
 $a = \sqrt{KDF}$ ,  $b = \sqrt{KAF}$  e  $c = \sqrt{KAD}$
2. Se  $K = 0$  temos o cone de duas folhas conforme vimos na figura anterior.
3. Se  $K < 0$  teremos o chamado hiperboloide de duas folhas, conforme figuras vistas anteriormente, lembrando - a menos de nome de eixos.

□

#### 4.0.8 Cilindro Parabólico - e sua forma canônica.

$$Ax^2 = Hy + Iz$$

Se  $A \neq 0$ ,  $H \neq 0$  e  $I \neq 0$ , temos um cilindro parabólico rotacionado em relação ao sistema cartesiano. Na seção 4.0.13 veremos um cilindro parabólico com “eixos focais” e “reta diretriz” sobre os eixos do sistema cartesiano.

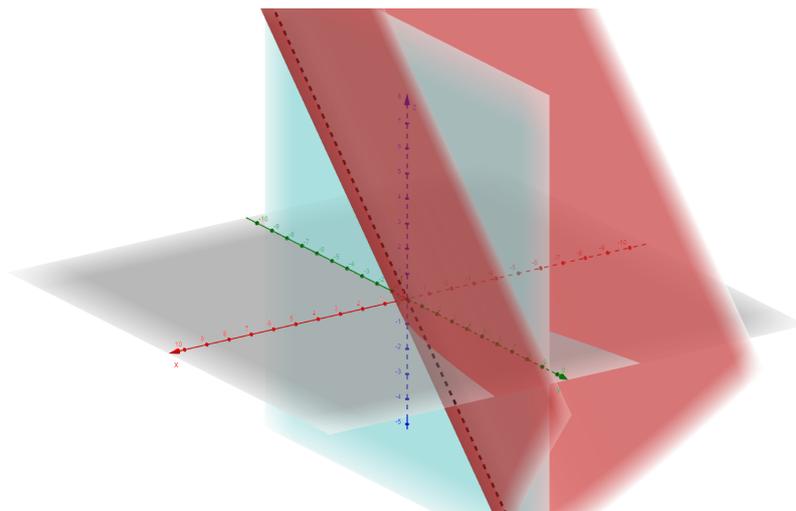


Figura 4.14 Cilindro Parabólico  $x^2 = y + z$

#### 4.0.9 Paraboloide elítico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e uma Reta - e suas formas canônicas.

Estamos considerando a quádrica sem centro em sua forma canônica.

##### CASO 1 - PARABOLOIDE ELÍTICO:

$$Ax^2 + Dy^2 = Iz$$

Aqui  $A > 0$ ,  $D > 0$  e  $I \neq 0$ .

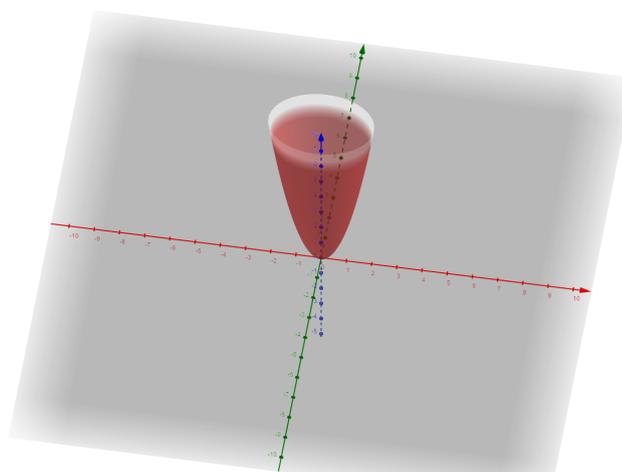


Figura 4.15 Paraboloide Elítico  $2x^2 + 5y^2 = z$

**CASO 2 - UMA RETA:**

$$Ax^2 + Dy^2 = 0$$

Aqui  $A > 0$ ,  $D > 0$  e  $I = 0$ .

