



GOVERNO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET - FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL
PROFMAT - UNEMAT – SINOP



GLEDSON NILTON EMILIANO

**PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO “SOFTWARE” GEOGEBRA NO ENSINO
MÉDIO COM A CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE SECÇÕES EM SÓLIDOS
GEOMÉTRICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE VOLUMES PARCIAIS**

Sinop - MT
2021

GLEDSON NILTON EMILIANO

**PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO “SOFTWARE” GEOGEBRA NO ENSINO
MÉDIO COM A CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE SECÇÕES EM SÓLIDOS
GEOMÉTRICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE VOLUMES PARCIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional PROFMAT - UNEMAT – SINOP da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ciências Exatas e Tecnológicas.

Orientador: Prof. Dr. OSCAR ANTONIO GONZALEZ CHONG.

Co-orientador: Prof. Dr. ROGÉRIO DOS REIS GONÇALVES.

FICHA CATALOGRÁFICA

Luiz Kenji Umeno Alencar CRB 1/2037

E53p EMILIANO, Gledson Nilton.
Proposta de Utilização do "Software" Geogebra no Ensino Médio com a Construção e Exploração de Secções em Sólidos Geométricos para a Determinação de Volumes Parciais / Gledson Nilton Emiliano - Sinop, 2021.
90 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso
(Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong.
Coorientador: Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves.

1. Sólidos Geométricos. 2. Secções. 3. Áreas. 4. Volume. 5. Geogebra. I. Gledson Nilton Emiliano. II. Proposta de Utilização do "Software" Geogebra no Ensino Médio com a Construção e Exploração de Secções em Sólidos Geométricos para a Determinação de Volumes Parciais: .

CDU 51(07)



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT UNEMAT - SINOP



GLEDSON NILTON EMILIANO

PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO MÉDIO
COM A CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE SECÇÕES EM SÓLIDOS
GEOMÉTRICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE VOLUMES PARCIAIS

Trabalho de Conclusão apresentado ao Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática – PROFMAT – da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop, como requisito para obtenção do título de mestre em Matemática, julgado pela Banca composta pelos membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong
Orientador/Presidente da Banca
UNEMAT/MT

Prof. Dr. Edson Pereira Balbosa
Avaliador Externo
(UFMT/MT)

Prof. Dr. Miguel Tudayuki Koga
Avaliador Interno
UNEMAT/MT

Sinop/MT, 04 de fevereiro de 2021.



Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional
UNEMAT- Sinop Avenida dos Ingás, nº 3001 - Centro – CEP: 78.555-000 – Sinop–
MT. Tel./Fax: (66)9601-8925 – Cx. Postal: 680 – profmat-unemat@unemat-net.br



Á Deus.

À minha família.

Aos meus amigos e colegas de trabalho.

Aos meus alunos.

Aos meus professores e companheiros do Mestrado.

.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, à Deus.

Segundo para meus Orientadores Prof. Dr. Oscar Antonio Gonçales Chong e Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves, que me proporcionaram a honra de participar dessa pesquisa.

À minha esposa amada Adalucy e filhos, que me acompanharam sempre e me deram apoio mesmo nas horas que eu estava ausente.

Aos meus pais e demais familiares.

Amigos do curso e escolas.

Agradeço...

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus
escreveu o Universo”.
(GALILEU GALILEI).

RESUMO

No estudo da geometria espacial, na maioria das salas de aula, o professor utiliza-se de uma superfície plana para apresentar os elementos geométricos em figuras tridimensionais. Desta forma, o professor é forçado a desenhar tais elementos, que por ser em uma superfície plana, deformados para se ter uma visão/noção de profundidade. Sendo assim, este trabalho se justifica, pois, visa apresentar uma proposta metodológica que pretende facilitar o desenvolvimento e o trabalho pedagógico que envolve tanto a visualização como a interpretação de figuras tridimensionais tendo o aluno, através do “*software*” GeoGebra. Tomamos como proposta a utilização do “*software*” GeoGebra para o ensino de sólidos geométricos baseado na construção e exploração de secções em sólidos geométricos, com a exploração de conteúdos como semelhança, cálculo de distâncias específicas, áreas de secções, assim como determinar volumes parciais limitados pela intersecção entre um plano e uma região do sólido geométrico estudado, aplicável no Ensino Médio. Desta forma, o presente estudo visa como objetivo, apresentar uma proposta de utilização e exploração de um plano sector para o estudo de sólidos geométricos com auxílio do “*software*” GeoGebra, tanto para construção como para a exploração de secções em sólidos geométricos específicos, com a aplicação de conteúdos como semelhança, cálculo de distâncias específicas, áreas de secções, assim como determinar volumes parciais limitados pela intersecção entre um plano e uma região de um sólido geométrico, em um estudo aplicável no Ensino Médio. Buscando atender aos objetivos propostos e desenvolver a temática do estudo, realizamos uma pesquisa descritivo-exploratória com uma abordagem qualitativa, no sentido de apresentar e aprofundar sobre o uso do “*software*” GeoGebra para o uso em ensino de matemática, na prática, em sala de aula. Os resultados apresentam uma sequência didática proposta, que vem como uma estratégia para contribuir para um entendimento mais completo dos sólidos estudados, mais especificamente, prismas, cilindros, esferas e tronco de cone. As propostas apresentadas neste estudo, mostram que o professor pode adaptar sua prática cotidiana para lecionar e ensinar o aluno a obter medidas em sólidos geométricos, o qual se mostra como um modelo matemático para determinar área, alturas, ângulos e volumes parciais com o uso do GeoGebra.

Palavras-chave: Sólidos Geométricos. Secções. Polígonos. Áreas. Volume. GeoGebra.

ABSTRACT

In the study of spatial geometry, in most classrooms, the teacher uses a flat surface to present the geometric elements in three-dimensional figures. In this way the teacher is forced to draw such elements, which, being on a flat surface, are deformed to have a vision / notion of depth. Therefore, this work is justified, therefore, aims to present a methodological proposal that aims to facilitate the development and the pedagogical work that involves both the visualization and the interpretation of three-dimensional figures having the student, through the GeoGebra software. We take as a proposal the use of GeoGebra software for teaching geometric solids based on the construction and exploration of sections in geometric solids, with the exploration of contents such as similarity, calculation of specific distances, section areas, as well as determining limited partial volumes. by the intersection between a plane and a region of the studied geometric solid, applicable in high school. Thus, the present study aims as a general objective, to present a proposal for the use and exploration of a sector plan for the study of geometric solids with the aid of the GeoGebra software, both for construction and for the exploration of sections in specific geometric solids, with the application of content such as similarity, calculation of specific distances, section areas, as well as determining partial volumes limited by the intersection between a plane and a region of a geometric solid, in a study applicable in high school. Seeking to meet the proposed objectives and develop the theme of the study, we conducted a descriptive-exploratory research with a qualitative approach, in order to present and deepen on the use of the GeoGebra software for use in teaching mathematics, in practice, in the classroom of class. The results present a proposed didactic sequence, which comes as a strategy to contribute to a more complete understanding of the studied solids, more specifically, prisms, cylinders, spheres and cone trunk. The proposals presented in this study show that the teacher can adapt his daily practice to teach and teach the student to obtain measurements in geometric solids, which is shown as a mathematical model to determine area, heights, angles and partial volumes with the use of GeoGebra.

Keywords: Geometric Solids. Sections. Polygons. Areas. Volume. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Apresenta questão de geometria aplicada no ENEM 2016.....	19
Figura 2. Mostra diálogo ocorrido com um ex-aluno, o qual solicita um auxílio para cálculo do volume parcial de um tanque cilíndrico.....	20
Figura 3. Três polígonos, triângulo, retângulo e pentágono.....	31
Figura 4. Exemplos de área de uma superfície triangular.....	32
Figura 5: Representação geométrica da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$	33
Figura 6. Apresentação de algumas secções planas do cubo.....	34
Figura 7. Página inicial do GeoGebra.....	38
Figura 8. Ambiente geometria inicial do GeoGebra.....	38
Figura 9. Ambiente geometria mostrando as formas geométricas que podem ser trabalhadas no “software” com os alunos.....	39
Figura 10. Ambiente Geometria 3D mostrando a barra com mensagem de “AJUDA” para utilização de um determinado botão.....	39
Figura 11. Exemplo de figuras construídas, um triângulo e um quadrilátero, com os passos citados.....	41
Figura 12. Exemplo de valor do comprimento do lado AC do triângulo e do lado DG do quadrilátero, com o passo citado.....	41
Figura 13. Exemplo de valor do perímetro de cada polígono, com o passo citado.....	42
Figura 14. Exemplo de valor da área de cada polígono, com o passo citado.....	43
Figura 15. Hexágono como secção.....	44
Figura 16. Quadrilátero como secção.....	45
Figura 17. Quadrilátero como secção.	45
Figura 18. Pentágono como secção.....	46
Figura 19. Hexágono como secção.....	46
Figura 20. Segmento “d”, posto como uma incógnita e demais medidas obtidas através de botões no GeoGebra, com secção triangular.....	47
Figura 21. Segmento “d”, posto como uma incógnita e demais medidas obtidas através de botões no GeoGebra, com secção pentagonal.....	48
Figura 22. A construção no GeoGebra proporcionando aplicar a semelhança de triângulos para determinar medidas.....	48
Figura 23. A construção no GeoGebra proporcionando aplicar a semelhança de triângulos para determinar medidas.....	49
Figura 24. Secção do cilindro.....	51
Figura 25. Variação que ocorre com a área da secção conforme a altura do líquido.....	52
Figura 26. Ferramentas/botões usado para estudo do cilindro.....	52

Figura 27. Área do polígono/secção. Vista da base do cilindro	53
Figura 28. Área do polígono gerado na secção.....	55
Figura 29. Os tanques cilíndricos em postos: formatos e posições de instalação. Cilindro construído no Geogebra como modelo matemático.....	56
Figura 30. Tanque cilíndrico para instalação suspensa: formatos, posições e leituras com utilização de régua para determinar de volume parcial.....	57
Figura 31. Calculando o volume. Vista frontal de uma base do tanque cilíndrico..	58
Figura 32. Cálculo de volume conforme a posição (altura) da secção.....	59
Figura 33. Imagem mostra a figura construída no GeoGebra e as variáveis e a expressão que dá o volume do líquido usando variáveis determinadas pela secção.....	61
Figura 34. Imagem mostra a figura construída no GeoGebra e a aplicação matemática para obter os valores numéricos das variáveis e a expressão que dá o volume do líquido usando variáveis determinadas pela secção.....	62
Figura 35. Tanque representado por sólido composto por cilindros e tronco de cone, com planos sectores em posições (alturas) distintas.....	63
Figura 36. Construção do tronco de cone, as coordenadas dos vértices de um trapézio retângulo e os botões utilizados.....	64
Figura 37. Trapézio retângulo na origem e lado perpendicular às base contido no eixo X.....	65
Figura 38. Mostra o tronco de cone com uma secção em sua região lateral, formando um ramo de hipérbole. No detalhe a altura H do vértice da hipérbole em relação à base maior do tronco.....	66
Figura 39. Mostra um plano sector e a distância h indicando uma “altura” em relacionado a um plano na “horizontal”	66
Figura 40. Região do tanque formada pelo tronco de cone com as variáveis que representam suas dimensões.....	67
Figura 41. Mostra um tronco de cone com cinco partições de dez, no qual se pode ver duas partições intersectando sua base menor.....	70
Figura 42. Tanque formado por cilindros e tronco de cone com dimensões definida - $R=5u, r=3u, L=6u, H'=12u$ e $l=4u$	71
Figura 43. Mostra o tronco de cone com 10 de 20 partições, feitas por planos sectores perpendiculares às bases e paralelos entre si.....	72
Figura 44. Mostra a aba que disponibiliza o Geogebra Classic para acesso à planilha de cálculos.....	76
Figura 45. Mostra a aba que disponibiliza a “Planilha” de cálculos.....	76
Figura 46. Mostra a planilha de cálculo aberta para construção da tabela com valores resultantes das fórmulas V_{1h}, V_{2h}, V_{3h} e V_F	77

Figura 47. Mostra o teclado/calculadora disponível com quatro campos distintos.....	77
Figura 48. Mostra a fórmula, para obter os valores de $V_1(h)$, inserida na célula da planilha.....	78
Figura 49. Mostra a fórmula, para obter os valores de $V_2(h)$, inserida na célula da planilha.....	78
Figura 50. Mostra a planilha finalizada, para obtenção do volume total do tronco de cone.....	79
Figura 51. Cubo inclinado e uma secção construído com um plano paralelo ao plano α	80
Figura 52. Cubo com inclinação variável e uma secção construído com um plano paralelo ao plano α	80
Figura 53. Tanques esféricos que podem ser usados em atividades como exemplo para cálculos envolvendo geometria.....	81
Figura 54. Tanques cilíndricos com extremidades esféricas que podem ser usados em atividades como exemplo para cálculos envolvendo geometria.	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone.....	72
Tabela 2. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone usando a fórmula $V_2(h)$	73
Tabela 3. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone usando $V_3 = V_1(h) - V_2(h)$ para $R - r \leq h \leq R$	73
Tabela 4. Exemplo para obter o volume das 10 fatias criadas.....	74
Tabela 5. Apresenta o erro das fórmulas neste exemplo.....	75
Tabela 6. Apresenta os valores, com aproximações, relacionados ao exemplo.....	75

LISTA DE QUADROS

- Quadro 1.** Comandos usados para “simulação” de um tanque cilíndrico posicionado com seu eixo central na horizontal.....60
- Quadro 2.** Comandos usados para construção de um tanque com formato de tronco de cone com seu eixo central contido no eixo X.....64
- Quadro 3.** Comandos usados para construção determinação de planos sectores e perpendiculares às bases do tronco de cone.65

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
2 REVISITANDO A GEOMETRIA.....	22
3 TECNOLOGIA APLICADA AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.....	27
3.1 Revisando alguns conceitos de geometria.....	30
3.1.1 O plano.....	30
3.1.2 Intersecção de planos.....	30
3.1.3 Polígonos.....	31
3.1.4 Áreas.....	31
3.1.5 Área de uma superfície triangular.....	32
3.1.6 Área de uma superfície retangular.....	33
3.1.7 Secção.....	34
3.1.8 Volumes.....	35
3.2 O GeoGebra nos estudos de sólidos geométricos: apresentação da interface.....	36
4 A PROPOSTA: COMO O PROFESSOR PODE UTILIZAR O GEOGEBRA PARA DETERMINAÇÃO DE COMPRIMENTOS, ÁREAS E VOLUMES, PARCIAIS E TOTAIS, EM SALA DE AULA.....	37
4.1 Conhecendo o GeoGebra.....	37
4.2 Sequência de atividades propostas.....	40
4.2.1 Atividade proposta 1 - Começando a praticar: construção de dois polígonos e determinação do seu perímetro e sua área.....	40
4.2.2 Atividade proposta 2 – Praticando com figuras 3D: Secções em Paralelepípedo reto-retângulo.....	43
4.2.3 Atividade proposta 3 - Explorar a secção de um cilindro - Cilindro deitado e secção plana perpendicular às bases.....	49
4.2.4 Atividade proposta 4 - A construção no GeoGebra: Volume parcial no cilindro - Mensurar volumes parciais em tanques.....	56
4.2.5 Atividade proposta 5 - Tanque formado por cilindros e tronco de cone.....	63
4.3 Outras propostas.....	79
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	82
5.1 Trabalhos futuros.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87

1 INTRODUÇÃO

Situações envolvendo a exploração dos elementos que compõe os sólidos geométricos surgem naturalmente durante a resolução de diversos problemas do cotidiano, seja este para cálculos de áreas ou de volumes e até mesmo de distâncias. É comum encontrarmos um trabalho que apenas objetiva repassar de forma superficial tais resoluções, aplicando-se fórmulas comumente encontradas em livros, sendo este na sua maioria um ensino mecânico e repetitivo.

Santos e Santos (2019, p. 22) destacam que o “GeoGebra¹ contribui para regular o ensino, quando o professor durante a planificação reconhece que a forma como usa a tecnologia pode alterar a forma como o conhecimento é apresentado”. O presente trabalho toma como proposta apresentar modelos para explorar figuras espaciais e suporte ao ensino do cálculo de volume de figuras geométricas espaciais, utilizando-se de um plano sector e da análise e estudo das secções obtidas dos sólidos, explorada de forma dinâmica através do “*software*” GeoGebra.

Este trabalho estava, inicialmente, proposto para ser aplicado a uma turma do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Sorriso-MT, todavia a situação atual de uma pandemia global, infelizmente não permitiu o desenvolvimento em uma escola, tornando-se então, uma proposta para desenvolvimento em sala de aula.

Lages (2010) em um vídeo do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM)² descreve que “na geometria espacial não tem jeito, por que você desenha no quadro, e o quadro é bidimensional, então você tem que distorcer as figuras, então você não tem o auxílio imediato da visão, você tem que completar esse auxílio com a imaginação [...]”. Neste vídeo, Lages (2010) comenta o trabalho do professor Paulo Cezar Pinto de Carvalho, no livro “Introdução à Geometria Espacial”, no qual o autor cita a dificuldade dos alunos, mesmo no Ensino Médio, ao transpassar da geometria plana para a geometria espacial.

Nessa concepção, tanto Lages (2010) como o professor Paulo Cezar,

¹ Trata-se de um “*software*” livre e gratuito, de matemática dinâmica, que associa a álgebra, a geometria, planilhas de cálculo, disponibilizado em <https://www.GeoGebra.org/>. Acesso em 24 de abr de 2020.

² Capturado do vídeo “Retas e Planos” publicado por PAPMEM. (2010). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9PhtCorn0Jw>. Acesso em 16 de setembro de 2020.

alegam ser mais fácil trabalhar a geometria plana, pois está se faz utilizando objetos que modelam de forma satisfatória o plano como, por exemplo, um quadro, uma folha de caderno ou livro.

Desta forma, ao apresentar um elemento da geometria plana através de uma representação pictórica, fica possível uma apresentação fiel do elemento estudado. Conforme o exemplo citado por Lages (2010), o professor de Matemática ao apresentar um triângulo retângulo ao aluno, seja através de um objeto com tal forma (esquadro, outros) ou um desenho feito no quadro (aqui também podemos citar, retas, círculos, quadrados, entre outros), tem a possibilidade de desenhá-lo de forma muito próxima (ou tentar) a se constatar as propriedades que o define, ou seja, como o aluno deve visualizar ou imaginar um triângulo retângulo. De acordo com Carvalho (2005) essa facilidade não ocorre no estudo da geometria espacial, que segundo o mesmo, na introdução de seu livro, ao se passar para o estudo da geometria espacial e “em geral, recorreremos a projeções bidimensionais de tais objetos. Mas estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção” (CARVALHO, 2005, p. 1).

O estudo da geometria espacial utilizando uma superfície plana disponível na maioria das vezes, o “quadro negro” em uma parede da sala, para apresentar os elementos geométricos tridimensionais, fica forçado a desenhar os elementos que compõem tais figuras, o quadro, por exemplo, sendo com deformações como, por exemplo, um círculo representado por uma elipse, um quadrado por um paralelogramo, entre outros. No mesmo sentido, temos a ocultação total ou parcial de alguns elementos (arestas, faces, vértices) na intenção de proporcionar ao aluno uma imagem 3D. Tais deformações/ocultações, não raramente, acabam confundindo a interpretação por parte dos mesmos. Dessa forma, a Atividade Proposta vem como uma estratégia para contribuir para um entendimento mais completo dos sólidos estudados, mais especificamente, prismas, cilindros, esferas e tronco de cone.

Alguns problemas matemáticos apresentados em questões de avaliações que objetivam determinar as variações nos polígonos/figuras obtidos por secções em sólidos, especificamente em prismas, pirâmides e cilindros, explorando as secções em um sólido permeia situações problemas em contextos onde, podemos mudar o foco e propor a resolução do problema, ainda explorando um plano

sector, visando determinar, com boa aproximação, a cada momento, a quantidade de material líquido (volume) existente em sólidos geométricos com determinadas formas, objetivando a exploração e construção de modelos matemáticos específicos, pretendendo diminuir as dificuldades em sala de aula.

Existe um complexo processo desenvolvido pelo ser humano, ao escolher quais serão os problemas a serem resolvidos e quais as diferentes formas de resolução efetuadas por nós e pela máquina. Dessa forma, a proposta pedagógica é apresentada com apoio de um ambiente informatizado, ou seja, em um laboratório de informática e/ou a utilização de “*smartphones*” ou “*tablets*”, atualmente de fácil acesso.

Considerando que a cada problema eleito e seguidamente buscado sua solução, traz também outros valores que podem ser explorados, gerando novos conhecimentos. Este trabalho se justifica, pois, visa apresentar uma proposta metodológica que pretende facilitar o desenvolvimento e o trabalho pedagógico que envolve tanto a visualização como a interpretação de figuras tridimensionais, através do dinamismo do GeoGebra, assim como de todos os elementos que a compõe a figura espacial estudada.

A investigação da realidade dos alunos envolvidos contribui com o envolvimento na resolução das situações problemas e podendo o aluno observar o quanto há de relacionamento entre o conteúdo explorado e o mundo ao seu redor.

Durante o trabalho em sala de aula, me chamou atenção, após o ENEM de 2016, uma alta procura, por parte de meus alunos, para discutirmos e conferirmos o gabarito de uma questão de geometria que continha a intersecção de um plano com uma pirâmide, na qual os alunos não conseguiam, em especial, visualizar e/ou entender sobre quais condições a intersecção entre um plano e uma pirâmide regular de base quadrada geraria um “pentágono”. Tal dúvida não se limitou a um pequeno universo, conforme se pode observar pela quantidade baixa de alunos que acertaram esta questão, sendo assim, vejo a necessidade em proporcionar caminhos para o desenvolvimento do ensino/aprendizagem para os alunos, na intenção de superar alguns entraves e dificuldades na interpretação dos elementos que compõem os sólidos estudados, compreendendo de forma satisfatória as propriedades geométricas envolvidas no estudo.

O uso do “*software*” permite a exploração das condições matemáticas

especificadas ao plano sector, para gerar secções em forma de polígonos distintos, posicionando o aluno em um processo de construção e interpretação das formas geométricas estudadas.

A seguir estão imagens que apresentam a questão e os resultados registrados (Figura 1).

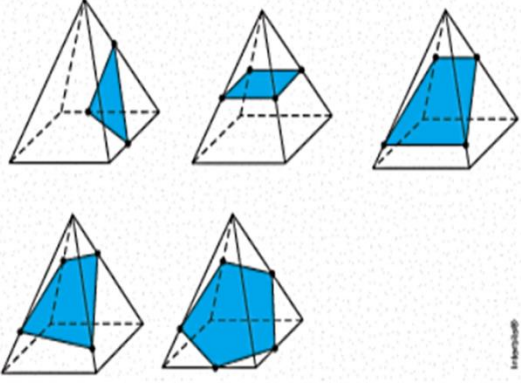
Figura 1. Apresenta questão de geometria aplicada no ENEM 2016.

QUESTÃO 162

É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

A Quadrados, apenas.
B Triângulos e quadrados, apenas.
C Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
D Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
E Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.



16%* dos alunos que realizaram o **ENEM 2016 (prova azul)** acertaram esta questão.

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Microdados do Enem 2016

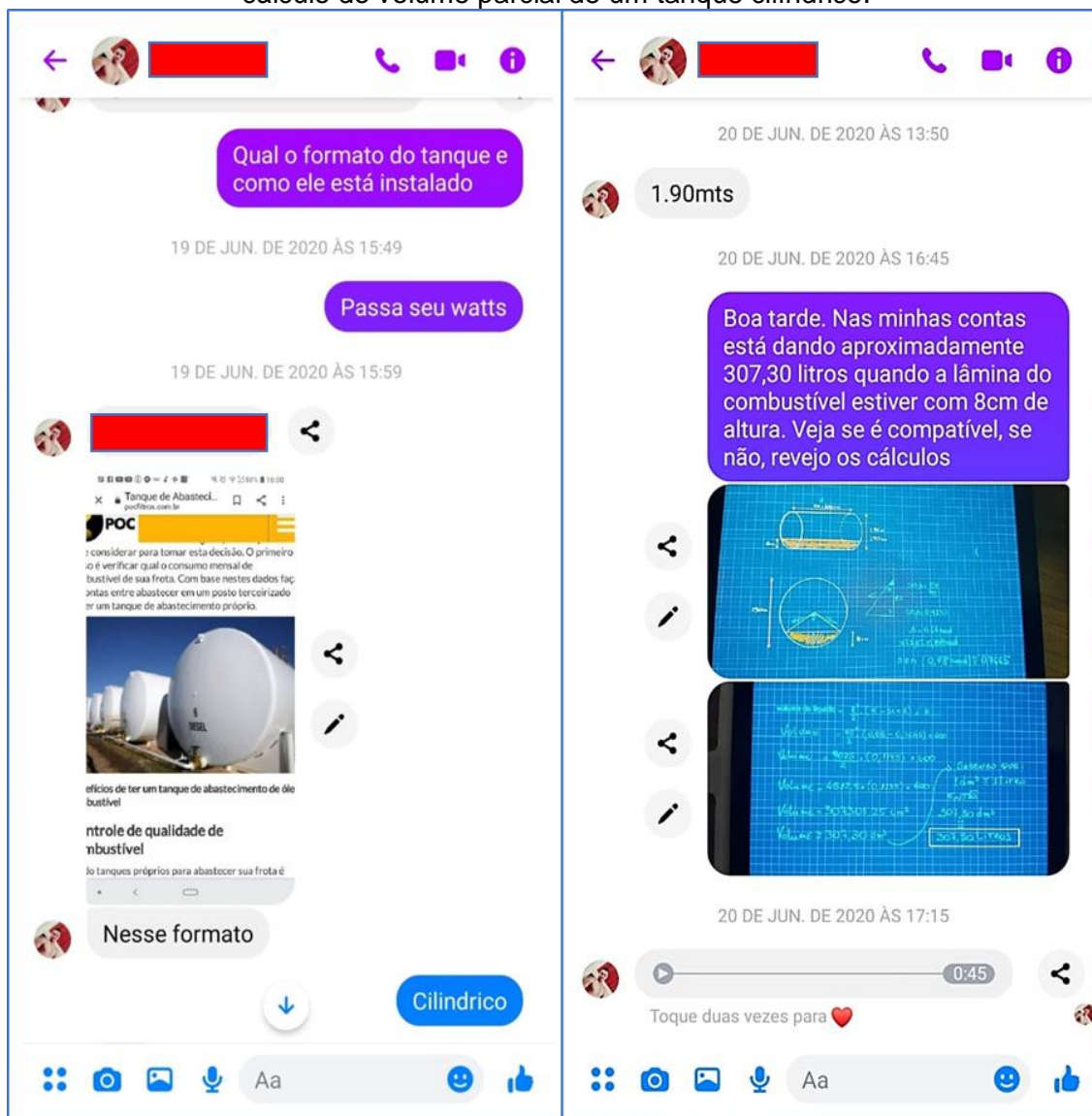
** esta porcentagem pode variar em $\pm 2\%$ em função da cor da prova realizada.*

Fonte: www.sprweb.com.br/mod_app/index.php

Já iniciado este trabalho, um ex-aluno enviou uma solicitação de ajuda relacionada ao volume de um líquido restante, contido em um tanque. Havia em seu trabalho uma dúvida sobre a quantidade de combustível restante em um tanque cilíndrico que se encontrava com seu eixo praticamente na horizontal, de tal forma que a válvula de liberação do combustível se encontrava a uma determinada altura em relação ao solo, restando então uma certa quantidade deste ponto para baixo.

A figura 2, abaixo mostra a interação ocorrida entre nós:

Figura 2. Mostra diálogo ocorrido com um ex-aluno, o qual solicita um auxílio para cálculo do volume parcial de um tanque cilíndrico.



Fonte: o autor (2020).

Diante deste problema, também traçamos como objetivos, uma sequência de atividades propostas, para gerar um ambiente para reflexões e análise, através do dinamismo do GeoGebra, calculando o volume parcial e/ou completo de sólidos que representam tanques, em contextos encontrados no dia-a-dia, propondo novas formas e modelos matemáticos satisfatórios.

A estrutura deste trabalho apresenta esta introdução, seguida pela fundamentação teórica, metodologia, resultados e considerações finais. Os resultados foram apresentados como "A proposta: como o professor pode utilizar o GeoGebra para determinação de comprimentos, áreas e volumes em sala de

aula” que mostra ao longo do texto uma estratégia que pode ser usada por professores durante suas aulas. Esse capítulo foi feito para atingir os objetivos propostos dessa pesquisa de mestrado. Como resultados foram disponibilizadas atividades para a construção de diversas situações problemas com a exploração visual e matemática de figuras geométricas, espaciais e planas. Essa estrutura foi usada como alternativa, pois as salas de aula, tanto do ensino fundamental como do ensino médio não estavam tendo aula no momento da pesquisa. Nesse caso tivemos que optar por essa modificação no projeto inicial e não trabalhar com pesquisa *in loco*.

Por fim, este trabalho expõe como meta final, construir modelos matemáticos que possam ser utilizados para recipientes (sólidos geométricos) regulares e irregulares, visando principalmente utilizar-se de uma realidade mais próxima do aluno, ou seja, recipientes utilizados para armazenar líquidos diversos, o quais estão no dia-a-dia, posicionados de uma forma que, seja usada a altura do líquido contido, de modo a determinar o mais exato possível, em cada momento, a quantidade de líquido contido e/ou retirado do recipiente. Os modelos e soluções obtidas podem ser aplicadas a quaisquer outros recipientes do mesmo tipo que apresentarem outras dimensões.

Desta forma, pretende-se que este trabalho tenha a intenção de buscar aplicações não tão comum, cito explorar de forma ampla um plano sector, que venham colaborar com ensino da Matemática, bem como suas possíveis aplicações.

