UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOÃO ROBERTO TANGANELLI GARCIA

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA BÁSICA NO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA BASEADA NA ANÁLISE DO ERRO

DISSERTAÇÃO

TOLEDO
2021

JOÃO ROBERTO TANGANELLI GARCIA

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA BÁSICA NO ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA BASEADA NA ANÁLISE DO ERRO

The importance of basic mathematics in the teaching of differential and integral calculus: a proposal based on error analysis

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientadora: Dra. Araceli Ciotti de Marins.
Coorientadora: Dra. Regiane Slongo Fagundes.

TOLEDO

2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

A Dissertação intitulada "A Importância Da Matemática Básica No Ensino Do Cálculo Diferencial E Integral: Uma Proposta Baseada Na Análise Do Erro" foi considerada **APROVADA** de acordo com a ata nº 1 de 11/02/2021

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Dra. Araceli Ciotti de Marins

Professor Dr. Amarildo de Vicente

Professora Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

TOLEDO

2021

Dedico este trabalho à minha esposa.

Agradecimentos

Agradeço às orientações da Prof.ª Araceli Ciotti de Marins, também à coorientadora Prof.ª Regiane Slongo Fagundes e à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Toledo, que disponibilizou sua infraestrutura.

Agradeço a contribuição dos demais professores: Adriano Gomes De Santana, Barbara Winiarski Diesel Novaes, Camila Nicola Boeri Di Domênico, Daniela Trentin Nava, Emerson Tortola, Frederico Braida Rodrigues De Paula, Robson Willians Vinciguerra, Rodolfo Eduardo Vertuan, Rodrigo Manoel Dias Andrade, Rosangela Aparecida Botinha Assumpção, Suellen Ribeiro Pardo Garcia e Wilian Francisco De Araujo.

"A única coisa necessária para o triunfo do mal é que os homens bons não façam nada."

Edmund Burke

RESUMO

Índices elevados de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral 1 são uma tradição segundo estudos históricos dessa disciplina e muitas tentativas para diminuir a reprovação têm sido propostas no meio pedagógico e na pesquisa. Como a reprovação é consequência dos erros cometidos pelos alunos em avaliações, a análise desses erros pode ser utilizada como ferramenta para aumentar a eficiência do processo de ensino e aprendizagem. Assim, a presente dissertação de mestrado tem por objetivo investigar os erros cometidos por alunos de dois cursos de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Toledo, que cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, durante o segundo semestre letivo de 2019. Os estudos foram baseados na análise dos erros proposta por Helena Noronha Cury, utilizando as três fases da análise de conteúdo proposta por Laurence Bardin: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Após análise e categorização dos erros e com base nos erros relacionados à matemática básica, atividades foram elaboradas e disponibilizadas aos alunos, como banco de questões, no ambiente virtual Moodle. Com isso, pretende-se colaborar com o desempenho dos alunos no curso de Cálculo Diferencial e Integral 1 e de outras disciplinas da engenharia que dependem de matemática básica.

Palavras-chave: Educação Básica. Análise de Erros. Banco de Questões.

ABSTRACT

High failure rates in Differential and Integral Calculus 1 are a tradition according to historical studies of this discipline and many attempts to reduce failure have been proposed in the pedagogical environment and in research. As failure is a consequence of mistakes made by students in tests, the analysis of these errors can be used as a tool to increase the efficiency of the teaching and learning process. Thus, the present master's dissertation aims to investigate the mistakes made by students from two Engineering courses at the Federal Technological University of Paraná, campus Toledo, who took the course of Differential and Integral Calculus 1, during the second half of 2019. The studies were based on the error analysis proposed by Helena Noronha Cury, using the three phases of the content analysis proposed by Laurence Bardin: the pre-analysis, the exploration of the material and the treatment of the results. After analyzing and categorizing errors and based on errors related to basic mathematics, activities were developed and made available to students, as a question bank, in the virtual Moodle environment. With this, we intend to collaborate with the performance of students in the Differential and Integral Calculus 1 course and other engineering disciplines that depend on basic mathematics.

Palavras-chave: Basic Education. Error analysis. Question Bank.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ASGRAD	Assessoria dos Cursos de Graduação.
CDI 1	Cálculo Diferencial e Integral 1.
DIRGRAD	Diretoria de Graduação e Educação Profissional.
IME	Instituto de Matemática e Estatística.
NUAPE	Núcleo de Acompanhamento Psicopedagógico e Assistência Estudantil.
PROFMAT-TD	Mestrado em Matemática em Rede Nacional, polo Toledo-PR.
UFF	Universidade Federal Fluminense.
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora.
UFOPA	Universidade Federal do Oeste do Pará.
USP	Universidade de São Paulo.
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1) é componente curricular de vários cursos superiores da área de exatas, como as engenharias, matemática, física, entre outros. Esta disciplina deveria servir como agente motivador, não só pelo conhecimento adquirido, bem como, pela importância, para estes cursos, na formação conceitual e operacional (NASCIMENTO, 2000). No entanto, o ensino/aprendizado do CDI 1 para a maioria dos alunos que ingressam nos cursos superiores se caracteriza como um processo traumático e penoso. Nasser (2007) comenta que em instituições de ensino superior do Brasil e também do exterior, é na disciplina de Cálculo que ocorrem os maiores índices de reprovação e evasão.

O grande índice de reprovação e evasão que ocorre nesta disciplina pode ser, dentre outros fatores, explicado pelo sistema de avaliação empregado pela maioria dos professores. Os meios de avaliação da disciplina de CDI 1 geralmente são provas e trabalhos, sendo que as provas são consideradas as avaliações de maiores pesos na média. Como boa parte dos alunos não atinge a média nas provas, sua nota fica comprometida e eles recorrem aos outros tipos de avaliações propostos pelo professor, quando existem. Nem sempre ter um bom desempenho em outras avaliações faz com que esse aluno atinja a nota mínima necessária.

Alguns questionamentos surgem naturalmente, como por exemplo, o que leva um aluno a não ter aprovação em uma disciplina de núcleo básico, como o Cálculo Diferencial e Integral? O que é possível detectar a partir dos erros cometidos pelos alunos nas provas de Cálculo Diferencial e Integral? O que esses erros podem informar a respeito das dificuldades do aluno?

É comum os professores, em correções de provas ou trabalhos, assinalarem os erros cometidos, e os acertos serem considerados como resultados esperados. Alguns erros se repetem durante todas as avaliações de um aluno, durante a disciplina e não se avalia a persistência dos mesmos. A partir da análise desses erros é possível desenvolver técnicas e estratégias de como lidar com as dificuldades e lacunas que o aluno apresenta em Matemática.

No prefácio do livro "Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos" de Helena Noronha Cury, Antônio José Lopes (Bigode) afirma que "o erro se constitui como um conhecimento", erros são hipóteses legítimas baseadas em concepções e crenças adquiridas ao longo da vida escolar. Outra notória observação é que a relevância do tema "erros" ou da análise das respostas dos alunos tem importância crucial em muitas outras frentes da Educação Matemática atual.

Segundo Cury (2013), a análise qualitativa das respostas dos alunos, com compreensão das dificuldades apresentadas é, talvez, a melhor maneira de se apropriar de conhecimentos com os erros e questionar os estudantes, auxiliando-os a reconstruí-los.

Cantaruti (2017) e Cavasotto (2010) apontam que os erros cometidos pelos alunos em avaliações da disciplina de CDI 1, são em geral por falta de conhecimentos de matemática básica, conceitos que deveriam ter sido compreendidos no Ensino Fundamental e Médio.

Cavasotto e Viali (2011) aplicaram questionário a professores de uma universidade onde foi relatada a reprovação de um terço dos alunos ao final do semestre. Sobre as causas das reprovações, os professores relataram a falta de conhecimentos preliminares e a falta do hábito de estudar como os principais culpados do insucesso. Os professores acrescentaram que as dúvidas nos níveis de Ensino Fundamental (principalmente) e Médio apresentadas pelos alunos, se concentraram em Álgebra, Funções, Trigonometria e Fatoração, com referências às propriedades das operações e também sinais.

Segundo Souza (2019), as respostas apresentadas por alunos e professores envolvidos em sua pesquisa, mostraram que as dificuldades de assimilação do Cálculo permanecem, e relacionados a conhecimentos de matemática básica, como na simplificação de frações algébricas e na dificuldade de representar um problema algebricamente, assim como em conceitos básicos da disciplina (limites, derivadas e integrais).

A realidade na universidade impõe um resgate de muitos conteúdos mal assimilados ou até a tarefa de proporcionar o primeiro contato com conteúdos que haviam sido apresentados ao aluno no Ensino Fundamental e Médio (CARVALHO, 2016).

Um tema de extrema importância para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral e que os alunos egressos do Ensino Médio estão entrando no Ensino Superior com defasagem no assunto diz respeito à aprendizagem de funções (CANTARUTI, 2017).

Del Puerto, Minaard e Seminara (2006) consideram a análise dos erros matemáticos cometidos pelos alunos como uma rica fonte de informações sobre como se apropria de conhecimento matemático. Outro aspecto relevante do erro é que ele traz consigo os conhecimentos prévios do aluno ou a ignorância sobre o assunto, assim, por meio de uma investigação em sala de aula o professor pode questionar os alunos encaminhando-os para a superação das dificuldades (CAVASOTTO et al., 2010).

Cury e Cassol (2004), a partir da análise de erros cometidos pelos alunos em seus questionários de avaliação, apontam que os estudantes que ingressam no curso superior da área de exatas não dominam conteúdos de Álgebra e Geometria, do Ensino Fundamental e Trigonometria e Geometria Espacial, do Ensino Médio.

Alvarenga, Dorr e Vieira (2017), relatam que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, em geral, são consequência, segundo alguns professores, da falta de base matemática quando eles chegam à universidade.

Segundo Cury (2013), sem a técnica, o aluno não tem ferramentas para trabalhar com os conceitos do cálculo e o desenvolvimento de habilidades de lidar com regras, no caso de limites, derivadas ou integrais. O cálculo fica prejudicado pela falta de habilidades no trabalho com propriedades operatórias básicas.

Os obstáculos que os alunos não conseguem vencer quando estudam o Cálculo estão em geral relacionados à matemática estudada no Ensino Médio (funções em particular) e também no Ensino Fundamental (em grande parte, as manipulações algébricas) (CAVASOTTO et al., 2010).

A partir da produção escrita dos alunos em avaliações de Cálculo Diferencial e Integral 1, mais especificamente, na análise do erro, é possível identificar as dificuldades com relação aos conteúdos de matemática básica e propor atividades envolvendo esses conteúdos para oportunizar a aprendizagem.

Neste contexto, o presente trabalho, a partir da análise de erros dos alunos em avaliações do Cálculo Diferencial e Integral e identificação das dificuldades com relação aos conteúdos de matemática básica, pretende elaborar atividades envolvendo esses conteúdos para aprimorar a aprendizagem e apresentá-las como um banco de questões em ambiente virtual Moodle.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Analisar os erros dos alunos em avaliações de Cálculo Diferencial e Integral 1 para apresentar atividades de matemática básica para melhor compreensão de conceitos prévios para a aprendizagem do cálculo.

2.2 Objetivos específicos

- Analisar e classificar os erros dos alunos em avaliações de Cálculo Diferencial e Integral aplicadas anteriormente.
- Identificar os erros relacionados à falta de conceitos prévios de matemática básica.
- Com base nos erros relacionados à matemática básica, determinar os conceitos matemáticos do ensino básico que devem ser contemplados na proposta das atividades.
- Elaborar atividades com os conceitos matemáticos do ensino básico que são requeridos nas questões das avaliações de Cálculo.
- Disponibilizar, como banco de questões, as atividades desenvolvidas no ambiente virtual Moodle.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

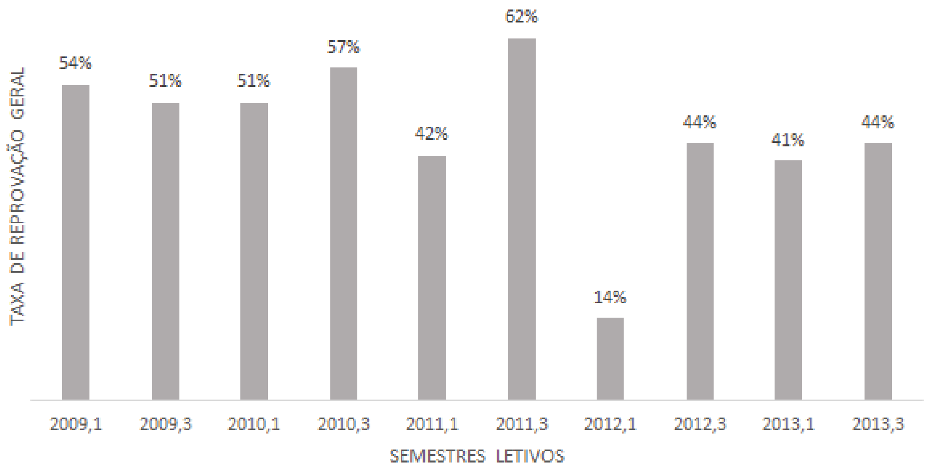
Este capítulo apresenta uma explanação de temas que fundamentam este trabalho como: reprovação e evasão em Cálculo Diferencial e Integral e as tentativas das universidades para diminuí-las. Por fim, apresenta-se o que é a análise do erro e como essa abordagem pode ser utilizada para compreender as dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos. A partir desta compreensão é possível elaborar estratégias para superar as dificuldades e consequentemente, diminuir a reprovação e evasão.

3.1 Reprovação em Cálculo Diferencial e Integral

A alta reprovação em Cálculo é comum nas universidades e é um problema que vêm acontecendo há um bom tempo. Barufi (1999) relata que entre os anos 1990 e 1995 o percentual de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral na Universidade de São Paulo (USP) foi de 20% a 75%, e quanto aos alunos do Instituto de Matemática e Estatística (IME), o menor índice de reprovação não foi inferior a 45%. Rezende (2003) coloca que o índice de não aprovados em Cálculo na Universidade Federal Fluminense (UFF) permaneceu entre 70% e 90%, mesmo depois da inserção do curso de matemática básica como disciplina obrigatória da grade curricular do curso de Matemática.

Ciribelli (2015) trata a retenção e a evasão escolares no ensino superior, especificamente entre alunos do Bacharelado Interdisciplinar em Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). O autor apresenta dados de reprovação em cada uma das dezesseis disciplinas de formação básica (obrigatórias) do primeiro ciclo do curso, de 2009 a 2013. A disciplina de Cálculo I, como o autor denomina, apresentou 2261 vagas preenchidas, 1618 alunos reprovados, ou seja, uma taxa de reprovação de 72% que o autor distingue em 52% referentes a reprovação por nota e 20% reprovação por falta de frequência. Destacando o cenário da disciplina de Cálclulo I (código MAT154), a Figura 3.1 apresenta as taxas de reprovação, do primeiro semestre de 2009 (2009.1) ao segundo semestre de 2013 (2013.3).

Figura 3.1: Taxa de Reprovação Geral em Cálculo

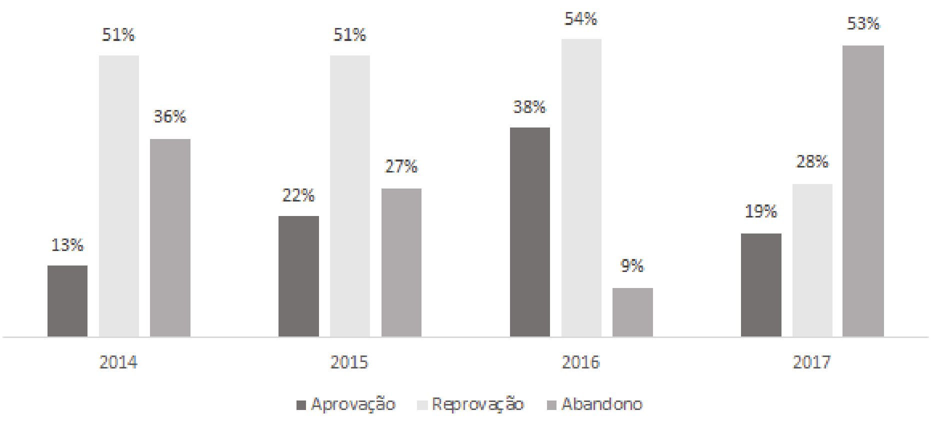


Fonte: Ciribelli (2015).

Os índices de reprovação em Cálculo nas turmas de Licenciatura Integrada em Matemática e Física e nas turmas de Licenciatura Integrada em Biologia e Química, da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA) foram apresentados em Souza (2019), no período de 2014 a 2017. Os dados são apresentados nas Figuras 3.2 e 3.3.

Na Figura 3.2 nota-se que os índices de reprovação em Cálculo nas turmas de Licenciatura Integrada em Matemática e Física foram de 87% (51% reprovação por nota e 36% evasão) em 2014, 78% (51% reprovação por nota e 27% evasão) em 2015, 63% (54% reprovação por nota e 9% evasão) em 2016 e 81% (28% reprovação por nota e 53% evasão) em 2017.

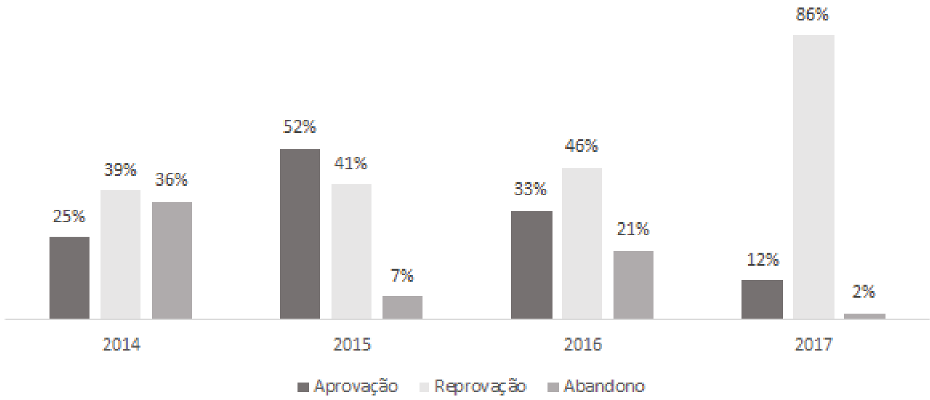
Figura 3.2: Rendimento dos alunos de Licenciatura Integrada em Matemática e Física



Fonte: Souza (2019).

Na Figura 3.3 tem-se os índices de reprovação em Cálculo nas turmas de Licenciatura Integrada em Biologia e Química foram de 75% (39% reprovação por nota e 36% evasão) em 2014, 48% (41% reprovação por nota e 7% evasão) em 2015, 67% (46% reprovação por nota e 21% evasão) em 2016 e 88% (86% reprovação por nota e 2% evasão) em 2017.

Figura 3.3: Rendimento dos alunos de Licenciatura em Biologia e Química



Fonte: Souza (2019).

Maia (2015) analisa dados de desempenho dos alunos da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), entre 2009 e 2015, devido aos altos índices de retenção dos alunos na universidade, na área de exatas. Com os resultados da pesquisa a autora destaca maiores dificuldades de aprovação nas matérias iniciais dos cursos como Cálculo I, Geometria Analítica e Física I, tornando-se um problema maior nas turmas especiais que são turmas formadas por alunos que foram reprovados mais de duas vezes na mesma disciplina, sem aulas presenciais. A Tabela 3.1 apresenta os dados com relação ao tempo que um aluno precisa para obter a aprovação em Cálculo.

Tabela 3.1: Períodos cursados para aprovação em Cálculo

Número de alunos	**Número de períodos cursados**
397	1
233	2
133	3
73	4
41	5
25	6
20	7
18	8
27	9
5	10
3	11

Fonte: MAIA (2015).

O que as pesquisas apresentam em comum é o elevado índice de não aprovação (reprovação ou evasão) na disciplina de Cálculo, o que pode levar ao abandono do curso e influenciar na decisão de não se matricular em um curso de graduação que tenha a disciplina de Cálculo como obrigatória. Neste contexto, fica mais do que evidente a necessidade de olhar para o problema, entender o que já foi feito em termos de reverter essa situação e propor alternativas com o objetivo de melhorar o desempenho dos estudantes nesta disciplina.

3.2 Tentativas das universidades para reduzir a reprovação em Cálculo Diferencial e Integral

Em geral, as universidades apresentam intervenções para diminuir os índices de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral. Rafael (2017) descreve nove propostas encontradas em quatro universidades. As propostas são: disciplina preparatória, monitoria, cálculo oferecido de maneira diferenciada, aulas extras, minicursos, testes de conhecimentos pontuados, laboratório de cálculo, aula online de revisão e atividade estruturada. Essas quatro universidades da pesquisa em Rafael (2017) são localizadas na região sudeste do Brasil, sendo duas privadas e duas públicas, com cursos de Matemática, Engenharia (Civil, Produção e Ambiental) e Computação, que possuem a disciplina de Cálculo no currículo.

Na disciplina preparatória o aluno revisa temas estudados durante a educação básica. Os conteúdos trabalhados costumam ser: conjuntos numéricos, equações, polinômios, fatoração, logaritmos, exponenciais, funções e geometria analítica. Esse amparo ao aluno com relação aos conteúdos que não foram estudados no ensino fundamental ou conteúdos que ele tenha dificuldade, facilita a compreensão dos conteúdos matemáticos propostos no ensino superior. Uma reflexão e crítica interessante da autora é que a disciplina preparatória na verdade não prepara, só funciona como um processo de revisão dos conteúdos do ensino fundamental e médio.

A monitoria, outra proposta de intervenção apresentada em Rafael (2017), se caracteriza por possibilitar tempo e espaço fora de aula para a retirada de dúvidas e desenvolvimento de atividades. O monitor, geralmente um aluno que já fez a disciplina, tem a oportunidade da prática docente, sob supervisão do professor responsável pela disciplina. Este tipo de intervenção é bem comum nas universidades.

O cálculo oferecido de maneira diferenciada é apresentado em algumas possibilidades: utilizando ferramentas computacionais, apresentando listas de exercícios de repetição e trabalhando com atividades em grupo e resolução de problemas. Uma observação importante que Rafael (2017) coloca é que no desenvolvimento da disciplina de maneira diferenciada, o professor responsável contava com o auxílio de aluno de doutorado que desenvolvia sua pesquisa no projeto.

Aulas extras foram apresentadas como intervenções para diminuir os índices de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral. Com o objetivo de auxiliar na revisão de conteúdos e retirar dúvidas das aulas, acontecendo fora do horário acadêmico. As aulas extras nestas universidades são oferecidas por professores que podem ou não ter lecionado a disciplina com a turma, o que oferece aos alunos uma abordagem dos conteúdos diferente da que ele teve durante as aulas regulares (RAFAEL, 2017).

Os minicursos são cursos de curta duração que ocorrem de forma presencial ou à distância. Objetiva oferecer informações sobre assuntos específicos. A metodologia utilizada fica à escolha do professor, bem como a seleção do conteúdo, com ênfase nas dificuldades observadas durante o período. Para que o minicurso aconteça, um projeto do mesmo precisa ser aprovado pelo colegiado. Os temas que mais apareceram nos minicursos foram "Bases Matemáticas", "A utilização da calculadora científica", "Noções de Matemática Financeira", entre outros (RAFAEL, 2017).