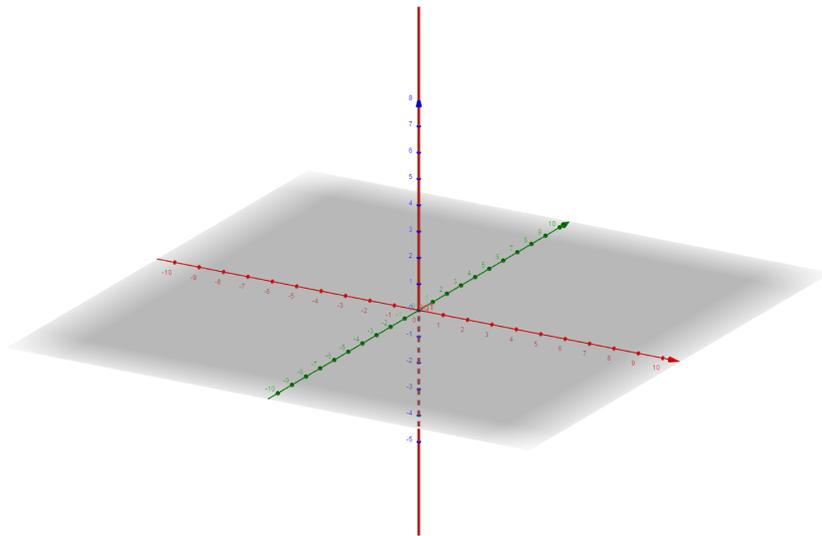


Figura 4.16 Reta  $2x^2 + 5y^2 = 0$

#### 4.0.10 Parabolóide hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e Planos concorrentes - e suas formas canônicas.

**CASO 1 - PARABOLOIDE HIPERBÓLICO:**

$$Ax^2 - Dy^2 = Iz$$

Aqui  $A > 0$ ,  $D > 0$  e  $I \neq 0$

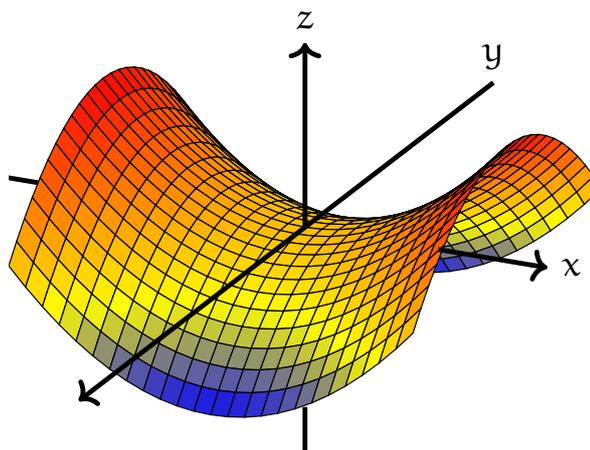


Figura 4.17 Paraboloide Hiperbólico  $2x^2 - y^2 = z$

## CASO 2 - PLANOS CONCORRENTES:

$$Ax^2 - Dy^2 = 0$$

Aqui  $A > 0$  e  $D > 0$ .

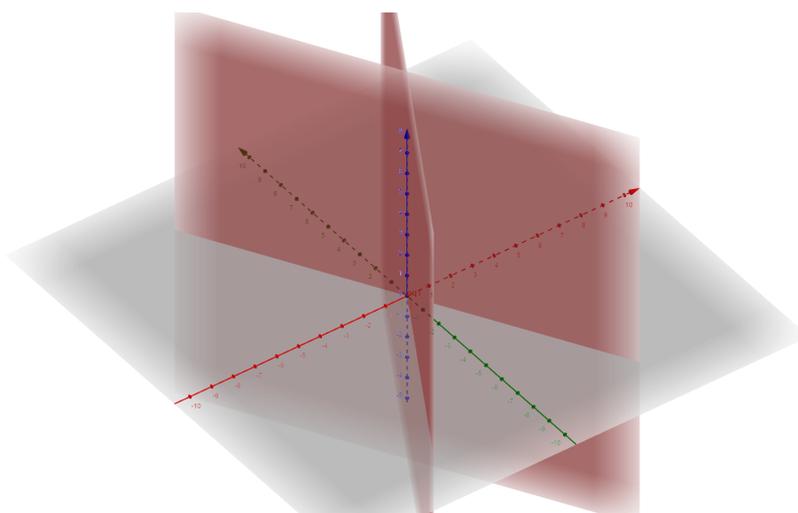


Figura 4.18 Planos concorrentes  $3x^2 - 5y^2 = 0$

#### 4.0.11 Cilindro elítico e Cilindro hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano e Conjunto vazio - e suas formas canônicas.

