UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

História do conceito matemático de função e seu ensino na escola básica

Daniel Ferreira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ________________________

Daniel Ferreira

História do conceito matemático de função e seu ensino na escola básica

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*.

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profª Drª Edna Maura Zuffi

USP – São Carlos

Junho de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi e Seção
Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Ferreira, Daniel
F184h História do conceito matemático de função e seu ensino na educação básica / Daniel Ferreira; orientadora Edna Maura Zuffi. -- São Carlos,2020.
103 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Função. 2. Ensino. 3. História da Matemática. 4. Geogebra. I. Zuffi, Edna Maura , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Daniel Ferreira

History of the mathematical concept of function and its teaching in High School

Master dissertation submitted to the Institute os Mathematicatics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*.

Concentration Area:Professional Mater Degree Program in Mathematics in Nathional Network

Advisor: Profª Drª Edna Maura Zuffi

USP – São Carlos

June 2020

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço a Deus, nosso Pai, pelo dom da vida e pela fortaleza durante esta caminhada.

Agradeço aos familiares e amigos que acreditaram na minha conquista e que sempre torceram pelo meu sucesso.

Agradeço, também, aos colegas de curso pelo companheirismo e momentos agradáveis durante o percurso.

Aos professores do curso pelo empenho e dedicação a cada momento.

Meus sinceros agradecimentos à Profª Drª Edna Maura Zuffi pela orientação neste trabalho, feita de modo profissional e com total dedicação.

Agradeço cordialmente à USP por ter aberto suas portas para que o programa fosse realizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Acknowledgements:

This study was financed in part by the *Coodenação de Aperfeiçoamente de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES)* – Finance Code 001.

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.”

(Irene de Albuquerque)

RESUMO

FERREIRA, Daniel. **História do conceito matemático de função e seu ensino na escola básica**. 2020. 105p. Dissertação (Mestrado em Matemática – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

O presente trabalho consiste no estudo do desenvolvimento histórico da ideia de função desde a Antiguidade até a forma como é utilizada atualmente no meio científico e matemático. Este levantamento visa a formação do professor de Matemática que, por algum motivo ou outro, não teve ou tem acesso a essas informações em sua graduação. A partir deste estudo e da análise de documentos oficiais sobre o tratamento do tema, elaborou-se uma sequência didática para aproveitamento em aulas de matemática da 1ª série do Ensino Médio. A proposta busca trabalhar o tema *função* numa abordagem diferenciada da tradicional, posicionando o aluno como protagonista do seu aprendizado. Utilizou-se, ainda, o software *Geogebra* como ferramenta de apoio. Como resultado, embora não tenha sido aplicada a referida proposta em sala de aula, os estudos para o seu planejamento foram importantes para a formação continuada deste professor e, aqui compartilhados, poderão orientar a formação de outros, para uma prática docente mais motivadora nesse ciclo de ensino.

Palavras-chave: Ensino, Função, História da Matemática, Geogebra.

ABSTRACT

FERREIRA, Daniel. **History of the mathematical concept of function and its teaching in High School**. 2020. 105p. Dissertation (Mestrado em Matemática – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

The present work consists of studying the historical development of the idea of function from antiquity to the way it is currently used in scientific and mathematical circles. This survey aims at training the mathematics teacher who, for some reason or another, did not have or has access to this information in his graduation. From this study and the analysis of official documents on the treatment of the theme, a didactic sequence was elaborated for use in mathematics classes of the 1st grade of High School. The proposal seeks to work on the function theme in a differentiated approach from the traditional one, placing the student as the protagonist of his learning. The Geogebra software was also used as a support tool. As a result, although the proposal was not applied in any classroom, the studies for its planning were important for the continued education of this teacher. Shared here, those studies may guide the training of others, for a more motivating teaching practice in this cycle of education.

Keywords: Teaching, Function, History of Mathematics, Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Desde minha infância, sempre tive um encanto especial pelas aulas de Matemática: o que me marcou muito foi uma experiência realizada na antiga 2ª série do Ensino Fundamental, onde a professora lançou um desafio à classe onde entregou uma folha com um quadriculado 3 x 3 e pediu que descobríssemos uma maneira de saber a quantidade de quadrinhos sem contar um a um. Eis que após um tempo, percebi que era só multiplicar a quantidade de linhas pela de colunas. Apresentando a resposta, fui recompensado com um simples lápis, mas isso me inspirou a querer saber mais.

Durante todo o período escolar, mantive grande apreço pela Matemática, inclusive ajudando os colegas em suas dificuldades.

Terminei o Ensino Médio em 2004, mas somente em 2008 pude ingressar na Graduação em Matemática, no Instituto Municipal de Ensino Superior de Catanduva – SP, no qual concluí o curso, em 2010. No início de 2011 iniciei outra graduação em Pedagogia, na modalidade a distância pela UNIUBE (Universidade de Uberaba), com pólo em Santa Adélia – SP, concluindo o mesmo em 2012.

Iniciei minha carreira na educação na rede municipal de Ensino de Taiaçu – SP, minha cidade natal, no ano de 2013 e, também, na rede estadual de ensino, sendo efetivado nesta no ano seguinte, com cargo em Araraquara – SP. Desde então, leciono nesta cidade, na qual passei por duas escolas. Atualmente também leciono com cargo efetivo na rede municipal de Araraquara. Por 3 anos consecutivos atuei no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, mas recentemente atuo apenas no primeiro, devido à disponibilidade nos meus horários e períodos. Na rede estadual, procuro dar preferência para os sextos anos. Como não há quantidade suficiente de professores titulares que assumam todas as salas e o tempo para vir um professor para as turmas pode demorar, acredito que uma ausência de professores neste ano escolar possa causar uma perda significativa no aprendizado dos estudantes, uma vez que neste ano, de início de ciclo, é necessário que se construa uma base sólida para que tenham um aprendizado eficaz em Matemática.

Tenho muito orgulho da profissão que escolhi. Acredito muito na educação, pois ela pode mudar vidas, mudar pessoas e até mesmo uma sociedade. Sabendo também das dificuldades que os alunos do Ensino Médio possuem para continuar a aprender essa disciplina e a manter o interesse pelos conhecimentos matemáticos, nessa fase de suas vidas, decidi propor uma sequência didática que englobasse um tema socialmente significante (as funções) e alguns métodos de ensino que pudessem melhorar a motivação desses alunos.

INTRODUÇÃO

Tem sido muito comum ouvirmos de nossos alunos o quão exaustivo é estudar Matemática com tantas fórmulas e cálculos, pois muitas vezes, para eles, este conhecimento não tem sentido, uma vez que se baseia apenas na memorização e repetição de tabuadas, fórmulas e propriedades meramente algorítmicas. É necessário despertar o interesse pela Matemática como área de conhecimento acumulado e mostrar sua presença na sociedade de modo que leve os estudantes a compreender sua importância e necessidade. Foi pensando nisso que surgiu esse trabalho, especificamente voltado para o estudo de funções, porém com um olhar atento a quebrar esse tabu que os alunos carregam em relação a estudar Matemática, fazendo dos mesmos protagonistas de seu aprendizado.

No capítulo 1, busca-se apresentar o desenvolvimento da ideia de função bem como a construção de seu conceito através da história, desde a Antiguidade até a atualidade, para que se perceba que a Matemática não é algo pronto, mas sim que passou por estudos, descobertas e muita pesquisa. Ainda nesse mesmo capítulo, apresenta-se como este conceito é tratado em livros didáticos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior.

No capítulo 2, faz-se um levantamento acerca de como este tema foi tratado em outras duas pesquisas. Para isso analisou-se duas dissertações que também o abordaram, bem como os documentos oficiais, como a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, o Currículo Paulista e a nova BNCC.

No capítulo 3, apresenta-se uma proposta didática para o ensino de funções, buscando situar o aluno como protagonista e levando-o a construir seu próprio conhecimento. O texto é finalizado com uma breve conclusão sobre as contribuições deste trabalho para a formação do professor, no capítulo 4.

1 A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados os estudos acerca da evolução histórica do conceito de função, bem como algumas breves análises de como este conceito tem sido apresentado em livros didáticos, à luz dessa evolução estudada.

1.1 A IMPORTÂNCIA DE CONHECER A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Matemática tem uma importância social, cultural e profissional, uma vez que pessoas que atuam em todas as áreas do conhecimento necessitam de alguma competência nela, e compreender conceitos e procedimentos matemáticos se faz importante para fazer argumentações, tirar conclusões, para a tomada de decisões, tanto na vida pessoal, quanto na profissional.

De acordo com os *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* - PCNEM[1] (2000, p. 40):

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.
> (...)
> Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (PCNEM, 2000, p.40)

No que diz respeito ao conceito matemático de *função*, no Ensino Médio, faz-se necessária a utilização de metodologias de ensino que facilitem a compreensão desse conceito e suas aplicações, tão importante nesta etapa de ensino, de modo que traga um melhor entendimento e significado no seu processo de aprendizagem, levando em conta a contextualização e a interdisciplinaridade, estabelecendo conexões entre vários conceitos matemáticos e diferentes modos de pensamento matemático. Para muitos alunos, a matemática é considerada abstrata e, por isso, muitas vezes não desperta o interesse dos mesmos nessa fase escolar. De acordo o PCNEM (2000):

> O ensino isolado desse tema [funções] não permite a exploração do caráter integrador que possui.
> (...)
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano,

[1]Os PCNEM foram regulamentados e publicados em 2000, a fim de atender a necessidade de atualização das antigas diretrizes da educação brasileira, elaboradas no final dos anos 60.

> como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino da Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema da Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação Matemática. (PCNEM, 2000, p.43)

Como escreve Eves (2004):

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização de cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática. (EVES, 2004, p. 462)

E conhecer a História da Matemática se faz relevante para a construção desses conceitos, uma vez que a matemática não "nasceu pronta", mas cada definição foi construída e elaborada ao longo dos tempos, com experimentos e teoremas que se consolidaram e se aplicam até os dias atuais.

Segundo os PCN+ (2006), tradicionalmente, um pré-requisito para o ensino de funções é o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações. Geralmente, em seguida se define relações e, somente a partir daí, identificam-se as funções como relações particulares. E após ter essa definição estabelecida, todo esse percurso é abandonado. Assim o que se refere a conjuntos e relações torna-se desnecessário. Por essa razão, os PCN+ enfatizam que: "o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente" (Brasil, 2006, p. 121).

Durante esse estudo, é importante a inserção de situações problemas, por serem grandes aliados para o processo de aprendizagem do aluno, pois a aplicação do tema em situações do dia-a-dia torna-o mais estruturado e mais interessante ao aluno, uma vez que este precisa dessa contextualização para perceber que a Matemática lida com situações práticas e não apenas teorias e generalizações, uma vez que situações problemas permitem ao aluno fazer um movimento cognitivo do abstrato para o concreto e vice-versa.

Complementando sobre a relevância do estudo de funções no Ensino Médio, os PCN+ (2006) salientam que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas

> propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCN+, 2006, p.121)

Pelos motivos anteriormente expostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), acreditamos ser relevante apresentar ao professor de Matemática alguns fatos sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função, ao longo dos tempos. O estudo da História da Matemática é de grande importância na formação do aluno e do professor dessa disciplina, pois os aproxima dos diversos contextos do processo de elaboração e desenvolvimento dos conteúdos que lhe são apresentados em sua formação, especialmente no Ensino Médio, quando os estudantes já têm um senso histórico mais elaborado.

Não relataremos todos os aspectos referentes ao desenvolvimento desse conceito, mas uma descrição de alguns fatos que possam favorecer a compreensão de sua formação ao longo da história do conhecimento humano e que sejam úteis para dar mais significados às variadas definições a ele propostas.

1.2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Segndo Zuffi (1999), o estudo de funções requer um olhar atento para a origem histórica desse conceito, pois não se trata de algo que surgiu pronto na mente de um grande matemático, mas que passou por evoluções acentuadas ao longo do desenvolvimento da Matemática como área do conhecimento humano. Sendo assim, se faz importante observar essa evolução, desde sua origem até sua concepção atual, ou seja, as transformações que ocorreram ao longo da história com suas definições, aplicações e desenvolvimento, mostrando assim, ao aluno, que esta é uma área do saber em constante evolução. Para se chegar ao modo como esse conceito é apresentado atualmente no Ensino Básico, foi necessária a contribuição de muitos matemáticos, durante séculos.

Embora não haja um consenso a respeito da origem desse conceito, acredita-se que este tenha surgido da necessidade de resolução de problemas práticos e úteis do cotidiano. Segundo Youschkevitch (1976):

> Não parece existir um consenso, entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônicos já possuíam um “instinto de funcionalidade” (...) nos cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como “funções tabuladas”, destinadas a um fim prático. (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud ZUFFI, 1996, p.63)

Eves (2004) nos apresenta um desses problemas referentes a possíveis utilizações dessas tabelas:

> (a) O caráter algébrico dos problemas geométricos babilônicos fica ilustrado pelo seguinte, encontrado numa tábula de Strasburgo que data de 1800 a.C., aproximadamente. "Uma área *A*, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 menos do que 2/3 do lado do outro quadrado. Quais os lados do quadrado?" (EVES, 2004, p.79)

Entre os gregos (principalmente entre o século V a.C. ao século I d.C.), já se observava uma relação matemática expressando a noção de dependência funcional por meio da ideia de interpolação linear.

O conceito de função passou por evoluções acentuadas. Em seu estudo sobre o desenvolvimento do conceito de função, até por volta do século XIX, Youschkevitch (1976, apud Zuffi, 1999, p. 64) destaca três grandes fases:

1. Antiguidade: não havia uma noção geral da ideia de variável ou função e verificaram-se estudos de casos de dependência entre duas quantidades;

2. Idade Média: assim como na Antiguidade, havia a dependência entre quantidades, porém descritas através de forma verbal ou gráfica;

3. Modernidade: no final do século XVI, principalmente a partir do século XVII, deu-se a introdução ao conceito de função como relação entre conjuntos numéricos (pelo desenvolvimento da álgebra simbólica e pela extensão do conceito de número), como também uma expressão analítica das funções através de fórmulas. Youschkevitch (1976, apud Bueno e Viali, 2009, p.40), também destaca que o que deve ser enfatizado, nessa época, foi a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas e, acima de tudo, os sinais para quantidades desconhecidas (denotadas por vogais A, E, I,...) e parâmetros (denotados por consoantes do alfabeto latino), por Viète em 1591. Isso possibilitou descrever no papel, a forma simbólica de equações algébricas contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários.

A partir daí, grandes matemáticos como Galileu Galilei (1564–1642), Descartes (1696–1650), Newton (1642–1727) e Leibniz (1646–1716) deram grandes contribuições para o desenvolvimento e aprimoramento desse conceito, levando em conta seus trabalhos e observações. Porém, foi com Newton e Leibniz que ocorreram as primeiras contribuições a respeito de como as funções matemáticas são definidas hoje.

Segundo Zuffi (1999):

> Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas. O advento de instrumentos de medida propiciou a busca por resultados inspirados na experiência e na observação. Seu principal interesse estava no estudo dos movimentos, efetuando medidas para constatar a velocidade, a aceleração e as distâncias percorridas pelos corpos.
>
> Já Descartes (1596-1650) utilizou-se de equações em *x* e *y* para introduzir uma

> relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra. Ele fez distinção entre as curvas que podiam ser representadas por uma equação única, que era válida para cada ponto da curva dada. (ZUFFI, 1999, p.64)

Newton se utilizou do termo "fluentes" para se referir às funções, relacionando-o à ideia de curvas, de "taxas de mudanças" de variáveis contínuas e suas imagens geométricas, e isso levou a definir o conceito de limite de uma função, porém distante da noção de limite que temos hoje. Como nos mostra Garbi (2010):

> Newton (...), pesquisando o traçado das tangentes, criou seu ***Método das Fluxões*** que nada mais é do que aquilo que hoje chamamos Cálculo Diferencial, sendo "fluxão" o nome dado por ele à atual "derivada". (...) Em maio de 1666, um mês antes do segundo retorno à fazenda, ao pesquisar quadraturas, produziu um manuscrito revolucionário, onde estabeleceu os conceitos e as bases do Cálculo Integral, que ele chamou de ***Método Inverso das Fluxões***. Este nome mostra que Newton enxergou o que ilustres predecessores como Fermat, Cavalieri, Wallis, etc., não haviam enxergado: que ***o traçado de tangentes (Derivação) e a quadratura de curvas (Integração) são operações inversas uma da outra*** (a rigor, Barrow percebera isso). (GARBI, 2010, p.219, grifos do autor)

Contudo, as primeiras definições propriamente ditas de função estão diretamente relacionadas à álgebra (ou representação algébrica), como as propostas de Euler e Jean Bernoulli (1667–1748).

Zuffi (1999) mostra a definição aplicada por Leonard Euler (1707–1783) a funções:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável *z*, contém também quantidades constantes, é uma função de *z*. Por exemplo, *a+3z*; *az-4azz*; *az+b/aa-zz*; *cz*, etc, são funções de *z*. (SIERPINSKA, 1992, apud ZUFFI, 1999, p.66)

Euler ampliou a ideia dos "fluentes" de Newton para um ramo mais avançado: a Análise. Com isso, a noção de função passou a ser essencial para esta área. Outras, também, foram as contribuições de Euler para as notações e a linguagem simbólica matemática, como *f(x)* para designar uma função; π, no sentido moderno; *e* para a base dos logaritmos naturais; Σ para representar a somatória; $\left(\frac{m}{n}\right)$ para representar combinações de *m* elementos tomados *n* a *n* (sendo que a forma atual foi criada por Ettingshausen em 1827); etc.

Segundo Eves (2004), Dirichlet, matemático alemão que viveu entre 1805 e 1859, definiu função do seguinte modo:

> Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a *y*, então se diz que *y* é uma *função* (unívoca) de *x*. A variável *x*, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada *variável dependente*. Os

> valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função. (EVES, 2004, p.661)

Esta definição está mais próxima da concepção atual de correspondência de dois conjuntos, porém “conjunto” e “número real” não eram conceitos ainda estabelecidos formalmente na Matemática, em sua época. Entretanto, uma função interessante que se adequava a esta definição e que foi proposta por Dirichlet, foi a seguinte:

$D(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in Q \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash Q \end{cases}$, onde $Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z\ e\ q \neq 0\right\}$e $\mathbb{R}\backslash Q$ representa o conjunto de todos os números irracionais.

Nota-se que esta função real atribui a cada valor de *x* racional, o valor *zero* e a cada valor de *x irracional*, o valor *um*. Portanto, para cada número real, um único valor fica associado, mas não é possível visualizar esta função em uma representação gráfica no plano cartesiano, devido à densidade dos números racionais no conjunto dos reais. Ao se comparar este caso à definição proposta por Euler, a rigor, ele não seria caracterizado como função naquela época, uma vez que não há uma expressão algébrica única, dada em torno da variável *x*, que o descreva.

Eves (2004, p. 661) destaca que “a teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa”. Tal teoria só foi estabelecida no final do século XIX (após 1870) e início do século XX (até a década de 1920) e foi sobre esta que se construíram as definições formais de funções, utilizadas pelos matemáticos atuais e que, com uma linguagem menos sofisticada, aparece também nos livros didáticos recentes, como se verá mais adiante.

> (...) na teoria dos conjuntos, uma função *f* é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$,$(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto *A* dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e conjunto *B* de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano$A\times B$. Uma função *f* se diz *injetora* se, de $(a_1, b_1) \in f$,$(a_2, b_2) \in f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se *f* é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$ (EVES, 2004, p.661).

A definição de Dirichlet foi generalizada por Nicolas Bourbaki[2], em 1939, que dá a seguinte definição: Uma função é uma tripla ordenada (*X*, *Y*, *f*), onde *X* e *Y* são conjuntos e *f* é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se (*x*, *y*) ∈ *f* e (*x*, *y'*) ∈ *f*, então *y*=*y'*. ”(Sierpinska, 1992

[2]Pseudônimo usado por um grupo de matemáticos. Acredita-se que entre os seus membros originais, figuravam C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné e A. Weil (EVES, 2004).

apud Zuffi, 1999, p.73). Esta é a definição utilizada atualmente nos meios matemáticos e científicos.

Pode-se observar que esta última definição admite conjuntos X e Y quaisquer, não necessariamente numéricos. Desse modo, a variável x pode receber valores de objetos quaisquer, como matrizes, nomes, figuras geométricas, etc. Por isso, esta definição generaliza ainda mais o conceito matemático de função.

Sintetiza-se a conceptualização de função de acordo com alguns matemáticos, segundo Eves (2004, p.660–661), com suas principais ideias no quadro abaixo:

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)	Introduziu, em 1694, a palavra *função*, na sua forma latina equivalente, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva.
Johann Bernoulli (1667 – 1748)	Por volta de 1718, considerou função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes.
Leonard Euler (1707 – 1783)	Considerou função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Conceito que se manteve inalterado até Fourier.
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)	Considerou, em suas pesquisas sobre propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas, que envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente.
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)	Tentou dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar a forma de relação proposta por Fourier.
Nicolas Bourbaki(1939)	Ampliou a definição para conjuntos com objetos quaisquer, após a estruturação da Teoria de Conjuntos.

Pode-se observar pelo relato histórico do conceito de função, que este passou por várias mudanças e levou séculos até alcançar a amplitude que apresenta na atualidade. Em cada época, matemáticos tiveram grande influência na construção de sua definição.

Considera-se importante que o professor, ao tratar de funções, apresente, mesmo que de forma sucinta, a construção histórica desse conceito, para que os alunos percebam que o que se estuda é algo que surgiu de uma necessidade em certo momento da história, e que a forma atual do conceito foi sendo moldada através de inovações da Matemática, respeitando o percurso histórico através dos grandes matemáticos que contribuíram para se chegar à forma como é aplicada atualmente. Assim, a utilização da História da matemática, ou de alguns de seus principais conceitos em sala de aula, também pode ser visto como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conhecimentos matemáticos trazidos pela escola.

1.3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Como vimos, muitas foram as definições e conceitos relacionados a funções no decorrer da história, até a conceptualização de Dirichlet/Bourbaki, utilizada atualmente. Faremos um apanhado agora, de como alguns livros didáticos apresentam a definição de função.

Os livros selecionados para essa aboordagem foram duas obras de Esnino Fundamental II e 2 obras do Ensino Médio, cujos títulos foram selecionados para escolha do PNLD na escola onde o autor leciona e duas obras do Ensino Superior, cujos títulos foram utilizados pelo autor em sua graduação.

1.3.1 LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

No Livro *Praticando Matemática*, 9º ano, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, de 2012, os autores definem função na unidade 4, cujo título é *Funções*. Ele começa a tratar essa ideia com uma imagem onde um professor faz uma brincadeira com números, que na verdade se refere à lei de formação de uma função. Em seguida, a obra apresenta essa lei de formação e, em sequência, apresenta o problema em um diagrama de Venn, onde A é o conjunto dos números ditos pelo professor e B é o conjunto dos números ditos pelos alunos (figura 1).

Figura 1 – Introdução ao conceito de função

Veja na tabela os números ditos pelo professor e as respostas dos alunos:

Número dado pelo professor	Resposta dos alunos
4	11
6	15
−5	−7
0	3

Qual deveria ser a resposta dos alunos se o professor dissesse:

- $-\frac{1}{2}$? 4
- 1,3? 5,6

A resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor.

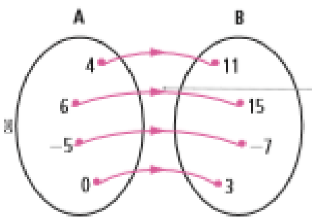
Observe que a cada número *x* dito pelo professor corresponde *um único* resultado correto *y* para a resposta dos alunos.

A fórmula que expressa a relação entre *x* e *y* é $y = 2x + 3$.

Nesse exemplo, dizemos que *y* é **função** de *x*.

A fórmula $y = 2x + 3$ é a **lei de formação** dessa função.

Outro modo de representar essa tabela é por meio de um **diagrama**:



Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos.

Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos.

Como os conjuntos que relacionamos são A e B, dizemos que essa é uma função de A em B.

Escreve-se: *f*: A ⟶ B (Lê-se: *f* é uma função de A em B).

Sempre que atribuímos um valor a *x* e determinamos seu correspondente *y* por meio da lei de formação da função, obtemos um par de números.

Podemos escrever os pares ordenados (*x*; *y*) formados no nosso exemplo.

- $x = 4$; $y = 11$ par ordenado (4; 11)
- $x = 6$; $y = 15$ par ordenado (6; 15)
- $x = -5$; $y = -7$ par ordenado (−5; −7)
- $x = 0$; $y = 3$ par ordenado (0; 3)

Os pares são **ordenados**: o primeiro elemento do par é *x*, e o segundo é *y*.

Fonte: ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012, p. 96

Em seguida, traz a seguinte afirmação[3]:

> Como os conjuntos que relacionamos são Ae B, dizemos que essa é uma função de A em B.
> Escreve-se: *f*: A → B (Lê-se: *f* é uma função de A em B).
> Sempre que atribuímos um valor a *x* e determinamos seu correspondente *y*por meio da lei de formação da função, obtemos um par de números. Podemos escrever os pares ordenados (*x; y*) formados no nosso exemplo. (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p.96).