Os testes de conhecimentos pontuados visam reforçar algumas atividades com os alunos e diminuir o peso da avaliação em sala de aula, pois representam um percentual da nota do aluno. Os testes são baseados em conteúdos e atividades vistos na sala de aula. Geralmente os alunos os fazem em casa e podem ser entregues via e-mail, pelas plataformas de comunicação ou diretamente ao professor. O teste consiste em cinco questões aleatórias retiradas do banco de questões do sistema que a universidade possui. Como o teste é gerado aleatoriamente, o nível das questões varia de um teste para o outro e o professor só tem acesso a pontuação obtida pelo aluno (RAFAEL, 2017).

O laboratório de cálculo é o espaço para o aluno desenvolver a teoria vista durante a aula expositiva como, por exemplo, um espaço para desenvolver aplicações do cálculo em diversas áreas. No entanto, a autora coloca que a maioria das instituições consideram como "laboratório de cálculo" como a sala de recursos computacionais. Os alunos contam com carga horária semanal no Laboratório, em que junto ao professor, desenvolvem tarefas propostas durante a aula. Por não ser obrigatório a participação, é comum o professor do laboratório estar em contato direto com o professor da disciplina para organizar aplicações dentro do conteúdo que foi trabalhado em sala de aula (RAFAEL, 2017).

As aulas online de revisão têm a finalidade de auxiliar o aluno a compreender os conteúdos propostos pelo professor. A vantagem é que o aluno pode assistir em casa ou no trabalho e em qualquer horário, e a desvantagem é a falta de oportunidade para fazer questionamentos durante a aula, pois são aulas gravadas. Após a primeira avaliação, o aluno que não tiver obtido a nota mínima de aprovação é convidado para participar do projeto, no qual assistirá várias aulas do conteúdo da primeira avaliação e, após esse processo, fará nova avaliação que servirá como recuperação da anterior, prevalecendo a média aritmética entre as duas. A autora destaca que essa revisão não é preparada pelo professor da disciplina e sim por um outro professor, selecionado às vezes por processo seletivo, da instituição. Além disso, a elaboração e correção dessa nova avaliação não é realizada pelo professor da disciplina, ele apenas tem acesso a essas informações (RAFAEL, 2017).

As atividades estruturadas oferecem ao aluno a apropriação de conhecimento, por meio de um trabalho de pesquisa. Segundo a autora, as propostas dessas atividades priorizam a relação entre teoria e prática, permitindo que o aluno aplique aquilo que aprendeu durante as aulas na sua área, promovendo a reflexão e estimulando autonomia na aprendizagem. Por exemplo, é proposto um problema do CDI onde o aluno precisará se aprofundar no conteúdo para responder a questão. Essa proposta é formulada pelo professor da disciplina e a nota da avaliação desta atividade soma-se à nota da prova (RAFAEL, 2017).

Rezende (2020) coloca como soluções "normais" para a crise do ensino de Cálculo, no contexto pedagógico, a produção de listas de exercícios, o uso de computadores em trabalhos complementares e a realização de cursos "preparatórios" para um curso inicial de Cálculo.

A produção de listas de exercícios é usual em universidades para que os alunos possam realizar o que o autor chama de "treinamento" com segurança. Segundo Rezende (2020), a tal lista prenuncia o contexto em que se dará a avaliação, fato de interesse aos estudantes, que pode ser usado como argumentação caso a prova fuja aos parâmetros da lista.

Outra solução "normal" apresentada por Rezende (2020) é o uso de computadores em trabalhos complementares ou mesmo em atividades realizadas durante a aula. O autor ressalta que as dificuldades de aprendizagem em Cálculo e a necessidade de "modernizar" o ensino são as principais justificativas para a implementação desses projetos neste contexto, geralmente executados em laboratórios com estrutura apropriada. Uma crítica é colocada como reflexão se referindo à "modernidade" como valor maior e condição suficiente para a solução dos problemas de aprendizagem. Acrescenta que precisa-se fazer projetos para o ensino de Cálculo, não projetos para o "uso de computadores".

Outro instrumento bastante usual para melhorar os resultados no ensino de Cálculo é a realização de cursos "preparatórios" para a disciplina. Cursos como "Cálculo Zero", "Pré-Cálculo", "Matemática Básica", independentemente do nome, objetivam resolver o problema da "falta de base" do aluno, ponto aliás que parece consensual entre os professores. Ensina-se nesses cursos: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc. A falta de base é comum ao alunos recém-egressos do ensino médio. É verdade que a tal "falta de base" é um problema no ensino de outras disciplinas do ensino superior, no entanto, os resultados não são tão ruins como acontecem no Cálculo (REZENDE, 2020). Então, tem-se algo além da falta de base impactando o ensino do Cálculo.

Embora os livros didáticos de Cálculo sejam bons, boas práticas pedagógicas sejam encontradas na literatura e diferentes iniciativas sejam realizadas no sentido de diminuir o insucesso dos estudantes, como o oferecimento de monitorias, revisão de conteúdos de Matemática básica, diminuição do rigor e valorização de aspectos intuitivos e aplicativos, ainda assim a reprovação persiste, permanece como problema e tradição (OLIVEIRA; RAAD, 2012).

Alguns trabalhos sobre o ensino do Cálculo utilizam a modelagem matemática como alternativa pedagógica. Segundo Almeida, Fatori e Souza (2010), essa abordagem oportuniza ao aluno a atribuição de sentido e a compreensão de conceitos matemáticos, viabiliza a interação entre a matemática escolar e a realidade, proporciona a utilização de ferramentas computacionais nas aulas e estimula os trabalhos em grupo, aspectos apontados como relevantes para as aulas. As autoras descrevem duas situações de modelagem matemática relacionadas com a aprendizagem do Cálculo, uma no curso de Licenciatura em Matemática e a outra no curso de Ciências Contábeis. Ao trabalhar com problematizações e, desenvolver no âmbito da sala de aula, atividades que incitem os alunos a mobilizarem o seu conhecimento é importante para a aprendizagem e diminuem os problemas que se percebem em relação ao ensino e à aprendizagem nesta disciplina.

Na UTFPR-TD algumas intervenções foram aplicadas para diminuir a reprovação em Cálculo. Algumas delas mais diretas, realizadas pontualmente como listas de exercícios, aulas de revisão extraclasse com o monitor, aulas extras de resolução de exercícios, exercícios propostos com aplicações direcionadas ao curso do aluno, atendimento ao aluno extraclasse pelo professor e pelo monitor, prova substitutiva para alunos que não atingiram a média e trabalhos complementares à nota da avaliação. Outras intervenções mais complexas, que se caracterizaram como projetos serão apresentadas na sequência.

O Método Trezentos foi aplicado em uma turma de Cálculo da Engenharia Eletrônica, em 2017. Segundo a professora da disciplina, a aplicação do Método Trezentos diminuiu a evasão da disciplina, mas não alterou o índice de reprovação. Criado em meados de 2013, pelo professor Doutor Ricardo Fragelli, esse método é baseado na aprendizagem ativa e colaborativa, aplicado inicialmente em disciplinas do ciclo básico da área das engenharias, o que não impede de ser utilizado em quaisquer outras áreas (FRAGELLI, 2013). Em resumo, após cada avaliação da disciplina, o professor forma grupos com alunos que tiveram bom e baixo rendimento nessa avaliação. Os estudantes se ajudam mutuamente por meio de grupos potencialmente colaborativos e metas cuidadosamente planejadas em um prazo estipulado. Após todo esse processo, os alunos com baixo rendimento fazem uma nova avaliação e, geralmente, melhoram suas notas, resgatando também sua autoestima e retomando o gosto pela disciplina. Os estudantes com alto rendimento melhoram suas notas iniciais de acordo com a melhora dos colegas que auxiliaram e com o nível de ajuda oferecido ao grupo, mensurado por meio de uma avaliação em 360°.

O curso pré-cálculo foi oferecido aos alunos do curso de Engenharia da Computação e diminuiu os índices de reprovação. Em outro momento foi ofertado um curso de pré-cálculo concomitantemente à disciplina de Cálculo em que a taxa de desistência foi muito alta. Os conteúdos abordados no pré-cálculo foram basicamente os mesmo descritos em Rezende (2020).

O curso de Nivelamento é ofertado no início dos semestres, desde 2016, para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática. O curso abrange conteúdos de matemática básica como operações fundamentais, expressões numéricas, divisibilidade e números primos, frações, potenciação, radiciação, exponencial e logaritmo, expressões algébricas, equações polinomiais, sistema de equações lineares, razão e proporção, regra de três e polinômios. Durante as primeiras versões do curso, vários professores se organizavam para ministrar as aulas e a partir de 2019, o curso de nivelamento começou a ser desenvolvido no ensino à distância, com material e avaliações disponibilizadas no ambiente virtual Moodle. A nota final do aluno no curso de Nivelamento é parte da nota das disciplinas do primeiro período. Segundo o coordenador do curso, essa atividade certamente auxiliou muitos alunos, principalmente para aqueles que demonstram mais dificuldades.

Para diminuir a evasão da disciplina de Cálculo, os professores da UTFPR-TD destacaram outras medidas utilizadas, como o acompanhamento semanal das faltas, contato com os alunos via aplicativos de mensagens, contato com coordenação de curso avisando sobre possíveis evasões e encaminhamento de alunos para o Núcleo de Acompanhamento Psicopedagógico e Assistência Estudantil (NUAPE). No NUAPE o aluno tem acompanhamento de psicólogo, pedagogo e assistente social, que desenvolvem ações de acolhimento, auxílio na adaptação acadêmica, na dificuldade de concentração/atenção, orientação de hábitos de estudos, acompanhamento de rendimento acadêmico, oficinas de estratégias de aprendizagem, oficinas de planejamento e organização de estudos, fortalecimento e autonomia dos estudantes frente às situações de crise, auxílio no enfrentamento e resolução de conflitos psicológicos, sociais, interpessoais, acadêmicos e institucionais.

3.3 Análise do erro

Nesta seção são apresentados a análise do erro segundo Cury (2013), alguns exemplos e discussões descritos em sua obra “Análise dos erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos”.

A análise da resposta dos alunos, segundo Cury (2013), além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser também, uma metodologia de ensino, se empregada em sala de aula, partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionarem suas respostas. Além disso, a autora faz uma analogia com a Análise de Conteúdo, outra metodologia, pois ao analisar os erros nas respostas dos alunos acaba-se por analisar o conteúdo da produção escrita por eles.

Alguns trabalhos sobre a análise de produção escrita dos alunos são apresentados, tanto no âmbito nacional como internacional, nos trabalhos de Jacques Hadamard (1945) e Raffaella Borasi (1996). Cury (2013) apresentou um histórico envolvendo 40 trabalhos e notou alguns pontos em comum, sendo um deles que, no Ensino Superior, os conceitos básicos do Cálculo – funções, limites, derivadas e integrais – foram citados, sempre apontando as dificuldades nos cálculos e no esboço de gráficos. Para a autora, parece que a dificuldade maior com que os pesquisadores se deparam é relacionada à falta de atividades que desafiem o aluno a querer modificar sua atitude diante do erro.

Neste contexto, em que as dificuldades dos alunos estão nos cálculos e no esboço de gráficos e na falta de atividades que desafiem o aluno a querer modificar sua atitude diante do erro, é que se ressalta a importância de identificar no erro do aluno, qual conceito ainda não foi assimilado e propor atividades desafiadoras sobre este conceito.

Na sequência, a autora apresenta exemplos de análise de erros em questões relacionadas com conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, aplicadas aos calouros de cursos de Ciências Exatas. Apresenta-se aqui um destes, de acordo com o interesse deste estudo.

O exemplo de análise de erros é de um resultado parcial de uma pesquisa realizado com alunos do curso de Engenharia na disciplina de Cálculo A, ementa muito semelhante à disciplina de CDI 1. A questão em que os erros cometidos pelos alunos foram investigados foi a seguinte:

"Apresentando o desenvolvimento, calcule a derivada da função dada por $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x^4}$."

Dos 23 alunos que responderam a questão, 13 cometeram algum erro referente a segunda parcela ($\sqrt[3]{x^4}$). Os erros foram classificados em:

Tipo 1 - Erros causados pela incorreta derivação. Por exemplo, um aluno viu a função raiz cúbica como uma função composta, escreveu $x^{\frac{4}{3}} = (x^4)^3$, tentou usar a regra da cadeia, mas não fez corretamente. Outro aluno derivou apenas o radicando e esqueceu de derivar a função raiz.

Tipo 2 - Erros causados por uso equivocado de propriedades das operações empregadas. Alguns estudantes, encontraram a resposta correta, mas na manipulação algébrica para a simplificação, cometiam erros. A solução de um aluno é apresentada no livro:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + \sqrt[3]{x^4} \\ y' &= 6x + \frac{1}{3}(x^4)^{\frac{1}{3}} \\ y' &= 6x + \frac{1}{3}(x^4)^{\frac{1}{3}}.(4x^3) \\ y' &= \frac{6x}{\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

Neste caso, a regra da derivada da função potência foi usada incorretamente e no final o radical foi colocado no denominador. A autora aponta que o radical ser colocado no denominador, trata-se de conhecimentos anteriores e ressalta a importância de discutir com o aluno o porquê do erro.

A autora explica que independente da forma como as respostas são apresentadas, a análise do conteúdo das produções é realizada, ou seja, emprega-se a metodologia da Análise de Conteúdos. Bardin (2009) coloca três etapas básicas para a análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na pré-análise o material é organizado e a partir dos documentos escolhidos, o pesquisador delimita o denominado corpus, entendido como conjunto de produções textuais que serão analisadas. Segundo Cury (2013), são escolhidas as questões, formuladas as hipóteses e estabelecidos os objetivos.

A fase da exploração do material envolve um estudo aprofundado do corpus e inclui procedimentos denominados unitarização e categorização. A unitarização, segundo Cury (2013) consiste em reler as respostas dos alunos e destacar as unidades, estabelecendo códigos. Logo na sequência vem a categorização, que seria apresentar uma representação simplificada dos dados brutos, fazer um agrupamento construindo relações entre as unidades, formando então as categorias.

O tratamento dos dados constitui-se na descrição das categorias que pode ser realizada por meio de tabelas ou quadros com distribuição de frequência das classes ou com aplicação de testes estatísticos. É necessário um texto-síntese que resuma cada uma das classes, com apoio de exemplos dos erros. A interpretação é feita a partir das categorias apresentadas e exemplificadas e a partir dessa compreensão mais aprofundada, é possível tanto responder as questões de pesquisa como elaborar estratégias de ensino para auxiliar os alunos, no caso deste trabalho, ambos.

Para exemplificar a construção das categorias segue a proposta de Carvalho (2016) que também foi utilizado em Souza (2019). A classificação para os tipos de erros em Matemática foi dada por:

- Erro tipo 01: neste caso o aluno não apresenta o conhecimento específico da disciplina de Cálculo. Nesta categoria, entram, por exemplo, erros do tipo: não utiliza corretamente as técnicas de derivação; não reconhece o limite de uma função nem relaciona limites laterais com continuidade de funções em um número.

- Erro tipo 02: refere-se a erros que o aluno comete por falta de conhecimentos básicos. O aluno, por exemplo, não domina as técnicas de fatoração, não aplica corretamente as propriedades de potências, não interpreta os gráficos de funções elementares.

- Erro tipo 03: nesta categoria foram considerados os erros cometidos por distração do aluno. Por exemplo, copiar um número diferente do enunciado, errar resultados de contas de somar, subtrair, multiplicar e dividir.

4 MATERIAL E MÉTODOS

Apresenta-se neste capítulo o procedimento metodológico para a realização da pesquisa, como se realizou a coleta de dados e a análise dos mesmos.

4.1 Material

Os alunos que participaram da pesquisa são estudantes da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), câmpus Toledo, em dois cursos de engenharia, que cursaram a disciplina de CDI 1 durante o segundo semestre letivo de 2019. As respostas dos alunos nas provas 1 e 2 (Funções e Limites) foi o material para a pesquisa, totalizando uma amostra de 119 provas.

4.2 Métodos

A abordagem da pesquisa teve caráter quali-quantitativo e foi desenvolvida segundo a metodologia de análise de conteúdo do erro, apresentada em Cury (2013), mas proposta por Bardin (2009) seguindo três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. O caráter quantitativo da pesquisa, se dá no processo de coleta de dados e análise dos dados numericamente, classificando os erros em categorias e por meio de procedimentos estatísticos tomar decisão a respeito de quais conteúdos serão colocados nas atividades de matemática básica do banco de questões. O caráter qualitativo se justifica pelo ambiente natural ser fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados (PRODANOV; FREITAS, 2013), devido à interpretação do erro dos alunos e o objetivo da pesquisa de produzir informações qualitativas a respeito do tema.

Quanto à natureza da pesquisa, trata-se de uma pesquisa aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática da atuação dos professores de Cálculo Diferencial e Integral em sala de aula. Pode ser classificada como uma pesquisa exploratória que, segundo Prodanov e Freitas (2013), visa proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito ou construindo hipóteses sobre ele.

E quanto ao procedimento técnico, é um estudo de caso, que ocorre quando o pesquisador coloca questões do tipo "como" e "por que", quando se tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real (PRODANOV; FREITAS, 2013). No caso, as questões de como e por que os erros aconteceram nas provas.

As etapas da pesquisa são apresentadas abaixo.

Etapa 1: Estudar o "estado da arte" sobre análise do erro e/ou análise das respostas dos alunos.

Etapa 1: Analisar as respostas dos alunos nas provas.

Etapa 2: Estabelecer categorias para os erros com o objetivo de identificar os erros relacionados à matemática básica.

Etapa 3: Nos erros relacionados à matemática básica, estabelecer quais conceitos prévios são necessários para minimizar a ocorrência desses erros.

Etapa 4: Elaborar atividades de matemática básica que auxiliem na compreensão desses conceitos prévios.

Etapa 5: Disponibilizar como banco de questões as atividades elaboradas via plataforma Moodle.

Etapa 5: Escrita do texto científico (dissertação).

5 ANÁLISE DE ERROS DAS PROVAS

A prova analisada (B.1) foi respondida por 39 alunos. Esta prova foi composta por três questões.

1. Dadas as funções a seguir, determine: domínio, imagem, raiz(raízes), intercepto-y e construa o gráfico da função. Se necessário, utilize os planos cartesianos apresentados.

   Esta questão foi a mais difícil para esta turma: obtiveram pouco mais de 28% de aproveitamento, em média. A primeira questão foi subdividida em 6 itens.

   a. $f(x) = x^2 + x - 6$

   Este primeiro item foi resolvido corretamente por sete estudantes. Identificamos sete grupos de erros.

   Grupo A: Erros em fórmulas resolutivas - Neste grupo estão incluídos erros na fórmula resolutiva para equações do 2º grau, erro no discriminante e erro nas fórmulas dos vértices. Houve estudantes que não conseguiram resolver a equação do 2º grau. Houve quem conseguiu calcular o discriminante, mas mesmo assim não conseguiu obter os valores das raízes. Em algumas resoluções, mesmo o estudante sabendo que o gráfico era uma parábola, não foram calculados intercepto e vértice. 11 estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Exemplo 1 (Erro em fórmula resolutiva)

   $f(x) = x^2 + x - 6$

   $f(0) = 0^2 + 0 - 6$

   $f(0) = 1 - 6$

   $f(0) = -5$

   $x - b \pm \dfrac{\sqrt{4}\Delta ac}{2a}$

   Grupo B: Erros em notações de conjuntos - Foi comum o erro na notação de intervalo fechado, na ocasião de mostrar a imagem da função. Ocorreram muitos erros na notação de conjunto no momento de apresentar as raízes da equação. 10 estudantes cometeram erros em notações de conjuntos.

   Grupo C: Erros na obtenção da imagem de uma função - Cinco estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. Chama atenção estudantes que sabiam que o gráfico era uma parábola com concavidade voltada para cima, calcularam o valor do vértice, mas não chegaram ao conjunto imagem correto da função: não souberam identificar graficamente a imagem da função. Cavasotto e Viali (2011) concluem, sobre este aspecto, que falta aos alunos noção do que é necessário conhecer para resolver o tipo de exercício cobrado nas avaliações e também senso crítico sobre suas dificuldades em matemática.

Grupo D: Erro numérico - Quatro estudantes cometeram erros numéricos durante a resolução da questão.

Grupo E: Domínio da função - Também foram quatro os estudantes que cometeram erros em apontar o domínio da função. Houve caso em que o domínio foi considerado onde a função não era negativa, ou ainda em que o domínio foi considerado apenas os inteiros apresentados no eixo x.

Grupo F: Gráfico da função - Novamente, quatro estudantes erraram ao esboçar o gráfico da função. Neste grupo, mesmo quando o vértice ou as raízes tinham sido calculadas, o gráfico não passava por estes pontos. Cury e Cassol (2004) também observaram que os alunos não conseguiram apresentar o traçado dos gráficos de funções básicas, que possivelmente foram trabalhadas no Ensino Médio, mas principalmente, na disciplina de CDI 1.

Grupo G: Manipulação algébrica - Apenas dois estudantes erraram durante manipulações algébricas. Pôde-se notar utilização de propriedade de logaritmos de forma indevida, e expressão algébrica ser transformada em equação.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 536 e 539) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

b. $f(x) = -2x + 3$

Este item foi o mais fácil da prova: obtiveram mais de 73% de aproveitamento. Ele foi resolvido corretamente por 17 estudantes. Identificamos oito grupos de erros.

Grupo A: Erros ao tentar encontrar o zero da função - Houve caso em que mesmo desenhando o gráfico cortando o eixo x, o estudante afirmou a função não possuir zeros. Houve erro numérico ao tentar calcular a raiz da equação. Nove estudantes cometeram estes tipos de erros.