Estamos considerando a quádrlica que na sua forma canônica é uma quádrlica sem centro:

##### CASO 1 - CILINDRO ELÍTICO:

$$Ax^2 + Dy^2 = M$$

Aqui

$$A > 0, \quad D > 0 \quad e \quad M > 0.$$

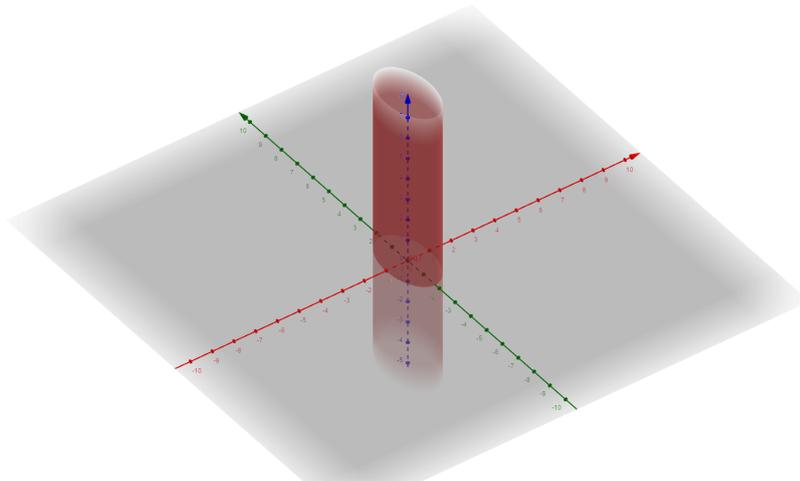


Figura 4.19 Cilindro Elítico  $3x^2 + 5y^2 = 3$

##### CASO 2 - CONJUNTO VAZIO

$$Ax^2 + Dy^2 = -M, \quad A > 0, \quad D > 0, \quad M > 0.$$

#### 4.0.12 Cilindro hiperbólico com “eixos focais” sobre os eixos do sistema cartesiano - e sua forma canônica.

$$Ax^2 - Dy^2 = M$$

Aqui

$$A > 0, \quad D > 0, \quad M \neq 0.$$

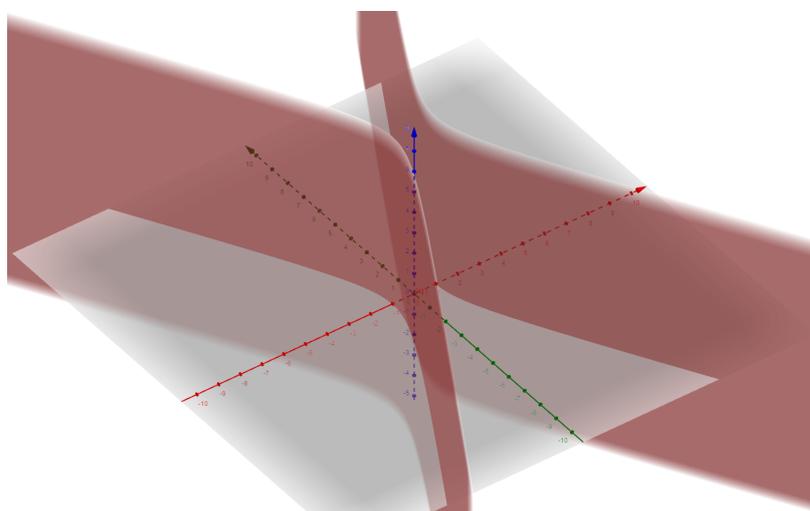


Figura 4.20 Cilindro hiperbólico  $3x^2 - y^2 = 3$

#### 4.0.13 Cilindro parabólico com “eixos focais” e “reta diretriz” sobre os eixos do sistema cartesiano e Par de planos coincidentes - e suas formas canônicas.