[3] Isto não é a definição geral de função, pois se refere apenas ao exemplo.

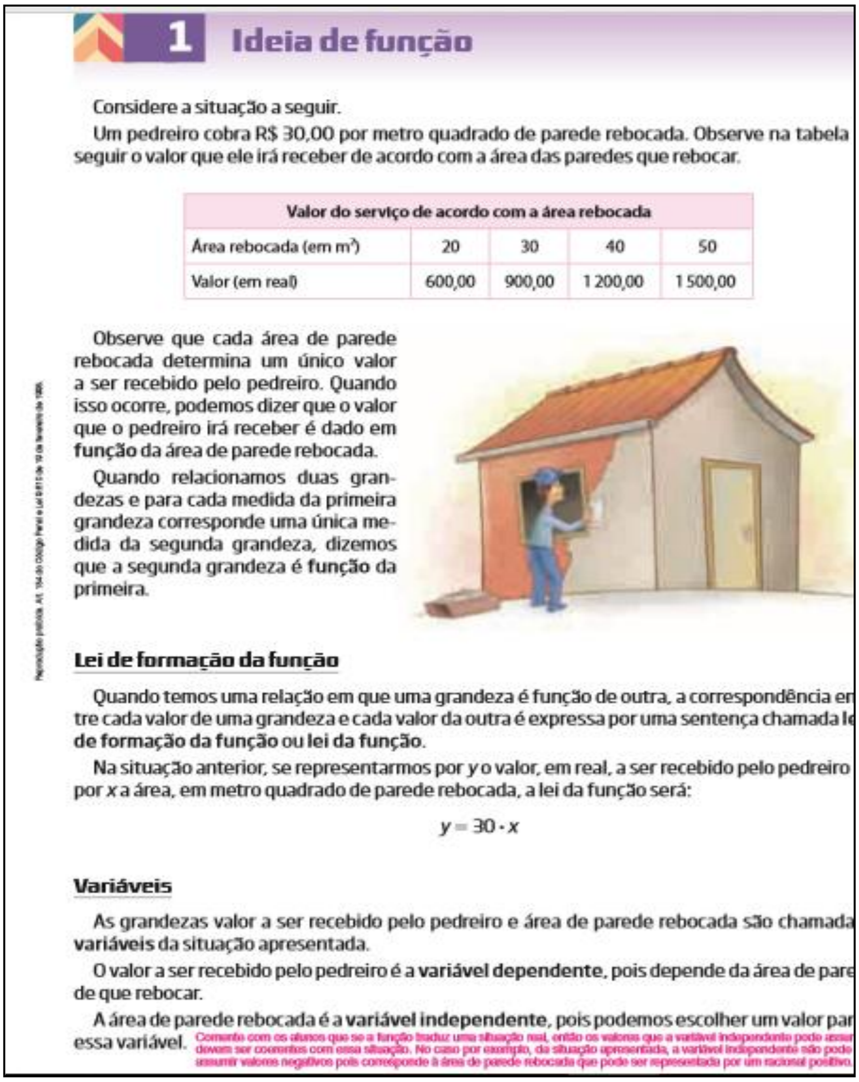
Mais abaixo, os autores completam a definição de função, destacando que:

> Para que tenhamos uma função é preciso:
> - estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de *x*, e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de *y*;
> - haver uma relação entre *x*e *y* de forma que a cada *x*tomado no primeiro conjunto corresponda um único *y* no segundo conjunto. (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p.97).

No Livro *Matemática: compreensão e prática*, 9º ano, de Ênio Silveira, de 2015, o autor define função no início do capítulo 3, cujo título é *Função Afim*. Ele inicia a ideia com um exemplo referente a área (figura 2) e, em seguida, traz a seguinte definição:

> Quando relacionamos duas grandezas e para cada medida da primeira grandeza corresponde uma única medida da segunda grandeza, dizemos que a segunda grandeza é **função** da primeira (SILVEIRA, 2015, p.71, grifo do autor)

Figura 2 –Introdução à ideia de função



1 Ideia de função

Considere a situação a seguir.

Um pedreiro cobra R$ 30,00 por metro quadrado de parede rebocada. Observe na tabela seguir o valor que ele irá receber de acordo com a área das paredes que rebocar.

Valor do serviço de acordo com a área rebocada				
Área rebocada (em m²)	20	30	40	50
Valor (em real)	600,00	900,00	1 200,00	1 500,00

Observe que cada área de parede rebocada determina um único valor a ser recebido pelo pedreiro. Quando isso ocorre, podemos dizer que o valor que o pedreiro irá receber é dado em **função** da área de parede rebocada.

Quando relacionamos duas grandezas e para cada medida da primeira grandeza corresponde uma única medida da segunda grandeza, dizemos que a segunda grandeza é **função** da primeira.

Lei de formação da função

Quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência en tre cada valor de uma grandeza e cada valor da outra é expressa por uma sentença chamada le **de formação da função** ou **lei da função**.

Na situação anterior, se representarmos por *y* o valor, em real, a ser recebido pelo pedreiro por *x* a área, em metro quadrado de parede rebocada, a lei da função será:

$$y = 30 \cdot x$$

Variáveis

As grandezas valor a ser recebido pelo pedreiro e área de parede rebocada são chamada **variáveis** da situação apresentada.

O valor a ser recebido pelo pedreiro é a **variável dependente**, pois depende da área de pare de que rebocar.

A área de parede rebocada é a **variável independente**, pois podemos escolher um valor par essa variável. Comente com os alunos que se a função traduz uma situação real, então os valores que a variável independente pode assu devem ser coerentes com essa situação. No caso por exemplo, da situação apresentada, a variável independente não pode assumir valores negativos pois corresponde à área de parede rebocada que pode ser representada por um racional positivo.

Fonte: SILVEIRA, 2015, p. 71

Nota-se que, por se tratar de uma primeira aproximação com a noção de função, os autores não apresentam uma linguagem muito formalista e a maior ênfase é dada na “lei de formação da função” ou “lei da função”, conforme termos usados por esses autores.

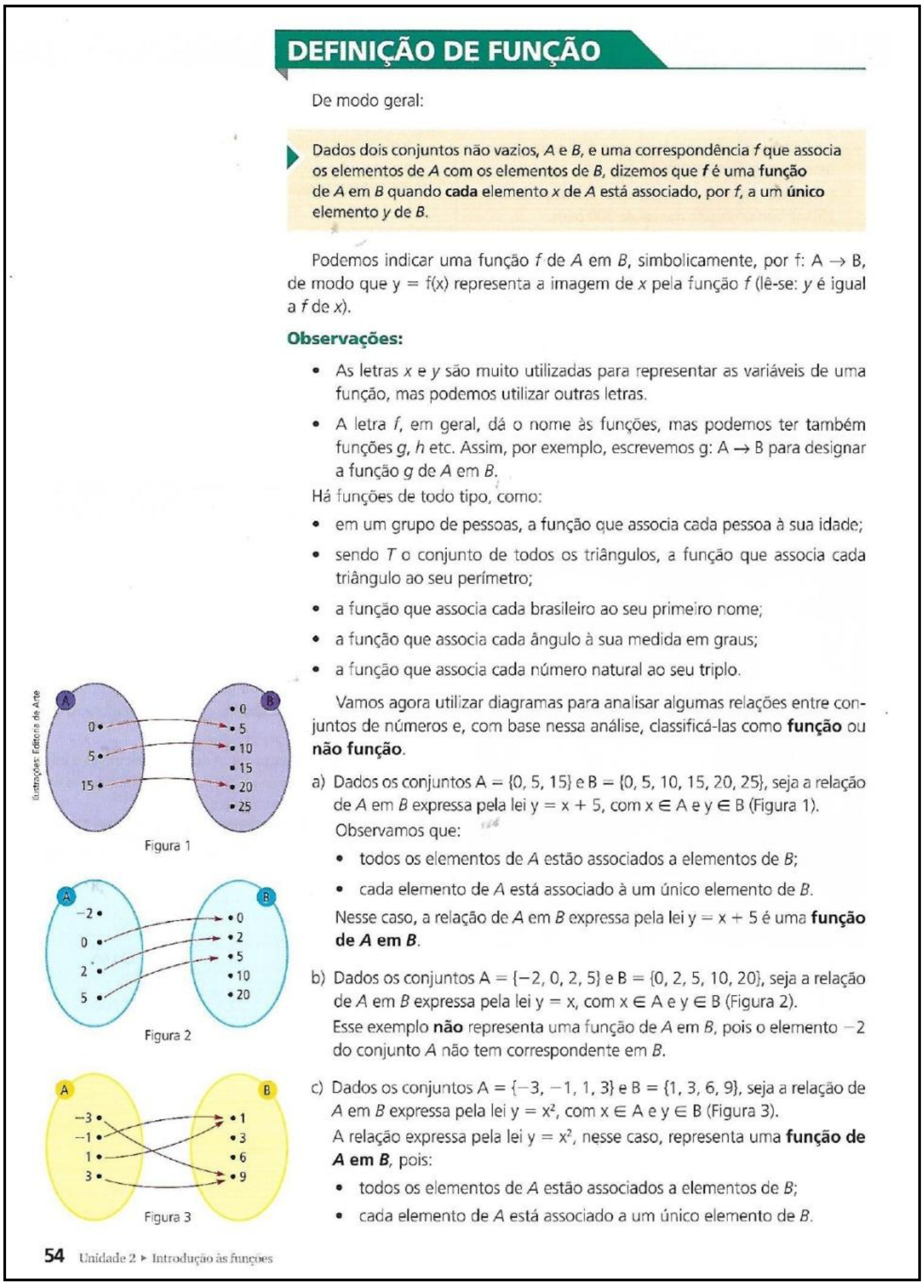
1.3.2 LIVROS DO ENSINO MÉDIO

No Livro *Matemática Fundamental; uma nova abordagem*, 1ª série, de José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr, José Roberto Bonjorno e Paulo Roberto Câmara de Sousa, de 2015, os autores trazem o assunto no capítulo 3, cujo título é *Funções*. Os autores iniciam o capítulo com o tópico *Sistema Cartesiano Ortogonal* e partem para o tópico *Ideia de Função* onde trabalham com tabela e a representação gráfica (figura 3). Em seguida, apresentam a lei de formação com exemplos e exercícios e definem função:

> Dados dois conjuntos não vazios, *A* e *B*, e uma correspondência *f* que associa os elementos de *A* com os elementos de *B*, dizemos que ***f*** é uma **função** de *A* em *B* quando **cada** elemento *x* de *A* está associado, por *f*, a um **único** elemento *y* de *B*(GIOVANNI et al, 2015, p.54. grifos dos autores).

Notemos que estes autores fazem um esforço para dar exemplos de funções que não tenham como domínio apenas conjuntos numéricos (por exemplo, com triângulos, ângulos, nomes de pessoas, etc), porém logo se atêm a funções que apresentem uma lei de formação dada algebricamente, conforme se lê na figura 3, abaixo.

Figura 3 –Definição de função



DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

De modo geral:

Dados dois conjuntos não vazios, *A* e *B*, e uma correspondência *f* que associa os elementos de *A* com os elementos de *B*, dizemos que ***f*** é uma **função** de *A* em *B* quando **cada** elemento *x* de *A* está associado, por *f*, a um **único** elemento *y* de *B*.

Podemos indicar uma função *f* de *A* em *B*, simbolicamente, por f: A → B, de modo que y = f(x) representa a imagem de *x* pela função *f* (lê-se: *y* é igual a *f* de *x*).

Observações:

- As letras *x* e *y* são muito utilizadas para representar as variáveis de uma função, mas podemos utilizar outras letras.
- A letra *f*, em geral, dá o nome às funções, mas podemos ter também funções *g*, *h* etc. Assim, por exemplo, escrevemos g: A → B para designar a função *g* de *A* em *B*.

Há funções de todo tipo, como:

- em um grupo de pessoas, a função que associa cada pessoa à sua idade;
- sendo *T* o conjunto de todos os triângulos, a função que associa cada triângulo ao seu perímetro;
- a função que associa cada brasileiro ao seu primeiro nome;
- a função que associa cada ângulo à sua medida em graus;
- a função que associa cada número natural ao seu triplo.

Vamos agora utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, classificá-las como **função** ou **não função**.

a) Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}, seja a relação de *A* em *B* expressa pela lei y = x + 5, com x ∈ A e y ∈ B (Figura 1).
Observamos que:
- todos os elementos de *A* estão associados a elementos de *B*;
- cada elemento de *A* está associado à um único elemento de *B*.

Nesse caso, a relação de *A* em *B* expressa pela lei y = x + 5 é uma **função de *A* em *B***.

b) Dados os conjuntos A = {−2, 0, 2, 5} e B = {0, 2, 5, 10, 20}, seja a relação de *A* em *B* expressa pela lei y = x, com x ∈ A e y ∈ B (Figura 2).
Esse exemplo **não** representa uma função de *A* em *B*, pois o elemento −2 do conjunto *A* não tem correspondente em *B*.

c) Dados os conjuntos A = {−3, −1, 1, 3} e B = {1, 3, 6, 9}, seja a relação de *A* em *B* expressa pela lei y = x², com x ∈ A e y ∈ B (Figura 3).
A relação expressa pela lei y = x², nesse caso, representa uma **função de *A* em *B***, pois:
- todos os elementos de *A* estão associados a elementos de *B*;
- cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

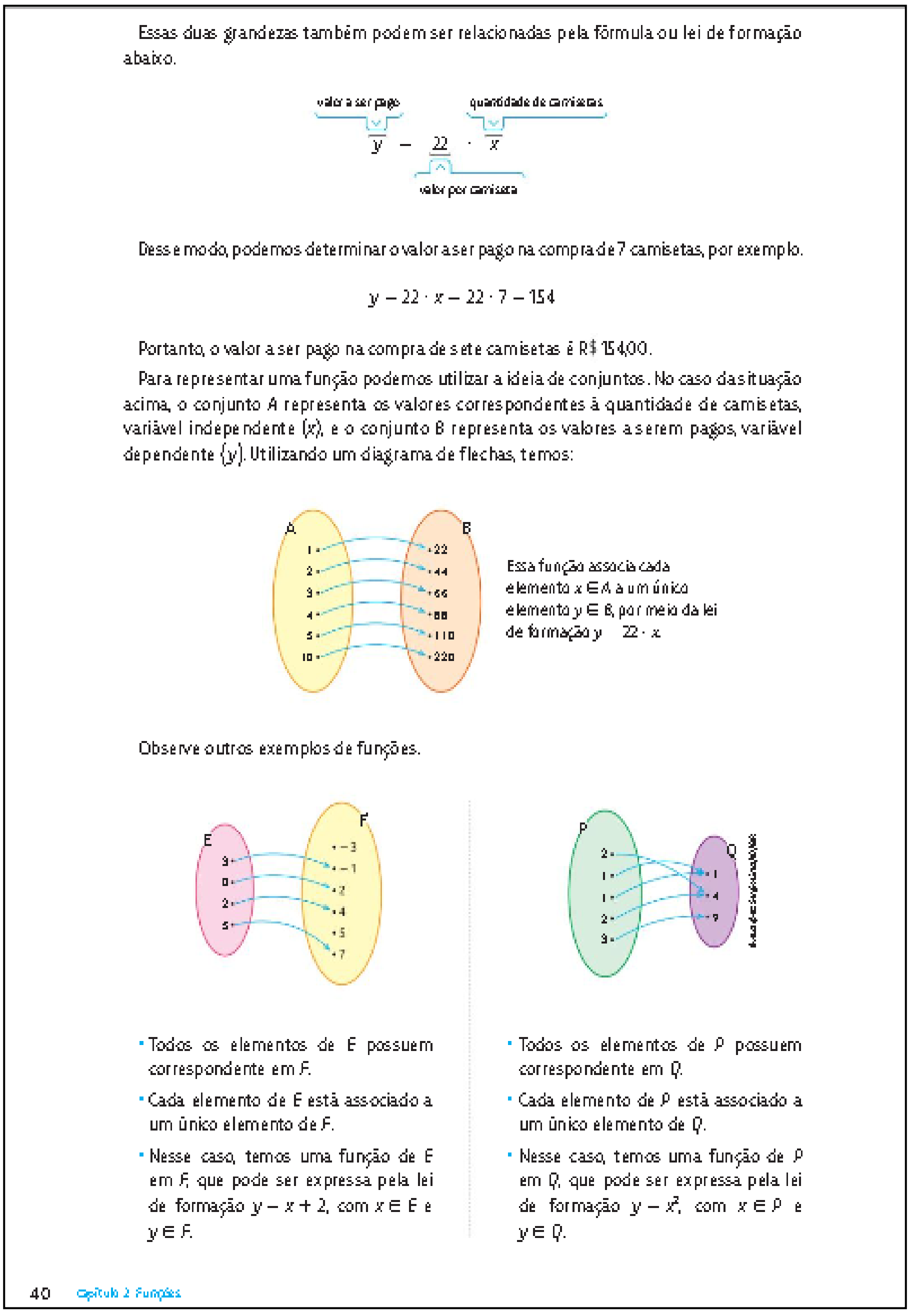
54 Unidade 2 ▸ Introdução às funções

Fonte: GIOVANNI et al, 2015, p.54

No Livro *Quadrante Matemática*, 1ª série, de Eduardo Chavante e Diego Prestes, de 2016, os autores abordam o assunto no capítulo 2, cujo título é *Funções*. Iniciam com um exemplo referente à compra de x camisetas e com valor y pago. Em seguida, definem variáveis dependentes e independentes (Figura 4), apresentam a lei de formação referente ao problema proposto, constroem o diagrama de Venn e definem função:

> Dados os conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B (f: A → B) é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento $x \in A$um único elemento $y = f(x) \in B$ (CHAVANTE E PRESTES, 2016, p.41).

Figura 4 – Definição de variáveis dependentes e independentes



Essas duas grandezas também podem ser relacionadas pela fórmula ou lei de formação abaixo.

$$\underbrace{y}_{\text{valor a ser pago}} = \underbrace{22}_{\text{valor por camiseta}} \cdot \underbrace{x}_{\text{quantidade de camisetas}}$$

Desse modo, podemos determinar o valor a ser pago na compra de 7 camisetas, por exemplo.

$$y = 22 \cdot x = 22 \cdot 7 = 154$$

Portanto, o valor a ser pago na compra de sete camisetas é R$ 154,00.

Para representar uma função podemos utilizar a ideia de conjuntos. No caso da situação acima, o conjunto A representa os valores correspondentes à quantidade de camisetas, variável independente (x), e o conjunto B representa os valores a serem pagos, variável dependente (y). Utilizando um diagrama de flechas, temos:

Essa função associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, por meio da lei de formação $y = 22 \cdot x$.

Observe outros exemplos de funções.

- Todos os elementos de E possuem correspondente em F.
- Cada elemento de E está associado a um único elemento de F.
- Nesse caso, temos uma função de E em F, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x + 2$, com $x \in E$ e $y \in F$.

- Todos os elementos de P possuem correspondente em Q.
- Cada elemento de P está associado a um único elemento de Q.
- Nesse caso, temos uma função de P em Q, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x^2$, com $x \in P$ e $y \in Q$.

40 Capítulo 2 Funções

Fonte: CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.41

1.3.3 LIVROS DO ENSINO SUPERIOR

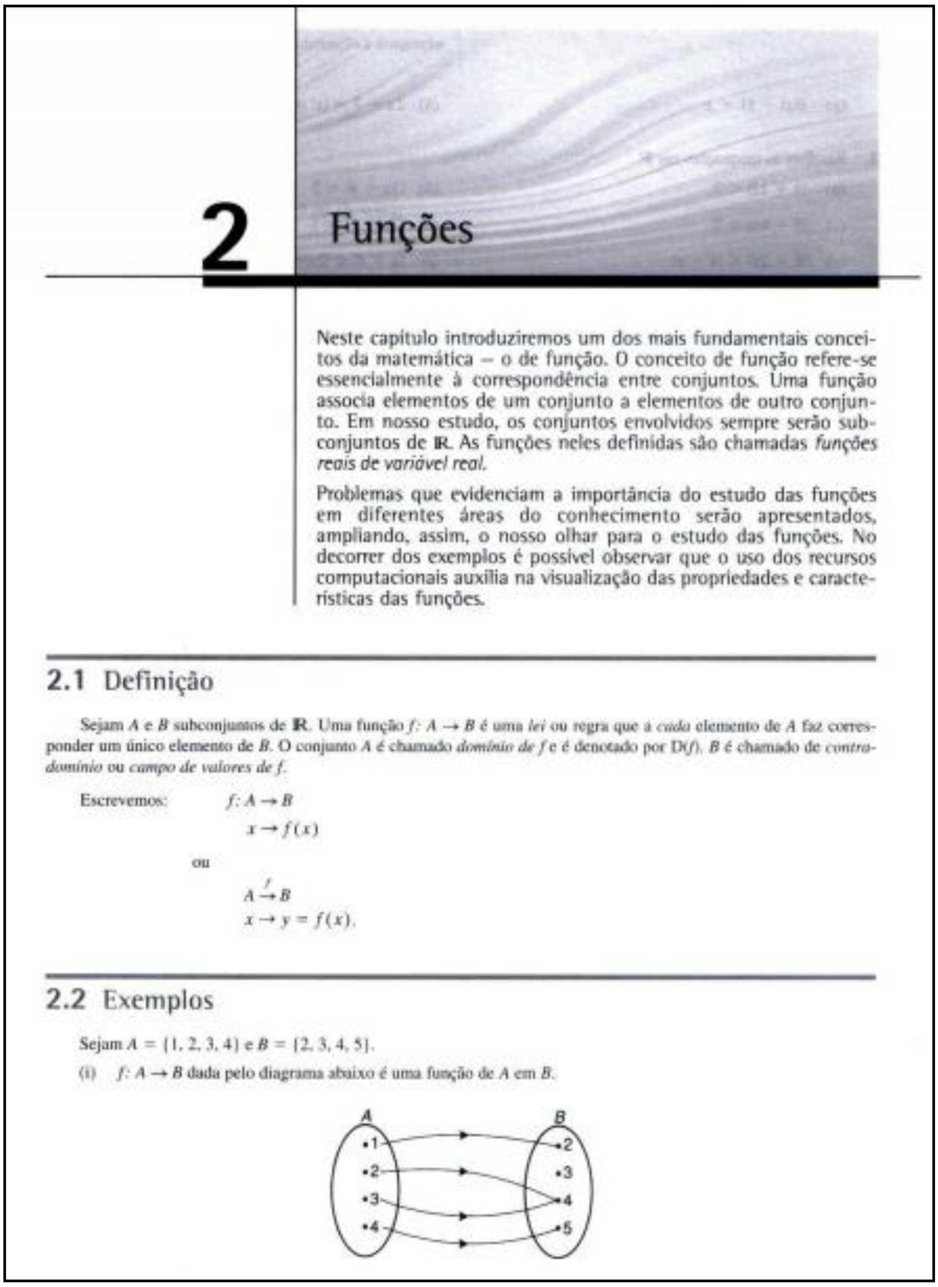
No Livro *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*, de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves, de 2006, os autores trazem o assunto no capítulo 2, cujo título é *Funções*. Os autores já iniciam o capítulo definindo função real (Figura 5):

Sejam *A* e *B* subconjuntos de ℝ. Uma função *f*: A →B é uma lei ou regra que a cada elemento de *A* faz corresponder um único elemento de *B*. O conjunto *A* á chamado *domínio* de *f* e é denotado por D(*f*). *B* é chamado de *contradomínio* ou *campo de valores de f*.

Escrevemos: f: A → B
$x \to f(x)$
ou
A → B
$x \to y = f(x)$

(FLEMMING e GONÇALVES, 2016, p.12).

Figura 5 –Definição de função



2 Funções

Neste capítulo introduziremos um dos mais fundamentais conceitos da matemática – o de função. O conceito de função refere-se essencialmente à correspondência entre conjuntos. Uma função associa elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto. Em nosso estudo, os conjuntos envolvidos sempre serão subconjuntos de ℝ. As funções neles definidas são chamadas *funções reais de variável real*.

Problemas que evidenciam a importância do estudo das funções em diferentes áreas do conhecimento serão apresentados, ampliando, assim, o nosso olhar para o estudo das funções. No decorrer dos exemplos é possível observar que o uso dos recursos computacionais auxilia na visualização das propriedades e características das funções.

2.1 Definição

Sejam *A* e *B* subconjuntos de ℝ. Uma função $f: A \to B$ é uma *lei* ou regra que a *cada* elemento de *A* faz corresponder um único elemento de *B*. O conjunto *A* é chamado *domínio de f* e é denotado por D(*f*). *B* é chamado de *contradomínio* ou *campo de valores de f*.

Escrevemos: $f: A \to B$
$x \to f(x)$

ou

$A \xrightarrow{f} B$
$x \to y = f(x)$.

2.2 Exemplos

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de *A* em *B*.