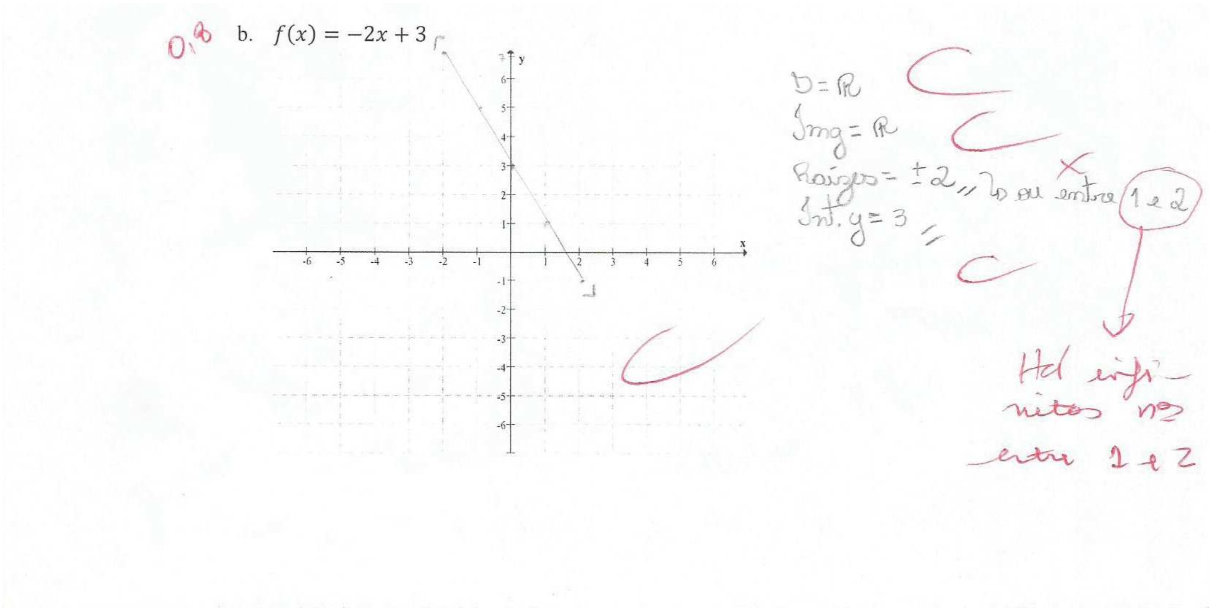


Figura 5.1: Erro ao obter raiz

Grupo B: Erros em notações de conjuntos - Ocorreram erros na notação de conjunto no momento de apresentar a raiz da equação. Cinco estudantes cometeram erros em notações de conjuntos.

Grupo C: Gráfico da função - Novamente, cinco estudantes erraram ao desenhar o gráfico da função. Neste grupo, mesmo quando a raiz tinha sido calculada, o gráfico não passava por estes pontos.

Grupo D: Erros ao se tentar obter o intercepto-y da função - Quatro estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo E: Domínio da função - Três estudantes cometeram erros em apontar o domínio da função. Houve caso em que o domínio foi considerado apenas os inteiros apresentados no eixo x.

Grupo F: Erros na obtenção da imagem de uma função - Três estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. Um dos estudantes considerou imagem o quadrado de alguns dos números que aparecem no eixo x.

Grupo G: Manipulação algébrica - Apenas um estudante errou durante manipulações algébricas.

Grupo H: Erro numérico - Novamente, um estudante cometeu erros numéricos durante a resolução da questão.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 543-544) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distin-

guindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

c. $f(x) = 2^x + 1$

Este terceiro item (B.2) foi resolvido corretamente por nove estudantes. Identificamos seis grupos de erros.

Grupo A: Erros na obtenção da imagem da função - 22 estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. A maior parte destes estudantes considerou o conjunto imagem sendo o conjunto dos números reais positivos, esquecendo de transladar este conjunto em uma unidade positiva. Outra parte considerou como o conjunto dos reais. Pontualmente ocorreram outros erros: conjunto imagem sendo o conjunto dos reais não-negativos, conjunto imagem diferente do representado graficamente, erro em notação de conjunto, e conjunto imagem igual o conjunto do quadrado de alguns elementos do domínio.

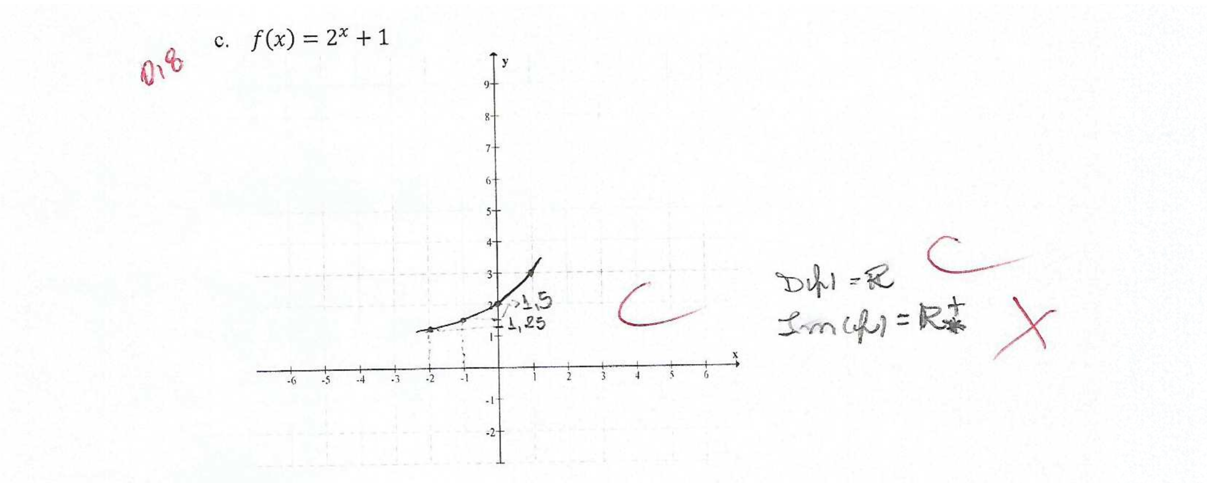


Figura 5.2: $\mathrm{Im}(f) = (1, +\infty)$

Grupo B: Gráfico da função - 14 estudantes erraram ao desenhar o gráfico da função. A maioria dos estudantes desenhou o gráfico ultrapassando a assíntota. Dois estudantes trataram a função como afim. Outros dois desenharam gráficos que não passaram pelos pontos calculados. Houve ainda erro referente ao domínio da função e soma de frações.

Grupo C: Domínio da função - Sete estudantes cometeram erros em apontar o domínio da função. Em alguns casos foram considerados somente os reais não-negativos. Também foi considerado os reais não-nulos. Ocorreu, ainda, erro de notação de conjunto. Houve caso em que o domínio foi considerado apenas os inteiros apresentados no eixo x.

Grupo D: Erros ao se tentar obter o intercepto-y da função - Seis estudantes cometeram este tipo de erro. Alguns estudantes consideraram a função afim. Houve estudante que tabelou o valor correto, mas respondeu erroneamente. Houve, ainda, erro de notação.

Grupo E: Erros de notação - Três estudantes cometeram erros em notações. Dois em notação de conjunto e um no símbolo de não existe.

Grupo F: Erros em propriedades da potenciação - Dois estudantes cometeram erros sobre propriedades de potenciação ao manipular algebricamente as equações.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 544) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
>
> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

d. $f(x) = -\frac{7}{2}$

O quarto item foi resolvido corretamente por sete estudantes. Identificamos novamente seis grupos de erros.

Grupo A: Erros em notação de conjuntos - 15 estudantes cometeram erros em notações de conjuntos. A maioria ao apontar o conjunto imagem da função, alguns ao calcular o intercepto-y da função e ainda ao apontar o domínio da função.

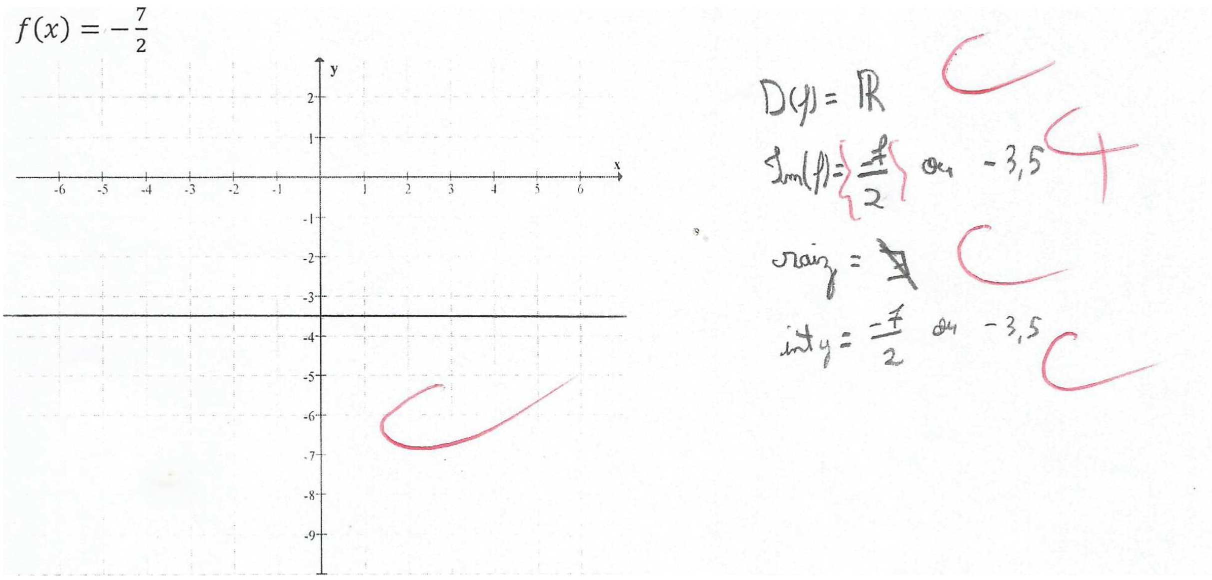


Figura 5.3: $\mathrm{Im}(f) = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

Grupo B: Erros na obtenção da imagem da função - Sete estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. A maior parte destes estudantes considerou o conjunto imagem sendo o conjunto dos números reais. Outra parte considerou como o conjunto dos reais negativos. Pontualmente foi considerado o conjunto nulo.

Grupo C: Erros ao tentar encontrar o zero da função - Apesar da função não admitir zeros, quatro estudantes os encontraram: um deles por tratar a função como afim com inclinação não-nula.

Grupo D: Gráfico da função - Quatro estudantes erraram ao desenhar o gráfico da função. Metade deles, apesar de perceberem que se tratava de função constante, esboçou gráfico com inclinação não-nula.

Grupo E: Domínio da função - Um estudante cometeu erro em apontar o domínio da função. Foi considerado somente os reais negativos.

Grupo F: Erro ao se tentar obter o intercepto-y da função - Apenas um estudante cometeu este tipo de erro. Neste caso foi apontado o intercepto-y=0.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 544 e 541) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

> Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

e. $f(x) = \log_3 x$

O quinto item foi resolvido corretamente por sete estudantes. Identificamos nove grupos de erros.

Grupo A: Domínio da função - Sete estudantes cometeram erros em apontar o domínio da função. Em alguns casos foram considerados os reais não-negativos. Também foi considerado todos os reais. Houve caso em que o estudante apontou a restrição para o logaritmando ($x > 0$), mas mesmo assim respondeu que o domínio da função era todos os reais.

Exemplo 2 ($\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$)

$f(x) = \log_3 x \qquad\qquad x > 0$

x	$\log_3 x = y$
1	$3^y = 1$
2	$3^y = 2$
3	$3^y = 3 \to 1$

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) =$

$Raiz = \log_3 x = 0 \to 3^0 = x \to x = 1$

$int\ y = f(0) = \log_3 0 \to 3^y = 0 \to \nexists$

Grupo B: Erros ao se tentar obter o intercepto-y da função - Novamente sete estudantes cometeram este tipo de erro. Apesar de zero sequer pertencer ao domínio, um valor numérico foi apontado pelos estudantes: desses, a maioria apontou intercepto-$y = 0$, outros apontaram intercepto-$y = 1$. Houve, ainda, erro de propriedade de logaritmo.

Grupo C: Erros de notação de conjunto - Seis estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos. Estes erros aconteceram ao apontarem o domínio da função, a imagem ou, ainda, a raiz da função.

Grupo D: Erros sobre a definição de logaritmo - Seis estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo E: Gráfico da função - Quatro estudantes erraram ao desenhar o gráfico da função. Metade deles, apesar de terem calculados alguns pontos do gráfico, esboçaram um gráfico sem estes pontos. Também foi esboçado o gráfico de uma função afim.

Grupo F: Erros na obtenção da imagem da função - Três estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. A maior parte destes estudantes considerou o conjunto imagem sendo o conjunto dos números reais não-negativos. Pontualmente foi considerado o conjunto dos reais positivos.

Grupo G: Erros ao tentar encontrar o zero da função - Três estudantes erraram ao calcular o zero da função. Apesar da função admitir zero, dois estudantes afirmaram que ele não existe. Outro apontou que a raiz é zero. Cury e Cassol (2004) comentam que muitos estudantes não dominam conteúdos de Álgebra e Geometria do ensino fundamental.

Grupo H: Erro numérico - Dois estudantes cometeram erros numéricos durante a resolução da questão.

Grupo I: Erros em propriedades da potenciação - Dois estudantes cometeram erros sobre propriedades de potenciação ao manipular algebricamente as equações.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 544) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
>
> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

f. $f(x) = (\operatorname{sen} x) - 2$

O sexto item (B.3) foi resolvido corretamente por apenas dois estudantes. Identificamos seis grupos de erros.

Grupo A: Gráfico da função - 21 estudantes erraram ao desenhar o gráfico da função. Foram apresentados gráficos de função afim, exponencial, $-(\operatorname{sen} x) - 2$, $\operatorname{sen} x$ (sem a translação). Foram marcados pontos cujas imagens estavam fora do conjunto imagem. Alguns erros surgiram ao marcar a imagem dos pontos no eixo y (ordem).

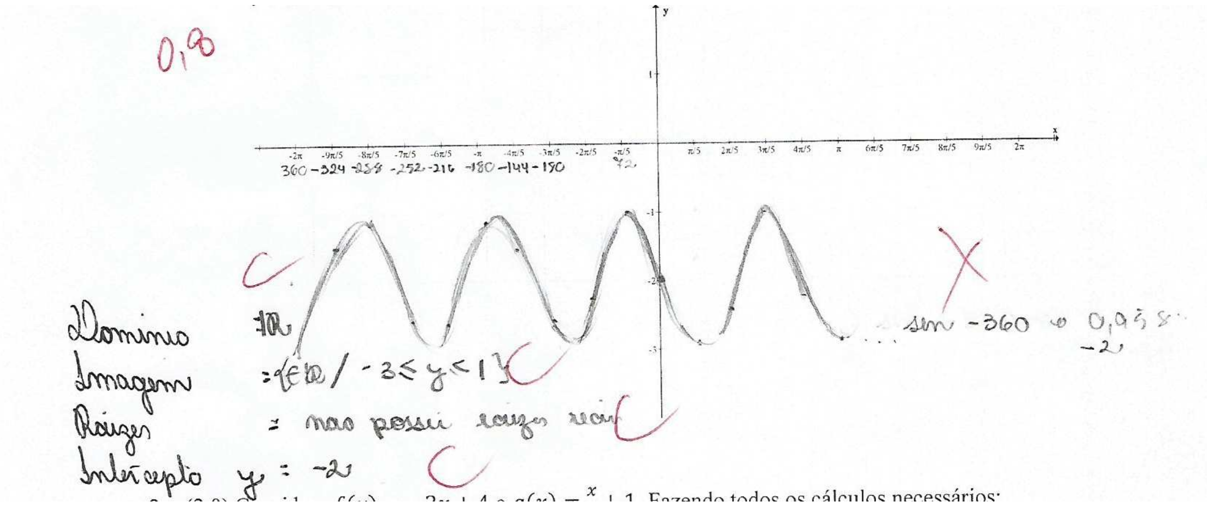


Figura 5.4: Gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x) - 2$

Grupo B: Erros na obtenção da imagem da função - 16 estudantes cometeram erros ao tentar obter a imagem da função. Quatro estudantes não transladaram o conjunto imagem da função seno. Outros quatro apontaram o conjunto dos números reais.

Grupo C: Erros ao se tentar obter o intercepto-y da função - Quatro estudantes cometeram este tipo de erro. Apesar da função não admitir zeros, metade destes estudantes apontaram o número zero como intercepto-y, devido a não ter transladado o gráfico em duas unidades para baixo.

Grupo D: Erros ao tentar encontrar o zero da função - Quatro estudantes erraram ao obter o zero da função. Apesar da função não admitir zeros, estes estudantes atribuíram valores numéricos a ele. Metade destes erros se devem à não translação do gráfico da função seno.

Grupo E: Erros de notação de conjunto - Três estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos. Estes erros aconteceram ao apontarem o domínio da função, a imagem ou, ainda, o intercepto-y da função.

Grupo F: Domínio da função - Dois estudantes cometeram erros em apontar o domínio da função. Um deles considerou apenas os reais não-negativos e o outro considerou os zeros da função como domínio.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 544) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

A segunda questão foi subdividida em 4 itens.

2. Considere $f(x) = -2x + 4$ e $g(x) = \frac{x}{3} + 1$. Fazendo todos os cálculos necessários:

   a. Classifique f como injetora, sobrejetora e/ou bijetora.

   Este item foi o mais difícil para esta turma: obtiveram menos de 18% de aproveitamento, em média. Apenas um estudante acertou completamente a questão. Identificamos seis grupos de erros.

   Grupo A: Apresentação dos cálculos necessários - 15 estudantes não apresentaram os cálculos necessários. Houve estudante que afirmou a função ser bijetora sem mostrar a injetividade. Ocorreu do estudante apenas mostrar a função inversa. E houve estudante que calculou zero da função, intercepto-y e calculou a função g no zero da função f.

Exemplo 3 (Justificativa de f ser bijetora)

$f(x) = -2x + 4$

$$\begin{aligned} se\ x_1 = 1 \rightarrow f(1) &= -2(1) + 4 \\ &= -2 + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} se\ x_2 = 2 \rightarrow f(2) &= -2(2) + 4 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, portanto f é injetora.
Para todo elemento do conjunto imagem, existe pelo menos um elemento do domínio relacionado, portanto f é sobrejetora.
Assim, f é bijetora, pois é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Grupo B: Afirmação de que a função é sobrejetora - Sete estudantes afirmaram que a função é apenas sobrejetora. Mesmo assim, alguns não apresentaram os cálculos necessários. Um destes não completou os cálculos sobre injetividade e outro, apesar de ter mostrado que a função era injetora, afirmou apenas que a função era sobrejetora.

Grupo C: Afirmação de que a função é injetora - Quatro estudantes afirmaram que a função é apenas injetora. Neste grupo foram encontrados os seguintes erros: não apresentação dos cálculos necessários e cálculo do zero da função. Um destes estudantes, apesar de mostrar que a função não era injetora, devido a erro numérico, afirmou que a função era injetora.

Grupo D: Afirmação de que a função não é sobrejetora - Três estudantes afirmaram que a função não é sobrejetora. Um destes por erro numérico, outro tentou mostrar se a função era ímpar.

Grupo E: Afirmação de que a função não é injetora - Um estudante concluiu que a função não é injetora. Este estudante tentou mostrar se a função era par.

Grupo F: Manipulação algébrica - Apenas um estudante errou durante manipulações algébricas.

Durante o Ensino Médio, na unidade Números e Álgebra, os parâmetros curriculares (BRASIL, 2018, p. 544 e 541) orientam que deveriam ser trabalhadas as seguintes habilidades:

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

b. Determine $(g \circ f)(x)$.

21 estudantes acertaram completamente este item. Identificamos cinco grupos de erros.

Grupo A: Função composta - Neste item, ao invés de calcularem a função composta, calcularam a soma, o produto, ou a intersecção das funções (errando manipulação algébrica durante os cálculos). Quatro estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo B: Zero da função composta - Neste item, ao invés dos estudantes apresentarem a função composta, tentaram obter o zero da função. Três estudantes cometeram este tipo de erro. Ocorreu ainda erro na manipulação algébrica e erro numérico.

Exemplo 4 ($(g \circ f)(x)$)
$(g \circ f)(x) = g(fx)$
$\Rightarrow \dfrac{-2x+4}{3} + 1 \Rightarrow \dfrac{-2x+4}{3} + 1 = 0$
$\Rightarrow \dfrac{2x+4}{3} = -1 \Rightarrow 2x = -1 - \dfrac{4}{3} \Rightarrow 2x = \dfrac{-3-4}{3} = \dfrac{-7}{3}$
$: x = \dfrac{\frac{-7}{3}}{2} \cong -\dfrac{5}{3}$

Grupo C: Erro numérico - Dois estudantes cometeram erros numéricos durante a resolução da questão.

Grupo D: Manipulação algébrica - Dois estudantes erraram durante manipulações algébricas.

Grupo E: Demais erros - Três estudantes cometeram outros tipos de erros. Foi calculado $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x_0)$ e $(g \circ f)(x) = x$ (com erro em manipulação algébrica) ao invés $(g \circ f)(x)$.

c. Classifique g como crescente ou decrescente.

Três estudantes acertaram completamente este item. Identificamos seis grupos de erros.

Grupo A: Função é avaliada em alguns pontos do domínio - Neste item, ao invés de verificarem se a função é crescente ou decrescente em seu domínio, a avaliam em alguns pontos do domínio e generalizam seu comportamento. Sete estudantes cometeram este tipo de erro.

Exemplo 5 (g é crescente)

$$\begin{aligned} se\ x_1 = 3 \rightarrow g(1) &= \frac{3}{3} + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} se\ x_2 = 6 \qquad g(6) &= \frac{6}{3} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Se $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$, a função é crescente.
o coeficiente angular é positivo também.

Grupo B: Apresentação dos cálculos necessários - Sete estudantes não apresentaram os cálculos necessários.

Grupo C: Erro de definição de função crescente - Neste grupo estão erros cometidos por estudantes que erraram a definição de função crescente. Sete estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo D: Citação da definição de função crescente - Neste grupo estão erros cometidos por estudantes que citaram a definição de função crescente, mas não a aplicaram à função em questão. Cinco estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo E: Função decrescente - Três estudantes concluíram que a função é decrescente. Um deles por errar a definição de função decrescente. Outro por avaliar a função f (e ainda avaliando apenas alguns pontos do domínio).

Grupo F: Demais tipos de erros - Dois estudantes cometeram outros tipos de erros. Um deles cometeu erro em manipulação algébrica e o outro partiu de a função g ser positiva.

d. Determine a inversa de f.

10 estudantes acertaram completamente este item. Identificamos apenas dois grupos de erros.

Grupo A: Função inversa - Neste grupo estão erros cometidos por estudantes que não empregaram a definição correta de inversa de função. Além deste erro, cinco estudantes cometeram erro durante manipulação algébrica, dois calcularam $-f$ ao invés da inversa, um usou a regra de f incompleta, outro calculou o zero de f e por último um estudante confundiu a notação de função inversa. 14 estudantes cometeram este tipo de erro.

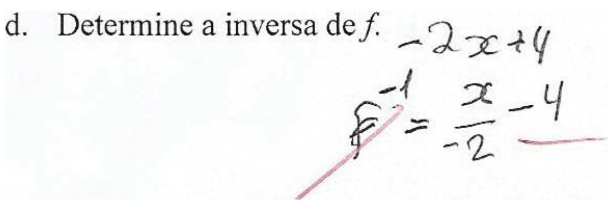


Figura 5.5: Inversa de f

Grupo B: Manipulação algébrica - Sete estudantes erraram durante manipulações algébricas.

A questão a seguir foi a mais fácil para esta turma: obtiveram mais de 38% de aproveitamento, em média. A terceira questão foi subdividida em 4 itens.

3. Dados $A = \{x \in \mathbb{N}^* / -3 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} / -2 < y \leq 4\}$:

a. Determine $A \times B$.

