Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JOSÉ ACÁCIO DE ARAÚJO

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: DO RIGOR MATEMÁTICO A UMA ABORDAGEM PARA PROFESSORES POLIVALENTES

Orientadora:
Profa. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Natal - RN
Novembro de 2020

JOSÉ ACÁCIO DE ARAÚJO

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: DO RIGOR MATEMÁTICO A UMA ABORDAGEM PARA PROFESSORES POLIVALENTES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes.

Natal - RN

Novembro de 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Araújo, José Acácio de.
Sistema de numeração decimal e operações fundamentais: do rigor matemático a uma abordagem para professores polivalentes / José Acácio de Araújo. - 2020.
95f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, 2020.
Orientadora: Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes.

1. Matemática - Dissertação. 2. Formação continuada de professores - Dissertação. 3. Números naturais - Dissertação. 4. Operações fundamentais - Dissertação. 5. UBP - Dissertação. 6. Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental - Dissertação. I. Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: DO RIGOR MATEMÁTICO A UMA ABORDAGEM PARA PROFESSORES POLIVALENTES

José Acácio de Araújo

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Defesa de dissertação em: 20 de novembro de 2020

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Márcia Maria Alves de Assis (Membro Externo)
UERN

Prof. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos (Membro Interno)
UFRN

Profª. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes (Presidente)
UFRN

Dedico este trabalho a todos os profissionais da educação de nosso país, que mesmo diante de tantas dificuldades, desempenham com afinco uma atividade tão importante no desenvolvimento de uma nação e na construção de uma sociedade mais digna e igualitária.

Agradecimentos

À Deus, por me proporcionar a oportunidade de estar aqui e iluminar os caminhos para que eu rompesse as barreiras que encontrei.

Ao meu pai Francisco Gomes (in memória), que tanto batalhou sob o Sol escaldante do Sertão, para dá o sustento necessário à família.

À minha mãe Maria Diva que, mesmo com todas as dificuldades, juntamente com meu pai, me deu oportunidade de estudar.

Aos meus irmãos, em especial à minha irmã Ana Maria, que tanto ajudou aos meus pais na minha criação.

À minha esposa Juliana, que entendeu os momentos em que precisei ficar ausente durante esta jornada.

À minha filha Ana Lis, que mesmo inconscientemente me transmitiu a energia necessária para que eu fosse até o fim.

Aos meus colegas de PROFMAT, pelas amizades construídas e as contribuições nos estudos.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFRN, pelos ensinamentos necessários à conclusão do curso.

À banca examinadora, pela disposição em examinar esta dissertação.

À minha orientadora Gabriela, pela paciência e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de trabalho e amigos, que de alguma forma, direta ou indiretamente contribuíram para esta conquista.

Quem tem medo das suas lágrimas
nunca ensinará seus filhos a chorar.
Quem tem medo das suas falhas nunca
ensinará seus alunos a assumí-las.
Augusto Cury

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal elaborar um material didático abordando os significados conceituais das operações fundamentais com os números naturais, direcionado aos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Estes professores, em sua grande maioria, licenciados em Pedagogia, não recebem uma formação suficiente em Matemática, visto que, em geral, os cursos de Pedagogia dão prioridades às questões metodológicas, em detrimento dos conteúdos específicos das disciplinas. Nossa pesquisa se fundamentou, principalmente, nos estudos realizados por Curi (2004) e em uma pesquisa recente que fizemos nas grades curriculares de cursos de Pedagogia em algumas universidades públicas de vários estados brasileiros, a fim de detectar as disciplinas destinadas ao estudo da Matemática. Abordaremos o conteúdo de Números do ponto de vista do rigor matemático e também por meio de uma linguagem mais acessível para não matemáticos. Por fim, como Produto Educacional, resultante das nossas pesquisas e reflexões, elaboramos um livreto para ser utilizado em um minicurso de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, explorando o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com os números naturais. Para isso, utilizamos as Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), atividade proposta por Miguel e Mendes (2010), que resgata práticas histórico-sociais, e a partir delas são elaborados questionamentos de cunho investigativo e reflexivo.

Palavras-chave Formação continuada de professores. Números Naturais. Operações fundamentais. UBP. Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Abstract

The present work has as main objective to develop a didactic material approaching the conceptual meanings of the fundamental operations with the natural numbers, aimed to the teachers who teach Mathematics in the initial years of the Elementary School. The majority of them, who have a degree in Pedagogy, do not received sufficient nurture in Mathematics, its because the Pedagogy courses give priority to methodological issues, to the detriment of the specific contents of the disciplines. Our research was based, mainly, on the studies carried out by Curi (2004) and we did a recent research in the educational program of Pedagogy courses in some public universities in several Brazilian states, in order to detect the subjects destined to the study of Math. We will approach the content of Numbers from the point of view of mathematical accuracy and also over a more accessible language for non-mathematicians. Finally, as an Educational Product, resulting from our research and reflections, we prepared a handout to be used in a minicourse of continuing education for teachers in the Elementary School, exploring the decimal numbering system and the essential operations with natural numbers. For this, we used the Basic Problematization Units - BPU (UBPs in Portuguese), a task proposed by Miguel and Mendes (2010), which rescues historical and social practices, and from them investigative and reflective questions are elaborated.

Keywords: Continued teacher nurture. Natural Numbers. Basic Operations. UBP. Mathematics in the initial years of Elementary Education.

Sumário

1 Introdução

No ano de 2001, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó (CERES) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), na cidade de Caicó, região do Seridó do Rio Grande do Norte, lugar onde nasci, cresci e ainda resido. A escolha do curso não foi porque sonhava em ser professor, até então nunca havia pensado nisso, mas por influência de amigos que já cursavam. Na verdade, eu não sabia ainda ao certo que profissão seguir, pensava em Engenharia, mas esbarrava nas dificuldades em ir para a capital. Naquele momento, queria apenas um curso superior e ser aprovado em um concurso público. Ao longo do curso, fui adquirindo o gosto pela Matemática e resolvi dar aulas particulares. No último período do curso, me deparei com o Estágio Supervisionado, o nervosismo e a ansiedade em ministrar aulas de Matemática foram inevitáveis. Realizei o estágio na Escola Estadual Professora Calpúrnia de Amorim em Caicó, mesma escola em que havia sido aluno no Ensino Médio. Foi uma experiência incrível, mas ainda não tinha a certeza de seguir a carreira docente.

Em 2004, a Secretaria de Educação do Rio Grande do Norte abriu concurso público para professor, ainda não havia concluído o curso, mas me inscrevi. Por sorte, a prova foi adiada, sendo realizado no final de 2005. Já com o diploma em mãos, fui aprovado e convocado de imediato, no início de 2006. Fui lecionar Matemática no Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, em uma escola onde havia estudado parte do Ensino Fundamental. Foi desafiador, era uma escola de periferia, que já estava em processo de declínio, com a maioria dos alunos em situação de vulnerabilidade social. Mesmo com todas as dificuldades, fui tomando gosto pela docência, mas meu objetivo mesmo era lecionar no Ensino Médio. Consegui logo no ano seguinte a transferência para a escola em que havia feito o Estágio Supervisionado. Dei aulas de Física, Química, e, aos poucos, fui conquistando meu espaço como professor de Matemática. Em 2012, fui Presidente do Conselho Escolar. Ganhei a confiança de professores e funcionários e fui indicado para concorrer ao cargo de diretor da escola, aceitei mais esse desafio e fui eleito para dirigir a escola no biênio 2013-2014.Mesmo a gestão sendo uma experiência desafiadora, gratificante e enriquecedora, resolvi voltar para a sala de aula, lugar que me identifico.

Tive também algumas experiências na Educação Superior: fui Professor de Matemática Básica nos cursos de Administração e Ciências Contábeis da Faculdade Católica Santa Terezinha, em Caicó. Atuei na Secretaria de Educação à Distância (SEDIS) da UFRN como Tutor Presencial do Curso de Licenciatura em Matemática EaD, no Polo de Currais Novos, de 2005 à 2011, e como professor de Ensino de Matemática I e II no Curso de Pedagogia EaD no ano de 2015. Fui também Tutor à Distância do Curso de Licenciatura em Matemática EaD no ano de 2018.

Minha última experiência fora da rede estadual foi como professor substituto de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia (IFRN), Campus Currais Novos, de junho de 2016 à junho de 2018, onde as experiências adquiridas enriqueceram consideravelmente minha experiência profissional.

O sonho em fazer uma mestrado me acompanha desde o início de minha atuação como docente, até que em 2011 surgiu o edital do PROFMAT com vagas para o CERES/Caicó. Inscrevi-me e fui aprovado. Cursei o primeiro ano conciliando com cinquenta aulas semanais. No segundo ano, fui para a direção da escola, mas a esperança de ter mais tempo para dedicação aos estudos não foi concretizada. Acabei sendo desligado do curso por causa da reprovação no Exame Nacional de Qualificação (ENQ). Nos anos seguintes, não foi mais ofertada turma em Caicó, o que me deixou desestimulado para fazer o exame de seleção novamente. Em 2015, resolvi fazer seleção para a Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA), em Mossoró, também no Rio Grande do Norte, mas não obtive êxito. Em 2017, consegui a aprovação para ingressar novamente no PROFMAT na UFRN em Natal, mesmo ano em que nasceu minha filha Ana Lis. Em 2018, começaram os desafios, o maior deles era a viagem de mais de 500 km (ida e volta) toda sexta-feira. As noites de sexta eram dentro de um ônibus, chegando em casa já na madrugada do sábado. Era cansativo, tinha que me virar sozinho nos estudos durante a semana, já que não tinha nenhum colega de Caicó. Até que veio a reprovação em Aritmética, tornando as coisas muito mais difíceis. Vi colegas desistindo, mas jamais pensei nisso. Chegou um momento em que as viagens viraram um tormento, a ponto de não conseguir dormir bem na véspera. Mas junto às dificuldades, também eram grandes a vontade de concluir o curso e de que minha filha tivesse um pai mestre. O apoio de professores me ajudou a superar essas dificuldades e conseguir a aprovação no Exame Nacional de Qualificação (ENQ). A partir de então, desafio era outro, pesquisar e escrever a dissertação.

Ao longo de 14 anos de experiência docente no Ensino Médio da rede pública, tenho observado as dificuldades dos alunos nos conteúdos básicos de Matemática, sempre indagando as razões que causam tantas lacunas na aprendizagem. Muitas vezes questionamos o motivo pelos quais grande parte dos alunos não conseguiram absorver noções básicas no Ensino Fundamental, até mesmo nas operações fundamentais com números. Ao lecionar Ensino de Matemática I e II no curso de Pedagogia EaD da UFRN em 2015, percebi que essa também era uma dificuldade de grande parte dos discentes, muitos já professores há algum tempo, que ainda não tinham curso superior ou estavam fazendo uma segunda licenciatura. Tive alunos de várias regiões do Rio Grande do Norte, no entanto, as dificuldades eram basicamente as mesmas, destacando as operações fundamentais com números naturais. Alguns não sabiam sequer aplicar os algoritmos da multiplicação e da divisão. E quando aplicavam corretamente não sabiam justificá-los.

A experiência com um curso de Pedagogia só ratificou o que eu já imaginava, a falta de uma formação adequada em Matemática dos professores polivalentes. São denominados polivalentes os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que ensinam todas as disciplinas, e em sua grande maioria são pedagogos. Os cursos de Pedagogia, em geral dão ênfase às metodologias em detrimento do conhecimento teórico das disciplinas específicas. E isso acaba refletindo diretamente na aprendizagem dos alunos. Normalmente, os professores dos anos iniciais ensinam as quatro operações fundamentais de forma mecânica, apenas descrevendo os algoritmos, sem saber a teoria que está por trás, e que facilitaria um ensino mais significativo.

Partindo do pressuposto de que o professor deve saber mais do que vai ensinar, propomos a elaboração de um material didático focado principalmente nas operações fundamentais com os números naturais, com uma linguagem simplificada para professores não-matemáticos que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que possa ser usado na formação continuada desses professores.

O material será em formato de livreto, intitulado Sistema de numeração decimal: História e Operações Fundamentais. Pretendemos utilizá-lo, em momento oportuno, para ministrar um minicurso na cidade de Caicó. Nossa intenção é convidar professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas de nossa cidade.

A região do Seridó sempre se destacou no cenário educacional do Rio Grande do Norte. Apesar das constantes secas e do sol escaldante que irradia sobre nossas terras, somos um povo que extraímos das dificuldades uma motivação para alcançar objetivos e realizar sonhos. O empenho dos profissionais da educação de nossa região em transformar vidas por meio da educação, me fez pensar em deixar minha contribuição para uma melhoria no processo de ensino e aprendizagem.

1.1 Justificativa e Problematização

Ao longo de toda a nossa trajetória de mais de uma década de docência em Matemática no Ensino Médio, sempre questionamos os motivos pelos quais a maioria dos alunos que chegam nesse nível de ensino apresentam uma grande deficiência nos conteúdos básicos de Matemática, até mesmo com relação às operações fundamentais, apresentando dificuldades em realizar somas, subtrações, multiplicações e divisões com números naturais, que deveriam ter sido sanadas no Ensino Fundamental. Geralmente, colocamos a culpa na falta de interesse dos alunos, o que não deixa de ser uma das causas. No entanto, analisando mais profundamente a nossa estrutura educacional, vimos que os alunos, em grande parte, são afetados por um sistema de ensino que deixa uma lacuna entre a formação de professores e a prática docente. Os cursos de licenciatura, de um modo geral, são distantes da árdua realidade da sala de aula das escolas da Educação Básica.

Historicamente, os alunos que não simpatizam ou têm dificuldades em ciências exatas, mais especificamente em Matemática, tendem a ingressar em um curso superior na área de humanas, incluindo o curso de Pedagogia, que forma professores polivalentes, aptos a lecionarem todas as disciplinas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O problema recorrente é que esse curso não oferece uma formação suficiente em Matemática para um futuro professor, causando uma falsa sensação de que para ensinar nas séries iniciais não precisa saber nem gostar de Matemática, o que provoca na prática um entrave no processo de ensino-aprendizagem, visto que a maioria dos professores não dominam o elementar, refletindo nos níveis de ensino posteriores.

Diante da necessidade de suprir essa insuficiente formação em Matemática, propomos neste trabalho elaborar um material didático que possa ser usado em uma formação continuada, tendo como público alvo professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que desejem um aprofundamento nos conhecimentos matemáticos necessários para desenvolver metodologias que realmente proporcionem uma aprendizagem significativa. Para isso, escolhemos o conteúdo de Números, exploraremos uma das temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mais especificamente o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com números naturais, por meio de uma linguagem simplificada para não-matemáticos. Tal escolha se deu pelo fato de considerarmos primordial que o aluno aprenda logo nas séries iniciais não só a operar os algoritmos usuais, como também o significado de cada passo realizado. E isso só será possível com um professor que compreenda bem o assunto.

Não queremos aqui, que o professor polivalente seja um especialista em teoria dos números, conhecendo teoremas e demonstrações. O que estamos propondo é oferecer-lhe um conhecimento que vai além de sua formação pedagógica inicial, que tanto enfatiza as questões metodológicas.

1.2 Questão de Pesquisa

As operações numéricas são objeto de estudo de uma parte da Matemática chamada Aritmética. Sua teoria é desenvolvida através de axiomas, teoremas e corolários, com uma linguagem rigorosa que exige conhecimentos e habilidades no campo da Matemática. Nossa questão é como ensinar esses conceitos para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental com uma linguagem mais simplificada, levando em consideração aspectos históricos e culturais relativos aos números naturais. A BNCC traz como competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental:

> **Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos**, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 267)

Entender os processos históricos e sociais que a Matemática passou ao longo do tempo, torna o processo de ensino e aprendizagem mais prazeroso, dando mais sentido aos conteúdos escolares.

Para atender ao nosso questionamento iremos elaborar um livreto como sugestão de material didático para ser utilizado em minicurso de formação continuada de professores de Matemática dos anos inicias. Iremos utilizar as Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), por meio de uma sequência de problemas baseados em práticas sociais encontradas na história, faremos um estudo sobre o sistema de numeração decimal desde sua invenção até a sua disseminação pelo Ocidente, e consequente utilização atual em quase todo o mundo. Faremos também uma abordagem conceitual sobre os algoritmos das operações fundamentais com os números naturais, comparando métodos utilizados por alguns povos da antiguidade com os usados atualmente.

1.3 Objetivo Geral e Objetivos Específicos

1.3.1 Objetivo Geral

Elaborar um material didático abordando os significados conceituais das operações fundamentais com os números naturais, direcionado aos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Conhecer a legislação que regulamenta a formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil;
- Discutir a formação matemática dos professores polivalentes no Brasil, em especial na cidade de Caicó no Rio Grande do Norte;
- Analisar algumas matrizes curriculares de cursos de Pedagogia oferecidos no Brasil, identificando as disciplinas relacionadas aos conhecimentos matemáticos;
- Examinar a BNCC dos anos iniciais do Ensino Fundamental na parte de Matemática referente ao ensino das operações fundamentais com números naturais;
- Abordar o conteúdo em questão utilizando o rigor matemático, a partir de uma introdução ao sistema de numeração decimal até os principais axiomas e teoremas que desencadeiam o estudo dos algoritmos das operações fundamentais com os números naturais;
- Abordar o conteúdo em questão por meio de uma linguagem mais simplificada para professores que ensinam Matemática, mas não tem formação específica em Matemática;
- Apresentar e discutir as Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), que serão utilizadas na elaboração do produto educacional;

1.4 Metodologia

Analisamos documentos referentes à formação matemática do professor polivalente nos cursos de Pedagogia, como a legislação brasileira que regulamenta essa formação e grades curriculares de alguns desses cursos em todas as regiões do país, culminando no Rio Grande do Norte, que é o nosso Estado, mais especificamente na cidade de Caicó, situada na região do Seridó, que é onde residimos e pretendemos colocar em prática o material que iremos elaborar.