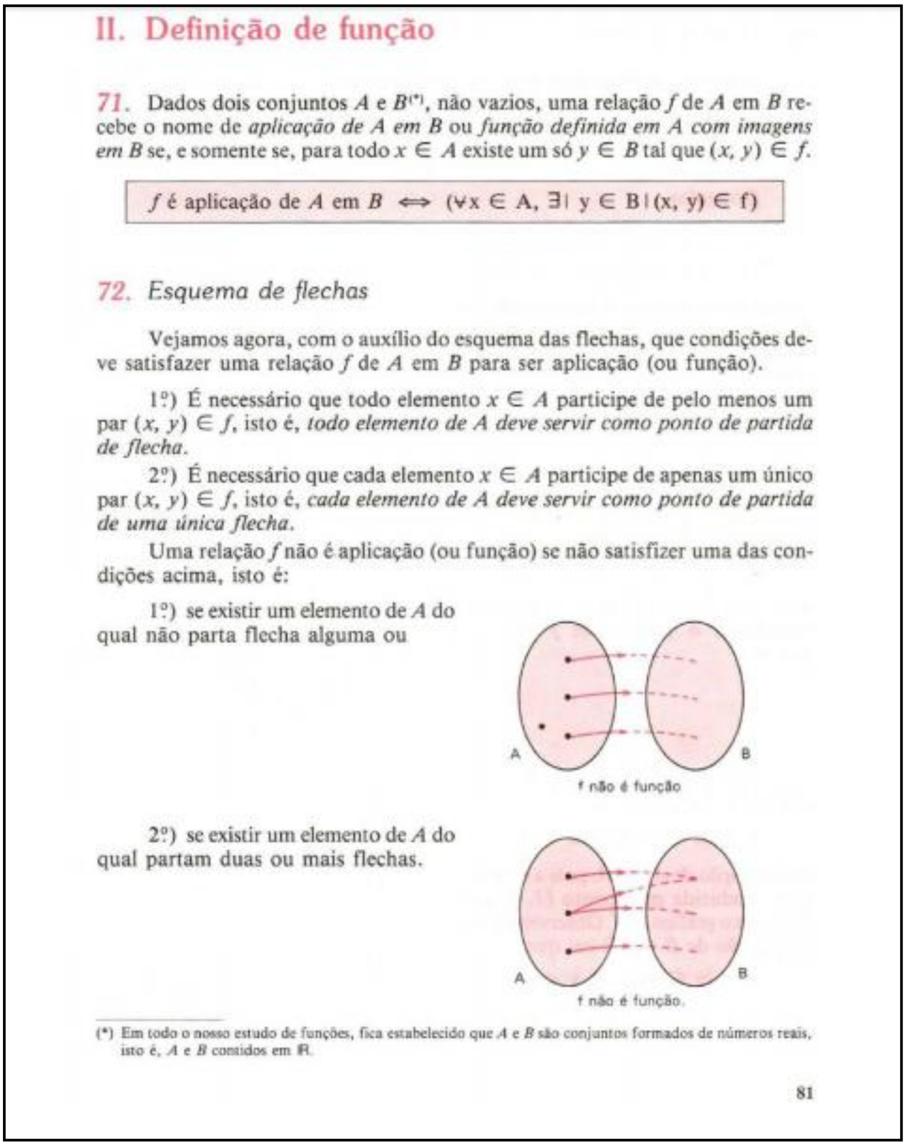
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES, 2016, p.12

No Livro *Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1 – Conjuntos e funções*, de

Gelson Iezzi e Carlos Murakami, de 2013, os autores definem função no capítulo 5, cujo título é *Introdução às Funções*. Os autores iniciam o capítulo com um exemplo simples de conjuntos numéricos, onde criam uma relação entre seus elementos, no diagrama de Venn (figura 6). Em seqüência definem função:

> Dados dois conjuntos A e B (formados por números reais), não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
> fé aplicação de A em B $\Leftrightarrow (\forall\, x\ \in A, \exists \mid y \in B \mid (x, y) \in f)$ (IEZZI e MURAKAMI, 2013, p.81, grifos dos autores).

Figura 6: Definição de função (Iezzi e Murakami, 2013)



II. Definição de função

71. Dados dois conjuntos A e B(*), não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \iff (\forall x \in A, \exists | \ y \in B \mid (x, y) \in f)}$$

72. *Esquema de flechas*

Vejamos agora, com o auxílio do esquema das flechas, que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação (ou função).

1º) É necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, *todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha*.

2º) É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, *cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha*.

Uma relação f não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1º) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou

2º) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

(*) Em todo o nosso estudo de funções, fica estabelecido que A e B são conjuntos formados de números reais, isto é, A e B contidos em $\mathbb{R}$.

81

Fonte: IEZZI e MURAKAMI, 2013, p. 81

Percebemos que as obras selecionadas trazem a definição com a essência do conceito de função de acordo como é descrito por Bourbaki, porque fazem uso das ideias matemáticas de conjuntos, pares ordenados (*x*, *y*) e relações, e também da propriedade fundamental de que para cada primeiro elemento do par ordenado *(x)*, um único valor pode ser atribuído ao segundo elemento *(y)*. Única exceção pode ser vista com o livro de Silveira (2015) para o 9º ano, que não menciona explicitamente essas ideias. Destaca-se também que o livro Giovanni *et al* (2015) também não menciona a palavra “relação”, a qual é substituída por “correspondência”.

Do ponto de vista da definição formal dos livros didáticos, é a definição de Bourbaki que dita todos os elementos que a compõem. Porém, quando se referem às funções no tratamento dos exemplos práticos, essa definição se restringe às equações algébricas da lei de formação das funções, ignorando, muitas vezes, os conjuntos envolvidos e a ideia de pares ordenados. Assim, aqui a função se aproxima mais das definições de Bernoulli e Euler.

Por exemplo, nos mesmos livros didáticos temos:

I) No Livro *Matemática: compreensão e prática*, 9º ano, de Ênio Silveira, de 2015, o autor apresenta o seguinte exemplo para ilustrar o conceito de função:

> “Um pedreiro cobra R$ 30,00 por metro quadrado de parede rebocada. Observe na tabela a seguir o valor que ele irá receber de acordo com a área das paredes que rebocar.

Valor do serviço de acordo com a área rebocada				
Área rebocada (em m^2)	20	30	40	50
Valor (em real)	600,00	900,00	1200,00	1500,00

> **Lei de formação da função**
>
> Quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência entre cada valor de uma grandeza e cada valor da outra é expressa por uma sentença chamada lei de formação da função ou lei da função. Na situação anterior, se representarmos por *y* o valor, em real, a ser recebido pelo pedreiro e por *x* a área, em metro quadrado de parede rebocada, a lei da função será:
>
> *y*= 30.*x”* (SILVEIRA, 2015, p.120, grifos dos autores).

II) No Livro *Quadrante Matemática*, 1ª série, de Eduardo Chavante e Diego Prestes, de 2016, os autores apresentam o seguinte exemplo:

> Grande Promoção de camisetas! Cada peça custa apenas R$ 20,00. (Essa informação aparece na forma de um anúncio).
>
> Com essa informação, podemos construir um quadro relacionando a quantidade de camisetas e o valor a ser pago na compra delas.
>
> O preço a ser pago depende da quantidade de camisetas compradas. Nesse caso, dizemos que a grandeza “valor a ser pago” é a **variável dependente**, geralmente

indicada por *y*, e a grandeza “quantidade de camisetas” é a **variável independente**, comumente indicada por *x*. Essa relação de dependência caracteriza-se como uma função, pois para cada valor atribuído à variável independente *(x)* existe um único valor correspondente para a variável dependente *(y)*. Isto é, para cada quantidade de camisetas existe um único preço.

Quantidade de camisetas	**Valor a ser pago (R$)**
1	22
2	44
3	66
4	88
...	...
x	$22 \,.\, x$

(CHAVANTE;PRESTES, 2016, p.120, grifos dos autores).

Nota-se que os conjuntos implicitamente relacionados nesses exemplos são subconjuntos dos números naturais. Mas isto não é destacado pelos autores e nem relacionado com a definição geral de função.

Cabe aos professores analisarem, em cada contexto, qual dessas definições é mais compreensível, de acordo com a realidade da escola e comunidade, valores inseridos, aproximação da realidade e nível de informação e de escolaridade dos alunos. Entretanto, é importante que no Ensino Médio uma linguagem mais formalizada seja apresentada, para que o aluno possa também compreender os modos de expressão na linguagem matemática.

Uma vez escolhida a definição, é preciso que ela seja compreendida pelos alunos. Para que isso ocorra com maior significado, seria importante que a definição de função fosse retomada em diversos momentos, e não apenas na aula de introdução às funções lineares ou afins.

2 ALGUNS LEVANTAMENTOS DA LITERATURA ACERCA DO ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Considerando a importância da troca de informações e conhecimentos sobre a temática, buscou-se na literatura, duas dissertações que também tenham dado enfoque no ensino de funções. As mesmas foram selecionadas através de uma pesquisa feita em outras universidades de dissertações que também tratavam o mesmo tema proposta nesta, assim, foram selecionadas as duas apresentada aqui por terem uma linha de pensamento parecidas com esse trabalho. Assim, estudou-se essas duas dissertações, que também argumentaram como a mesma é ensinada nos níveis Fundamental II e Médio. Apresenta-se neste capítulo, uma síntese dessas dissertações e algumas reflexões sobre como seus autores discorreram sobre o tema.

Na sequência, também será utilizada uma análise de alguns documentos oficias de ensino a respeito do conceito de funções e suas aplicações, bem como de habilidades e competências que pederão ser desenvolvidas com os estudos sobre os mesmos.

2.1 DISSERTAÇÃO INTITULADA: “NARRATIVAS NO ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS”

Dissertação de mestrado apresentada por Márcio Urel Rodrigues (RODRIGUES, 2007), junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus de Rio Claro, sob orientação da Profª Drª Rosana Guiarreta Sguerra Miskulin.

Com sua pesquisa, esse autor pretendeu lançar uma proposta de ensino de função, diferente da maneira tradicional, a qual muitos professores ainda usam, inclusive citando a si próprio como antigo utilizador dessa prática, como percebeu em muitas de suas aulas durante sua vida docente. Nesse modelo de ensino, o pesquisador entendeu que há somente a exposição do conteúdo pelo professor, onde os alunos são apenas receptores das informações, levando o ensino da Matemática a uma simples memorização e resolução de exercícios repetitivos. Com a nova proposta, Rodrigues (2007) pretendeu não ficar “preso” aos livros didáticos, mas ensinar Matemática com outros recursos, pois concorda que “o livro didático deve ser usado pelos professores de Matemática como recurso auxiliar, dentre outros” (RODRIGUES, 2007, p. 18). Para isto, o autor trabalhou com as *Investigações Matemáticas*, uma perspectiva metodológica para o ensino através de contextos mais dinâmicos e interativos, nos quais "os alunos possuem vozes e espaços para discussão e reflexão de suas aprendizagens, tornando-os ativos no processo de ensinar e aprender Matemática" (RODRIGUES, 2007, p. 19). Assim sendo, acredita que

> O aluno precisa ser ajudado para tornar-se autônomo intelectualmente. Precisa, também, ser capaz de descobrir uma maneira pessoal de relacionar-se com o mundo da Matemática, desenvolvendo a capacidade de compreender e elaborar suas próprias experiências do dia-a-dia (BIAGGI, 2000, apud RODRIGUES, 2007, p. 18).

Com sua pesquisa, o autor objetivou "investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas em processos de ensinar e aprender funções" (RODRIGUES, 2007, p. 20, grifos do autor). Dissertou sobre o tema em sete capítulos, dos quais se destaca, aqui, apenas aqueles relevantes a esta pesquisa.

No primeiro capítulo de seu trabalho, o autor fez um estudo bibliográfico na literatura sobre o ensino deste conceito, levando em conta seu desenvolvimento histórico, desde a Antiguidade até o Período Moderno. Também faz a citação de outras pesquisas sobre o tema, busca em documentos oficiais, como PCN e outros, focalizando as ideias fundamentais do conceito de função. Destaca que é papel do professor provocar questionamentos em seus alunos, a partir de seus conhecimentos prévios, que os levem à elaboração de novos conceitos, pois acredita que apesar de inúmeras pesquisas feitas acerca do tema, ainda falte a abordagem em realidades e contextos diferenciados. Como exemplo disso, percebeu o fato de que os livros didáticos do Ensino Médio privilegiam o ensino de função primeiramente através de conjuntos. Não discorda de tal posição, porém salienta ser importante apresentar o conceito primeiramente de forma intuitiva, para depois apresentá-lo através da teoria dos conjuntos.

Em sua proposta de *investigações matemáticas*, o autor considera as narrativas elaboradas pelos alunos, como seu objeto de estudo e essas investigações são o contexto metodológico, ou seja, "um caminho diferenciado que poderá conduzir os alunos a uma aprendizagem significativa do conceito de função" (RODRIGUES, 2007, p. 46). Acredita que essa dinâmica metodológica pode proporcionar discussões, questionamentos e reflexões sobre como realizar tal ensino de forma desafiadora, autêntica e abrangente, e se apresenta como um ambiente alternativo para se desenvolver o processo de aprendizagem de maneira mais significativa.

No quarto capítulo, o autor apresentou seus registros sobre oito tarefas exploratório-investigativas realizadas com os alunos, destacando os momentos de apresentação, desenvolvimento, discussão e reflexão.

Partindo de temas diversos, levou os alunos a analisarem e interpretarem textos, imagens, gráficos, ou tabelas e, a partir daí, a levantarem coleta de informações, em grupos, e produzirem seus próprios textos e escrevê-los em forma de função, identificando as variáveis e as grandezas relacionadas. A seguir, ilustra-se a proposta com uma destas tarefas, onde o autor trabalhou a relação entre distância percorrida e tempo, através da fábula *A tartaruga e a lebre*, de La Fontaine:

> **Uma Fábula Matemática – A Tartaruga e a Lebre**
> Muito silenciosa, a tartaruga escuta o macaco dizer: A lebre é o animal mais veloz da mata. Lá em baixo, o tatu responde: Mas a tartaruga é o animal mais resistente. Ele anda muito mais. A onça pintada que estava sentada à sombra ouviu a conversa e disse: Vamos ver quem é melhor. Aquele que chegar primeiro ao lago é o campeão da mata. Será a lebre ou a tartaruga? Todos os bichos ficaram animados. Até a serpente, que estava enrolada no galho, levantou a cabeça. A lebre saiu na frente correndo. A tartaruga andava bem devagar. Sem pressa, arrastava o casco e parecia que não ia chegar. No meio do caminho, a lebre ficou cansada. Já estava tão longe da tartaruga, deitou-se à sombra de uma árvore e dormiu um sono profundo. E foi assim que a tartaruga, com o seu passo miúdo e lento passou à frente da lebre. Chegou-se primeiro ao lago e foi beber água. (La Fontaine). (RODRIGUES, 2007, p. 101, grifos do autor)

O autor leu a fábula aos alunos e pediu que, em grupos (no total 8), expusessem sua interpretação a respeito dela, criassem sua própria história e, também, representassem graficamente a situação, considerando o tempo e a distância como as grandezas envolvidas.

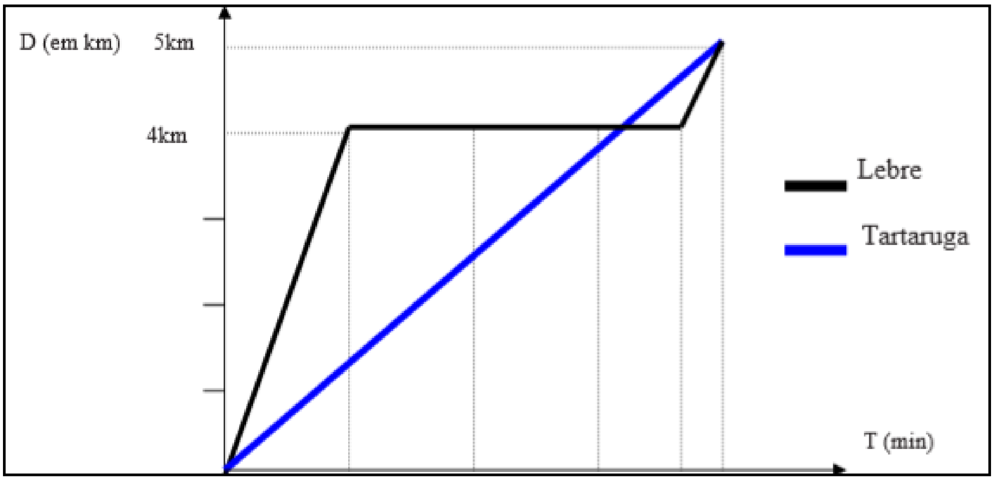
Durante a realização das atividades pelos alunos, o autor percorria pelos grupos, discutindo e problematizando para auxiliá-los em casos de dúvidas que surgissem, o que considerou importante, pois levou o aluno a refletir sobre suas estratégias, conforme iam desenvolvendo a atividade. Por questão de tempo, escolheram-se dois grupos para expor os resultados à classe. Durante a exposição, o autor também levantava questões para discussões e reflexões dos alunos, para um completo entendimento da atividade proposta.

Destacamos, aqui, o resultado de um dos grupos, chamado de *Os Orientais*, o qual reescreveu a fábula e montou a representação gráfica de acordo com a relação das grandezas de distância e tempo.

> **Uma Fábula Matemática - A Tartaruga e a Lebre (reescrita)**
> Um dia de muita bagunça na selva estava tendo uma olimpíada maluca. Que animais fortes competiam com os mais fracos, animais rápidos com os lentos e animais valentes com os mais moles. Mas o que todos queriam ver era as corridas, principalmente o da lebre a mais veloz dos animais contra a mais lenta a tartaruga. A distância era de aproximadamente 5 km e a prova era muito difícil e longa. Todos apostaram na lebre. O coelho deu a largada e a lebre saiu na frente, mas a estrada era de areia e precisava de muita resistência. Depois de 4 km a lebre parou para descansar, pois estava com o pé doendo, ficou parada por alguns minutos, nisso a resistente tartaruga a passou, quando a lebre foi perceber que estava disputando uma corrida, a tartaruga estava a alguns passos da linha de chegada. Então a lebre se apressou de tal forma que conseguiu chegar empatada com a tartaruga, ou seja, as duas chegaram juntinhas para não ter briga. **Grupo Os Orientais** (RODRIGUES,

2007, p. 102, grifos do autor)

Figura 7: Reprodução da representação gráfica da história reformulada



Fonte: RODRIGUES, 2007, p. 102

O autor destaca que essas representações gráficas feitas pelos alunos, ilustram a dependência que a variável distância tem em relação à variável tempo.

Diante da metodologia utilizada pelo professor, atividades investigativas com narrativas matemáticas, Rodrigues (2007) considerou-a como um modo plausível de colocar o aluno dentro do contexto de funções, pois utilizou a interpretação de texto, análise de dados, construções e trabalho em grupo, como ferramentas para uma aprendizagem efetiva. Esse autor também avalia como importante o uso de metodologias que coloquem o aluno diante da realidade onde a Matemática é utilizada de forma prática, pois muitos são os questionamentos dos alunos de *“onde vou utilizar isso?”,*ou ainda, *“pra que estudar isso?”*.Desta forma, o aluno veria mais “sentido” no que está estudando e, consequentemente, despertando mais seu interesse por esta área e mostrando como as funções são importantes para traduzir,matematicamente, várias situações.

Portanto, conclui-se que o autor focou sua pesquisa em torno das narrativas dos alunos durante as tarefas exploratório-investigativas envolvendo função, sendo esta pesquisa direcionada para a sala de aula. Mostrou que o ensino da Matemática pode sair do contexto tradicionalista, de exercícios repetitivos e decorados, e partir para a promoção de uma cultura diferenciada na sala de aula, “dando voz” aos alunos e auxiliando-os a desenvolver sua argumentação. (RODRIGUES, 2007, p.275).

2.2 DISSERTAÇÃO INTITULADA "O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA"

O título acima é da dissertação de mestrado apresentada por Valmir Ancelmo Dias (DIAS, 2015), junto ao PROFMAT, no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE), da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Campus de São José do Rio Preto, Pólo de Ilha Solteira, sob a orientação da Profª Drª Sílvia Regina Vieira da Silva.

No primeiro capítulo, o autor também levantou alguns aspectos da História da Matemática relacionados ao conceito de funções, fazendo breves resumos das principais elaborações de sua definição, buscando sensibilizar o professor de Matemática a este respeito, assim como foi feito em capítulo anterior deste trabalho. Aqui, porém, apresentou-se um levantamento histórico sobre a formação do conceito de função passando por outros matemáticos não citados em Dias (2015), como Galileu Galilei, Descartes, Newton e Leibniz, além de se evidenciar o desenvolvimento desse conceito desde a Antiguidade até a Modernidade.

No segundo capítulo, Dias (2015) também argumenta acerca da definição de função apresentada em alguns livros de Matemática utilizados no Ensino Superior, em nível de graduação, pois acredita que essas obras são grandes influenciadoras no modo como o (futuro) professor abordará o tema "Funções" na Educação Básica. O autor busca definições nas obras:

a) *Fundamentos de Matemática Elementar* – conjuntos e funções, de Gelson Iezzi, 1993;

b) *Cálculo com Geometria Analítica*, de Earl Willian Swokowski, de 1994;

c) *O Cálculo com Geometria Analítica*, de Louis Leithold, de 1994;

d) *Cálculo I*, de Geraldo Ávila, de 1994;

e) *UmCurso de Cálculo*, de H. L. Guidorizzi, de 2001;

f) *Cálculo, um novo horizonte*, de Howard Anton, de 2000;

g) *Números e Funções Reais*, de Elon Lages Lima, de 2013.

Esse autor coloca em destaque, as definições dadas em cada uma das obras acima. O capítulo é concluído ressaltando a importância de se desenvolver a definição de funções na licenciatura, que muitas vezes "é negligenciada no Ensino Superior, por professores que consideram que é um conteúdo que deveria ter sido visto na Educação Básica" (Dias, 2015). Sendo assim, o assunto acaba sendo tratado como uma revisão, o que "pode causar danos muito maiores do que se fosse destinado um tempo para uma discussão e aprofundamento da referida definição" (DIAS, 2015, p.27).

O autor destaca os principais conceitos (implícitos e explícitos) na definição de função:

a) Conjuntos e Relações entre Conjuntos;

b) Dependência;

c) Variação;

d) Expressões Algébricas;

e) Representação Geométrica.

No terceiro capítulo, Dias (2015) destaca como os livros didáticos da Educação Básica abordam a definição de Funções, desde o 1º ano do Ensino Fundamental, até a 3ª série do Ensino Médio, em uma escola Estadual de Cassilândia – MS, em 2014, escolhida justamente por atender a todos os anos da Educação Básica. Segundo o autor, os livros são escolhidos pelos próprios docentes, num primeiro momento, numa escolha pessoal, depois coletiva, e em seguida, em concordância com os professores das outras duas escolas estaduais da cidade, a fim de se evitarem transtornos quando é necessário que algum aluno seja transferido de uma para outra escola, no decorrer do ano letivo.

O autor inicia a análise pelos livros adotados para o Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano), da coleção "Matemática com Alegria", de Cristina Carmo, de 2009. Ele destaca, para cada ano, imagens de atividades dos livros, em que os conceitos implícitos e/ou explícitos na definição de função predominavam, fazendo seus próprios comentários após cada atividade mencionada. Na primeira atividade destacada pelo autor, que foi tirada de um livro do primeiro ano do Ensino Fundamental, há quatro imagens sequenciais de crianças, para as quais os alunos devem desenhar uma barra (um "|") para cada quantidade de crianças, em cada imagem. Assim, nessa atividade, fica evidenciado o conceito implícito de correspondência biunívoca e da dependência, pois na situação apresentada, a cada criança corresponde apenas um "traço".

O autor mostra atividades que contemplam o conceito de correspondência biunívoca, dependência e variação, comparação e representação, apesar de serem tratados de forma muito elementar nos 1º e 2º anos, porém sendo úteis durante o processo de construção da definição de função, e sendo ampliado o aprofundamento dos mesmos nos anos seguintes. Porém, para o 5º ano, o autor não disponibiliza mais atividades, pois percebe que a obra analisada trata dos conceitos do ano anterior, na forma de revisão, com poucas alterações, havendo aí também, uma ampliação do conhecimento sobre os números racionais.

No que se refere ao Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), a obra utilizada pela escola faz parte da coleção "Praticando Matemática", de Álvaro Andrini, de 2012. Nesta seção, o autor já não faz análise de cada série/ano, mas sim, através dos conceitos implícitos e explícitos na definição de função, acrescentando mais um item.

De forma sucinta, representa-se nas tabelas abaixo, a análise feita pelo autor (DIAS, 2015):

Conjuntos e Relações entre conjuntos	
6º ano	Desenvolve o conjunto dos Números Naturais. As frações e a representação decimal são desenvolvidas sem menção aos Racionais
7º ano	O Conjunto dos Naturais é usado para introduzir os Inteiros
8º ano	Revisão dos conjuntos numéricos estudados anteriormente e introdução dos Racionais, Irracionais e Reais
9º ano	Não se trata especificamente dos conjuntos numéricos

Dependência
Esse conceito é reforçado e ampliado, sendo associado ao conceito de variação.