Seis estudantes acertaram completamente este item. Identificamos quatro grupos de erros.

Grupo A: Conjunto A - Neste grupo estão conjuntos distintos do enunciado. A maioria destes conjuntos foi considerado um subconjunto dos inteiros não-nulos, ao invés dos naturais positivos. Alguns foram considerados subconjuntos dos inteiros. Outros conjuntos considerados: nulo, conjunto formado pelos extremos, conjunto unitário $\{-3\}$ (extremo inferior). 19 estudantes cometeram este tipo de erro.

Exemplo 6 ($A \times B$)

$A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{rcccccc} A \times B = \{ & (-3,-1), & (-3,0), & (-3,1), & (-3,2), & (-3,3), & (-3,4) \\ & (-2,-1), & (-2,0), & (-2,1), & (-2,2), & (-2,3), & (-2,4) \\ & (-1,-1), & (-1,0), & (-1,1), & (-1,2), & (-1,3), & (-1,4) \\ & (1,-1), & (1,0), & (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4) \\ & (2,-1), & (2,0), & (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4) \\ & (3,-1), & (3,0), & (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4)\} \end{array}$$

Grupo B: Conjunto B - Neste grupo estão conjuntos distintos do enunciado. Na maioria destes conjuntos, -2 foi considerado elemento. Outros conjuntos considerados: conjunto formado pelos extremos, nulo. Oito estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo C: Notação de conjunto - Sete estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos.

Grupo D: Produto cartesiano - Ao invés de ser apresentado o produto cartesiano, foram calculados união ou interseção dos conjuntos. Três estudantes cometeram este tipo de erro.

Além destes tipos de erros, ocorreu um por repetição de elementos.

b. Determine a relação R, dada por: $R = \{(x, y) \in A \times B / y = x - 1\}$.

13 estudantes acertaram completamente este item. Identificamos três grupos de erros.

Grupo A: Elementos não pertencentes a $A \times B$ - Neste grupo estão relações com elementos que sequer pertencem a $A \times B$. Os mais apontados destes elementos foram $(0, -1)$ e $(-1, -2)$, mas 0 e $-1 \notin \mathbb{N}^*$. Nove estudantes cometeram este tipo de erro.

Exemplo 7 ($R = \{(x, y) \in A \times B / y = x - 1\}$)

x	$y = x - 1$
-3	-4
-2	-3
-1	-2
1	0
2	1
3	2

$R = \{(-3, -4); (-2, -3); (-1, -2); (1, 0); (2, 1); (3, 2)\}$

Grupo B: Notação de conjunto - Quatro estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos.

Grupo C: Demais tipos de erros - Dois estudantes cometeram outros tipos de erros. Um deles expressou R faltando elementos e o outro utilizou a regra $y = x + 1$ ao invés de $y = x - 1$.

c. Determine o domínio e a imagem de R.

Novamente 13 estudantes acertaram completamente este item. Identificamos três grupos de erros.

Grupo A: Domínio da relação - Neste grupo foram apontados conjuntos domínio incorretos. Metade destes conjuntos possuem elementos que sequer pertencem a $\mathbb{N}^*$. Outra parte apontou o conjunto dos números reais, ou um intervalo real. Houve ainda conjunto com falta de elementos. 14 estudantes cometeram este tipo de erro.

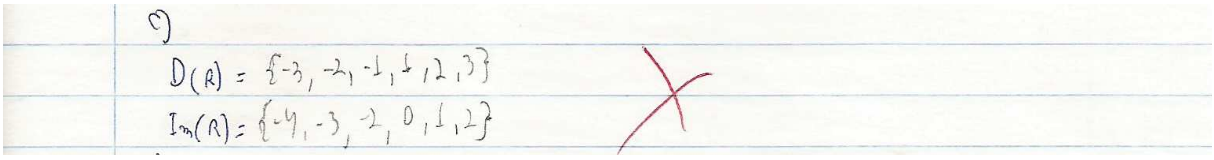


Figura 5.6: Domínio e imagem de R

Grupo B: Imagem da relação - Neste grupo foram apontados conjuntos imagem incorretos. Parte destes conjuntos possuem elementos menores ou iguais a -2. Outra parte apontou um intervalo real. Houve ainda: conjuntos com o número -1, conjunto com falta de elementos, com pares ordenados, com o quadrado dos elementos do domínio e o conjunto dos números reais. Os mesmos 14 estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo C: Notação de conjunto - Três estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos.

d. Determine a inversa da relação R.

14 estudantes acertaram completamente este item. Identificamos três grupos de erros.

Grupo A: Elementos não pertencentes a $B \times A$ - Neste grupo estão relações com elementos do domínio menores ou iguais a -2 ou elementos da imagem iguais a 0. Seis estudantes cometeram este tipo de erro.

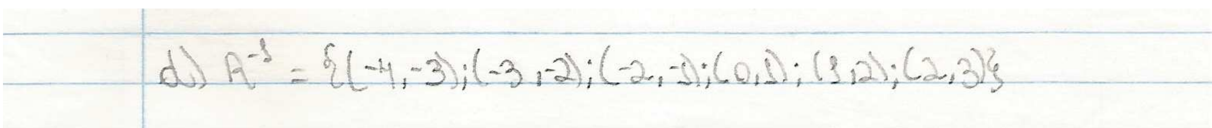


Figura 5.7: Inversa da relação R

Grupo B: Regra da relação - Neste grupo estão relações com regras incorretas. A maioria destas relações foram obtidas devido a tentativa de trocas de sinais dos elementos e a outra devido à tentativa de encontrar o zero da relação (ocorrendo também erro de manipulação algébrica). Três estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo C: Notação de conjunto - Três estudantes cometeram erros ao denotar conjuntos.

Além destes tipos de erros, ocorreu um por troca de domínio e contradomínio.

A prova analisada (C.1) foi respondida por 43 estudantes.

1. Determine a derivada das funções abaixo, UTILIZANDO A DEFINIÇÃO DE DERIVADAS:

   a. $g(x) = 6$

   b. $f(x) = -x^2 + 7x - 2$

   A primeira questão foi subdividida em 2 itens.

   a. $g(x) = 6$

   Este primeiro item foi resolvido corretamente por 12 estudantes. Identificamos seis grupos de erros.

   Grupo A: Erros em definição de derivada - Neste grupo estão incluídos erros na definição de derivada e não utilização de derivada por definição. 13 estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Exemplo 8 ($g'(x) = 0$)

   $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

   $\lim\limits_{h \to 0} = \dfrac{6-6}{h} = \dfrac{0}{h}$

   $\dfrac{0}{0} = 0$

   Grupo B: Manipulação algébrica - Neste grupo estão incluídos os seguintes erros: incógnitas assumem valores arbitrários, simplificações, desaparecimento da notação de limite, (des)aparecimento de parcelas, resposta apresentada diferente da calculada, falta de sinal de igual ou implicações. 12 estudantes erraram durante manipulações algébricas.

   Grupo C: Limites - Este grupo compreende erros durante os cálculos de limites, erros em notação de limites e não apresentação dos cálculos. 10 estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Grupo D: Função - Neste grupo estão os erros por utilização de regra errada, função errada ou atribuição de valores. Nove estudantes cometeram estes tipos de erros.

Grupo E: Derivada - Neste grupo estão os erros cometidos ao se derivar uma função, ou notação de derivada. Apesar da questão solicitar derivada pela definição, três estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo F: Indeterminações - Durante as manipulações algébricas para o cálculo de limites surgiram algumas indeterminações que alguns estudantes não conseguiram lidar. Três estudantes cometeram erros com indeterminações.

b. $f(x) = -x^2 + 7x - 2$

Este item foi resolvido corretamente por 20 estudantes. Identificamos quatro grupos de erros.

Grupo A: Manipulação algébrica - Este grupo é formado por erros em: desaparecimento de parcelas, propriedade distributiva, simplificações, troca de sinais e quadrado de binômio. 15 estudantes erraram durante manipulações algébricas.

Exemplo 9 **(**$f'(x) = -2x + 7$**)**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{[-(x+h)^2 + 7(x+h) - 2] - (x^2 + 7x - 2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-(x+h)^2 + 7x + 7h - 2 - x^2 - 7x + 2}{h}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-(+1x^0h^2 + 2x^1h^1 + 1x^2h^0) + 7x + 7h - x^2 - 7x + 2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-1x^0h^2 - 2x^1h^1 + 1x^2h^0 \cancel{+7x} + 7h - x^2 \cancel{-7x} + 2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-h^2 - 2x^1h^1 \cancel{+x^2} + 7h \cancel{-x^2} + 2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{\cancel{h} - h - 2x + 7 + 2}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} = -h - 2x + 9 = 0 - 2x + 9$$

$$f'(x) = -2x + 9$$

Grupo B: Definição de derivada - Neste grupo estão os erros cometidos na definição de derivada, ou a não utilização. 11 estudantes cometeram este tipo de erro.

Grupo C: Função - Neste grupo estão os erros por utilização de regra errada ou função errada. Nove estudantes cometeram estes tipos de erros.

Grupo D: Limites - Este grupo compreende erros durante os cálculos de limites e erros em notação de limites. Quatro estudantes cometeram estes tipos de erros.

Além dos erros mencionados, um estudante tentou encontrar os zeros da função. Durante este processo, cometeu erro na fórmula resolutiva e erro de aproximação.

A prova analisada (D.1) foi respondida por 37 estudantes.

1. Determine a derivada das funções abaixo, UTILIZANDO A DEFINIÇÃO DE DERIVADAS:

   a. $g(x) = 7$

   b. $f(x) = -x^2 + 5x - 8$

   A primeira questão foi subdividida em 2 itens.

   a. $g(x) = 7$

   Este primeiro item foi resolvido corretamente por 16 estudantes. Identificamos cinco grupos de erros.

   Grupo A: Erros em derivada - Neste grupo estão incluídos erros em derivada e definição de derivada. Nove estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Exemplo 10 ($g'(x) = 0$)

   $g(x) = 7$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{7(x+h) - 7}{h} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{7x + 7h - 7}{h} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{7x + 7h - 7}{1} \\
&= \frac{7x + 7 \cdot 0 - 7}{0} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

   Grupo B: Limites - Este grupo compreende erros durante os cálculos de limites e erros em notação de limites. Oito estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Grupo C: Função - Neste grupo estão os erros por utilização de regra errada, nome da função ou atribuição de valores. Seis estudantes cometeram estes tipos de erros.

   Grupo D: Indeterminações - Durante as manipulações algébricas para o cálculo de limites surgiram algumas indeterminações que alguns estudantes não conseguiram lidar. Quatro estudantes cometeram erros com indeterminações.

Grupo E: Manipulação algébrica - Quatro estudantes erraram durante manipulações algébricas.

b. $f(x) = -x^2 + 5x - 8$

Este item foi resolvido corretamente por 20 estudantes. Identificamos quatro grupos de erros.

Grupo A: Manipulação algébrica - Este grupo é formado por erros em: propriedade distributiva, simplificações, multiplicação de equações por números diferentes de 1, derivadas igualadas a zero, aparecimento de notação de derivada e operações com binômios. 11 estudantes erraram durante manipulações algébricas.

Exemplo 11 $(f'(x) = -2x + 5)$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 8$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - 8 - (-x^2 + 5x - 8)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 5x + 5h - 8 - x^2 - 5x + 8}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+5x} + 5h \cancel{-8} \cancel{-x^2} \cancel{-5x} \cancel{+8}}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 5h}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h + 5)}{\cancel{h}}$$
$$f'(x) = 2x + 0 + 5$$
$$f'(x) = 2x + 5$$

Grupo B: Erros em derivada - Neste grupo estão incluídos erros em derivada, notação e definição de derivada. Sete estudantes cometeram estes tipos de erros.

Grupo C: Limites - Este grupo compreende erros durante os cálculos de limites e erros em notação de limites. Seis estudantes cometeram estes tipos de erros.

Grupo D: Função - Neste grupo estão os erros por utilização de regra errada ou função errada. Três estudantes cometeram estes tipos de erros.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Assim como em pesquisas realizadas em outras universidades, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo (UTFPR-TD), a não aprovação dos alunos em CDI 1 também é muito alta e motivo de preocupação para as coordenações dos cursos envolvidos. A Tabela 6.1 apresenta a não aprovação (por nota ou por frequência) dos estudantes em CDI 1 de 2018/1 a 2019/2.

Tabela 6.1: Não aprovação em CDI 1

Semestre	**Curso**	**Disciplina**	**Não aprovação**
2019/2	Engenharia De Bioprocessos E Biotecnologia	Cálculo Diferencial E Integral 1	63%
	Engenharia De Computação	Cálculo Diferencial E Integral 1	86%
	Engenharia Civil	Cálculo Diferencial E Integral 1	48%
	Engenharia Eletrônica	Cálculo Diferencial E Integral 1	51%
	Licenciatura Em Matemática	Cálculo A/Cálculo Integral	56%
	Tecnologia Em Processos Químicos	Cálculo 1	59%
2019/1	Engenharia De Bioprocessos E Biotecnologia	Cálculo Diferencial E Integral 1	60%
	Engenharia De Computação	Cálculo Diferencial E Integral 1	43%
	Engenharia Civil	Cálculo Diferencial E Integral 1	47%
	Engenharia Eletrônica	Cálculo Diferencial E Integral 1	75%
	Licenciatura Em Matemática	Cálculo Diferencial/Cálculo Integral	60%
	Tecnologia Em Processos Químicos	Cálculo 1	81%
2018/2	Engenharia De Bioprocessos E Biotecnologia	Cálculo Diferencial E Integral 1	66%
	Engenharia De Computação	Cálculo Diferencial E Integral 1	37%
	Engenharia Civil	Cálculo Diferencial E Integral 1	35%
	Engenharia Eletrônica	Cálculo Diferencial E Integral 1	67%
	Licenciatura Em Matemática	Cálculo Diferencial/Cálculo Integral	53%
	Tecnologia Em Processos Químicos	Cálculo 1	93%
2018/1	Engenharia De Bioprocessos E Biotecnologia	Cálculo Diferencial E Integral 1	88%
	Engenharia De Computação	Cálculo Diferencial E Integral 1	65%
	Engenharia Civil	Cálculo Diferencial E Integral 1	63%
	Engenharia Eletrônica	Cálculo Diferencial E Integral 1	84%
	Licenciatura Em Matemática	Cálculo Diferencial/Cálculo Integral	49%
	Tecnologia Em Processos Químicos	Cálculo 1	71%

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados fornecidos pela Assessoria dos Cursos de Graduação (ASGRAD)-TD/UTFPR.

Na Tabela 6.2 é apresentada a quantidade de vezes que os alunos de um curso de 2018/1 cursaram CDI 1:

Tabela 6.2: Número de vezes que um estudante cursa CDI 1

Número de períodos cursados	1	2	3	4
Número de alunos que obtiveram aprovação	8	19	3	-
Número de alunos que ainda não obtiveram aprovação	7	4	4	1

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados fornecidos pela ASGRAD-TD/UTFPR.

Neste trabalho foi feita a análise da produção escrita de estudantes de dois cursos de Engenharia. Conforme análise de erro das primeiras avaliações de CDI 1, grande parte dos erros cometidos pelos estudantes ocorrem pela ausência de base matemática do Ensino Básico. Isto é corroborado por Cantarutti (2017) e Cavasotto (2010): erros cometidos pelos alunos em avaliações de CDI 1, são em geral por falta de conhecimentos de matemática básica, conceitos que deveriam ter sido compreendidos no Ensino Fundamental e Médio.

A seguir é apresentado o resultado de um questionário (A.1) aplicado às professoras que lecionam/ lecionaram CDI 1 na instituição.

A Tabela 6.3 apresenta a experiência que as professoras entrevistadas têm lecionando CDI 1 (A.1).

Tabela 6.3: Experiência em lecionar CDI 1

Tempo	**Frequência relativa**
Mais de 10 anos	50%
Entre 8 e 10 anos	25%
Entre 5 e 8 anos	0%
Entre 3 e 5 anos	0%
Menos de 3 anos	25%

Fonte: Autor (2020).

A Tabela 6.4 apresenta a percepção dos professores da instituição que lecionam/ lecionaram CDI 1 sobre o índice de reprovação nesta disciplina (A.1).

Tabela 6.4: Reprovação em CDI 1

Classificação	**Frequência relativa**
Muito alto	25%
Alto	75%
Médio	0%
Baixo	0%
Muito baixo	0%

Fonte: Autor (2020).

Em questionário (A.2) aplicado aos professores da instituição que lecionam/ lecionaram Cálculo Diferencial e Integral 1, foram apontados alguns motivos que levam à reprovação: Falta de conhecimento prévio em matemática básica, dificuldades em compreender os conteúdos e relacionar com outras disciplinas, transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, falta de maturidade e reponsabilidade dos alunos, desistência no meio da disciplina, falta hábito de estudo.

Já a Tabela 6.5 apresenta a percepção dos professores da instituição que lecionam/ lecionaram CDI 1 sobre o índice de evasão nesta disciplina (A.2).

Tabela 6.5: Evasão em CDI 1

Classificação	**Frequência relativa**
Muito alto	50%
Alto	25%
Médio	25%
Baixo	0%
Muito baixo	0%

Fonte: Autor (2020).

Neste mesmo questionário (A.2), obtivemos alguns dos motivos que levam à evasão dos alunos em CDI 1: O aluno se sente desmotivado por não estar tendo bom desempenho nas avaliações, sentimento de incapacidade, falta de afinidade com a área.

As medidas utilizadas (A.2) pelos professores da instituição para reduzir a evasão em CDI 1 são: provas substitutivas a cada duas provas, grupos de estudos, aulas de exercícios, acompanhamento semanal das faltas, contato via WhatsApp com os alunos; encaminhamento psicológico via Núcleo de Acompanhamento Psicopedagógico e Assistência Estudantil (NUAPE), contato com coordenação de curso e Diretoria de Graduação e Educação Profissional (DIRGRAD), conversas para motivar os alunos, entre outras.

Para diminuir a chance de erros nos conteúdos abordados durante o Ensino Básico, foi elaborado um banco de questões que são pertinentes às primeiras avaliações de CDI 1. As questões deste banco estão disponibilizadas via Moodle. Estas questões podem ser resolvidas por estudantes do Ensino Superior, estudantes que ingressarão no Ensino Superior, como também por estudantes do Ensino Básico, assim que se apropriarem do conteúdo exigido para sua resolução.

A seguir apresentamos os grupos de erros identificados na análise de erros das provas e suas frequências:

A Tabela 6.6 apresenta os grupos de erros encontrados nos seis itens da primeira questão da prova de Cálculo I do curso de Engenharia, sobre Funções.

Tabela 6.6: Questão 1

Grupo	**Item**	**Frequência**
Correta	a	7
	b	17
	c	9
	d	7
	e	7
	f	2
Domínio	a	4
	b	3
	c	7
	d	1
	e	7
	f	2
Imagem	a	5
	b	3
	c	22
	d	7
	e	3
	f	16
Gráfico	a	4
	b	5
	c	14
	d	4
	e	4
	f	21
Notação de conjuntos	a	10
	b	5
	d	15
	e	6
	f	3
Intercepto	b	4
	c	6
	d	1
	e	7
	f	4
Raiz	b	9
	d	4
	e	3
	f	4
Erro numérico	a	4
	b	1
	e	2
Manipulação algébrica	a	2
	b	1
Potenciação	c	2
	e	2
Fórmula resolutiva	a	11
Notação	c	3
Logaritmo	e	6

Fonte: Autor (2021).

Enquanto alguns erros são inerentes a um item específico da questão (fórmula resolutiva em função quadrática, logaritmo), ou seja, não são recorrentes ao longo da prova, outros erros são inerentes ao conteúdo abordado na prova (notação de conjuntos, gráfico). Esse tipo de erro pode comprometer toda a avaliação, pois eles poderão ocorrer geralmente em mais questões, e por fim, outros erros de manipulação algébrica e erro numérico, que aparecem independente do assunto abordado. Esse último tipo pode ser devido à falta de atenção ou devido ao que Lopes (2013) apresenta como "sobregeneralização" que é quando o aluno formula hipóteses distintas das que o professor espera, por exemplo, somar frações usando a regra para multiplicar frações, e quando os alunos fazem "cancelamentos excêntricos", provocados pela cultura do macete, às "saliências visuais".

A Tabela 6.7 apresenta os grupos de erros encontrados nos quatro itens da segunda questão da prova de Cálculo I do curso de Engenharia, sobre Funções.

Tabela 6.7: Questão 2

Grupo	**Item**	**Frequência**
Correta	a	1
	b	21
	c	3
	d	10
Manipulação algébrica	a	1
	b	2
	d	7
Cálculo	a	15
	c	7
Demais erros	b	3
	c	2
Definição	c	5
	d	14
Sobrejetora	a	7
Injetora	a	4
Não sobrejetora	a	3
Não injetora	a	1
Zero da composta	b	3
Composta	b	2
Erro numérico	b	2
Intersecção	b	2
Pontual	c	7
Erro de definição	c	7
Decrescente	c	3

Fonte: Autor (2021).

A Tabela 6.8 apresenta os grupos de erros encontrados nos quatro itens da terceira questão da prova de Cálculo I do curso de Engenharia, sobre Funções.

Tabela 6.8: Questão 3

Grupo	**Item**	**Frequência**
Correta	a	6
	b	13
	c	13
	d	14
Notação de conjuntos	a	7
	b	4
	c	3
	d	3
Domínio	c	14
	d	6
Conjunto A	a	19
Conjunto B	a	8
Produto cartesiano	a	3
Elementos não pertencentes a $A \times B$	b	9
Demais erros	b	2
Imagem	c	14
Regra	d	3

Fonte: Autor (2021).

Os erros cometidos na resolução da primeira prova de CDI 1 intersectam com os conteúdos trabalhados na disciplina preparatória relatada por Rafael (2017): conjuntos numéricos, equações, polinômios, fatoração, logaritmos, exponenciais, funções e geometria analítica.

A Tabela 6.9 apresenta os grupos de erros encontrados nos dois itens da primeira questão da prova de Cálculo I do curso de Engenharia, sobre Limites.

Tabela 6.9: Questão 2.1

Grupo	**Item**	**Frequência**
Correta	a	12
	b	20
Definição de derivada	a	13
	b	11
Manipulação algébrica	a	12
	b	15
Limite	a	10
	b	4
Função	a	9
	b	9
Derivada	a	3
Indeterminação	a	3

Fonte: Autor (2021).

A Tabela 6.10 apresenta os grupos de erros encontrados nos dois itens da primeira questão da prova de Cálculo I do curso de outra Engenharia, sobre Limites.

Tabela 6.10: Questão 3.1

Grupo	**Item**	**Frequência**
Correta	a	16
	b	20
Derivada	a	9
	b	7
Limite	a	8
	b	6
Manipulação algébrica	a	4
	b	11
Regra da função	a	6
Indeterminação	a	4
Função	b	3

Fonte: Autor (2021).