Buscando atender aos objetivos propostos e desenvolver a temática do estudo, os procedimentos metodológicos adotados para o alcance dos objetivos buscam desenvolver uma pesquisa de abordagem exploratória bibliográfica, desenvolvendo-se um estudo sobre, sequência e proposta didática, uso do “software” GEOGEBRA em sala de aula para o uso em ensino da Matemática e o ensino da GEOMETRIA. Este método nos permite trabalhar processos sociais ainda pouco conhecidos referentes a grupos particulares, nos proporciona a construção de novas abordagens, revisão de conceitos e categorias durante a investigação (MINAYO, 2014).

Desta forma, objetivamos, proporcionar mais informações sobre determinado assunto; facilitar a delimitação de uma temática de estudo; definir os objetivos ou formular as hipóteses de uma pesquisa, ou ainda, descobrir um novo

enfoque para o estudo que se pretende realizar. Pode-se dizer que a pesquisa exploratória visa principalmente, o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.

Para a coleta de dados foi utilizada a base de dados da Biblioteca Virtual na plataforma Google Acadêmico, onde o critério de busca se deu através dos descritores: GeoGebra, história da matemática no Brasil, utilizando-se dos “operadores booleanos *and*, *or* e *and not*”. Para tal, foram encontrados com o indexador, resultados de publicações, artigos e livros de temas mais relevantes, sendo estes, utilizados para a pesquisa.

A coleta de dados é considerada a etapa da pesquisa onde se inicia a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas para levantamento dos dados. Para tanto detalharemos abaixo como se deu a coleta de dados da pesquisa em questão (MARCONI; LAKATOS, 2007).

O período de coleta de dados, ocorreu nos meses de fevereiro de 2019 a outubro de 2020, e foi realizada através do levantamento de artigos publicados em bases de dados virtuais, utilizando como técnica a leitura: exploratória, seletiva, analítica e interpretativa dos textos, com enfoque na temática do estudo e site oficial do GeoGebra disponível gratuitamente.

A leitura exploratória objetivou verificar até que ponto a obra consultada interessa ao pesquisador, a seletiva é a etapa pela qual o pesquisador faz a seleção dos materiais que de fato atende seu objeto de estudo, a analítica tem por finalidade organizar as informações encontradas nas fontes, facilitando o entendimento do problema da pesquisa, e a interpretativa é o momento em que relacionamos o que o autor nos fala com a nossa problematização (GIL, 2002).

2 REVISITANDO A GEOMETRIA

Os conceitos históricos apontam que a Matemática é uma ciência voltada ao estudo de números, grandezas e formas. Informações arqueológicas encontradas assinalam que desde a antiguidade o homem já fazia algumas operações matemáticas, contagem, desenhavam figuras geométricas buscando padronização. Nessa historicidade Matemática percebemos laços que fazem com que a Matemática se comunique com todas as áreas. Essa ligação existe, pois, a Matemática tem sinais que foram inseridos na sociedade a partir do uso de

palavras que exprimem ideias numéricas (BOYER; MERZBACH, 2019). Diante desse aspecto, neste tópico temos como objetivo apresentar os pressupostos teóricos em que baseamos nossa pesquisa, dando ênfase ao contexto histórico da Geometria.

Os estudos da Geometria, na Matemática, estão ao lado da humanidade homens no decorrer dos anos, contribuindo em suas construções diversas, crescendo a cada nova experiência em sua vida. Desta forma, os pontos a seguir nos assistirão a perceber um caminho, os usos e utilizações da Geometria.

Os babilônios, com a construção dos jardins suspensos (605 a.C.) e os Egípcios, o com a divisão de terras para a população pelo Faraó Sesóstris III, com a intensão de receber impostos são os primeiros povos citados na literatura que indicam o uso de geometria ao longo da história. “Quando o Rio Nilo transbordava, e tomava parte dessa terra, era necessária uma nova metragem da terra de cada agricultor. A partir dessas medições, teria surgido a geometria, do grego “*geometrein*”, sendo “*geo*” = terra e “*metrein*” = medir.” (FERREIRA, 2015, p. 4).

É interessante compreender o que se entende por geometria, a qual tem durante seu estudo, as relações envolvendo observação, assim como, a capacidade de identificar figuras em diversas formas e tamanhos, através de comparações medições.

A Geometria, já com os Egípcios antigos, quando ocorre a construção das pirâmides, a geometria tem se mostrada uma ferramenta dinâmica até os dias atuais, em sua trajetória, o estudo da geometria deu suporte a uma gama de profissionais.

Ao se olhar para a história da Geometria, no tempo em que se inicia com uma ciência organizada na Grécia Antiga, temos como ênfase os matemáticos geométricos, com destaque para Tales de Mileto, Arquimedes, Descartes e Euclides, este último, considerado de grande ênfase na geometria, com suas obras, entre elas, a de maior destaque, a obra “Os Elementos”.

Conforme Waldomiro (2011, p. 37), a qual cita Eves (2004) que credita a Tales os primeiros estudos da Geometria demonstrativa, assim como Andery (2004), colocando que, o avanço da Geometria dedutiva somente ocorreu após Euclides ser escolhido para chefia do departamento de Matemática da Universidade de Alexandria.

A obra, *Os Elementos*, de Euclides, tanto apresenta a introdução de um método que faz parte, quanto está continuamente ajudando a ciência até os dias atuais. Observando-se que, a sistematização da proposição, e os conceitos referentes ao sistema axiomático, admitidos sem demonstração para construir as figuras de maneira lógica, os três conceitos primitivos, de ponto, reta, plano e os postulados a eles relacionados, constituem a fundação para a Geometria, a qual chamamos de euclidiana, ainda úteis na atualidade, mesmo havendo questionamentos sobre sua utilização, por parte de alguns matemáticos.

Segundo Mocosky et al., (2012, p. 1) o ensino de Geometria passou a ser valorizado por ser uma frente da Matemática que é aplicável em cálculos de “forma dos objetos, nas edificações da construção civil, nas necessidades de desenvolvermos senso de localização, direção, sentido e na possibilidade que ela nos oferece para a resolução de problemas” em diversas áreas.

Segundo Waldomiro (2011, p. 37), Motta (2004) coloca que a história da Matemática possibilita a re-descoberta de conceitos em sala de aula e temos a possibilidade de re-criar com a utilização de “*softwares*” dinâmicos, no nosso caso, o Geogebra.

A Geometria usada tinha sua base matemática pautada nos ensinamentos de Ptolomeu. Nessa época:

Grandes nomes da matemática, como Pitágoras e Euclides viveram na Grécia. Pitágoras, discípulo de Tales, desenvolveu e aplicou os conhecimentos de matemática, mais especificamente de geometria à navegação, música e astronomia. Pitágoras deu nome a um importante teorema sobre o triângulo retângulo e sua escola chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Euclides, autor da obra "*Os Elementos*" introduziu o sistema axiomático, que parte de conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados/axiomas) para estabelecer de maneira ordenada sua geometria. Assim, três conceitos fundamentais e não definidos – o ponto, a reta e o plano - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda Geometria chamada euclidiana, que ensinamos até os dias de hoje nas escolas (FERREIRA, 2015, p. 5).

Ha tempos, no Brasil, a geometria é lidada como básica, e deveria ser ensinada no curso primário; desde este período, esta área do conhecimento vem sendo objeto de discussão nas propostas educacionais.

Dessa forma, o ensino das Matemáticas, no Brasil, começou com os jesuítas. Em algumas escolas elementares, foram ensinadas as quatro operações algébricas, e nos cursos de Arte foram ministrados tópicos mais adiantados, como, por exemplo, Geometria elementar (SILVA, 1999, p.3).

No Brasil, a geometria também esteve envolvida e usada na arte em guerra adquirida de seu país colonizador, Portugal, teve forte influência “dos ensinamentos sobre artilharia”, com aulas de Fortificação e Arquitetura Militar. Esse curso tinha duração de cinco anos.

Ensino de fortificações e desenhos foram ministradas nessas aulas com intuito de formar oficiais para proteger as “fronteiras marítimas” brasileiras. Estratégias de “defesa e ataque” deveriam ser adquiridos pelos oficiais nessa época. No entanto, faltavam os materiais didáticos disponíveis para o ensino de álgebra “redigidos na língua portuguesa”³. O primeiro professor a atuar no Brasil foi José Fernandes Pinto Alpoim (1738-1765). Com a formação em Engenheiro militar colaborou com a escrita de livros didáticos para o curso de Fortificação e Arquitetura Militar (Exame de Artilheiros (1744) e Exame de Bombeiros (1748)). Nesses livros havia conteúdos de geometria e a artilharia, assim como, a geometria e a trigonometria”. Mocrosky et al., (2012) descreve que “ambas as obras abordavam os conteúdos de modo elementar, o que nos leva a associar ao que hoje é previsto no ensino fundamental e no Ensino Médio, respectivamente”.

Valente (1999) destaca que dois livros eram adotados, “ Geometria Prática” associada à “Aritmética” de Bézout, sendo que, a obra de Bernard Forest Bêlidor, utilizada no Brasil, foi uma tradução da segunda edição, de 1757, e o Curso de Matemático de Bêlidor com conteúdo de matemática e a aplicação da Matemática na engenharia (sendo uma versão traduzida para a língua portuguesa para criação da Faculdade de Matemática na Universidade de Coimbra). O ensino de matemática com o uso do livro de Bêlidor e de Bézout foi dividido em duas frentes, sendo uma para a aritmética e a outra para a geometria.

Após a vinda de Dom João VI para o Brasil, um novo ensino, a partir de ensinamentos franceses foram aplicados para o ensino de álgebra no Brasil. No ano de “1809 iniciaram-se os trabalhos na Academia Real dos Guardas-Marinha e a substituição da Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho pela Academia Real Militar”. O ensino de álgebra no Brasil passou por profundas modificações

³ Situando-se historicamente: no ano de 1969, segundo Mocrosky et al., (2012) iria haver a aula inaugural de Fortificação e Arquitetura Militar, no entanto, a falta de materiais didáticos, na língua portuguesa (Brasil) dificultaram o andamento dessas aulas.

nesse período, ao adotar textos de Bézout e Lacroix e Legendre segundo Mocrosky et al., (2012), tendo uma forte influência francesa.

No ano de 1827 surgiram novos cenários para a álgebra, em que os alunos tinham que se preparar para cursos preparatórios e vestibulares no Brasil. Nesta fase, ensinamentos de álgebra fizeram parte do livro elaborado por Cristiano Benedito Ottoni, sendo considerado o mais importante da época. Mocrosky et al., (2012) destaca que:

Nessa trajetória, sob a alegação da evolução da matemática na Europa, houve um movimento que buscou atualizar a obra de Ottoni, acrescentado temas novos, com um tratamento mais didático e a inclusão de uma quantidade maior de exercícios para os alunos. Essa etapa da construção do ensino escolar no Brasil foi marcada pelo abandono de obra única, com os conteúdos de geometria, aritmética e álgebra, como a de Ottoni, para adotar livros de diversos autores em temas isolados (MOCROSKY et al., 2012, p. 7).

Em 1908 publica a obra “Matemática Elementar sobre um ponto de vista superior” (SILVA, 2007, online), que pretende mostrar como as distintas áreas em que a Matemática estava dividida (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria) se entrelaçavam. Nesse mesmo ano liderou a formação do Comitê Internacional para o Ensino da Matemática (ICME), que é considerado como a primeira iniciativa concreta para a Educação Matemática.

A década de 30 foi marcada pelo início de aplicações de funções e cálculo diferencial e integral com os conceitos de Félix Klein (1849-1925). Com esses conceitos. Com a necessidade de produção de livros didáticos voltados para o ensino de matemática, Euclides Roxo elaborou “um livro didático escrito para o ensino de matemática do colégio Pedro II”, que passou a ser usado no ensino em todo o território nacional. Vale reiterar que:

Nesse livro, o conteúdo de geometria é apresentado respeitando a ordem: hipótese, demonstração e tese. De um modo geral, até por volta dos anos 60, as obras produzidas no Brasil, voltadas à educação básica, tinham a apresentação dos conteúdos acompanhados pelas definições, teoremas e corolários, num modelo próximo ao da formalização euclidiana da geometria, seguidos de inúmeros exercícios que solicitavam a demonstração do aluno (MOCROSKY et al., 2012, p. 7).

Nos anos 60, o movimento voltado a “matemática moderna” transformou o ensino de matemática brasileiro, ao se preocupar com o ensino em um aspecto mais completo, que compreendia uma época de ensino da matemática com uma estrutura mais científica. Nesse momento, surgem as críticas quanto ao ensino de álgebra eficaz em sala de aula. Havendo a crítica que em sala de aula, muitas

vezes o professor não ensina os alunos os conteúdos que envolvem álgebra (PAVANELLO, 1993), fazendo com que o ensino de álgebra deixe de ser “intuitivo e pautado na demonstração e no formalismo”. Essas críticas se justificam devido ao fato da falta de modernização do ensino de álgebra apresentados nos livros didáticos.

A partir dos anos 80 essas críticas chegaram ao ensino aplicado de álgebra, que vem sendo marcado por reformas que alcançaram uma fase que se busca um modelo renovador para o ensino-aprendizagem de álgebra no Brasil.

3 TECNOLOGIA APLICADA AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Ao iniciar esse tópico, destaca-se que:

O papel a desempenhar pelo professor numa sala de aula é - posto de uma forma simplista - o de tornar o caminho entre a Matemática e os alunos o mais curto possível. Cabe ao professor, que admitimos encontrar-se já suficientemente perto de ambos, Matemática e alunos, a missão de conduzir a Matemática até aos alunos ou de levar os alunos até à Matemática (VASCONCELOS, 2015, p. 1).

Portanto, a esse destaque o professor é o formador, o trabalho docente do professor formador no contexto atual das reformas envolve as mudanças no mundo contemporâneo (DE ANDRÉ, 2010). De Pesce e De André (2012, p. 40) descrevem que “a docência é uma atividade complexa e desafiadora, o que exige do professor uma constante disposição para aprender, inovar, questionar e investigar sobre como e por que ensinar”. Frente às mudanças que as inovações trouxeram para o mundo moderno, há de se concordar com os dizeres de Tardif (2002) ao afirmar que a “prática reflexiva pode ajudar o professor a responder às situações incertas e flutuantes, dando condições de criar soluções e novos modos de agir no mundo”. Assim, o professor é o formador, aquele que leva as técnicas para dentro da sala de aula, lança desafios e pode ser inovador diante de qualquer situação.

Essa colocação final no parágrafo anterior diz respeito principalmente, àquele professor que coloca dificuldades em tudo, reclama do local, dos alunos, da escola, do quadro, da caneta, do ensino, sem ao menos tentar enxergar uma saída. A inovação em sala de aula, não acontece simplesmente quando se tem tecnologia de ponta, “*internet*” disponível e/ou uma escola modelo. Para acontecer, deve haver a inovação baseada em pequenas mudanças no uso,

técnicas, sala de aula, aplicações de conteúdo diferenciados que muitas vezes não acontece na prática. Para justificar essa colocação, empresto a frase de De Pesce e De André (2012, p. 40) ao citar Imbernón (1994, p. 50) destaca que “o objetivo de conseguir uma transformação escolar e social, e uma melhora na qualidade do ensinar, e de inovar”.

No mundo contemporâneo, a “*internet*” e as redes sociais estão presentes em nossas vidas e ocupam um expressivo tempo das nossas práticas cotidianas. A Tecnologia de Informação e Telecomunicação – TIC – tornou-se muito mais que ambientes de entretenimento e navegação, são canais de comunicação, de mídia, de encontros, de bate papo, de propagandas, comércio, entre outros. A população encontra-se mais conectados, e dados indicam que as novas tecnologias impactam diretamente sobre o cotidiano humano e corporativo (SILVA FILHO, 2010). As redes sociais se tornaram um espaço propício não somente para socialização e distração, mas também de acesso à informação e manifestação social e individual. Sendo assim, a liberdade de expressão e o exercício dos direitos individuais tornaram a “*web*” uma arena de vários embates de opiniões, uma vez que fazer parte de um espaço em que, simultaneamente possibilita novas informações, permite a livre expressão e cria-se, naturalmente, um grande espaço de debates.

O professor, que é atuante em sala de aula, pode ver a TIC como uma ferramenta eficaz para usar em suas aulas. Nessa concepção, esse facilitador pode integrar sua prática de ensino-aprendizagem ao uso de tecnologias e saber-fazer aulas atrativas e bem-sucedidas para seus alunos.

Nesse contexto, emergem as discussões acerca da busca de formação de um novo educador que possua um perfil que lhe possibilite mudar rotinas e atitudes antes utilizadas em sala de aula. No ambiente escolar, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) podem ser usadas como ferramentas para propiciar um ambiente atrativo para os alunos, criando ainda condições para a construção de conhecimentos adequados ao mundo atual (OLIVEIRA, 2011).

Como a tecnologia está inserida no cotidiano do aluno moderno através do uso de celulares, televisão, rádio, “*internet*”, entre outros, no mundo atual:

Ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é, segundo Sebastião e Silva, como falar de cores a um daltônico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos no início, não estejam solidamente apoiadas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam. É necessário fornecer

experiências que encorajem e permitam aos alunos dar valor à Matemática, ganhar confiança nas suas capacidades matemáticas, tornar-se em solucionadores de problemas matemáticos, comunicar matematicamente (VASCONCELOS, 2000, p. 5).

Nesse aspecto, o uso das TIC's para o ensino de **GEOMETRIA**, pode vir a proporcionar um conhecimento atrativo e estimulante para os alunos, que passaram a interagir, gostar mais de Matemática e atingir os objetivos propostos da aula. Borba e Villarreal (2005), citado por Galleguillos (2013) e Santos e Santos (s.d.) “expressam que as ferramentas tecnológicas modificam a forma como aprendemos”, ou seja, não tem sua importância e funcionalidade apenas na geometria.

O ensino segundo Santos e Santos (s,d, p. 3) tem recebido:

[...] reclamações surgidas dentro do ensino (básico, médio, superior), é a crítica acirrada ao velho modelo tradicional. Neste modelo tem-se a ideia de uma sala de aula onde o professor detém todo o conhecimento e os alunos são somente passíveis no ensino sendo os únicos recursos metodológicos um quadro, giz e apagador (SANTOS e SANTOS, s,d, p. 3).

Lopes (2013, p. 7019) explana sobre a informática e o ambiente escolar, afirmando que quando o professor usa as TIC's em sala de aula, passa a despertar a interação entre os alunos, passando a “despertar no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática, o que é importante no momento de realizar construções, análises, observações de regularidades e ao estabelecer relações”. Com essa explanação, “o uso do *software* GeoGebra como recurso didático na sala de aula de matemática” foi trabalhado por Lopes (2013). O autor aponta que quando são usados “*software*” em sala de aula há “construção, dinamismo, investigação, visualização e argumentação” no ensino de matemática.

Desta forma um “*software*” de geometria, através do dinamismo proporcionado, se torna uma ferramenta poderosa, dando tanto ao aluno como ao professor outras opções para o fortalecimento do ensino da geometria, plana e espacial, permitindo que ambos possam principalmente manipular tridimensionalmente as figuras em estudo, saindo da forma estática apresentada nos livros e/ou da visualização, muito das vezes dificultosa e mal interpretada dos desenhos elaborados no quadro pelo professor.

Vamos então às definições dos elementos matemáticos que precisaremos para as construções e desenvolvimentos das atividades que serão propostas.

3.1 Revisando alguns conceitos de geometria

3.1.1 O plano

Conforme Dolce (1938) destaca,

As noções (conceitos, termos, entes) geométricos são estabelecidos por meio de definições. Em particular, as primeiras noções, os conceitos primitivos (noções primitivas) da Geometria, são adotadas sem definição. (DOLCE et al., 1938, p. 1).

Logo, será adotado, sem que se apresente uma definição formal, o conceito de plano, considerando que o leitor já tenha uma noção, devido suas experiências diárias (da mesma forma, se aplica para ponto e reta).

De forma intuitiva podemos adotar que, enquanto a reta se apresenta como um ente unidimensional, o plano se mostra um ente bidimensional. Contudo, para que não tenhamos problemas com nossa imaginação, vejamos que a superfície de um lago infinito e em estado colossal de inércia, imita de forma grosseira um plano.

Existem quatro maneiras de determinarmos um plano, ou seja, torna-lo único no espaço:

- 1º) com três pontos não colineares, temos um único plano que os contenham;
- 2º) dada uma reta e um ponto fora dela, temos um único plano que os contenham;
- 3º) Dado, duas retas concorrentes, temos um único plano que as contenham;
- 4º) Dado, duas retas paralelas distintas, temos um único plano que as contenham.

Por três pontos do espaço não situados quem na mesma reta passa um e somente um plano. Dado um plano do espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano (CARVALHO, 2005, p. 5).

Todo o plano divide o espaço em dois semi-espaços que têm a seguinte propriedade se: A e B estão em um mesmo semi-espaço então o segmento AB está contido neste semi-espaço e não corta o plano se os pontos A e B estão em semi-espaços distintos o segmento AB corta o plano (CARVALHO, 2005, p. 8).

3.1.2 Intersecção de planos

Conforme Dolce e Pompeo (1993), se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos “um outro” ponto comum.

$$\left(\alpha \neq \beta, \quad P \in \alpha \text{ e } P \in \beta \Rightarrow (\exists Q | Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta) \right)$$

Então podemos citar o seguinte Teorema:

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto (DOLCE e POMPEO, 1993).

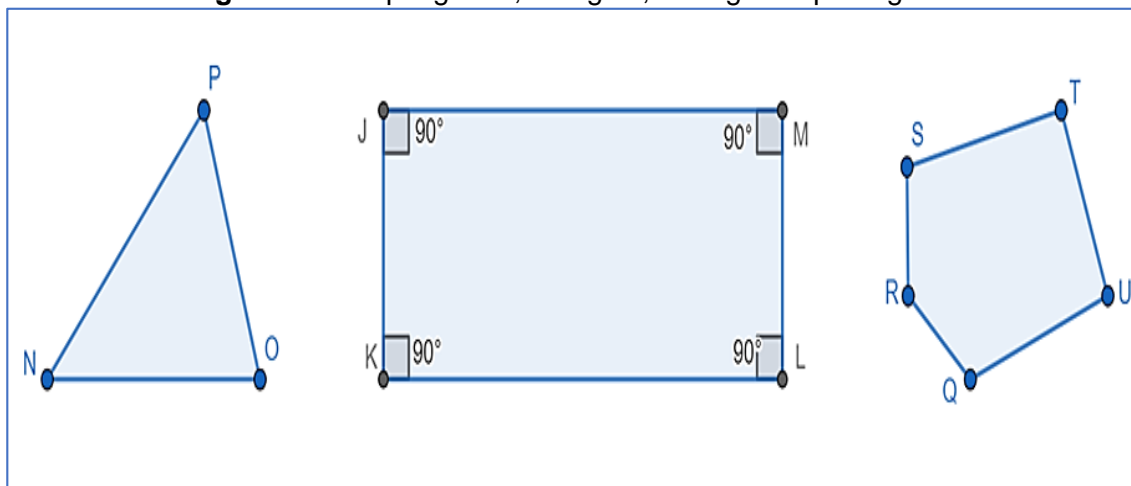
Sendo importante ressaltar que a definição dada para dois planos secantes, conforme Dolce e Pompeo (1993), são que dois planos distintos que se interceptam (ou se cortam) são chamados planos secantes (ou concorrentes). A reta comum é a intersecção desses planos ou o *traço* de um deles, no outro.

3.1.3 Polígonos

Em Geometria, uma figura que representa um polígono é uma região plana, limitada por uma linha poligonal fechada: temos como exemplo um quadrado, o qual é um polígono de quatro lados, sendo estes, segmentos de retas que uni dois vértices consecutivos na figura. A palavra polígono advém, provém do grego e significa muitos (poly) e ângulos (gon).

A figura a seguir, apresenta três polígonos distintos: um triângulo, um retângulo e um pentágono.

Figura 3. Três polígonos, triângulo, retângulo e pentágono.



Fonte: Construídos pelo autor utilizando o GeoGebra.

3.1.4 Áreas

Adotaremos o conceito de área, conforme Muniz Neto, onde de forma intuitiva consideraremos que a cada região contida em um plano, associaremos a ela, um número real positivo, o qual dimensionará o espaço ocupado por tal região (MUNIZ NETO, 2013, p. 180). Para representarmos a unidade de área,

tomaremos um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento, o qual representará uma região com 1cm^2 .

Conforme Dolce e Pompeo (1993), área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de tal forma que:

- i. *As superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais e reciprocamente.*

$$A \approx B \leftrightarrow (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

- ii. *Soma de superfícies está associada a uma área que é a soma das áreas das superfícies das parcelas.*

$$(C = A + B) \rightarrow (\text{Área de } A + \text{Área de } B)$$

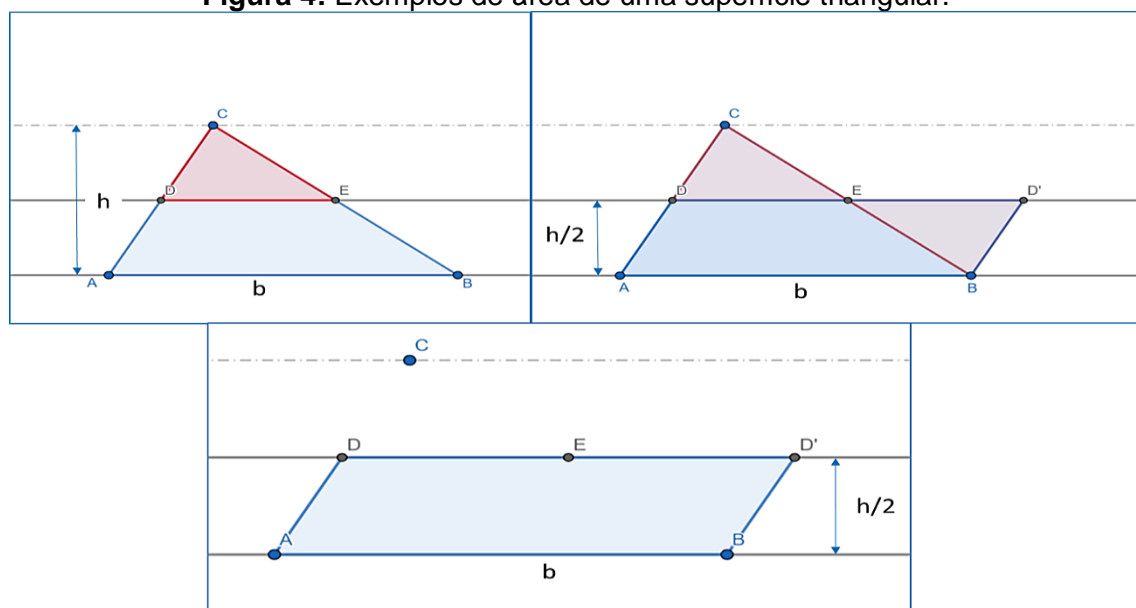
- iii. *se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.*

Sendo assim, tal conceito também se torna útil para nosso trabalho, pois trataremos de áreas de figuras obtidas através de secções em sólidos.

3.1.5 Área de uma superfície triangular

O cálculo da área de uma superfície pode ser calculado conforme mostra a figura 4, abaixo:

Figura 4: Exemplos de área de uma superfície triangular.



Fonte: Dolce e Pompeo (1993).

Desta forma, dado um triângulo ABC, cuja base mede “b” e altura de medida “h”, podemos considerar que sua área é equivalente a um paralelogramo cuja base também mede “b” e possui altura “ $h/2$ ” (Figura 4).

3.1.6 Área de uma superfície retangular

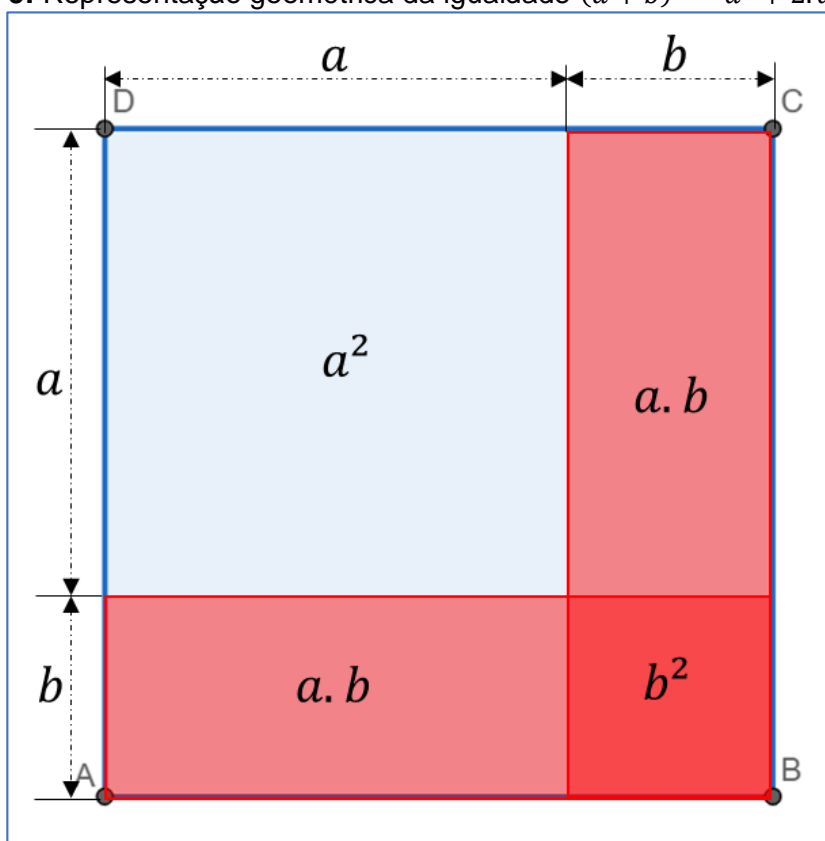
Dada uma superfície retangular R de comprimento a e largura b , conforme ilustrado na figura 5, em que a e b são números reais. Construindo uma superfície quadrada cujas medidas de seu lado é $a + b$, pode-se observar que tal superfície quadrada é formada por dois quadrados a^2 e b^2 e dois retângulos iguais a R .