Variação
Proporcionalidade: Inicia-se com análise de mapas, escalas, em seguida vêm as grandezas direta e inversamente proporcionais, razões, proporções e regra de três, todos importantes, principalmente, no estudo da função afim. Porcentagens: primeiro apresentada na forma decimal e cálculos de *x%* de um valor dado, sendo inserido o cálculo percentual no 7º ano, introduzindo descontos e acréscimos diretos; e no 9º ano, com uma revisão geral, o assunto é retomado e introduz-se o cálculo de juros.

Expressões Algébricas	
6º ano	Utilizam-se letras no lugar de números, em sequências numéricas; explora a ideia de incógnita e de variação
7º ano	É introduzido o conceito de equação, por imagens de balanças em equilíbrio, bem como de inequações, por balanças em desequilíbrio

8º ano	Há a revisão de equações (balanças em equilíbrio), vai se construindo a ideia de variável, como vem sendo feita desde o 1º ano, porém desta vez de forma explícita; é dada ênfase em expressões algébricas como: monômios e polinômios, operações entre os mesmos, produtos notáveis, fatoração, frações algébricas e sistemas de equações
9º ano	Trata-se de equações do 2º grau, sistema cartesiano e, em seguida, o conteúdo de funções

Representação Geométrica
Em todos os anos utiliza-se de tabelas e gráficos.

Funções (9º ano)
O autor apresenta que, na coleção analisada, no capítulo que antecede o estudo sobre funções, é apresentado o sistema cartesiano e, posteriormente, é apresentada a definição de função, de domínio e imagem, com algumas aplicações, o reforço da “lei de associação” (que é a representação da relação que define a função, por meio de uma equação algébrica) e por meio da interpretação de gráficos, ressalta os conceitos de dependência, variação, crescimento e decrescimento, construindo, depois, gráficos das funções afins e quadráticas, com utilização de tabelas de valores.

Para o Ensino Médio, o autor analisou a coleção “Matemática: ciência e aplicações”, de Gelson Iezzi, de 2010 e menciona que o estudo geral sobre funções se dá quase que exclusivamente no 1º ano, ficando para o 2º, apenas as funções trigonométricas. Segundo o autor, o assunto é tratado inicialmente com a Teoria dos Conjuntos e dos Conjuntos Numéricos, e em seguida, define-se função provocando algumas reflexões, como mostra em imagens dos livros. A obra utiliza tabelas e diagramas de setas até apresentar a definição formal de função e, também, dos conjuntos de domínio, contradomínio e imagem. Envolve a leitura de gráficos, retoma a representação do plano cartesiano, inclusive com a construção de gráficos a partir de tabelas. Traz também um estudo sobre crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, simetria gráfica, abordando especificamente as funções: afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica, fazendo complemento com a classificação das funções em sobrejetivas, injetivas e bijetivas, função inversa e composição de funções. Além disso, também relaciona as funções ao estudo das progressões aritmética e geométrica, e da

Matemática comercial e financeira.

No quarto e último capítulo, Dias (2015) propõe sugestões que considera relevantes ao professor (ou futuro professor) de Matemática, a respeito da construção da definição de função no Ensino Básico, tendo como referência, os documentos oficiais, tais como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN – BRASIL, 1998), os *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* (PCNEM – BRASIL, 2000) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Para o Ensino Fundamental I, destaca que os livros didáticos de Matemática analisados têm pouco conteúdo relacionado diretamente com a definição de função, porém estão adequados aos PCN, ressaltando que nesta etapa de aprendizado “devem ser introduzidos alguns conceitos que serão úteis à consolidação da definição de função” (DIAS, 2015, p. 119). O autor sugere, ainda, que seja dada ênfase em assuntos que envolvam conceito de dependência, e, se possível, que se verifique se há crescimento ou decrescimento de uma grandeza em relação à outra, para que assim se vá introduzindo o conceito de variação, o que sentiu falta na obra analisada. Nesse aspecto, do conceito de variação, discorda-se do referido autor, pois se entende como precoce sua aplicação no Fundamental I, quando a criança ainda precisa de um amadurecimento em relação ao pensamento numérico, que é algo que se está sendo construído nesta etapa da escolarização.

Para o Ensino Fundamental II, Dias (2015) sugere o aprofundamento dos conceitos já trabalhados no Fundamental I, a introdução de outros que serão aprofundamentos no Ensino Médio. Tal sugestão, o autor percebe contemplada na obra analisada. Baseado nos PCN, o autor sugere que sejam trabalhadas situações onde o “uso de letras” aconteça, com os seguintes significados: de substituta de um valor numérico como, por exemplo, no cálculo de áreas; para expressar regularidades, como numa sequência numérica, onde a letra designa a posição do elemento; em Geometria, descobrindo fórmulas para o cálculo de áreas, diagonais e soma dos ângulos internos de um polígono qualquer o que leva à capacidade de identificar regularidades.

Dias (2015) destaca que também estão relacionados com a ideia de função: transformação de expressões algébricas em outras equivalentes; introduzir variáveis para representar relações funcionais em situações-problemas concretas; explorar situações-problemas sobre variações de grandezas; representar e analisar as variações entre grandezas por meio de gráfico cartesiano.

Para o autor há um enfoque exagerado de Álgebra no 8º ano e, no 9º ano, após a definição de função, há um enfoque apenas à “lei de associação” da mesma. Ele considera que, nessa série escolar, poderiam estar inclusas definições importantes, como domínio e contradomínio da função, e que apenas a "lei de associação" da função é um tratamento limitado, assim como considera limitado, também, tratar função apenas a partir da dedução de lei de associação e a construção de gráficos a partir de tabelas.

Para o Ensino Médio, destaca que é necessário que o estudo de funções não seja isolado dos demais conteúdos matemáticos e das outras ciências, que o aluno deve ter acesso aos significados dos conteúdos que aprende; propõe sugestões e/ou reflexões sobre o ensino de funções no Ensino Médio, fundamentadas em sua própria vivência profissional e embasado nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, e na obra de Elon Lages Lima, *Números e Funções Reais*. Elencamos algumas delas:

> – Uma função é caracterizada por três componentes: Domínio, Contradomínio e Lei de Associação. **É possível sempre evidenciar isso!**
> – Devemos tomar cuidado para que o ensino não passe apenas para o campo algébrico. É plenamente possível estudar as funções específicas, sempre observando o Domínio, o Contradomínio, a Lei de Associação, o conjunto Imagem, a representação gráfica e se há presença de ideias de dependência/variação.
> – É possível introduzir, por exemplo, ideia de crescimento e decrescimento, ponto de intersecção com o eixo das abscissas (x) e com o eixo das ordenadas (y) e sinais dos valores da função em cada intervalo, antes do tratamento de funções específicas (afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica).
> – Como dito anteriormente, a representação tabular de uma função não é suficiente, tanto para deduzir a lei de formação quanto para a construção do seu gráfico.
> - No primeiro ano do Ensino Médio, simultaneamente, os alunos estão tendo contato com a definição de função nas disciplinas de Matemática, de Química[4] e de Física[5]. Porém, como normalmente acontece em nossas escolas, os enfoques em cada uma dessas áreas são tão diferentes, que os alunos não os relacionam entre si. Cabe aos professores das referidas disciplinas, principalmente o de Matemática, fazer essas conexões.
> – É bom lembrar que proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa são apenas casos particulares de crescimento e decrescimento. A função afim, $f(x) = ax + b$, com $b \neq 0$, é um caso de em que o crescimento depende do sinal do coeficiente "a" e que não se trata de proporcionalidade direta ou inversa. Aqui, entendemos que deve ser mais desenvolvida a representação da função linear ($y = ax$), que caracteriza a proporcionalidade direta e da hiperbólica $\left(y = \frac{a}{x}\right)$, que caracteriza a inversa.
> – Pode-se introduzir a função quadrática com situações-problema onde se deseja descobrir, por exemplo, a área máxima de uma figura retangular conhecendo seu perímetro.
> – Ainda sobre a função quadrática, devemos evitar a simples memorização de regras. Praticamente todas as regras utilizadas no nível médio são possíveis de serem demonstradas em sala de aula. Seu gráfico deve ser identificado como a curva denominada parábola, entendida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz).
> – Relacionar a função afim ao estudo das progressões aritméticas e juros simples e a função exponencial ao estudo das progressões geométricas e juros compostos.
> – Apresentar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.
> – Preferencialmente, com o auxílio de softwares específicos, mostrar aos alunos o

---

[4]Como exemplo, a curva de solubilidade é a variação da capacidade de solubilidade em função da temperatura.

[5]Como exemplo, em cinemática está presente a função do 1º grau do tipo $y = ax + b$, quando a velocidade escalar é constante e se tem a posição de um móvel em função do tempo: $s = s_0 + vt$.

> que ocorre com o gráfico de uma função real quando alteramos seus parâmetros (DIAS, 2015, p. 130, grifos do autor).

Dias (2015) conclui seu trabalho ressaltando o quão importante é o professor conhecer a organização curricular de Matemática de toda a Educação Básica, e como esses conteúdos devem ser ministrados, ou seja, preocupando-se mais com “o que” e “como” foi tratado nas séries/anos anteriores, e “o que” e “como” será tratado nas séries/anos posteriores. Neste trabalho também se entende ser importante que o professor se preocupe com essas questões, para que, em cada etapa de ensino, o conteúdo sobre *função*, tenha uma construção paulatina de sua definição e aplicações, para que o aluno não precise se basear em teorias meramente memorizadas e exercícios repetitivos sobre o assunto, mas que o faça por uma aprendizagem produtiva e eficaz.

Na análise da dissertação de Dias (2015), percebe-se a preocupação do autor em analisar os livros didáticos utilizados na escola em que fez seu campo de estudo, desde o 1º ano do Ensino Fundamental I até a 3ª série do Ensino Médio, para mostrar como ocorre a construção da definição ao longo dos anos escolares. O estudo desta dissertação propiciou a este professor reflexões importantes acerca de conceitos implícitos relacionados à definição de função e sua compreensão.

Diferentemente desse autor, porém, o objetivo da presente dissertação está em analisar o conteúdo *função* nos anos e séries em que é proposto seu ensino no currículo, de forma explícita, assim como o tema vem sendo tratado nos livros didáticos relativos a estas séries, e se estes levam em conta aspectos de seu desenvolvimento histórico e sua aplicação. Para tanto, é preciso fazer uma análise dos documentos atuais e oficiais de ensino sobre este tema, o que será abordado a seguir.

2.3 PROPOSTA DO CURRÍCULO DE SÃO PAULO ACERCA DO ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Apresenta-se, aqui, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo ainda em vigor, e o novo Guia de Transição vigente, baseado na BNCC - Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2019). Entende-se que há uma certa dinâmica social sobre os conteúdos matemáticos a serem ensinados nas escolas e, por este motivo, é necessário ao professor atualizar-se também quanto aos novos documentos curriculares que vão surgindo, como é o caso da BNCC, neste momento histórico e cultural pelo qual passa o país e onde as escolas se inserem.

2.3.1 CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) foi criado pela Secretaria da Educação do Estado, baseado em documentos, publicações e diagnósticos já existentes e a partir do levantamento e a análises de resultados de projetos realizados.

O documento apresenta “os princípios orientadores do currículo para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo” (SÃO PAULO, 2011, p. 7).

No que se refere à Matemática, o Currículo a apresenta

> “como um sistema primário de expressão, assim como a língua materna, com a qual interage continuamente. Ela também deve articular-se permanentemente com todas as formas de expressão, especialmente com as que são associadas às tecnologias informáticas, colaborando para uma tomada de consciência da ampliação de horizontes que essas novas ferramentas propiciam” (SÃO PAULO, 2011, p. 35).

O Currículo apresenta três grandes blocos temáticos, nos quais são relacionados os conteúdos referentes a cada um. São eles:

a) *Números:* envolvendo noções de contagem, medida e representação simbólica, tendo como ideias principais, equivalência e ordem.

b) *Geometria:* relacionada à percepção de formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, bem como sua construção e representação.

c) *Relações:* refere-se à noção de medida, relações métricas, relações de interdependência, como proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

Como podemos perceber, a noção de função está inserida explicitamente no bloco temático *Relações*. Mas também pode ser entendida com uma interface nos dois blocos anteriores, uma vez que, quando se fala na ideia de variação, geralmente as funções são estudadas no nível básico, com seus elementos variando em conjuntos numéricos; ou ainda, para a compreensão de seu crescimento ou decrescimento, usam-se ideias de representações geométricas em gráficos e com o sistema cartesiano.

Para o Ensino Fundamental II, quanto às *relações*, esse documento (SÃO PAULO, 2011) entende que os números racionais surgem de relações entre inteiros e para uma efetiva compreensão dos irracionais, sugere situações que envolvem grandezas incomensuráveis, como o par diagonal de um quadrado/lado do quadrado, que dá origem à raiz quadrada de 2. Destaca, ainda, que a “ideia de proporcionalidade também serve de mote para a exploração das relações entre grandezas direta e inversamente proporcionais, cujo prolongamento natural é o estudo das funções de 1º grau” (SÃO PAULO, 2011, p. 43).

Já para o Ensino Médio, o Currículo destaca que a aplicação de ideias relacionadas ao bloco temático *Relações* ocorre de forma bastante significativa, e busca ressaltar que a continuidade dos estudos de medidas de figuras planas e espaciais, iniciado no Ensino Fundamental, deve ser incorporada à investigação das relações entre grandezas que dependem umas das outras, isto é, buscar as relações de interdependência, abrindo, assim, as portas para o estudo mais sistematizado de um tipo particular de interdependência, que são as funções.

A proposta do Currículo não é inflexível, pois

> “o que se pretende é que ela propicie uma articulação consistente, entre as inúmeras formas possíveis, dos diversos temas, tendo em vista os objetivos maiores que fundamentam o presente Currículo: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, uma abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, uma caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias” (SÃO PAULO, 2011, p. 55).

E a respeito das habilidades que são propostas, destaca que:

> “é preciso estar atento ao fato de que tais habilidades também não são um fim em si mesmo; elas constituem apenas indicadores de que a exploração das ideias fundamentais, no caminho que leva das disciplinas às competências, estaria sendo realizada de modo fecundo” (SÃO PAULO, 2011, p. 55).

Elencamos abaixo a proposta de conteúdo do Currículo para o Ciclo II (Ensino Fundamental II) e o para o Ensino Médio, bem como as habilidades esperadas sobre o estudo deste tema, em cada ciclo, que busca estar em consonância com outros currículos e livros didáticos.

Para o Ensino Fundamental a proposta se dá como mostra o quadro abaixo:

Ano: 9º	**Bimestre:** 2º
Conteúdo	**Habilidade**
– Noções básicas sobre função – A ideia de variação – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus	– Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas. – Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau. – Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau. – Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das

	funções $y = x$ e $y = x^2$.

Para o Ensino Médio, *função* é proposta como mostra o quadro abaixo:

Série: 1ª	**Bimestre:** 2º
Conteúdo	**Habilidade**
– Relação entre duas grandezas. – Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. – Função de 1º grau. – Função de 2º grau.	– Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções – Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação – Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais dos valores da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) – Saber utilizar, em diferentes contextos, as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

Série: 1ª	**Bimestre:** 3º
Conteúdo	**Habilidade**
Funções exponencial e logarítmica – Crescimento exponencial – Função exponencial: equações e inequações – Logaritmos: definição e propriedades – Função logarítmica: equações e inequações	– Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento –Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial

Série: 2ª	**Bimestre:** 1º
Conteúdo	**Habilidade**
Trigonometria – Funções trigonométricas	– Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos – Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = asen(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = sen\ x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c

Série: 3ª	**Bimestre:** 3º
Conteúdo	**Habilidade**
Estudo das funções – Qualidades das funções –Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais – Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação	– Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características – Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões) – Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de $f(x)$ por unidade a mais de x), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos – Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e

Sobre a forma como a proposta do ensino de Funções é apresenta no Currículo, percebe-se uma introdução do tema no 9º ano do Ensino Fundamental, e seu aprofundamento na 1ª série do Ensino Médio, ou seja, propondo um estudo contínuo, sempre levando em conta as experiências e o conhecimento matemático já vivenciados pelos alunos, até a 3ª série, quando o aluno encerra o ciclo de sua educação obrigatória mínima, para sua inserção no mercado profissional e como cidadão na sociedade atual.

Vale destacar, que a proposta para a 3ª série do Ensino Médio, com uma visão mais abrangente das funções e o estudo de taxas de crescimento unitárias, não tem sido muito bem trabalhada na realidade das escolas estaduais, segundo a vivência deste autor como professor. Outros pontos frágeis dizem respeito ao ensino das funções exponenciais e logarítmicas, geralmente pouco trabalhadas e compreendidas pelos alunos nesse ciclo escolar.

2.3.2 GUIA DE TRANSIÇÃO E BNCC

O Guia de Transição

> “tem como objetivo revisitar o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, referente a área de Matemática e suas tecnologias, destacando nos tópicos iniciais, seus pontos a fim de proporcionar uma possível reflexão sobre a área e o respectivo componente curricular. (SÃO PAULO, 2019, p. 8)

No que se refere à Matemática, o Guia de Transição a traz como uma área específica do conhecimento baseado em três razões principais:

> A primeira leva em consideração que ela apresenta um universo próprio, muito rico de ideias e objetos específicos, como os números e as operações, as formas geométricas e as relações entre eles. Tais ideias e objetos são fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão dos fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. Outra razão é que a Matemática compõe com a língua materna um par fundamental, mas complementar. Naturalmente, existem diferenças fundamentais entre os significados de precisão na Língua e na Matemática e os alunos devem ser conduzidos a apreciar a beleza presente tanto na exatidão dos cálculos quanto no rigor expressivo do texto poético. Finalmente, uma terceira razão é que a Matemática propicia a compreensão, utilização e criação das tecnologias digitais de informação e comunicação (SÃO PAULO, 2019, p. 8).

Este documento apresenta a nova proposta do currículo paulista, em consonância com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a qual

> “entende que o desenvolvimento dos processos matemáticos potencializa o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático(raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional e, assim, garantir o desenvolvimento de competências específicas, conforme registro no documento oficial.” (SÃO PAULO, 2019, p. 16)

A BNCC, diferente da proposta do Currículo do Estado de São Paulo, apresenta cinco unidades temáticas, que orientam a formulação das habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental, sendo elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam

> e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2019, p. 270)

O tema *funções* aparece na unidade *Álgebra*. No 9º ano, tem como proposta de conteúdo:

a) Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.

b) Razões entre grandezas de espécies diferentes.

c) Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Habilidades esperadas:

a) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

b) Resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

c) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Para o Ensino Médio, a BNCC, propõe "a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental, e que para o estágio seguinte, possibilite ao estudante construir uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua ampliação à realidade" (SÃO PAULO, 2019, p. 76).

E ainda propõe o desenvolvimento de cinco competências específicas para Matemática e suas tecnologias, para o Ensino Médio:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos,

> analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2019, p. 533)

Para o Ensino Médio, são várias as possibilidades de organização curricular propostas pela BNCC; uma delas é por unidades similares àquelas que descrevemos para o Ensino Fundamental, que podem ser, entre outras, Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Destacamos a apresentada na unidade Álgebra, que é a que compreende o estudo sobre Função, com negrito nas partes mais pertinentes a essa temática:

NÚMEROS E ÁLGEBRA
HABILIDADES
Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos **de juros simples e compostos**, entre outros), **para tomar decisões.**
Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a **variação de grandezas**, pela **análise dos gráficos das funções** representadas e das **taxas de variação**, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Construir modelos empregando as **funções polinomiais de 1º ou 2º graus**, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Converter **representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano**, distinguindo os casos nos quais o **comportamento é proporcional**, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
Investigar **conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas**, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a **variação** e utilizar uma reta para **descrever a relação observada**.
Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em

representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma **variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra**, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
Investigar **relações entre números expressos em tabelas** para representá-los no plano cartesiano, **identificando padrões** e criando conjecturas para generalizar e **expressar algebricamente essa generalização**, reconhecendo quando essa representação é de **função polinomial de 1º grau**.
Investigar **relações entre números expressos em tabelas** para representá-los no plano cartesiano, **identificando padrões** e criando conjecturas para **generalizar e expressar algebricamente essa generalização**, reconhecendo quando essa representação é de **função polinomial de 2º grau do tipo** $\mathbf{y = ax^2}$.
Investigar **pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas** em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(BRASIL, 2019, p. 543. Grifos nossos)

A BNCC destaca a possibilidade de adotar outras organizações, condizentes com as demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas. E, ainda, que

> "é fundamental preservar a articulação, proposta nesta BNCC, entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Além disso, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais" (BRASIL, 2019, p. 542).

Percebe-se, portanto, que na BNCC, também se tem a preocupação em construir significativamente o conceito a ser estudado durante o processo de aprendizagem, e que essa construção deve ser feita desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

3 UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA FUNÇÕES

Como já descrito nos capítulos anteriores, o ensino de funções é fundamental para a aprendizagem matemática, uma vez que este conceito é importante para a compreensão e estruturação do pensamento matemático.

Com essa ideia, será lançada, neste capítulo, uma proposta de abordagem de funções como instrumento auxiliar para o professor em sala de aula, tendo como público-alvo o aluno do Ensino Médio. Escolheu-se esta etapa pelo fato de que, segundo os currículos oficiais, o conteúdo de funções se faz mais específico e aprofundado no decorrer de todo o Ensino Médio. Não se pode deixar de lado que este conceito, como apresentado neste trabalho, é estudado já de forma explícita ou implícita no decorrer de todo o Ensino Fundamental, ou seja, de certa forma o aluno já está inserido no contexto de funções, por meio de estudos prévios acerca das noções de variáveis, relações, gráficos, tabelas, etc. Em relação a isso, a BNCC:

> "propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior [Ensino Fundamental], a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade" (BRASIL, 2019, p. 527).

Nesta seção, será levada em conta a formação histórica do conceito de função, pois como já dito no capítulo 1 deste trabalho, a abordagem histórica mostra ao aluno (e ao professor) que essa definição passou por transformações, de acordo com o grande esforço e dedicação de matemáticos que contribuíram para que este conceito chegasse ao modo como o conhecemos hoje, tendo aplicabilidade em várias áreas, dentro e fora da Matemática. Acredita-se que, quando um conteúdo é trabalhado, não deve ser apenas lançado aos alunos, como vimos em Rodrigues (2007), de forma tradicional, ou seja, expondo o conteúdo com certa imposição, fornecendo um exemplo e lançando vários exercícios, esperando que o aluno tenha domínio em sua resolução, de forma mecanizada e decorada. Pretende-se fazer o aluno protagonista de sua própria formação e conhecimento, levando o mesmo a construir o conhecimento através da análise de problemas e do pensamento lógico-matemático.

Também será considerado aquilo que o aluno já traz consigo em aprendizagens anteriores, ou seja, partindo de seu conhecimento prévio, importante para a construção do novo.

> De acordo com Ausubel, o que o aluno já sabe - a ideia-âncora, na sua denominação - é a ponte para a construção de um novo conhecimento por meio da reconfiguração das estruturas mentais existentes ou da elaboração de outras novas. Quando a criança reflete sobre um conteúdo novo, ele ganha significado e torna mais complexo o

> conhecimento prévio. Para o americano, o conjunto de saberes que a pessoa traz como contribuição ao aprendizado é tão essencial que mereceu uma citação contundente, no livro *Psicologia Educacional*: "O fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Descubra isso e ensine-o de acordo". (https://novaescola.org.br/conteudo/1510/conhecimento-previo)

E de acordo com a nova BNCC:

> Em continuidade a essas aprendizagens [do Ensino Fundamental], no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.
> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que dêem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2019, p. 528)

A proposta será voltada para o ensino de funções, mais especificamente das funções:polinomial do segundo grau, exponencial e logarítmica para a 1ª série do Ensino Médio. Em função da sequência aqui apresentada, espera-se que o professor, leitor deste trabalho, analise a realidade da escola e da comunidade em que a mesma está inserida e faça adaptações de acordo com esta realidade. Ao longo desta sequência, serão apontados os aspectos fundamentais sobre funções, que não poderão deixar de ser trabalhados, em relação ao estudo que foi realizado nos capítulos anteriores, sobre as diretrizes curriculares para esse conteúdo.

3.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

Segundo Pais (2002, p. 102) "Uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

Elaboramos uma sequência para ser trabalhada em 8 aulas. Importante ressaltar que esse tempo pode ser menor ou maior, observando que as turmas não são homogêneas para o tempo de aprendizagem. De acordo com Ausubel (2003), também se deve alterar esse tempo, para que a aprendizagem seja significativa e incorpore os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos, ou no caso de sua ausência, que outros conhecimentos esperados e mais fundamentais para a compreensão da noção de função também possam ser construídos.

Na aula 1, pretende-se apresentar ao aluno a ideia de função, porém sem uma definição formal, ou seja, apresentar ao aluno uma situação casual do cotidiano onde este conceito está presente.

Na aula 2, insere-se a História da Matemática como ferramenta auxiliar para o processo de aprendizagem de função, para que o aluno entenda que todo conteúdo estudado foi elaborado por anos e anos até chegar à forma como nos é apresentada atualmente.