Diante do exposto, sugere-se o banco de questões, a fim de praticar conteúdos de matemática da Educação Básica:

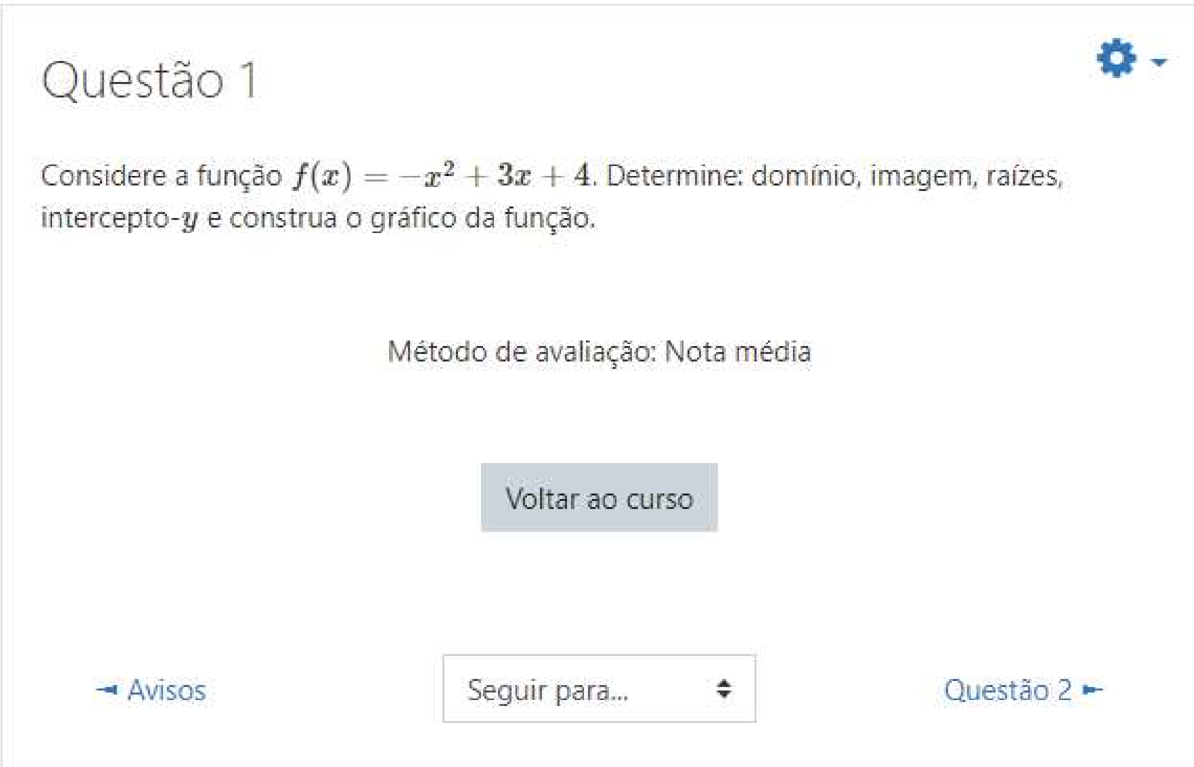


Figura 6.1: Função quadrática.

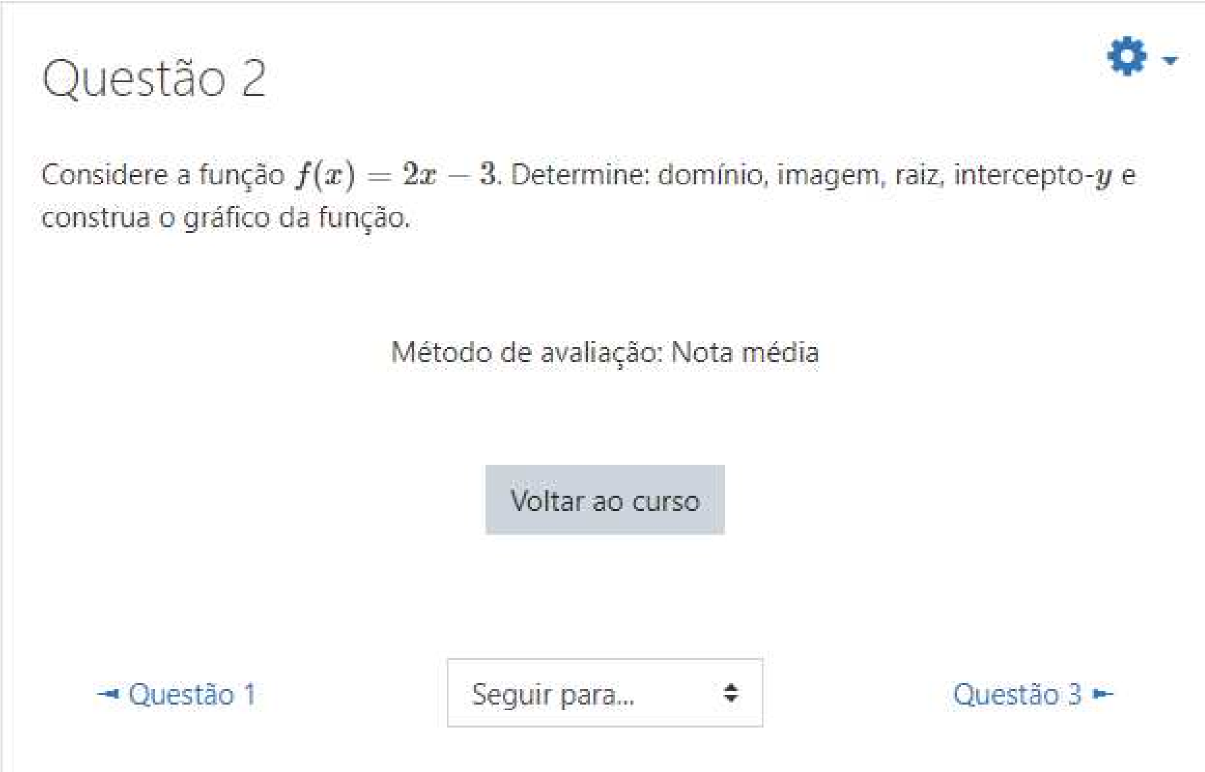


Figura 6.2: Função afim.

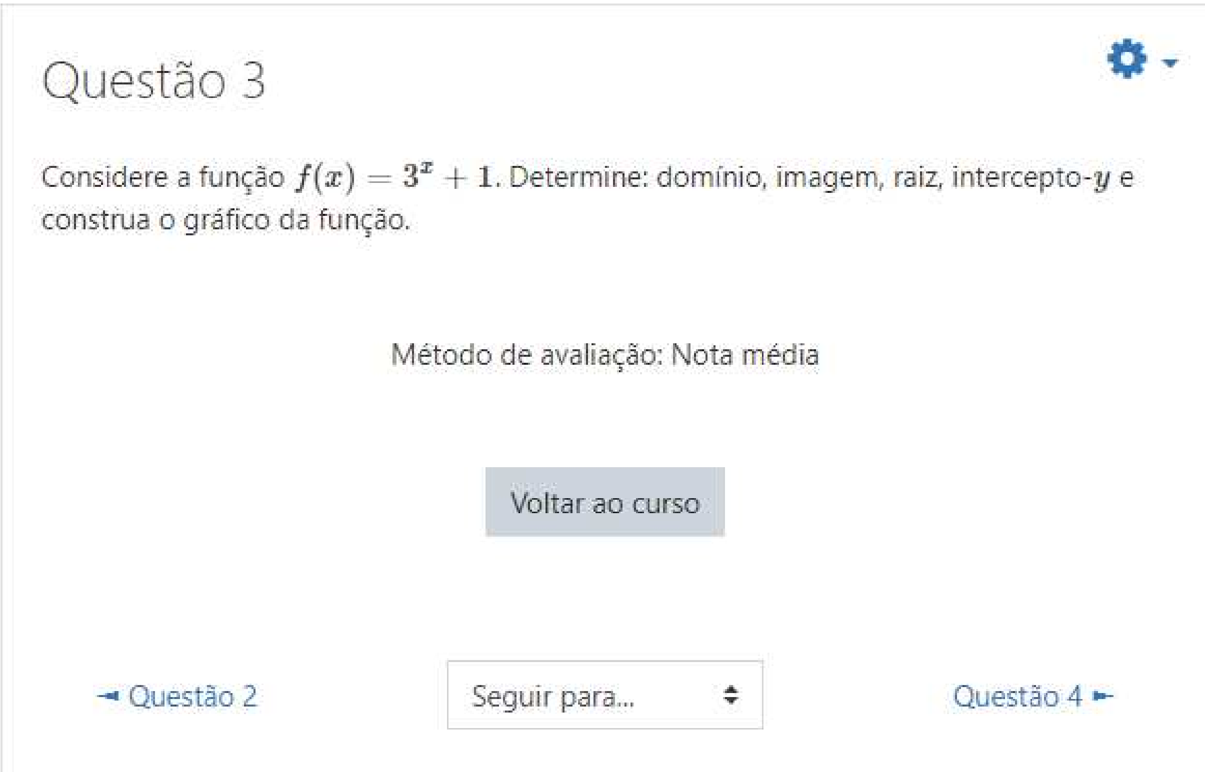


Figura 6.3: Função exponencial.

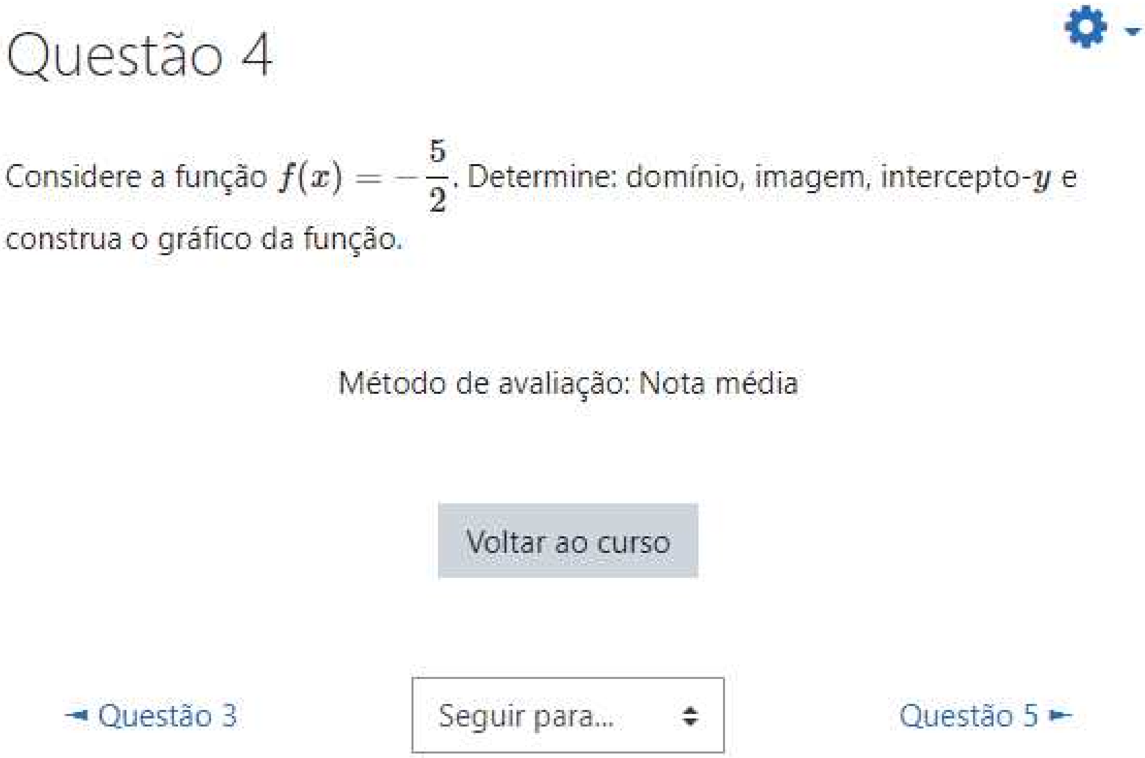


Figura 6.4: Função constante.

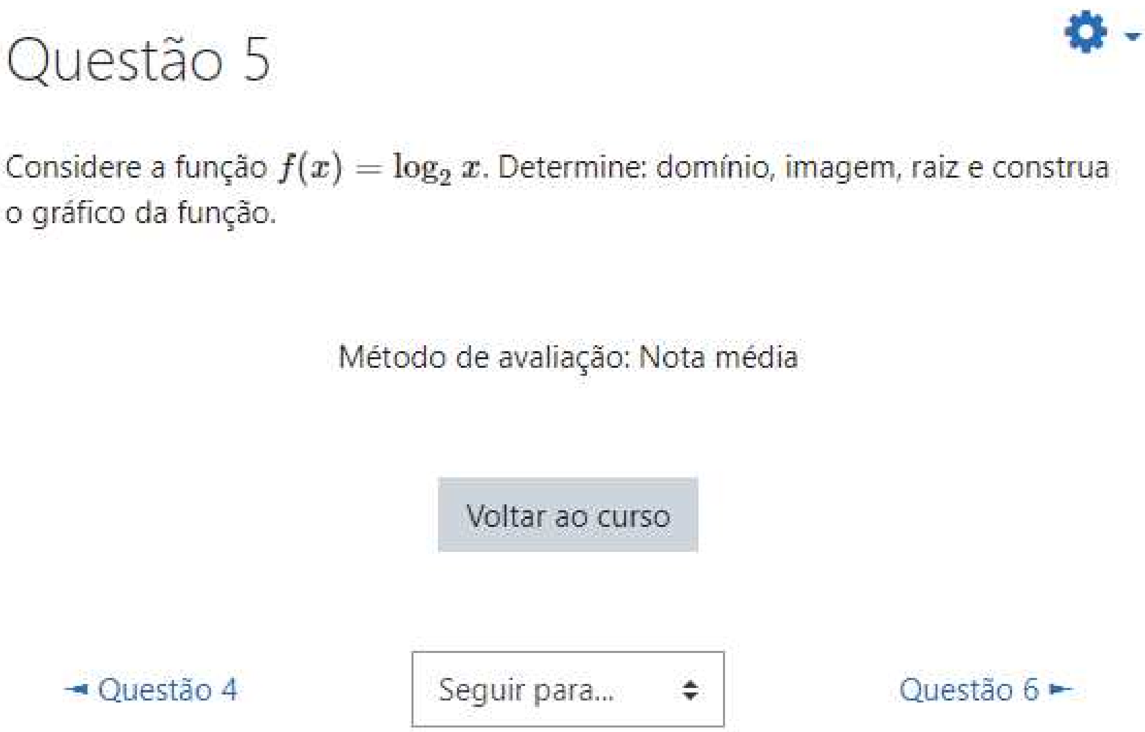


Figura 6.5: Função logarítmica.

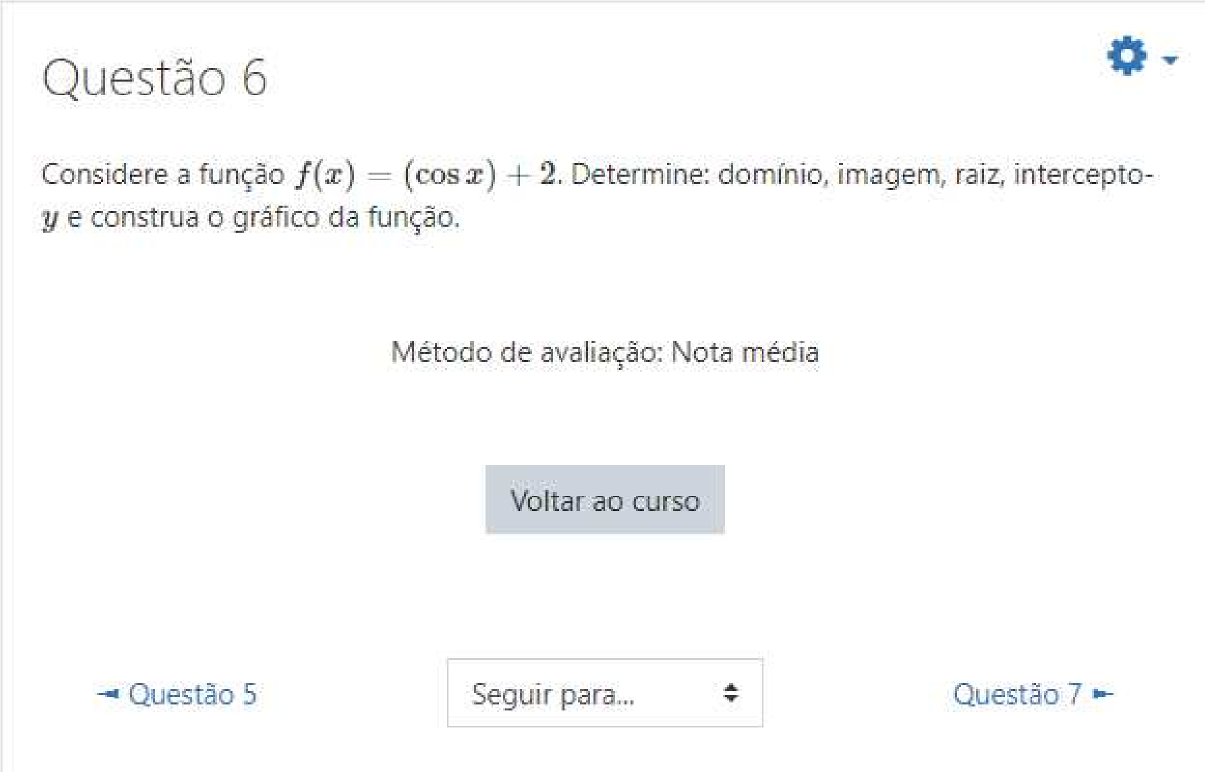


Figura 6.6: Função cosseno.

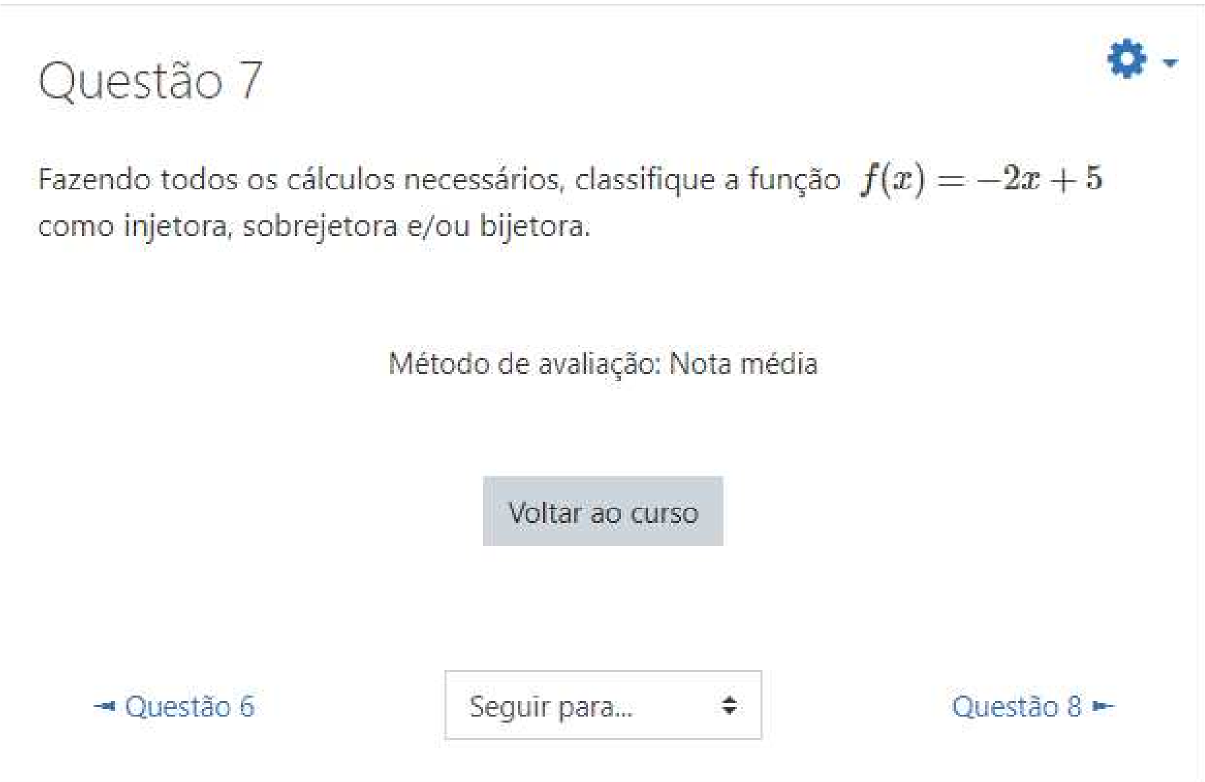


Figura 6.7: Injeção, sobrejeção.

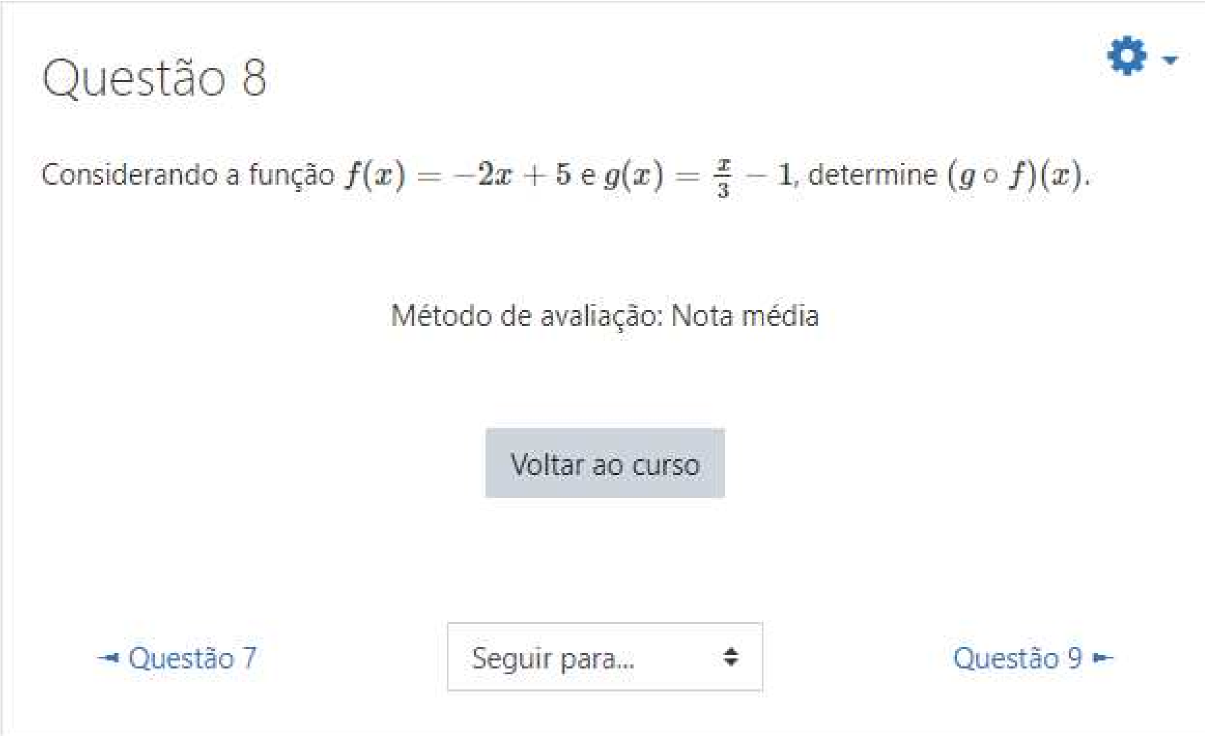


Figura 6.8: Composição de funções.