Como a área dessa superfície quadrada (A. quadrado) é dada por:

$$\text{Área do quadrado} = (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2,$$

logo extraindo a área dos dois quadrados a^2 e b^2 , nos resta então a área que representa dos dois retângulos, sendo ela $2 \cdot a \cdot b$, ou seja, $2R = 2 \cdot a \cdot b$, daí conclui-se que $R = a \cdot b$.

Figura 5: Representação geométrica da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.



Fonte: o autor (2020).

3.1.7 Secção

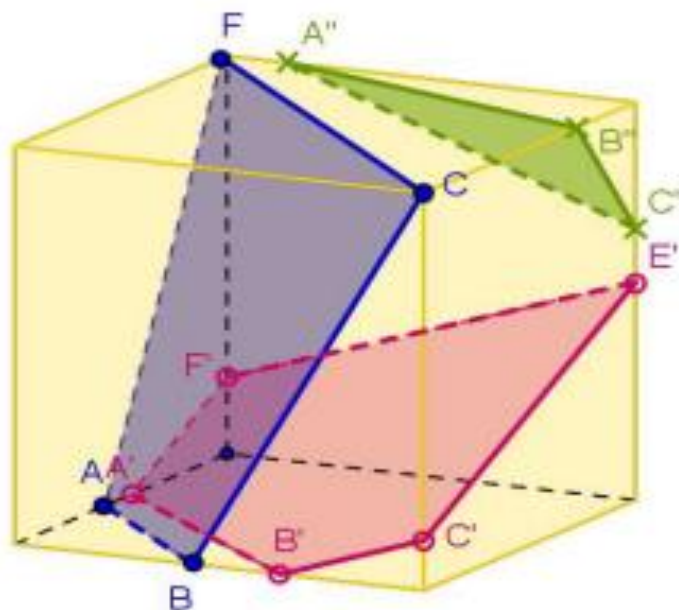
São várias as formas que encontramos uma secção em sólidos, temos, por exemplo, a secção de um poliedro onde se obtém um polígono plano que possui apenas um de seus vértices em cada aresta do poliedro seccionado. O significado de secção na Geometria segundo o Dicionário “*online*” de Português⁴ é uma “região marcada pelo encontro, pela interseção do cilindro com um plano paralelo às suas bases: secção transversal”, neste caso se refere a uma secção particular do cilindro.

Na prática, como exemplo (Figura 6), onde podemos observar três dos quatro (de acordo com o número de lados) polígonos possíveis de se obter nas secções que um plano provoca em um cubo:

No caso particular em que $A \in a_1$, $B \in a_2$ e $C \in a_{11}$, definimos $D = AB \cap V_3V_4$ e aplicamos as propriedades acima referidas para a obtenção dos restantes vértices do polígono. Para esta configuração de pontos, as secções possíveis são quadriláteras, pentágonos e hexágonos. Notar que obtemos secções triangulares, quando o plano $\sim ABC$ intersecta três arestas incidentes num mesmo vértice.

[...]“a dinâmica destas construções, controlada pelos seletores $\sim \alpha$, β e ϕ , permite visualizar todas as secções planas de um cubo”.

Figura 6: Apresentação de algumas secções planas do cubo.



Fonte: Reis e Cordeiro (2012).

⁴ Disponível em: <https://www.dicio.com.br/seccao/>

Para Piaget e Inhelder (1993, p. 19), “as estruturas perceptivas ou sensório-motoras constituem, inicialmente, o ponto de partida e, após, a subestrutura de toda a construção representativa do espaço”. Para os autores, as percepções do aluno quanto aos objetos podem ser resultantes de um contato direto com eles. Segundo Reis e Cordeiro (2012, p. 1) “as indicações metodológicas dos programas do Ensino Secundário, os estudantes devem saber desenhar representações planas de sólidos, descrever a intersecção do cubo com um plano dado, construir e representar a intersecção obtida”. Nesse contexto, a representação dos objetos pode duplicar a percepção e completar o conhecimento perceptivo do aluno referindo-se a objetos que muitas vezes não são observados (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 32).

3.1.8 Volumes

Segundo o livro de Geometria da coleção PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática, (MUNIZ NETO 2013) temos como conceito de volume:

Intuitivamente, o volume de um sólido é uma medida do espaço que ele ocupa. Esperamos, então, que dois sólidos disjuntos tenham volume iguais à soma dos volumes ocupados por cada um deles. Também se um dos sólidos estiver contido no outro, é razoável supor que o volume do primeiro seja menor ou igual que o volume do segundo. Por fim, para que possamos expressar numericamente essas medidas de espaço ocupado, precisamos de uma unidade de medida que sirva de referência. MUNIZ NETO (2013, p.392).

Intuitivamente, temos que o volume de um sólido é representado pela medida do espaço que este ocupa, logo espera-se que dois sólidos sem pontos comuns, tenham a soma de seus volumes iguais ao espaço ocupado por cada um deles (MUNIZ NETO, 2013, p. 336).

Assim como quando definimos “ÁREA”, citaremos conforme Dolce e Pompeo (2001), no qual define que o volume de um sólido é um número real positivo associado ao sólido de tal forma que:

i. Sólidos congruentes tem volumes iguais;

ii. Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume do sólido S é a soma dos volumes de S_1 e S_2 .

De forma análoga ao que utilizamos para medirmos uma área, adotaremos como unidade de medida do volume, um cubo cuja aresta tem uma unidade de comprimento, tal sólido terá como volume 1cm^3 .

Portanto, intuitivamente, podemos determinar o volume de um sólido, através da comparação com a unidade de volume adotada, o cubo de aresta uma unidade, computando quantos destes cubos preencheriam o espaço ocupado pelo sólido em questão.

Chamaremos de reta suporte, toda e qualquer reta que contenha dois pontos de um segmento dado. Desta forma se dois pontos de um segmento pertencer simultaneamente a uma reta, logo todo o segmento estará contido na reta e esta será sua reta suporte.

3.2 O GeoGebra nos estudos de sólidos geométricos: apresentação da interface

O GeoGebra se apresenta como um “*software*” de construções e cálculos matemáticos, multiplataforma, gratuito, que disponibiliza e combina em uma mesma GUI (“Graphical User Interface”) os conceitos da Geometria e da Álgebra, tendo se mostrado útil tanto no ensino da Matemática básica como da Matemática superior. É um ambiente que mescla geometria, tabelas, gráficos, álgebra, estatística e cálculo numa única aplicação.

Como este trabalho tem um foco especial na Geometria, é interessante destacar que, o Geogebra proporciona ao seu usuário um ambiente no qual também é possível utilizar-se da “geometria dinâmica”. Conforme Gravina (1996), programas que também possuem, como base de sua construção, os princípios da “geometria dinâmicas” possuem as seguintes propriedades:

São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema.

Gravina, citando Fischbein (1993), referindo-se à questão de o desenho interferir no aspecto conceitual:

“A dificuldade em manipular objetos geométricos, a saber, a tendência em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria...Frequentemente condições figurais (de desenho) escapam do controle conceitual, e impõem, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceituais.”

Ainda, segundo a autora, “o desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.”

Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, o Geogebra tem se desenvolvido continuamente e a cada ano que se passa, fica cada vez mais popular, o que lhe rendeu diversos prêmios de “*software*” educacional, passando a ser cada vez mais utilizado devido sua disponibilidade para ser instalado nos aparelhos, tais como celulares, tablets, notebooks, além dos laptops.

O acesso ao geogebra pode ser realizado gratuitamente através do link: <https://www.geogebra.org>.

4 A PROPOSTA: COMO O PROFESSOR PODE UTILIZAR O GEOGEBRA PARA DETERMINAÇÃO DE COMPRIMENTOS, ÁREAS E VOLUMES, PARCIAIS E TOTAIS, EM SALA DE AULA

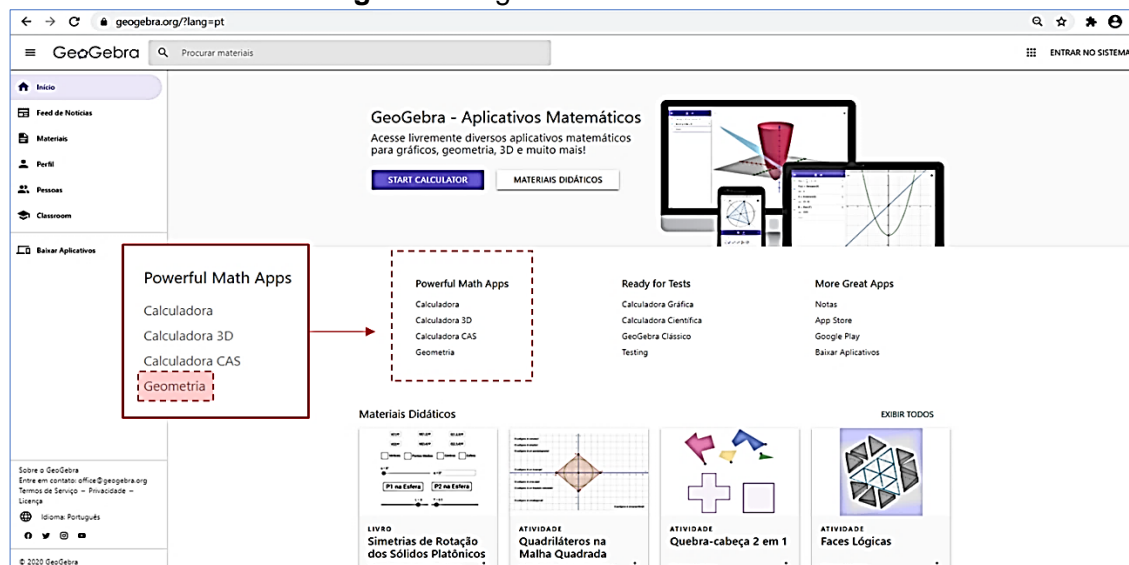
Este capítulo é fundamental para a finalização e aplicação deste trabalho, nele, está proposto que o professor tenha para iniciar esta forma de se trabalhar a geometria espacial para alunos do Ensino Médio, exercícios que com seu aluno, construa e explore figuras geométricas, que de preferência estejam vinculadas a elementos materiais próximo à realidade do aluno, assim como, figuras que serão úteis nos estudos futuros, relacionados aos sólidos geométricos. Buscando alcançar os objetivos propostos, abaixo tomamos como Atividade Proposta alguns exercícios que explorem sólidos espaciais, apenas para dar um norte ao professor, mas será necessário que sejam trabalhados mais exemplos:

4.1 Conhecendo o GeoGebra

Primeiro, como já destacado anteriormente na fundamentação teórica, o aluno deve aprender a acessar ao GeoGebra usando o link: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Quando o aluno tiver o acesso,

visualizará uma página inicial. Ao acessar esta página inicial, aparece o ícone informativo Powerful Math Apps, conforme figura a seguir e, em seguida, vai até o ícone Geometria, como mostrado.

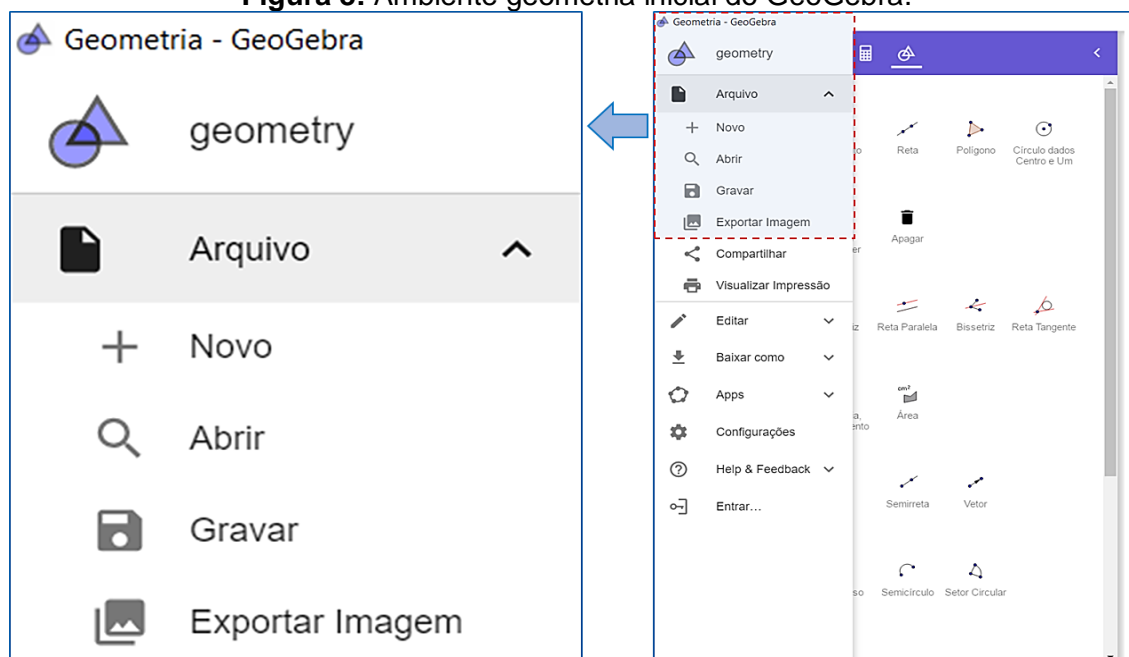
Figura 7: Página inicial do GeoGebra.



Fonte: <https://www.geogebra.org/>.

Em seguida, o aluno pode explorar os ícones disponíveis no ambiente Geometria, mostrado na figura 9.

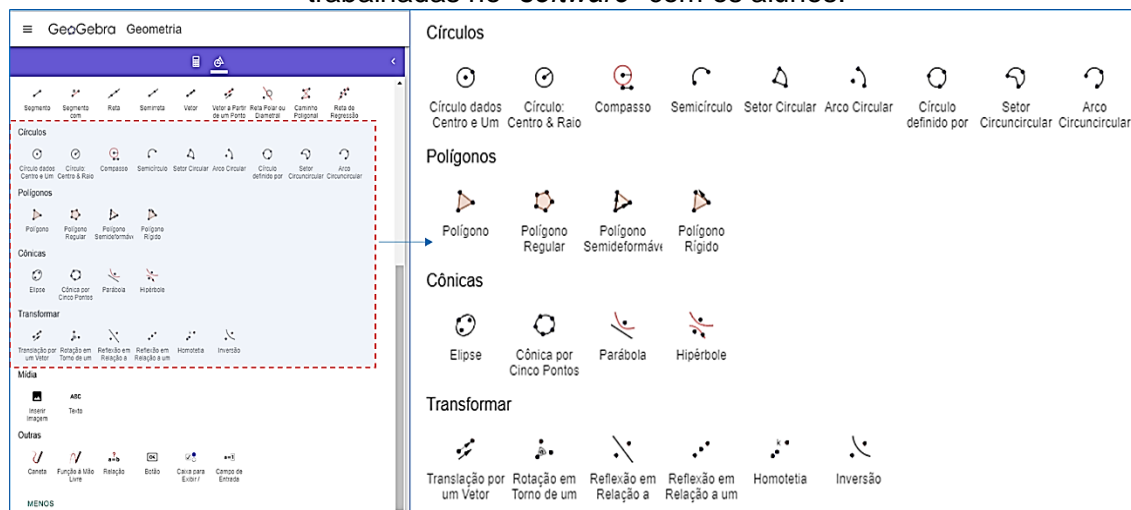
Figura 8: Ambiente geometria inicial do GeoGebra.



Fonte: <https://www.geogebra.org/>.

Nesse ambiente à esquerda, temos o botão de “ferramentas”, com o qual, o professor pode escolher as figuras e formas geométricas a se trabalhar, e o aluno pode visualizar cada construção (Figura 9).

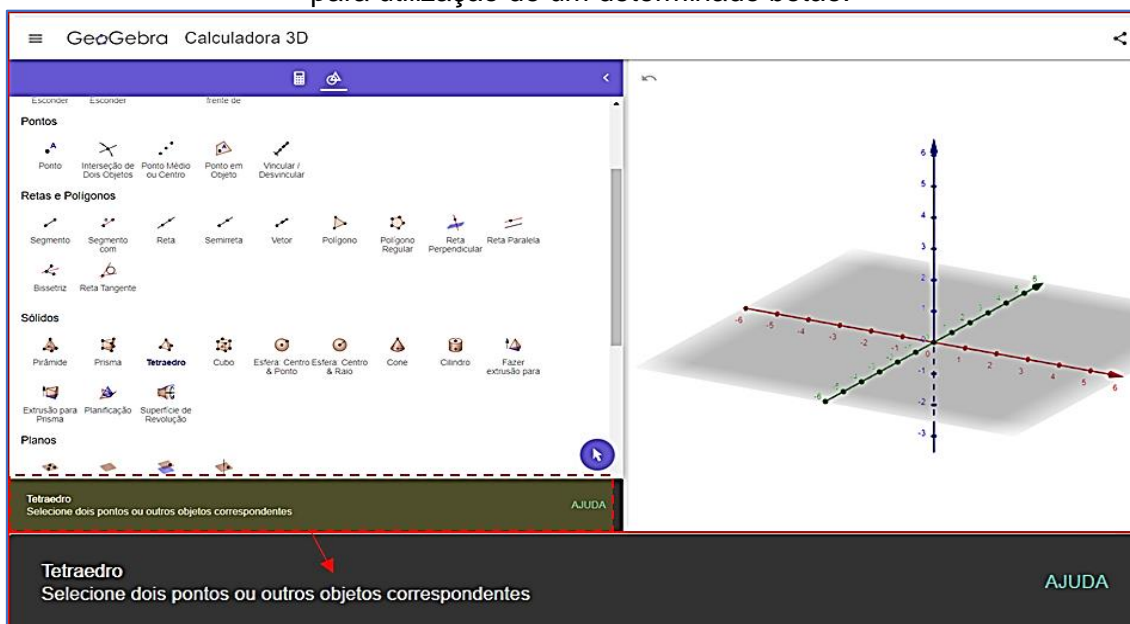
Figura 9: Ambiente geometria mostrando as formas geométricas que podem ser trabalhadas no “software” com os alunos.



Fonte: <https://www.geogebra.org/>

Ao clicar em um determinado botão, o “software” apresenta uma barra de ajuda na região inferior da tela, citando sua função e/ou quais elementos são necessários para criação da figura geométrica ou medição solicitada, conforme apresentado na Figura 10.

Figura 10: Ambiente Geometria 3D mostrando a barra com mensagem de “AJUDA” para utilização de um determinado botão.





Fonte: <https://www.geogebra.org/>

O ambiente pode ser usado em aulas práticas com acesso ao Geogebra para determinação de comprimentos, áreas e volumes. Como já definimos área e volume no capítulo 1 deste estudo, agora com o auxílio do “software” GeoGebra desenvolveremos algumas aplicações para o ensino médio que podem ser propostas em sala de aula.

4.2 Sequência de atividades propostas

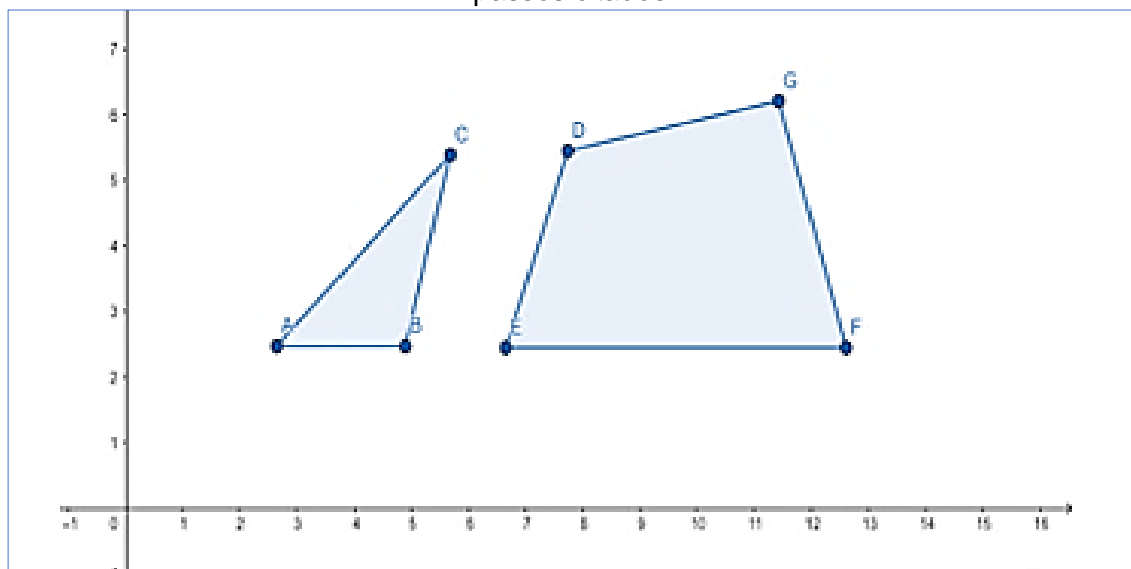
Para isso, inicialmente, tratando de comprimentos e áreas, tomamos como proposta uma atividade que apresentaremos de forma bem simples. Abaixo pode ser visualizado o passo a passo, em figuras planas simples que possa iniciar e aguçar o interesse dos alunos sobre o Geogebra. Vejamos a seguir:

4.2.1 Atividade proposta 1 - Começando a praticar: construção de dois polígonos e determinação do seu perímetro e sua área

1. Clique na ferramenta polígono  ;
2. Em seguida clique em quatro pontos do plano, sendo o quarto ponto coincidindo com o primeiro;
3. novamente clique no botão  ;
4. Em seguida clique em cinco pontos do plano, sendo o quinto ponto coincidindo com o primeiro.

Na figura 11, podemos observar uma figura criada a partir desse passo a passo, da proposta. Vejamos a seguir:

Figura 11. Exemplo de figuras construídas, um triângulo e um quadrilátero, com os passos citados.



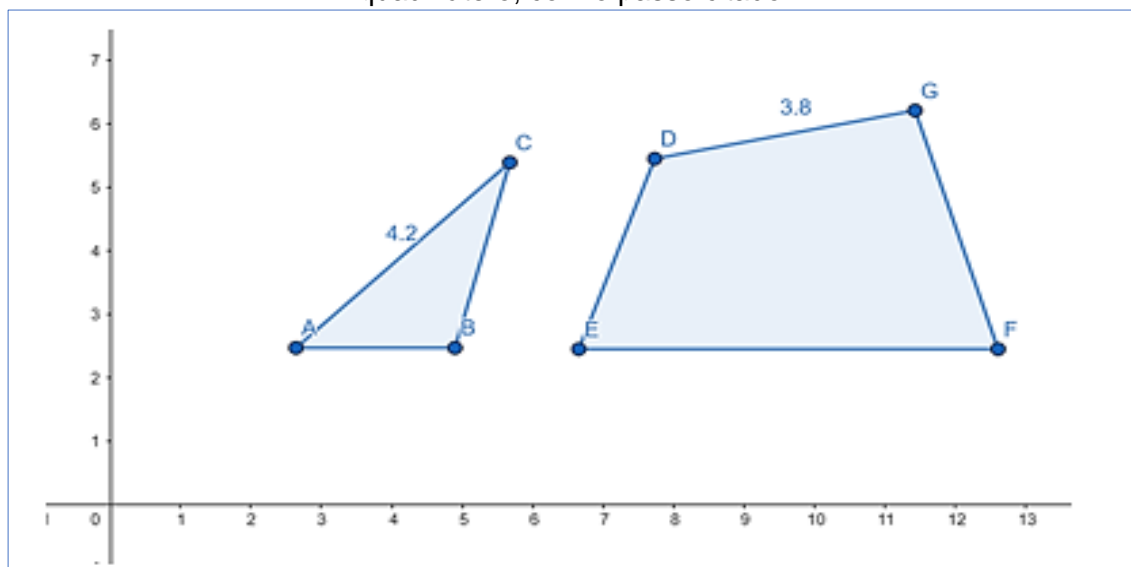
Fonte: o autor (2020).



Em seguida, o aluno pode clicar no botão e consecutivamente podemos em apenas um lado do polígono para obter seu comprimento ou se pode clicar no interior do polígono para se obter seu perímetro.

Com esse passo, podem ser visualizados os valores dos comprimentos do lado $AC = 4.2$ do triângulo e do lado $DG = 3.8$ do quadrilátero, como mostra a figura 12, abaixo:

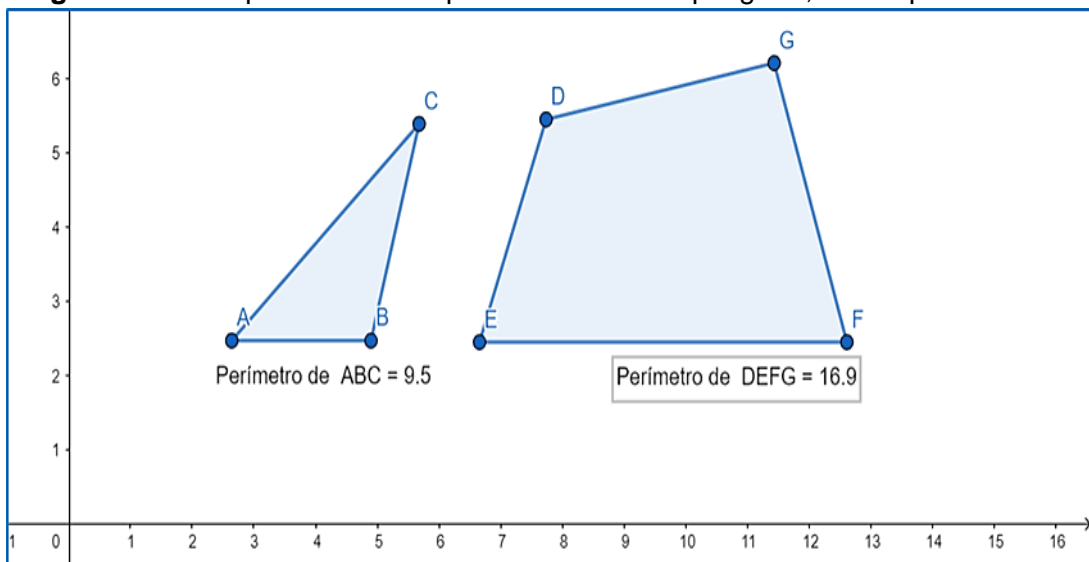
Figura 12. Exemplo de valor do comprimento do lado AC do triângulo e do lado DG do quadrilátero, com o passo citado.



Fonte: o autor (2020).

Com esse passo podemos obter, em seguida, os valores dos perímetros dos lados $ABC = 9.5$ do triângulo e do lado $DEFG = 16.9$ do quadrilátero, como mostra a figura 13, abaixo:

Figura 13. Exemplo de valor do perímetro de cada polígono, com o passo citado.



Fonte: o autor (2020).

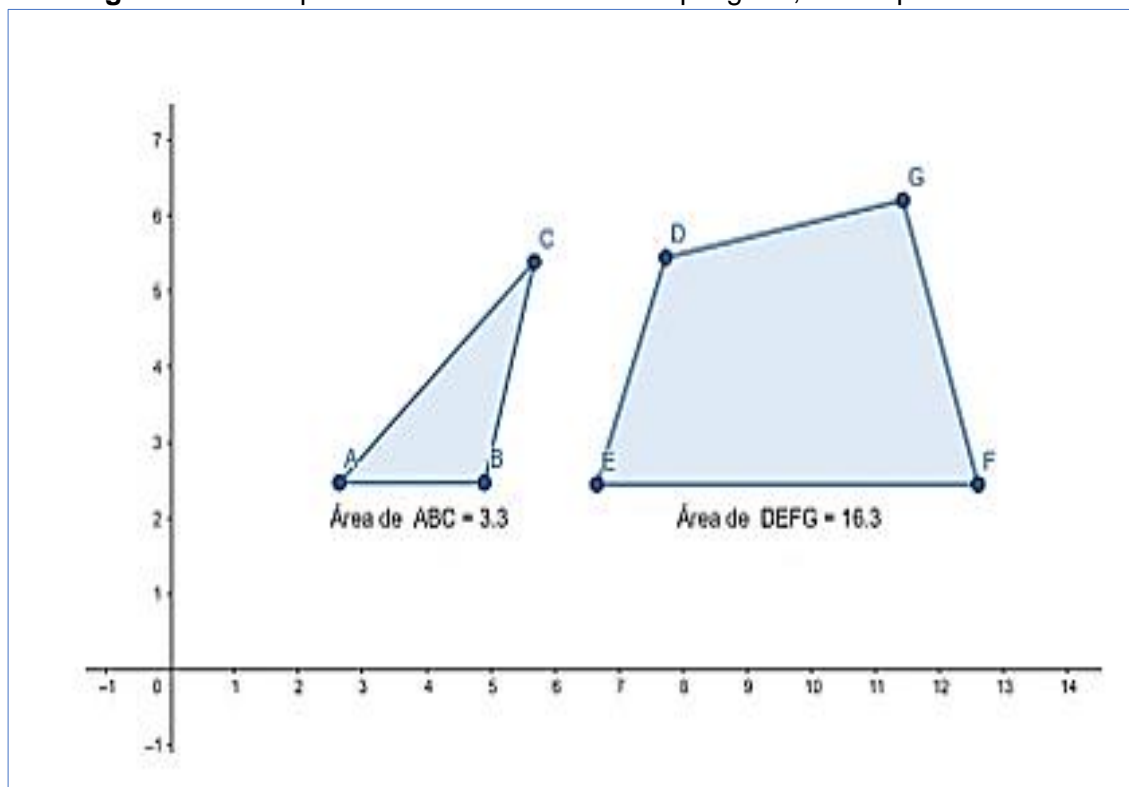
O professor pode solicitar para que o aluno calcule a área de cada polígono, bastando para isso, que o aluno selecione a ferramenta [área] representada pelo



botão e em seguida clicar na figura construída, ou seja, nos polígonos.