Estamos considerando a quádrlica que na sua forma canônica. Também neste caso a quádrlica não tem centro:

##### CASO 1 - CILINDRO PARABÓLICO:

$$Ax^2 = Hy$$

Aqui  $A > 0$  e  $H > 0$ .

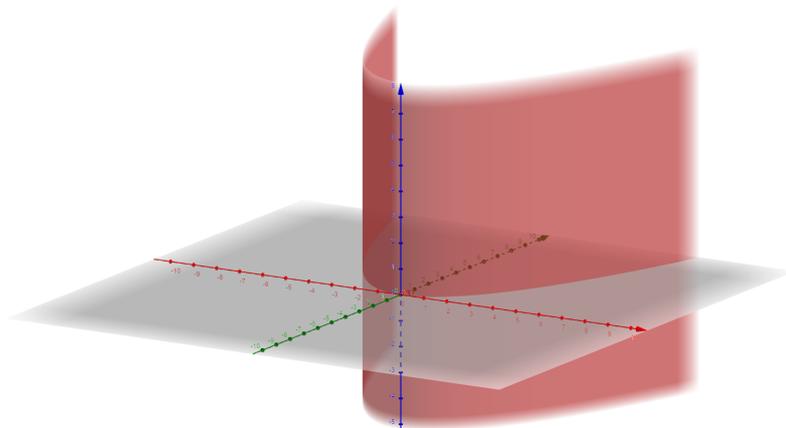


Figura 4.21 Cilindro parabólico  $x^2 = 4y$

**CASO 2 - UM PAR DE PLANOS COINCIDENTES:**

$$Ax^2 = 0$$

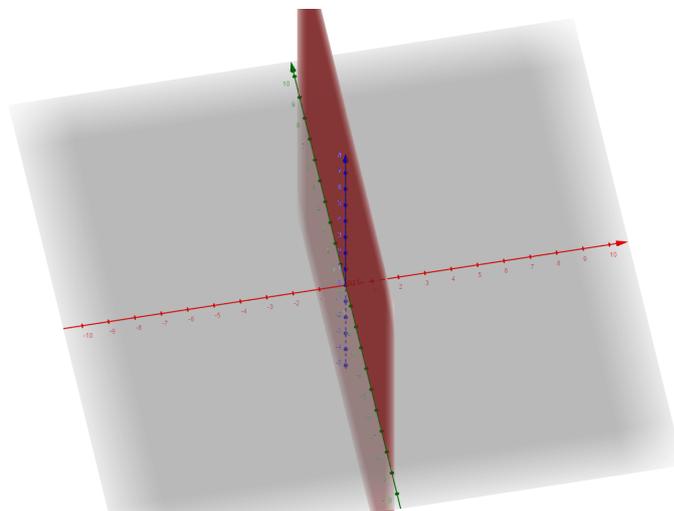


Figura 4.22 Planos coincidentes  $3x^2 = 0$

#### 4.0.14 Quádricas com termos mistos.

Vamos finalizando nosso trabalho discorrendo como lidar com uma quádrlica completa, isto é, em que aparecem todos os termos, inclusive os termos mistos. Consideremos a equação

geral na forma (4.3)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + Gx + Hy + Iz + M = 0,$$

em que  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} a_{ij}^2 > 0$ . Isso significa que algum plano de simetria não é paralelo a algum plano coordenado. Essa é a principal razão para usarmos a contribuição da Álgebra Linear que fizemos no início, pois, poderemos efetuar uma rotação de eixos coordenados de forma que num novo sistema de eixos coordenados todos os coeficientes dos termos mistos se anulem.

Como faremos isso?

Consideremos a forma quadrática:  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$q(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2, \quad (4.14)$$

obtida a partir dos termos de “segundo grau” da equação de nossa quádrlica acima(4.3).