Nossa pesquisa foi essencialmente bibliográfica e documental. Analisamos documentos oficiais sobre a política de formação de professores polivalentes no Brasil, disciplinas relacionadas à Matemática de algumas matrizes curriculares de cursos de Pedagogia de instituições públicas de alguns estados brasileiros. Analisamos também a BNCC, na parte relacionada ao Ensino de Matemática nas séries iniciais, na unidade temática Números.

Discorremos o conteúdo de Números Naturais do ponto de vista do rigor matemático e também com uma abordagem mais simplificada para professores que não têm formação específica em Matemática. Ao final, desenvolvemos um produto educacional, que servirá de apoio para uma formação continuada de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. Usando Unidades Básicas de Problematização (UBPs), abordamos as operações fundamentais de um modo mais profundo, dando um enfoque conceitual aos professores, necessários à sua prática docente. Para elaboração das UBPs nos baseamos principalmente nos estudos de Miguel e Mendes (2010), que sugerem a criação de atividades a partir de práticas sociais encontradas na história.

1.5 Estrutura da Dissertação

Iniciamos a dissertação com um memorial sobre nossa trajetória acadêmica e profissional, da graduação em Matemática, relatando sobre nossa experiência como docente da Educação Básica da rede pública do Rio Grande do Norte, e outras experiências em nível superior, discorrendo e justificando os motivos da escolha do tema a ser trabalhado. O capítulo 1 se complementa com a justificativa e problematização, a questão da pesquisa, os objetivos e a metodologia utilizada.

O capítulo 2 trata da legislação sobre a formação inicial dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, análises de matrizes curriculares e ementas de disciplinas relacionadas à Matemática de cursos de Pedagogia em alguns estados brasileiros, culminando na cidade de Caicó no Rio Grande do Norte. Citamos pesquisas já realizadas por outros autores que tinham o mesmo objetivo.

No capítulo 3 explicitamos os conteúdos que o professor polivalente precisa dominar para ensinar Matemática nos anos iniciais, baseado nas orientações da BNCC, bem como a necessidade de formação continuada para suprir a deficiência deixada pelos cursos de Pedagogia. Justificamos a escolha do conteúdo para ser trabalhado no produto educacional e sua abordagem. Apresentamos o conteúdo com o rigor matemático, explorando os axiomas e teoremas e, em seguida, abordamos o conteúdo com uma linguagem mais adequada e simplificada para não-matemáticos.

O capítulo 4 discute a elaboração do produto educacional, onde trabalhamos as operações fundamentais com os números naturais por meio de UBPs (Unidades Básicas Problematizadoras), fundamentamos e justificamos tal escolha.

No capítulo 5 expomos nossas conclusões sobre as discussões e propostas levantadas durante a escrita do trabalho. Em seguida citamos todas as referências utilizadas.

O apêndice A mostra as ementas de todas as disciplinas relacionadas à Matemática de cursos de Pedagogia, que apresentamos no capítulo 2.

O apêndice B apresenta a proposta de produto educacional em formato de livreto que será dividido em duas UBPs. A primeira intitulada, o sistema de numeração indo-arábico e sua disseminação na Europa Ocidental, e a segunda, As operações aritméticas fundamentais e os povos antigos. A partir de problematizações elaboramos questionamentos que permitem uma investigação sobre os conteúdos abordados.

2 A Formação Inicial dos Pedagogos e a Matemática

De acordo com as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Pedagogia, instituída pela Resolução CNE/CP Nº 1, de 15 de maio de 2006, o egresso do curso de Pedagogia está apto a ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano. O documento institui uma carga horária mínima de 3200 horas para o curso, mas deixa a cargo de cada instituição, o tempo destinado ao estudo dos conteúdos específicos das disciplinas citadas acima.

Esses futuros professores são denominados no meio educacional de polivalentes, os quais, de acordo com Lima (2007), podem ser compreendido como sujeitos capazes de apropriar-se de conhecimentos básicos das diferentes áreas que compõem a base comum do currículo do Ensino Fundamental e de articulá-los, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar.

No entanto, os cursos de formação de professores polivalentes, em sua maioria, dão prioridade às discussões metodológicas, em detrimento dos conteúdos. Para tal conclusão, nos baseamos nos estudos de Curi (2004):

> No campo curricular: são frequentemente desconsiderados os conhecimentos do objeto de ensino. Nem sempre há clareza sobre quais são os conteúdos que o professor em formação deve aprender, em razão de precisar saber mais do que vai ensinar, e sobre quais os conteúdos que serão objetos de atividade de ensino". Nos cursos atuais de formação de professores polivalentes geralmente, salvo raras exceções, dá-se mais ênfase ao "saber ensinar" os conteúdos, sem preocupação com a sua ampliação e aprofundamento; os cursos de formação de professores polivalentes geralmente caracterizam-se por não tratar ou tratar apenas superficialmente dos conteúdos sobre os objetos de ensino com os quais o futuro professor irá trabalhar.(CURI, 2004, p. 20)

Com relação à Matemática, verificamos que a formação do estudante de Pedagogia não é suficiente para atender à demanda de um futuro professor. Para constatar tal afirmação, analisamos as matrizes curriculares de cursos de Pedagogia de 18 universidades públicas de todas as regiões do Brasil, e pudemos observar que a importância dada aos conteúdos matemáticos é mínima. Na maioria delas figura uma ou duas disciplinas associadas à metodologia ou ao ensino da Matemática, priorizando o como ensinar, deixando entender que o professor dos anos iniciais não precisa dominar o conteúdo para lecionar, ratificando o que Curi (2004) já indicava:

> (...) ficou bastante evidente o predomínio de uma formação generalista, baseada nos Fundamentos da Educação, que não considera a necessidade de construir conhecimentos sobre a disciplina para ensiná-los, deixando transparecer uma concepção que o professor polivalente não precisa "saber Matemática", basta saber como ensiná-la. (CURI, 2004, p. 167)

A falta de atenção aos conhecimentos necessários para ensinar Matemática por parte dos cursos de Pedagogia, com poucas disciplinas, ou em alguns casos, a ausência de disciplinas que possam dar uma formação teórica e conceitual dos conteúdos, causa um reflexo na qualidade do ensino-aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental e:

> Em resultado disso, os futuros professores têm pouca oportunidade de construir competências que lhes permitam analisar processos de aprendizagem dos alunos, suas dificuldades, propor e analisar situações didáticas, avaliar o desempenho dos alunos e sua própria prática docente. (CURI, 2004, p. 77)

Não estamos menosprezando as disciplinas generalistas que são ensinadas nos cursos de Pedagogia, todas têm sua importância na formação do professor. O que estamos indagando é a pouca atenção que os currículos desses cursos dão quanto aos conteúdos que o futuro professor precisa dominar nas diferentes áreas que irão ensinar, e aqui tratamos mais especificamente da Matemática, que já é uma disciplina considerada por muitos como um empecilho nos estudos, e historicamente vem sendo deixada em segundo plano na formação dos docentes que irão trabalhar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma fase muito importante na formação do cidadão.

2.1 Os Cursos de Pedagogia no Brasil

A partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 5.692/71, o curso de Pedagogia passou a habilitar professores para as séries iniciais do 1º grau (Hoje Ensino Fundamental). No curso havia um núcleo comum e uma complementação para os interessados na habilitação ao Magistério, com disciplinas relacionadas à Estrutura, Funcionamento, Metodologia e Prática de Ensino na Escola de 1º grau.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96 institui em seu Art. 62 a formação de professores da Educação Básica em nível superior, em curso de licenciatura, no entanto, admite como formação mínima para lecionar na Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental a modalidade Normal em nível médio. A mesma lei em seu Art. 87 institui a Década da Educação, a iniciar-se um ano após a publicação desta, e no §4º do mesmo artigo estabelece essa década como limite para que os sistemas de ensino admitissem somente professores habilitados em nível superior ou formados por treinamento em serviço.

A partir daí aumentou significativamente a demanda pelo curso de Pedagogia, seja por futuros profissionais ou por professores com formação em nível médio que desejavam uma formação em nível superior. Em 2006, o Conselho Nacional de Educação (CNE), por meio da Resolução CNE/CP Nº 1, instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Licenciatura em Pedagogia, centralizando-o na formação de professores da Educação Infantil e os anos iniciais do Ensino Fundamental, estabelecendo normas e critérios para a organização curricular. Análogo ao que já acontecia, o curso continua habilitando professores a ensinar as diversas disciplinas que compõem a base curricular dos anos iniciais, conforme consta no seu Art. 5º, § VI. No entanto, pesquisas como, por exemplo, as desenvolvidas por Curi (2004), Correia(2008), Gualberto e Almeida (2009) e Pimenta *et. al.* (2017), mostram a existência de problemas na formação desses professores, principalmente com relação aos conhecimentos matemáticos e a carga horária destinada às disciplinas relacionadas à Matemática.

Curi (2004) analisou as matrizes curriculares, ementas de disciplinas da área de Matemática de 36 cursos de Pedagogia, buscando elementos que permitissem refletir sobre o conhecimento para ensinar Matemática desenvolvido nesses cursos, e constatou a pouca presença de conteúdos matemáticos e de suas didáticas nos currículos desses cursos.

Para Correia (2008), a formação do professor polivalente contempla uma ampla abordagem metodológica para o ensino de Matemática em detrimento da abordagem dos conteúdos a serem ensinados. Para Gualberto e Almeida (2009):

> Uma análise mais adequada na formação do professor deve envolver outros meios de coleta de dados, como entrevistas com os professores e alunos dos cursos de Pedagogia, a fim de verificar quais conceitos e competências são efetivamente tratados no cotidiano das universidades. (GUALBERTO; ALMEIDA, 2004, p. 307)

Pimenta *et. al.* (2017) discutem a formação de professores polivalentes para a Educação Infantil e para os anos iniciais do Ensino Fundamental oferecida nos cursos de Pedagogia, a partir dos dados de pesquisa realizada em instituições públicas e privadas do Estado de São Paulo, no período de 2012 a 2013, e concluem que:

> As matrizes curriculares dos cursos de pedagogia refletem os mesmos problemas identificados nas DCN, ou seja, a indefinição do campo pedagógico e a dispersão do objeto da pedagogia e da atuação profissional docente. Consequentemente, a maioria desses cursos não dão conta de formar nem o pedagogo, nem, tampouco, o professor para os anos iniciais da educação básica e para a educação infantil. (PIMENTA *et. al.*, 2017, p. 14)

Para ratificar as informações dos pesquisadores citados, iremos agora detalhar o resultado de uma pesquisa recente que fizemos, no primeiro semestre de 2020, nas matrizes curriculares de cursos de Pedagogia de 18 universidades públicas de todas as regiões do Brasil, sendo uma por estado, com o objetivo de identificar as disciplinas relacionadas à Matemática existentes nessas matrizes, com suas respectivas cargas horárias. Pesquisamos em sites de busca e organizamos as informações obtidas em dois quadros, onde o quadro 2.1 contém cursos de Pedagogia em estados das regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste e Distrito Federal e o quadro 2.2 apresenta cursos de estados das regiões Norte e Nordeste.

Quadro 2.1: Disciplinas relacionadas à Matemática de alguns cursos de Pedagogia das regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste e Distrito Federal.

INSTITUIÇÃO - CIDADE SEDE	DISCIPLINAS - CARGA HORÁRIA
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Porto Alegre	• Educação Matemática I – 75h • Educação Matemática I – 45h
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - Florianópoles	• Educação Matemática e Infância – 72h • Fundamentos e Metodologia da Matemática - 72h
Universidade Federal do Paraná (UFPR) - Curitiba	• Metodologia do Ensino de Matemática – 30h
Universidade de São Paulo (USP) - São Paulo	• Fundamentos Teórico-metodológicos do Ensino de Matemática – 30h • Projeto Integrado de Estágio em Docência em Matemática e Ciências – 90h
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Rio de janeiro	• Didática da Matemática - 60h
Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) - Cuiabá	• Fundamentos e Metodologia do Ensino de Matemática I – 75h • Fundamentos e Metodologia do Ensino de Matemática II - 75h
Universidade Federal de Tocantins (UFT) - Palmas	• Fundamentos e Metodologia do Ensino da Matemática - 60h
Universidade de Brasília (UNB) - Brasília	• Educação Matemática I - 60h

Fonte: Sites das Universidades[1]

[1] Site da UFRGS. Disponível em https://www.ufrgs.br/pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UFSC. Disponível em https://pedagogia.paginas.ufsc.br/. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UFPR. Disponível em http://www.pedagogia.ufpr.br/. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da USP. Disponível em https://www5.usp.br/ensino/graduacao/cursos-oferecidos/pedagogia. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UFRJ. Disponível em http://www.educacao.ufrj.br/graduacao/coordenacao-de-pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UFMT. Disponível em https://www1.ufmt.br/ufmt/un/secao/2447/PROEG. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UFT. Disponível em https://ww2.uft.edu.br/index.php/pedagogia-palmas. Acesso em 28 abr 2020.
[1] Site da UNB. Disponível em http://www.fe.unb.br/index.php/graduacao. Acesso em 28 abr 2020.

Quadro 2.2: Disciplinas relacionadas à Matemática de alguns cursos de Pedagogia das regiões Norte e Nordeste.

INSTITUIÇÃO - CIDADE SEDE	**DISCIPLINAS - CARGA HORÁRIA**
Universidade Federal do Acre (UFAC) - Rio Branco	• Ensino de Matemática I – 60h • Ensino de Matemática II – 60h
Universidade Federal de Roraima (UFRR) - Boa Vista	• Estatística e Educação – 60h • Conteúdos e Fundamentos Metodológicos do Ensino de Matemática - 60h
Universidade Federal do Pará (UFPA) - Belém	• Fundamentos Teórico Metodológicos do Ensino da Matemática - 75h
Universidade Federal do Amazonas (UFAM) - Manaus	• A Criança e a Linguagem Matemática - 60h
Universidade Federal do Piauí (UFPI) - Terezina	• Educação Matemática - 75h
Universidade Federal de Sergipe (UFS) - Aracaju	• Fundamentos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental - 60h
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Recife	• Fundamentos do Ensino de Matemática I - 75h • Fundamentos do Ensino de Matemática II – 45h
Universidade Federal do Ceará (UFCE) - Fortaleza	• Estatística Aplicada à Educação - 64h • Ensino da Matemática - 96h
Universidade Federal da Paraíba (UFPB) - João Pessoa	• Ensino da Matemática - 60h
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) - Natal	• Ensino de Matemática I – 60h • Ensino de Matemática II – 60h

Fonte: Sites das Universidades[2]

[2]Site da UFAC. Disponível em https://portal.ufac.br/ementario/cursos.action. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFRR. Disponível em http://ufrr.br/pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFPA. Disponível em https://faced.ufpa.br/index.php/disciplinas/87-grade-curricular. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFAM. Disponível em http://faced.ufam.edu.br/. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFPI. Disponível em https://sigaa.ufpi.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/28663909. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFS. Disponível em https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/12686625. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFPE. Disponível em https://www.ufpe.br/documents/39399/0/pedagogia. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFC. Disponível em https://si3.ufc.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFPB. Disponível em https://sigaa.ufpb.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/2702559. Acesso em 28 abr 2020.

[2]Site da UFRN. Disponível em https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf. Acesso em 28 abr 2020.

Podemos observar que 50% das instituições pesquisadas apresentam em suas grades curriculares apenas uma disciplina relacionada à Matemática, e nas outras 50% se verifica duas disciplinas. Consideramos essa carga horária baixa, tendo em vista que os profissionais formados nesses cursos estarão aptos a lecionar Matemática em todas as séries iniciais do Ensino Fundamental. Analisamos as cargas horárias apenas em termos absolutos, e a instituição que apresentou maior carga horária foi a UFC, com duas disciplinas totalizando 160h, embora uma delas seja Estatística Aplicada à Educação. A UFPR aparece com a menor carga horária, com apenas uma disciplina de 30h.

Observando as nomenclaturas das disciplinas, constatamos que é bastante comum aparecer as palavras Ensino, Metodologia, Fundamentos, Educação e Didática, o que reforça os estudos de Curi (2004), nos quais ela afirma que os cursos de Pedagogia priorizam as questões metodológicas em detrimento dos conteúdos específicos das disciplinas, conforme podemos constatar também nas ementas dessas disciplinas que se encontram no apêndice A deste trabalho.

Na próxima seção, iremos apresentar os cursos de Pedagogia oferecidos atualmente nas maiores universidades públicas de nosso estado, o Rio Grande do Norte, em especial na cidade de Caicó, nas modalidades presencial e EAD. Nestes últimos, faremos uma análise criteriosa das disciplinas relacionadas à Matemática presentes em suas matrizes curriculares, suas cargas horárias e ementas.

2.2 Os Cursos de Pedagogia no Rio Grande do Norte

Em pesquisa feita no primeiro semestre de 2020, nos portais eletrônicos das três maiores universidades públicas do Estado do Rio Grande do Norte, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN) e Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA), localizamos os cursos de Pedagogia oferecidos por estas, cujas informações encontram-se no quadro 2.3.

Quadro 2.3: Cursos de Pedagogia nas principais Universidades Públicas do Rio Grande do Norte.

INSTITUIÇÃO - MODALIDADE	**CIDADE SEDE**
UFRN - Presencial	Natal, Caicó
UFRN - EAD	Multipolo
UERN - Presencial	Mossoró, Assu, Pau dos Ferros e Patu
UFERSA - Presencial	Angicos

Fonte: Sites das Universidades[3]

[3]Site da UFRN. Disponível em https://ufrn.br/academico/ensino/graduacao/cursos. Acesso em 28 abr 2020.