Na Figura 14, abaixo são mostrados um exemplo dos valores de área do triângulo $ABC = 3.3$ e do quadrilátero $DEFG = 16.3$.

Figura 14. Exemplo de valor da área de cada polígono, com o passo citado.



Fonte: o autor (2020).

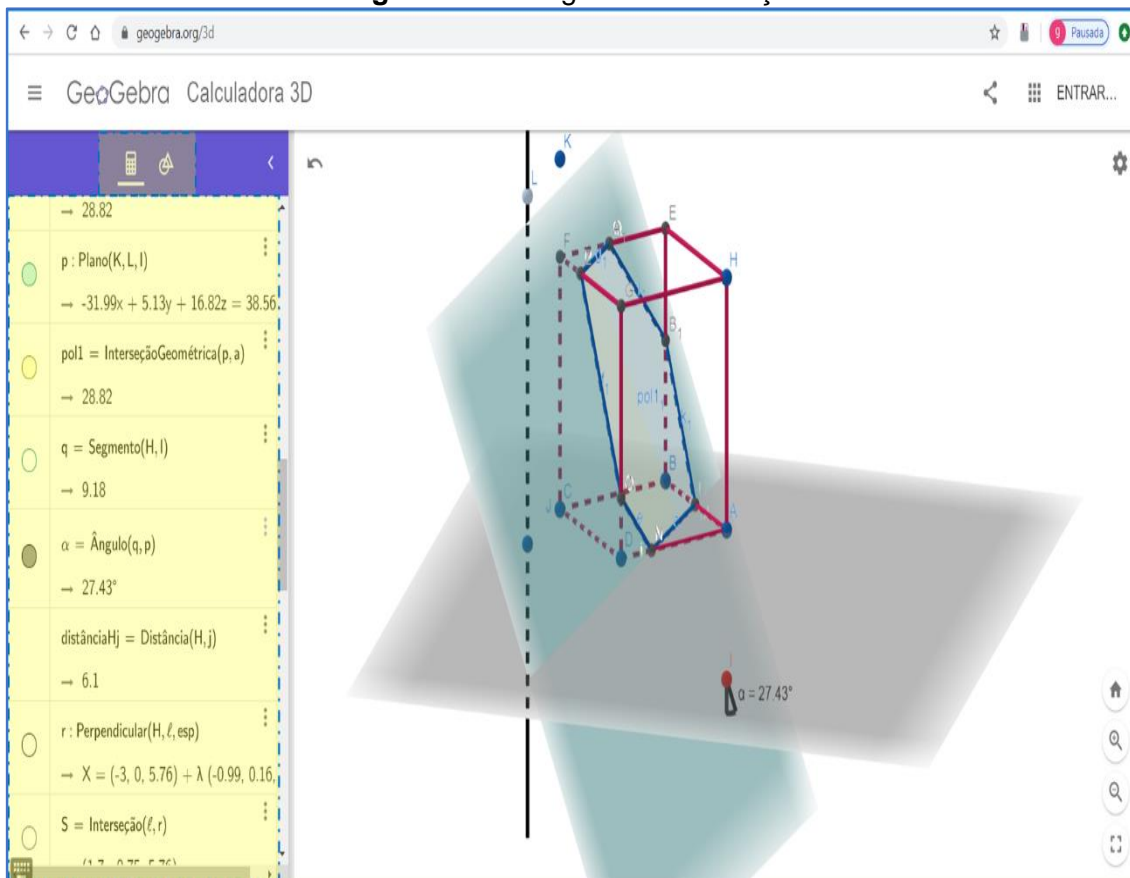
4.2.2 Atividade proposta 2 – Praticando com figuras 3D: Secções em Paralelepípedo reto-retângulo

Construções no GeoGebra: sólidos e planos que envolvem secções planas em sólidos geométricos no GeoGebra também podem ser realizadas em sala de aula. Com esta proposta, o professor pode ensinar o aluno a traçar planos secantes a blocos retangulares (paralelepípedo reto-retângulo), de forma a obtermos todos os polígonos possíveis na intersecção do plano com a superfície do sólido. Como um paralelepípedo retangular possui seis faces, então podemos traçar um plano que intersecta estas faces, gerando como secção, um polígono que pode ter três, quatro, cinco ou seis lados.

No GeoGebra, uma forma possível de variar a posição do plano sector, é feita através da modificação dos três pontos que determinam o plano. Estes pontos são criados em reta perpendiculares ao plano que contem a base do paralelepípedo. Desta forma, pode-se modificar a posição do plano movimentando os pontos sobre as retas, conseqüentemente modificando o número de lados do polígono gerado na secção.

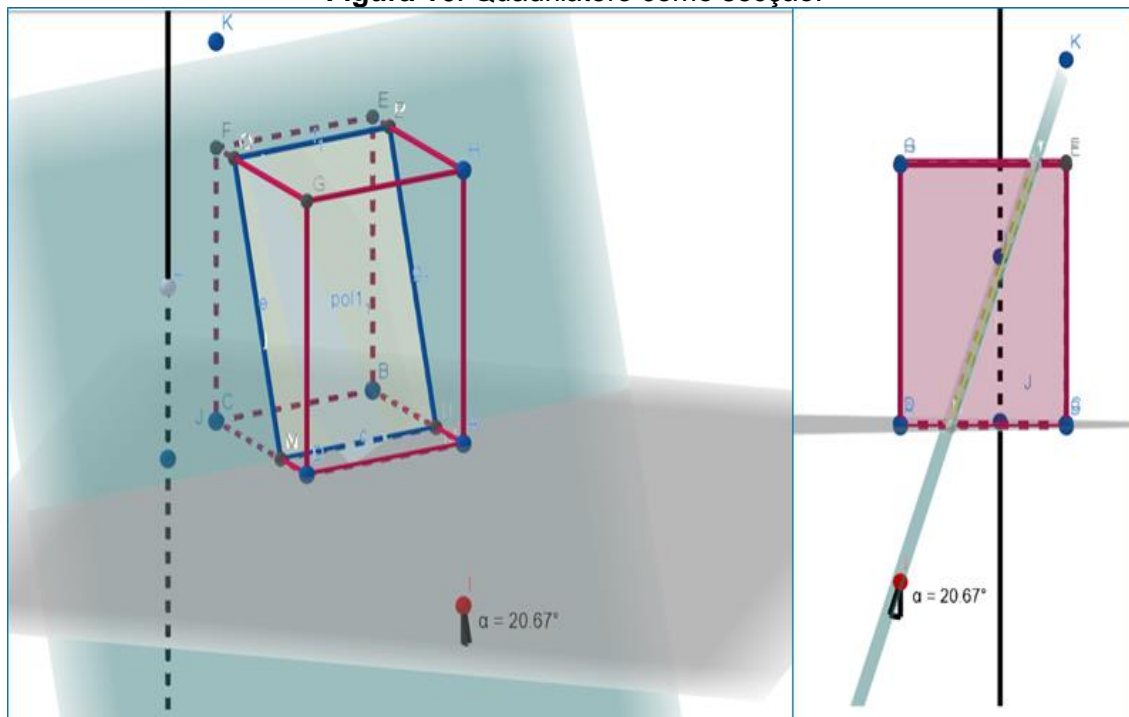
O ponto I, que com os pontos K e L, os quais determinam o plano KLI, pertence à reta suporte da aresta HA, sendo esta, uma das arestas do paralelepípedo. As figuras 15, 16 e 17, a seguir, apresentam um paralelepípedo reto retângulo e um plano sector, plano KLI, assim como o polígono obtido pela intersecção deste plano com a superfície do sólido que os alunos podem obter e observar em sala de aula ao usar o GeoGebra.

Figura 15. Hexágono como secção.



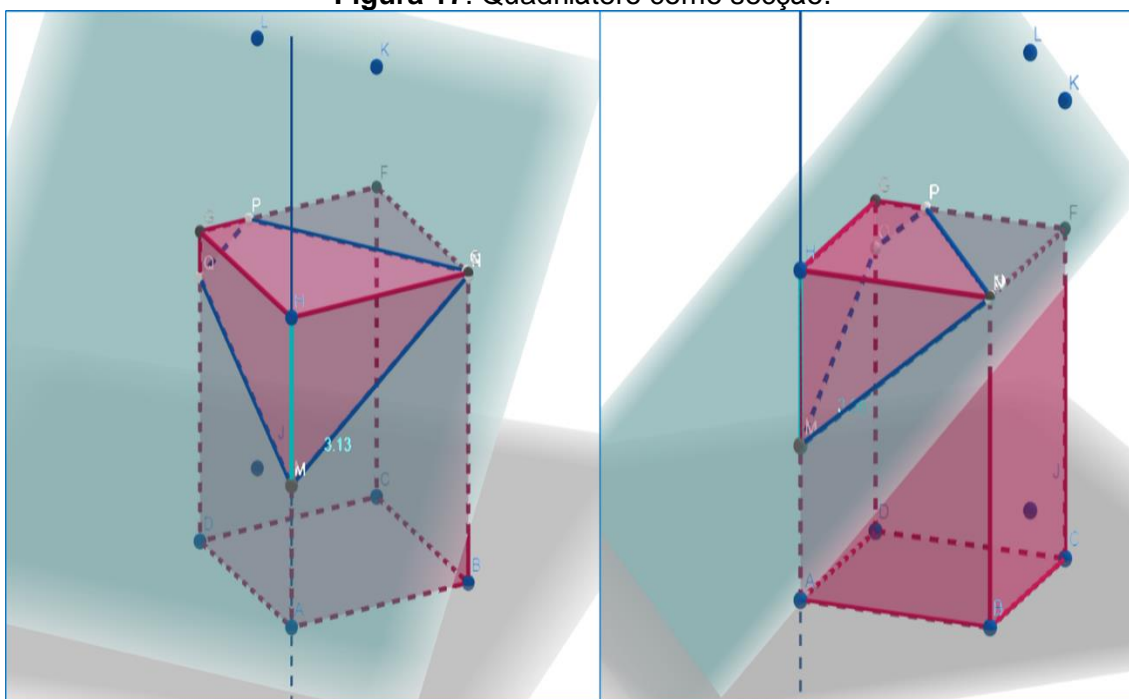
Fonte: o autor (2020).

Figura 16. Quadrilátero como secção.



Fonte: o autor (2020).

Figura 17. Quadrilátero como secção.

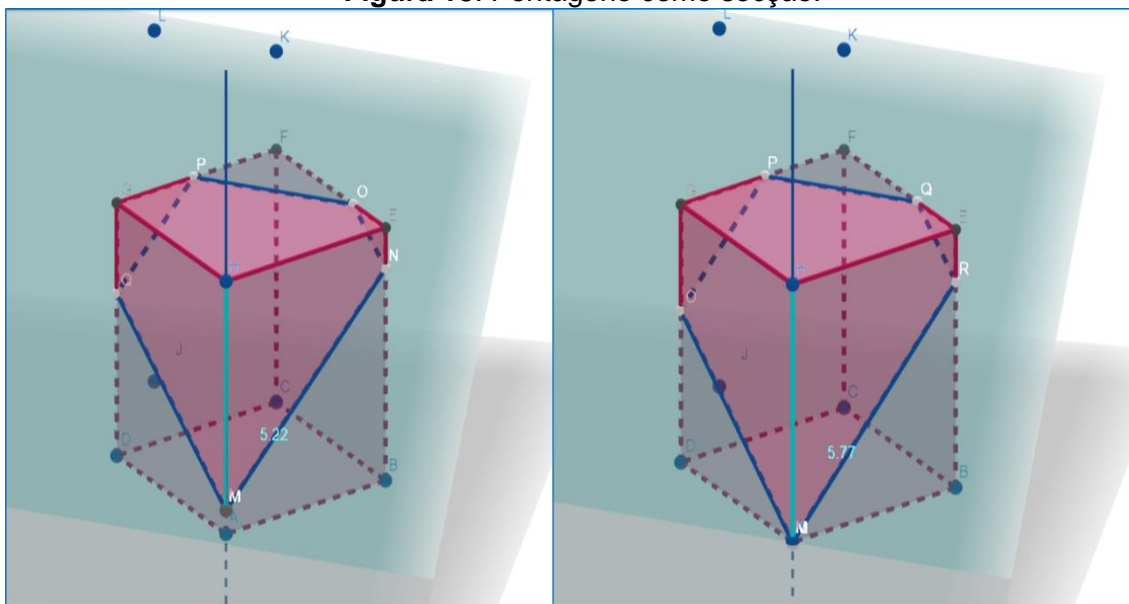


Fonte: o autor (2020).

A figura 18, a seguir, mostra o plano seccionando o sólido de forma a se obter um pentágono como secção. O aluno pode observar que o ponto “M” tem o ponto “A” como um “limite” para o pentágono, ou seja, a partir do ponto “A”, ao se

movimentar o ponto “M” na reta \overleftrightarrow{HA} passaremos de um pentágono para um hexágono. Como se pode ver na figura a seguir.

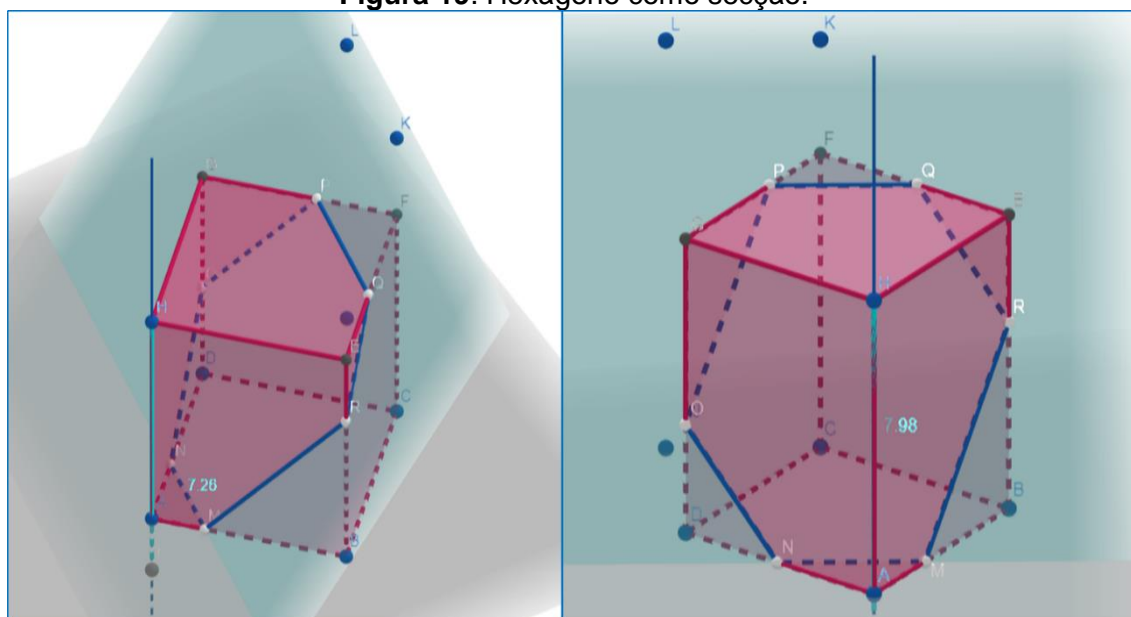
Figura 18. Pentágono como secção.



Fonte: o autor (2020).

A partir das atividades anteriores mostradas, o professor pode trabalhar como o sólido possui seis faces, logo, se pode obter um hexágono como secção, como podemos ver na figura 19, a seguir.

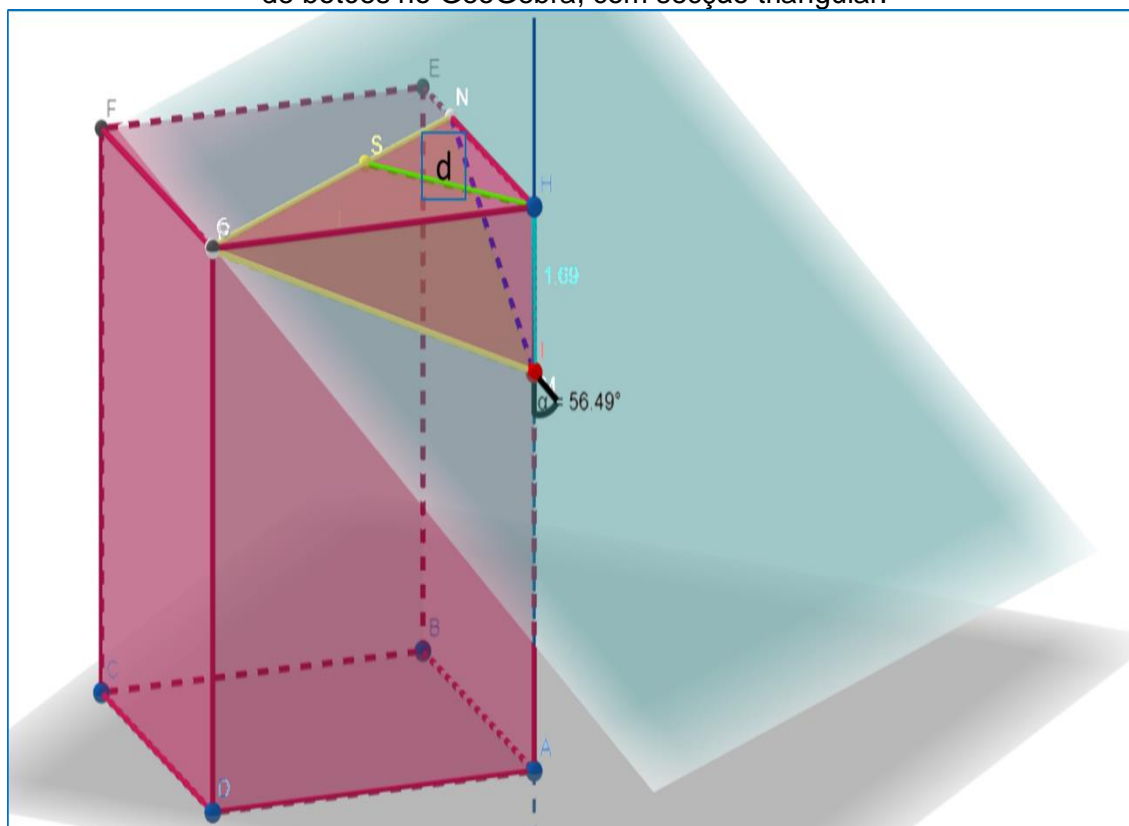
Figura 19. Hexágono como secção.



Fonte: o autor (2020).

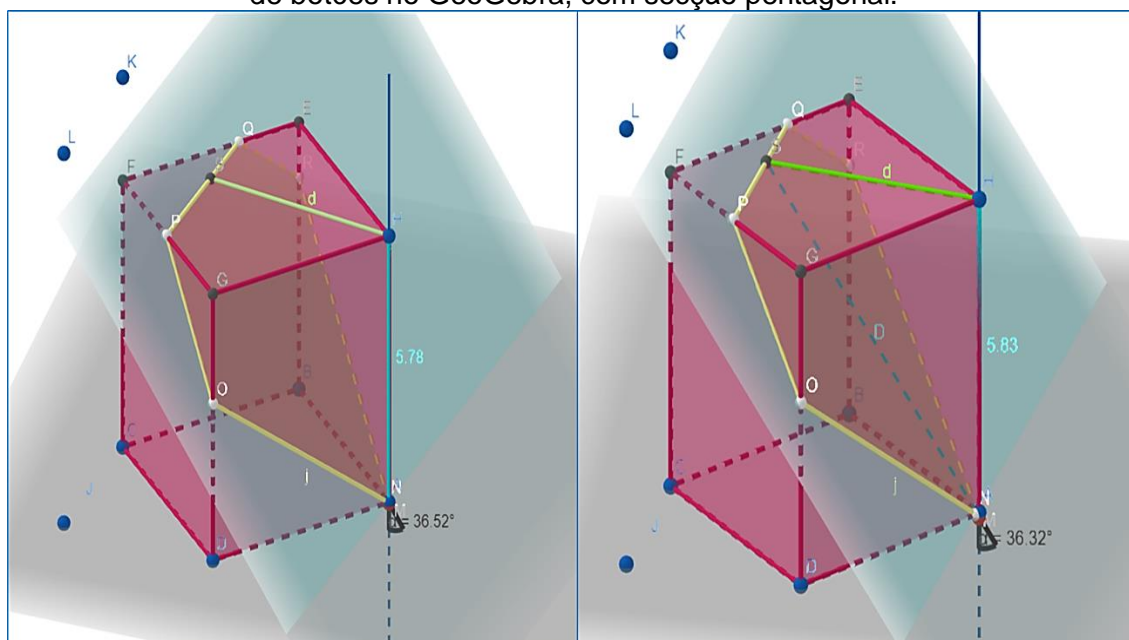
O potencial do GeoGebra, permite, ao construir a figura, obter determinadas dimensões, assim como medidas de ângulos específicos, facilitando o desenvolvimento da atividade proposta. Nas figuras 20 e 21, a seguir, sugere-se utilizar uma razão trigonométrica para obtenção da medida “d” que também pode se tornar uma prática para ser explorada em sala de aula.

Figura 20. Segmento “d”, posto como uma incógnita e demais medidas obtidas através de botões no GeoGebra, com secção triangular.



Fonte: o próprio autor (2020).

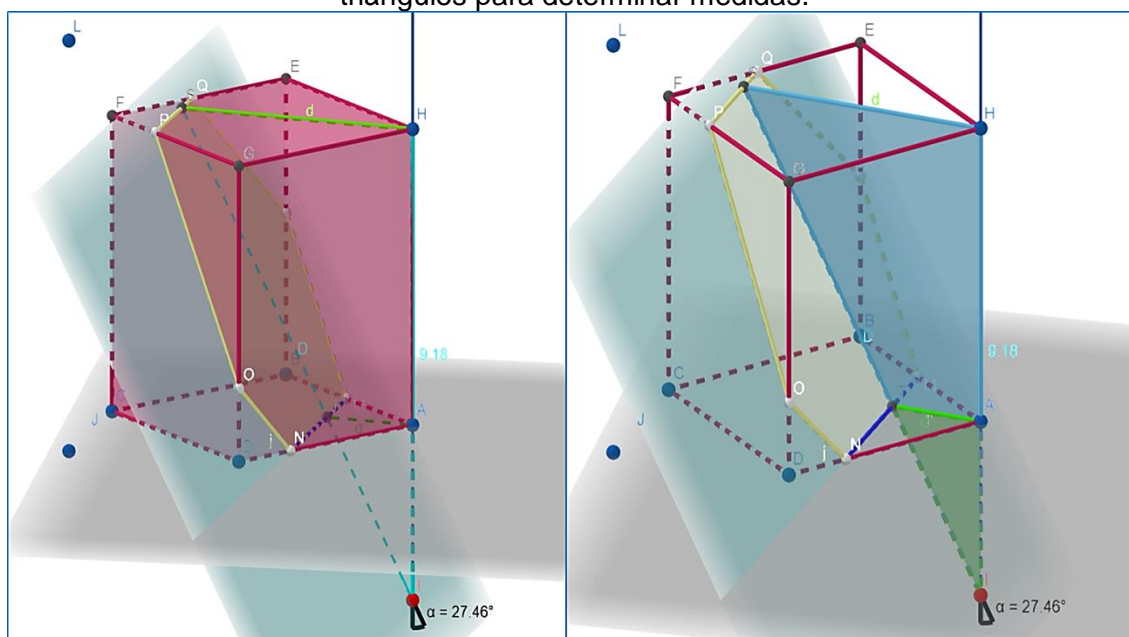
Figura 21. Segmento “d”, posto como uma incógnita e demais medidas obtidas através de botões no GeoGebra, com secção pentagonal.



Fonte: o próprio autor (2020).

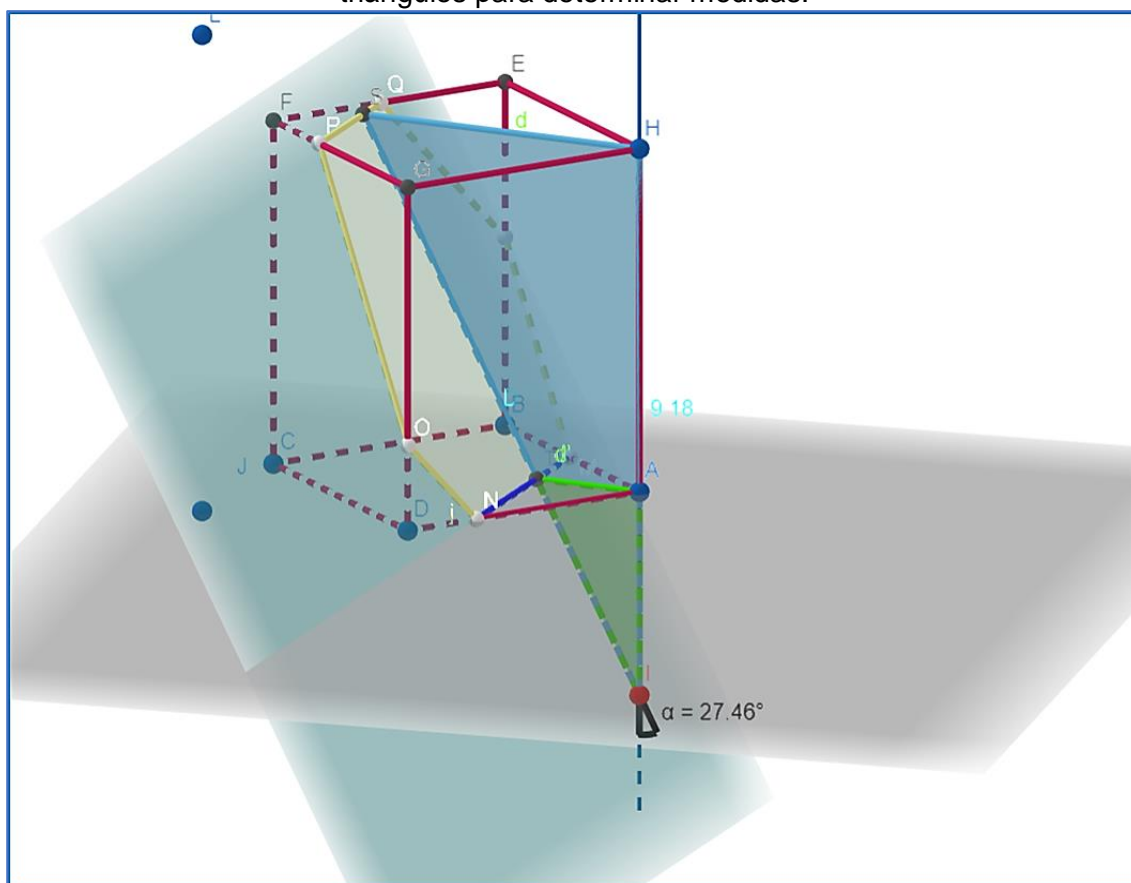
Outra proposta que pode ser usada durante a aula pelo professor é a modificar a posição do plano KLI no espaço, pode-se utilizar a construção para aplicar semelhança de triângulos (Figura 22; Figura 23).

Figura 22. A construção no GeoGebra proporcionando aplicar a semelhança de triângulos para determinar medidas.



Fonte: o próprio autor (2020).

Figura 23. A construção no GeoGebra proporcionando aplicar a semelhança de triângulos para determinar medidas.



Fonte: o próprio autor (2020).

4.2.3 Atividade proposta 3 - Explorar a secção de um cilindro - Cilindro deitado e secção plana perpendicular às bases

Nas propostas a seguir pretende-se atingir parcialmente as habilidades e competências propostas pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Pensando nisto, acreditamos e interpretamos que a exploração das secções em sólidos, colabora e dá um suporte um pouco distinto, para atingir as habilidades propostas.

O uso de secções em sólidos geométricos no GeoGebra, para se determinar volumes parciais de sólidos geométricos, a princípio o cilindro, pode ser uma atividade mais interativa, com animação em 2D e 3D. Por exemplo: a visualização da superfície do líquido e sua respectiva altura, em relação ao solo/piso determinando a quantidade de líquido no cilindro de acordo com a variação desta altura.

A partir desta atividade proposta, o professor pode apresentá-la através de uma situação problema, desafiando seus alunos através de questionamentos que abrangem sólidos geométricos que representa, tanques de armazenamento de líquidos. Porém o objetivo final é propor o desafio dentro de um determinado contexto a realidade impõe um maior grau de aplicação do conhecimento da geometria. Dessa forma se questiona?