Na aula 3, apresenta-se a noção de função como um caso especial de relação entre conjuntos.

Na aula 4, apresenta-se ao aluno a representação de um par ordenado (x, y) no plano cartesiano, afim de que se construa, no momento oportuno, as representações gráficas das funções.

Na aula 5, dá-se um enfoque específico à função polinomial do segundo grau, a partir de uma situação-problema.

Na aula 6, apresenta-se a solução da situação-problema da aula anterior, utilizando a ideia de função como ferramenta de resolução.

Na aula 7, dá-se a definição e cálculo do vértice de uma parábola.

Na aula 8, apresenta-se os pontos de máximo e mínimo, como ferramenta para resolução de situações problemas.

Assim, apresentamos abaixo cada aula proposta, explicada de forma que o professor leitor deste trabalho possa utilizá-la como base para o ensino de função.

3.1.1 AULA 1 – CONHECER E ENTENDER O TERMO FUNÇÃO

O objetivo desta aula é apresentar ao aluno a ideia de função, porém, inicialmente, sem uma definição formal.

Considerando o estudo sobre funções realizado nos capítulos anteriores, o professor inicia a aula colocando seu objetivo: compreender o conceito de função e sua aplicação. O professor lança aos alunos a indagação, através de uma roda de conversa, a respeito do que os mesmos já conhecem ou se lembram sobre a palavra “função”, dentro ou fora da Matemática. Pela experiência deste professor em sala de aula, espera-se algumas possíveis respostas dadas pelos alunos a respeito desta questão, entre elas:

- É algo que tem utilidade para fazer alguma coisa. Exemplo: “A função do microondas é aquecer a comida”;

- É quando se tem um cargo. Exemplo: “A função do faxineiro é deixar tudo limpo”;
- Função é desempenhar uma tarefa. Exemplo: A função do goleiro é defender o gol.

Diante das colocações apresentadas, pode-se perceber se os alunos se retêm à função enquanto o sentido de desempenho de tarefas ou trabalhos. Então o professor pode solicitar que consultem em um dicionário, que pode ser on-line, o significado de função.

Neste caso, podem encontrar as seguintes definições:

> **Função** [Lat. *functione*] *sf.* **1**. Ação própria ou natural dum órgão, aparelho ou máquina. **2.** Cargo, serviço, ofício.**3.** Prática ou exercício da função. **4.** Utilidade, serventia. (...) **8.***Mat*. Relação entre dois ou mais conjuntos, definida por uma regra que associa, a cada elemento de um conjunto, não mais de um elemento determinado do outro. (FERREIRA, 2010, p.366, grifos do autor)

O professor pode explorar que as definições dadas pelos alunos não estão erradas, porém, como mostra o dicionário, em Matemática ela tem um sentido especial e questionar aos alunos o que entendem por relação de correspondência. O que pode levar os alunos a relacionar correspondência com aquilo que fazemos nos Correios: mandar uma correspondência a alguém. Nesse caso, o professor pode aproveitar e utilizar essa ideia, partindo do ponto de que, quando mandamos uma correspondência a alguém, há uma relação entre quem manda e quem recebe, ou seja, há uma “ligação” entre as partes. A partir desse ponto de vista o professor pode lançar a ideia de que função está ligada à relação entre conjuntos, ou seja, um que “manda” (variável independente) e outra que “recebe” (variável dependente).

Neste caso, o professor pergunta sobre a ideia de conjunto, permitindo que os alunos, assim como anteriormente, fiquem livres para dizerem o que conhecem. Novamente, tendo como recurso o dicionário, os alunos podem encontrar a seguinte definição:

> (...)
> [MAT] Conceito primitivo, de difícil precisão e definição, que corresponde à ideia intuitiva de reunião, coleção ou agrupamento de objetos ou elementos, determinados e diferenciáveis, próprios da realidade exterior ou oriundos das construções do pensamento.
> (...) (http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=conjunto)

A partir daí, o professor lembra aos alunos que, em Matemática, conjunto é o agrupamento de elementos com características em comum. Como exemplo, pode indagar sobre os que já estudaram nos anos anteriores: conjunto dos números naturais, inteiros, etc, ou outros de objetos diferentes: por exemplo, o conjunto de alunos dessa classe.

Refletido sobre essa definição, o professor lança a seguinte proposta: “Vamos considerar a seguinte situação: a quantidade de litros de combustível a ser comprado e o preço a ser pago, tendo em conta o preço por litro. Como estas duas grandezas estão relacionadas numa correspondência?” Espera-se que os alunos percebam que quanto mais litros se compram, mais se paga, ou seja, o professor pode construir a tabela abaixo e pedir aos alunos que a completem:

Combustível (em litros)	**Preço a ser pago (em reais)**
1	2,25
2	4,50
2,5	5,625
5	11,25
5,8	13,05
10	22,5
x	...

Nesse caso, o professor pede aos alunos que expliquem como chegaram aos resultados dos valores a serem pagos, o que se espera que os mesmos percebam que basta multiplicar a quantidade de litros de combustível pelo preço de cada litro, e ainda que representem essa expressão na forma algébrica, situação em que o professor pode ir mediando para que os próprios alunos cheguem à expressão, com questões do tipo:

Questões	**Respostas esperadas**
O que se é conhecido nessa situação?	O preço do litro do combustível
O que precisamos, primeiramente, para saber quanto será pago?	Quantos litros se quer comprar
Então, já que a quantidade de litros é desconhecida, como podemos representá-la?	Por *x*. *(ou por qualquer outra letra que se queira representar a quantidade – poderia ser “q”, por exemplo).*[6]
Sabendo quantos litros se quer, como sei o quanto pagarei?	Multiplica o quanto comprou por 2,25
Então, como podemos expressar essa relação, para	Será pago 2,25.*x* (ou 2,25.*q)*

[6] Nessa etapa o professor pode inserir o termo variável, já que a quantidade de litros comprada pode ser o quanto for preciso.

que seja permitido calcular o quanto será pago para qualquer quantidade comprada?	

Esta situação foi escolhida porque é bastante usual na vida prática das famílias urbanas e realista, uma vez que em postos de combustíveis, é comum se comprar quantidades fracionadas (não inteiras) de litros, para se completar certo valor do preço a pagar. Assim, este exemplo parece mais apropriado, pois dá margem a um estudo de variabilidade mais detalhado, dentro do conjunto de valores a serem comprados (não ficando restrito, como em outras situações, a quantidades inteiras e positivas de certos objetos).

Após essa análise, cabe definir variável dependente e independente, que pode ser descoberta pelos próprios alunos. Neste caso, o professor poderá destacar, após a argumentação dos alunos, que o preço total a ser pago é a variável dependente e a quantidade de combustível, a independente, e questionar aos alunos o porquê, situação em que se espera que os alunos percebam que só se sabe o quanto se pagará depois que se sabe o quanto comprará (o que normalmente os alunos acabam percebendo, tendo em vista a experiência deste professor em sala de aula).

E, para finalizar, o professor pode questionar por que a variável independente está representada por x (ou q) e a dependente ainda não recebeu uma “letra”, e se é importante que esta também tenha uma identificação. Nesse caso, espera-se que os alunos digam que sim, já que se tem construída uma relação entre elas. Então, podemos escrever x para a variável independente e y para a dependente (ou p, se quiserem se referir ao preço a ser pago), e concluir que y (ou p) depende de x (ou q) para existir, ou para ser descoberto o seu valor. Outra ideia importante é destacar a noção de variação: espera-se que os alunos concluam, após indagações do professor, que, conforme se varia a quantidade de litros comprada, o preço varia também, proporcionalmente. Caso eles não se lembrem da noção de proporcionalidade, o professor pode fazer perguntas que os aproxime da mesma e, caso não consigam, ele pode recordar sobre este termo.

Nesta primeira aula, buscou-se realizar uma conversa com os alunos a respeito da ideia de relação entre conjuntos e função, sem dar definições teóricas diretas, mas sim partindo do conhecimento prévio dos alunos e uma experiência do cotidiano, para que os mesmos percebam e reflitam que a função está presente no seu dia a dia e que a usam sem mesmo se darem conta.

3.1.2 AULA 2 – ORIGEM DA IDEIA DE FUNÇÃO

O objetivo desta aula é apresentar aos alunos um pouco da História da Matemática, de forma sucinta para que compreendam que a Matemática, assim como as demais ciências vem sendo construída desde a Antiguidade.

O professor pode iniciar esta aula lembrando o exercício feito na aula anterior e questionar: "Vocês acham que a ideia de função, como foi utilizada nessa atividade, sempre existiu ou foi construída de alguma forma?".

O professor pode iniciar uma roda de conversa a respeito do que os alunos pensam sobre a evolução deste conceito, bem como sobre quando acham que se deu sua origem e quanto tempo levou para se chegar a uma definição matemática que é aceita hoje, ao longo dos tempos. Pode-se concluir com a leitura e apresentação do quadro resumido da evolução do conceito, na página 7, deste trabalho, explicando para os alunos alguns detalhes sobre essas informações e respondendo a eventuais dúvidas que eles possam ter.

Para dar mais significado histórico ao que foi discutido, o professor pode apresentar o problema descrito por Eves (2004), conforme colocado na página 4 deste trabalho, que se trata de um dos problemas referentes às tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas dos babilônicos, sugerindo que os alunos façam sua resolução usando os conhecimentos matemáticos que já possuem, sem se preocuparem com possíveis erros que possam cometer, como forma de desafio aos mesmos. Com o desafio deste problema, o professor pode ajudar os alunos a refletirem sobre o instinto de funcionalidade que já havia entre esse povo, sendo tomada esta noção, como "funções tabeladas".

Eis o problema:

> (a) O caráter algébrico dos problemas geométricos babilônicos fica ilustrado pelo seguinte, encontrado numa tábula de Strasburgo que data de 1800 a.C., aproximadamente. "Uma área *A*, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 menos do que 2/3 do lado do outro quadrado. Quais os lados do quadrado?" (Eves, 2004, p.79).

O professor pode mediar a leitura e interpretação deste problema para que os alunos descubram uma das possíveis soluções, usando o conhecimento algébrico que já possuem:

Temos dois quadrados cujos lados são desconhecidos: x e $\frac{2}{3}x - 10$.

Assim, temos que: a soma da área dos dois quadrados é:

$$\left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2 + x^2 = 1000$$

Desenvolvendo o produto notável: $\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 100 + x^2 - 1000 = 0$

Agrupando termos semelhantes: $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$

Reduzindo ao denominador comum: $13x^2 - 120x - 8100 = 0$

Resolvendo a equação: $\Delta = 120^2 - 4 \,.\, 13 \,.\, (-8100)$

$$\Delta = 14400 + 421200$$

$$\Delta = 435600$$

$$x_1 = \frac{120 + 660}{26} = 30$$

$$x_2 = \frac{120 - 660}{26} \cong -20{,}76$$

Como se trata de medida, convém apenas o resultado natural 30. Logo os lados desses quadrados são 10 e 30 (*x=30* e $\frac{2}{3}x - 10$ *=20 – 10=10*).

Pode-se observar com os alunos que resolver esse problema equivale a estudar para quais *x*, os valores da função *f(x)=13x*^{2}*– 120x – 8100* se tornam iguais a zero.

Como será que os povos de 1800 a.C. resolviam este problema?

Fazendo variar valores de *x* numa tabela, pode-se encontrar os valores do outro lado e ver o que acontece com as áreas. Na verdade, eles tinham um modo de propor uma solução inicial e irem se aproximando da solução verdadeira por diferenças, fazendo diminuir cada vez mais o erro da solução. Mas não vamos entrar nestes detalhes aqui. Pode-se, neste momento, construir uma tabela, com o auxílio da calculadora, com os valores dos quadrados somados, e ver quando eles se aproximam de 1000:

x	$\frac{2}{3}x - 10$	$A=x^2+\left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2$
10	$\frac{20}{3} - 10 \approx -3{,}333$	$A \approx 111$
11	$\frac{22}{3} - 10 \approx -2{,}666$	$A \approx 128{,}1$
12	$\frac{24}{3} - 10 = -2$	$A=148$
15	$\frac{30}{3} - 10 = 0$	$A=225$
20	$\frac{40}{3} - 10 \approx 3{,}333$	$A \approx 411{,}1$

25	$\frac{50}{3} - 10 \approx 6{,}666$	$A \approx 669{,}43$
30	$\boldsymbol{\frac{60}{3} - 10 = 10}$	$\boldsymbol{A = 1000}$
35	$\frac{70}{3} - 10 \approx 13{,}333$	$A \approx 1402{,}77$

Ao final, fazer um levantamento da conversa, com questões pertinentes, como:

- Vocês já tinham pensado que a Matemática também tem uma história?
- Vocês acham importante conhecer a origem e transformação histórica do que se estuda em matemática? Justifique.

A partir daí, levar os alunos a perceberem o quanto é importante saber que as pessoas pensavam em modos diferentes de resolver os problemas matemáticos, em outras épocas, e também entendam a necessidade e o contexto em que os termos “variação”, “variável dependente”, “variável independente” e “função” foram construídos e de que forma evoluiu para chegar ao modo como são utilizados hoje.

3.1.3 AULA 3 – DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO COMO RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS

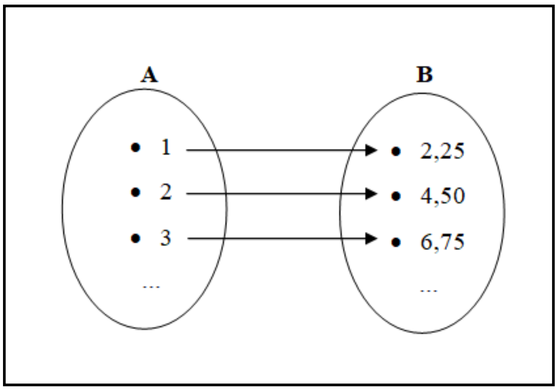
O objetivo desta aula é, a partir do levantamento histórico lido com os alunos e da noção intuitiva de função dada na aula 1, apresentar a definição de função como um caso especial de relação entre conjuntos.

O professor retoma com os alunos a situação-problema da aula 1, especialmente a tabela montada com a quantidade de litros comprados e o valor a ser pago. A partir daí o professor faz as seguintes indagações: “É possível que uma pessoa pague valores diferentes pela mesma quantidade de combustível, sem que haja alteração no valor do preço por litro”? “E é possível que se pague o mesmo valor comprando quantidades diferentes de combustível, sem que haja alteração no preço do litro”? Os alunos perceberão que é impossível. Com isso, o professor pode definir função, como está definido por Giovanni et al (2015), conforme apresentamos no capítulo 1 deste trabalho:

> Dados dois conjuntos não vazios, *A* e *B*, e uma correspondência *f* que associa os elementos de *A* com os elementos de *B*, dizemos que ***f*** é uma **função** de *A* em *B* quando **cada** elemento *x* de *A* está associado, por *f*, a um **único** elemento *y* de *B*. (Giovanni et al, 2015, p.54, grifos dos autores).

Com essa definição, o professor pode construir o diagrama de Venn (Figura 8) para mostrar aos alunos essa associação dos elementos um a um:

Figura 8 – Diagrama de Venn



Fonte: Construção nossa

Onde *A* é o conjunto da quantidade de combustível a ser comprada, e *B* o preço a ser pago.

A partir daí o professor retoma a equação que define essa situação-problema, de onde trará a lei de formação. Relembrando os alunos sobre a situação compartilhada na aula 1, temos que:

$$y = 2{,}25 \,.\, x$$

Como visto, a variável dependente (y) depende da variável independente (x), assim o professor destaca aos alunos que y depende, ou seja, é dado em função de x, com isso apresenta a notação

$$y = f(x) = 2{,}25 \,.\, x$$

O professor reforça, nesse momento, que para cada valor de x, há seu valor correspondente y, ou seja, temos uma relação (ou correspondência)(x,y)ou $(x,\ f(x))$, onde representamos cada solução possível desta situação, e ainda, destaca que os valores assumidos pela variável independente (x) está no conjunto *domínio* da função e os valores assumidos por sua respectiva variável dependente (y), formam; o conjunto *imagem* da função.

Com essa aula, o professor já apresenta aos alunos:

- A definição de função como é tratada nos livros didáticos;
- O diagrama de Venn como elemento representativo de uma situação-problema;
- A lei de formação de uma função;
- A representação da solução por meio do par ordenado (x, y), que será reforçado na próxima aula;
- A ideia de conjuntos, *domínio* e *imagem* de uma função.

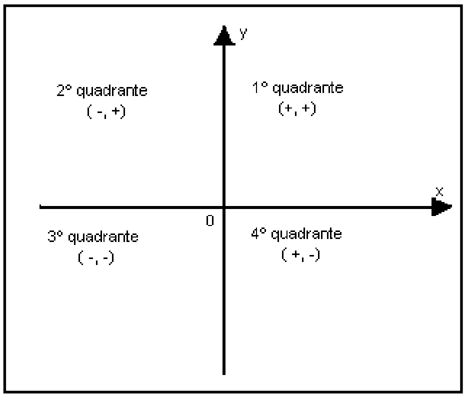
Consideramos importante que o professor enfatize a definição proposta sobre função, como relação entre conjuntos, grandezas, etc, e que fique visível para o aluno que as tabelas, diagramas de Venn, gráficos, pares ordenados, são apenas modos de se representar as funções.

3.1.4 AULA 4 – PAR ORDENADO E PLANO CARTESIANO

Esta aula tem como objetivo apresentar aos alunos a representação dos valores de *x* e seus correspondentes valores de *y* por meio de pares ordenados e, consequentemente, sua representação no plano cartesiano.

O professor retoma o caso da situação-problema exposta na aula 1, e suas possíveis soluções apresentadas na tabela e no diagrama de Venn. Sugere aos alunos uma outra forma de representação da correspondência dos valores entre *x* e *y*: os pares ordenados, como mencionado na aula anterior. O professor sugere aos alunos relembrarem e refletirem sobre o que é um par ordenado e como se dá sua representação. Espera-se que os alunos se lembrem da relação (*x*, *y*), como representação da solução do problema proposto. Nesse caso, teríamos como soluções: (1; 2,25), (2; 4,50), (3; 6,75) e assim por diante.Após esta análise, o professor entrega aos alunos uma folha de papel quadriculado e retoma a construção de um plano cartesiano, sugerindo a construção, a lápis, inicialmente, pelos alunos, e acompanhando o andamento da mesma. Em seguida, relembra sobre os quadrantes do plano cartesiano e os sinais dos valores assumidos por *x* e *y* em cada um desses quadrantes (Figura 9), para que possam analisar quais serão suficientes construir para localizar os pontos no plano cartesiano. Cabe aqui lembrar a nomenclatura de cada eixo: *x* como sendo eixo das abscissas e *y*, das ordenadas. O professor, com a participação dos alunos, constrói o plano cartesiano no quadro e marca os sinais das variáveis em cada quadrante, como segue abaixo:

Figura 9 – Plano cartesiano com os quadrantes e sinais das variáveis.



Fonte: Disponível em: https://www.somatematica.com.br/emedio/retas/retas1.php. Acesso em 12/10/2019

Partindo das discussões realizadas, o professor leva os alunos e refletirem sobre qual(is) quadrante(s) é suficiente construírem para essa situação-problema. Espera-se que os alunos percebam que apenas o 1º quadrante é suficiente, uma vez que tanto os valores de *x*, quanto os valores de *y* admitem apenas números positivos, incluindo o zero, como solução, por se tratar de quantidades (*x*) e valor pago (*y*).

Após, o professor pergunta aos alunos sobre possíveis dificuldades encontradas para a construção, se houve dúvidas, se lembraram a disposição dos eixos e retoma no quadro a construção do mesmo.

Após isto, o professor sugere que os alunos marquem os números em cada eixo, e localizem cada par ordenado, sempre supervisionando e sanando as dificuldades dos mesmos.

Ao marcar os pontos, o professor questiona aos alunos se, nessa situação, é permitido ligar os pontos da representação gráfica, quando se espera que os alunos percebam que:

- Sim, pois qualquer número decimal, a partir do zero, pode ser considerado como solução do problema dado na aula 1.
- Sim, mas apenas no 1º quadrante, como já observado anteriormente.

E, vale destacar, que é necessário um limite nessa situação, uma vez que o tanque do carro tem uma capacidade limitada.

Com essa aula pretendemos apresentar e relembrar aos alunos a construção de um plano cartesiano e a localização dos pares ordenados no mesmo.

Com essa situação-problema levantada, o professor já pode inserir o tratado sobre função afim, do tipo $y = ax + b$.

3.1.5 AULA 5[7] – FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

Como mencionado anteriormente, pretende-se dar enfoque à função polinomial do segundo grau nesta proposta de ensino.

Nesta aula, tem-se como objetivo levar o aluno a resolver uma situação-problema, por meio de uma função do segundo grau.

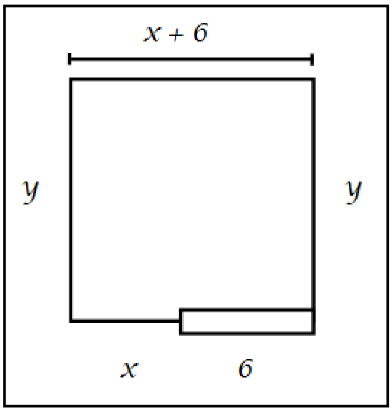
O professor lança como proposta de resolução o seguinte problema:

"Seu João, deseja fazer um cercado retangular em seu terreno, aproveitando um muro como parte de um dos lados desse cercado. O restante do cercado será completado com 34 metros de uma cerca de arame, conforme a figura abaixo. Quais deverão ser

[7] Aqui continuamos na contagem em sequência, mas ressaltamos que algumas aulas entre a 4 e a 5, o professor utilizará para aprofundar conteúdos sobre a função afim e propor outros exercícios adicionais aos alunos.

as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o proprietário poderá construir?" (Figura 10)

Figura 10 – Cercado



Fonte: Construção nossa

Lançado o desafio, o professor pede aos alunos que resolvam essa situação da forma que preferirem, utilizando os conhecimentos algébricos que já possuem. Pode propor algumas sugestões sobre como anotar os valores possíveis das dimensões, levando em conta a quantidade de arame que se possui, e pode sugerir que seja feita uma tabela com essas opções de valores. Metodologicamente falando, essa prática procura levar o aluno à aquisição de procedimentos para resolução de problemas e construção de um novo conhecimento matemático.

O professor espera algum tempo para que os alunos discutam o problema em grupos e tentem resolvê-lo, acompanhando o andamento. Após cerca de 30 minutos de discussão, pode colocar na lousa as ideias dos alunos para resolver, mesmo que não alcancem totalmente a solução. Espera-se que os alunos tenham, dentre outras formas de resolução, organizado as informações em uma tabela, como abaixo:

x	**2x + 2y + 6 = 34**	**y**	**x + 6**	**Área**
1	2y + 8 = 34	13	7	91
2	2y + 10 = 34	12	8	96
3	2y + 12 = 34	11	9	99
4	2y + 14 = 34	10	10	100
5	2y + 16 = 34	9	11	99
6	2y + 18 = 34	8	12	96

Ou seja, a maior área possível é 100, com $x = 4$.

Em seguida, pergunta aos alunos, levando em conta o que foi aprendido nas aulas anteriores, o que seria uma função do segundo grau. Espera-se que os alunos associem o nome às equações do segundo grau, onde o professor apresentará que é uma função do tipo

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde a, b e c são os coeficientes, porém com $a \neq 0$.

Neste momento o professor poderá questionar por que o coeficiente a não pode assumir o valor 0, quando se espera que os alunos percebam que caso a seja 0, a função assume a forma

$$y = f(x) = 0x^2 + bx + c = bx + c,$$

ou seja, passa a ser uma *função afim*.

Retomando o problema, o professor pode questionar se a área expressa é uma função de algum desses tipos e discutir sua solução, na aula seguinte.

3.1.6 RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA PROPOSTA

Após refazer um levantamento das possíveis soluções apresentadas pelos alunos, o professor propõe a resolução do problema da seguinte maneira:

Considerando que se possui 34 metros de arame, temos:

$6 + x + x + y + y = 34$

$2x + 2y + 6 = 34$

$2x + 2y = 28^{(:2)}$

$x + y = 14$

$y = 14 – x$

Para a área da região cercada, temos:

$\text{Área do retângulo} = (x + 6) \,.\, y = (x + 6) \,.\, (14 – x) = – x^2 + 8x + 84$

Daí, temos a função $f(x) = – x^2 + 8x + 84$.

A partir da função encontrada, o professor pergunta aos alunos como sugerem encontrar a maior área. Diante de nossa experiência em sala de aula, os alunos podem não encontrar uma "saída" para esse problema, então o professor pode propor a construção de tabela para que atribuam valores à variável x e vejam o que acontece.