[3]Site da UERN. Disponível em http://portal.uern.br/graduacao/. Acesso em 28 abr 2020.

[3]Site da UFERSA. Disponível em https://ufersa.edu.br/cursosgraduacao/. Acesso em 28 abr 2020.

A seguir, faremos uma análise mais detalhada dos cursos da UFRN em Caicó, presencial e EaD, já que residimos nessa cidade e pretendemos, em momento oportuno, oferecer um minicurso para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais na nossa região, utilizando o material que iremos elaborar.

Analisamos detalhadamente o Projeto Político Pedagógico (PPP), a matriz curricular e as ementas das disciplinas relacionadas à Matemática do curso de Pedagogia presencial do Centro de Ensino Superior do Seridó (CERES)/UFRN, localizado na cidade de Caicó, tendo em vista que o mesmo é responsável pela formação de grande parte dos professores polivalentes da região do Seridó. No endereço eletrônico do curso[4] encontramos duas grades curriculares, uma de 2008 (inativa) e outra de 2019 (ativa).

Embora a estrutura curricular nos moldes atuais tenha começado a ser construída no início da década de 1990, sendo aprovado pela Resolução 235/94 do Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CONSEPE)/UFRN de 27 de dezembro de 1994, as discussões para a elaboração do PPP só iniciaram nos anos 2000, sendo alavancadas após a aprovação da Resolução CNE/CP Nº 1 de 15 de maio de 2006, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Graduação em Pedagogia, licenciatura. Atendendo às exigências desta Resolução, o PPP foi aprovado em 2007, entrou em vigor em 2008 e permaneceu ativo até a sua reformulação em 2018.

Nosso principal objetivo nesta análise é entender e discutir como se dá a formação matemática dos alunos do curso, já que os mesmos, ao se formarem, estarão aptos a lecionar esta disciplina nos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme consta no Art. 5º, § VI da Resolução CNE/CP Nº 1 de 15 de maio de 2006. Na matriz curricular presente no PPP de 2008, podemos observar apenas uma disciplina relacionada à Matemática, denominada "Matemática no Ensino Fundamental", com uma carga horária de 90h, correspondendo apenas a aproximadamente 2,8% da carga horária total do curso, que é de 3200h. Apresentaremos no quadro 2.4 a ementa dessa disciplina seguida de nossa análise.

Quadro 2.4: Ementa da disciplina relacionada à Matemática do curso de Pedagogia da UFRN do CERES/UFRN na grade curricular de 2008 (inativa).

DISCIPLINA	EMENTA
Matemática no Ensino Fundamental	A Matemática e a Educação Matemática: conceitos e linguagens no Ensino Fundamental e EJA. A transposição dos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental e EJA conforme sua distribuição e organização em ciclos ou séries e em atendimento à diversidade. Os materiais didáticos e o ensino de Matemática.

Fonte: Site do CERES/UFRN[4]

Constatamos a quase ausência de conteúdos que o futuro professor deve dominar para ensinar Matemática de modo significativo aos alunos dos anos iniciais de escolarização

[4]Site do CERES/UFRN. Disponível em http://www.ceres.ufrn.br/ensino/graduacao/. Acesso em 28 abr 2020.

e proporcionar uma educação de qualidade nesta fase tão importante, onde inicia-se a sistematização do conhecimento.

Ao analisarmos a matriz curricular do curso de Pedagogia do CERES/UFRN, que se encontra ativa a partir da reformulação do PPP em 2018, que ocorreu para atender às exigências das novas Diretrizes Curriculares Nacionais para as licenciaturas de formação de professores através da Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015, verificamos um tímido aumento na carga horária da formação em Matemática, que agora conta com duas disciplinas denominadas de Ensino da Matemática I e Ensino da Matemática II, de 60h cada, totalizando 120h, representando agora aproximadamente 3,6% da carga horária do curso, que é agora é de 3290h. Apresentaremos no quadro 2.5 as ementas dessas disciplinas, seguida de nossa análise.

Quadro 2.5: Ementa das disciplinas relacionadas à Matemática do curso de Pedagogia da UFRN do CERES/Caicó na grade curricular de 2019 (ativa).

DISCIPLINA	**EMENTA**
Ensino da Matemática I	Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos. Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais. Sistemas de numeração, números e operações no campo dos números naturais. Tratamento da Informação: coleta, organização, comunicação e interpretação de dados. A contextualização dos diferentes planejamentos necessários ao ensino da matemática na Educação Infantil, na Educação de Jovens e Adultos e em contextos não escolares. Aplicação em sala de aula dos estudos realizados no componente curricular através da atividade da Pesquisa Interdisciplinar Prática do Semestre. Inserção do componente curricular na Leitura Interdisciplinar (Literária e Acadêmica) do Semestre.
Ensino da Matemática II	Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos. Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais. Números e operações no campo dos racionais absolutos. Formas geométricas planas e tridimensionais. Organização espacial: representação, interpretação, localização e movimento de objetos no espaço. Simetria. Grandezas e Medidas. Aplicação em sala de aula dos estudos realizados no componente curricular através da atividade da Pesquisa Interdisciplinar Prática do Semestre. Inserção do componente curricular na Leitura Interdisciplinar (Literária e Acadêmica) do Semestre.

Fonte: Site do CERES/UFRN[4]

Pudemos verificar que houve um aumento significativo na quantidade de conteúdos, inclusive com uma discreta introdução de conteúdos bem específicos como sistemas de numeração, números e operações no campo dos números naturais e no campo dos racionais absolutos, porém consideramos que o tempo destinado ao estudo desses conteúdos não é suficiente para abordá-los de forma profunda. Podemos considerar que houve um avanço, embora não seja possível concluir que tenha havido uma melhora no ponto de vista da aprendizagem dos discentes, sem que haja uma intervenção com os mesmos.

Analisamos também a matriz curricular do curso de pedagogia EaD da UFRN, que foi criado em 2010 e é vinculado ao Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, localizado em Natal, com um dos Polos de apoio presencial localizado no CERES/Caicó. Encontramos em seu endereço eletrônico [5], duas estruturas curriculares, uma criada em 2011(inativa) e outra criada em 2014(ativa). Ambas oferecem as disciplinas Ensino da Matemática I e Ensino da Matemática II, com 90h cada e respectivas ementas iguais nos dois currículos. Em termos relativos, temos uma carga horária maior do que o curso presencial analisado acima, correspondendo a aproximadamente 5,6% da carga horária total, que é 3215h. Vejamos as ementas dessas disciplinas no quadro 2.6.

Quadro 2.6: Ementa das disciplinas relacionadas à Matemática do curso de Pedagogia EaD da UFRN

DISCIPLINA	EMENTA
Ensino da Matemática I	Propostas curriculares e pedagógicas para o ensino da Matemática na Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos. A matemática enquanto objeto sócio-histórico de conhecimento: aspectos que a constituem, seus usos e funções. Estudo da gênese e do desenvolvimento do conhecimento numérico. Linguagem matemática. Ensino dos sistemas de numeração, números e operações no campo dos números racionais absolutos. Metodologias e recursos auxiliares ao ensino e aprendizagem, planejamento e avaliação no ensino de números.
Ensino da Matemática II	Tendências da pesquisa na Educação Matemática para o ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos. Desenvolvimento das percepções espaço-geométricas: relações espaciais topológica, projetiva e euclidiana. O ensino de propriedades de figuras geométricas planas e tridimensionais; ângulo; simetria; grandezas de comprimento, área, volume. Metodologias e recursos auxiliares ao ensino e aprendizagem, planejamento e avaliação de conceitos geométricos e medidas.

Fonte: Site do Centro de Educação[5]

[5]Site do Centro de Educação. Disponível em <https://ce.ufrn.br/>. Acesso em 28 abr 2020.

Com relação aos conteúdos há novamente uma tendência a explorar a parte metodológica, com a inserção de alguns conteúdos específicos, inclusive explorando as operações com os números racionais, sem antes ter feito qualquer menção aos números naturais, que é o principal objeto de estudo nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Diante de todas as análises que fizemos nas ementas das disciplinas relacionadas à Matemática, dos cursos de formação de professores polivalentes de nossa região, concluímos que os mesmos seguem a mesma linha metodológica do cenário nacional, ou seja, não oferecem uma formação suficiente nas disciplinas específicas, mais precisamente em Matemática, que é o nosso interesse na pesquisa.

2.3 A formação matemática dos professores que ensinam Matemática

De acordo com as estruturas curriculares analisadas acima e baseado nos estudos de Curi (2004) e Correia (2008) constatamos a pouca preocupação dos cursos de licenciatura em Pedagogia com a formação em Matemática de seus discentes, que teoricamente terão que ministrar esta disciplina nos anos iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com (Correia, 2008) a formação do professor polivalente contempla uma ampla abordagem metodológica para o ensino de Matemática em detrimento da abordagem dos conteúdos a serem ensinados. Nesses cursos, segundo Curi (2004), há uma desarticulação, quase total, entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, priorizando as práticas metodológicas em detrimento dos conteúdos, deixando transparecer que o "saber ensinar" é mais importante do que o "o que ensinar." O pouco ou nenhum tratamento dado no campo conceitual e teórico dos conteúdos matemáticos na formação do professor polivalente, traz sérios danos ao processo de ensino-aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental, pois impede um ensino mais significativo, onde o professor seja capaz de orientar diferentes maneiras de resolver problemas. Compreender o conteúdo em um nível maior do que vai ensinar é extremamente necessário para o docente desenvolver estratégias e metodologias para que a aprendizagem realmente aconteça. O que acontece na formação do professor polivalente é uma ênfase no desenvolvimento de métodos de ensino, com pouca preocupação no domínio dos conteúdos, quando na verdade a sequência correta, ao nosso ver, seria: domínio de conteúdo e em seguida o desenvolvimento de estratégias pedagógicas de ensino.

Pena (2019) analisou resultados de provas de uma avaliação nacional realizada em 2017 com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, e constatou que as operações fundamentais com números naturais, juntamente com situações contextualizadas que exigem interpretação e aplicação de conceitos fundamentais das operações, mostram resultados preocupantes. Fato favorecido pela deficiência na formação do docente que leciona Matemática nas séries iniciais, conforme já discutimos anteriormente.

Diante de todos os fatos já mencionados e da necessidade de suprir, pelo menos em parte, as deficiências em Matemática na formação inicial do professor polivalente, propomos a construção de um material didático para fins de utilização em cursos de formação continuada. Trata-se de uma abordagem das operações fundamentais com números naturais por meio da utilização de UBPs (Unidades Básicas Problematizadoras), onde a partir de contextos históricos e sociais abordaremos os significados conceituais da adição, subtração, multiplicação e divisão, indo além da simples aplicação dos algoritmos, proporcionando também aos docentes, subsídios que permitam desenvolver estratégias de ensino mais significativas, favorecendo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

3 O Pedagogo e o Ensino da Matemática

Neste capítulo explanaremos um pouco sobre a importância do ensino da Matemática para os pedagogos, no que se refere aos conteúdos necessários para sua formação docente, especialmente o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com os números naturais. Discutiremos o que a BNCC propõe sobre esse assunto e o abordaremos sob o ponto de vista matemático.

3.1 A importância do ensino da matemática para os pedagogos

Diante das análises feitas anteriormente, verificamos a pouca importância dada ao Ensino da Matemática na formação de professores polivalentes, fato que desencadeia uma série de problemas em relação à formação matemática do estudante na educação básica, muitas vezes desmotivando-o, impedindo que o mesmo obtenha êxito nesta disciplina, já que iniciam sua vida escolar recebendo conhecimentos de um professor que não teve uma boa formação específica dos conteúdos a ensinar, logo não consegue desenvolver um trabalho metodológico suficiente para um aprendizado significativo.

Diante das dificuldades mencionadas, é necessário que seja oferecida aos professores dos anos iniciais do ensino fundamental uma formação continuada em Matemática, com o objetivo de aprofundar os conhecimentos necessários para uma melhor prática docente nesta disciplina tão importante na educação básica. Justo e Magalhães (2013) acreditam que:

> uma formação específica na Matemática para professores polivalentes é de grande importância para que os seus alunos tenham o seu primeiro contato formal com a Matemática de forma mais segura, pois o professor poderá ter um maior domínio da disciplina ao abandonar seus medos e dificuldades. (JUSTO; MAGALHÃES, 2013, p. 4)

Diante da formação generalista do professor polivalente, Medeiros (2019) entende que a formação continuada se faz necessária para que esses profissionais possam refletir sobre suas práticas, tendo a possibilidade de renovar, atualizar e (re)construir conceitos.

Propomos que tal formação aborde o conteúdo de Números Naturais, abrangendo desde o sistema de numeração decimal até o estudo dos algoritmos das operações fundamentais. A seguir, discorremos sobre o ensino dos números naturais fundamentado pela BNCC.

3.2 O conteúdo de números a ensinar

O Conselho Nacional de Educação (CNE) aprovou em 2017 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que em sua estrutura divide a educação básica em etapas, a saber: Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Nos atentaremos aqui à disciplina de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mais especificamente ao conteúdo de Números Naturais. O documento afirma que:

> O conhecimento Matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p. 265).

A BNCC propõe a organização dos conteúdos de Matemática em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística, acompanhadas de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, variando de acordo com o ano. Daremos ênfase à unidade temática Números, conteúdo que escolhemos abordar em nossa pesquisa.

É nos anos iniciais do Ensino Fundamental que ocorre o início da sistematização e formalização dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, e isso exige do professor um conhecimento que vai muito além do uso de algoritmos para resolver as operações básicas. É necessário que ele saiba o que está por trás do “vai 1” na adição e do “tomar emprestado” na multiplicação, entre outras maneiras mecânicas que são ensinadas muitas vezes sem o devido significado conceitual.

Pretendemos aqui explorar as operações fundamentais com números naturais utilizando as UBPs e relacionando com as habilidades previstas na BNCC. A seguir discorreremos um pouco sobre os conteúdos que serão trabalhados de acordo com o rigor matemático e falaremos um pouco da abordagem que iremos dar.

3.3 Números Naturais: do rigor matemático à abordagem explorada

A seguir, apresentaremos alguns axiomas, teoremas e propriedades que constituem a base teórica dos números naturais e as operações fundamentais, conhecimento necessário para a elaboração do material proposto no produto educacional. Faremos também algumas demonstrações necessárias. Nos baseamos principlamente em Hefez (2014). Usaremos também outros autores que citaremos quando necessário.

3.3.1 O rigor matemático

Os números naturais surgiram da necessidade do ser humano de contar objetos e de registrar o resultado dessa contagem. Sua evolução foi bastante demorada. Depois de muitos milênios, o matemático italiano Giuseppe Peano constatou que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, que atualmente são conhecidos como os axiomas de Peano. São eles:

I) Todo número natural tem um único sucessor:

II) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes:

III) Existe um único número natural, chamado de um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

IV) Seja X um conjunto de números naturais com $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, todo sucessor de X pertence a X, então $X \doteq \mathbb{N}$.

Tudo o que sabemos sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas. Este último é chamado de axioma da indução, uma ferramenta matemática muito útil na demonstração de diversos resultados sobre números naturais.

A representação desses números deve-se a um engenhoso processo chamado sistema de numeração decimal. Nesse sistema utilizaremos os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 para representar qualquer número.

Atualmente, podemos definir os números naturais como sendo uma sequência de símbolos abstratos, que são usados para representar quantidades.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

A questão de incluir o zero no conjunto dos números naturais é puramente por conveniência. De acordo com Lima, *et. al.* (2006) o símbolo 0 foi empregado inicialmente pelos maias, posteriormente pelos hindus, difundido pelos árabes e adotado no ocidente, não como um número e sim como um algarismo, com a utilidade de preencher uma casa decimal vazia. No nosso caso vamos considerar o zero um número natural, já que iremos trabalhar com o valor posicional dos algarismos.

Ordenação

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz-se que m é menor do que n, e escreve-se $m < n$, quando existe algum $p \in \mathbb{N}$, tal que $n = m + p$. Isto quer dizer que n é sucessor do sucessor ... do sucessor de m.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

a) Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;

b) Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

c) Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $m_0 \in X$ que é menor do que todos os outros elementos de X.

O princípio da boa ordenação desempenha um papel muito importante em muitas demonstrações, que em geral, são feitas por redução ao absurdo.

Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é indutivo quando $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$, ou seja , quando X contém o sucessor de cada um de seus elementos. O princípio da indução afirma que se um conjunto indutivo X contém o número 1, então X contém todos os números naturais.

Vamos usar o princípio da boa ordenação para provar que se um conjunto indutivo X contém o número a, então X contém todos os números naturais maiores do que a.

Suponhamos, por absurdo, que existam números naturais maiores do a que não pertencem ao conjunto indutivo X. Seja b o menor desses. Como $b > a$, podemos escrever $b = c + 1$, onde, pela definição de b, tem-se necessariamente $c \in X$. Mas, como X é indutivo, isto obriga que $b = c + 1 \in X$, o que é uma contradição.

A seguir vamos introduzir a adição e a multiplicação, que são as operações fundamentais definidas nos números naturais.

Adição e Multiplicação

A operação de adição, nos números naturais, é definida a partir da ideia de sucessor. Se n é um número natural, então $n + 1$ é o sucessor de n.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, a soma $m + n$ é o número natural que se obtém a partir de m aplicando-se n vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.

Definimos também a igualdade $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Quanto à multiplicação, se $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos por definição $m \cdot 1 = m$ e $m(n+1) = m \cdot n + m \cdot 1$. Quando $p \neq 1$, $n \cdot p$ é a soma de p parcelas iguais a n.

Propriedades da Adição:

A1) Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$.

A2) Comutatividade: $m + n = n + m$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

A3) Lei do corte: Para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$, se $m + p = n + p$, então $m = n$.