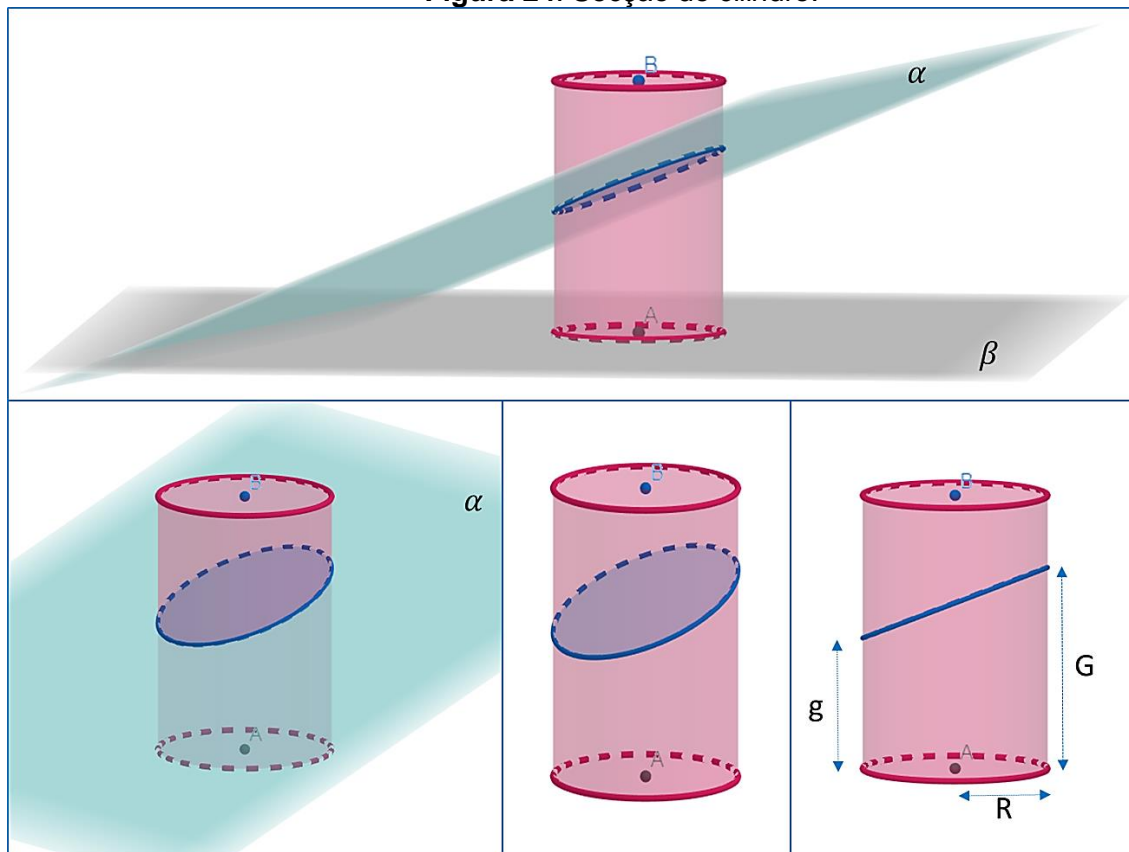
COMO CALCULAR O VOLUME DE LÍQUIDOS CONTIDOS EM TANQUES COM FORMATOS CILINDRÍCOS E DE TRONCO DE CONE, ESTANDO POSICIONADOS COM SEUS RESPECTIVOS EIXOS CENTRAIS NA HORIZONTAL?

É comum encontramos alguns exercícios onde a secção formada em um cilindro é obtida por um plano oblíquo em relação ao eixo central (Figura 24), gerando um tronco de cilindro (cilindro truncado). Estes exercícios têm como base a equação apresentada abaixo, para determinar seu volume:

$$V_{TC} = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g + G}{2}\right)$$

No GeoGebra a secção do cilindro pode ser construída, estudada e entendida de maneira prática. Abaixo, pode ser observado a secção de um cilindro, obtida com um plano sector inclinado, em relação aos planos das bases e as variáveis envolvidas nessa equação (Figura 24).

Figura 24. Secção do cilindro.



Fonte: o autor (2020).

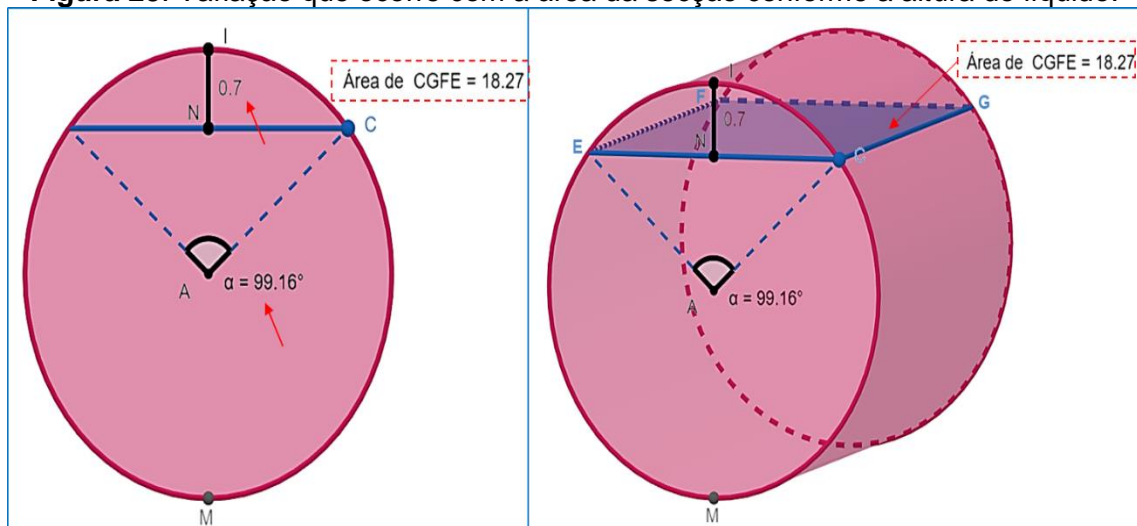
Todavia, queremos apresentar uma proposta na qual modificamos a posição do plano sector, objetivando uma exploração diferenciada da supracitada.

Nesta atividade, o professor pode trabalhar com uma secção paralela ao eixo central e perpendicular à base do cilindro de raio igual à $2u$ e altura $6u$, sendo assim, apresentaremos três formas de se explorar está forma de secção:

1ª) Estudar a área da secção, a qual representa a “lâmina” do líquido contido.

- Estudar a variação que ocorre com a área da secção conforme a altura do líquido. Verificando que existe uma área máxima (Figura 25).

Figura 25. Variação que ocorre com a área da secção conforme a altura do líquido.



Fonte: o autor (2020).

O objetivo desta atividade é o aluno constatar a variação da área formada pela secção, sendo seu valor máximo obtido quando se atinge a metade do tanque, logo com a medida " $L = 2\text{ m}$ ", sendo a altura do cilindro uma constante " $H = 6\text{ m}$ ". Abaixo são apresentadas as Ferramentas/botões utilizados para esta atividade (Figura 26).

Figura 26. Ferramentas/botões usado para estudo do cilindro.



Fonte: o autor (2020).


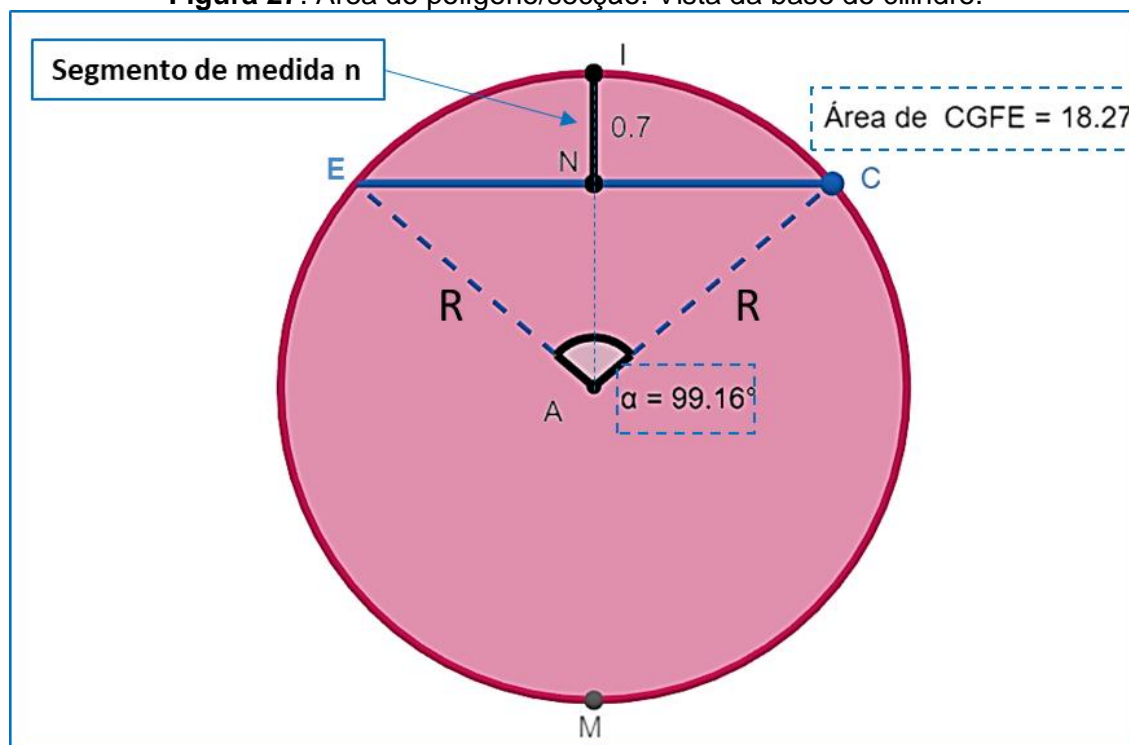
Pode-se obter tal medida através  do botão, o qual fornece a área do polígono selecionado, neste caso, o polígono obtido pela secção (Figura 27).

Figura 27. Área do polígono/secção. Vista da base do cilindro.



Fonte: o autor (2020).

Todavia, o professor pode trabalhar o cálculo em sala de aula, pois acreditamos que o maior desafio fica em determinar uma expressão que nos dê a medida da área em função das informações na figura 27. Vejamos abaixo, o cálculo que pode ser explicado para o aluno, com base na figura projetada no GeoGebra.

As expressões usam como variáveis a área, a medida de “n” e o valor de α , sendo:

- No triângulo ANC , retângulo em N , pois N é o ponto médio do segmento EC , temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (2 - n)^2, \text{ resultando, após substituirmos } R = 2m \text{ e isolarmos:}$$

$$L^2, \text{ em}$$

$$L^2 = 16n - n^2$$

Como podemos determinar a área da secção pela expressão:

$$A = 6 \cdot L,$$

e elevando ao quadrado ambos os lados da equação, temos:

$$A^2 = 36 \cdot L^2$$

Desta forma podemos substituir L^2 e obtermos:

$$A^2 = 36 \cdot (16n - 4n^2), \text{ então:}$$

$$A = \sqrt{36 \cdot (16n - 4n^2)}$$

que nos dá:

$$A = 6 \cdot \sqrt{16n - 4n^2}$$

Sendo está, a relação que se deve inserir no campo algébrico de “*entrada*”.

Também podemos determinar o valor da área da secção através do ângulo α formado entre os dois raios do cilindro utilizando a lei dos cossenos no triângulo ECA com α em \hat{A} . Sendo assim, teremos:

$$L^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(\alpha)$$

$$L^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$L^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha))$$

Substituindo o valor obtido para L^2 na expressão $A^2 = 36 \cdot L^2$, e com o raio $R = 2 \text{ m}$, teremos uma relação entre a área da secção e o ângulo α , ou seja,

$$A^2 = 6^2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot (1 - \cos\alpha)$$

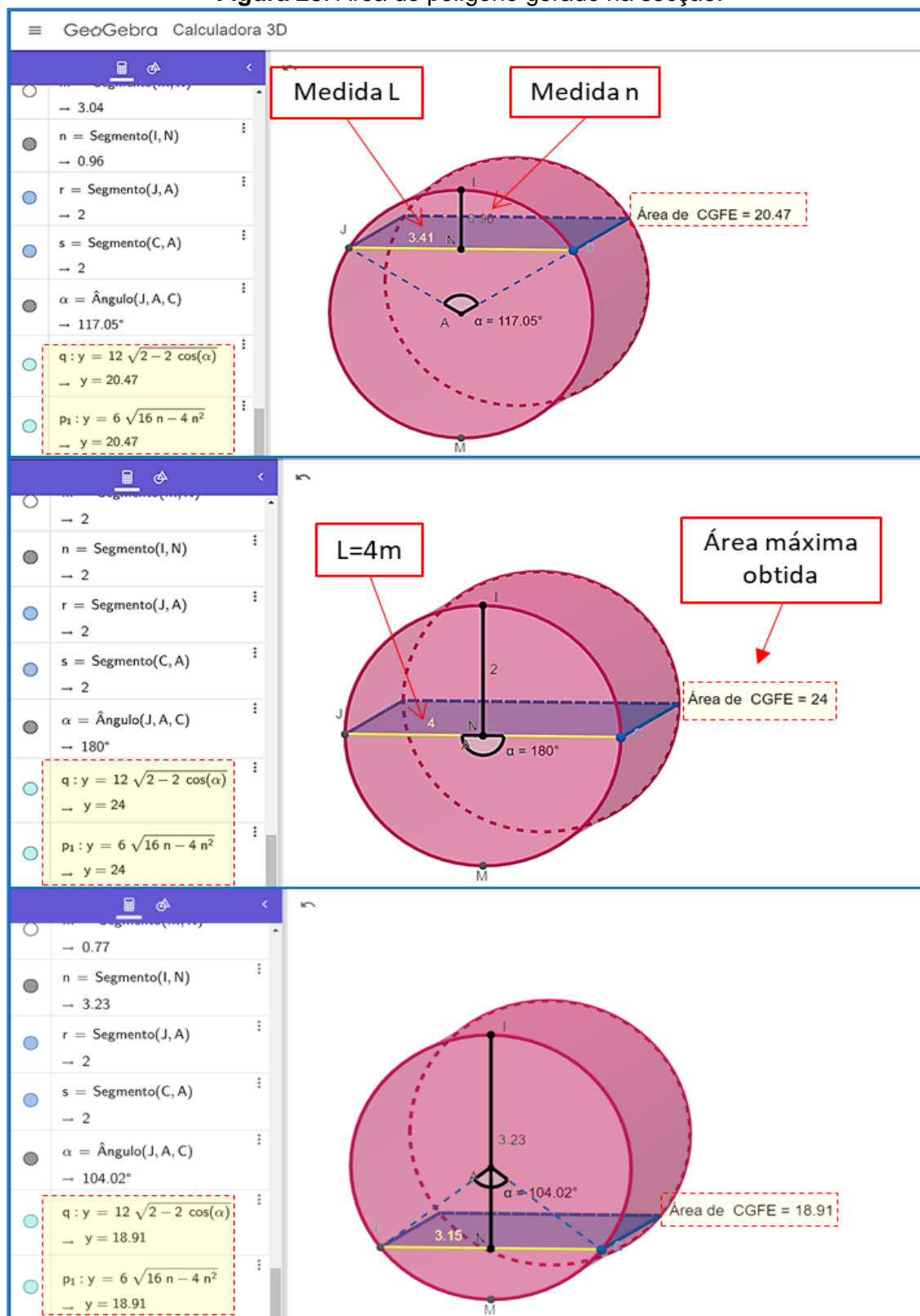
$$A = \sqrt{6^2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot (1 - \cos\alpha)}$$

$$A = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos\alpha)}$$

$$A = 12 \cdot \sqrt{(2 - 2\cos\alpha)}$$

Com a expressão apresentada acima, podemos movimentar o ponto “C” sobre a circunferência da base do cilindro, variando desta forma a posição do plano sector e conseqüentemente, alterando o polígono obtido pela secção. Tal alteração proporciona a variação do valor de L e conseqüente no valor da área do polígono, como, por exemplo (Figura 28):

Figura 28. Área do polígono gerado na secção.



Fonte: o autor (2020).

A medida “n” do segmento \overline{IN} , representa no dia-a-dia uma régua muito utilizada para obter a altura e/ou a profundidade do líquido no cilindro. Inclusive

podemos determinar a medida aproximada do ângulo α entre os dois raios que ligam o centro da base do cilindro com as extremidades do segmento representado por L (segmento \overline{CJ}). Para isso usaremos o triângulo retângulo ANC , retângulo em \hat{N} e a trigonometria básica, com:

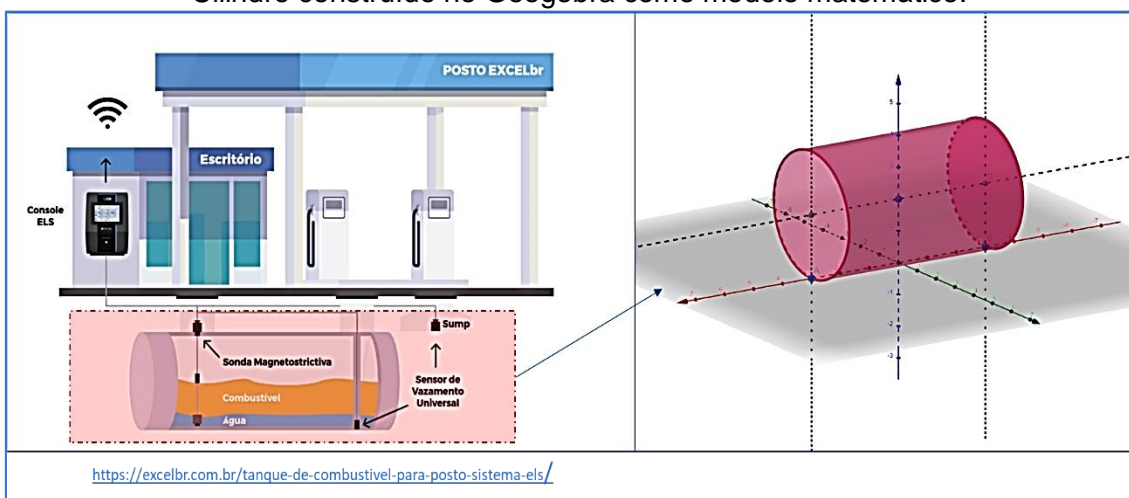
$$\cos(\alpha) = \frac{(L/2)}{2} = L/4, \text{ sendo assim, } \alpha = \arccos(L/4).$$

Podendo ser mais uma prática que pode ser usada em sala de aula pelo professor ao ensinar a geometria.

4.2.4 Atividade proposta 4 - A construção no GeoGebra: Volume parcial no cilindro - Mensurar volumes parciais em tanques

O objetivo é construir a situação de medição do volume do líquido no tanque, utilizando as ferramentas disponíveis no GeoGebra. Sua funcionalidade e seu dinamismo proporciona ao aluno visualizar as questões, conjecturar e investigar a situação em questão, sendo oportunizado construir conhecimento testando hipóteses. Ao observar os tanques cilíndricos em postos: formatos, posições e leituras da régua para o cálculo de volume (Figura 29; Figura 30), temos:

Figura 29. Os tanques cilíndricos em postos: formatos e posições de instalação. Cilindro construído no Geogebra como modelo matemático.



Fonte: <https://excelbr.com.br/tanque-de-combustivel-para-posto-sistema-els/> (à esquerda da figura) e à direita construída no GeoGebra pelo próprio autor (2020).

Figura 30. Tanque cilíndrico para instalação suspensa: formatos, posições e leituras com utilização de régua para determinar de volume parcial.



Fonte: <https://www.seuposto.com/tanque-aereo-para-combustivel-com-bacia-de-contencao-capacidade-1000-litro>

O professor pode tomar como proposta: estudar o volume parcial contido em um tanque cilíndrico, através da medida da altura do líquido. Tem se como objetivo principal é determinar a quantidade de líquido contido no interior do cilindro/tanque dependendo da altura da lâmina/secção, podendo utilizar um ângulo central determinado, a altura do líquido e/ou um determinado segmento.

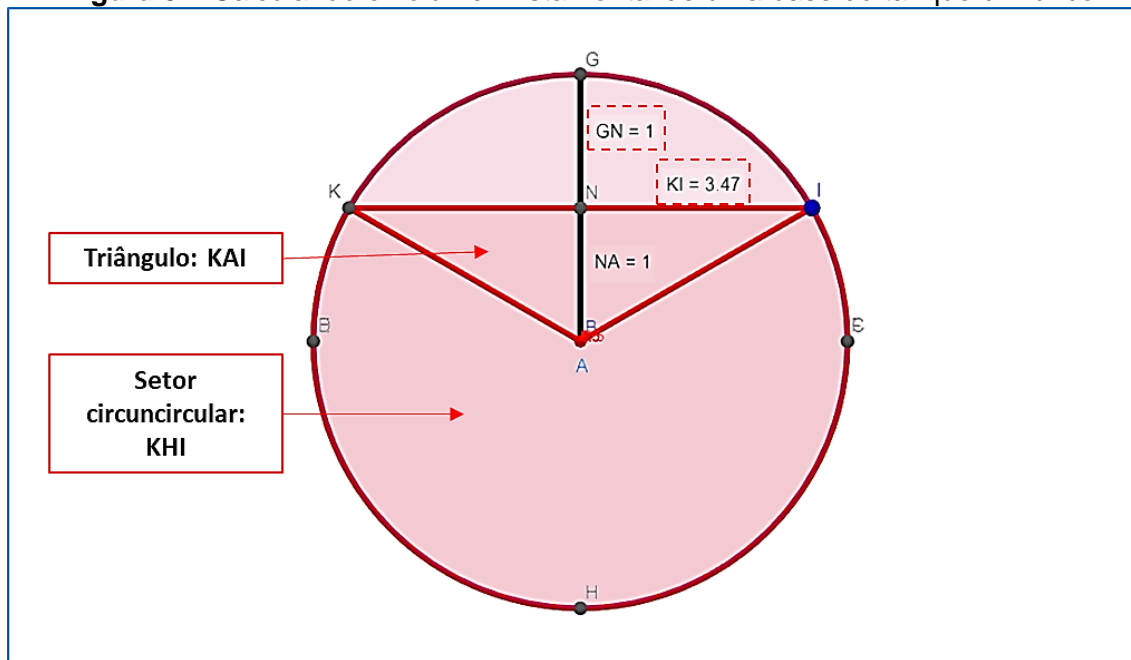
O objetivo desta atividade é sistematizar a técnica de utilizar uma régua para medir a altura em que o líquido se encontra para obter o volume de líquido contido no recipiente. Através das medidas obtidas pelo GeoGebra e utilizando seu potencial de dinamismo, movendo o plano que gerou a secção, com isso, simulando a variação da altura do líquido. Desta forma podemos obter o volume em duas partes:

- 1.^a parte: determinando o volume estando a secção (superfície do líquido) posicionada acima do eixo central do cilindro;

- 2.^a parte: determinando o volume estando a secção (superfície do líquido) posicionada abaixo do eixo central do cilindro.

A partir da observação desse tanque pode-se determinar seu volume parcial, tendo o tanque as dimensões expostas na figura 31, por exemplo:

Figura 31. Calculando o volume. Vista frontal de uma base do tanque cilíndrico.



Fonte: o autor (2020).

O volume solicitado será obtido pela seguinte igualdade:

$$V = (\text{área do setor circuncircular}(KHI) + \text{área do triângulo } KAI) \times 6$$

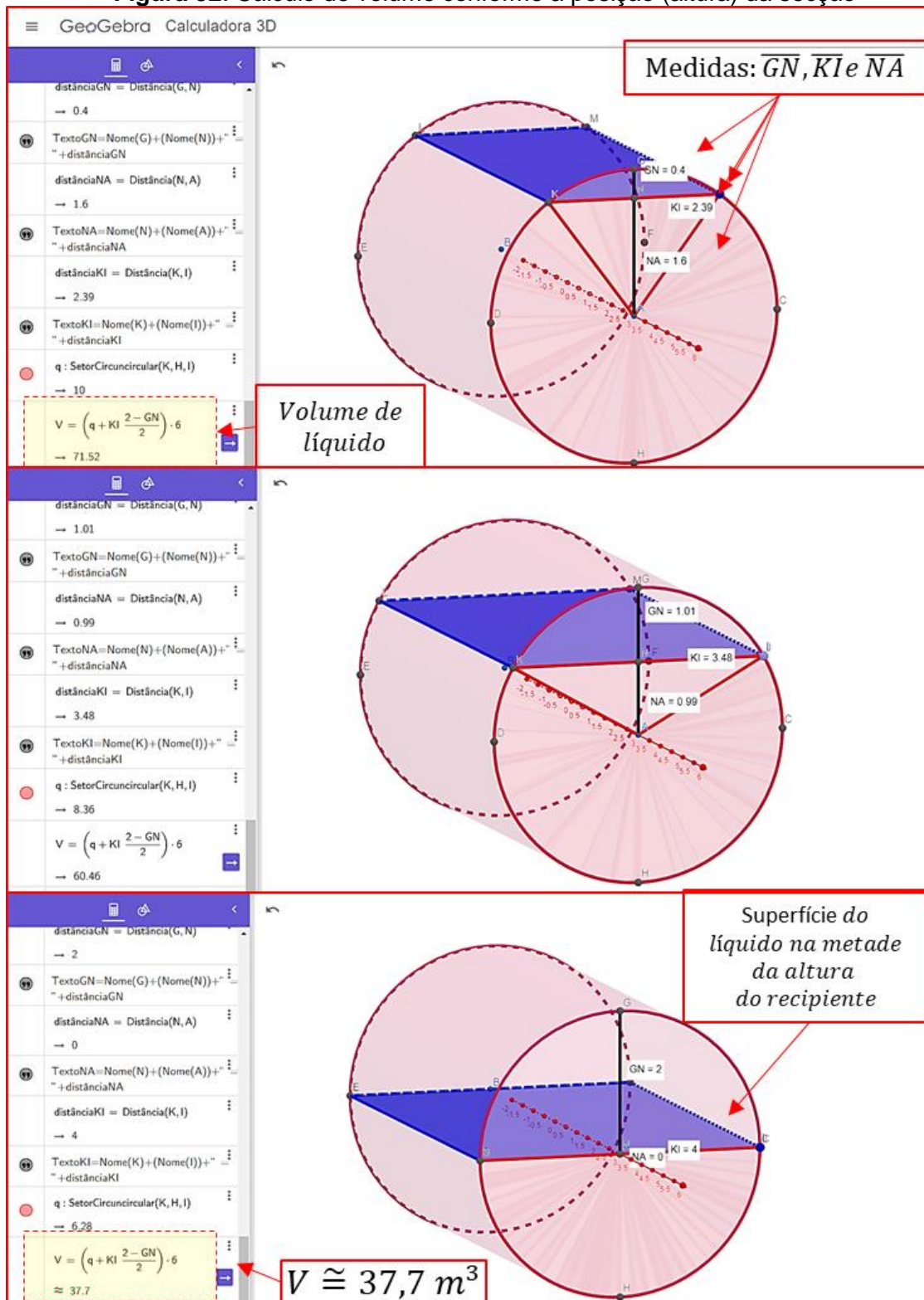
Onde a medida “6” representa a altura do cilindro/tanque estudado.

A área do triângulo será obtida pela fórmula básica:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Sendo que a altura do triângulo será representada pela diferença $(2 - GN)$ e a base pela medida do segmento KI (Figuras 32).

Figura 32. Cálculo de volume conforme a posição (altura) da secção



A seguir, no quadro 1, estão descritos os passos a se seguir no GeoGebra, para construção da “simulação” de um tanque cilíndrico posicionado com seu eixo central na horizontal e um polígono (quadrilátero) gerado com intersecção de um plano perpendicular à duas bases do cilindro:

Quadro 1. Comandos usados para “simulação” de um tanque cilíndrico posicionado com seu eixo central na horizontal.

Comandos feitos no GEOGEBRA	RESULTADOS OBTIDOS
Selecione [ponto] e clique nos pontos (3;0,0) e (-3) (eixo vermelho);	Aparecerão os pontos A e B respectivamente
Selecione [cilindro], clique nos pontos A e B e insira um raio igual a 2;	Aparecerá um cilindro com o eixo central contido no eixo X
Selecione [Reta perpendicular] e clique no plano e no ponto A;	Cria uma reta perpendicular ao plano que passa pelo ponto A
Selecione [Intersecção de dois objetos] e clique na base do cilindro e na reta, em seguida na janela de álgebra, oculte a reta criada anteriormente.	Aparecerão dois pontos, C e D, indicando a intersecção entre a reta e a circunferência da base.
Selecione [Intersecção de dois objetos] e clique na circunferência da base do cilindro e no plano existente;	Aparecerão dois pontos, E e F.
Selecione [Setor circular] e clique nos pontos A, C,E nesta sequência.	Aparecerá um setor circular, contido na base do cilindro, definido pelos pontos selecionado.
Selecione [Ponto] e clique no arco do setor circular criado. Em seguida oculte o setor circular	Cria o ponto G no arco do setor circular.
Selecione [Plano perpendicular] e clique no eixo Z (azul) e no ponto G.	Cria o plano “p” paralelo ao eixo central do cilindro, passando pelo ponto G.
Selecione [Intersecção de duas] e clique na região de intersecção entre o plano “p”. Em seguida oculte o plano “p”.	Cria um polígono, quadrilátero retângulo, obtido pela intersecção do plano e a superfície do cilindro.
Selecione [Configurações] e oculte o plano original, em seguida selecione [configurações] e oculte os eixo Y e Z.	Oculto o plano inicial do GeoGebra, assim como os eixos Y e Z, melhorando o visualização do cilindro e da secção.
Selecione [Ponto médio ou centro] e clique nos pontos I e G.	Cria o ponto médio do segmento IG, formado na base do cilindro.
Selecione [Segmento] e clique nos pontos C e L, em seguida nos pontos L e A.	Cria os segmento CL e LA, contidos na base do cilindro.
Selecione [Polígono] e clique nos pontos I, A,G.	Cria um triângulo isósceles, com os lados congruentes iguais ao raio do cilindro.
Selecione [Setor circuncircular] e clique nos pontos L, D, G.	Cria um setor circuncircular contido na base do cilindro e adjacente ao triângulo IAG.
Selecione [Distância, comprimento] e clique nos pontos C e L, e nos pontos I e G.	Apresenta as medidas dos segmentos CL e IG (considerada a base do triângulo IAG). Estas medidas ficarão visíveis na tela.