Essa forma quadrática pode ser considerada como associada à forma bilinear simétrica

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f((x, y, z), (u, v, w)) = a_{11}xu + a_{12}(xv + yu) + a_{13}(xw + zu) + a_{22}yv + a_{23}(yw + zv) + a_{33}zw.$$

Podemos representar essa forma bilinear simétrica matricialmente assim

$$f((x, y, z), (u, v, w)) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Ou ainda assim

$$f((x, y, z), (u, v, w)) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Em que o produto interno que estamos indicando é o produto interno canônico sobre o conjunto das matrizes  $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ .

Nessa linguagem a equação de nossa quádrlica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

pode ser vista assim

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle + M = 0. \quad (4.15)$$

A matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

é denominada de matriz da forma quadrática (4.14) ou da forma bilinear e simétrica associada à forma quádrlica (4.14). Obviamente essa matriz é simétrica. Portanto podemos associar a ela um operador linear autoadjunto  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$T(x, y, z) = \mathbb{A} \cdot (x, y, z).$$

De acordo como o teorema (2.14) e o teorema (2.12) sobre o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , poderemos determinar que ele admite uma base ortonormal  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  constituída de autovetores do operador  $T$  associados aos seus respectivos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Isto é decorrência do

fato que o operador  $T$  é autoadjunto. Cabe salientar que a matriz  $\mathbb{B}$  de  $T$  nesta base  $\mathcal{B}$  é uma matriz diagonal, obviamente constituída pelos autovalores de  $T$ .

Consideremos a matriz

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}.$$

cujas colunas são

$$v_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \end{bmatrix}.$$

$j = 1, 2, 3$ , as coordenadas dos vetores da base  $\mathcal{B}$  expressos na base canônica. Essa matriz  $\mathcal{M}$  é chamada **matriz mudança de base da base canônica [que chamaremos de base antiga] para a base  $\mathcal{B}$  [que chamaremos de base nova]**. Se  $\alpha = (x, y, z)$  é um vetor qualquer de  $\mathbb{R}^3$  expresso na base antiga, esse mesmo vetor tem coordenadas  $\alpha = (x', y', z')$  na base nova e essas coordenadas estão relacionadas assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'v_{11} + y'v_{12} + z'v_{13} \\ x'v_{21} + y'v_{22} + z'v_{23} \\ x'v_{31} + y'v_{32} + z'v_{33} \end{bmatrix}.$$

Substituindo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

em (4.15) obtemos

$$\left\langle \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix}, \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + M = 0.$$

Portanto

$$\left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \mathcal{M}^t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{M}^t \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + M = 0.$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \mathbb{B} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{M}^t \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + M = 0.$$

E assim obtemos

$$\left\langle \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} G' \\ H' \\ I' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle + M = 0.$$

Portanto nossa equação (4.3) se transforma em

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + G'x' + H'y' + I'z' + M = 0.$$

Observe que os termos mistos se anularam. O que fizemos até aqui é o que denominamos de **movimento de rotação de eixos coordenados**. O próximo passo será efetuar uma **movimento de translação de eixos coordenados** e assim eliminarmos termos lineares quando isso for possível e assim chegarmos à forma canônica da quádrlica como descrito na seção anterior.

**Exemplo 4.1. (Elipsoide)** Consideremos a quádrlica dada pela equação

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 18x - 12y + 6z - 18 = 0 \quad (4.16)$$

*Classifique-a reduzindo-a à sua forma canônica.*

Reescrevendo a equação (4.16) no formato (4.3)

$$5x^2 - 4xy + 0xz + 6y^2 - 4yz + 7z^2 - 18x - 12y + 6z - 18 = 0,$$

notamos que  $a_{11} = 5$ ,  $a_{12} = -2$ ,  $a_{13} = 0$ ,  $a_{22} = 6$ ,  $a_{23} = -2$ ,  $a_{33} = 7$ ,  $G = -9$ ,  $H = -6$ ,  $I = 3$  e  $M = -18$ .

A matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Obviamente esta matriz é simétrica e real, logo seu polinômio característico se decompõe num produto de fatores lineares, ou, em outras palavras esse polinômio admite 3 raízes reais, não necessariamente distintas:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 6 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9).$$

Nesse caso particular, a matriz  $A$  admite 3 autovalores distintos  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$  e  $\lambda_3 = 9$ .

Vamos determinar os respectivos autovetores.

Para:  $\lambda_1 = 3$  temos

$$(3I - A) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 2y \\ 2x - 3y + 2z \\ 2y - 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o autoespaço associado com o autovalor 3 é o autoespaço gerado por  $[2, 2, 1]$ .

Para:  $\lambda_2 = 6$  temos

$$(6.I - A) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 2z \\ 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o autoespaço associado com o autovalor 6 é o autoespaço gerado por  $[-2, 1, 2]$ .

Para:  $\lambda_3 = 9$  temos.

$$(9.I - A) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 2y \\ 2x + 3y + 2z \\ 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto o autoespaço associado com o autovalor 9 é o autoespaço gerado por  $[1, -2, 2]$ .

Normalizando esses geradores obtemos a nossa base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ , onde

$$v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{e} \quad v_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

A matriz mudança de base será

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G' \\ H' \\ I' \end{bmatrix} = \mathcal{M}^t \begin{bmatrix} G \\ H \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -18 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Nossa equação (4.16) se tornará  $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18x' + 12y' + 6z' - 18 = 0$ .

Completando quadrados obtemos

$$3.(x' - 3)^2 + 6.(y' + 1)^2 + 9(z' + \frac{1}{3})^2 = 52.$$

Equivalentemente obtemos

$$\frac{(x' - 3)^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{3}}\right)^2} + \frac{(y' + 1)^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{6}}\right)^2} + \frac{(z' + \frac{1}{3})^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{9}}\right)^2} = 1.$$

E assim obtivemos o elipsoide

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{6}}\right)^2} + \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{52}{9}}\right)^2} = 1.$$



# Conclusão

Quando utilizamos técnicas de geometria analítica para encontrar a forma canônica de cônicas e quádricas, ou seja, para rotacionar e transladar uma cônica ou quádrica, muitas vezes não nos atentamos à teoria que existe por trás dessas técnicas. Por isso que o intuito desse trabalho foi o de mostrar definições e teoremas em Álgebra Linear para entender o que está por trás de tais técnicas.

De fato, para criarmos um sistema de eixos ortogonais tal que os eixos principais da cônica ou os eixos principais das secções da quádrica com os planos coordenados não estejam rotacionados, precisamos de uma base ortonormal para “orientar” tal sistema. Vimos que é possível criar essa base pois a forma bilinear associada à forma quadrática da cônica ou quádrica é simétrica e com isso o operador linear associado a essa forma é autoadjunto. Esse operador sendo autoadjunto, possui autovetores (os vetores da nossa nova base). Foram esses vetores que possibilitaram a diagonalização da matriz da forma quadrática (do operador autoadjunto) e com isso, os coeficientes que multiplicavam os termos mistos da equação da cônica ou quádrica se tornaram zeros. Ou seja, sob a nova base ortonormal (sob novos eixos), a cônica ou quádrica não está mais rotacionada. Por fim, nós completamos quadrados (transladamos nossos novos eixos) de tal forma que o centro (ou o vértice) da cônica ou quádrica estivesse na origem, agora de um novo sistema (rotacionado e transladado). Isso quando possível. Foi sob esse novo sistema que obtivemos a forma canônica que desejávamos.

Podemos concluir que a Álgebra Linear tem importante relevância nos estudos de cônicas e quádricas. Além disso, a classificação das cônicas e quádricas e suas formas degeneradas proporcionou um aprofundamento nos estudos de Geometria Analítica.



## Referências Bibliográficas

- [1] BALDIN, Yuriko Y; FURUYA, Yolanda K. S. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [2] COELHO, Flávio U.; LOURENÇO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.
- [3] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [4] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray A. **Álgebra Linear**. 1 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1971.
- [5] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray A. **Álgebra Linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.