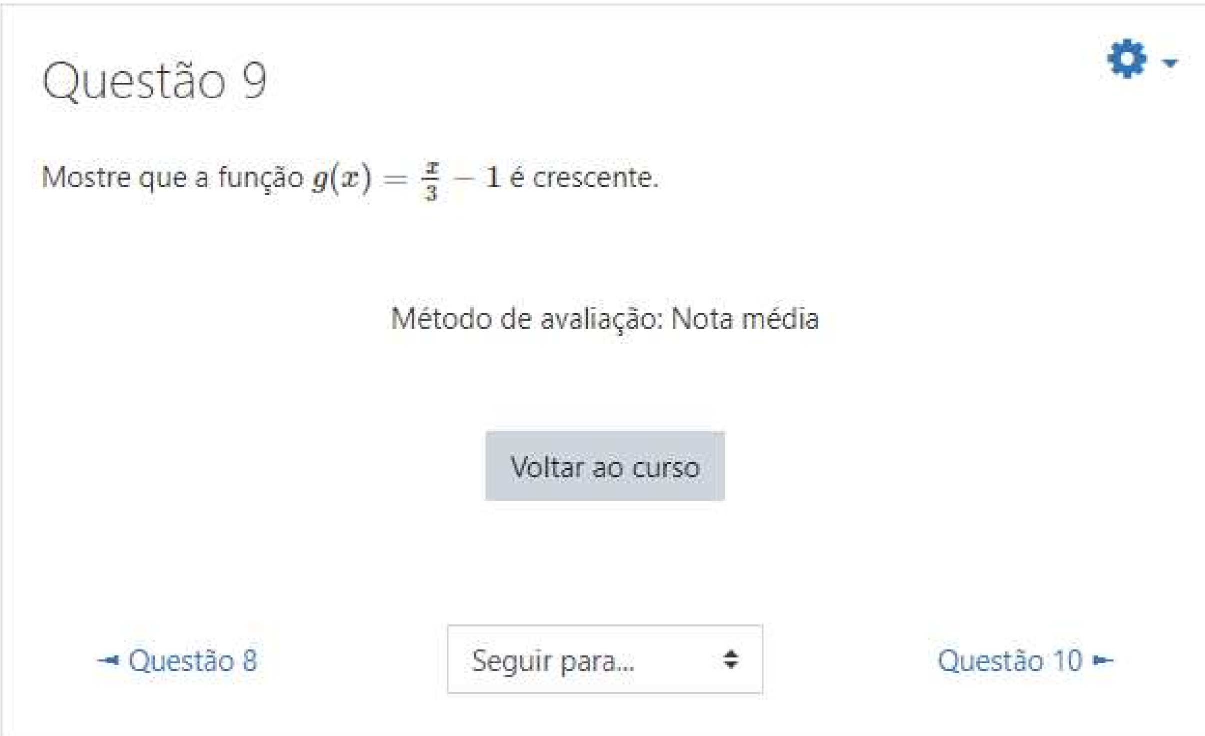


Figura 6.9: Função crescente.

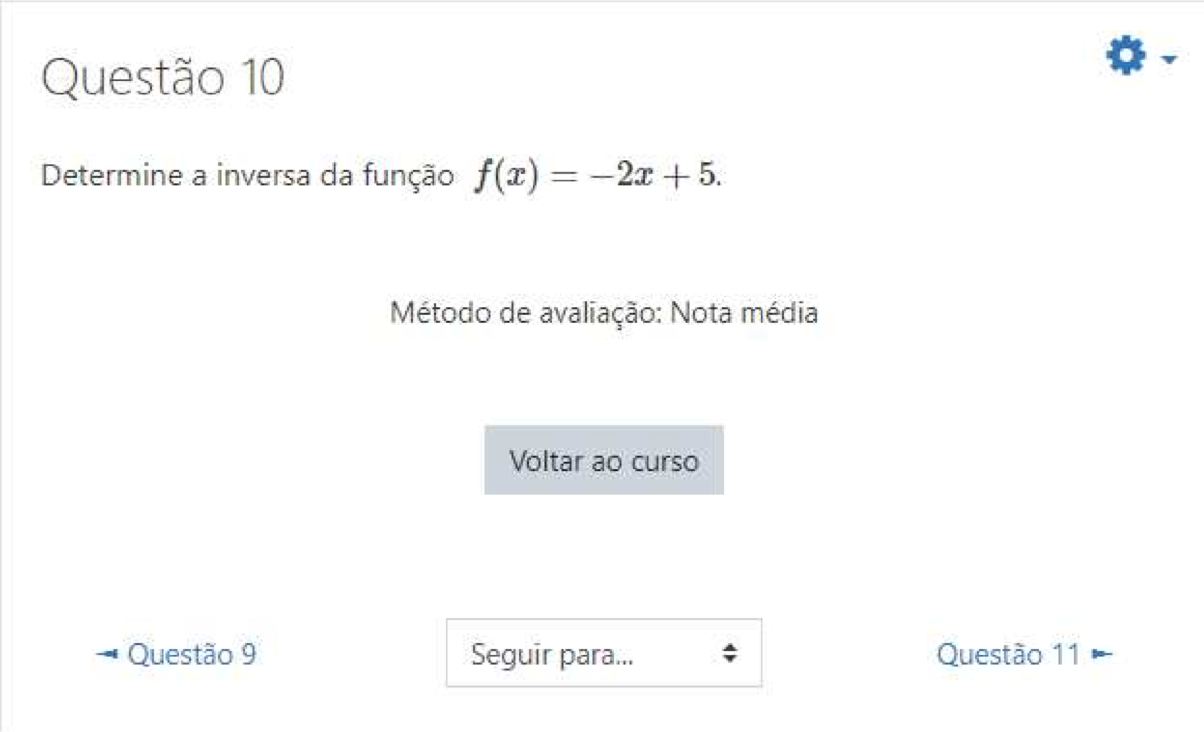


Figura 6.10: Inversa de função.

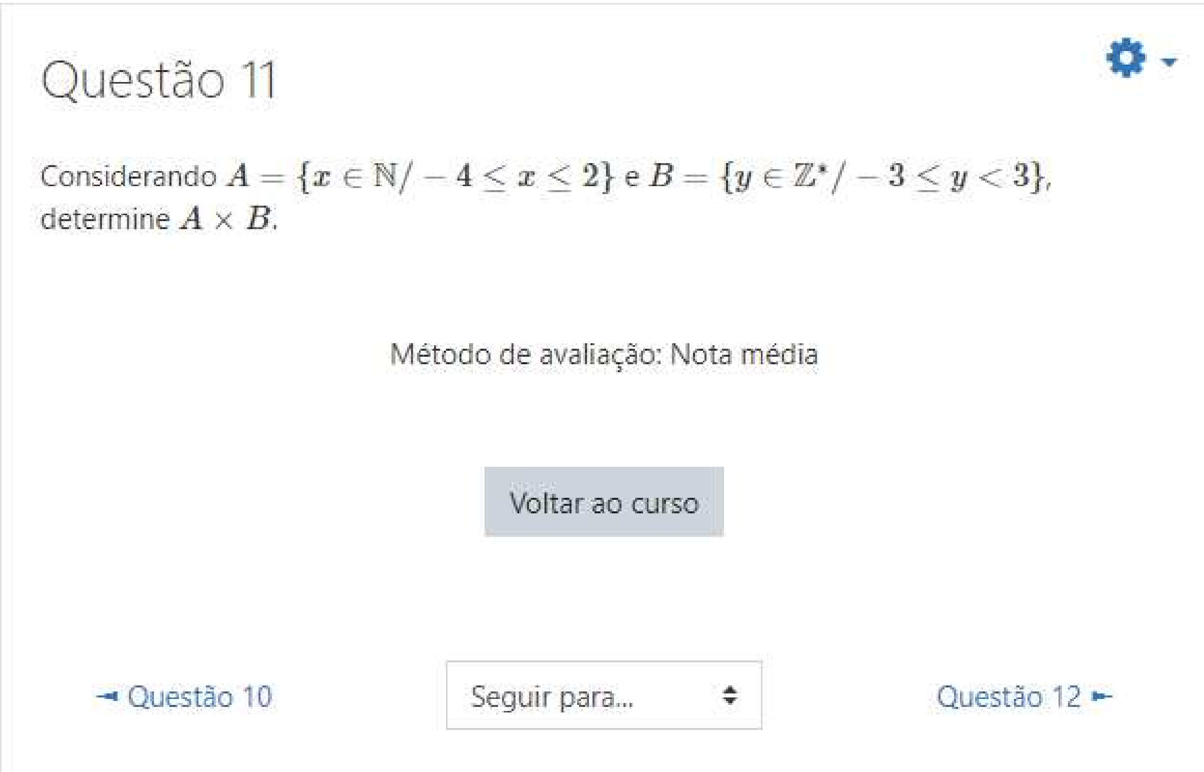


Figura 6.11: Produto cartesiano.

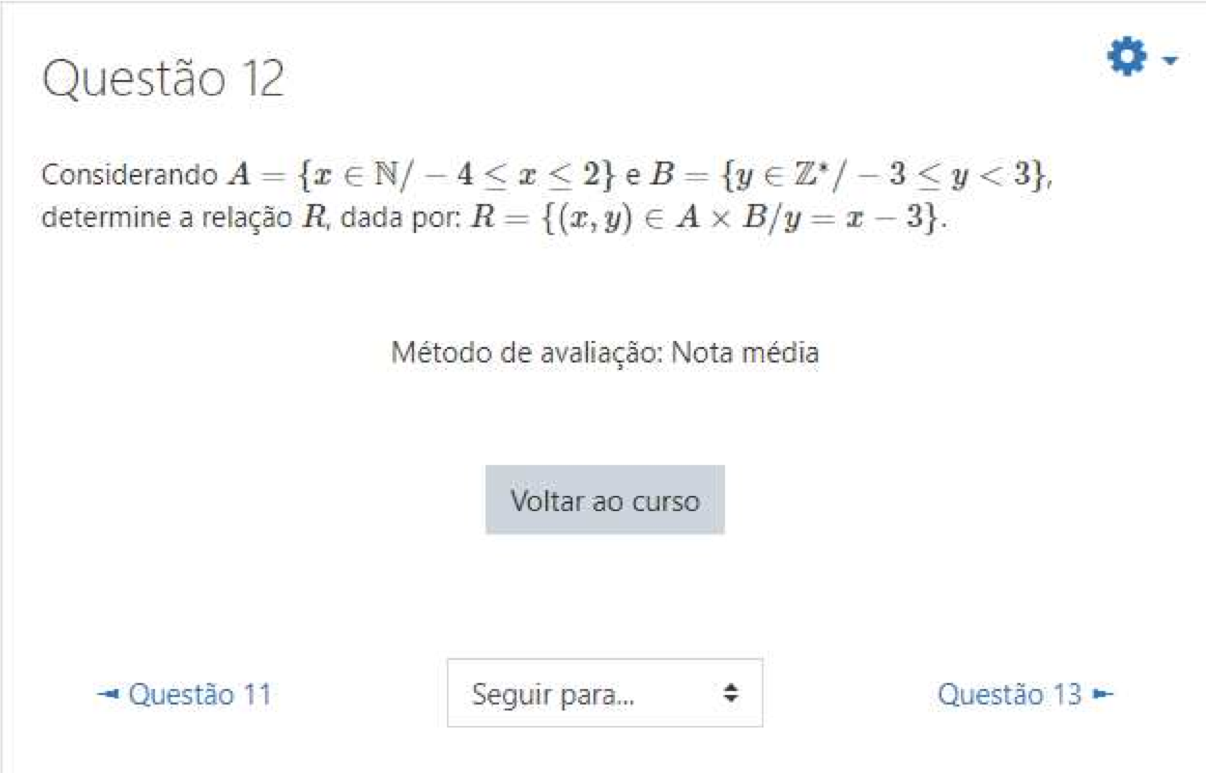


Figura 6.12: Relação.

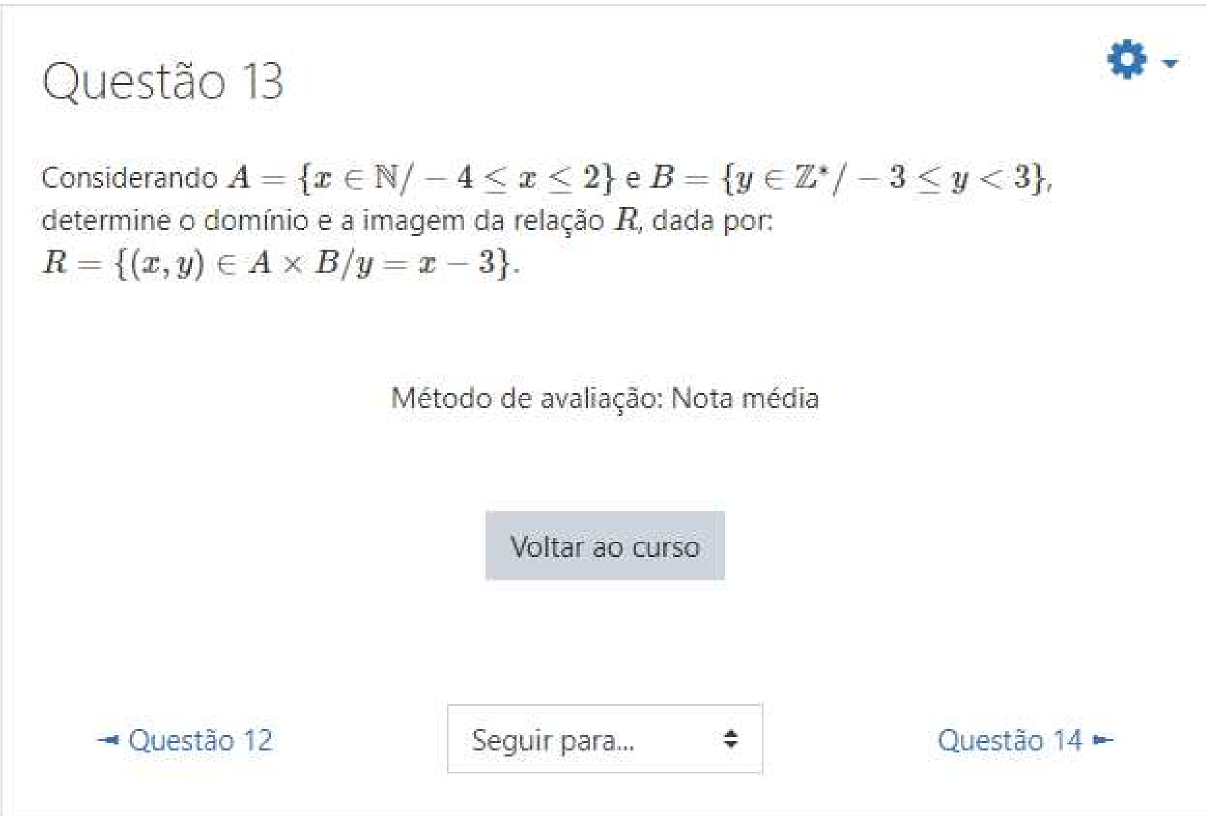


Figura 6.13: Domínio e imagem de relação.

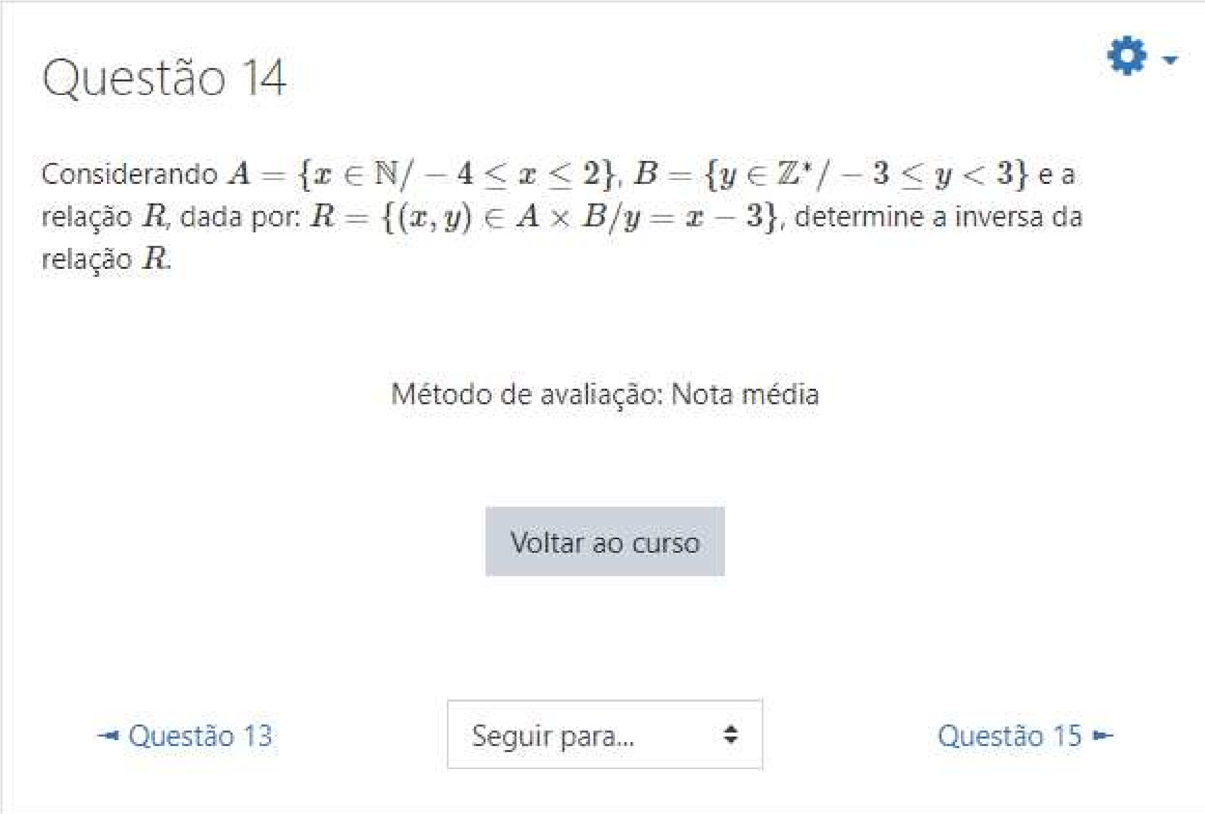


Figura 6.14: Inversa de relação.

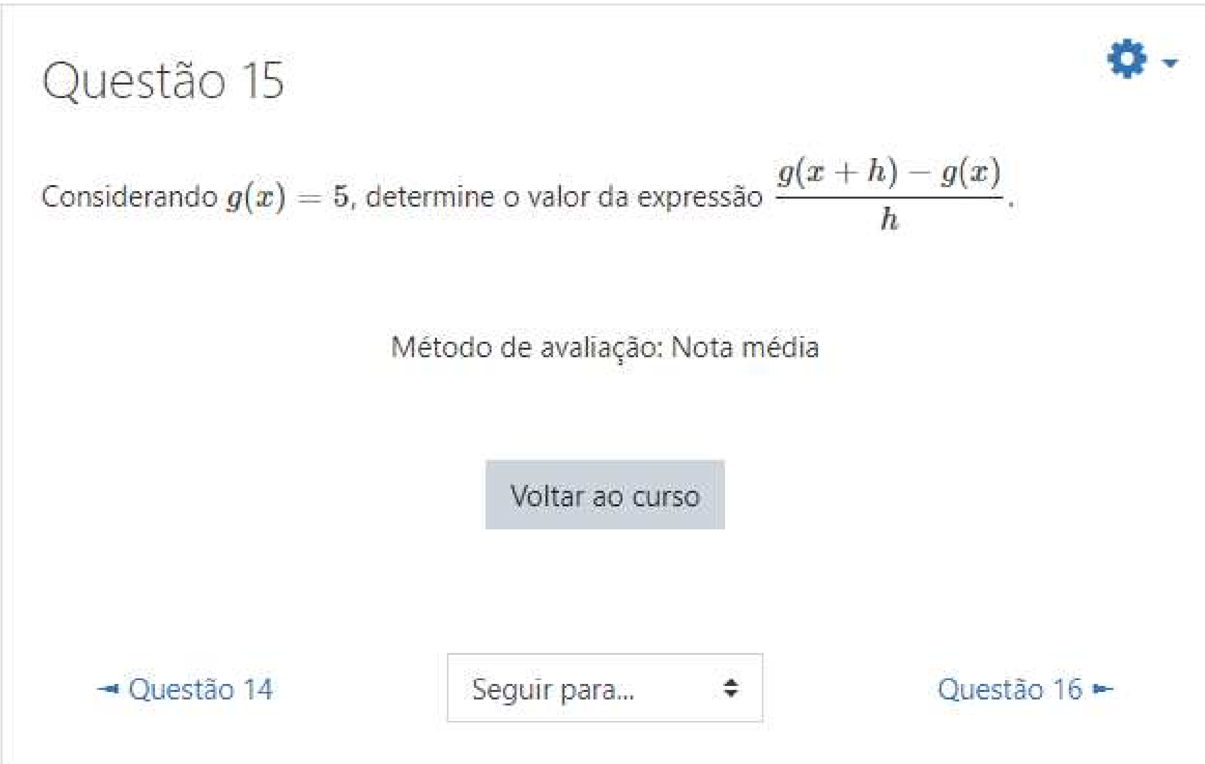


Figura 6.15: Expressão.