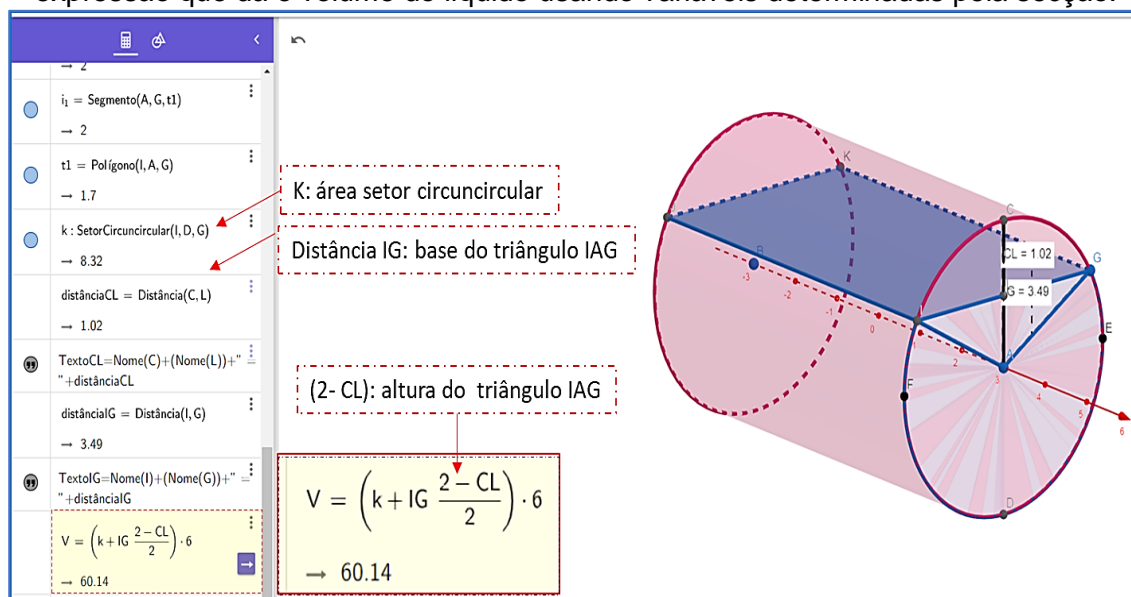
Fonte: Autor usando o “software” GeoGebra (2020).

Com nosso tanque/cilindro montado no “software”, agora podemos determinar o volume contido no recipiente, de forma a utilizarmos a medida da altura do líquido. Devemos observar que, este modelo está determinado para uma situação onde mediremos apenas da metade para cima, lembremos que o setor circular posto no GeoGebra, tem um ângulo central de 90 graus.

O próximo passo é colocar para o aluno, o desafio e gerar na aba algébrica do GeoGebra, uma expressão que nos dê o volume do líquido (Figura 33), o qual depende da variação da altura. A seguir apresentamos uma forma de determinar esta expressão:

$$V = \left(k + IG \frac{2-CL}{2}\right) \cdot 6$$

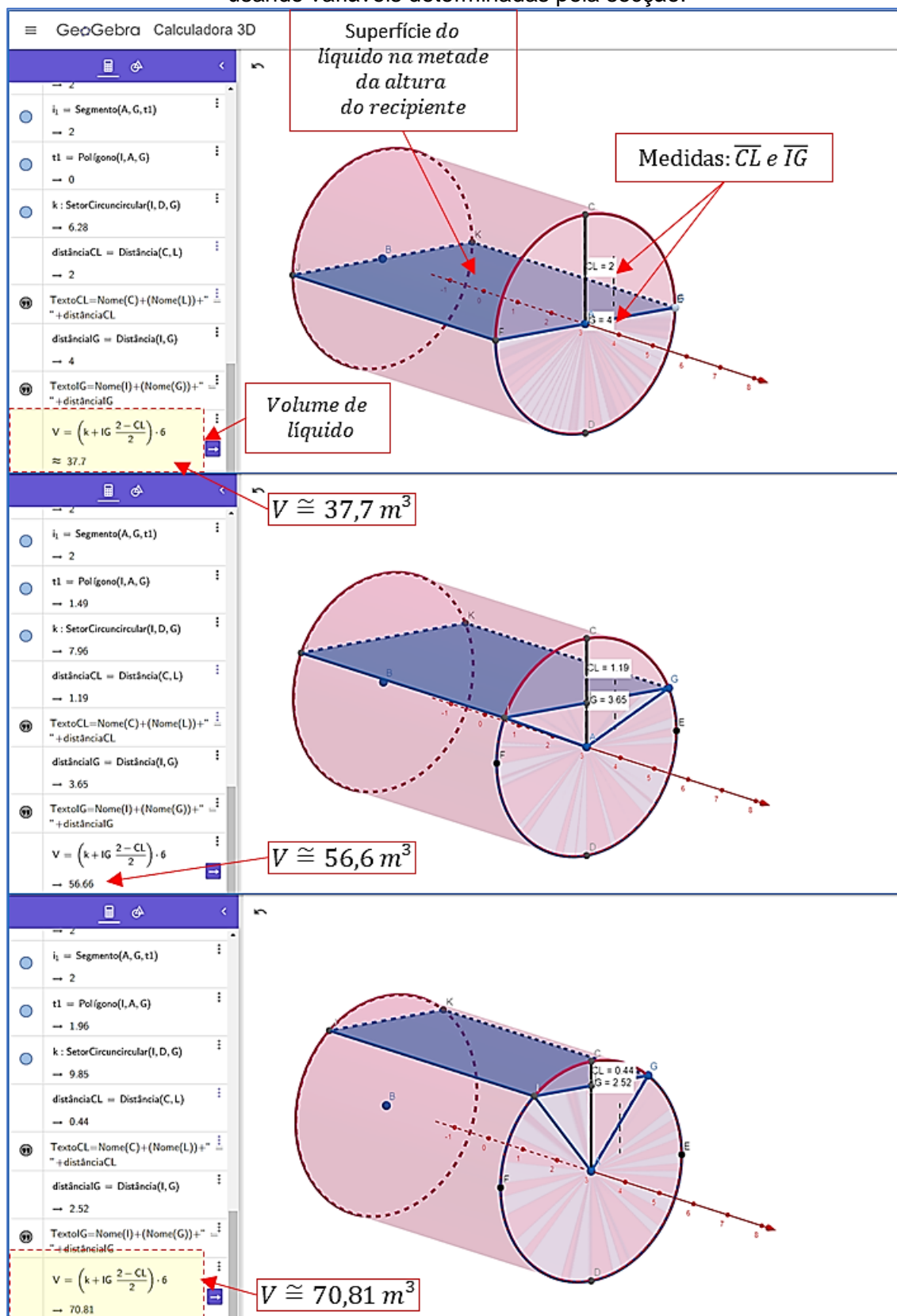
Figura 33. Imagem mostra a figura construída no GeoGebra e as variáveis e a expressão que dá o volume do líquido usando variáveis determinadas pela secção.



Fonte: o autor (2020).

Agora é só aproveitar o dinamismo do “software” e variar a posição do ponto “G” sobre o arco do setor circular IDG, obtendo-se assim os volumes de acordo com a altura do líquido. Esta construção pode ser explorada pelo professor para gerar questões, onde ele, o professor conseguirá modificar a questão apenas pela variação do ponto “G”. O enxerto de imagens a seguir, mostra os resultados obtidos na aba de álgebra, com a movimentação do ponto, supracitada (Figura 34).

Figura 34. Imagem mostra a figura construída no GeoGebra e a aplicação matemática para obter os valores numéricos das variáveis e a expressão que dá o volume do líquido usando variáveis determinadas pela secção.

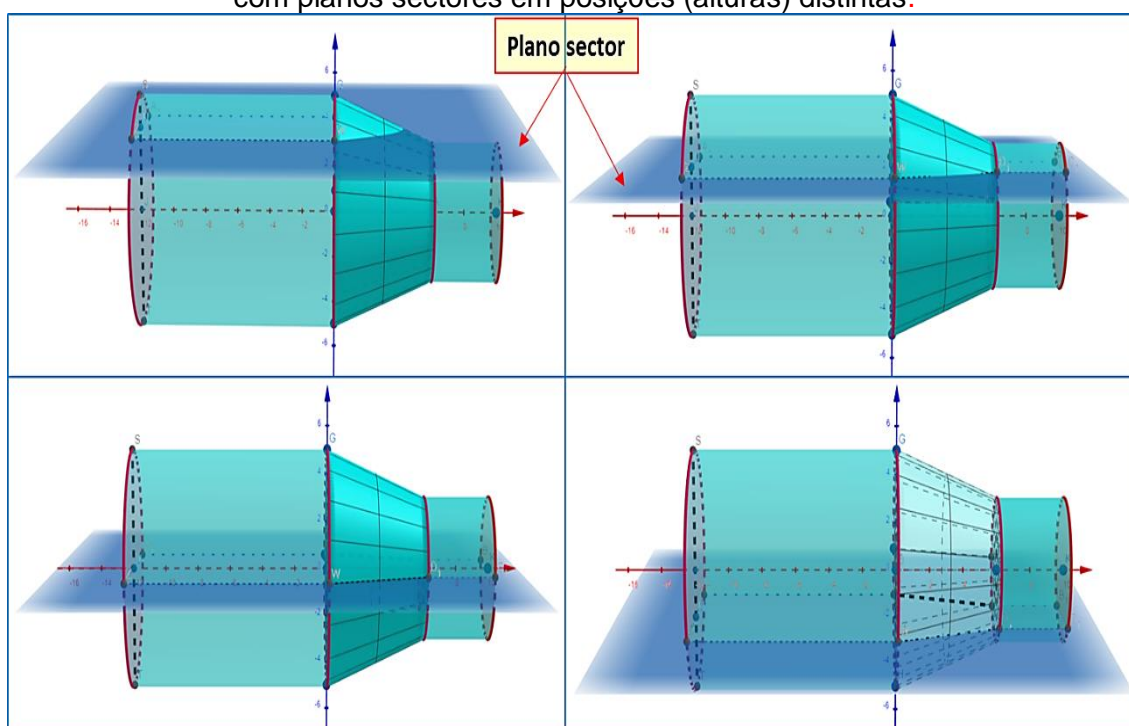


Fonte: o autor (2020).

4.2.5 Atividade proposta 5 - Tanque formado por cilindros e tronco de cone

Como já sabemos determinar o volume do tanque representado pelo cilindro deitado, feito na atividade proposta anteriormente, focaremos então na região do “tanque” representada por um tronco de cone. Esta região do tanque nos traz uma maior dificuldade devido não termos de imediato uma fórmula fechada, estando o tanque na posição deitado, com seu eixo central na horizontal. Todavia acreditamos que isso não impede o desenvolvimento da atividade, sendo necessário, apenas uma maior participação por parte do professor.

Figura 35. Tanque representado por sólido composto por cilindros e tronco de cone, com planos sectores em posições (alturas) distintas.



Fonte: o autor (2020).

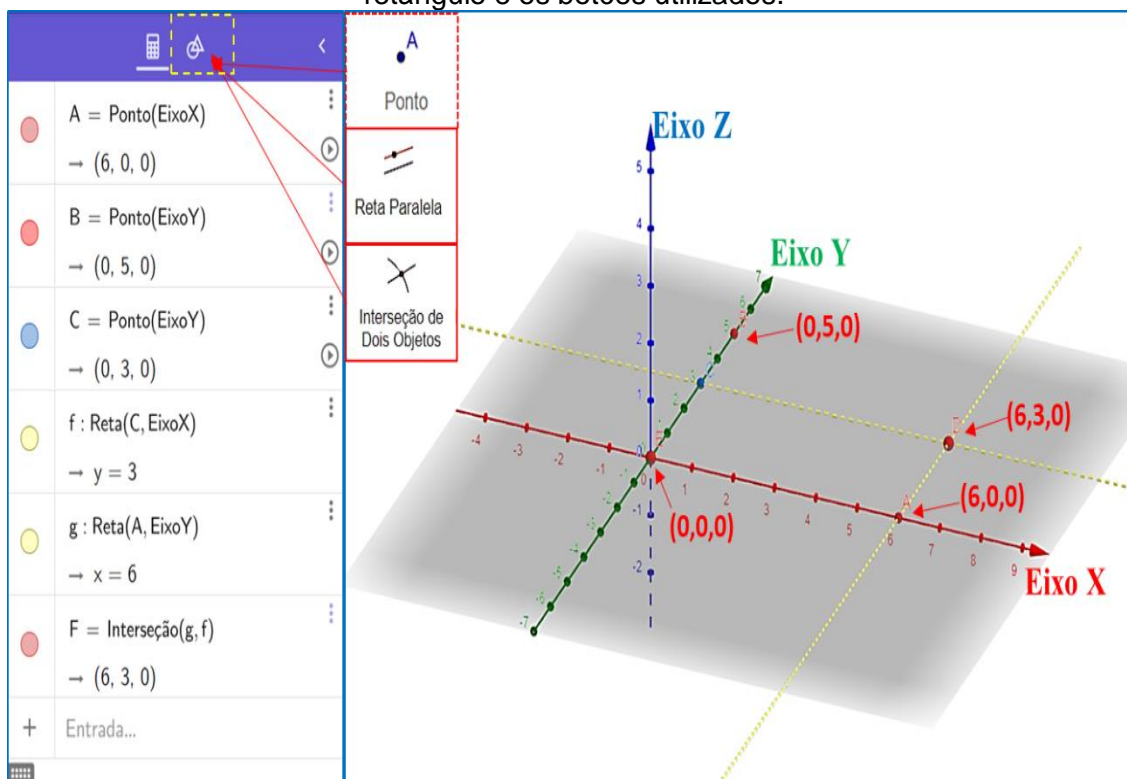
O tronco de cone pode ser construído no GeoGebra, através da rotação de um trapézio retângulo, o qual tem o lado perpendicular às bases, contido no eixo X e cuja dimensão representa a altura do tronco de cone a ser gerado. A base maior deve estar contida no eixo Y e também tem sua dimensão de acordo com o raio desta base. As figuras 36, 37 e 38 mostram esta construção.

Quadro 2. Comandos usados para construção de um tanque com formato de tronco de cone com seu eixo central contido no eixo X.

Comandos feitos no GEOGEBRA	RESULTADOS OBTIDOS
Selecione [ponto] e clique nos pontos A(6;0;0), B(0;5;0), C(0;3;0) e D(0;0;0);	Aparecerão os pontos A, B, C e D; respectivamente
Selecione [Reta paralela] e clique no eixo X (vermelho) e no ponto C;	Cria uma reta (f) paralela ao eixo X que passa pelo ponto C;
Selecione [Reta paralela] e clique no eixo Y (verde) e no ponto A;	Cria uma reta paralela ao eixo Y que passa pelo ponto A;
Selecione [Intersecção de dois objetos] e clique na intersecção das retas f e g;	Cria um ponto de intersecção entre as duas retas, ponto F;
Selecione [Polígono] e clique nos pontos A, B, C e D;	Cria um trapézio retângulo, em D(0,0,0)
Selecione [Superfície de revolução] e arraste o polígono em torno do eixo X;	Cria a superfície de um tronco de cone, gerada pelos segmentos do polígono ABCD, com altura igual à 6 unidades e bases medindo 5 e 3 unidades.

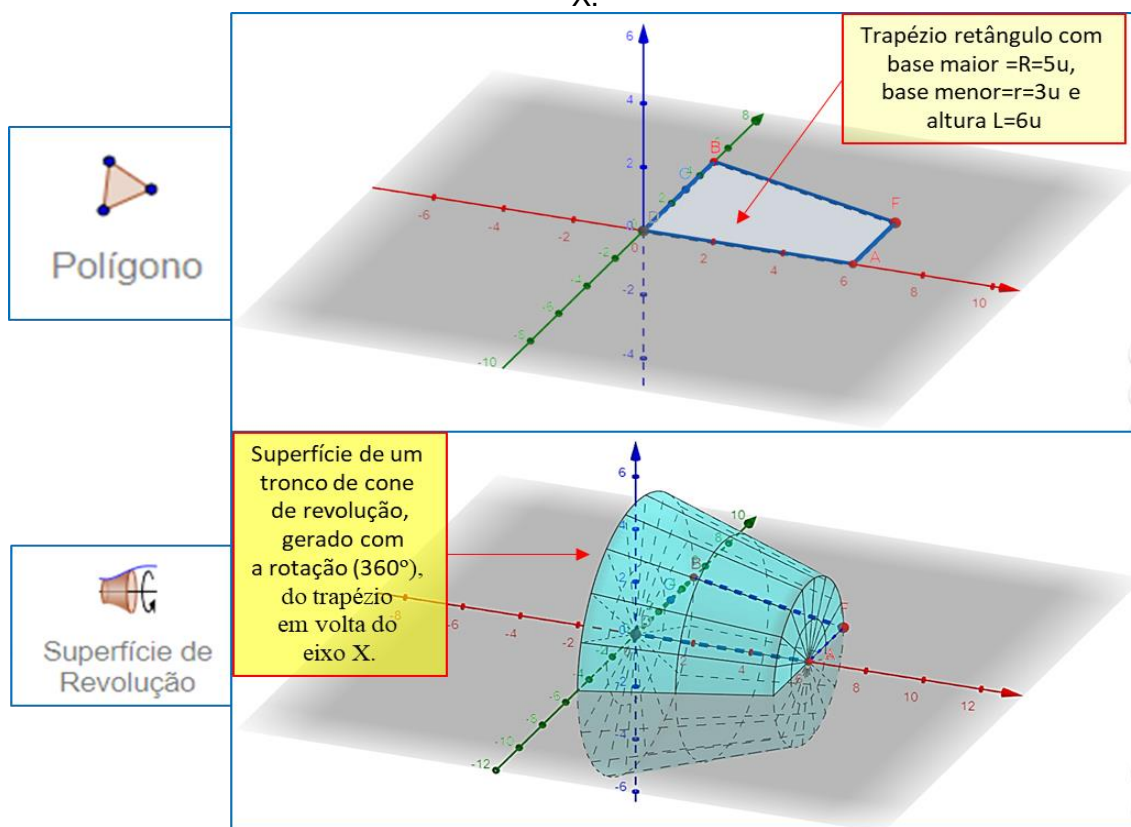
Fonte: Autor usando o “software” GeoGebra (2020).

Figura 36. Construção do tronco de cone, as coordenadas dos vértices de um trapézio retângulo e os botões utilizados.



Fonte: o autor (2020).

Figura 37. Trapézio retângulo na origem e lado perpendicular às base contido no eixo X.



Fonte: o autor (2020).

Vejamos então que no caso do tronco de cone temos duas situações, as quais mostraremos a seguir.

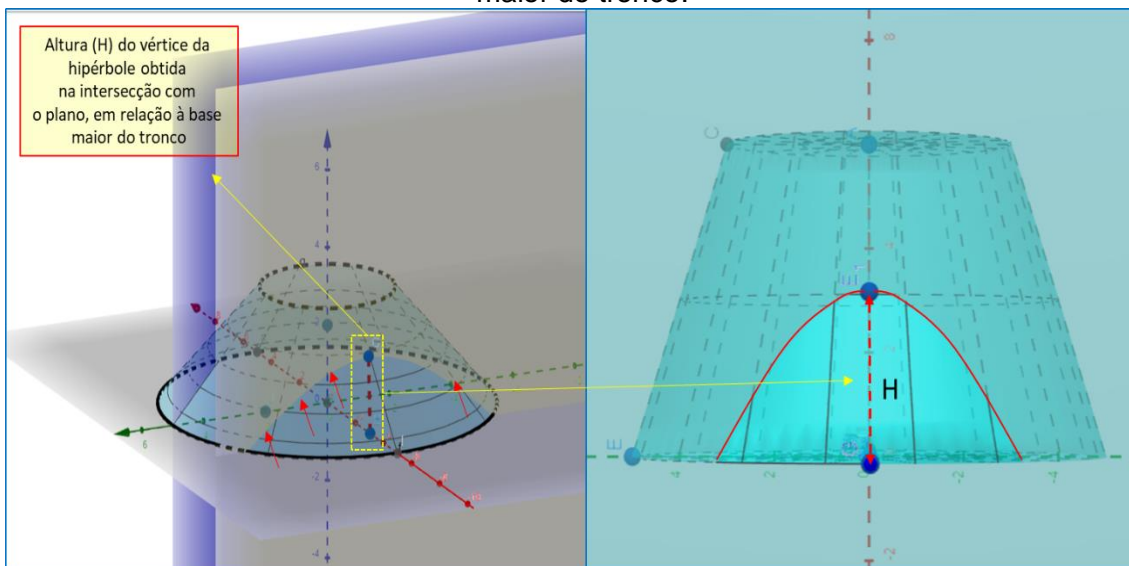
Dado um tronco de cone com comprimento L (sua altura), raio da base maior R e raio da base menor r e sendo H a altura da hipérbole, obtida por uma secção na superfície lateral do tronco, através de um plano perpendicular às bases.

Quadro 3. Comandos usados para construção determinação de planos sectores e perpendiculares às bases do tronco de cone.

Comandos feitos no GEOGEBRA	RESULTADOS OBTIDOS
Selecione [ponto] e clique em pontos sobre o eixo X;	Cria pontos sobre o eixo X;
Selecione [Plano perpendicular] e clique no eixo Z e sobre um ponto criado no passo anterior;	Cria um plano perpendicular ao eixo Z
Selecione [Plano paralelo] e clique no criado no passo anterior e sobre outros pontos criado no eixo Z;	Cria planos paralelos ao plano criado anteriormente;

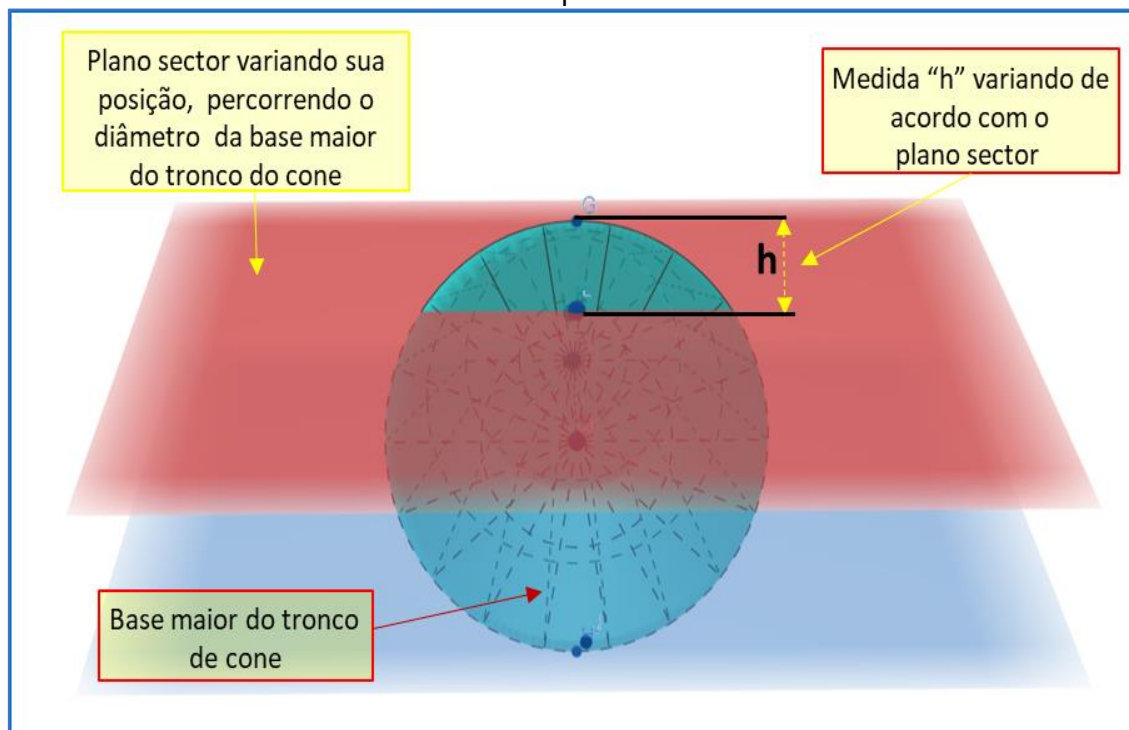
Fonte: o autor (2021).

Figura 38. Mostra o tronco de cone com uma secção em sua região lateral, formando um ramo de hipérbole. No detalhe a altura H do vértice da hipérbole em relação à base maior do tronco.



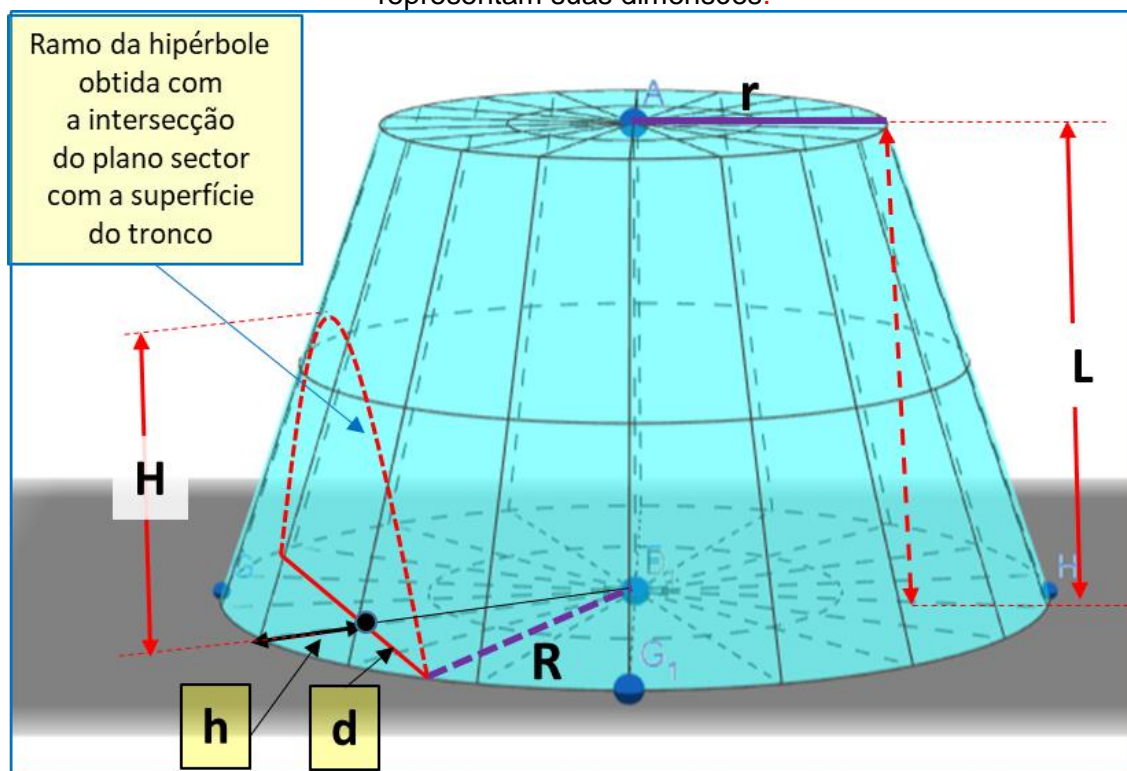
Fonte: o autor (2020).

Figura 39. Mostra um plano sector e a distância h indicando uma “altura” em relacionado a um plano na “horizontal”.



Fonte: o autor (2020).

Figura 40. Região do tanque formada pelo tronco de cone com as variáveis que representam suas dimensões.



Fonte: o autor (2020).

Determinaremos H em função dos raios e comprimento (altura) do tronco de cone (R, r, L) para seguidamente o aferimento em função de " h " para intervalos determinados.

Determinemos d por Pitágoras no gráfico 2 temos $d^2 = R^2 - (R - h)^2$ agora determinemos H por semelhança de triângulos

$$\frac{L}{(R-r)} = \frac{H}{h} \quad \text{onde} \quad H = Lh / (R - r)$$

Já temos o necessário para medir o volume parcial no intervalo $h \in [0; (R - r)]$, a equação do hiperboloide elíptico que utilizamos de base

$$Z = \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{h^2}$$

porém o que nos interessa é a área, a qual é dada pela fórmula

$$A_{elipse} = \pi dh,$$

logo existe um círculo de raio " ra " o qual sua área é igual a área da elipse dada por

$$A_{elipse} = \pi(ra)^2 = \pi dh,$$

então substituindo pelo área do círculo fica

$$ra = \sqrt{dh},$$

calculamos o volume como a metade do volume de um cone de altura H e base de área πdh , sabendo que o volume de um cone é dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} h ra^2$$

- **Caso (1)**

Então o volume a altura h , é determinado por

$$V(h) = \frac{\pi h L \sqrt{2hR - h^2} h}{6(R - r)}$$

Para calcular o volume parcial do tronco de cone para h entre 0 e $R - r$, aplicamos a formula anterior.

$$V_1(h) = \frac{\pi h L \sqrt{2hR - h^2} h}{6(R - r)} \text{ para } 0 \leq h \leq R - r \quad (1)$$

- **Caso (2)**

Neste caso a cálculo do **caso (1)** somamos a diferenca do cone maior – cone menor.

Aplicando a fórmula do **caso (1)** para o cone maior e o cone menor imaginário, obtemos

$$V_1(h) = \frac{\pi h L \sqrt{2hR - h^2} h}{6(R - r)} \text{ para } R - r \leq h \leq R \quad (2)$$

Para o cone menor a fórmula (1) fica

$$V_2(h) = \frac{\pi L (h+r-R) \sqrt{r^2 - (r - (h - (R-r)))^2} (h - (R-r))}{6(R-r)} \text{ para } R - r \leq h \leq R \quad (3)$$

Ficaria o volume $V_3 = V_1(h) - V_2(h)$ para $R - r \leq h \leq R$

Chegamos a metade do volume do tronco de cone vamos então obter a fórmula final para aferir um tanque de forma de tronco de cone ficaria

Agora vamos efetuar a partição com passo $h = \frac{2R}{n}$, onde n será o número de fatias que aferiremos preferivelmente “n” par.

Os resultados assim obtidos, estão apresentados como um modelo, que se mostra satisfatório para a resposta ao nosso problema, todavia, a partição de nosso sólido apresenta um “erro de modelagem”, que ocorre devido a substituição de um hiperboloide elíptico cuja equação é dada:

$$Z^2 = c^2 \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{h^2} + 1 \right)$$

por um cone elíptico de equação:

$$Z^2 = c^2 \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{h^2} \right)$$

que se obtém ao eliminar c^2 na equação do hiperboloide elíptico.

Para obter uma fórmula exata para este aferimento precisaríamos aplicar o cálculo integral, o que não é normalmente estudado no ensino médio, além de não permitir utilizar a geometria plana e espacial, estas sim são estudadas neste ensino médio. Também temos a vantagem de mostrar o erro da modelagem matemática.