Demonstrações da propriedades da adição:

Para demonstrar as propriedades A1, A2 e A3 usaremos o princípio da indução (Axioma IV de Peano).

A1) Associatividade

Fixamos, arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $m + (n + p) = (m + n) + p$ é verdadeira quando $p = 1$, por definição.

Supondo verdadeira para $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p + 1$. Temos:

$$m + [n + (p + 1)] = m + [(n + p) + 1] = [m + (n + p)] + 1 = [(m + n) + p] + 1 = (m + n) + (p + 1).$$

Segue-se então que a lei associativa $m + (n + p) = (m + n) + p$ é válida para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$.

□

A2) Comutatividade

Usaremos duas vezes o princípio da indução. Primeiro consideramos o caso em que $n = 1$. A igualdade de $m+1 = 1+m$ é obviamente verdadeira quando $m = 1$. Supondo-a válida para um certo valor de m, tem-se a hipótese de indução $m + 1 = 1 + m$. Somando 1 a ambos os membros desta igualdade e usando a associatividade, temos $(m + 1) + 1 = (1 + m) + 1 = 1 + (m + 1)$. Segue-se que $m + 1 = 1 + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Admitamos agora que $m + n = n + m$ valha para um certo n e mostraremos que isto é válido para $n + 1$. Com efeito, temos

$$m + n = n + m \Rightarrow (m + n) + 1 = (n + m) + 1 \Rightarrow m + (n + 1) = (n + m) + 1 = 1 + (n + m) = (1 + n) + m = (n + 1) + m.$$

Segue-se que $m + n = n + m$ pra quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

□

A3) Lei do corte

Se $p = 1$, então $m + 1 = n + 1 \Rightarrow m = n$ (Axioma II, de Peano). Supondo válida para um certo p, mostraremos que se pode também cortar $p+1$. Admitamos que se tenha $m + (p + 1) = n + (p + 1)$. Pela associatividade, temos $(m + p) + 1 = (n + p) + 1 \Rightarrow m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

□

Exemplo 3.1: Prove que $m < n \Leftrightarrow m + p < n + p$, com $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Inicialmente mostraremos que $m < n \Rightarrow m + p < n + p$.

Se $m < n$, então $n = m + k$, com $k \in \mathbb{N}$. Acrescentando p a ambos os membros, temos $n+p = (m + k)+p = m+(k + p) = m+(p + k) = (m + p)+k$. Logo, concluímos que $m + p < n + p$. Acabamos de mostrar a monotonicidade da adição.

A recíproca que mostraremos a seguir é a lei do corte para desigualdades.

Suponha $m + p < n + p$. Pela tricotomia, temos uma das três possibilidades: $n < m, m = n$ ou $m < n$.

A primeira não pode ocorrer, pois se $n < m$, teríamos $n + p < m + p$, o que é uma contradição.

A segunda possibilidade também não pode acontecer, pois se $m = n$ teríamos $m + p = n + p$, o que também é uma contradição.

Só nos resta $m < n$.

□

Propriedades da Multiplicação:

M1) Distributividade em relação à adição: $m\cdot(n+p) = m\cdot n+m\cdot p$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

M2) Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

M3) Associatividade: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$

M4) Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p$, então $m = n$, para quaisquer m, n e $p \in \mathbb{N}$.

M5) Monotonicidade: Se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstrações das propriedades da multiplicação:

Para demonstrar as propriedades P1, P2, P3 e P4 usaremos novamente a indução.

M1) Distributividade em relação à adição

Fixamos, arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$, e fazemos indução sobre p.

Para $p = 1$, $m(n+1) = m\cdot n+m\cdot 1$ é verdadeira, por definição. Supondo verdadeira para $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p + 1$. Temos:

$$m[n + (p + 1)] = m[(n + p) + 1] = m(n + p) + m \cdot 1 = m \cdot n + m \cdot p + m \cdot 1 =$$
$$m \cdot n + (m \cdot p + m) = m \cdot n + [m(p + 1)].$$

□

M2) Comutatividade

Tomando $m \in \mathbb{N}$, faremos indução sobre n.

Sabemos que $m \cdot n = n \cdot m$ é verdadeira quando $n = 1$, por definição.

Supondo verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $n + 1$. Temos:

$$m\,(n + 1) = (m \cdot n) + m = (n \cdot m) + m = (n + 1)\,m$$

□

M3) Associatividade

Fixamos $m, n \in \mathbb{N}$ e faremos indução sobre p.

Sabemos que $(m \cdot n)\,p = m\,(n \cdot p)$ é verdadeira quando $p = 1$, por definição.

Supondo verdadeira para $p \in \mathbb{N}$, mostraremos que é verdade para $p + 1$. Temos:

$$(m \cdot n)\,(p + 1) = (m \cdot n)\,p + (m \cdot n)\,1 = m\,(n \cdot p) + m \cdot n = m\,[(n \cdot p) + n] = m\,[n\,(p + 1)]$$

□

M4) Lei do corte

Fixamos $m, n \in \mathbb{N}$ e faremos indução sobre p.

Para $p = 1$, temos que $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$

Supondo que para $p \in \mathbb{N}$, $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ é verdadeira, mostraremos que é verdade para $p + 1$. Temos:

$$m\,(p + 1) = n\,(p + 1) \Rightarrow m \cdot p + m = n \cdot p + n. \text{ Por hipótese, } m \cdot p = n \cdot p.$$
$$\text{Pela lei do corte da adição, temos } m = n$$

$\square$

M5) Monotonicidade

Se $m < n$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+k \Rightarrow n \cdot p = m \cdot p + k \cdot p \Rightarrow n \cdot p > m \cdot p$, com $p \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 3.2: Dados m e n naturais, mostre que se $m \cdot n = 1$, então m e n são iguais a 1.

Demonstração: Se tivermos, por exemplo, $m > 1$, a monotonicidade da multiplicação implicará em $m \cdot n > n$ e, como $n \geq 1$, $m \cdot n > 1$.

$\square$

Divisibilidade

Dados a e b números naturais, dizemos que a divide b, e representamos por $a \mid b$, se existe um número natural c tal que $b = ac$. Dizemos também que a não divide b, se não existe um c tal que $b = ac$.

Propriedades da divisibilidade: Quaisquer que sejam os naturais a, b, c e d, tem-se:

D1) $a \mid 0$, $1 \mid a$ e $a \mid a$, se $a \neq 0$

D2) Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$

D3) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$

D4) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$

D5) Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $a \leq b$

D6) Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, para todos x e $y \in \mathbb{N}$

Demonstrações das propriedades da divisibilidade:

D1) Decorre das igualdades $0 = 0 \cdot a$, $a = a \cdot 1$ e $a = 1 \cdot a$.

$\square$

D2) Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $c \mid d$, existe um número natural n tal que $d = c \cdot n$. Segue-se que $b \cdot d = (a \cdot c)\,(m \cdot n)$. Logo, $a \cdot c \mid b \cdot d$.

$\square$

D3) Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $b \mid c$, existe um número natural n tal que $c = b \cdot n$. Segue-se que $c = (a \cdot m) \cdot n = a \cdot (m \cdot n)$. Logo, $a \mid c$.

$\square$

D4) Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $b \mid a$, existe um número natural n tal que $a = b \cdot n$. Segue-se que $a = (a \cdot m) \cdot n = a\,(m \cdot n)$. Logo, $m \cdot n = 1$. Pelo exemplo 3.2 concluímos que $m = n = 1$, donde $a = b$.

$\square$

D5) Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. Como $b \neq 0$, temos que $c \neq 0$, logo $c \geq 1$ e, consequentemente $a \leq a \cdot c = b$.

$\square$

D6) Se $a \mid b$, então existe um número natural m tal que $b = a \cdot m$. E se $a \mid c$, existe um número natural n tal que $c = a \cdot n$. Logo, $xb + yc = x\,(am) + y\,(an) = (xm + yn)\,a$. Daí, $a \mid (bx + cy)$.

$\square$

Divisão Euclidiana

Dados a e b números naturais, se a não divide b, existe um método para efetuar a operação de divisão obtendo-se um resto, e esse processo termina quando o resto é menor do que a. Por exemplo, na divisão de 2439 por 5, encontramos 487 e resto 4, então escrevemos $2439 = 487 \cdot 5 + 4$.

Isso pode ser enunciado de forma geral na forma do teorema abaixo:

Teorema 3.1: Dados dois números naturais a e b, $a \neq 0$, sempre existem únicos q e r também naturais, tais que $b = a \cdot q + r$ e $0 \leq r < a$.

Demonstração:

Primeiro provaremos a existência.

Consideremos $a \in \mathbb{N}$, com $a > 0$ e tomaremos o conjunto dos números naturais particionado da seguinte forma:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., a-1\} \cup \{a, a+1, a+2, ..., 2a-1\} \cup \{2a, 2a+1, 2a+2, ..., 3a-1\} \cup ... \cup \{qa, qa+1, qa+2, ..., (q+1)a-1\} \ \cup ...$

Escolhendo um número natural b qualquer, ele estará em apenas um desses subconjuntos.

$b \in \{qa, qa+1, qa+2, ..., (q+1)a-1\}$ para algum $q \in \mathbb{N}$, ou seja, $qa \leq b < (q+1)a$.

Tomando $b = qa + r$, temos $qa \leq qa + r < qa + a$. Subtraindo qa, obtemos $0 \leq r < a$.

Provamos que, dados $a, b \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $b = qa + r$, com $0 \leq r < a$.

Agora provaremos a unicidade.

Suponha que $b = qa + r = q'a + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq r' < a$.

Assim, obtemos $(q - q')a = (r' - r)$. Assim $0 \leq r' - r < a$, e como $r' - r$ é múltiplo de a, então $r' - r = 0 \Rightarrow r' = r$.

Como $a > 0$, então temos $q - q' = 0 \Rightarrow q = q'$.

$\square$

Sistema de Numeração Decimal

Os números naturais foram representados ao longo do tempo de várias maneiras distintas, até chegar no moderno sistema de numeração decimal, que segundo Ifrah (1994), nasceu na Índia, por volta do século V da era cristã. Durante muito tempo na Europa usou-se o sistema de numeração romano, havendo uma resistência ao uso do sistema hindu-arábico, até que no século XVI este ganhou supremacia e começou a ser adotado oficialmente, graças aos islâmicos, principalmente pelo trabalho do matemático Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (783 – 850), conforme destaca Lopes e Morey (2019)

> Al-Khwarizmi, além de descrever o sistema de posição decimal em seu tratado Aritmético, também demonstrou os métodos para se calcular com números naturais, método este desenvolvido na Índia no século V. A notável ideia indiana foi a forma de expressar, por um único símbolo, uma quantidade infinita de números. Cada símbolo em separado teria um valor e na composição de números maiores que 10, o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra, isto é, na primeira ordem ela expressa unidades, na segunda ordem ela expressa dezenas, na terceira ordem ela expressa centenas e assim por diante. (LOPES; MOREY. 2019, p. 4)

O sistema indo-arábico é chamado de decimal, pois sua base é constituída de dez símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, chamados de algarismos. Este sistema é também posicional, pois cada algarismo, além de seu valor absoluto possui um peso relacionado com sua posição. Esse peso é uma potência de 10 que varia da direita para a esquerda segundo as potências $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, e assim sucessivamente.

Como um exemplo, o número 2568, no sistema decimal é representado por $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8$. Esta é o que chamamos de expansão decimal do número.

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda, e a cada três ordens forma uma classe.

$$\text{classe da unidades} = \begin{cases} \text{unidades de } 1^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 2^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 3^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{classe do milhar} = \begin{cases} \text{unidades de } 4^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 5^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 6^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{classe do milhão} = \begin{cases} \text{unidades de } 7^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 8^{\text{a}} \text{ ordem} \\ \text{unidades de } 9^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

Genericamente, qualquer número natural N pode ser escrito como uma soma de potências de base 10. A saber,

$$N = a_n 10^n + a_{\text{n-1}} 10^{\text{n-1}} + ... + a_1 10^1 + a_0, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq a_n \leq 9.$$

Na seção a seguir abordaremos as operações fundamentais com os números naturais com uma linguagem mais simplificada para professores não-matemáticos, apenas justificando os passos dos algoritmos convencionais, sem nos preocuparmos com o rigor matemático e nem com demonstração de teoremas.

3.3.2 A abordagem explorada

Utilizaremos o processo de decomposição do número em potências de 10 para justificar o uso dos algoritmos que costumamos usar para resolver as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais. A praticidade desses algoritmos os tornaram bastante usuais no mundo inteiro, e sua difusão se deu principalmente pelo trabalho de al-Khwarizmi, conforme relata Lopes e Morey (2019)

> Al-Khwarizmi expõe suas descobertas sobre o cálculo indiano (adição, subtração, divisão e multiplicação de números naturais) explicando como se fazer essas operações seguindo um algoritmo. Por exemplo, a soma de dois números deve ser feita somando-se cada ordem de um com a ordem do mesmo tipo do outro. Explanado que em cada ordem não pode exceder mais do que 9 unidades, ele relata que os indianos usavam um pequeno círculo, para representar uma ordem vazia, ou seja não havia um número que a ocupava. (LOPES; MOREY. 2019, p. 5)

As definições das operações fundamentais que apresentaremos foram retiradas de Hefez (2014) e as justificativas dos algoritmos baseadas nas ideias de Wall (2014).

Definição 3.1 (*Adição*): Dados dois números naturais a e b, quaisquer, podemos deslocar a partir de a, b posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $a + b$.

$$\cdots \longrightarrow a \longrightarrow a+1 \longrightarrow a+2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a+b \longrightarrow \cdots$$

Por exemplo, dados $a = 2$ e $b = 3$, ao deslocarmos a de três posições para a direita, temos,

$$2,\ 2+1 = 3,\ 3+1 = 4,\ 4+1 = 5,$$

obtendo assim, $2 + 3 = 5$.

Para exemplificar o algoritmo da adição vamos efetuar a soma $153 + 273$.

$$\begin{array}{cr} & 153 \\ + & \underline{273} \\ & 426 \end{array}$$

Chamamos 153 e 273 de parcelas e 426 de soma.

Para descrever o processo do algoritmo convencional para a resolução da adição acima, iniciamos pela coluna da extrema direita, onde somamos as unidades $3 + 3 = 6$. Em seguida, somamos os algarismos da coluna das dezenas, $5 + 7 = 12$, colocamos o 2 e usamos a expressão *vai 1* . Indo para a coluna das centenas, somamos $1 + 1 + 2 = 4$. O resultado final é 426.

Na maioria das vezes, o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental ensina aos seus alunos da maneira descrita acima, que é um processo prático, porém mecânico. Mostraremos agora porque que esse método funciona e quais as justificativas dos passos do algoritmo.

Inicialmente fazemos a expansão decimal dos números 153 e 273.

$$153 = 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$
$$273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Somando os resultados acima, temos:

$$\begin{aligned} 153 + 273 &= (1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1) + (2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1) \\ &= 1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Aplicando a distributividade, temos:

$$\begin{aligned} 153 + 273 &= (1 + 2) \cdot 100 + (5 + 7) \cdot 10 + (3 + 3) \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 100 + 12 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \end{aligned}$$

O que temos agora são 3 centenas, 12 dezenas e 6 unidades. Mas 12 dezenas corresponde a 1 centena mais 2 dezenas. O que faremos a seguir é transformar 10 dezenas em uma centenas e juntá-la com as 3 já existentes. Isso explica o "vai 1"do algoritmo.

$$\begin{aligned} 153 + 273 &= 3 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 3 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 426 \end{aligned}$$

Definição 3.2 (*Subtração*): Dados dois números naturais a e b, tais que $a \leq b$, o número de deslocamentos partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será denominado diferença entre b e a.

Logo, pela definição de $b - a$, temos que

$$a + (b - a) = b$$

Para exemplificar o algoritmo da subtração vamos efetuar a operação $745 - 289$.

$$\begin{array}{r} 745 \\ - \ \underline{289} \\ 456 \end{array}$$

Chamamos o 745 de minuendo, o 289 de subtraendo e o 456 de diferença.

A descrição da resolução pelo algoritmo convencional é a seguinte: Iniciando pela coluna das unidades, devemos tirar 9 de 5, o que é impossível no conjunto dos números naturais, daí usamos o artifício de *tomar 1 emprestado* ao vizinho 4 que se encontra na coluna das dezenas, ficando 3 nesta posição. Juntamos o 1 ao 5 e ficamos com 15, que subtraindo 9 dá 6. Em seguida, vamos para a coluna das dezenas, que agora temos que tirar 8 de 3, o que também é impossível no conjunto dos números naturais. Daí, novamente *tomamos 1 emprestado* ao vizinho 7, que está na ordem das centenas. Fazemos $13 - 8 = 5$. E por fim, temos $6 - 2 = 4$. O resultado final é 456.

A justificativa dos procedimentos citados acima recai novamente sobre a expansão decimal dos números.

$$745 = 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$
$$289 = 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1$$

Subtraindo os números acima, temos:

$$\begin{aligned} 745 - 289 &= (7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1) - (2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 1) \\ &= 7 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \end{aligned}$$

Quando *tomamos 1 emprestado ao 4*, na verdade o que estamos fazendo é decompor o $4 \cdot 10$ em $3 \cdot 10 + 1 \cdot 10$. Transformamos 1 dezena em 10 unidades, que somando às 5 unidades existentes, teremos:

$$\begin{aligned} 745 - 289 &= 7 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 15 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \end{aligned}$$

Quando *tomamos 1 emprestado ao 7*, na verdade o que estamos fazendo é decompor o $7 \cdot 100$ em $6 \cdot 100 + 1 \cdot 100$. Transformamos 1 centena em 10 dezenas, que somando às 3 dezenas existentes, teremos:

$$\begin{aligned}745 - 289 &= 6 \cdot 100 + 1 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1\\ &= 6 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1\\ &= 6 \cdot 100 - 2 \cdot 100 + 13 \cdot 10 - 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1\\ &= 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1\\ &= 456\end{aligned}$$

Definiremos a multiplicação nos números naturais a partir da noção de múltiplo.