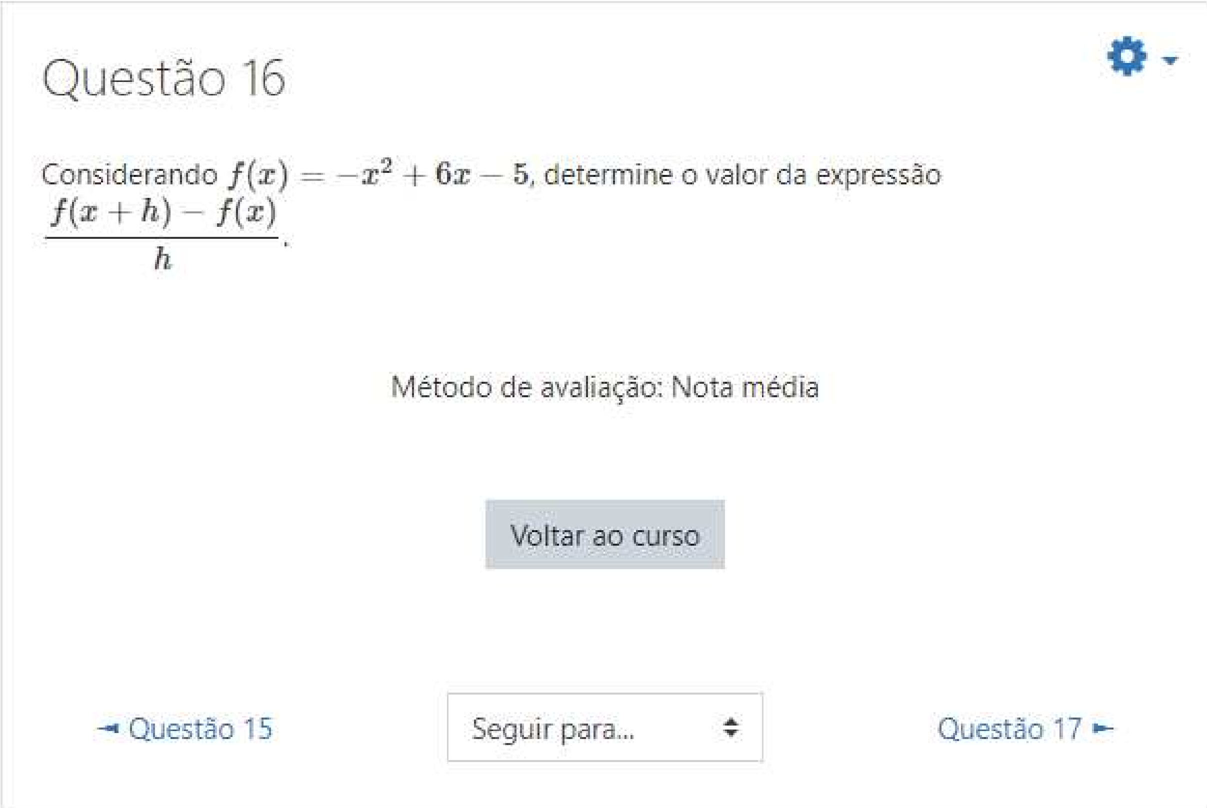


Figura 6.16: Expressão.

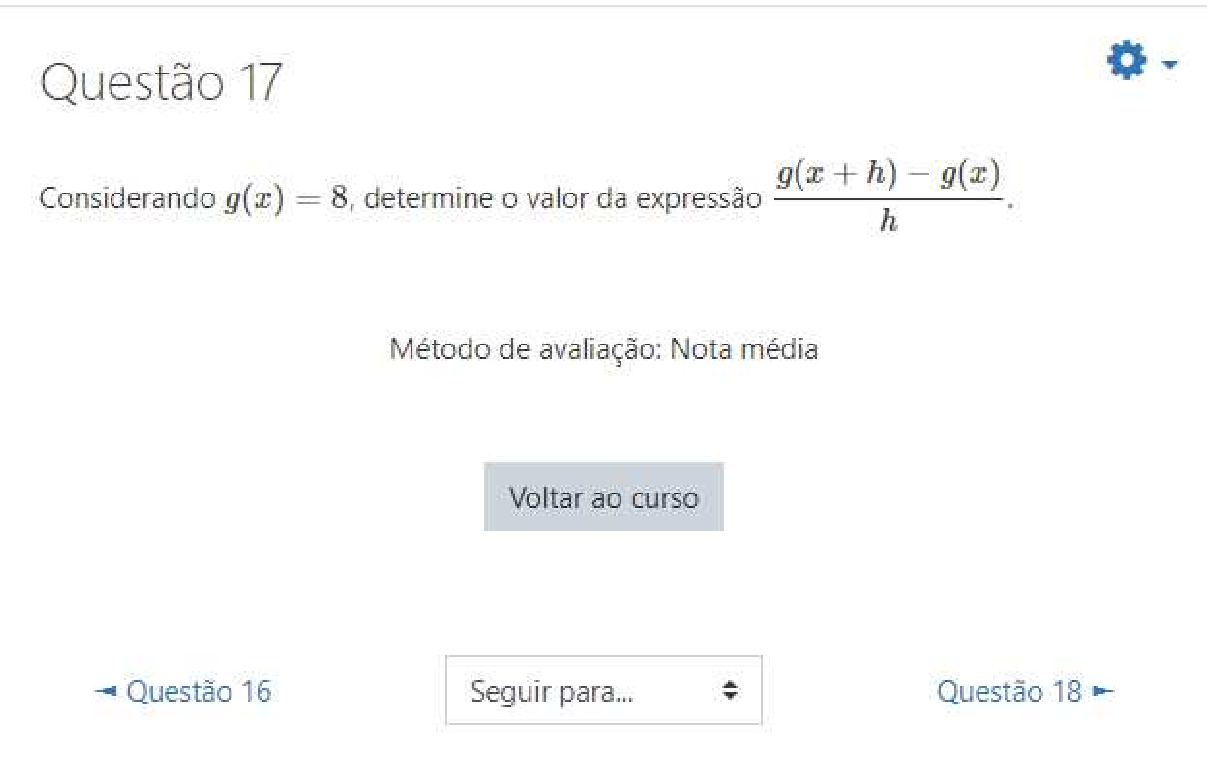


Figura 6.17: Expressão.

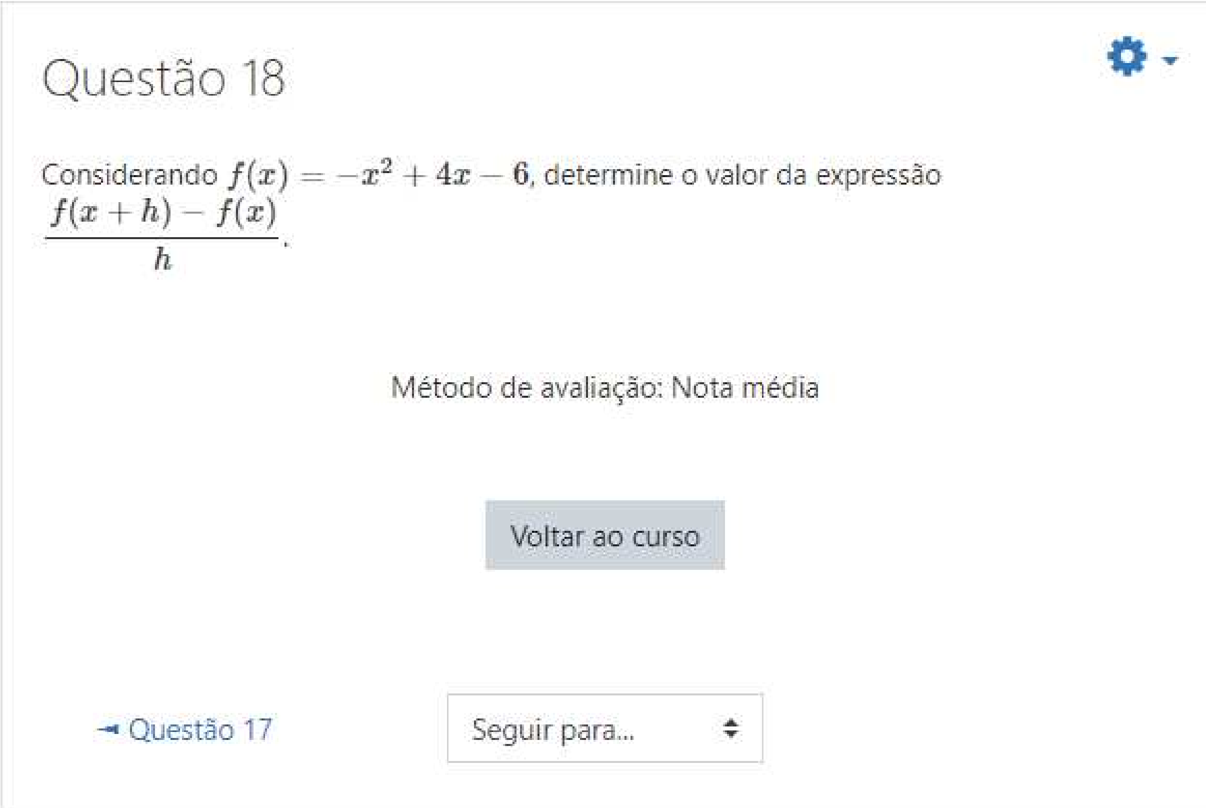


Figura 6.18: Expressão.

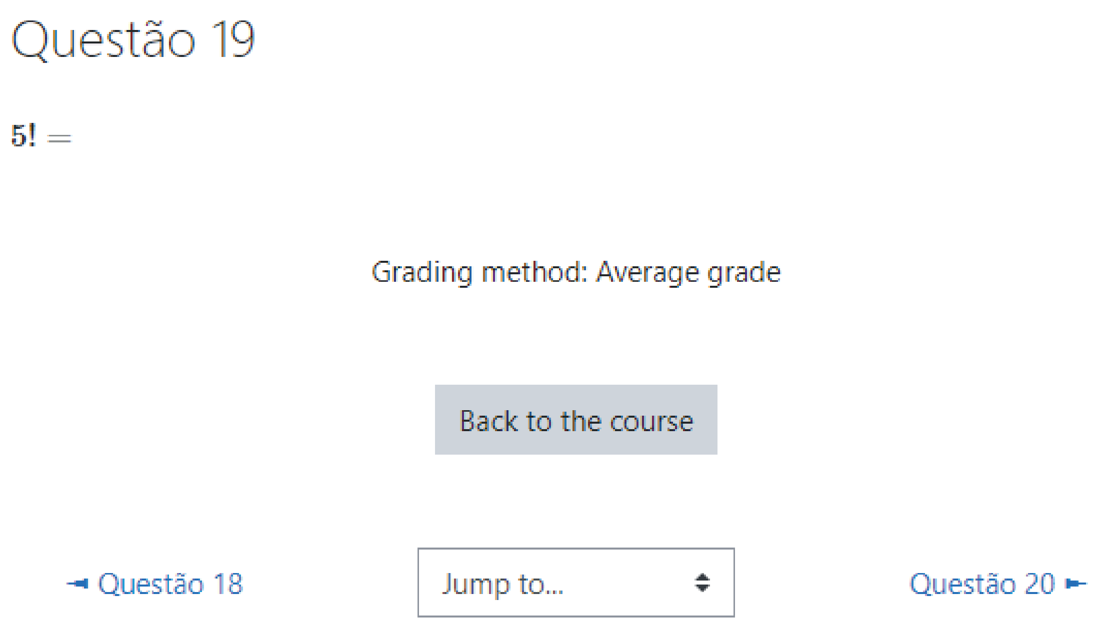


Figura 6.19: Fatorial.

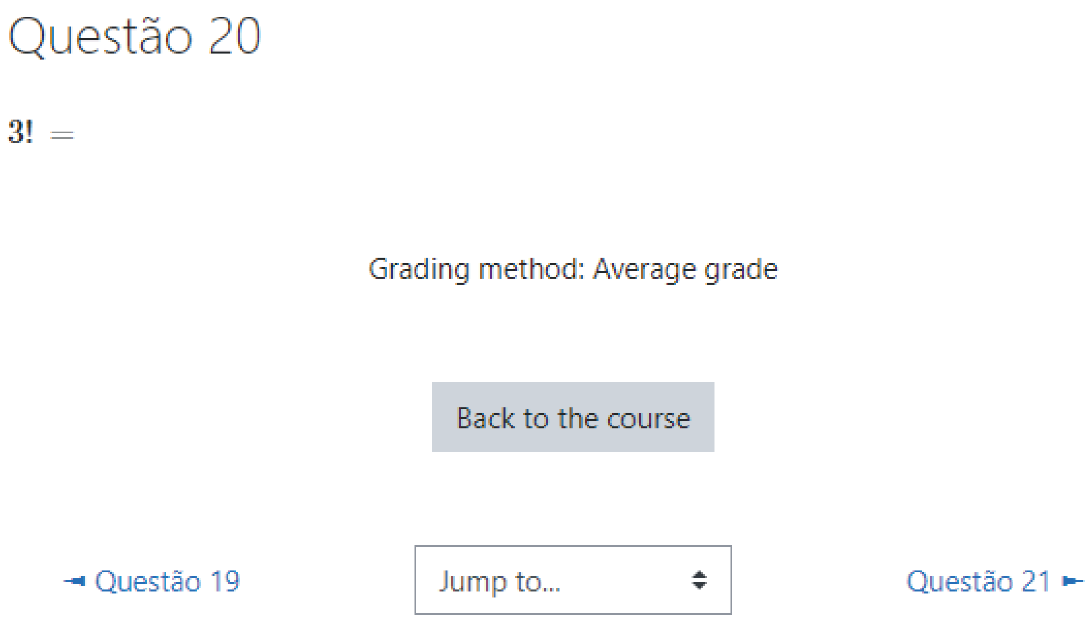


Figura 6.20: Fatorial.

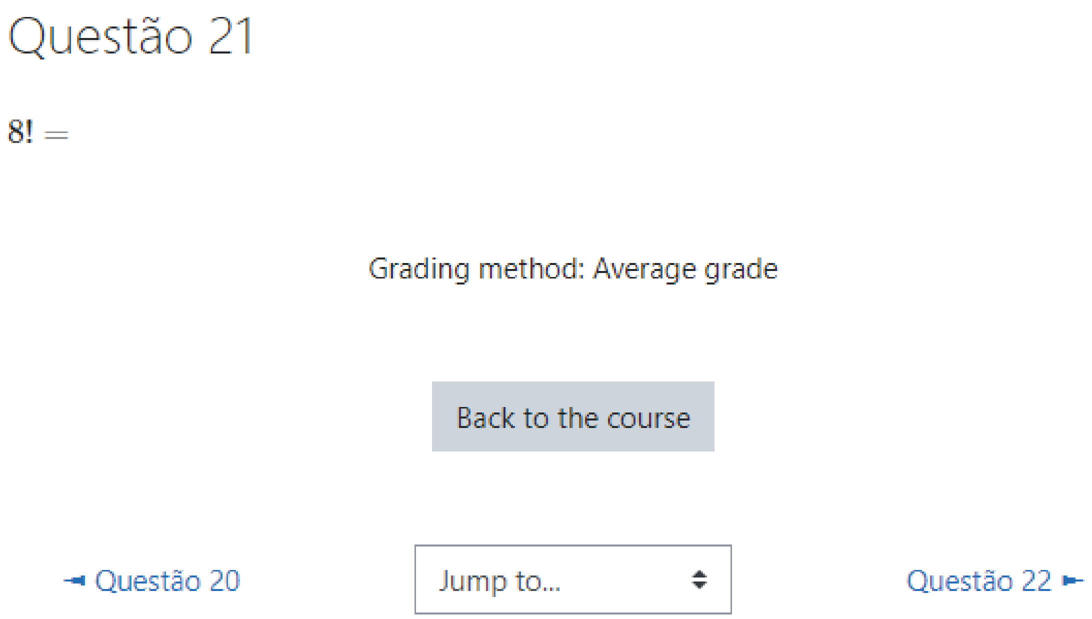


Figura 6.21: Fatorial.

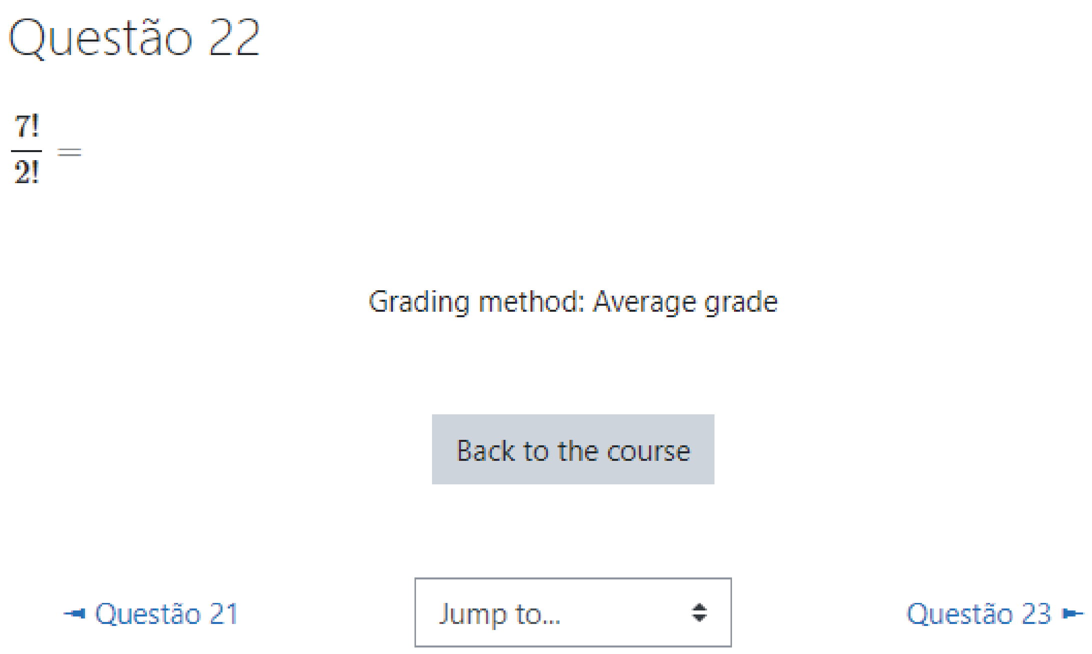


Figura 6.22: Simplificação.

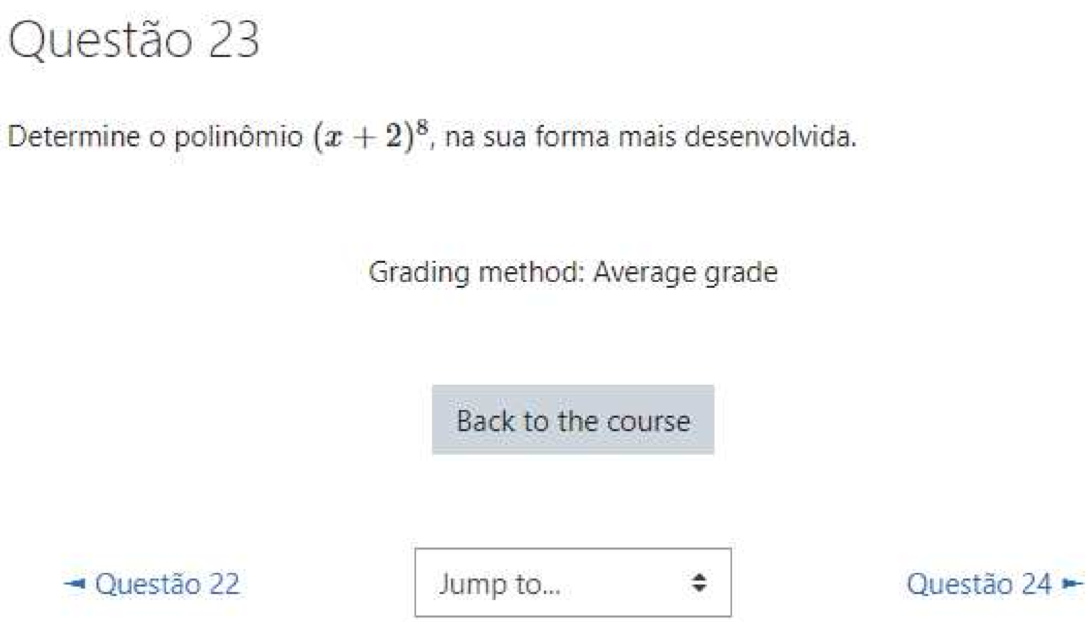


Figura 6.23: Triângulo de Pascal.

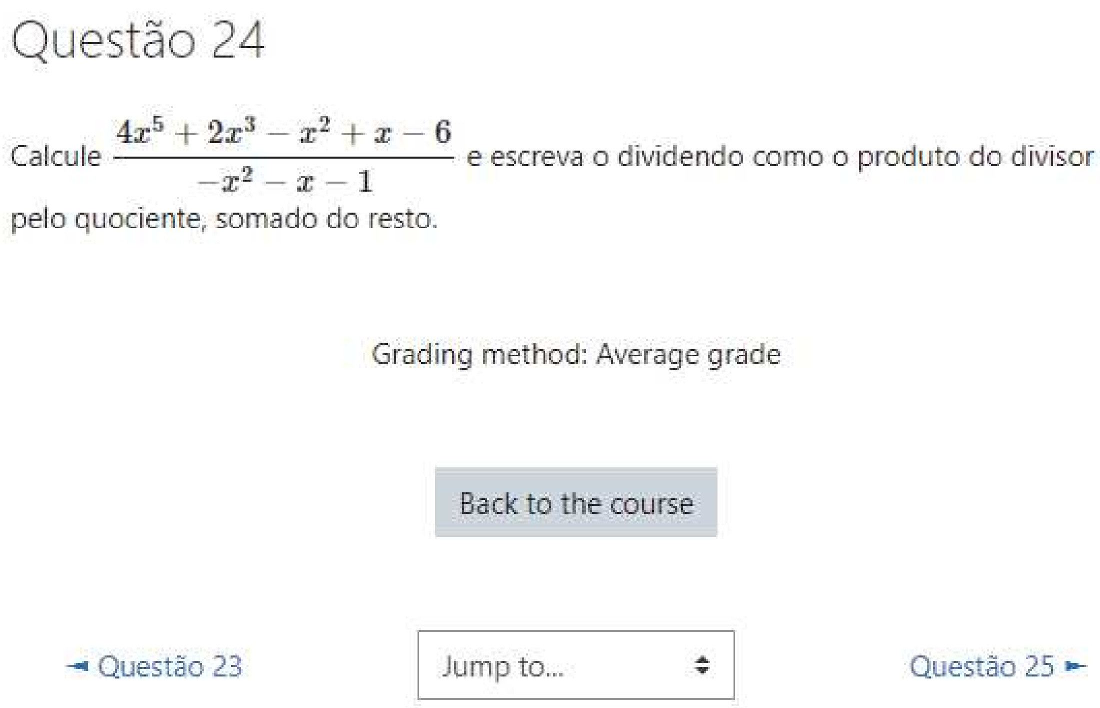


Figura 6.24: Divisão de polinômios.