A fórmula exata do volume de um hiperboloide elíptico de altura h é:

$$Vh = abh\pi + \frac{abh^3\pi}{3c^2}$$

onde a e b são os semieixos da elipse base e c a distância da origem ao vértice da hipérbole.

Para os hiperboloides com $h \in [0, R - r]$, teremos:

$$a = d = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}, b = h, c = L(R - h)/(R - r)$$

substituindo a, b e c obtemos:

$$V1 = \frac{1}{3} h^2 \pi \left(3 + \frac{h^2 (r - R)^2}{L^2 (h - R)^2} \right) \sqrt{-h(h - 2R)}, h \in [0, R - r] \quad (4), \text{ com } h$$

Para os hiperboloides $h \in [R - r, R]$, teremos:

$$a = \sqrt{r^2 - (r - h)^2},$$

$b = h, c = L(r - h)/(R - r)$ substituindo a, b e c obtemos:

$$V2 = \frac{1}{6} h^2 \pi \sqrt{-h(h - 2r)} \left(3 + \frac{h^2 (r - R)^2}{L^2 (h - r)^2} \right) \quad (5)$$

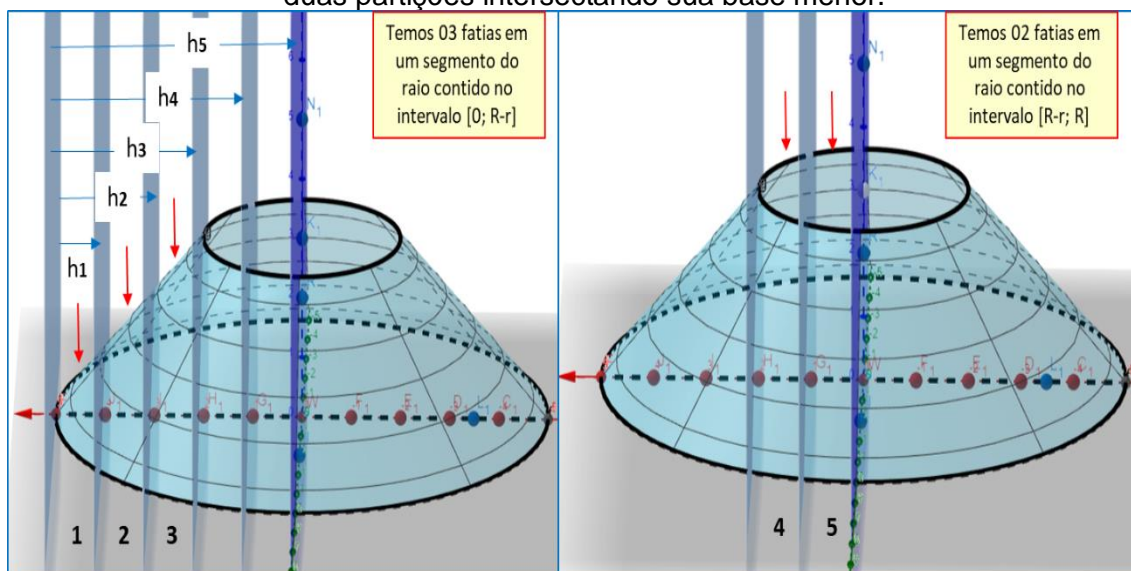
Finalmente precisamos calcular V_1 para $h \in [R - r, R]$ teremos $a=d=\sqrt{R^2 - (R - h)^2}$, $b=h$, $c=L(R^2 - h(R - r))/R/(R - r)$ substituindo a, b e c obtemos

$$V_1 = \frac{1}{6} h^2 \pi \sqrt{-h(h - 2R)} \left(3 + \frac{h^2 (r - R)^2 R^2}{L^2 (h(r - R) + R^2)^2} \right) \quad (6)$$

Voltando ao desenho do tanque, cada um dos planos abaixo pode ser utilizado com a superfície do líquido contido no tanque, assim como representar uma graduação em uma régua. Caso seja de interesse, pode-se aumentar a quantidade de planos de forma a se obter uma graduação mais ampla e mais precisa. De forma simples, basta somarmos as fatias formadas antes do plano que representa a altura do líquido.

A figura a seguir, por exemplo, apresenta um tronco de cone com 10 partições, onde observamos que três fatias não intersectam a base menor, as apenas duas fatias.

Figura 41. Mostra um tronco de cone com cinco partições de dez, no qual se pode ver duas partições intersectando sua base menor.



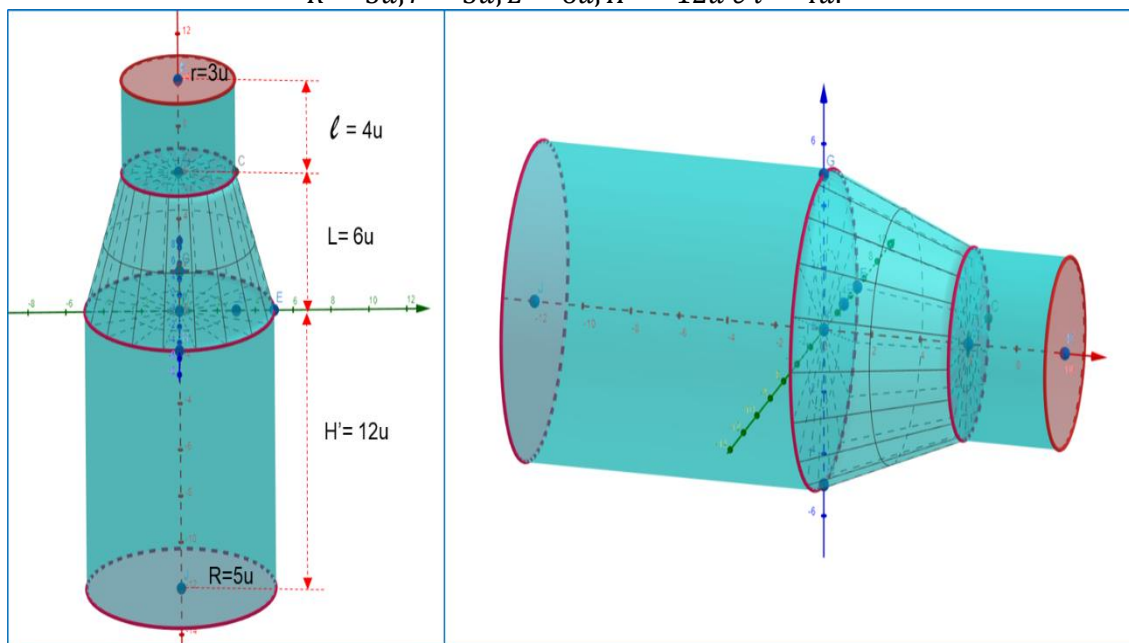
Fonte: o autor (2020).

Como exemplo, vamos a determinar o volume de um tanque em forma de tronco de cone, cujas medidas são $R = 5$, $r = 3$ e $L = 6$, utilizando $n = 20$ partições (fatias), logo teremos $h = 2 \times 5/20 = 0,5$, desta forma, os planos sectores apresentarão uma distância de $0,5u$ entre si. Calculamos então, os

volumes da metade das fatias, obtendo metade do volume do tronco e do meio para o final, aproveitamos as 10 anteriores e somamos em ordem inversa, ou seja, dobramos o valor da soma das 10 fatias.

A figura a seguir mostra um tanque formado por dois cilindros e um tronco de cone, com bases coincidentes, cujas dimensões estão especificadas na figura.

Figura 42. Tanque formado por cilindros e tronco de cone com dimensões definida - $R = 5u, r = 3u, L = 6u, H' = 12u$ e $l = 4u$.

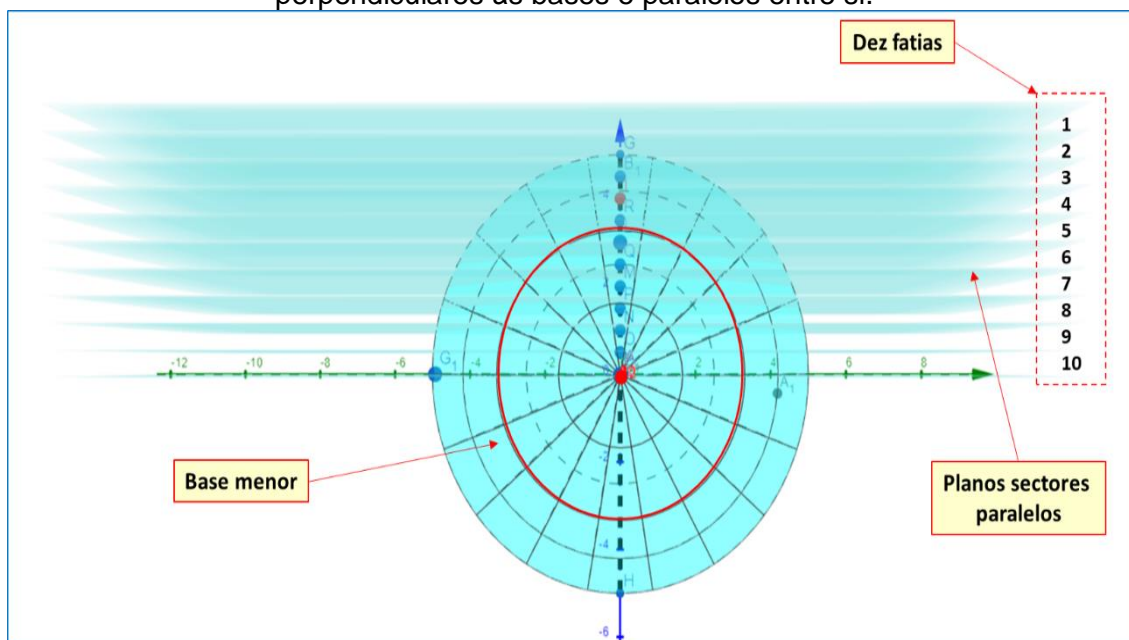


Fonte: o autor (2020).

Atentaremos para a região do tanque representada pelo tronco de cone, pois já temos uma apresentação relacionada aos cilindros (**propostas 3 e 4**).

Fatiando o tronco até sua metade, temos a seguinte situação, conforme podemos ver na figura 43, onde observamos que quatro fatias estarão antes de alcançarmos o círculo da base menor e seis fatias irão intersectar a região da sua base menor, até chegarmos no centro. É claro que, os números de fatias que irão tocar a base menor do tronco de cone, dependem do número de partições “n” que faremos, assim como, os valores atribuídos aos raios das bases, maior e menor, como vimos na figura 41.

Figura 43. Mostra o tronco de cone com 10 de 20 partições, feitas por planos sectores perpendiculars às bases e paralelos entre si.



Fonte: o autor (2020).

Vamos agora construir a sequência com os volumes das fatias como a diferença de dois volumes consecutivos, chamaremos estes valores de "VF", para as primeiras fatias (metade) do tronco, que estará definido conforme intervalos estabelecidos a seguir (Tabela 1):

$$VF = \begin{cases} V_1(h_n) - V_1(h_{n-1}), & \text{para } 0 \leq h < (R - r) \\ \text{ou} \\ V_3(h_n) - V_3(h_{n-1}), & \text{para } (R - r) \leq h < R. \end{cases}$$

Vejamos o nosso exemplo, conforme as dimensões do tronco de cone que compõem o tanque da figura 42:

Tabela 1. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone.

n	h	$V_1(h)$
0	0	0
1	0,5	0,856
2	1,0	4,712
3	1,5	12,620
4	2,0	25,133
5	2,5	42,511
6	3,0	64,785
7	3,5	91,780
8	4,0	123,125
9	4,5	158,246
10	5,0	196,350

Observa-se que utilizaremos $0 \leq h < 2,0$, pois $R - r = 5 - 3 = 2,0$, aplicação na fórmula final $V_3(h)$.

Façamos agora uma tabela para utilizarmos a fórmula $V_2(h)$, para valores no intervalo $2 \leq h \leq 5$, pois, para $V_2(h)$, não temos valores definidos para o intervalo $0 \leq h < 2,0$ (Tabela 2).

Tabela 2. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone usando a fórmula $V_2(h)$.

n	h	$V_1(h)$	$V_2(h)$
0	0	0	*****
1	0,5	0,856	*****
2	1,0	4,712	*****
3	1,5	12,620	*****
4	2,0	25,133	0
5	2,5	42,511	0,651
6	3,0	64,785	3,512
7	3,5	91,780	9,182
8	4,0	123,125	17,772
9	4,5	158,246	29,040
10	5,0	196,350	42,411

Agora construiremos a coluna com os valores para (Tabela 3):

$$V_3 = V_1(h) - V_2(h) \text{ para } R - r \leq h \leq R$$

Tabela 3. Exemplo para calcular as dimensões do tronco de cone usando $V_3 = V_1(h) - V_2(h)$ para $R - r \leq h \leq R$.

n	h	$V_1(h)$	$V_2(h)$	$V_3(h)$
0	0	0	*****	*****
1	0,5	0,856	*****	*****
2	1,0	4,712	*****	*****
3	1,5	12,620	*****	*****
4	2,0	25,133	0	25,132
5	2,5	42,511	0,651	41,860
6	3,0	64,785	3,512	61,272
7	3,5	91,780	9,182	82,597
8	4,0	123,125	17,772	105,353
9	4,5	158,246	29,040	129,205
10	5,0	196,350	42,411	153,938

Por fim, vamos a obter o volume das 10 fatias criadas (Tabela 4), utilizando a fórmula

$$VF = \begin{cases} V_1(h_n) - V_1(h_{n-1}), & \text{para } 0 \leq h < (R - r) \\ \text{ou} \\ V_3(h_n) - V_3(h_{n-1}), & \text{para } (R - r) \leq h < R. \end{cases}$$

Tabela 4. Exemplo para obter o volume das 10 fatias criadas.

n	h	$V_1(h)$	$V_2(h)$	$V_3(h)$	VF
0	0	0	*****	*****	0,856
1	0,5	0,856	*****	*****	3,857
2	1,0	4,712	*****	*****	7,908
3	1,5	12,620	*****	*****	12,513
4	2,0	25,133	0	25,132	16,727
5	2,5	42,511	0,651	41,860	19,413
6	3,0	64,785	3,512	61,272	21,325
7	3,5	91,780	9,182	82,597	22,756
8	4,0	123,125	17,772	105,353	23,852
9	4,5	158,246	29,040	129,205	24,733
10	5,0	196,350	42,411	153,938	153,938

desde a circunferência até o centro do círculo menor, calculamos no intervalo [2; 5], utilizando $VF = V_3(h_n) - V_3(h_{n-1}), \text{para } (R - r) \leq h < R$

$$VF = \{16.7, 19.4, 21.3, 22.7, 23.8, 24.7\}, \text{ para } (R - r) \leq h < R$$

Desta forma, fechamos com a soma de todas as fatias obtidas até a metade do tronco de cone:

$$VF = \{0.85, 3.8, 7.9, 12.51, 16.7, 19.4, 21.3, 22.7, 23.8, 24.7\}$$

Aqui temos os volumes de todas as fatias, sendo assim vamos aferir o tanque, obtendo com a soma a metade do volume:

$$V_{1/2\text{tronco}} = 153,93 \text{ un}^3$$

verificamos pela fórmula que o volume será:

$$V_{1/2\text{tronco}} = \frac{\pi L}{6} (R^2 + Rr + r^2) \cong 153,93 \text{ un}^3.$$

Agora como continua aferimento, ao valor de meio tanque somamos a sequência obtida de forma invertida da lista de volumes V_n , desta forma ficaria

$$V_{\text{líquido}} = V_{1/2\text{tronco}} + VF_{10}$$

$$V_{\text{líquido}} = V_{1/2\text{tronco}} + VF_{10} + VF_{11}$$

$$V_{\text{líquido}} = V_{1/2\text{tronco}} + VF_{10} + VF_{11} + VF_{12}$$

...

$$V_{\text{líquido}} = V_{1/2\text{tronco}} + VF_{10} + VF_{11} + \dots + VF_{19} = 307,86 \text{ u}^3$$

A tabela a seguir mostra o erro e o erro relativo nos 4 primeiros volumes parciais:

Tabela 5. Apresenta o erro das fórmulas neste exemplo

volume exato	volume aproximado	erro	erro relativo
0.8562591494771292	0.8558678061729807	0.0003913433041484726	0.04570383912247182
4.723297288209655	4.71238898038469	0.010908307824965213	0.23094688221710385
12.705795707573849	12.61994573657673	0.08584997099711877	0.6756756756756613
25.546448903265148	25.132741228718345	0.4137076745468029	1.6194331983805623

A nossa fórmula neste caso, nos dá uma boa aproximação.

O volume para os $h \in [R-r, R]$ o erro o mostramos na tabela abaixo:

Tabela 6. Apresenta os valores, com aproximações, relacionados ao exemplo

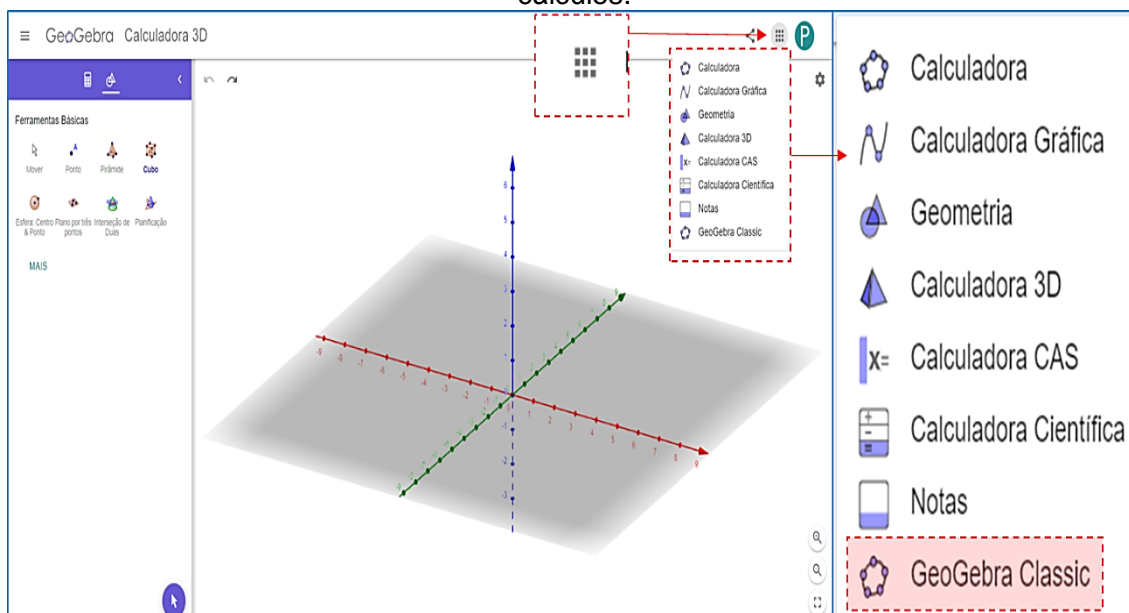
V1 exato	V2 exato	V exato	V aprox	erro relativo
43.1259	0.6521825	2.4737707863	41.859704844	1.4457532978315928
66.2801	3.5449296	62.735198213	61.272230254	2.331973120354584
94.9927	9.52244666	85.470284339	82.597347574	3.3613281936466057
129.4360	20.4043512	109.032096332	105.35325194	3.374093054577358

Observemos que o erro relativo aqui também é aceitável com valores dentro do limite de confiança (5%).

Devido uma maior quantidade de cálculos que vimos ser necessário e aconselhamos a utilização de uma planilha eletrônica. O Geogebra possui uma planilha que podemos utilizar, mas também temos as planilhas do Excel, que se mostra extremamente eficiente para facilitar e agilizar a obtenção dos resultados. Enquanto se utiliza o Geogebra 3D é possível abrir uma planilha para cálculos.

Na figura 44, o botão formado com nove pequenos quadrados, abre uma aba onde podemos acessar o "GeoGebra Classic".

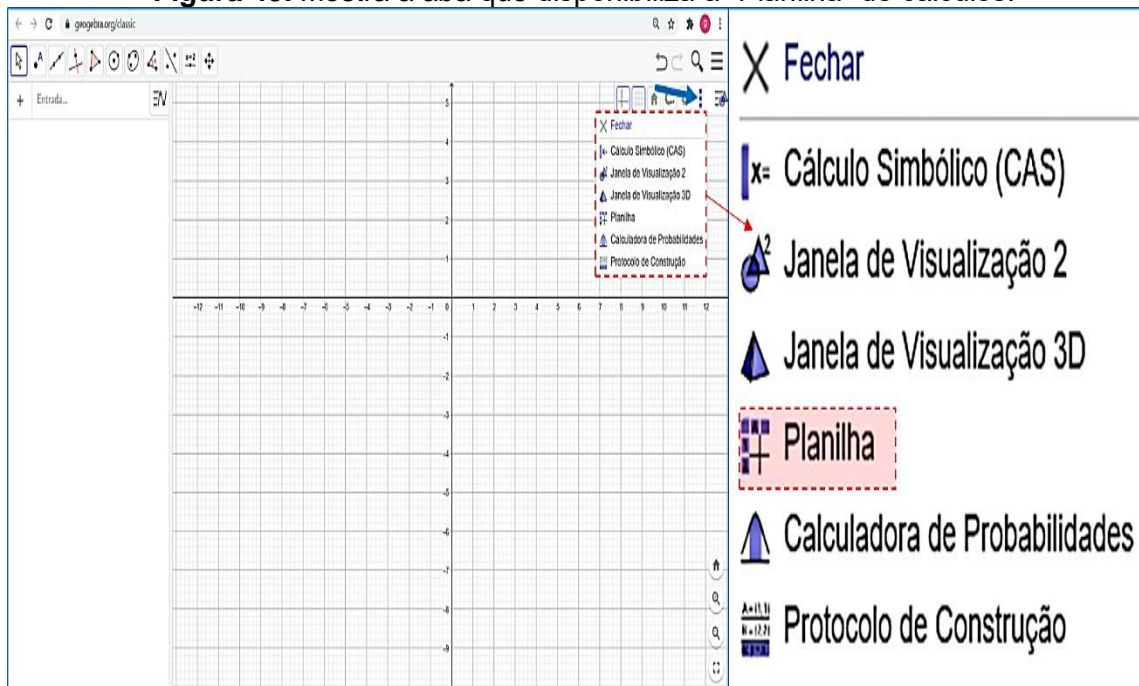
Figura 44. Mostra a aba que disponibiliza o Geogebra Classic para acesso à planilha de cálculos.



Fonte: o autor (2020).

Após acessar o GeoGebra Classic, abre-se uma nova aba através de um botão composto por três pequenos quadrados no canto superior direito da tela, como podemos ver na figura 45, seta azul.

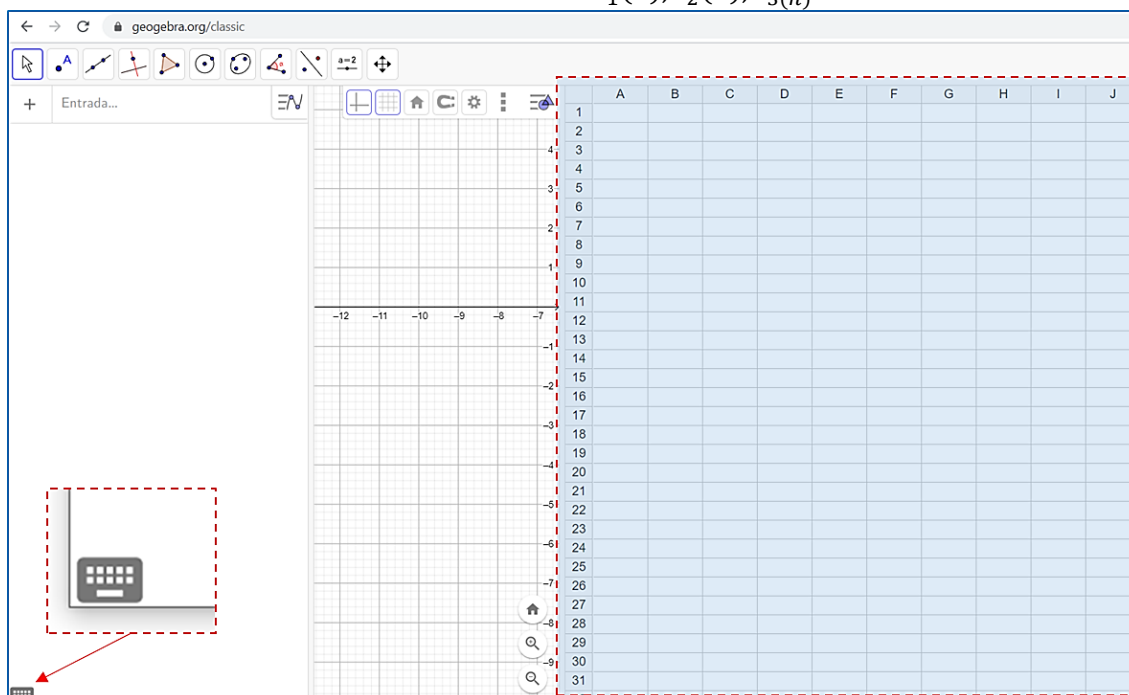
Figura 45. Mostra a aba que disponibiliza a “Planilha” de cálculos.



Fonte: o autor (2020).

Basta clicar em “Planilha” e ela se abrirá (figura 46).

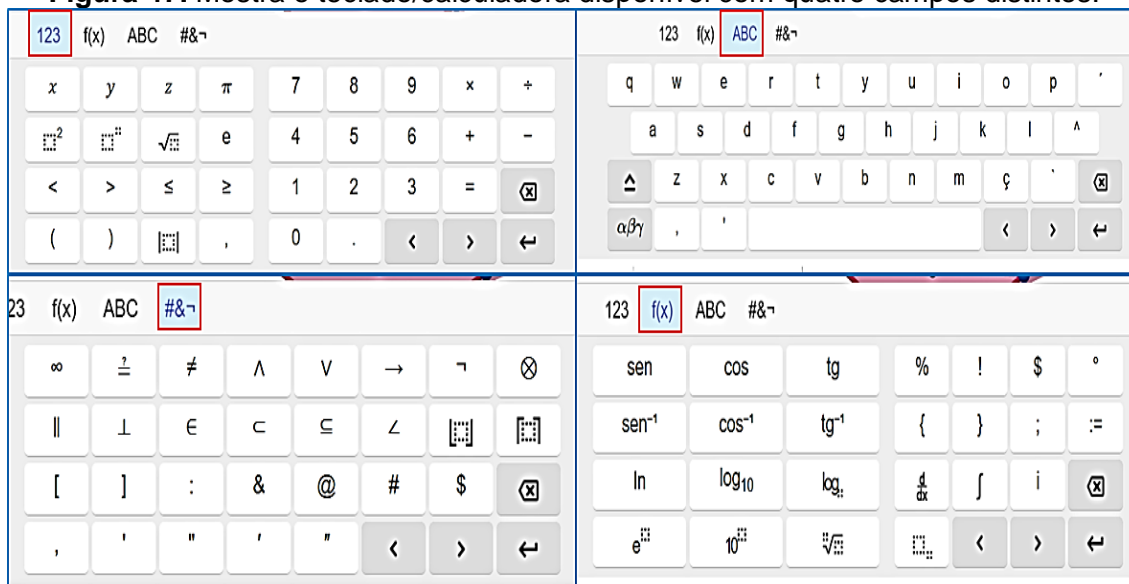
Figura 46. Mostra a planilha de cálculo aberta para construção da tabela com valores resultantes das fórmulas $V_1(h)$, $V_2(h)$, $V_3(h)$ e VF .



Fonte: o autor (2020).

No canto inferior esquerdo da tela, o ícone disponibiliza um teclado/calculadora que pode ser utilizado para se inserir valores, variáveis, assim como operações matemáticas.

Figura 47. Mostra o teclado/calculadora disponível com quatro campos distintos.



Fonte: o autor (2020).

Para inserir uma fórmula é necessário primeiramente digitar o sinal “=” (igual) e seguidamente os valores e a célula utilizada, como podemos observar nas figuras 48 e 49 a seguir.

Figura 48. Mostra a fórmula, para obter os valores de V1(h), inserida na célula da planilha.

	A	B	C	D	E
1					
2			h	V1(h)	
3		0	0	0	
4		1	0.5	0.856	
5		2	1	4.712	
6		3	1.5	12.62	
7		4	2	25.133	
8		5	2.5	42.511	
9		6	3	64.785	
10		7	3.5	91.78	
11		8	4	123.125	
12		9	4.5	158.246	
13		10	5	196.35	
14					
15					

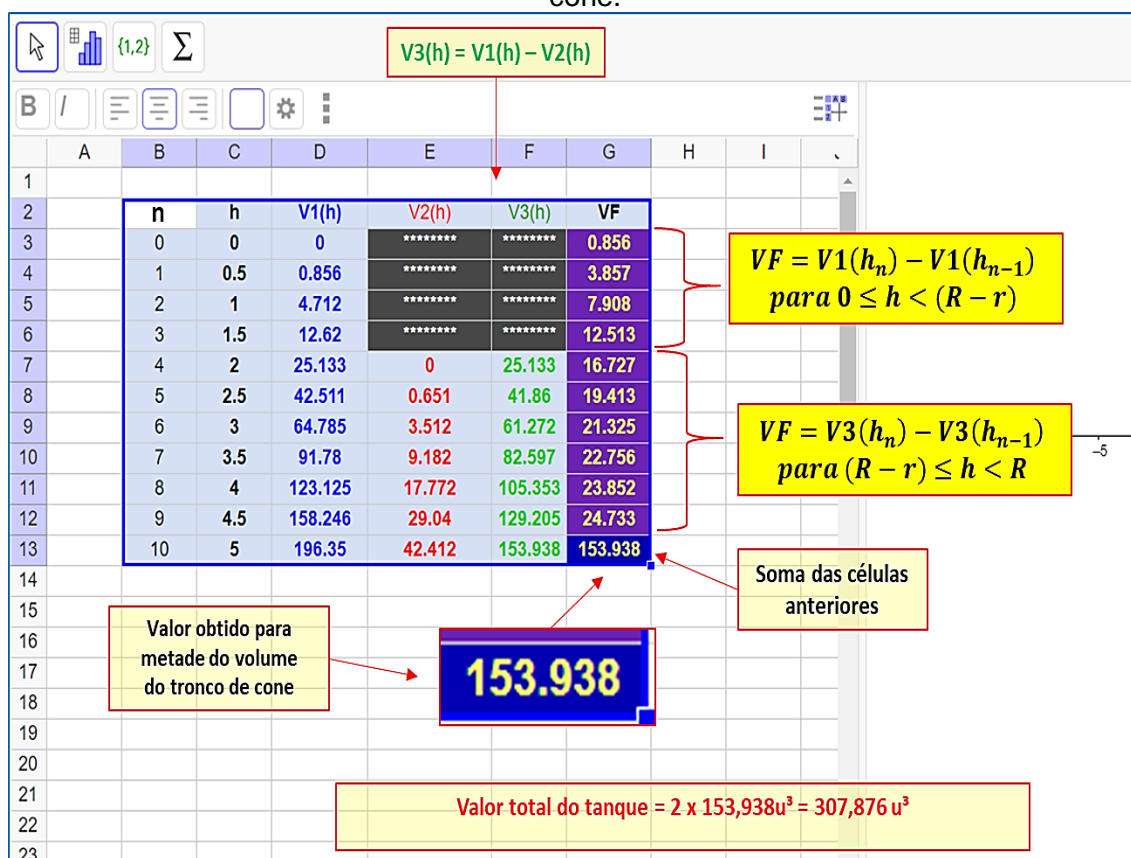
Fonte: o autor (2020).