Definição 3.3 (*Múltiplos*): Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de a:

0 vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a, etc., obtendo assim a sequência:

$$0 \cdot a = 0,\ 1 \cdot a = a,\ 2 \cdot a = a + a,\ 3 \cdot a = a + a + a,\ ...$$

Definição 3.4 (*Multiplicação*): Tomar múltiplos define uma operação nos números naturais, $a \cdot b$, que se lê *a vezes b*, representando o múltiplo *a vezes b* de b. Assim,

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, \text{ se } a = 0\\ b, \text{ se } a = 1\\ b + b + ... + b, \text{ se } a > 1\end{cases}$$

O número natural $a \cdot b$ será chamado produto de a por b e também será denotado por ab quando não houver risco de confusão.

Para exemplificar o algoritmo da multiplicação usaremos a operação $142 \cdot 28$

$$\begin{array}{rrrrr} & & 1 & 4 & 2\\ & \times & & 2 & 8\\ \hline & 1 & 1 & 3 & 6\\ + & 2 & 8 & 4 & \\ \hline & 3 & 9 & 7 & 6\end{array}$$

Chamamos o 142 de multiplicando e o 28 de multiplicador. Inicialmente multiplicamos o 8 do multiplicador por todos os algarismos do multiplicando, da direita para a esquerda conforme os seguintes passos: $8 \cdot 2 = 16$, colocamos o 6 e *levamos 1*. Fazemos $8 \cdot 4 = 32$, que somando 1 que *levamos* fica 33. Colocamos o 3 e *levamos 3*. Multiplicamos $8 \cdot 1 = 8$, que somando 3 que *levamos* fica 11. Daí colocamos o primeiro resultado, 1136.

Agora multiplicamos o 2 do multiplicador por todos os algarismos do multiplicando, também da direita para a esquerda, obtendo 284. Colocamos esse resultado abaixo do 1136 recuando uma coluna. O resultado final foi obtido com a soma $1136 + 284 = 3976$.

Para justificar o algoritmo que usamos na operação $142 \cdot 28$, temos:

$$142 \cdot 28 = (2 \cdot 10 + 8 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1)$$

Usando a propriedade distributiva, temos:

$$\begin{aligned} 142 \cdot 28 &= (2 \cdot 10) \cdot (1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1) + (8 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1) \\ &= (2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10) + (8 \cdot 100 + 32 \cdot 10 + 16 \cdot 1) \end{aligned}$$

Inicialmente explicaremos o parêntese que representa $8 \cdot 142$.

Quando colocamos o 6 e *levamos 1*, na verdade estamos decompondo $16 \cdot 1$ em $10 \cdot 1 + 6 \cdot 1$, e transformamos essas 10 unidades em 1 dezena, somando com as 32 já existentes, ficando com:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 142 &= 8 \cdot 100 + 32 \cdot 10 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \\ &= 8 \cdot 100 + 33 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, decompomos $33 \cdot 10$ em $30 \cdot 10 + 3 \cdot 10$, e transformamos essas 30 dezenas em 3 centenas, somando com as 8 já existentes. Finalmente transformamos 10 centenas em 1 unidades de milhar. Veja:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 142 &= 8 \cdot 100 + 33 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 8 \cdot 100 + 30 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 8 \cdot 100 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 11 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 10 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 1136 \end{aligned}$$

Agora iremos explicar o parêntese que representa $(2 \cdot 10) \cdot 142$.

O desenvolvimento é análogo ao do $8 \cdot 142$. veja:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 142 &= 2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \\ &= 2840 \end{aligned}$$

Observe que não temos a ordem das unidades simples, por isso recuamos uma coluna na resolução do algoritmo.

Disso, como

$$\begin{aligned}
142 \cdot 28 &= 20 \cdot 142 + 8 \cdot 142 \\
&= (2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10) + (8 \cdot 100 + 32 \cdot 10 + 16 \cdot 1) \\
&= 1136 + 2840 \\
&= 3976
\end{aligned}$$

O resultado final da multiplicação é a soma $1136 + 2840 = 3976$.

Veja que na resolução do algoritmo não colocamos o zero do número 2840. Isso torna o algoritmo ainda mais mecânico, já que o número não é 284. Uma possível explicação para tal ato seria dizer que o número vale 284 dezenas, e não 2840 unidades.

A seguir apresentaremos a operação de divisão, que consideramos a mais complexa dentre as operações fundamentais, já que o seu algoritmo envolve adição, subtração e multiplicação. Hefez (2010) trata da divisão com números inteiros. Usaremos sua ideia e faremos nossa adaptação para os números naturais. A princípio definiremos divisor.

Definição 3.5 (*Divisor*): Diremos que um número natural d é *divisor* de outro natural a, se a é *múltiplo* de d; ou seja, se $a = d \cdot c$, para algum natural c.

Quando a é *múltiplo* de d dizemos também que a é *divisível* por d ou que d *divide* a.

Definição 3.6 (*Algoritmo da divisão*): Dados a e b números naturais, com $a > 0$, existe um único par de números naturais q e r tais que $b = a \cdot q + r$ e $0 \leq r < a$.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{dividendo} & & & & \text{divisor} \\
& b & \multicolumn{1}{|l}{a} & & \\ \cline{3-3}
& r & q & & \\
\text{resto} & & & & \text{quociente}
\end{array}$$

Para exemplificar o algoritmo da divisão dividiremos 653 por 5.

Representaremos no algoritmo 6 centenas por 6C, 5 dezenas por 5D e 3 unidades por 3U.

$$
\begin{array}{rrr|l}
6C & 7D & 3U & \quad 5 \\ \cline{4-4}
-\underline{5C} & & & 1C\ \ 3D\ \ 4U \\
1C \longrightarrow & 10D & & \\
 & +\underline{7D} & & \\
 & 17D & & \\
 & -\underline{15D} & & \\
 & 2D \longrightarrow & 20U & \\
 & & +\underline{3U} & \\
 & & 23U & \\
 & & -\underline{20U} & \\
 & & 3U &
\end{array}
$$

Temos 6 centenas, que divididas por 5, dá 1 centena e sobra 1 centena, que transformamos em 10 dezenas e somamos com as 7 dezenas já existentes, resultando em 17 dezenas, que divididas por 5 resulta em 3 dezenas, e sobram 2 dezenas, que transformamos em 20 unidades, que somadas com as 3 unidades existentes, ficam 23 unidades, que divididas por 5, dá 4 unidades e sobram 2 unidades.

Então, encontramos o quociente 134 e o resto 3. Logo temos,

$673 = 5 \cdot 134 + 3$

Outra maneira de justificar o algoritmo é escrever 673 na forma decimal e escrever seus termos como múltiplos de 5. Veja:

$$
\begin{aligned}
673 &= 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\
&= 5 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 \\
&= 5 \cdot 100 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 14 + 3 \\
&= 5(100 + 20 + 14) + 3 \\
&= 5 \cdot 134 + 3
\end{aligned}
$$

4 O Produto Educacional

O nosso principal objetivo neste trabalho é desenvolver um produto educacional que possa ser usado na formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo em vista que os cursos de Pedagogia que formam esses professores, não oferecem, em sua grande maioria, uma formação suficiente em Matemática. Fato constatado pela baixa carga horária destinada às disciplinas relacionadas à Matemática, presentes nas grades curriculares destes cursos, conforme discutimos no capítulo 2. Tivemos a preocupação em considerar que esses professores não são matemáticos, portanto, não dispõem de conhecimentos teóricos específicos desta área. Nossa intenção é oferecer um material que contenha um certo rigor matemático usando uma linguagem apropriada para o público mencionado.

Consideramos que o conteúdo de Números Naturais é essencial nesta fase escolar. O aluno que chega ao final do 5º ano do Ensino Fundamental dominando as operações fundamentais com os números naturais certamente terá grande facilidade em toda a sua vida escolar. Mas para isso é necessário que o professor também as domine, e além disso, disponha de conhecimentos além do que ele vai ensinar, facilitando assim o desenvolvimento de metodologias que possibilitem uma aprendizagem significativa.

Nessa perspectiva, vimos nas Unidades Básicas de Problematização, ou simplesmente UBPs, uma oportunidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem em Matemática para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Miguel e Mendes (2010):

> A UBP é um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história. (MIGUEL; MENDES, 2010, p. 386, tradução nossa)

Ao longo do tempo a Matemática evoluiu de acordo com a necessidade da humanidade em tornar a vida mais fácil e resolver problemas relacionados ao cotidiano. Sendo assim, a UBP é explorada a partir de um fato histórico sociocultural de natureza indisciplinar, ou seja, que não é específico de uma determinada disciplina, a partir dele elaboramos problematizações, que no nosso caso abordarão principalmente os números naturais e suas operações fundamentais.

O uso de UBPs na formação de professores pode ser um rico recurso metodológico, pois possibilita a construção do conhecimento por meio de práticas históricas e sociais, favorecendo o pensamento crítico do sujeito. As atividades a serem desenvolvidas têm cunho investigativo, no sentido de que os professores podem trabalhar coletivamente na elaboração de respostas para os questionamentos, discutir e socializar para uma posterior reflexão sobre o conteúdo trabalhado, seu conhecimento sobre ele e sua prática docente. De acordo com Tavares e Pereira (2016):

> A proposta de produção de UBP na formação de professores de matemática pode ser uma opção didática que possibilita um melhor aproveitamento do processo de ensino e aprendizagem de matemática por trabalhar de maneira agradável e instigante os conteúdos matemáticos com a finalidade de que a Educação Básica realmente forme o aluno tornando-o crítico e agente ativo na transformação da sociedade.(TAVARES; PEREIRA, 2016, p. 11)

Durante muito tempo as operações fundamentais com números naturais, denominadas de adição, subtração, multiplicação e divisão foram ensinadas de forma mecânica, onde o professor resolvia um exemplo na lousa, em seguida colocava diversas "continhas" e os alunos eram submetidos a repetições até aprender. Na verdade, poderia ocorrer uma aprendizagem das técnicas de resolução, mas sem justificativas para o uso de tais técnicas. O *vai 1* e o *tomar emprestado*, terminologias corriqueiras utilizadas nas operações de adição e subtração, eram apenas usados porque dava certo. Na maioria das vezes o professor também não disponha de conhecimentos suficientes para ensinar de forma diferente ou até mesmo compreender esse dispositivo.

O ensino por repetição e memorização foi bastante contestado nas últimas décadas, os cursos de formação de professores passaram por reformulações e as práticas metodológicas foram mudando, o que não significa dizer que houve avanço na aprendizagem. Com relação ao ensino de Matemática nos anos iniciais, embora as técnicas de repetição tenha perdido espaço, ainda é constatado grandes falhas no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Gualberto e Almeida (2009), nesta fase escolar o grande entrave parece ser a alfabetização das crianças, a matemática acaba sendo colocada em segundo plano, o que prejudica a formação do aluno nos demais anos escolares.

Faz-se necessário darmos a devida importância ao ensino da Matemática nesta fase, já que a mesma favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico nas crianças, bem como subsidia o estudo das demais ciências naturais e até mesmo das ciências sociais. É necessário dar uma base sólida ao aluno, e acreditamos que o ensino dos números naturais e suas operações feito por professores bem preparados favorecem a construção dessa base.

O processo de construção do conhecimento sobre números naturais e suas operações básicas vai muito além da memorização dos algoritmos, requer uma busca por significados, e isso só é possível com professores preparados, dispondo do conhecimento teórico necessário para favorecer esse processo. Como os cursos de Pedagogia, em geral não oferecem estes conhecimentos, propomos que seja feito por meio de formação continuada na forma de um minicurso Nos preocupamos aqui em elaborar um material que possa ser usado nestas formações.

O minicurso que propomos foi planejado para duração de oito horas, sendo dois momentos de quatro horas, onde em cada momento será trabalhada uma UBP, iniciando com uma apresentação oral sobre a problemática envolvida e orientações sobre as atividades propostas, que deverão ser realizadas de preferência em pequenos grupos, seguidas de discussões e apresentações opcionais dos participantes. As UBPs que apresentaremos na elaboração deste material foram pensadas de forma que possamos resgatar fatos históricos socioculturais sempre ligados ao conceito de números naturais e suas operações, desde sua invenção até a disseminação do uso do sistema de numeração decimal e seu uso nos dias atuais.

A primeira UBP trata principalmente de temas que abordam a disseminação do sistema de numeração indo-arábico pelo Ocidente e seu caráter decimal e posicional. Abordaremos fatos históricos e culturais desse sistema, por meio de problematizações que levarão o professor a pensar de forma reflexiva e adquirir ou aprimorar conhecimentos importantes como a representação de qualquer número natural na forma decimal posicional que o ajudará a compreender conceitos até então mecanizados pela educação tradicional. Introduziremos esta UBP com o seguinte texto de nossa autoria:

A representação dos números e a maneira de operá-los nem sempre foi a que conhecemos hoje. Ao longo do tempo, a humanidade desenvolveu diversos símbolos até chegar aos algarismos que usamos na atualidade quase que universalmente. Quanto ao sistema de numeração mais usado na atualidade é o decimal posicional, cuja invenção se deu na Índia por volta do século V d.c., sendo adotado pelos árabes, com quem mantinham fortes relações comerciais por volta do século VIII.

Até então o sistema numérico mais usado no mundo ocidental para representar os números era o Romano. As operações era feitas por pessoas com um grau de conhecimento avançado, chamados calculadores, que usavam o ábaco como instrumento para realizar os cálculos. A disseminação do sistema de numeração indo-arábico foi fruto de um longo processo. Havia bastante rejeição, principalmente por questões religiosas. Acredita-se que o comércio e suas necessidades de cálculos cada vez maiores foi decisivo na aceitação do novo sistema.

Todavia os métodos de cálculo desenvolvidos pelos hindus só vulgarizou amplamente com o trabalho do matemático persa Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (783-850), que escreveu uma obra expondo pela primeira vez o sistema numérico decimal, que usa dez símbolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 para representar qualquer número natural, sendo que a partir do 10 o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra. Na obra, chamada de Tratado Aritmético de al-Khwarizmi, ele também expõe o modo de calcular dos indianos, que facilitaria bastante as operações com números naturais.

Baseado no texto acima, propomos questionamentos que promovam o senso investigativo do professor. Iniciamos abrindo uma discussão sobre o surgimento da contagem e dos números, qual será que antecedeu ao outro? Propomos também investigações históricas, como o surgimento do sistema de numeração decimal e sua disseminação pela Europa Ocidental e o trabalho do matemático al-Khwarizmi, bem como o uso do ábaco para a realização de operações básicas com os números naturais. Abordaremos também conhecimentos conceituais sobre algarismo, número e expansão decimal e representações numéricas de povos antigos como os Incas e os Egípcios.

A segunda UBP discorre mais especificamente sobre as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, relacionando algoritmos usados por alguns povos da antiguidade com os atuais, buscando justificá-los usando a representação decimal posicional dos números naturais. Usaremos como base o texto a seguir de nossa autoria:

Logo depois de aprender a contar, as crianças são instigadas a operar com os números. Logo nos primeiros anos do Ensino Fundamental são ensinadas a somar e a subtrair, em seguida vem a multiplicação e ,por último, a divisão. Hoje conhecemos os algoritmos que tornaram essas operações relativamente fáceis, graças ao desenvolvimento do sistema de numeração decimal e a decomposição decimal dos números. Nem sempre foi assim. Muitos povos antigos tinham suas maneiras de realizar as operações com números naturais. Os precursores dos algoritmos convencionais atuais foram os contadores que realizavam as operações em ábacos ou em tábuas de contagem, que prevaleceram como os principais instrumentos de cálculo até o século XVI.

O que se sabe a respeito das primeiras práticas de adição surgiu de especulações para a utilização dos primeiros dispositivos de cálculo e da análise de contas financeiras. A exemplo disso, temos a tabuleta de argila de Babilonian Yale Collection datada de 3000 a.C. A exemplo do que aconteceu com a adição, a subtração não possui muitos registros históricos. O que sabemos sobre a subtração é meramente especulativo e vem do uso dos primeiros dispositivos para cálculo e de documentos antigos tais como a análise de contas judiciais e financeiras históricas.

Com relação à multiplicação e à divisão, os primeiros registros datam em torno de dois milênios antes de Cristo com os Egípcios, que usavam a duplicação até chegar ao resultado final. Outros povos ao longo do tempo desenvolveram métodos de operar com os números naturais.

Neste segundo momento trataremos mais especificamente das operações fundamentais com os números naturais, fazendo uma comparação dos procedimentos usados por alguns povos antigos como os egípcios e gregos, com os algoritmos convencionais, que costumamos usar na atualidade. Procuramos também propor atividades que justifiquem o desenvolvimento desses algoritmos passo a passo, com o intuito de desmecanizá-los.

5 Considerações Finais

Este trabalho buscou discutir a formação matemática dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Estes são, geralmente, licenciados em Pedagogia, e de acordo com as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Pedagogia, instituída pela Resolução CNE/CP Nº 1, de 15 de maio de 2006, estão aptos a lecionar todas as disciplinas que compõem a base curricular dos anos iniciais. Por meio de estudos como o de Curi (2004) e de pesquisas que realizamos em 2020 nas matrizes curriculares de algumas Universidades Públicas de vários estados brasileiros constatamos que a formação matemática desses professores conta com pouca presença de conteúdos matemáticos e baixa carga horária destinada às disciplinas relacionadas à Matemática.