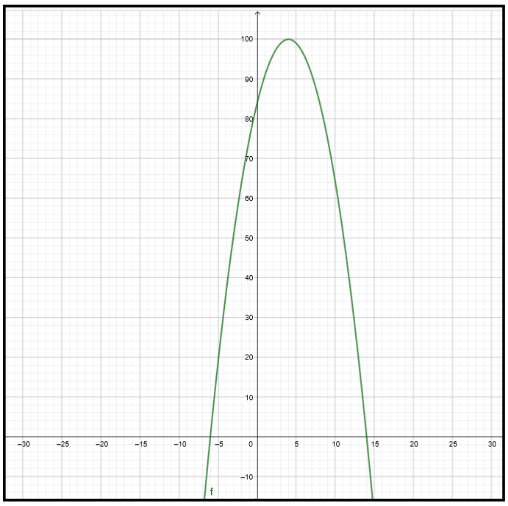
O professor constrói, com os alunos, a tabela abaixo e preenche atribuindo valores a x e descobrem o seu respectivo valor em y formando, assim, o par ordenado (x, y):

x	$-x^2 + 8x + 84$	y	(x, y)
0	$-0^2 + 8.0 + 84$	84	(0, 84)
2	$-2^2 + 8.2 + 84$	96	(2, 96)
4	$-4^2 + 8.4 + 84$	100	(4, 100)
6	$-6^2 + 8.6 + 84$	96	(6, 96)

Após esses valores serem construídos, o professor questiona aos alunos o que perceberam em relação aos valores de y, dados os valores a x. Espera-se que os alunos percebam que os valores de y aumentaram até certo ponto, diminuindo logo em seguida. O professor pede aos alunos que reflitam e concluam o que isso significa na resolução do problema proposto. Espera-se que os alunos percebam que há um valor máximo atribuído a y.

Após essa observação, o professor sugere aos alunos acrescentem mais valores à tabela e que passem esses valores obtidos para um plano cartesiano, em papel quadriculado e que tracem a figura obtida no plano e pede que comparem com o que se formou na *função afim* e questionar se são as mesmas formas, o que mudou? Espera-se que os alunos observem que, diferentemente da função afim, essa representação gráfica tem um formato parabólico (Figura 11)

Figura 11 – Representação gráfica da função $f(x) = -x^2 + 8x + 84$



Fonte: Construção nossa

E investiguem em que valores de x e y, a representação gráfica obteve este ponto mais alto. Neste caso, os alunos observam que o ponto mais alto desta parábola está em (4, 100), ou seja, o valor de x para que esse cercado tenha a maior área possível é 4. Logo, conclui-se que as dimensões deste cercado, para alcançar a máxima área, são:

$x + 6 = 4 + 6 = 10$ e $y = 14 – x = 14 – 4 = 10$, ou seja, este cercado é um quadrado[8] de lado 10 m.

Após a conclusão da maior área, o professor pode perguntar aos alunos se sempre que precisar achar o valor máximo, é necessário construir uma tabela, um plano cartesiano e somente depois encontrar a solução. Em geral, os alunos já negam e esperam qual seria a outra forma de resolver o problema. O que ficará para próxima aula.

3.1.7 AULA 7 – VÉRTICE DA PARÁBOLA

Nesta aula o professor apresenta como objetivo o cálculo do vértice de uma função polinomial de segundo grau, informando que a curva que a representa é chamada, em Matemática, de *parábola*.

O professor propõe aos alunos retomar a parábola construída no papel quadriculado na aula passada, e observar características dessa figura. Espera-se que os alunos percebam, entre elas, que a abscissa do ponto mais alto da parábola é equidistante das raízes da equação e que se passarmos uma linha vertical por essa abscissa, a parábola ficará igualmente dividida em duas partes. Aqui o professor chama a atenção dos alunos para o nome dessa linha, a qual se espera que os alunos se recordem do eixo de simetria e destaca que este passa justamente pelo vértice da parábola, o qual pode ser calculado do seguinte modo:

Se x_1 e x_2 são raízes da função do segundo grau, quer dizer, se eles valores satisfazem $f(x_1)=f(x_2)=0$, então, resolvendo estas equações, teremos as raízes:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Fazendo a média das duas raízes, teremos:

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+(-b-\sqrt{\Delta})}{2.2a} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo x_v na equação da função, vamos encontrar o correspondente y_v:

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b.\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2+4a^2c}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a}\ .$$

Assim:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

E se o aluno não se lembrar desta fórmula, basta alertá-lo que pode calcular as duas raízes e achar a sua média para obter x_v e depois substituir este valor na equação da função,

[8] Neste momento o professor pode ressaltar que todo quadrado é um retângulo, por suas propriedades.

para obter o correspondente y_v. Desse modo, as fórmulas são obtidas com significado e não precisam ser, necessariamente, simplesmente memorizadas.

Retornado à resolução feita na aula passada, considerando a função polinomial do segundo grau: $f(x) = -x^2 + 8x + 84$, temos que:

$a = -1$, $b = 8$ e $c = 84$, e discriminante:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 84$

$\Delta = 64 + 336$

$\Delta = 400$

Assim o vértice desta parábola é:

$x_V = -\frac{8}{2.(-1)} = -\frac{8}{-2} = 4$ e

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{400}{4.(-1)} = -\frac{400}{-4} = 100$

Ou seja, $V = (4, 100)$.

3.1.8 AULA 8 – PONTO DE MÁXIMO E PONTO DE MÍNIMO

O professor, ao falar sobre o tema da aula, pergunta aos alunos o que ele sugere, o que prontamente os alunos recordarão da área máxima calculada na aula anterior. Porém, pode ressaltar que neste exemplo do cercado foi calculado o ponto máximo, pois se tratava da maior área. Assim, o professor pode questionar se também pode haver situações em que se calcule o ponto mínimo e pede aos alunos sugestões de situações-problema onde o mesmo se encontra. Caso os alunos não consigam dar algum exemplo, o professor pode expor uma situação em que isso acontece, como a seguinte: "O custo *C*, em reais, para se produzir *n* unidades de determinado produto é dado por $C = 2510 - 100n + n^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?" (GIOVANNI et al, 2015, p.116). Em seguida sugere aos alunos que resolvam o problema, levando em conta o que já sabem sobre o assunto. Espera-se que os alunos cheguem ao resultado de que será necessário produzir 50 unidades. Após a tentativa pelos alunos, o professor pode pedir que os alunos digam os resultados encontrados e o processo que utilizaram para resolução, pois alguns podem ter feito o esquema de tabelas e outros utilizado o cálculo da abscissa do vértice. Assim, o professor apresenta a solução para correção dos alunos. Antes de escrever a solução, o professor pergunta quais as variáveis desse problema, o que se espera que os alunos identifiquem que é o custo *C* e a quantidade de unidades *n*. Em seguida questiona qual é a variável dependente e qual a independente, o que se espera que digam que *n* está em função de *C*, ou seja, *n* é variável independente e *C*, a dependente. Questiona ainda, que se for resolver o problema pelo cálculo do vértice da parábola formada pela equação, qual das coordenadas do vértice é necessária para solucionar o problema, o que se espera que os alunos identifiquem que é suficiente calcular a abscissa do vértice, pois se pretende saber a quantidade *n* para se ter o menor custo. Assim, se dá a resolução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-100)}{2.1} = -\frac{(-100)}{2} = 50$$

Após esta observação o professor pergunta aos alunos o que concluem a respeito do ponto de máximo e ponto de mínimo, o que se espera que os mesmos percebam que toda parábola com concavidade voltada para cima $(a > 0)$, tem ponto de mínimo e quando a concavidade for voltada para baixo $(a < 0)$, tem ponto de máximo. E tanto um quanto outro, se trata do vértice da parábola.

3.1.9 CONCLUSÃO DO TEMA

Considerando estas aulas como uma introdução ao estudo de funções e o modo como apresentar a função polinomial do segundo grau aos alunos de forma distinta da tradicional, já mostrando definições, fórmulas, teorias e problemas de aplicação, lançamos esta proposta como uma abertura a este estudo, cabendo ao professor dar continuidade aos estudos das demais características que a equação polinomial do segundo grau oferece como o estudo dos sinais e zeros da função, entre outros.

Esta proposta aponta uma maneira de apresentar o conceito aos alunos, não sendo um único recurso ao professor, mas um apoio de como ensinar.

3.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Percebendo a necessidade de se expandir o tratamento do conceito de função com mais significado no Ensino Médio, propõe-se, aqui, uma sequência didática também direcionada ao ensino das funções exponencial e logarítmica. Isto porque, conforme foi constatado em estudos da literatura e nas experiências deste professor, estes são assuntos bastante difíceis para a compreensão dos alunos nesse nível de ensino e também podem ajudar a se complementar uma ideia mais ampla acerca da atual definição de função, não ficando esta associada apenas aos casos das funções polinomiais de primeiro e segundo graus.

Para isto, sugerem-se para o ensino das funções exponencial e logarítmica os mesmos passos metodológicos que aqueles para o ensino de funções polinomiais de segundo grau, como investigação do conhecimento prévio dos alunos, roda de conversa sobre o que sabem e/ou conhecem sobre os temas, situação-problema, construção de tabelas, construção da representação gráfica no plano cartesiano, elementos do gráfico, etc. Porém, neste caso, algumas situações problemas serão utilizadas como ponto de partida para o ensino de cada uma dessas funções.

3.2.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para o estudo da função exponencial, elaboramos uma proposta de sequência pensada para 5 aulas. Vale ressaltar que ela trata apenas da função exponencial. Outros conteúdos pertinentes, como revisão do conceito e das propriedades de potenciação, ficam a critério do professor, no momento em que achar oportuno.

Esta proposta foi pensada para que o aluno seja o protagonista de seu próprio aprendizado, levando o mesmo a pensar e refletir sobre as situações propostas e construir o pensamento matemático.

Para esta proposta, sugere-se que:

Na aula 1, seja apresentada uma situação-problema para introduzir a ideia de função exponencial para que os alunos tenham uma visão de função como um tema prático e útil em diversas situações.

Na aula 2, pretende-se apresentar as propriedades e a condição de existência de uma função exponencial, bem como sua forma geral e definição.

Na aula 3, apresenta-se o software *Geogebra* como ferramenta auxiliar para a construção de representações gráficas e análise do comportamento dos mesmos em diferentes situações.

Na aula 4, realiza-se a construção de gráficos da função exponencial no *Geogebra* para análise do comportamento da mesma.

Na aula 5, analisam-se os casos em que a função exponencial é crescente ou decrescente, a partir da análise de resultados anteriores.

Como dito anteriormente, fica a critério do professor flexibilizar a duração de cada atividade, de acordo com as necessidades de suas turmas.

3.2.1.1 AULA 1 – INTRODUÇÃO À FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para o estudo da função exponencial, o professor pode sugerir aos alunos o seguinte problema:

“Uma população de bactérias duplica a cada hora. Sabendo que inicialmente haviam 8 bactérias, quantas haverá após 10 horas?”

O professor propõe aos alunos que pensem em uma solução para o problema apresentado e organiza as informações dadas pelos alunos numa tabela, como abaixo.

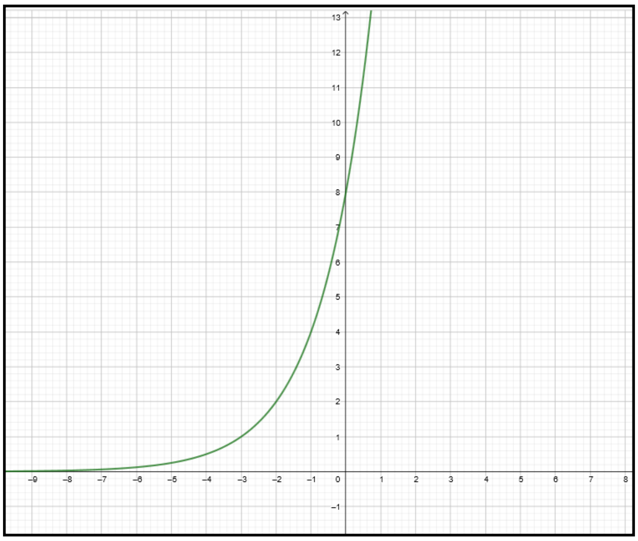
Tempo (t)	**Quantidade de bactérias**
0	8
1	$8 . 2 = 16$
2	$8 . 2 . 2 = 8 . 2^2 = 32$
3	$8 . 2 . 2 . 2 = 8 . 2^3 = 64$
t	$8 . 2^t$

O professor pode iniciar a discussão perguntando se esta relação pode definir uma função e, em caso afirmativo, como isto poderia ser feito. Pedir para os alunos justificarem suas respostas, para o que se espera que eles respondam, neste momento, que para cada valor de x, um único correspondente fica associado, podendo ser designado por y.

Em seguida, o professor deverá pedir que identifiquem, nessa situação, qual a variável dependente e qual a independente, o que se espera que os alunos percebam que o número total de bactérias depende do tempo que se passou, ou seja, o número de bactérias está em função do tempo. Assim define-se que o número de bactérias é a variável dependente y (ou b) e o tempo, a independente x (ou t, se assim preferirem). O professor deve, ainda, perguntar qual seria o conjunto de domínio desta função, para o que se espera que os alunos ao menos percebam que qualquer número natural pode ser substituído na expressão. Mas o professor pode indagar se seriam mesmo somente os naturais, uma vez que o tempo pode ser expresso por decimais como 1,5; 1,8 etc.

Com isso, o professor pede que se faça a representação gráfica desta função (Figura 12), primeiramente observando os pontos da tabela e em seguida, solicita que esta seja expandida com outros valores para a variável independente (negativos e fracionários, inclusive) e observem como se comporta a linha que será traçada.

Figura 12[9] –Representação gráfica da função $f(x) = 8 \cdot 2^x$



Fonte: Construção nossa

O professor pede aos alunos que observem o que se formou nessa representação gráfica e se espera que os alunos observem que se trata de uma figura curva, porém diferente da parábola. Ele deve ressaltar o que acontece com valores negativos, enfatizando que o gráfico jamais tocará o eixo das abscissas (*x*), embora no desenho pareça que sim.

Em seguida, o professor pergunta por que isto acontece e espera-se que os alunos entendam que interceptar o eixo *x* significaria que essa função tem uma raiz, o que realmente não possui, ou seja, ter uma raiz significa que há um número real *x*, onde $y = f(x) = 0$.Mas como a função exponencial é do tipo $f(x) = a^x$, é impossível $a^x = 0$, uma vez que esta função admite a ser fixado, somente $a > 0$ e $a \neq 1$. Estas propriedades, assim como as demais envolvidas no estudo da função exponencial, serão aprofundadas nas aulas seguintes.

3.2.1.2 AULA 2 – PROPRIEDADES E DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Nesta aula o professor apresentará aos alunos as propriedades referentes à função exponencial, para melhor compreensão de sua condição de existência e como facilitadoras na resolução de situações problemas.

Em seguida, o professor relembra aos alunos da condição apresentada para a função exponencial na aula passada, em que dada a função $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e questiona o

[9] Neste caso, considera-se apenas os valores onde $x \geq 0$para a resolução do problema.

porquê de *a* não poder ser negativo, nem zero. Após ouvir sugestões e reflexões dos alunos, o professor mostra aos alunos a seguinte tabela:

x	$f(x) = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a$
$\frac{1}{2}$	$(a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
...	...

Nesse caso, percebe-se que para $x = \frac{1}{2}$ temos $f(x) = \sqrt{a}$, ou seja, se $a < 0$ a função não está definida no conjunto dos números reais. E caso $a = 1$, temos que a função é constante, pois para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, temos que $1^x = 1$.

Temos ainda que quando $x = 0$, ocorre que $f(x) = 1$, ou seja, o gráfico sempre intercepta o eixo *y* em (0,1), pois $f(x) = a^x = 1$ se, e somente se $x = 0$.

Enfim, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base *a*.

3.2.1.3 AULA 3 – CONHECENDO O GEOGEBRA

Nesta aula o professor apresentará aos alunos o software *Geogebra*, como ferramenta importante para a montagem das representações gráficas das funções exponenciais e, posteriormente, logarítmicas, para que observem melhor o comportamento do gráfico destas funções.

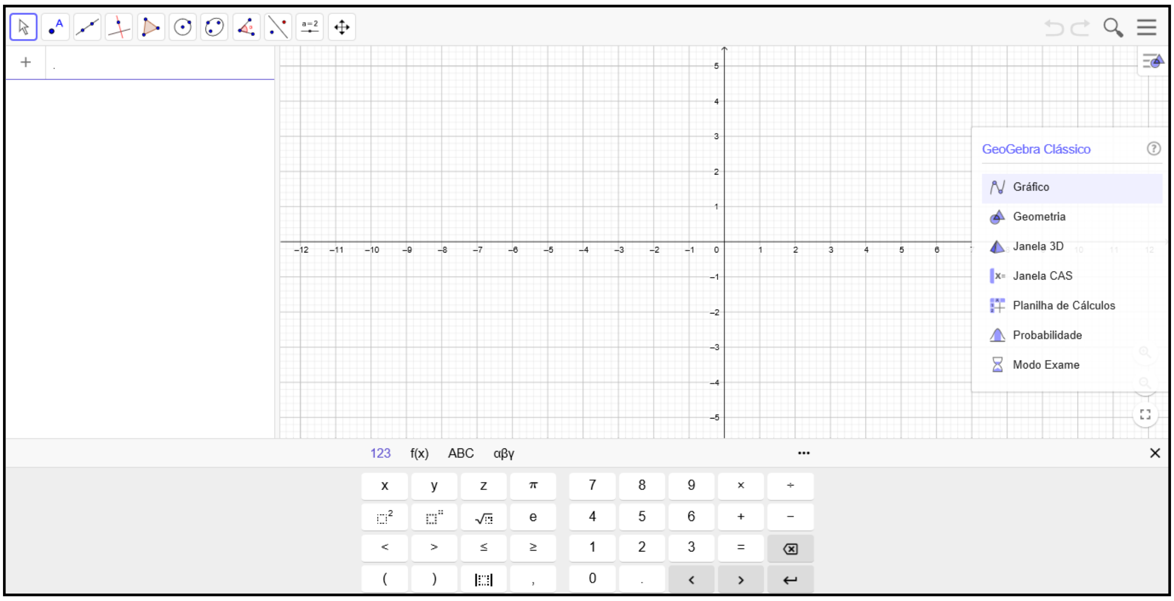
Para isso, o professor dirige os alunos à Sala do Acessa[10] para que utilizem o software, que já estará instalado nos computadores.

Ao abrir o *Geogebra* (Figura 13), o professor pede aos alunos que o explorem livremente sem dar instruções e comandos, para que os mesmos possam conhecê-lo por sua própria curiosidade.

É importante este momento para que os alunos se familiarizem, cada um a seu modo, com o software, a fim de que não vejam o mesmo como apenas um programa de matemática, mas sim como uma ferramenta que pode ser utilizada em diversos momentos e situações.

[10]A Sala do Acessa é um ambiente das escolas públicas do Estado de São Paulo que oferece infra-estrutura de computadores e acesso à internet.

Figura 13 –Tela inicial do *Geogebra*



Fonte: Construção nossa

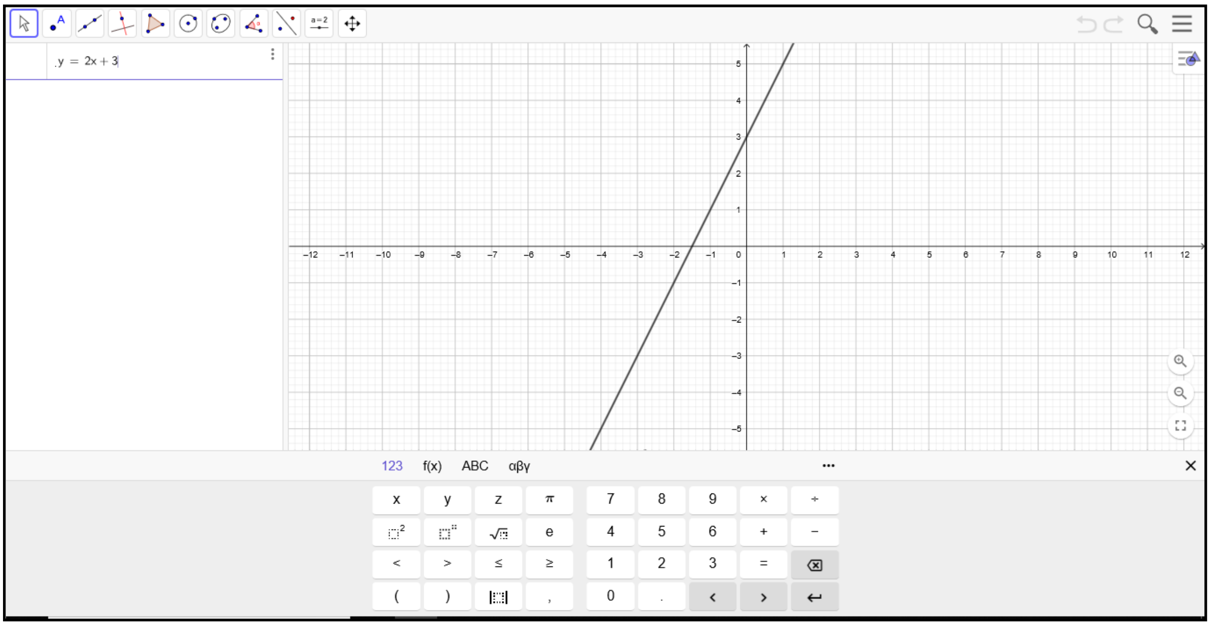
Após um tempo curto, o professor avisa aos alunos que começarão a montar as representações gráficas de algumas funções para que os mesmos entendam como funciona o software.

Com isso, o professor passa aos alunos ao menos dois exemplos de funções (já estudadas) orientando, passo a passo, suas construções. Como exemplo, sugere-se a construção orientada de uma função polinomial do primeiro grau e de uma função polinomial do segundo grau, como segue abaixo.

Primeiramente o professor anuncia que será feito a representação gráfica da função polinomial do primeiro grau $f(x) = 2x + 3$. Com isso, pede aos alunos que digitem, utilizando o teclado do próprio *Geogebra*, as teclas (Figura 14):

$$\boxed{y} \quad \boxed{=} \quad \boxed{2} \quad \boxed{x} \quad \boxed{+} \quad \boxed{3}$$

Figura 14 – Construção da função polinomial do primeiro grau $f(x) = 2x + 3$.



Fonte: Construção nossa

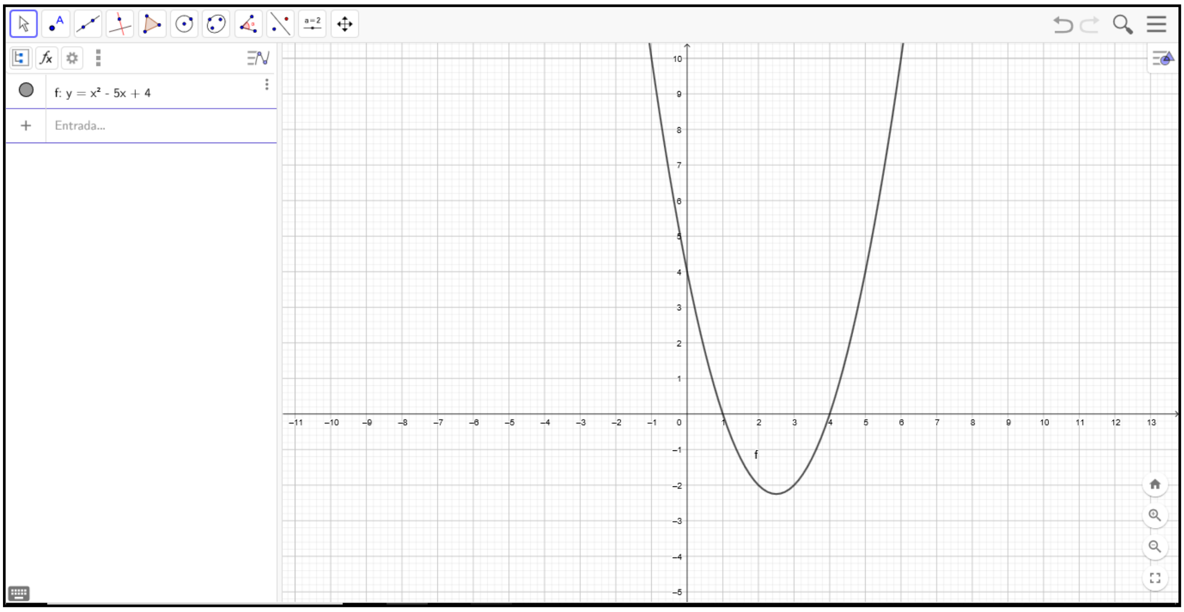
O professor questiona se houve alguma dúvida ou dificuldade na construção e, caso haja, auxilia cada caso particularmente. Após, o professor pode explorar outros recursos como: mudança de cor do gráfico, variar os valores dos coeficientes para observar o comportamento da função, salvar ou baixar o gráfico, etc.

Para o segundo exemplo, o professor pode propor a construção da função polinomial do segundo grau $f(x) = x^2 - 5x + 4$ (Figura 15). Utilizando o teclado do *Geogebra*[11], os alunos pressionam as teclas:

$\boxed{y}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\square^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{5}$ $\boxed{x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$

[11] Se sua versão não possuir esta tecla para o quadrado, digite “x^2”.