Figura 49. Mostra a fórmula, para obter os valores de V2(h), inserida na célula da planilha.

	A	B	C	D	E
1					
2			h	V1(h)	V2(h)
3		0	0	0	?
4		1	0.5	0.856	?
5		2	1	4.712	?
6		3	1.5	12.62	?
7		4	2	25.133	0
8		5	2.5	42.511	0.651
9		6	3	64.785	3.512
10		7	3.5	91.78	9.182
11		8	4	123.125	17.772
12		9	4.5	158.246	29.04
13		10	5	196.35	42.412
14					
15					

Fonte: o autor (2020).

Figura 50. Mostra a planilha finalizada, para obtenção do volume total do tronco de cone.



Fonte: o autor (2020).

4.3 Outras propostas

Outros exemplos de atividades que podem ser aplicadas na prática em sala de aula estão apresentados abaixo:

Exemplo 01

Outras propostas podem ser usadas pelo professor para enriquecer a prática cotidiana de ensino-aprendizagem, podendo usar:

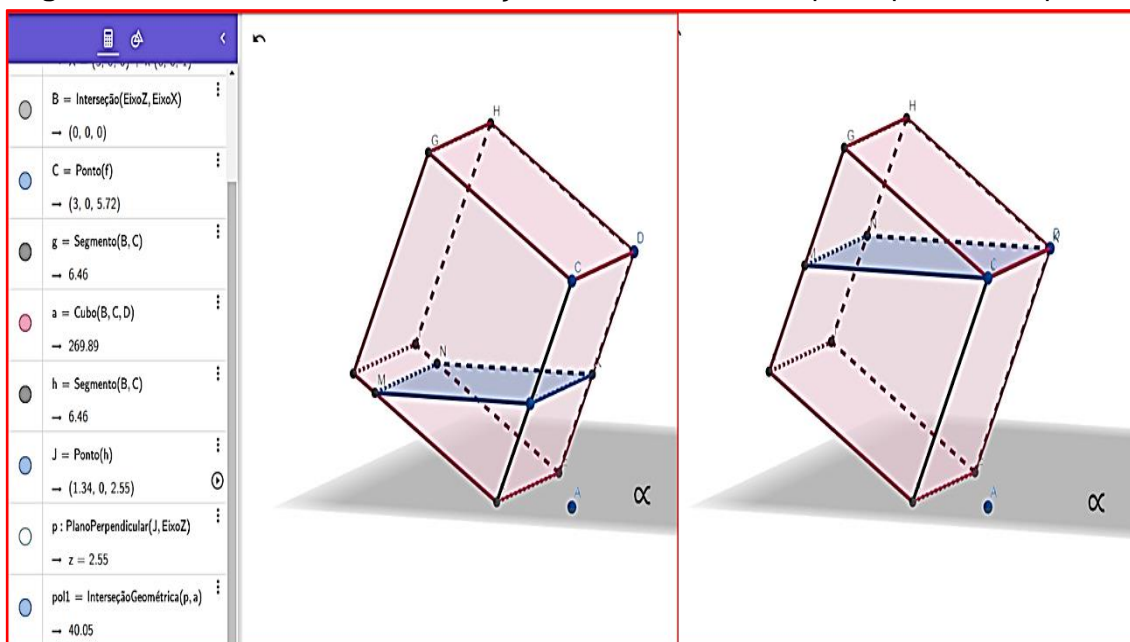
- Alguns exercícios que explorem sólidos espaciais, em que o aluno pode movimentar não só a secção, mas também o cubo, seguindo o arco visível (Figura 51; Figura 52).

Nesta atividade pode se explorar o estudo do volume existente no cubo, de acordo com a altura do líquido.

Se movimentarmos apenas o plano sector, indagamos: “Qual seria a quantidade máxima de líquido que haveria no recipiente até o início do

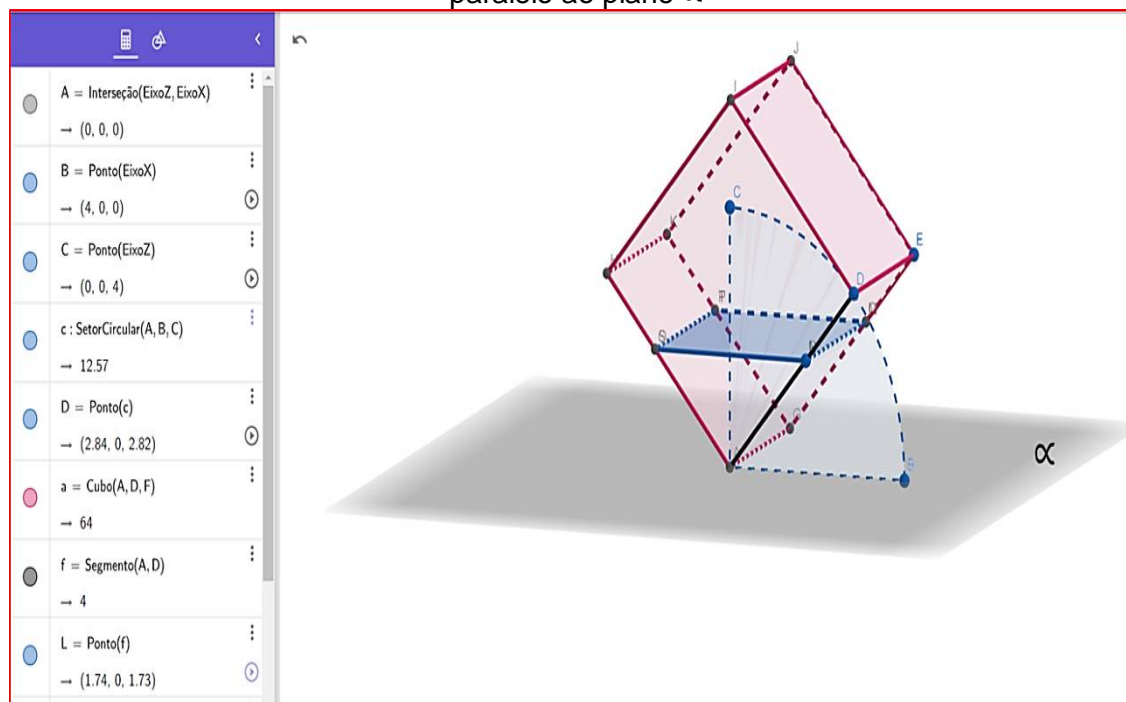
extravasamento?” Desta forma relacionamos, além das dimensões, o ângulo α formado com a horizontal.

Figura 51. Cubo inclinado e uma secção construído com um plano paralelo ao plano α



Fonte: o autor (2020).

Figura 52. Cubo com inclinação variável e uma secção construído com um plano paralelo ao plano α

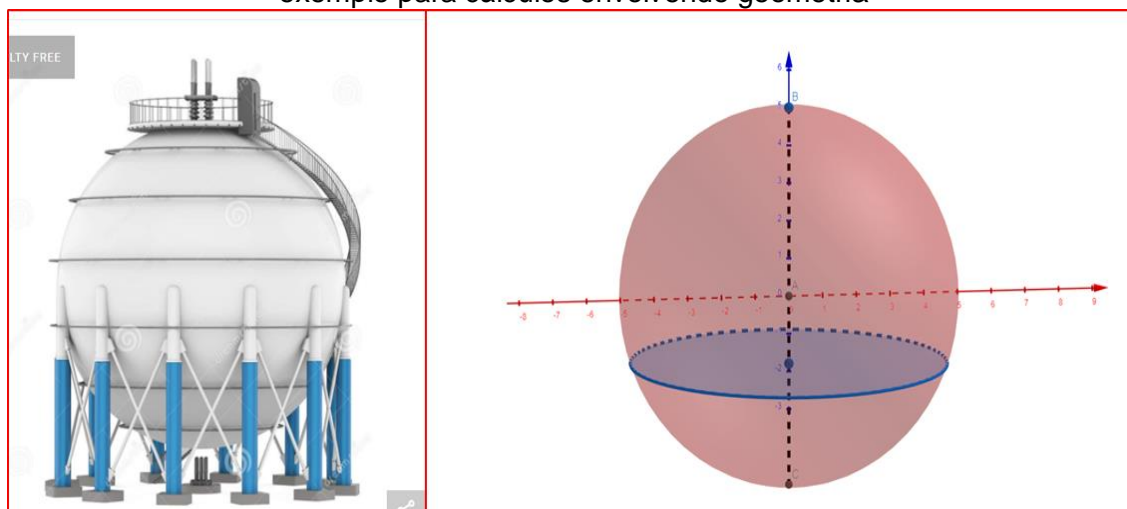


Fonte: o autor (2020).

Exemplo 02

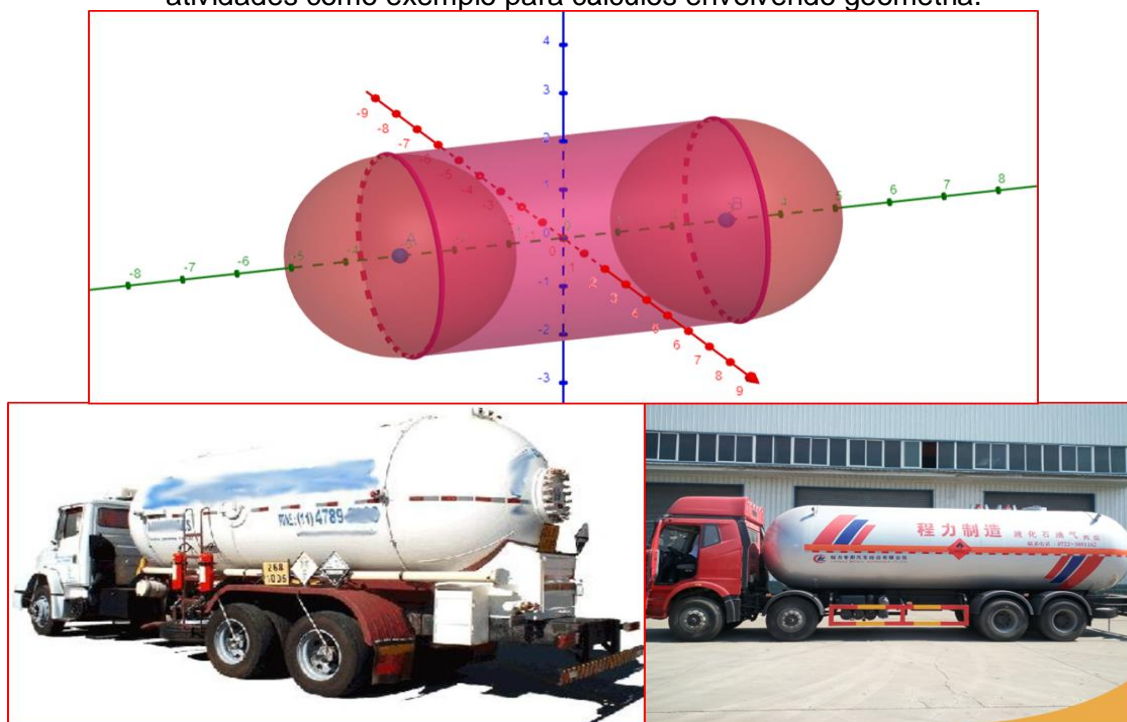
O professor também pode trabalhar atividades especiais que buscam aferir volumes parciais de tanques como os apresentados nas figuras 53 e 54, a seguir:

Figura 53. Tanques esféricos que podem ser usados em atividades como exemplo para cálculos envolvendo geometria



Fonte: à esquerda da imagem: <https://pt.dreamstime.com/ilustra%C3%A7%C3%A3o-stock-tanque-de-armazenamento-esf%C3%A9rico-isolado-image99518031>, e à direita da imagem o autor (2020).

Figura 54. Tanques cilíndricos com extremidades esféricas que podem ser usados em atividades como exemplo para cálculos envolvendo geometria.



Fonte: à cima: o próprio autor (2020). À abaixo e à esquerda: <http://olabirintocientifico.blogspot.com/2011/08/eficiencia.html> e à direita: <https://portuguese.alibaba.com/product-detail/cooking-gas-tanker-truck-clw-propane-gaz-tank-truck-bobtail-10ton-15ton-gas-road-tanker-for-sale-60411043394.html>

Desta forma, este capítulo é fundamental para a finalização e aplicação deste trabalho, nele, está proposto, que o professor tenha para iniciar esta forma de se trabalhar a geometria espacial, exercícios que, com seu aluno, construa e explore figuras geométricas, que estejam vinculadas a elementos materiais próximo à realidade do aluno. É claro que, ambos, professor e aluno, poderão construir novas atividades com situações diversas como encontradas em livros, apostilas ou ainda da “*internet*”, mas é fundamental que o professor auxilie seu aluno neste momento, pois temos em sua maioria exercícios propostos nos livros, já havendo a figura do sólido, conforme já citamos, feitas utilizando a “deformação” de seus elementos para se ter uma imagem que representa um tipo de “vista”. Acreditamos ser ideal que o aluno terá que trabalhar com todos os elementos possíveis de um sólido, indo muito além apenas da aplicação de uma ou outra fórmula para solucionar um exercício clássico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo usou o “*software*” GeoGebra para o ensino de sólidos geométricos ao elaborar uma proposta com sequência didática propícia ao ensino de sólidos geométricos e seções planas que podem ser aplicados para alunos do Ensino Médio. Quando o ensino é realizado com estratégias que rompem o tradicionalismo e trazem a tecnologia para dentro da sala de aula, tende a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais atrativo. Nesse contexto, a geometria muitas vezes é ensinada apenas com ferramentas tradicionais de ensino, que envolvem o quadro, giz e diálogo com o professor. Outras vezes têm como aliado o livro didático. Havendo concordância com Nascimento (2012, p. 110) que diz que na prática cotidiana escolar “a geometria é apresentada simplesmente como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, aplicada só no papel, desconectada de quaisquer aplicações de natureza histórica, lógica, concreta ou cotidiana”.

Desenvolver uma atividade que esteja relacionada com um objeto de conhecimento do aluno, um objeto que ele possa acessar de forma simples e desta forma ter a oportunidade de mais uma vez entender a importância da Matemática e sua funcionalidade para aprender a resolver diversas formas de

problemas está sendo possível devido à criação de “softwares” que facilitam os cálculos e tornam o ambiente da geometria mais fácil de ser compreendido. Nessa “interface” entre o uso do ensino tradicional e da tecnologia, amplo uso da “internet”, aplicativos, “softwares” que vem crescendo cada vez mais no planeta Terra, o professor deve buscar associar essas estratégias tecnológicas dentro de seu plano de aula. Os recursos tecnológicos já são citados como de extrema importância para o ensino desde 1998, com a aprovação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Nessa questão, a tecnologia pode melhorar a qualidade do ensino e servir como ferramenta didática em sala de aula.

Tomando-se como base os objetivos propostos e as propostas apresentadas no Capítulo 3 deste estudo, o professor pode usar as propostas deste estudo para construir prismas, pirâmides e cilindros utilizando o GeoGebra, assim como criar no ambiente do “software”, planos que geram secções predeterminadas; explorar as condições matemáticas especificadas ao plano sector, para gerar secções em forma de polígonos distintos, exemplificar os elementos que compõe os sólidos estudados. Visando gerar um ambiente para reflexões e análise de como calcular o volume de sólidos, sem resumir este estudo em apenas fórmulas prontas. Além de poder, ensinar as propriedades geométricas dos elementos que compõem os sólidos estudados e calcular volumes de sólidos geométricos, explorando elementos existentes que apresentem as propriedades de uma secção e destacando a importância e a utilidade deste conhecimento. Ao trabalhar essa ferramenta em sala de aula o professor corrobora com o uso de “recursos que promovem além da aproximação dos alunos com a tecnologia e familiarização com os diversos softwares, uma nova abordagem na resolução de problemas” como afirma Santos e Calejon (2019, p. 243).

As propostas mostradas neste estudo, considerarão a exploração de um plano sector, que mostra como o professor pode mudar sua prática cotidiana para lecionar e ensinar o aluno a obter medidas em um cilindro reto, o qual se mostra como um modelo matemático para determinar “área, alturas, ângulos e volumes parciais” com o uso do GeoGebra. Essa ferramenta pode facilitar o entendimento do aluno sobre cálculos de geometria que envolvem problemas diários como a aferição da quantidade de líquido existente em tanques cíclicos que estejam com seu eixo central posicionado na horizontal. Quando se usa uma tecnologia, ela

não pode ser a única base de ensino, concordando com Feliciano (2020) que destaca que as bases tradicionais de ensino não devem ser abandonadas, mas podem ser aprimoradas, modificadas e reinventadas.

Pois, quando o professor consegue sair da sua zona de conforto (*mind set*) como é chamado hoje o significado de mente fechada, ele consegue construir o conhecimento de forma mais significativo. Nesse aspecto a “Base Nacional Comum Curricular (BNCC) cita a importância do uso das TIC’s, para o aprimoramento e diversificação das possibilidades de aprendizagem ativa e contextualizada, em suas competências quatro e cinco” (FELICIANO, 2020, p. 46).

Usando o GeoGebra é possível criar segmentos relacionados ao sólido e à secção, de forma a termos figuras geométricas conhecidas, as quais podem ser exploradas para gerar problemas matemáticos para determinação de distâncias, áreas e até mesmo volumes parciais. Cabe ao professor, saber explorar a construção, aplicar as propriedades dos triângulos semelhantes, teorema de Pitágoras e/ou trigonometria no triângulo retângulo para que possa iniciar e aguçar o interesse dos alunos sobre o uso e conhecimento que podem obter ao usar o GeoGebra. Desta forma, os professores podem apresentar e construir propostas para usar em sala de aula com os seguintes objetivos visando atender a BNCC:

- Apresentar ferramentas matemáticas de forma a oportunizar ao aluno, obter uma visão da Matemática na perspectiva de sua aplicação à realidade;
- Resolver problemas em contextos diversos, aplicando o conceito de área e volume;
- Conjecturar e obter expressões para determinar a medida da área das figuras planas obtidas nas secções, assim como o volume integral ou parcial dos sólidos estudados
- Explorar um elemento já conhecido, com o objetivo de oportunizar e estimular o aluno a fazer abstrações, visando sistematizar suas ideias para obter um determinado resultado como forma de resolver o problema proposto.
- Investigar e construir modelos para se resolver os problemas propostos, estando o aluno livre para representar e argumentar. Propõe-se também, discussões tanto com outros alunos como com o professor, a fim de gerar validações, obter conceitos e desenvolver procedimentos que permitam avançar nos resultados.

- Utilizar-se de métodos diferentes para determinar volumes parciais aplicáveis em situações reais, manipulando e se utilizando das funções e do dinamismo do GeoGebra;

Portanto, professores e alunos poderão construir novas atividades com situações diversas como encontradas em livros, apostilas ou ainda da “internet”, mas é fundamental que o professor auxilie seu aluno neste momento, pois temos em sua maioria exercícios propostos nos livros, já havendo a figura do sólido, conforme já citamos, feitas utilizando a “deformação” de seus elementos para se ter uma imagem que representa um tipo de “vista”.

Dessa forma, quando usamos um “software” como o Geogebra em sala de aula, é ideal que o aluno aprenda a trabalhar com todos os elementos possíveis de um sólido, aprendendo muito além apenas da aplicação de uma ou outra fórmula matemática para solucionar um exercício clássico. Mas, que compreenda a teoria, na prática e possa desenvolver habilidades e competências para compreender, executar e identificar cada categoria de sólido estudado.

Também não podemos nos esquecer que, em várias situações, nossos alunos se encontram ou se encontrarão diante de problemas reais, nos quais a ferramenta mais importante e útil será a matemática, mas que, durante sua formação, não lhe foi apresentado nada igual em sala de aula, isto devido a várias problemáticas. Dificilmente ele foi desafiado a conjecturar e dar um passo para a resolução destes problemas. A matemática enquanto uma ciência, disponibiliza a oportunidade de conjecturar, de testar, de analisar, de validar, de expor e novamente validar.

Não resta dúvida, após mais de vinte anos em sala, o quanto deve tenhamos um conhecimento muito além daquilo que é apresentado aos nossos alunos, para que possamos conceber, formar, gerar o conhecimento matemática com nossos alunos, tendo nós, os professores, maior motivação, mais confiança, mais humildade e mais atenção à formalidade dos conceitos matemáticos, mostrando como essa ciência é construída e como a sua realidade está atualizada com ferramentas tecnológicas. Daí a importância de um professor ter uma formação adequada e sólida, para desempenhar sua profissão em sua totalidade e ser o principal suporte para este aluno, como a ofertada brilhantemente pelo PROFMAT e todos os profissionais envolvidos neste curso. Então o meu muito

obrigado a todos, em especial aos professores da UNEMAT, que nos acompanharam e deram todo suporte para nosso crescimento.

5.1 Trabalhos futuros

Com a pandemia causada pelo vírus COVID-19 as aulas presenciais ficaram suspensas por vários períodos nesse ano de 2020, acarretando atraso e conseqüentemente a necessidade de trabalhar sem pesquisa direta em sala de aula. Desta forma, em outro estudo pôde-se: (i) diagnosticar o conhecimento de área de figuras planas, secção de um sólido, superfície e volume por meio de questionários investigativo a uma turma como, por exemplo, o 3º ano do Ensino Médio e (ii) capacitar o aluno a explorar o “*software*” GeoGebra e suas funções por meio da orientação do professor.

Portanto, como sugestão para trabalhos futuros, essa mesma abordagem pode ter uma pesquisa *in loco*.

Também não podemos nos esquecer que, em várias situações, nossos alunos se encontram ou se encontrarão diante de problemas reais, o quais a ferramenta mais importante e útil será a matemática, mas que, durante sua formação, não lhe foi apresentado nada igual em sala de aula, isto devido a várias problemáticas. Dificilmente ele foi desafiado a conjecturar e dar um passo para a resolução destes problemas. A matemática enquanto uma ciência, disponibiliza a oportunidade de conjecturar, de testar, de analisar, de validar, de expor e novamente validar.

Não me resta dúvidas, após mais de vinte anos em sala, o quanto é importante que tenhamos um conhecimento muito além daquilo que é apresentado aos nossos alunos, para que possamos conceber, formar e construir o conhecimento matemática com nossos alunos, tendo nós, os professores, maior motivação, mais confiança, mais humildade e mais atenção à formalidade dos conceitos matemáticos, mostrando como essa ciência é construída e como a sua realidade está atualizada com ferramentas tecnológicas. Daí a importância de um professor ter uma formação adequada e sólida, para desempenhar sua profissão em sua totalidade e ser o principal suporte para este aluno, como a ofertada brilhantemente pelo PROFMAT e todos os profissionais envolvidos neste curso.

Então o meu muito obrigado a todos, em especial aos professores da UNEMAT, que nos acompanharam e deram todo suporte para nosso crescimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

BRASIL. (2017). **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial / Paulo Cezar Pinto Carvalho**. – 4. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. **Del saber sabio al saber enseñado**, v. 3, 1991.

CHONG, Oscar A. González; PÉREZ, Michel García. Modelo matemático para el aforo de un tanque. **Revista Avances Vol**, v. 3, n. 1, p. 41, 2001.

SILVA, Clóvis Pereira da. **A Matemática no Brasil: Uma história de seu desenvolvimento/ Clóvis Pereira da Silva**. – 2ª ed. – São Leopoldo: Ed. UNISINOS, 1999.

DE ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso et al. O trabalho docente do professor formador no contexto atual das reformas e das mudanças no mundo contemporâneo. **Revista brasileira de estudos pedagógicos**, v. 91, n. 227, 2010.

DE PESCE, Marly Krüger; DE ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso. Formação do professor pesquisador na perspectiva do professor formador. **Formação Docente–Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores**, v. 4, n. 7, p. 39-50, 2012.

GRAVINA, Maria Alice. Disponível para acesso em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/EDUC_ACAO_E_TECNOLOGIA/GEODINAMICA.PDF) - Porto Alegre, RS. Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov 1996.

DO BRASIL, Constituição Federal. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Artigo 10. Disponível em:

<https://www.jusbrasil.com.br/topicos/10649501/artigo-210-da-constituicao-federal-de-1988>. Acesso em: 02 de maio de 2020.

DOLCE, Osvaldo. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica : exercícios resolvidos, exercícios propostos com respostas, teste de vestibular com respostas / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeu. – 5. Ed. – São Paulo: Atual, 1993.

DOS SANTOS, Alan Rodrigues; DOS SANTOS, Patrícia Cristina Sousa. O programa GAP como ferramenta de ensino e aprendizagem de Álgebra e uma reflexão das dificuldades da disciplina Álgebra I. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/~web/y/up/615/o/artigo__Pesquisa_em_Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica__Alan_e_Patricia_.pdf. Acesso em 02 de julho de 2020.

FELICIANO, Francisco Rubens Bezerra. Geometria e Smartphones: a utilização do aplicativo Geometria Geogebra no ensino fundamental. **Matemática Licenciatura-Unisul Virtual**, 2020.

GIL, Antonio Carlos et al. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2002.

FERREIRA, Fernanda Lima Silva et al. Ensinar e aprender geometria. 2015.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Anuário estatístico do Brasil de 1997. Rio de Janeiro: IBGE, v. 57, 1998; Censos agropecuários 1995-1996 e 2006.** Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/divisao-regional/15778-divisoes-regionais-do-brasil.html>>. Acesso em: 02 de maio de 2020.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Divisão regional do Brasil. 2017. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/divisao-regional/15778-divisoes-regionais-do-brasil.html>>. Acesso em: 02 de maio de 2020.

LAVILLE, Christian. A próxima reforma dos programas escolares será mais bem sucedida que a anterior. **Novas políticas educacionais: críticas e perspectivas. São Paulo: PUC**, 1998.

LOPES, Maria Maroni, OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo, AMORIM, Frank Victor. O uso do “software” GeoGebra como recurso didático na sala de aula de matemática. **Actas del VII CIBEM ISSN**, v. 2301, n. 0797, p. 7017.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática.** Autêntica Editora, 2019.

MOCROSKY, Luciane Ferreira; MONIDNI, F.; ESTEPHAN, Violeta Maria. O Ensino de Geometria no Brasil: alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiros. **Simpósio Nacional do Ensino da Ciência e Tecnologia–III SINEC. Anais do Simpósio Nacional do Ensino da Ciência e Tecnologia. Ponta Grossa-PR**, 2012.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria / Antonio Caminha Muniz Neto. – Rio de Janeiro : SBM, 2013.

OLIVEIRA, M.R.A. **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência- PIBID** – Subprojeto da Licenciatura em Geografia da UFMT/Campus-Cuiabá, 2011 (mimeo).

PAIS 1999 et al. Educação Matemática: uma introdução / Silvia dias Alcântara Machado – São Paulo : EDUC, 1999.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, ano 1, n.1, p. 7-17, 1993

SALOMÃO, Rommy et al. A formação continuada de professores alfabetizadores: do pró-letramento ao PNAIC. 2014.

SANTOS, Elvira; SANTOS, Leonor. O papel do GeoGebra nas práticas de regulação do ensino da área do paralelogramo. **Quadrante**, v. 28, n. 1, p. 6-26, 2019.

SILVA FILHO, Antonio Mendes. Redes Sociais na Era da Conectividade (“The good, the bad and the ugly”). **Revista Espaço Acadêmico**, v. 10, n. 115, p. 64-68, 2010.

SILVA, C. M. S. **A formação de professores de matemática: preocupações recentes e antigas**. Disponível em: WWW.ufes.br/circe/artigos/artigo52.doc. Acesso em: 13 jun 2007.

SILVA, C. P. da. **A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento**. Curitiba: Editora da UTFPR, 1992.

SOUZA, R.; CALEJON, L. Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo “*software*” Geogebra no ensino da estatística descritiva. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 4, p. 227-244, 2019.

TARDIF, Maurice. Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis: Vozes, 2002.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Euclides Roxo e história da educação matemática no Brasil. 2005.

VASCONCELOS, Cláudia Cristina. Ensino-aprendizagem da matemática: velhos problemas, novos desafios. **Revista Millenium**, v. 20, 2000.

WALDOMIRO, Tatiana de Camargo. Abordagem histórico – Epistemológica do ensino da geometria fazendo uso da geometria dinâmica. USP, 2011.

WERNECK, Arlete Petry Terra et al. Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: a gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro. 2003.