Demos ênfase às disciplinas relacionadas à Matemática dos cursos de Pedagogia presencial e à distância, da UFRN, sediados em Caicó, nossa cidade, que é localizada na região do Seridó do Rio Grande do Norte, a fim de verificar semelhanças e diferenças com o cenário nacional. Após nosso exame, constatamos que o quadro encontrado em outras regiões do nosso país se repete na nossa cidade. Não foi objetivo do nosso trabalho, entretanto, outras perspectivas podem ser futuramente exploradas, como, por exemplo, quem são os professores dessas disciplinas nos cursos de Pedagogia, que livros são utilizados na formação inicial desses pedagogos e em que nível de conhecimento matemático esses profissionais iniciam a carreira docente.

Temos observado em nossa vivência enquanto professor de Matemática de Ensino Médio de escola pública na cidade de Caicó há mais de uma década as grandes dificuldades dos alunos em conteúdos elementares, até mesmo em relação às operações fundamentais com números naturais. Diante disso e de todas as nossas investigações, resolvemos elaborar um material didático em forma de livreto, abordando o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com números naturais. Pretendemos, posteriormente, utilizá-lo para ministrar um minicurso de formação continuada para professores que ensinam Matemática, preferencialmente de escolas públicas de nossa cidade. Nossa intenção era, inicialmente oferecer esta formação de forma presencial e até mesmo discutir os resultados neste trabalho, mas fomos pegos de surpresa pela Pandemia do COVID-19 que assolou o mundo a partir de março de 2020 e obrigou a suspensão de todas as atividades presenciais da educação.

Partindo do pressuposto de que o professor precisa saber mais do que ele vai ensinar, antes da elaboração do livreto abordamos os conteúdos matemáticos que serão trabalhados do ponto de vista do rigor matemático, mostrando axiomas e propriedades com suas devidas demonstrações. Em seguida, exploramos com uma linguagem mais simplificada, apropriada para não-matemáticos, mostrando por meio de exemplos, a justificativa de cada passo na aplicação dos algoritmos das operações fundamentais com números naturais.

Para elaborar o nosso livreto, procuramos utilizar uma metodologia que despertasse nos professores um interesse no aprofundamento dos conteúdos trabalhados. Decidimos, então, utilizar Unidades Básicas Problematizadoras (UBPs), proposta criada por Miguel e Mendes (2010), na qual exploramos problematizações a partir de fatos históricos sociais. Elaboramos duas UBPs, uma abordando a disseminação do sistema de numeração indo-arábico pelo Ocidente e seu caráter decimal e posicional, e outra discorrendo sobre as operações fundamentais, procurando justificá-las usando a expansão decimal dos números, e fazendo comparações com alguns algoritmos utilizados por povos antigos. Além disso, o uso das UBPs propicia um meio instigante e agradável de abordar conteúdos matemáticos e levam os “cursistas” a adotarem uma postura investigativa no estudo da Matemática.

A UBP não trabalha apenas um conteúdo matemático específico, uma de suas características é tratar assuntos que versem em diversas disciplinas e esse é um aspecto que permeia não apenas a formação, mas também a prática profissional dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse é um dos aspectos que consideramos ao escolher o uso das UBPs na elaboração do nosso Produto Educacional, além de poderem ser utilizadas pelos professores em suas aulas nos anos iniciais, já que as mesmas têm potencial para serem exploradas em qualquer nível de ensino.

Esperamos que o nosso trabalho seja de alguma valia para os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e que os incentive a investigar, refletir e buscar novos conhecimentos para, a partir deles, melhorar sua prática pedagógica, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo. Salientamos, ainda, que o nosso Produto Educacional poderá ser utilizado por outros Matemáticos que se interessarem em ampliar o conhecimento dos professores que ensinam matemática.

O aprofundamento no tema dessa dissertação e posterior disseminação dos resultados podem contribuir para uma melhor formação dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino fundamental, contribuindo assim para uma melhor aprendizagem dos alunos desta fase de ensino. Os matemáticos podem contribuir com este trabalho, propondo outros tipos de formações e materiais didáticos de outros conteúdos relevantes.

Para construir nosso trabalho, fizemos também consultas a documentos oficiais que regulamentam a formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, desde a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 5.692/71, na qual o curso de Pedagogia passou a habilitar professores para as séries iniciais do 1º grau (Hoje Ensino Fundamental), passando pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96, que instituiu o prazo de dez anos a partir desta para a obrigatoriedade da habilitação dos professores em nível superior, até a Resolução CNE/CP Nº 1, que instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Licenciatura em Pedagogia, centralizando-o na formação de professores da Educação Infantil e os anos iniciais do Ensino Fundamental, estabelecendo normas e critérios para a organização curricular. Por fim, examinamos a BNCC, aprovada em 2017, na parte referente ao ensino de operações fundamentais com números naturais nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Referências Bibliográficas

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC) Brasília: MEC/CONSED/ UNDIME, 2017.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução n. 2, de 1 de Julho de 2015.** Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior. (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília: MEC/CNE, 2015. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file. Acesso em: 20 abr. 2020.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 5.692.** Brasília, 1971.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 9.394.** Brasília, 1996.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP n. 1/2006** Diretrizes curriculares nacionais para o curso de graduação em pedagogia, licenciatura. Brasília, 2006.

CORREIA, Carlos Eduardo Felix. **A formação (matemática) dos professores polivalentes**, Revista de Educação Matemática. São Paulo, vol. 11, n. 13, 2008. Disponível em: http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMatSP/article/view/48/pdf Acesso em: 28 mar. 2020.

CURI, Edda. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos**, 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC/SP, São Paulo, 2004.

GUALBERTO, P. M. A.; ALMEIDA, R. Formação de professores nas séries iniciais: algumas considerações sobre a formação matemática e a formação dos professores das licenciaturas em Pedagogia. **Olhar de Professor**, Ponta Grossa, v. 12, n.2, p. 287-308, 2009. Disponível em: https://www.revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/

1213/863. Acesso em: 01 abr. 2020.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014

MAGALHÃES, Jamille Mineo Carvalho de; JUSTO, Jutta Cornelia Reuwsaat. Concepções de professores polivalentes sobre a matemática a partir de uma formação continuada estruturada com jogos matemáticos. Encontro Nacional de Educação Matemática, 11. **Anais**. Curitiba, jul. 2013. Disponível em: https://docplayer.com.br/ 38486718-Palavras-chave-concepcoes-sobre-matematica-professores-polivalentes-formacao-continuada-jogos-matematicos.html. Acesso em: 29 out. 2020

LIMA, Elon Lages. *et. al.* **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. 8 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LIMA, Vanda Moreira Machado. **Formação do professor polivalente e saberes docentes: um estudo a partir de escolas públicas.** 2007. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12032009-111920/ pt-br.php Acesso em: 07 jul. 2020.

LOPES, Gabriela Lucheze de Oliveira; MOREY, Bernadete Barbosa. Tratado Aritmético de Al-khwarizmi - observações iniciais. In: Seminário Nacional de História da Matemática,8, **Anais**. Fortaleza, CE: SNHM, 2019.

MEDEIROS, Loise Tarouquela. **Formação Continuada dos Pofessores no Ensino dos Anos Iniciais:** perspectivas e transformações dos saberes docentes. *In*: GONÇALVES, Felipe Antonio Fagundes (Org.).Educação matemática e suas tecnologias [recurso eletrônico]. Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 1).

MIGUEL, Antônio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM mathematics Educacion** v. 42, p. 381-392, 2010.

PENA, H. M. **A formação dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Para, Belém.

PIMENTA, S. G. FUSARI, J. C. PEDROSO, C. C. A. e PINTO, U. A. Os cursos de licenciatura em pedagogia: fragilidades na formação inicial do professor polivalente. **Educ. Pesqui.** [online]. 2017, vol.43, n.1, p.15-30. ISSN 1517-9702. Disponpivel em https://doi.org/10.1590/s1517-9702201701152815. Acesso em: 09 jul. 2020.

TAVARES, Mariana Oliveira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um estudo sobre a inserção das práticas matemáticas históricas por meio de UBP no ensino de Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – V. 3, n. 8, p. 59 – 70, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/77/30. Acesso em: 26 ago. 2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. Projeto Político-Pedagógico do Curso de Pedagogia/ Campus Central. Natal: CONSEPE, 1994. Disponível em: http://arquivos.info.ufrn.br/arquivos/2010010158cd374476597310c01ed9d5/PPP$_{P}edagogia.pdf.Acessoem: 20abr.$2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. Projeto Pedagógico - Curso Superior de Licenciatura em Pedagogia/ CERES-Caicó. Natal: Edufrn, 2018. Disponível em: https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/ppp.jsf?lc=pt$_{B}Rid = 2000064. Acessoem: 05nov.$2020.

WALL, Edward S. **Teoria dos Números para professores do ensino fundamental**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: AMGH, 2014.

Apêndice A

Apresentaremos aqui as ementas de todas as disciplinas relacionadas à Matemática de alguns cursos de Pedagogia de vários estados brasileiros, as quais pesquisamos e apresentamos na seção 2.1. Mostraremos também a carga horária total de cada curso e as cargas horárias de cada disciplina.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – 3255h

• Educação Matemática I – 75h

Estudo de noções espaciais, topológicas e geométricas. Estudo do número. Estudo do sistema de numeração decimal, do campo numérico dos Naturais e dos Racionais e suas operações aritméticas. Introdução ao pensamento algébrico. Abordagem dos conteúdos em seus aspectos teórico-metodológicos, com a inclusão de exercícios de docência.

• Educação Matemática II – 45h

Estudo da geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística. Abordagem dos conteúdos em seus aspectos teórico-metodológicos, com a inclusão de exercícios de docência. Ênfase na educação de crianças, jovens e adultos. Inclui atividades práticas voltadas à formação de professores.

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) – 3672h

• Educação Matemática e Infância – 72h

Concepções de Matemática e Educação Matemática. Matemática e suas relações com a infância. Ensino e aprendizagem da Matemática e suas relações com a sociedade.

• Fundamentos e Metodologia da Matemática – 72h

Conceito de número e suas aplicabilidades. As operações fundamentais no conjunto dos Naturais e dos Racionais. Estudo da geometria euclidiana. Novas tendências em Educação Matemática e suas relações com a pesquisa.

Universidade Federal do Paraná (UFPR) – 3200h

• Metodologia do Ensino de Matemática – 30h

Contextualização histórica. Fundamentos teóricos e metodológicos do ensino de matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Universidade de São Paulo (USP) – 3240h

• Fundamentos Teórico-metodológicos do Ensino de Matemática – 30h

Conteúdos e Objetivos do ensino de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental; Fundamentação psicológica do ensino de matemática nas séries iniciais; Estudo de propostas de ensino para os principais conteúdos de Matemática do currículo do 1º segmento do ensino fundamental; Recursos metodológicos para o ensino de matemática: o jogo, materiais estruturados, a história do conceito, a resolução de problemas, tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) e respectivas implicações didáticas no ensino de Matemática; Discussão e elaboração de unidades didáticas do ensino de matemática: números, operações e cálculos, geometria e medidas, probabilidade e estatística; Análise de questões relevantes para o professor de matemática das séries iniciais: a) matemática e o processo de alfabetização; b) Matemática numa sociedade informatizada; c) Matemática como comunicação; d) A matemática como resolução de problema; e) O papel do lúdico no ensino de matemática; f) avaliação em matemática.

• Projeto Integrado de Estágio em Docência em Matemática e Ciências – 90h

Implicações didáticas de recursos à história das ciências e matemática para as práticas pedagógicas; Resolução de problemas e jogos como recurso didático; Uso das tecnologias da Informação e comunicação para o ensino de ciências e matemática; Planejamento, desenvolvimento e avaliação de atividades de ensino envolvendo conceitos de ciências e matemática; Organização do trabalho em sala de aula: Trabalho individual e coletivo; Unidades didáticas e projetos.

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – 3690h

• Didática da Matemática – 60h

Disciplina escolar Matemática: aspectos históricos e epistemológicos. A constituição dos conhecimentos científicos e escolares em matemática. A educação em matemática como área de pesquisa. Propostas curriculares, materiais didáticos e atividades de ensino para a disciplina escolar Matemática. Planejamento e avaliação da aprendizagem em Matemática.

Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) – 3545h

• Fundamentos e Metodologia do Ensino da Matemática I – 75h

Fundamentos da Educação Matemática. A gênese e a historicidade da ciência matemática. Educação matemática: tendências e abordagens. Concepções de ensino na matemática. O processo de construção do pensamento matemático. O ensino da Matemática no Brasil. A Educação Matemática na Educação Infantil. Resolução de Problemas. Tratamento da Informação. Proposição teórico-metodológica no ensino da matemática na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com vistas à construção dos conceitos: de número, sistema de numeração decimal; as operações fundamentais de adição, subtração. Potenciação de números naturais.

• Fundamentos e Metodologia do Ensino da Matemática II – 75h

Matemática do cotidiano e matemática escolar. Etnomatemática. O lúdico nas aulas de Matemática. Proposição teórico-metodológica no ensino da matemática na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com vistas à construção dos conceitos: multiplicação e divisão. Números Racionais: Frações e Números Decimais: ideia, representação, operações fundamentais, porcentagem, potenciação, radiciação.

Universidade Federal do Tocantins (UFT) – 3225h

• Fundamentos e Metodologia do Ensino de Matemática – 60h

Estudo da construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento do raciocínio lógico abordando os aspectos epistemológicos e metodológicos. Retrospectiva histórica da matemática e as novas tendências os currículos de matemática da educação básica, enfatizando as relações matemáticas e operações do pensamento, matemática e comunicação, matemática e suas aplicações cotidianas. Objetivos do ensino da matemática, discutindo os conceitos matemáticos como componentes do ensino da matemática na educação infantil e ensino fundamental.

Universidade de Brasília (UNB) – 3330h

• Educação Matemática I – 60h

Desenvolvimento do conteúdo básico de matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental procurando desenvolver uma metodologia de ensino de acordo com os preceitos fundados nas teorias construtivistas. O estudo teórico associado às práticas no campo da Educação Matemática deverá permitir ao graduando: planejar ações de intervenção didática tendo em vista objetivos educacionais, assim como desenvolver competências essenciais no contexto da didática específica da matemática a partir de um saber teórico/prático sobre as capacidades e as possibilidades de construção de conhecimento pelo sujeito (criança ou adulto em início de escolarização) considerando o desenvolvimento psicomotor, cognitivo, afetivo e social do aluno aprendiz.

Universidade Federal do Acre (UFAC) – 3525h

• Ensino de Matemática I – 60h

A construção do conceito do número: conservação das quantidades, correspondências termo a termo cardinal e ordinal, seriação, reversibilidade, história e conceito do sistema de numeração; A teoria dos campos conceituais: estruturas aditivas e multiplicativas.

• Ensino da Matemática II – 60h

Geometria: relações espaciais e as formas geométricas; Sistema de medidas; tratamento da informação; A matemática e os diversos temas transversais.

Universidade Federal de Roraima (UFRR) – 3228h

• Estatística e Educação – 60h

Importância e aplicação de conceitos básicos: A estatística como instrumento de pesquisa educacional: Análise de situações problemas da realidade educacional brasileira: Coleta e apresentação de dados: Séries estatísticas: Tabelas e gráficos.

• Conteúdos e Fundamentos Metodológicos do Ensino de Matemática – 60h

Conjunto de recursos, procedimentos e habilidades envolvidas no processo de ensino– aprendizagem da matemática.

Universidade Federal do Pará (UFPA) – 3220h

• Fundamentos Teórico Metodológicos o Ensino da Matemática – 75h

Concepções da Matemática, o papel da Matemática na Educação Infantil, nos anos iniciais do Ensino Fundamental e EJA. Organização e seleção de conteúdos para o ensino de Matemática. Propostas Metodológicas e elaboração de recursos didáticos acessíveis para o ensino da Matemática. Análise de programas oficiais e alternativos.

Universidade Federal do Amazonas (UFMA) – 3675h

• Fundamentos e Metodologia do Ensino de Matemática – 60h

Repensando a História da Matemática: O que é a matemática? Breve histórico da Matemática no Brasil e no mundo. O ser humano e a matemática: a necessidade de contar. A construção numérica: um breve histórico. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. As Teorias de Piaget e Vigotski para Compreensão dos Processos de Ensino da Matemática. O ensino da matemática: contributos pedagógicos de Piaget e Vigotski. A linguagem matemática na educação da primeira infância: a contribuição da Escola de Vigotski para o ensino da matemática. o campo conceitual das estruturas aditivas. O Campo conceitual das estruturas multiplicativas. Discutindo os Campos Matemáticos no Ensino da Matemática. Que matemática é preciso saber para ensinar na educação infantil? A diferenciação entre figuras geométricas não planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. A educação estatística na educação infantil e nos anos iniciais. A relação conhecimento matemático versus conhecimento pedagógico na formação do professor de Matemática: um estudo histórico. Refletindo Sobre as Propostas Curriculares Oficiais Matemática e infância no Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil: um olhar a partir da teoria histórico-cultural. O ensino da matemática nos parâmetros curriculares nacionais e estaduais.

• Estatística Aplicada à Educação – 60h

Os métodos estatísticos; Técnicas de amostragem; Distribuição de frequência; Medidas; Controle Linear; Gráficos e Tabelas.

Universidade Federal do Piauí (UFPI) – 3015h

• Didática da Matemática - 75h

Concepções de ensino e de aprendizagem de matemática. Aspectos teórico- metodológicos do ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Conteúdos estruturantes para o ensino e a aprendizagem de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Materiais didáticos, experiências e projetos para o ensino e a aprendizagem de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Universidade Federal de Sergipe (UFS) – 3255h

• Ensino de Matemática para Anos Iniciais do Ensino Fundamental - 60h

Operações Fundamentais nos Conjuntos dos Números Naturais e Racionais. O Sistema de Medidas e a Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os Livros Didáticos e Paradidáticos para o Ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Políticas Públicas de Avaliação do Ensino da Matemática.