Figura 15 – Construção da função polinomial do segundo grau $f(x) = x^2 – 5x + 4$.



Fonte: Construção nossa

Novamente o professor questiona se houve alguma dúvida nesta construção e auxiliar individualmente as apresentadas. Em seguida o professor pode passar mais uma função de cada tipo das construídas para que os alunos façam sozinhos cada representação gráfica, com supervisão do professor. Também pode orientar aos alunos que façam as mudanças dos coeficientes dos termos quadráticos (*a*) e observem o que acontece com os respectivos gráficos, quando $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$, solicitando que registrem uma conclusão sobre isso em seus cadernos.

Na sequência, o professor pode fixar um valor de *a* e de *b* na expressão geral da função de segundo grau e fazer variar o coeficiente *c*. Perguntar ao aluno o que acontece com a representação gráfica das parábolas, conforme esse *c* varia e o que se pode concluir a respeito desse valor nos gráficos de funções quadráticas (espera-se que o aluno conclua que *c* é o valor em que a parábola corta o eixo das ordenadas (*y*)). Solicitar que os alunos registrem essa conclusão em seus cadernos e outras mais que tenham observado.

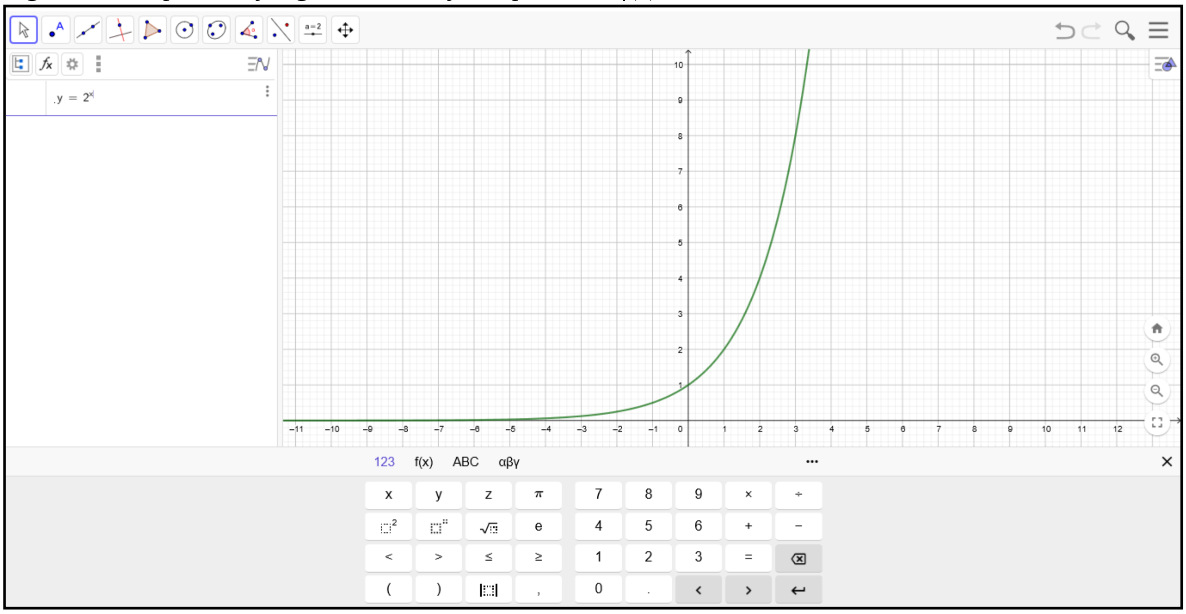
3.2.1.4 AULA 4 – CONSTRUÇÃO DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NO GEOGEBRA

Novamente na *Sala do Acessa* os alunos construirão representações gráficas de algumas funções exponenciais dadas pelo professor, para que percebam o comportamento do gráfico levando em conta alguns valores de *a*, quando dado $f(x) = a^x$.

1ª função: o professor pede aos alunos que construam a representação gráficao da função $f(x) = 2^x$ (Figura 16). O mesmo é construído pressionando as teclas[12]:

$\boxed{y}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\square^{\square}}$ $\boxed{x}$

Figura 16 – Representação gráfica da função exponencial $f(x) = 2^x$.

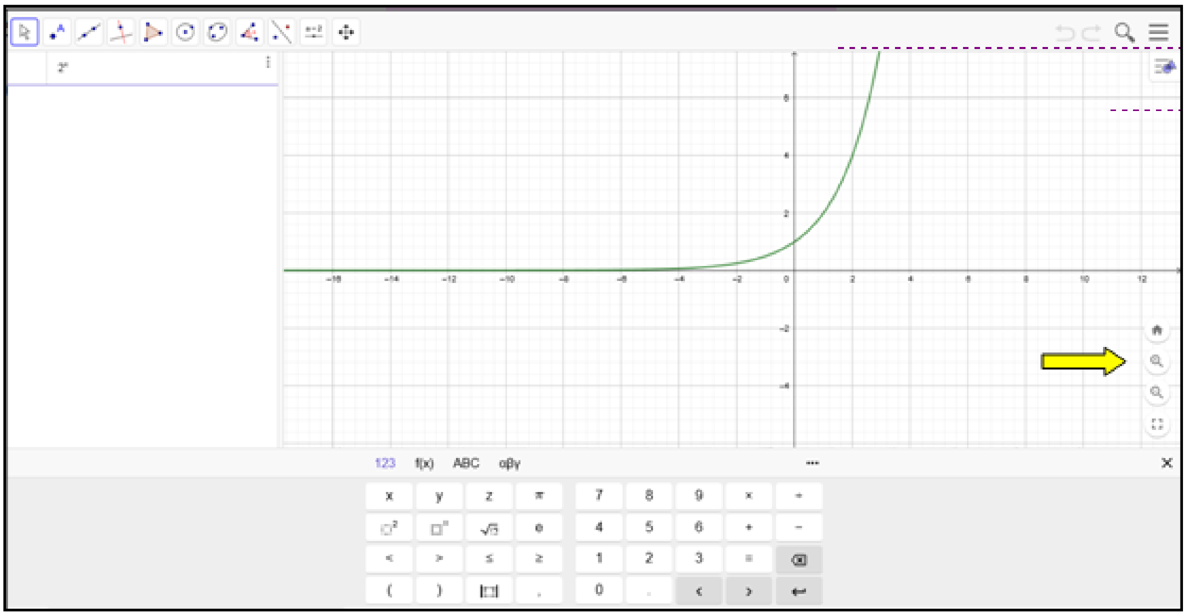


Fonte: Construção nossa

Nesse momento o professor questiona os alunos, como revisão, se a representação gráfica toca o eixo *x*, ao que se espera que os alunos respondam que não, como visto em aulas passadas. Após, o professor pede aos alunos que ampliem a imagem do gráfico na lupa com sinal “+” no canto inferior direito da dela (Figura 17), para observarem como o gráfico se aproxima do eixo *x* (das abscissas) (Figura 18):

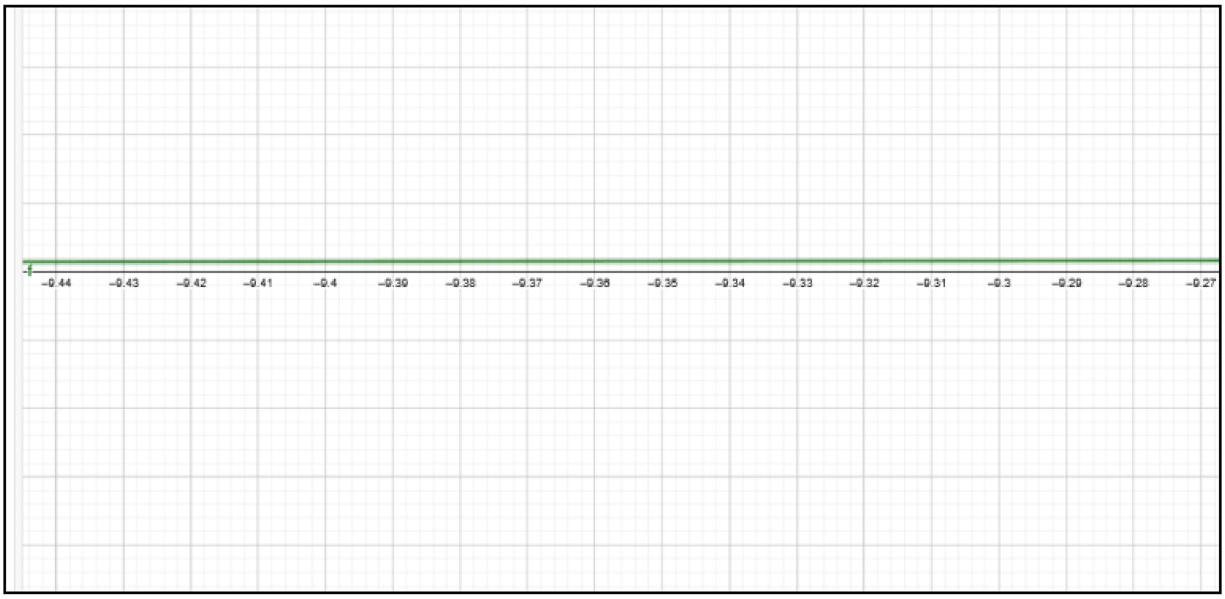
[12] Caso a versão do software não possua a tecla de exponencial, pode-se digitar “2^x”.

Figura 17 – Ícone para ampliar a imagem no *Geogebra*



Fonte: Construção nossa

Figura 18 – Ampliação da representação gráfica da função exponencial pelo *Geogebra*

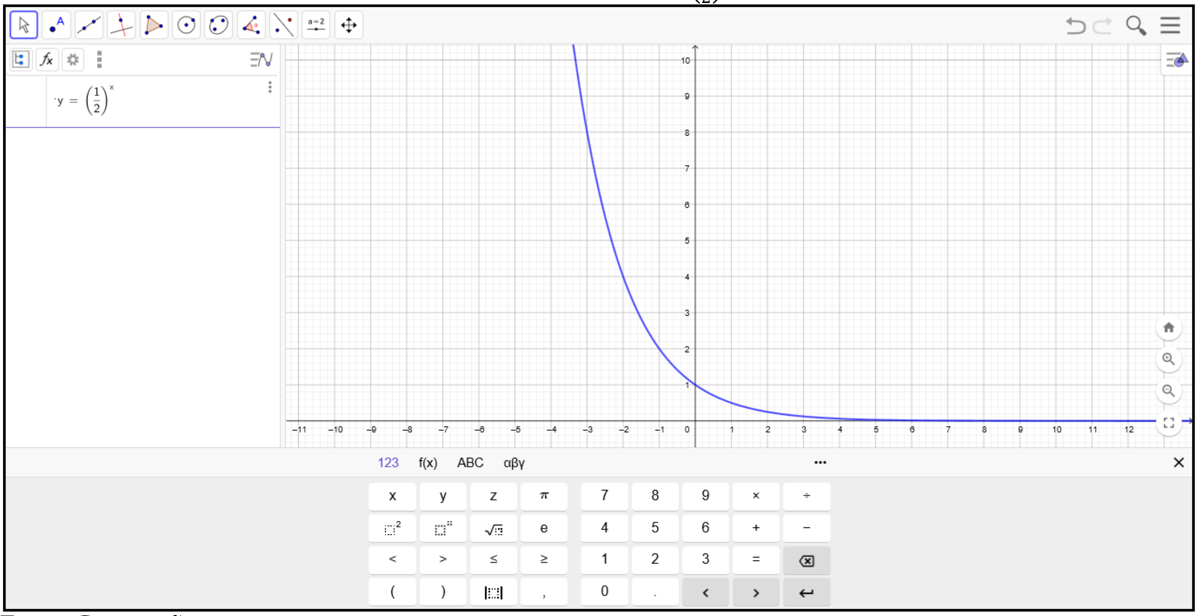


Fonte: Construção nossa

Neste caso, percebe-se que a representação gráfica está cada vez mais perto do eixo dos *x*, porém sem interceptá-lo, de acordo com as propriedades apresentadas em aulas anteriores. Em seguida o professor pede aos alunos que construam a representação gráfica da função *f(x)* = $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ (Figura 19). O mesmo é construído pressionando as teclas:

$\boxed{y}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{>}$ $\boxed{\square^{\square}}$ $\boxed{x}$

Figura 19 – Representação gráfica da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



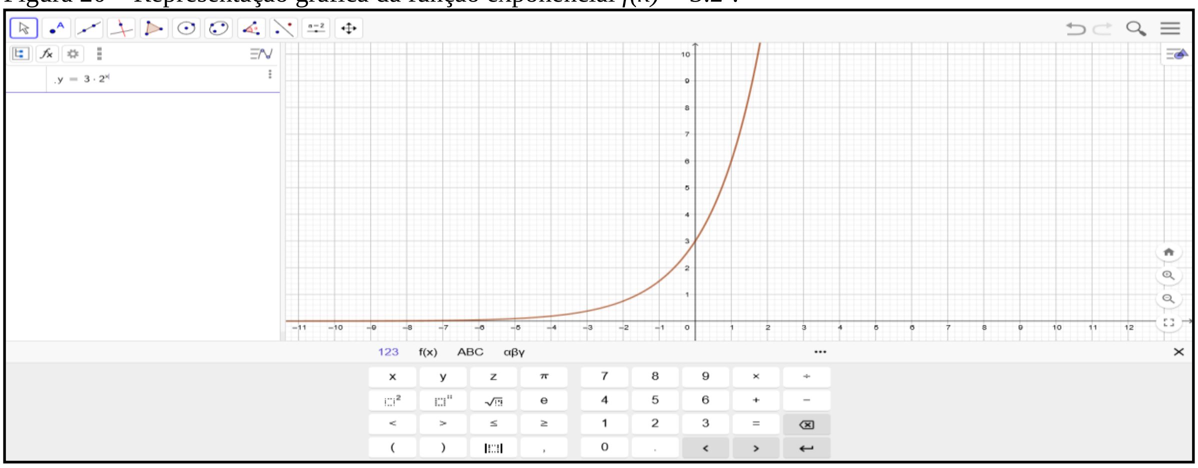
Fonte: Construção nossa

Após formarem a representação gráfica o professor questiona o que houve em relação ao anterior, para o que se espera que os alunos respondam que ficou “invertido”, onde o professor sugere que façam a mesma ampliação para verificarem que o gráfico também não intercepta o eixo dos *x*. O professor diz aos alunos que numa aula próxima estudarão sobre esses dois casos de gráfico, pois no momento estão trabalhando a construção.

Em seguida o professor ainda sugere a construção da representação gráfica da função $f(x) = ca^x + b$, com *c* e *b* constantes. Como sugestão propõe a função $f(x) = 3.2^x$ (Figura 20).O mesmo é construído pressionando as teclas:

y	=	3	×	2	$\square^{\square}$	x

Figura 20 – Representação gráfica da função exponencial $f(x) = 3.2^x$.



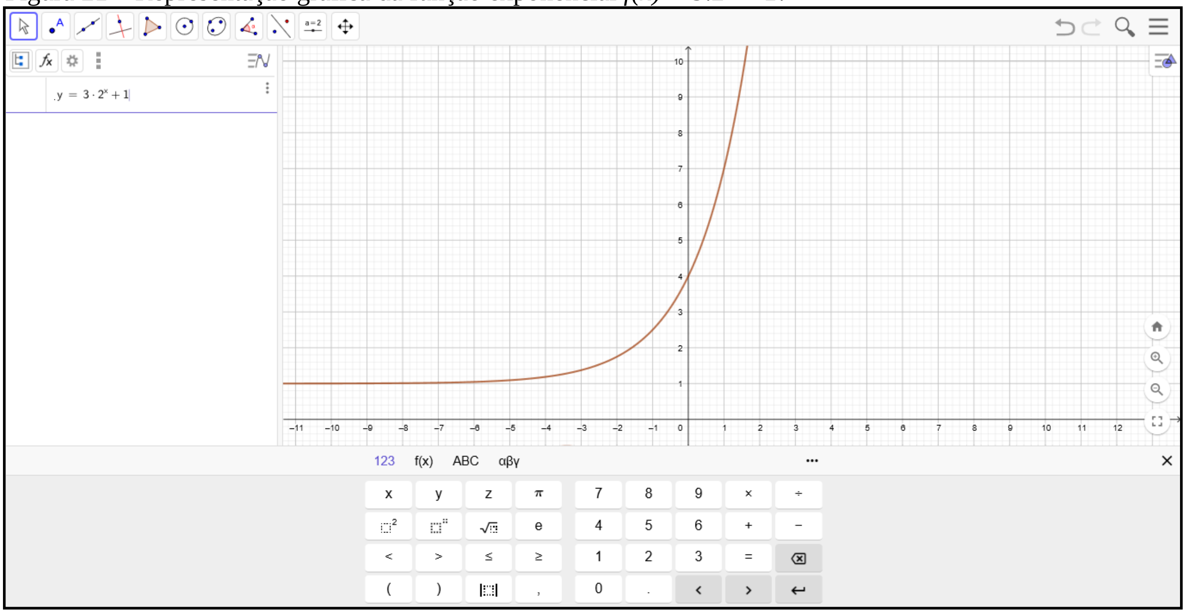
Fonte: Construção nossa

O professor questiona os alunos sobre o que houve de diferente em relação desta representação gráfica à da função $f(x) = a^x$, o que se espera que os alunos percebam que agora o eixo *y* é interceptado em *c*.

Em seguida, sugere a construção da representação gráfica da função $f(x) = 3.2^x + 1$ (Figura 21).O mesmo é construído pressionando as teclas:

$\boxed{y}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\square^{\square}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{>}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$

Figura 21 – Representação gráfica da função exponencial $f(x) = 3.2^x + 1$.



Fonte: Construção nossa

Nesse momento o professor questiona o que mudou na representação gráfica, ao que se espera que os alunos percebam que o coeficiente *b*, por ser +1, fez o gráfico interceptar o eixo *y* uma unidade acima, ou seja, em (0, 4). Aqui o professor pergunta aos alunos, sem construir a representação gráfica, o que aconteceria se o coeficiente *b* fosse –1, o que se espera que os alunos entendam que o gráfico interceptaria o eixo *y* em uma unidade abaixo, ou seja, no ponto (0, 2). Também podem concluir que, no caso $b=+1$, o gráfico se aproxima cada vez mais da reta horizontal passando por $y=1$.

Com isso o professor conclui com os alunos que a função exponencial do tipo $f(x) = ca^x + b$, o coeficiente *c* indica onde o gráfico intercepta o eixo *y*(quando $x=0$) e o coeficiente *b* indica quantas unidades abaixo com $b < 0$) ou acima(com $b > 0$) de (0, *c*) o gráfico intercepta o eixo *y*.

3.2.1.5 AULA 5 – ANÁLISE DAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Nesta aula o professor retoma com os alunos os gráficos que foram construídos referentes às funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para tanto, pode levar os alunos à Sala do Acessa ou trazer ambas as representações gráficas impressas para análise dos alunos, podendo classificar a representação gráfica da função $f(x) = 2^x$ como caso A e a representação gráfica da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, caso B. O professor lembra aos alunos que em cada uma destas funções houve uma diferença quanto à representação gráfica e pergunta aos alunos qual é essa diferença, o que se espera que eles identifiquem a disposição da representação gráfica no plano cartesiano: na representação gráfica A, *y* cresce quando *x* aumenta e, na representação gráfica B, *y* diminui quando *x* aumenta; ou *y* aumenta quando *x* diminui. O professor pede, agora, que verifiquem as funções dessas representações gráficas e diga qual a diferença na expressão algébrica nesses casos, o que se espera que os alunos percebam quem em A, a base é um número natural (e portanto, maior que 1), e em B, um número fracionário e menor que 1 e, a partir daí, apresenta as definições de função exponencial crescente e decrescente.

Para isso, antes da definição o professor pode trabalhar com tabelas para levar os próprios alunos a entenderem o que leva a função exponencial a ser dita crescente ou decrescente.

O professor monta as tabelas abaixo e pede que os alunos dêem valores crescentes para *x*:

x	**$f(x) = 2^x$**	**f(x)**
1	$f(x) = 2^1$	2
2	$f(x) = 2^2$	4
3	$f(x) = 2^3$	8
4	$f(x) = 2^4$	16

x	**$f(x) = 2{,}5^x$**	**f(x)**
1	$f(x) = 2{,}5^1$	2,5
2	$f(x) = 2{,}5^2$	6,25
3	$f(x) = 2{,}5^3$	15,625
4	$f(x) = 2{,}5^4$	390,625

x	**$f(x) = 4^x$**	**f(x)**
1	$f(x) = 4^1$	4
2	$f(x) = 4^2$	16
3	$f(x) = 4^3$	64
4	$f(x) = 4^4$	256

O professor pede aos alunos que analisem as tabelas e digam o que perceberam com os valores de *f(x)* enquanto variavam os valores de *x*, o que se espera que digam que quanto maior o valor de *x*, maior é a potência a^x (*y* correspondente) ou seja, nesse caso temos uma função exponencial crescente.

Em seguida, monta as tabelas abaixo para mesma análise:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x)$
1	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$
2	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$
3	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$
4	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$

x	$f(x) = (0{,}2)^x$	$f(x)$
1	$f(x) = (0{,}2)^1$	0,2
2	$f(x) = (0{,}2)^2$	0,04
3	$f(x) = (0{,}2)^3$	0,008
4	$f(x) = (0{,}2)^4$	0,0016

x	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$f(x)$
1	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\frac{1}{3}$
2	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$
3	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{27}$
4	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\frac{1}{81}$

Neste caso, quanto maior o valor de x, menor é o valor da potência a^x.

E, ainda, pede qual a diferença nas funções das primeiras tabelas para as da segunda, o que se espera que os alunos percebam que nas primeiras, todas tinham ***a*** com valores maiores a 1, enquanto na segunda os valores eram menores que 1.

Assim, o professor conclui a definição de função exponencial crescente e decrescente e como identificá-las: uma função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente quando temos $a > 1$, pois quanto maior for o expoente x, maior será a potência a^x; e a função é decrescente quando temos $0 < a < 1$, pois, neste caso, quanto maior for o expoente x, menor será a potência a^x.

3.2.1.6 CONCLUSÃO DO TEMA

Com essa sequência didática, espera-se que o aluno alcance o aprendizado deste tipo de função. Buscou-se apresenta-la de uma forma de fácil compreensão, onde se envolve uma situação cotidiana, a qual pode ser substituída por outra que o professor prefira ou conheça, porém não deixando de lado as etapas e formas como foi descrita aqui, pois se trata de um assunto na qual os alunos do Ensino Médio possuem grande dificuldade.

3.2.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para o estudo da função logarítmica, elaboramos uma proposta de sequência pensada essencialmente para 4 aulas. Ela também se refere apenas à função logarítmica, sendo que o conceito e as propriedades de logaritmo e outros conteúdos referentes ficam a critério do professor, no momento em que achar oportuno.

Para esta proposta temos que:

Na aula 1,faz-se uma introdução à função exponencial com um problema adiante (item 3.2.2.1), sobre pH das substâncias.

Na aula 2, analisa-se as propriedades e condição de existência de uma função logarítmica.

Na aula 3, trata-se do comportamento do gráfico de uma função logarítmica e se analisa quando este é crescente ou decrescente.

Na aula 4, apresenta-se uma relação entre função exponencial e função logarítmica, inclusive através da relação entre seus gráficos.

3.2.2.1 AULA 1 – INTRODUÇÃO À FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para o estudo da função logarítmica, o professor pode sugerir aos alunos o seguinte problema, encontrado em Giovanni et al (2015):

"O pH (potencial hidrogeniônico) indica a acidez de um meio aquoso e é calculado em função da concentração de íons de hidrogênio H^+ que esse meio apresenta." (GIOVANNI et al, 2015, p. 171). Esse cálculo é feito através da expressão $pH = -\log [H^+]$.

Considerando esta expressão, o professor pode solicitar que os alunos calculem o pH do café que apresenta 10^{-5} mol/L de íons de hidrogênio. Após a tentativa dos alunos, o professor pede que os mesmos apresentem a solução dada e, em seguida, mostra a resolução da questão:

$pH = -\log [H^+]$

$pH = -\log 10^{-5}$

Neste momento, o professor pode questionar o que significam essas expressões. Em geral, espera-se que os alunos não saibam, ainda, responder a esta questão e o professor pode dizer que isto também pode ser calculado com uma função, que faz o processo inverso da função exponencial na base 10: ou seja, $pH = -\log 10^{-5} = y$, quando $\log 10^{-5} = -y$ e $10^{-y} = 10^{-5}$, isto é, $y = 5$, ou seja, o pH do café é 5. Pode-se escrever, neste caso: $y = pH = f(x) = -\log x$, onde x representa a concentração de íons de hidrogênio (H^+), em mol/L (mol por litro). Para cada valor de x real, um único valor de pH fica determinado.

Em seguida, o professor relembra com os alunos a condição de existência de um logaritmo, ou seja, $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Caso $a = 1$, teríamos que $\log_1 b = x$ então $1^x = b$ se, e somente se, $b = 1$.

Caso $a = 0$, teríamos que $\log_0 b = x$ então $0^x = b$ se, e somente se $b = 0$e $x \in \mathbb{R}^*$.