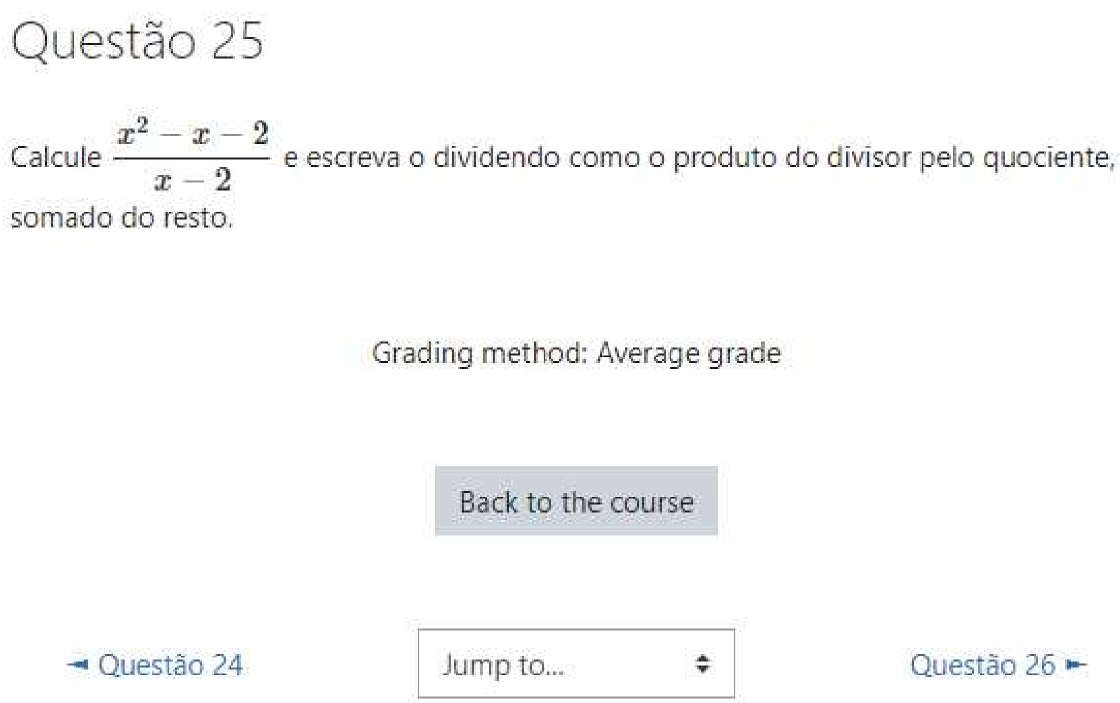


Figura 6.25: Divisão de polinômios.

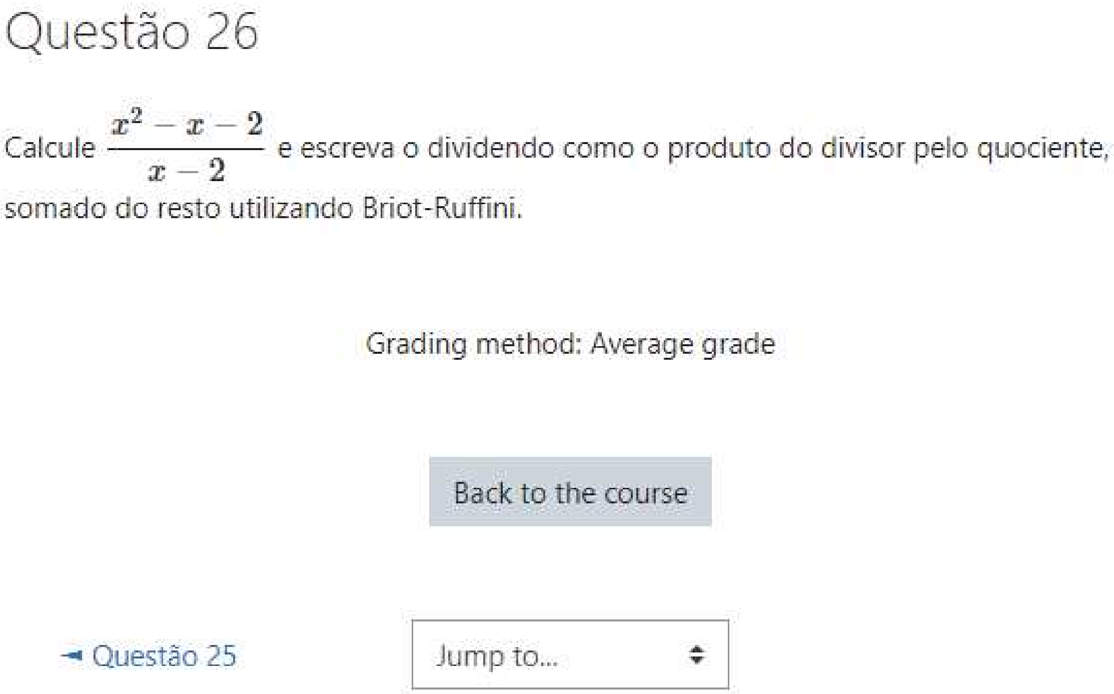


Figura 6.26: Briot-Ruffini.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a análise de erros das primeiras provas de CDI encontramos diversos grupos de erros de conteúdos da Educação Básica. Conforme Carvalho (2016): a realidade atual na universidade impõe um resgate de muitos conteúdos mal assimilados ou até a tarefa de proporcionar o primeiro contato com conteúdos que haviam sido apresentados ao aluno no Ensino Fundamental e Médio.

Além do banco de questões, há outras formas de auxílio ao aluno de CDI 1. Em questionário (A.2) aplicado aos professores da instituição que lecionam/lecionaram CDI 1, foram apontadas outras medidas utilizadas para reduzir a reprovação: curso de revisão de matemática básica (Nivelamento), listas de exercícios, aulas de revisão extra classe com o monitor, exercícios relacionados ao curso do aluno, atendimento extra-classe, prova substitutiva para alunos que não atingiram a média, trabalhos complementares à nota da avaliação, oficinas com alunos dos semestre subsequentes e da Licenciatura em Matemática, projeto de mentoria, métodos para motivar os estudos em grupo (ex: método 300), atividades como pré-cálculo (concomitante e anterior à disciplina de Cálculo), oficinas de matemática básica (presenciais e EaD), aulas de resolução de exercícios, entre outras.

Como trabalhos futuros almejamos a elaboração de um produto educacional, com vídeos apresentando a resolução de exercícios de forma incorreta que envolvam determinados tópicos de matemática básica. Na sequência pedir ao aluno para explicar "onde" e "porquê" está errado e solicitar a apresentação da solução correta. Um outro trabalho futuro que espera-se realizar é a criação de um aplicativo para celular referente ao produto educacional mencionado e disponibilizar como teste para alunos que estejam cursando a disciplina de CDI 1 pela primeira, segunda ou terceira vez, e avaliar a diferença de desempenho desses alunos. Após a elaboração destes materiais publicar um artigo científico apresentando os resultados da pesquisa e publicar o produto educacional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de cálculo: uma abordagem usando modelagem matemática. *Revista Ciência e Tecnologia*, v. 10, n. 16, 2010.

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. D. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 2, n. 4, p. 46–57, 2017.

BARDIN, L. Análise de conteúdo. tradução de luís a. *Reto e Augusto Pinheiro. 5ed. Lisboa: edições*, v. 70, 2009.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1999.

BRASIL, B. Base nacional curricular comum. *Ministério da Educação, Brasília*, 2018.

CANTARUTI, A. C. R. *Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio: uma abordagem com ênfase no comportamento das funções e sua repercussão no Ensino Superior na disciplina de Cálculo I*. Tese (Doutorado) — UFSJ, 2017.

CARVALHO, H. d. A. *A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2016.

CAVASOTTO, M. et al. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2010.

CAVASOTTO, M.; VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. *Boletim Gepem*, n. 59, p. 15–33, 2011.

CIRIBELLI, B. C. d. N. *Retenção e evasão escolares no bacharelado interdisciplinar em ciências exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. [S.l.]: Autêntica, 2013.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças/error analysis in calculus: a research to base changes. *Acta Scientiae*, v. 6, n. 1, p. 27–36, 2004.

FRAGELLI, R. *Método Trezentos*. 2013. Acesso em: 12 de nov. 2020. Disponível em: ⟨http://www.metodo300.com/⟩.

LOPES, A. J. Prefácio. In: *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. [S.l.]: Autêntica, 2013. p. 14.

MAIA, G. d. O. *Análise e modelagem da retenção nos cursos de graduação da UFJF*. [S.l.], 2015.

NASCIMENTO, J. L. do. Uma proposta metodológica para a disciplina de cálculo i. 2000.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)*, v. 9, p. 1–14, 2007.

OLIVEIRA, M. C. A. de; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de cálculo. 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição*. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

PUERTO, S. D.; MINNAARD, C. L.; SEMINARA, S. Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación*, Centro de Altos Estudios Universitarios de la Organización de Estados . . . , v. 38, 2006.

RAFAEL, R. C. *Cálculo Diferencial e Integral: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, USP, 2003.

REZENDE, W. M. *Dificuldades com o Ensino de Cálculo: Uma Cartografia Simbólica*. [S.l.]: Editora Appris, 2020.

SOUZA, J. P. d. *Análise de erros em cálculo: metodologia de investigação aplicada com alunos da UFOPA*. Tese (Doutorado) — UFOPA, 2019.

A APÊNDICE A

Questionário sobre reprovação e evasão em Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI1)

Sete questões sobre reprovação e evasão em CDI1 e medidas para diminuí-los.

* Required

0. Qual é o seu nome?

Your answer

1. Como você classifica o índice de reprovação em CDI1? *

- Muito alto
- Alto
- Médio
- Baixo
- Muito baixo

2. Há quanto tempo você ministra a disciplina de CDI1? *

- Há mais de 10 anos
- entre 8 e 10 anos
- entre 5 e 8 anos
- entre 3 e 5 anos
- menos de 3 anos

Figura A.1: Página 1 de 2 do questionário

3. Quais os motivos que levam à reprovação em CDI1, na sua opinião?

Your answer

4. Quais as medidas que você utiliza (utilizou) para reduzir o índice de reprovação nesta disciplina?

Your answer

5. Como você classifica o índice de evasão em CDI1? *

- Muito alto
- Alto
- Médio
- Baixo
- Muito baixo

6. Quais os motivos que levam à evasão em CDI1, na sua opinião?

Your answer

7. Quais as medidas que você utiliza (utilizou) para reduzir o índice de evasão nesta disciplina?

Your answer

Page 1 of 1

Submit

Never submit passwords through Google Forms.

Figura A.2: Página 2 de 2 do questionário

B ANEXO 1

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ *Campus* Toledo

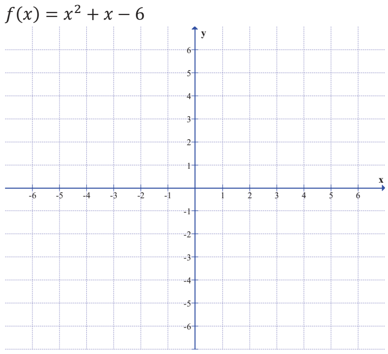
Acadêmico:____Turma Data: 09/09/19

Observações: (LEIA COM ATENÇÃO)

- Não converse durante a prova, nem mesmo com a professora;
- Utilize lápis para construir os gráficos;
- O uso de sua calculadora científica não gráfica e não programável é permitido;
- Não utilize material de apoio nem conhecimento alheio;
- A questão que não apresentar os cálculos será considerada incorreta;
- Não é permitido sair da sala durante a realização da prova;
- BOA PROVA!!!

AVALIAÇÃO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1 – PROVA 1

1. (6,0) Dadas as funções a seguir, determine: domínio, imagem, raíze(s), intercepto-y e construa o gráfico da função. Se necessário, utilize os planos cartesianos apresentados.
   a. $f(x) = x^2 + x - 6$



   b. $f(x) = -2x + 3$

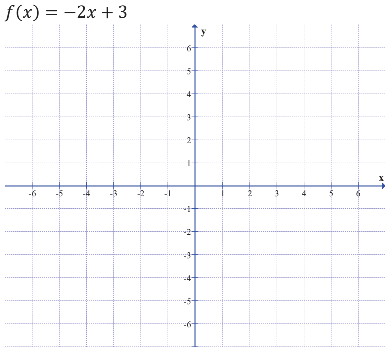
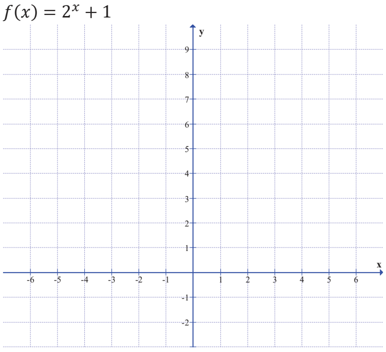
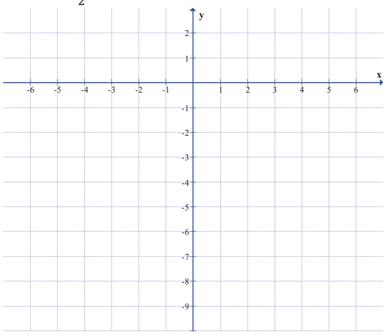


Figura B.1: Página 1 de 3 de prova

c. $f(x) = 2^x + 1$



d. $f(x) = -\frac{7}{2}$



e. $f(x) = \log_3 x$

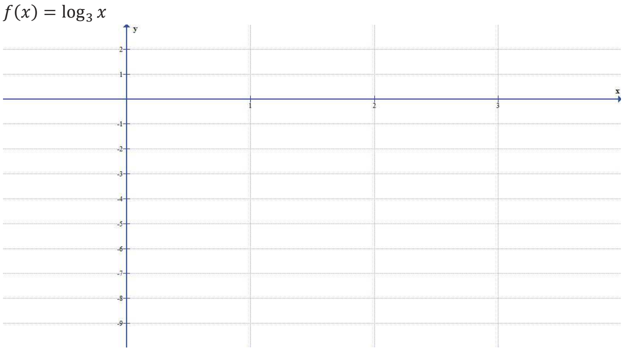
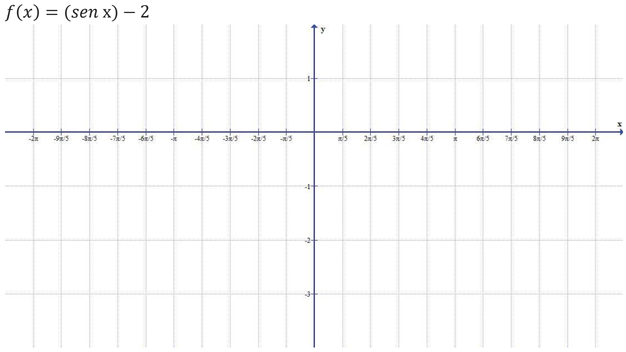


Figura B.2: Página 2 de 3 de prova

f. $f(x) = (sen\, x) - 2$



2. (2,0) Considere $f(x) = -2x + 4$ e $g(x) = \frac{x}{3} + 1$. Fazendo todos os cálculos necessários:
   a. Classifique *f* como *injetora*, *sobrejetora* e/ou *bijetora.*
   b. Determine $(gof)(x)$.
   c. Classifique *g* como *crescente* ou *decrescente.*
   d. Determine a inversa de *f.*

3. (2,0) Dados $A = \{x \in N^*/-3 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in Z/ -2 < y \leq 4\}$:
   a. Determine *A* x *B*.
   b. Determine a relação *R*, dada por: $R = \{(x, y) \in A \times B/y = x - 1\}$.
   c. Determine o domínio e a imagem de *R*.
   d. Determine a inversa da relação *R*.

Figura B.3: Página 3 de 3 de prova

C ANEXO 2

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ *Campus* Toledo

Acadêmico:____Turma Data: 03/10/19

Observações: (LEIA COM ATENÇÃO)

- Não converse durante a prova, nem mesmo com a professora;
- Utilize lápis para construir os gráficos;
- O uso de sua calculadora científica não gráfica e não programável é permitido;
- Não utilize material de apoio nem conhecimento alheio;
- A questão que não apresentar os cálculos será considerada incorreta;
- Não é permitido sair da sala durante a realização da prova;
- Boa prova!

AVALIAÇÃO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL – PROVA 2

1) (1,0) Determine a derivada das funções abaixo, UTILIZANDO A DEFINIÇÃO DE DERIVADAS:

   i. $g(x) = 6$

   ii. $f(x) = -x^2 + 7x - 2$

2) (6,0) Calcule os limites abaixo:

   i. Sendo $f(x) = \begin{cases} -x-2 & se\ x < 1 \\ 4 & se\ x = 1 \\ 3x+1 & se\ x > 1 \end{cases}$, faça o gráfico de f e determine:

      i. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

      ii. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

      iii. $\lim_{x \to 1} f(x)$

      iv. f é contínua em 1?

   ii. $\lim_{x \to 3}(-1)$

   iii. $\lim_{x \to 1}(x^2 + 4x - 12)$

   iv. $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x-2}{x^2+2}\right)$

   v. $\lim_{x \to -2}\left(\frac{x^2+x-2}{x+2}\right)$

   vi. $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{7x-3x^4}{3x^2-1+2x^4}\right)$

   vii. $\lim_{x \to -4^-}\left(\frac{5x^2+x-6}{4+x}\right)$

   viii. $\lim_{x \to 0}\left(\frac{(x+3)^3-27}{x}\right)$

Figura C.1: Página 1 de 3 de prova

3) (1,0) Dadas f, g e h funções de R $\rightarrow$ R:

   i. Calcule $g(2)$ sabendo que:

      i. f e g são contínuas no número 2;

      ii. $\lim_{x\to 2}(f+g)(x) - 3\lim_{x\to 2} g(x) = 10$;

      iii. $f(2) = 4$.

   ii. Determine as assíntotas vertical(is) e horizontal(is) do gráfico de $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$.

4) (2,0) Observe os gráficos, e determine os limites e valores pedidos:

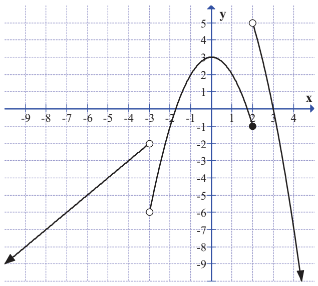


Gráfico de f

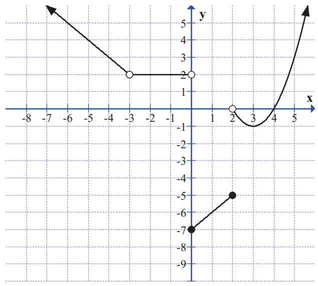


Gráfico de g

i. $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

ii. $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

iii. $\lim_{x\to -3} f(x)$

iv. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

v. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

vi. $\lim_{x\to 0} f(x)$

vii. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

viii. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

ix. $\lim_{x\to 2} f(x)$

x. $\lim_{x\to -3^+} g(x)$

xi. $\lim_{x\to -3^-} g(x)$

xii. $\lim_{x\to -3} g(x)$

xiii. $\lim_{x\to 0^-} g(x)$

xiv. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

xv. $\lim_{x\to 0} g(x)$

xvi. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

xvii. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

xviii. $\lim_{x\to 2} g(x)$

xix. $\lim_{x\to -3^-} (f+g)(x)$

xx. $\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

Figura C.2: Página 2 de 3 de prova

5) (0,5 – Questão extra) Utilizando as definições abaixo, verifique se $g(x) = \frac{3x-1}{x}$ é contínua nos intervalos (0,3) e [– 2,0]:

   i. Definição 1: Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.
   ii. Definição 2: A função *f* será **contínua a direita em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições: *f*(*a*) existe, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
   iii. Definição 3: A função *f* será **contínua a esquerda em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições: *f*(*a*) existe, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
   iv. Definição 4: Uma função será **contínua em [*a,b*]** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (*a,b*), contínua à direita em *a* e à esquerda em *b*.

Figura C.3: Página 3 de 3 de prova

D ANEXO 3

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ *Campus* Toledo

Acadêmico:____Turma Data: 03/10/19

Observações: (LEIA COM ATENÇÃO)

- Não converse durante a prova, nem mesmo com a professora;
- Utilize lápis para construir os gráficos;
- O uso de sua calculadora científica não gráfica e não programável é permitido;
- Não utilize material de apoio nem conhecimento alheio;
- A questão que não apresentar os cálculos será considerada incorreta;
- Não é permitido sair da sala durante a realização da prova;
- Boa prova!

AVALIAÇÃO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL – PROVA 2

1) (1,0) Determine a derivada das funções abaixo, UTILIZANDO A DEFINIÇÃO DE DERIVADAS:

   i. $g(x) = 7$
   ii. $f(x) = -x^2 + 5x - 8$

2) (6,0) Calcule os limites abaixo:

   i. Sendo $f(x) = \begin{cases} -x-2 & se\ x < -1 \\ 4 & se\ x = -1 \\ 3x+1 & se\ x > -1 \end{cases}$, faça o gráfico de f e determine:
      i. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
      ii. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
      iii. $\lim_{x\to -1} f(x)$
      iv. f é contínua em -1?
   ii. $\lim_{x\to 1}(-2)$
   iii. $\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x - 12)$
   iv. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)$
   v. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{-x^2+6x-8}{x-2}\right)$
   vi. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{7x-x^4}{3x^2-1+2x^4}\right)$
   vii. $\lim_{x\to -4^+}\left(\frac{5x^2+x-6}{4+x}\right)$
   viii. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+3)^3-27}{x}\right)$

Figura D.1: Página 1 de 3 de prova

3) (1,0) Dadas f, g e h funções de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i. Calcule $g(1)$ sabendo que:

   i. f e g são contínuas no número 1;

   ii. $\lim\limits_{x\to1}(f+g)(x) - 3\lim\limits_{x\to1} g(x) = 4$;

   iii. $f(1) = 3$.

ii. Determine as assíntotas vertical(is) e horizontal(is) do gráfico de $h(x)=\frac{x+3}{x-4}$.

4) (2,0) Observe os gráficos, e determine os limites e valores pedidos:

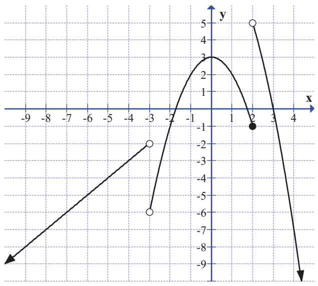


Gráfico de f

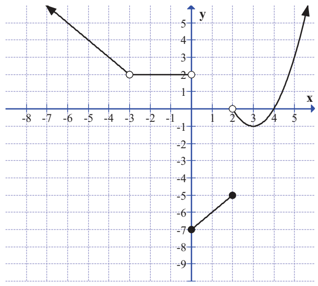


Gráfico de g

i. $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

v. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

vi. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

vii. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

viii. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

ix. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

x. $\lim\limits_{x\to-3^+} g(x)$

xi. $\lim\limits_{x\to-3^-} g(x)$

xii. $\lim\limits_{x\to-3} g(x)$

xiii. $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$

xiv. $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

xv. $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

xvi. $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

xvii. $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)$

xviii. $\lim\limits_{x\to2} g(x)$

xix. $\lim\limits_{x\to-3^-} (f+g)(x)$

xx. $\lim\limits_{x\to2^+} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

Figura D.2: Página 2 de 3 de prova

5) (0,5 – Questão extra) Utilizando as definições abaixo, verifique se $g(x) = \frac{2x-1}{x}$ é contínua nos intervalos (0,2) e [– 3,0]:

i. Definição 1: Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.
ii. Definição 2: A função *f* será **contínua a direita em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições: *f*(*a*) existe, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
iii. Definição 3: A função *f* será **contínua a esquerda em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições: *f*(*a*) existe, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe e $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
iv. Definição 4: Uma função será **contínua em [*a,b*]** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (*a,b*), contínua à direita em *a* e à esquerda em *b*.

Figura D.3: Página 3 de 3 de prova