Universidade Federal do Pernambuco (UFPE) – 3210h

• Fundamentos do Ensino da Matemática I- 75h

Estudos das dimensões epistemológicas (preliminares matemáticos, evolução histórica dos conceitos, obstáculos epistemológicos); didáticas (sequências de ensino, situações-problema, obstáculos didáticos, análise dos contextos de ensino), cognitiva (desenvolvimento dos conceitos no indivíduo) do processo de ensino aprendizagem do conceito de número e de estruturas aditivas (adição e subtração) na educação infantil e nas séries iniciais do ensino fundamental.

• Fundamentos do Ensino da Matemática II – 45h

Estudo das dimensões epistemológicas (evolução histórica dos conceitos e obstáculos epistemológicos); cognitiva (desenvolvimento conceitual) e didáticas (sequências de ensino, contextos de ensino, situações-problema e obstáculos didáticos) do processo de ensino aprendizagem na educação infantil, nas séries iniciais do ensino fundamental e na educação de jovens e adultos de: estruturas multiplicativas (multiplicação, divisão razão, proporção, fração), grandezas e medidas e geometria.

Universidade Federal do Ceará (UFC) – 3216h

• Estatística Aplicada à Educação - 64h

A estatística e o método científico. Conceitos preliminares. Apresentação tabular e gráfica. Medidas de tendência central. Medidas de dispersão. Estudo de um modelo matemático para a descrição de dados. Medidas de associação. Cálculo do coeficiente de correlação linear de Pearson. Estatística descritiva e a estatística inferencial.

• Ensino de Matemática – 96h

PCN: a relação Professor de Matemática e Matemático. Metodologias para o ensino da Matemática: a Engenharia Didática e a resolução de problemas. Mediação no ensino da Matemática: a Sequência Fedathi. A concepção de número na Matemática e segundo Piaget. Expansão p-ádica de números naturais e o sistema de numeração. Operações fundamentais: algoritmos, epistemologia e justificativa. Geometria: a diferença entre desenho e figura. Construções geométricas usando instrumento. O desenvolvimento do raciocínio algébrico e seus estágios. Medidas de comprimento, área e volume. Números decimais e fracionários. Oficinas pedagógicas: aplicação das teorias e dos conceitos desenvolvidos usando materiais analógicos e digitais. Livros didáticos e paradidáticos.

Universidade Federal da Paraíba (UFPB) – 3210h

• Ensino de Matemática – 60h

Ensino de Matemática na Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental: Fundamentos, conteúdos e procedimentos didáticos. Perspectivas no ensino de Matemática: jogos, resolução de problemas no ensino de Matemática e as novas tecnologias.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – Natal – 3220h

• Ensino da Matemática I – 60h

Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos. Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais. Sistemas de numeração, números e operações no campo dos números naturais. Tratamento da Informação: coleta, organização, comunicação e interpretação de dados. Planejamento e práticas pedagógicas na Educação Infantil, na Educação de Jovens e Adultos e em contextos não escolares.

• Ensino da Matemática II – 60h

Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil, nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos. Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais. Números e operações no campo dos racionais absolutos. Formas geométricas planas e tridimensionais. Organização espacial: representação, interpretação, localização e movimento de objetos no espaço. Simetria. Grandezas e Medidas. Planejamento e práticas pedagógicas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Referências

Site da UFRGS. Disponível em https://www.ufrgs.br/pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFSC. Disponível em https://pedagogia.paginas.ufsc.br/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFPR. Disponível em http://www.pedagogia.ufpr.br/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da USP. Disponível em https://www5.usp.br/ensino/graduacao/cursos-oferecidos/pedagogia. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFRJ. Disponível em http://www.educacao.ufrj.br/graduacao/coordenacao-de-pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFMT. Disponível em https://www1.ufmt.br/ufmt/un/secao/2447/PROEG. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFT. Disponível em https://ww2.uft.edu.br/index.php/pedagogia-palmas. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UNB. Disponível em http://www.fe.unb.br/index.php/graduacao. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFAC. Disponível em https://portal.ufac.br/ementario/cursos.action. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFRR. Disponível em http://ufrr.br/pedagogia/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFPA. Disponível em https://faced.ufpa.br/index.php/disciplinas/87-grade-curricular. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFAM. Disponível em http://faced.ufam.edu.br/. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFPI. Disponível em https://sigaa.ufpi.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/28663909. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFS. Disponível em https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/12686625. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFPE. Disponível em https://www.ufpe.br/documents/39399/0/pedagogia. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFC. Disponível em https://si3.ufc.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFPB. Disponível em https://sigaa.ufpb.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/2702559. Acesso em 28 abr 2020.

Site da UFRN. Disponível em https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf. Acesso em 28 abr 2020.

Apêndice B

Apresentamos a seguir o produto educacional, em formato de livreto, que pretendemos utilizar em um minicurso de formação continuada para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, na cidade de Caicó no Rio Grande do Norte.

‘

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL: HISTÓRIA E

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

José Acácio de Araújo

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Natal – RN

2020

JOSÉ ACÁCIO DE ARAÚJO
GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL: HISTÓRIA E OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

NATAL - RN
2020

SUMÁRIO

Apresentação

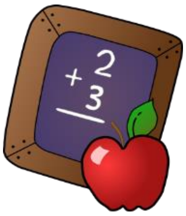
Caro(a) professor(a),

Esse livreto é fruto de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que teve como tema central o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com Números Naturais. O nosso principal objetivo foi elaborar um material didático que possa ser usado na formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

As atividades contidas nesse material foram elaboradas para o uso em um minicurso e incluem duas Unidades Básicas de Problematização.

Ao término da apresentação das atividades do minicurso, trazemos uma lista contendo sugestões de links e materiais complementares que buscam fornecer um maior aprofundamento cultural e conceitual sobre temas relativos aos Números Naturais e suas operações fundamentais, além de, subsidiar a elaboração de outras atividades voltadas para o uso em sala de aula.

José Acácio e Gabriela



INTRODUÇÃO

Consideramos que o conteúdo de Números Naturais é essencial nos primeiros anos de escolaridade. O aluno que chega ao final do 5° ano do Ensino Fundamental dominando as operações fundamentais com os números naturais certamente terá grande facilidade em toda a sua vida escolar. Mas, para isso, é necessário que o professor também as domine e, além disso, disponha de conhecimentos além do que ele vai ensinar, facilitando assim o desenvolvimento de metodologias que possibilitem uma aprendizagem significativa.

Nessa perspectiva, vimos na criação de Unidades Básicas de Problematização, ou simplesmente UBPs, uma oportunidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Miguel e Mendes (2010, p. 386, tradução nossa)

> A UBP é um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história.

Ao longo do tempo, a Matemática evoluiu de acordo com a necessidade da humanidade em tornar a vida mais fácil e resolver problemas relacionados ao cotidiano. Sendo assim, a UBP é explorada a partir de um fato histórico sociocultural de natureza indisciplinar, ou seja, que não é específico de uma determinada disciplina. A partir dele, elaboramos problematizações, que, no nosso caso, abordarão, principalmente, o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais com os números naturais.

O uso de UBPs na formação de professores pode ser um rico recurso metodológico, pois possibilita a construção do conhecimento por meio de práticas sociais, favorecendo o pensamento crítico do sujeito. De acordo com Tavares e Pereira (2016, p. 11),

> A proposta de produção de UBP na formação de professores de matemática pode ser uma opção didática que possibilita um melhor aproveitamento do processo de ensino e aprendizagem de matemática, por trabalhar de maneira agradável e instigante os conteúdos matemáticos com a finalidade de que a Educação Básica realmente forme o aluno, tornando-o crítico e agente ativo na transformação da sociedade.

As atividades a serem desenvolvidas têm cunho investigativo, no sentido de que os professores podem trabalhar coletivamente na elaboração de respostas para os questionamentos, discutir e socializar para uma posterior reflexão sobre o conteúdo trabalhado, seu conhecimento sobre ele e sua prática docente.

As duas UBPs que apresentaremos na elaboração deste material foram pensadas de forma que possamos resgatar fatos históricos socioculturais associados aos sistemas de numeração de diversas civilizações, culminando com os números naturais e suas operações, desde sua invenção até a disseminação do uso do sistema de numeração decimal e seu uso nos dias atuais.

ORIENTAÇÕES GERAIS

As atividades propostas foram elaboradas de acordo com as ideias de Miguel e Mendes (2010), e Tavares e Pereira (2016), por meio de textos com informações históricas retiradas, principalmente, de Boyer (1974), Ifrah (1994), Eves (2004), Roque (2012) e Wall (2014). A partir dos mesmos, elaboramos um livreto contendo questionamentos de cunho investigativo e reflexivo, a partir do qual os professores poderão ampliar os seus conhecimentos acerca dos temas propostos.

Esse material foi elaborado para ser utilizado em um minicurso com duração de 8 horas, dividido em dois momentos de 4 horas cada. O público alvo é, preferencialmente, professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No primeiro momento, os livretos serão repassados aos participantes em formato digital e, se houver disponibilidade, na forma impressa. Inicialmente, é oportuno fazer uma explanação sobre as UBPs e a necessidade da formação continuada de professores. Em seguida, discutiremos a problematização da **UBP 1 - O Sistema de Numeração Indo-Arábico e sua disseminação na Europa Ocidental**, e os professores serão orientados a formarem pequenos grupos para discutirem entre si e realizarem as investigações sugeridas por meio de questionamentos. A cada questionamento é sugerido que haja investigação, discussão, reflexão e posterior registro. Após essa etapa, será convidado um representante por grupo para socialização e discussão das respostas encontradas.

No segundo momento, faremos a explanação da **UBP 2 – As operações aritméticas básicas e os povos antigos**, seguindo o mesmo procedimento do primeiro momento. Ao final, faremos as considerações finais e apresentaremos algumas sugestões de materiais que poderão ser usados na elaboração de outras UBPs, que possam ser utilizadas em aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

PRIMEIRA ATIVIDADE

UBP 1 - O Sistema de Numeração Indo-Arábico e sua disseminação na Europa Ocidental

Problematização:

A representação dos números e a maneira de operá-los nem sempre foi a que conhecemos hoje. Ao longo do tempo, a humanidade desenvolveu diversos símbolos, até chegar aos algarismos que usamos na atualidade quase que universalmente. Quanto ao sistema de numeração mais usado na atualidade, é o decimal, cuja invenção se deu na Índia por volta do século V d. C., sendo adotado pelos árabes, com quem mantinham fortes relações comerciais, por volta do século VIII.

Até então, o sistema numérico mais usado no mundo ocidental para representar os números era o Romano. As operações eram feitas por pessoas com um grau de conhecimento avançado, chamados calculadores, que usavam o ábaco como instrumento para realizar os cálculos. A disseminação do sistema de numeração indo-arábico foi fruto de um longo processo. Havia bastante rejeição, principalmente por questões religiosas. Acredita-se que o comércio e suas necessidades de cálculos cada vez maiores foi decisivo na aceitação do novo sistema.

Todavia, os métodos de cálculo desenvolvidos pelos hindus só vulgarizou amplamente com o trabalho do matemático persa Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (783-850), que escreveu uma obra expondo pela primeira vez o sistema numérico decimal, que usa dez símbolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, para representar qualquer número natural, sendo que a partir do 10 o valor do símbolo depende da ordem em que ele se encontra. Na obra chamada de Tratado Aritmético de al-Khwarizmi, ele também expõe o modo de calcular dos indianos, que facilitaria bastante as operações com números naturais.

Figura 1: al-Khwarizmi

Fonte: https://pixabay.com/pt/vectors/al-khwarizmi-matem%C3%A1ticos-algoritmi-1105193/. Acesso em 10 out. 2020.

Conteúdos: Sistema de numeração decimal: invenção, disseminação pelo Ocidente e representação.

Objetivos: Explorar o sistema de numeração decimal por meio do processo histórico até a sua representação atual.

Público-alvo: Professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Metodologia: Nossa UBP foi estrutura para um minicurso de formação continuada para professores de Matemática dos anos iniciais, com duração de quatro horas, com explanação do tema, seguida de resoluções e discussões dos questionamentos.

Recursos necessários: Lápis, borracha, papel para anotações e dispositivo eletrônico conectado à internet.

Questionamentos

01. É comum encontrarmos em livros didáticos no Ensino Fundamental algumas historinhas sobre a invenção dos números. A maioria delas diz que na Antiguidade os pastores controlavam seu rebanho associando ou fazendo talhas em pedaços de madeiras ou ossos, fazendo correspondência com os seus animais. Isso significa que o que veio primeiro foi a contagem ou os números?

02. Em qual período histórico e onde se deu a invenção do sistema de numeração posicional que utilizamos atualmente?

03. Faça uma pesquisa sobre como eram feitas as operações numéricas na Europa ocidental antes da chegada do sistema decimal posicional.

04. A disseminação do sistema de numeração indo-arábico pela Europa Ocidental se deu, segundo alguns historiadores, pelo trabalho de al-Khwarizmi. Fale um pouco da vida e obra deste grande matemático.

05. O sistema de numeração decimal utiliza dez símbolos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, que chamamos de algarismos para compor um número natural. Pesquise sobre a origem dessa palavra. Explique a diferença entre número e algarismo.

06. O sistema de numeração indo-arábico é decimal porque tem base dez, e é posicional porque cada algarismo, além de seu valor absoluto, tem um valor relativo, que depende da posição ocupada por ele em uma potência de 10. Qualquer número natural pode ser escrito através de uma expansão decimal, como nos exemplos:

- $564 = 5.100 + 6.10 + 4.1 = 5.10^2 + 6.10^1 + 4.10^0$
- $4798 = 4.1000 + 7.100 + 9.10 + 8.1$
  $= 4.10^3 + 7.\,10^2 + 9.\,10^1 + 8.10^0$
- $10123 = 1.10000 + 0.1000 + 1.100 + 2.10 + 3.1$
  $= 1.10^4 + 0.\,10^3 + 1.10^2 + 2.10^1 + 3.10^0$

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda, e cada três ordens forma uma classe. Faça a expansão decimal posicional do número 23965114 e identifique as classes e as ordens.

07. (ENEM 2014 – Adaptada) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam

unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 2a, o *quipus* representa o número decimal 2453. Para representar o "zero" em qualquer posição (figura 2b), não se coloca nenhum nó.

Figura 2: *Quipus*

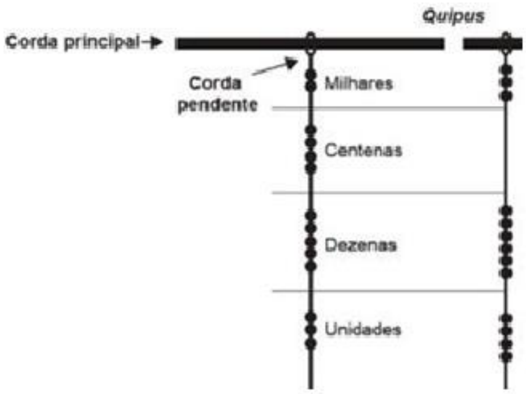


Figura 2a Figura 2b

Fonte: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2014/. Acesso em 10 out. 2020.

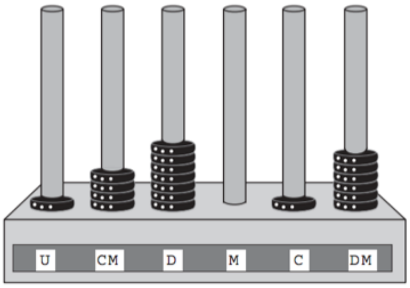
a) Qual o número na base decimal representado na figura 2b e sua expansão decimal?
b) Como você faria a soma desses dois números utilizando o *quipus*. Explique.

08. (ENEM 2016 – Adaptada) O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM, que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da extrema direita e as

demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Figura 3: Modelo de ábaco



Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/d9da46ba-a6. Acesso em: 11 out. 2020.

a) Na disposição da figura 3, qual é o número que está representado? Represente a expansão decimal desse número.

b) Se os adesivos tivessem sido colocados seguindo a disposição usual, qual seria o número representado? Represente a expansão decimal desse número.

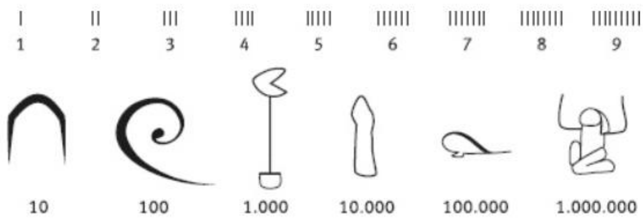
09. O sistema numérico egípcio, assim como o sistema decimal, também era baseado em agrupamentos de potências de 10. Cada uma dessas potências era representada por um hieróglifo. A maior parte do nosso conhecimento sobre esse sistema vem do Papiro de Moscou (1850 a.C.) e do Papiro de Rhind (1650 a.C.).

Figura 4: Papiro de Rhind

Fonte: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-da-matematica-egipcia-papiro-moscou.html. Acesso em: 10 out. 2020.

A seguir, mostramos a equivalência entre hieróglifos e algumas potências de 10 do sistema decimal.

Figura 5: Algarismos hieroglíficos egípcios.



Fonte: Roque (2012, p. 60).

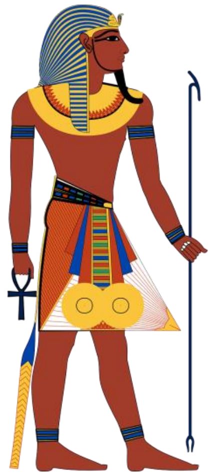
Figura 6: Representação do número 3244 por meio do sistema hieroglífico egípcio.