Caso $a < 0$, teríamos, por exemplo, que $\log_{-2} 4 = x$ então $(-2)^x = 4$, ou seja, não existe valor para x que torne esta sentença verdadeira.

Caso $b = 0$, teríamos que $\log_a 0 = x$ então $a^x = 0$ se, e somente se $a = 0$ e $x \in \mathbb{R}^*$, mas não se define a função exponencial com base nula.

Enfim, a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$, e a um número real positivo, é denominada função logarítmica na base a. Note-se que a é um número fixado e a variável independente da função é x, pois isso sempre causa certa confusão aos alunos.

3.2.2.2 AULA 2 – PROPRIEDADES E DEFINIÇÃO

Retomando a questão da aula anterior, o professor sugere aos alunos que construam, no *Geogebra*, o gráfico da função $pH = -\log [H^+]$.

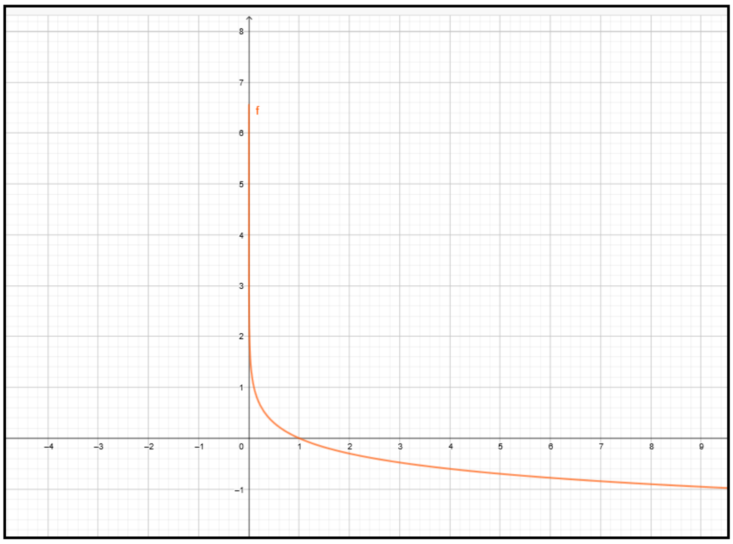
Para a análise da representação gráfica desta função logarítmica, inicialmente pode-se propor aos alunos que montem uma tabela para organização das informações com números do tipo $x = 10^{-n}$, onde pH é a variável dependente (y) e H^+, a variável independente (x).

Assim, espera-se que os alunos formem a tabela abaixo:

Concentração de íons de hidrogênio (H^+)	***pH***
10^{-2}	2
10^{-3}	3
10^{-8}	8
10^{-10}	10
...	...

Com isso, o professor pede que se faça a representação gráfica desta função usando o software *Geogebra* (Figura 22) e observem como se comporta a linha que será traçada.

Figura 22 – Representação gráfica da função *f(x) = –log x*



Fonte: Construção nossa

Pode questionar, aqui, o que são os valores 10^{-n} (que estão entre 0 e 1) e o que acontece com 10^{n} (para *n=0, 1, 2, 3, ...*crescem muito rapidamente no eixo *x*). Depois, poderá ser questionado o que acontece com as respectivas imagens correspondentes no eixo dos *y*. O professor pede aos alunos que identifiquem semelhanças e diferenças entre esta representação gráfica e a da função exponencial, ao que se espera que percebam que, diferentemente da função exponencial, esta representação gráfica não intercepta o eixo *y*, uma vez que para que isso ocorra, é necessário um valor de *y*, em que *f(0) = log0 = y*, o que é impossível haja vista que **não** existe *y* real tal que $10^{y} = 0$, devido às propriedades da função exponencial, que nunca toca o eixo das abscissas.

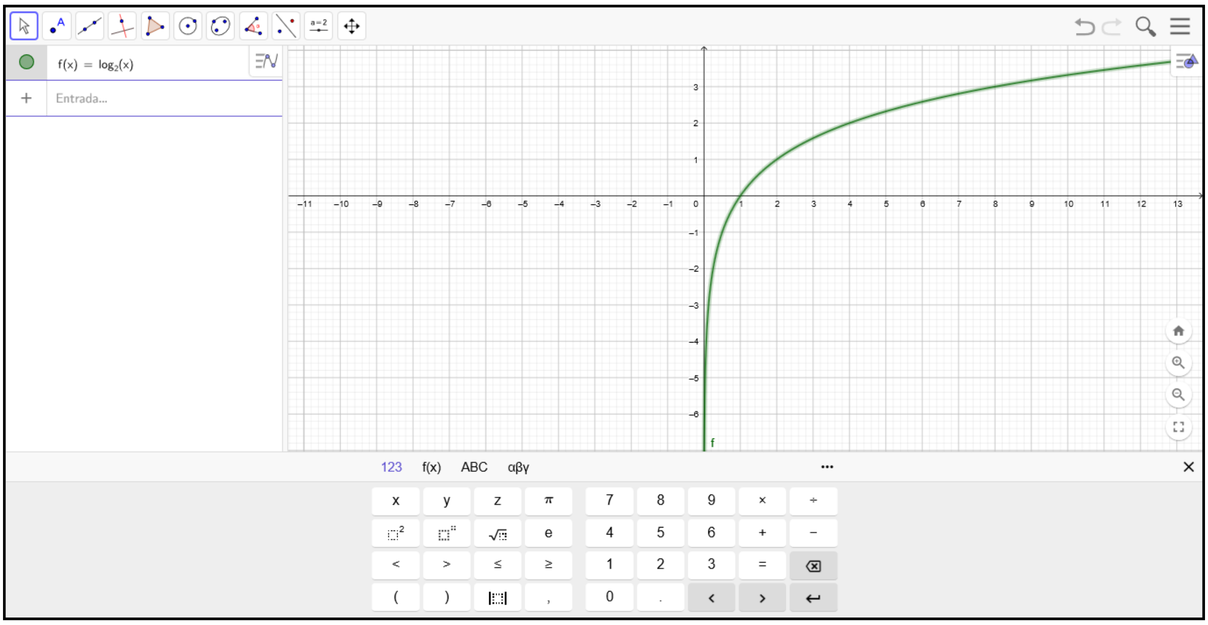
3.2.2.3 AULA 3 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para essa aula o professor utilizará a *Sala do Acessa* para realizar as atividades propostas. Como os alunos já trabalharam com o software *Geogebra*, o professor pede aos estudantes que construam os gráficos das funções abaixo e observem o comportamento de cada um.

Inicialmente sugere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ (Figura 23). O mesmo é construído pressionando as teclas:

f(x)	log	2	>	x	*Enter*

Figura 23 – Representação gráfica da função $f(x) = \log_2 x$

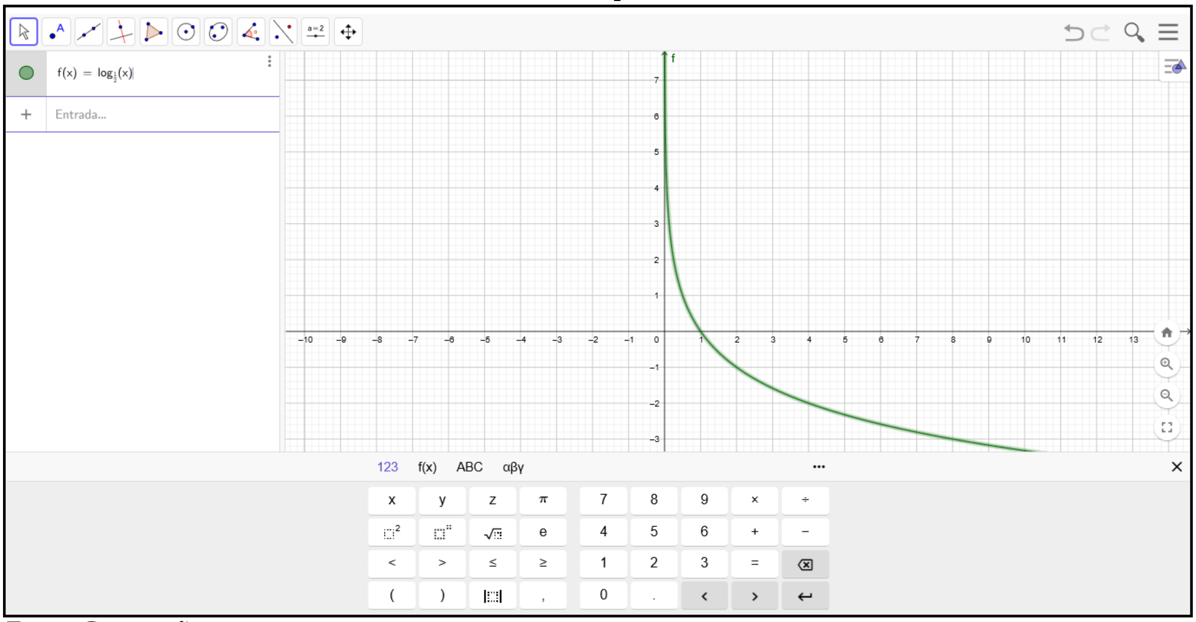


Fonte: Construção nossa

Na sequência o professor pede que os alunos façam uma nova representação gráfica, o da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (Figura 24). O mesmo é construído pressionando as teclas:

f(x)	log	1	÷	2	>	x	*Enter*

Figura 24 – Representação gráfica da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Fonte: Construção nossa

Agora, o professor pede aos alunos que analisem o que houve com as representações gráficas em cada função, o que se espera que os alunos recordem, na função exponencial e façam uma associação, de que se trata de um na forma crescente e outro, decrescente. Assim, o professor monta as tabelas abaixo para identificarem qual se trata da crescente e qual, da decrescente.

x	***f(x)* = $\log_2$ *x***	***f(x)***
1	*f(x)* = $\log_2 1$	0
2	*f(x)* = $\log_2 2$	1
4	*f(x)* = $\log_2 4$	2
8	*f(x)* = $\log_2 8$	3

x	***f(x)* = $\log_2$ *x***	***f(x)***
1	*f(x)* = $\log_3 1$	0
2	*f(x)* = $\log_3 3$	1
3	*f(x)* = $\log_3 9$	2
4	*f(x)* = $\log_3 27$	3

No caso da função $f(x) = log_2 x$, conforme aumenta o valor de *x*, maior é o logaritmo, ou seja, se trata de uma função crescente.

Em seguida, monta-se a tabela abaixo.

x	***f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}}$ *x***	***f(x)***
1	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}} 1$	0
2	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}} 2$	–1
4	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}} 4$	–2
8	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}} 8$	–3

x	***f(x)* = $\log_2$ *x***	***f(x)***
1	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{3}} 1$	0
2	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{3}} 3$	–1
3	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{3}} 9$	–2
4	*f(x)* = $\log_{\frac{1}{3}} 27$	–3

Já no caso da função $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$, conforme aumenta o valor de *x*, menor é o logaritmo, ou seja, se trata de uma função decrescente.

Assim, o professor pode sintetizar que: Uma função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente quando *a > 1* e é decrescente quando *0 < a < 1*.

3.2.2.4 AULA 4 – RELAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL E A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

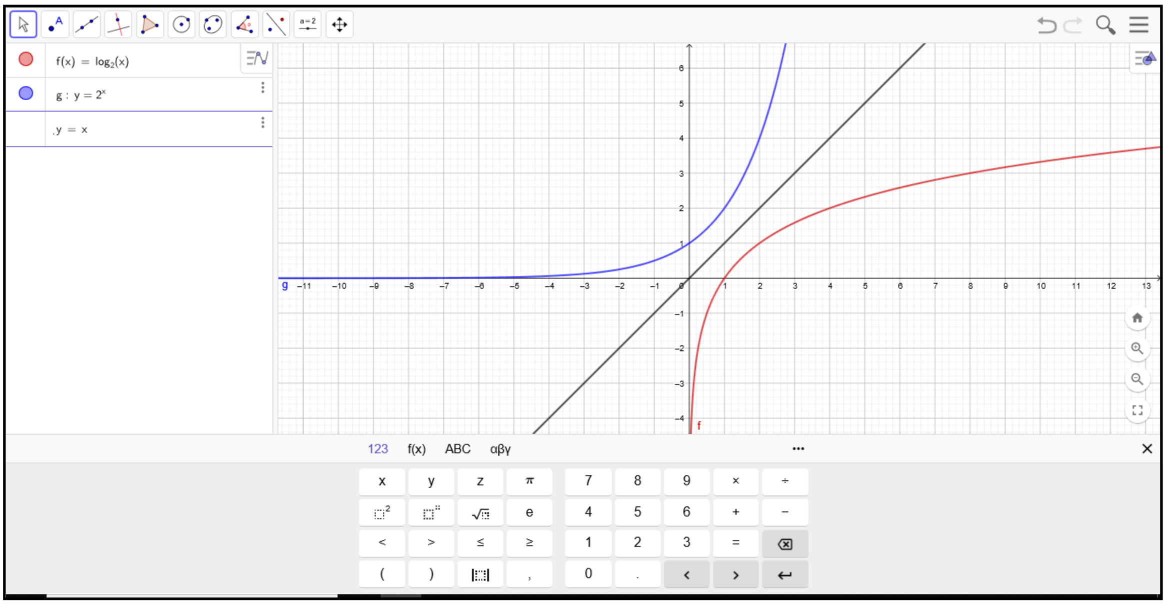
Pelo que foi estudado até o momento, o professor pode estabelecer relações entre a função exponencial com a função logarítmica, lembrando aos alunos que uma é a função inversa da outra.

Assim, monta a tabela abaixo para elencar essas relações.

Função	**Exponencial** $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ f(x) = a^x \end{cases}$	**Logarítmica** $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$
Base $a > 1$	Função crescente	
Base $0 < a < 1$	Função decrescente	

Para mostrar esta relação também entre os gráficos, o professor pede que os alunos construam, num mesmo plano cartesiano e usando cores diferentes, as representações gráficas das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = log_2\, x$ (Figura 25), onde $a = 2$ em ambas.

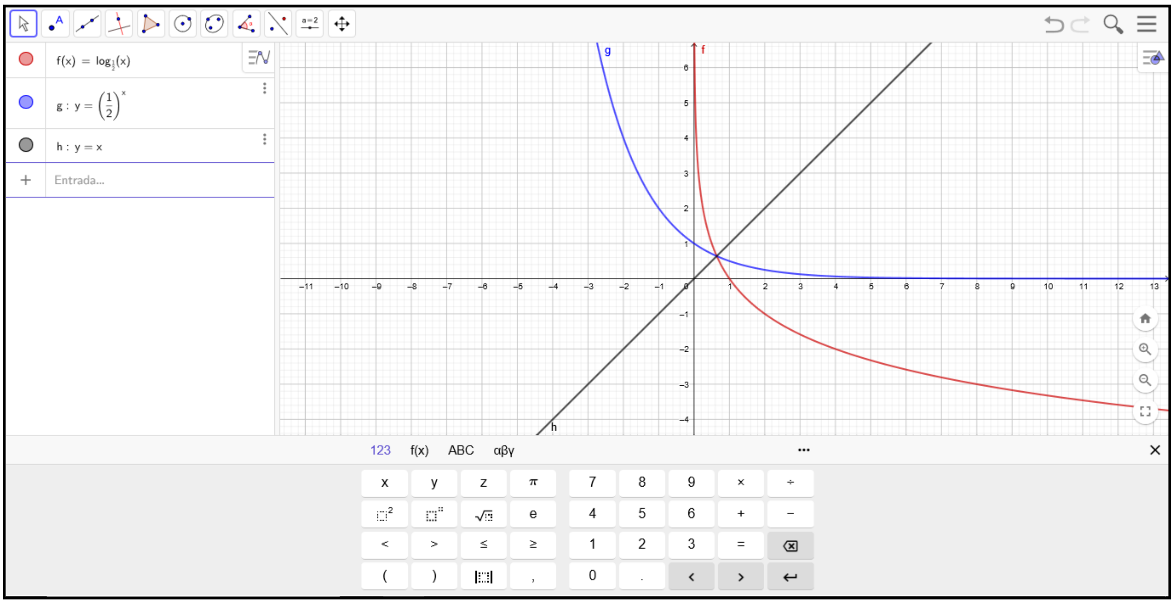
Figura 25 – Representações gráficas de $f(x) = 2^x$ e $f(x) = log_2\, x$



Fonte: Construção nossa

O professor questiona aos alunos o que perceberam em relação às representações gráficas, ao que se espera que os alunos identifiquem uma simetria entre ambos. Após isto, o professor pede que tracem a representação gráfica de $f(x) = x$, no qual aparecerá uma reta marcando essa linha de simetria. Nesse caso o professor questiona que tipos de função são ambas, o que se espera que os alunos reconheçam funções crescentes. Em seguida, questiona se haverá também simetria entre ambas as decrescentes, e pede para os alunos construírem as mesmas representações gráficas com cores diferentes, porém com $a = \frac{1}{2}$, em ambas (Figura 26).

Figura 26 – Representação gráfica de $f(x) = a^x$ e $f(x) = log_a\, x$



Fonte: Construção nossa

Assim, se conclui com os alunos que no caso de ambas decrescentes também há uma simetria cujo eixo é o mesmo do caso anterior. É importante que o professor aponte com uma régua essas simetrias e observe que, por este fato, a função logarítmica é a função inversa da exponencial (de mesma base).

Construir esta relação entre ambas as funções (exponencial e logarítmica de mesma base) pode facilitar muito o olhar do aluno em relação às resoluções de problemas que aparecerão em diversos momentos e áreas.

4 REFLEXÕES SOBRE O RESULTADO DESTE TRABALHO

Com os estudos realizados neste trabalho, foi possível se ter uma enorme experiência de como a pesquisa é uma forma de ampliar o conhecimento do professor acerca daquilo que ensina.

Como exposto neste trabalho, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo visa, para a 1ª série do Ensino Médio, no que se refere ao estudo de funções, levar o aluno a compreender a construção da representação gráfica de funções do 2º grau e saber utilizar, em diferentes contextos, as funções de 1º e 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos. Na sequência didática proposta, introduziu-se a ideia de função, inicialmente sem uma definição formal, através dos significados levantados pelos alunos e no dicionário, para a palavra "função" e depois, a partir de uma situação casual de proporcionalidade encontrada na sociedade moderna, que é a compra de combustíveis para automóveis. Na segunda aula, alguns elementos da história do desenvolvimento desse conceito foram propostos aos alunos, através de leituras informativas e associados a um problema antigo da civilização babilônica. Somente na terceira aula é que se formalizou a definição de função como caso especial de relação entre conjuntos, levando o aluno a ter a chance de amadurecer tais informações, antes de ser apresentado a esta formalização matemática do conceito, que, como se viu com o estudo histórico, somente foi obtida séculos depois de sua utilização pelos astrônomos, filósofos, práticos e matemáticos propriamente ditos.

Também a função polinomial de 2º grau foi introduzida a partir de uma situação-problema, para somente depois se fornecer sua definição formal. As noções de máximo ou mínimo deste tipo de função foram introduzidas como ferramentas para a resolução de problemas, para somente depois se associarem aos vértices da parábolas que as representam no gráfico cartesiano.

Inclusive, como destacamos nas propostas da BNCC sobre as competências específicas para Matemática para o Ensino Médio, a mesma propõe utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, ou seja, o currículo do Ensino Médio deve buscara integração dos conhecimentos, pelo trabalho interdisciplinar. Seguindo estas orientações, a sequência didática apresentada para as funções exponencial e logarítmica também se iniciam com situações-problemas a serem interpretadas e representadas pelos estudantes em tabelas de valores, para a posterior representação de regras algébricas que as descrevam. São, em seguida, formalizadas essas representações e discutidos os casos de existência dessas funções, conforme os valores escolhidos para as bases. Na sequência, o software *Geogebra* é utilizado para se despertar um posicionamento crítico dos alunos com relação ao crescimento e decrescimento dessas funções, iniciando com a representação de gráficos cartesianos das funções polinomiais de 1º e 2º grau, e com a variação de alguns parâmetros. O mesmo é sugerido para as funções exponenciais e logarítmica e, utilizando-se o recurso de ampliação que o software oferece, buscou-se avaliar com os alunos, as limitações dessas representações físicas, em relação às retas assíntotas que limitam o crescimento/decrescimento dessas funções, nos eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente.

Assim, o contexto da representação computacional das funções, algébrica e graficamente, pode auxiliar os alunos a construir modelos para os problemas, mas refletindo sobre as limitações que estas ferramentas trazem para os mesmos (por exemplo, quando as representações gráficas das funções exponencial e logarítmica parecem “tocar os eixos”, mas matematicamente, de fato, não tocam). Assim, podem avaliar a plausibilidade dessas imagens representadas no computador, em relação ao raciocínio matemático que as expressões algébricas para estas funções nos levam a desenvolver.

É claro que o número de aulas aqui proposto é bastante restrito, devido às exigências curriculares para se cumprir um rol muito grande de assuntos escolares. Cabe ao professor complementar com outros problemas e atividades para que isto tenha maior chance de ser atingido pelo aluno, até mesmo nas séries seguintes do Ensino Médio. Também deve-se destacar que a sequência proposta não tem a pretensão de que todos os alunos alcancem esses raciocínios ao mesmo tempo. Mas ela pode dar chances a que os estudantes pensem com mais significado a respeito das propriedades das funções estudadas, no momento em que for desenvolvida, ou posteriormente, nas séries mais avançadas.

Enfim, este estudo possibilitou levantar argumentos sobre a importância de se conhecer a história da Matemática, ou pelo menos alguns aspectos da mesma que contribuíram para a formação e desenvolvimento de uma teoria, o que pode se passar, para alguns, como algo que se classifica como “um mero detalhe”, mas que, na verdade, é de grande relevância para mostrar que esta área do conhecimento não se organizou em um único momento histórico, principalmente no que concerne ao conceito de função.

Para a vida profissional, este trabalho possibilitou a este professor, e espera-se que possa auxiliar a outros, a abertura de horizontes para uma formação didático-pedagógica que reflita uma prática mais efetiva, que leve os alunos a explorarem mais os porquês, a averiguarem de onde vem tal definição, ou por que algo é feito assim, afinal o aluno não é uma folha de papel em branco que não sabe nada e necessita que as informações sejam expressamente transferidas a ele, mas sim um ser pensante que busca o conhecimento e se torna autor de seu próprio saber. É necessário incentivar o aluno a buscar uma compreensão mais plena dos significados do que se estuda e perceber que os objetos de estudo apresentados na Matemática escolar não são postos por acaso, mas tiveram uma história, um percurso de desenvolvimento e que muitos foram os que contribuíram para que a Matemática que temos hoje seja “mais simples” de se estudar e aplicar.

Espera-se que este texto traga esta mesma visão àqueles que o lerem, para que tornem suas práticas em sala de aula, uma experiência ímpar aos seus alunos e de busca contínua pelo conhecimento.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática, 9**. 3 ed. Renovada. São Paulo. Editora do Brasil, 2012.

ARAUJO, M. G. de. **Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água**. 2016. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. doi:10.11606/D.55.2017.tde-13012017-112320. Acesso em: 2019-02-09.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2000.

_______. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, 2006.

BUENO, R. W. da S.; VIALI, L. **A construção histórica do conceito de função**. Educação Matemática em Revista (Rio Grande do Sul), v. 1, p. 37-47, 2009.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática, 1**. São Paulo. SM, 2016.

DIAS, V. A. **O ensino de funções na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP. Ilha Solteira, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2ª reimpressão. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. 8. Ed. Curitiba. Positivo, 2010.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, imtegração**. 6ªed. São Paulo, 2016.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5. ed. São Paulo. Livraria da Física, 2010.

GAYO, J.; PROBST, R. W. **O problema que tornou Euler famoso**. Ciência e Natura, v. 37, p. 342-355, 2015.

GIOVANNI, J. R.; [et al]. **360º matemática fundamental: uma nova abordagem: parte 1**. 2ª ed. São Paulo. FTD, 2015.

GONÇALVES, A. C. **Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagrama, linguagem algébrica e gráficos cartesianos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. doi:10.11606/D.55.2015.tde-01072015-113421. Acesso em: 2019-02-09.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. e MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar: conjuntos, funções**. V.1. 8ª ed. São Paulo. Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. e MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral**. V.8. 7ª ed. São Paulo. Atual, 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

RODRIGUES, M. U. **Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP. Rio Claro, 2007.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e** prática. V.9. 3ª ed. São Paulo, Moderna, 2015.

SOUZA, V. D. M. de; MARIANI, V. C. **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função.** In: V EDUCERE, 2005, Curitiba. Anais do V EDUCERE, 2005. v. 1. p. 1-12.

ZUFFI, E. M. **O tema funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio – por uma abordagem de significados**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, USP. São Paulo, 1999.

http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=conjunto. Acesso em 02/10/2019.

https://novaescola.org.br/conteudo/1510/conhecimento-previo. Acesso em 22/09/2019.

http://portal.mec.gov.br/busca-geral/318-programas-e-acoes-1921564125/pnld-.
439702797/12391-pnld. Acesso em 27/02/2019.

ICMC USP
SÃO CARLOS