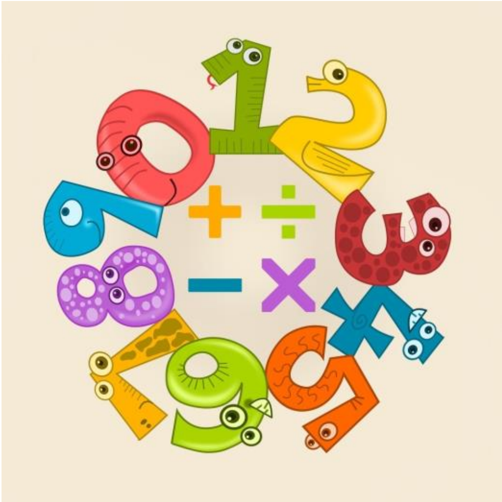
Fonte: Roque (2012, p. 60).

a) Pesquise: o que são hieróglifos?

b) Represente na escrita hieroglífica os seguintes números: 458, 5602 e 10234.

c) De acordo com o exemplo representado na figura 6, podemos dizer que o sistema egípcio era posicional? Por quê?





SEGUNDA ATIVIDADE

UBP 2 – As operações aritméticas básicas e os povos antigos

Problematização:

Depois de aprender a contar, as crianças são instigadas a operar com os números. Logo nos primeiros anos do Ensino Fundamental, são ensinadas a somar e a subtrair. Em seguida, vem a multiplicação e, por último, a divisão. Hoje conhecemos os algoritmos que tornaram essas operações relativamente fáceis, graças ao desenvolvimento do sistema de numeração decimal e a expansão decimal dos números.

Nem sempre foi assim. Muitos povos antigos tinham suas maneiras de realizar as operações com números naturais. Os precursores dos algoritmos convencionais atuais foram os contadores que realizavam as operações em ábacos ou em tábuas de contagem, que prevaleceram como os principais instrumentos de cálculo até o século XVI.

O que se sabe a respeito das primeiras práticas de adição surgiu de especulações para a utilização dos primeiros dispositivos de cálculo e da análise de contas financeiras. A exemplo disso, temos a tabuleta de argila de Babilonian Yale Collection, datada de 3000 a.C.

Figura 7: Tabuleta de argila de Babilonian Yale Collection datada de 3000 a.C.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-b2-traced.png. Acesso em: 10 out. 2020.

A exemplo do que aconteceu com a adição, a subtração não possui muitos registros históricos. O que sabemos sobre a subtração é meramente especulativo e vem do uso dos primeiros dispositivos para cálculo e de documentos antigos, tais como a análise de contas judiciais e financeiras.

Com relação à multiplicação e à divisão, os primeiros registros datam em torno de dois milênios antes de Cristo com os Egípcios, que usavam a duplicação até chegar ao resultado final.

Outros povos, ao longo do tempo, desenvolveram métodos de operar com os números naturais.

Conteúdos: Operações básicas com números naturais: da antiguidade aos dias atuais.

Objetivos:

- Comparar os algoritmos usados por povos antigos com os usados atualmente;
- Justificar os algoritmos usados para resolver as operações fundamentais com os números naturais, usando a expansão decimal posicional dos números.

Público-alvo: Professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Metodologia: Nossa UBP foi estruturada para um minicurso de formação continuada para professores de Matemática dos anos iniciais, com duração de quatro horas, com explanação do tema, seguida de resoluções e discussões dos questionamentos.

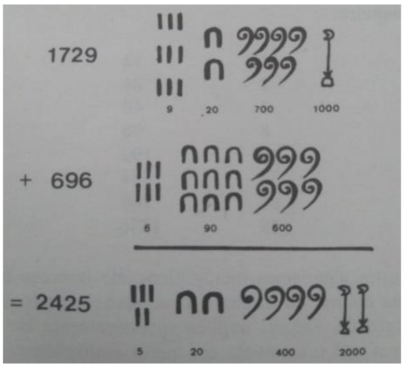
Recursos necessários: Lápis, borracha, papel para anotações e dispositivo eletrônico conectado à internet.

Questionamentos

01. (IFRAH, 1994, p. 166) Bem antes de Cristo, os Egípcios já sabiam fazer operações numéricas com seus algarismos. Eles usavam hieróglifos para representar cada potência de 10, mas não era posicional. A adição era feita da esquerda para a direita, justapondo as representações dos números a somar, agrupando os símbolos idênticos, substituindo cada dez símbolos iguais pelo da classe decimal imediatamente superior.

    Vejamos um exemplo da soma de 1729 com 696. Na figura 8, abaixo, os números estão representados pelos hieróglifos egípcios e também por numerais indo-arábicos.

Figura 8: Exemplo de uma soma feita com hieróglifos egípcios



Fonte: Ifrah (1994, p. 167)

A partir do texto de Ifrah, resolva:

a) Efetue a soma acima usando a expansão decimal dos números e faça uma comparação entre as duas maneiras.
b) Usando o mesmo raciocínio feito pelos egípcios para a adição, faça a subtração de 1729 por 696 por meio dos hieróglifos e, em seguida, faça a mesma subtração usando a expansão decimal e compare as duas maneiras.

02. (IFRAH, 1994, p. 166) Estamos no ano 2000 a. C., na casa de um agricultor de cereais na região de Mênfis. Ao final da colheita, um funcionário do fisco vem controlar o estágio de produção e fixar o montante do imposto anual. Este encarrega alguns trabalhadores de medir o grão por alqueire e de embalá-los nos sacos.

A colheita ofereceu neste ano dois tipos de trigo: o amido e a espelta, além da cevada comum. Para não se enganar com relação à variedade de cereais, os trabalhadores repartem o amido em fileira de doze sacos, a espelta em fileiras de quinze sacos, e a cevada em grupos de dezenove sacos, correspondendo esses grupos respectivamente aos números 128, 84 e 369.

Ao final desta operação, o funcionário pega uma lasca de pedra que lhe serve de "rascunho" e efetua alguns cálculos com o auxílio dos algarismos hieróglifos.

Resolução

Para saber quantos sacos de cada cereal, o contador efetuou a operação de multiplicação, que consistia apenas em fazer duplicações sucessivas. Para saber a quantidade de sacos de amido, o contador efetua a multiplicação de 128 por 12, realizando o seguinte procedimento: coloca o multiplicador 12 em uma coluna à direita e o número 1 na frente em uma coluna à esquerda. Depois, duplica sucessivamente cada um dos dois números, até o momento em que aparece o multiplicando 128 na coluna da esquerda. Neste momento, aparece o número 1 536 na coluna da direita. Este é o resultado da multiplicação de 128 por 12.

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768
128	1536

Para determinar o número de sacos de espelta, ele multiplica 84 por 15 da mesma forma. No entanto, o multiplicando 84 não irá aparecer na coluna da esquerda, pois o mesmo não é potência de 2. Neste caso, ele prossegue a duplicação até aparecer o maior número contido neste multiplicando. Em seguida, procura na coluna da esquerda os números cuja soma seja 84 e destaca-os. A soma dos números da coluna da direita que correspondem aos números destacados na coluna da esquerda é o resultado da multiplicação.

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240
32	480
64	960

Então, 84 x 15 = 960 + 240 + 60 = 1260

A partir do texto de Ifrah, resolva:

a) Utilize o procedimento do calculador egípcio para determinar o número de sacos de cevada.

b) Justifique o procedimento usado pelos egípcios por meio da propriedade distributiva.

c) Efetue as multiplicações acima usando o algoritmo convencional e explique-as usando a expansão decimal.

03. (IFRAH, 1994, p. 170) Próximo a Tebas, no vale dos reis, no tempo do faraó Ramsés II (1290-1224 a. C.), pilhadores de túmulos acabam de roubar o túmulo real de um soberano da dinastia precedente. Eles furtaram diademas, brincos, adagas, peitorais, pingentes, etc., tudo trabalhado em ouro incrustado de pasta de vidro.

São 1476 objetos preciosos, e o chefe dos pilhadores propõe repartir o saque entre ele próprio e seus homens. Pega um caco de cerâmica e faz a divisão de 1476 por 12.

<u>Resolução</u>

Ele programa sua operação como se fosse uma multiplicação por 12, escrevendo o número 1 na coluna da esquerda e 12, o divisor, na coluna da direita. Em seguida, dobra sucessivamente cada um desses números, parando quando, na coluna da direita, aparece o maior número possível menor do que o dividendo 1476. Então, procura nesta coluna os números que somados dão este dividendo, destacando-os. E, finalmente, soma, na coluna da esquerda, os números correspondentes aos números destacados na coluna da direita. Esta soma é o resultado da divisão de 1476 por 12.

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192
32	384
64	768

Então, $1476 \div 12 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 123$

Cada um dos pilhadores pegou 123 objetos.

A partir de texto de Ifrah, resolva:

a) Efetue a divisão acima usando o algoritmo convencional e explique-o usando expansão decimal.

b) No problema exposto, o dividendo é múltiplo do divisor. Se não fosse, o processo daria certo? Justifique.

04. Um professor pediu a um aluno que efetuasse a adição 254 + 384, utilizando o algoritmo da expansão decimal dos números. Obteve como resposta os seguinte passos:

$254 = 2.100 + 5.10 + 6.1$

$384 = 3.100 + 8.10 + 4.1$

Somando-os, temos

$$
\begin{aligned}
256 + 384 &= 2.100 + 5.10 + 6.1 + 3.100 + 8.10 + 4.1 && \text{Passo 1}\\
&= 2.100 + 3.100 + 5.10 + 8.10 + 4.1 + 4.1 && \text{Passo 2}\\
&= (2 + 3).100 + (5 + 8).10 + (4 + 4).1 && \text{Passo 3}\\
&= 5.100 + 13.10 + 8.1 && \text{Passo 4}\\
&= 5138 && \text{Passo 5}
\end{aligned}
$$

De acordo com a apresentação do aluno, responda:

a) Qual a propriedade usada na passagem do passo 2 para o passo 3?

b) Justifique o erro na passagem do passo 4 para o passo 5.

c) Reescreva a solução a partir do passo 4, corretamente.

d) Efetuando a soma acima da forma convencional, temos:

$$
\begin{array}{r}
254\\
+\ \underline{384}\\
638
\end{array}
$$

Quando somamos os algarismos da ordem das dezenas $5 + 8 = 13$, colocamos o 3 e o “vai 1” para a ordem das centenas, somando com os algarismos já existentes. Explique esse procedimento, relacionando com a solução do item c.

05. Na Grécia antiga, a multiplicação era realizada da seguinte maneira: cada algarismo (com seu valor posicional) do multiplicador, iniciando da esquerda para a direita, era operado com cada algarismo (com seu valor posicional) do multiplicando, também iniciando da esquerda para a direita. A última etapa era somar os valores obtidos anteriormente. Veja o exemplo:

$$
\begin{array}{r}
241 \\
\times \quad 12 \\
\hline
2000 \\
400 \\
+ \quad 10 \\
400 \\
80 \\
2 \\
\hline
2892
\end{array}
$$

Observe que a soma $2000 + 400 + 10 = 2410$, e que $400 + 80 + 2 = 482$. Para obter o resultado final, fazemos $2410 + 482 = 2892$.

a) Resolva a multiplicação acima pelo método convencional e compare com o método grego.

b) Observe que foi usado algo parecido com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ou seja, $241.12 = 241(10 + 2) = 241.10 + 241.2 = 2410 + 482$. Justifique a solução do item "a" usando a expansão decimal e a propriedade distributiva.

06. Vejamos abaixo uma multiplicação resolvida erroneamente pelo algoritmo convencional, por falta de conhecimentos conceituais.

$$
\begin{array}{r}
154 \\
\times \quad 323 \\
\hline
462 \\
+ \quad 308 \\
462 \\
\hline
1232
\end{array}
$$

Explique porque está errada e resolva corretamente.

07. O algoritmo usado atualmente para efetuar divisões, diferente das outras operações básicas, é desenvolvido da esquerda para a direita. Vejamos a sua aplicação no exemplo abaixo, com a devida justificativa.

$$
\begin{array}{r|l}
3456 & 11 \\ \cline{2-2}
-\underline{33} & 314 \\
15 & \\
-\underline{11} & \\
46 & \\
-\underline{44} & \\
2 &
\end{array}
$$

No dividendo, temos 3 unidades de milhar, que não é possível dividir por 11. Então, transformamos em centenas, obtendo 30 centenas, as quais, somadas com as 4 centenas já existentes, resultam em 34 centenas. Estas, divididas por 11, dá 3 centenas e sobra 1 (por isso que começamos a dividir o 34 por 11). Sobrou 1 centena, que transformamos em 10 dezenas, que somadas com as 5 existentes, resulta em 15 dezenas; que divididas por 11, dá 1 dezena e sobram 4, que transformamos em 40 unidades, que somadas com as 6 existentes, ficam 46 unidades, que divididas por 11 dá 4 e sobram 2 unidades.

Então, encontramos o quociente 314 e o resto 2.

a) Efetue a divisão 25487 por 52, explicando todos os passos.

b) A divisão proposta e resolvida no enunciado consiste em encontrarmos um quociente q e um resto r; tais que $3456 = 11.q + r$; com $r \in \mathrm{N}$, $0 \leq r < 11$. Para isso, escrevemos 3456 na forma decimal, e, em seguida, procuramos escrever os termos como múltiplo de 11. Veja:

$$
\begin{aligned}
3456 &= 3000 + 400 + 50 + 6 \\
&= 3000 + 300 + 100 + 50 + 6 \\
&= 30.100 + 3.100 + 10.10 + 1.10 + 4.10 + 4.1 + 2 \\
&= 11.300 + 11.10 + 11.4 + 2 \\
&= 11(300 + 10 + 4) + 2 \\
&= 11.314 + 2
\end{aligned}
$$

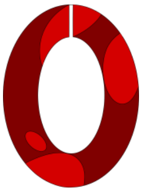
Daí, encontramos $q = 314$ e $r = 2$

Use o mesmo raciocínio para encontrar o quociente e o resto da divisão proposta no item “a”.

SUGESTÕES DE MATERIAIS

- **Figuras grátis para novas UBPs:** PIXABAY, Site de figuras. https://pixabay.com/pt/.
- **Vídeos sobre história da Matemática**: Videoteca dos clubes de Matemática da OBMEP: http://clubes.obmep.org.br/blog/nossa-videoteca/.
- **A história do número 1:** http://clubes.obmep.org.br/blog/video-012/.
- **A multiplicação e uma nova tabuada**: http://clubes.obmep.org.br/blog/video-065/.
- **É aquela base:** http://clubes.obmep.org.br/blog/video-018/.
- **Noves fora:** http://clubes.obmep.org.br/blog/video-036/.
- **Código de Barras.** http://clubes.obmep.org.br/blog/video-035/.
- **Material de formação continuada sobre números naturais:** http://professoresdematematica.com.br/wa_files/01Matematica_20Series_20Iniciais_Numeros_20Naturais.pdf.
- **Material do Programa Gestão da Aprendizagem Escolar:** http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp3.pdf.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

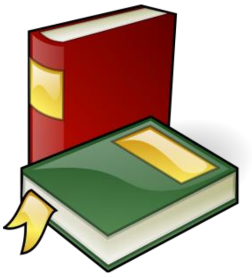



Esperamos que, com este material, você professor(a) dos anos iniciais possa ampliar seus conhecimentos e aprimorar sua prática pedagógica nas aulas de Matemática, proporcionando aos seus educandos um aprendizado mais significativo.

Enfatizamos que nossa ideia em trabalhar com UBPs se deu com o intuito de tentar tornar a matemática prazerosa, tendo em vista que a grande maioria dos professores desse nível de ensino não tem formação específica em Matemática.


Desejamos que você, professor(a), possa utilizar este livreto para fazer mais investigações e preparar aulas com mais segurança no ponto de vista conceitual.





REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

DICIO, **Dicionário Online de Português**. [Porto: 7Graus, 2020]. Disponível em: https://www.dicio.com.br/aurelio-2/. Acesso em: 10 out. 2020.

Dicionário Online - **Dicionário inFormal** - Significados, Definições, Sinônimos, Antônimos, Relacionadas, Exemplos, Rimas, Flexões. c2020. Disponível em: https://www.dicionarioinformal.com.br/. Acesso em: 10 out. 2020.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

IFRAH, Georges. **Os Números: a História de uma grande invenção.** Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 6. ed. São Paulo: Globo, 1994.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**, v. 42, p. 381–392, 2010.

PIXABAY, Site de figuras. Disponível em: https://pixabay.com/pt/. Acesso em 05 mar. 2020.

Site Descomplica. Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2014/. Acesso em: 10 out. 2020.

Site Matemática é fácil. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-da-matematica egipcia-papiro-moscou.html. Acesso em: 10 out. 2020.

Site q concursos. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/d9da46ba-a6. Acesso em: 11 out. 2020.

Site wikimedia. Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ybc7289-b2-traced.png. Acesso em: 10 out. 2020.

TAVARES, Mariana Oliveira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um estudo sobre a inserção das práticas matemáticas históricas por meio de UBP no ensino de Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 8, p. 59 – 70, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/77/30. Acesso em: 26 ago. 2020.

Wall, Edward S. **Teoria dos Números para professores do ensino fundamental**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: AMGH, 2014.

GLOSSÁRIO

- **Hieróglifo**: Escrita pictórica do antigo Egito, também usada para designar a escrita dos astecas e de outros grupos indígenas americanos.
- **Espelta:** Trigo, de qualidade inferior, cujo grão, pequeno e escuro, adere fortemente à gluma.
- **Pilhador:** O mesmo que saqueador.
- **Adaga:** Espada de lâmina larga e curta, terminada em ponta (séc. XIV a XVIII).
- **Peitoral:** Peça guarnecida de pedras preciosas, que os faraós e os grandes sacerdotes dos judeus usavam sobre o peito.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Matemática
PROFMAT – Mestrado em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT