DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

ELAINE VELOSO FERNANDES PEREIRA

# Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos

Ouro Preto - MG, Brasil

26 de Fevereiro de 2021

ELAINE VELOSO FERNANDES PEREIRA

# Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho

Ouro Preto - MG, Brasil

26 de Fevereiro de 2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P436s Pereira, Elaine Veloso Fernandes .
Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos. [manuscrito] / Elaine Veloso Fernandes Pereira. - 2021.
89 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. GeoGebra (Software). 2. Números complexos. 3. Didática. I. Ferreira, Wenderson Marques. II. Marinho, Eder. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 511

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Elaine Veloso Fernandes Pereira**

**Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal
de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em 26 de fevereiro de 2021

Membros da banca

Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira Presidente - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Eder Marinho Martins - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Profa. Dra. Ana Paula da Silva Cota - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro - Universidade Federal do Espírito Santo
Profa. Dra. Flávia Cristina Figueiredo Coura - Universidade Federal de São João del-Rei

Wenderson Marques Ferreira Presidente, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 22/03/2021



**Referência:** Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.001648/2021-23 SEI nº 0149997

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

*"Perder tempo em aprender coisas que não interessam, priva-nos de descobrir coisas interessantes."*

*(Carlos Drummond de Andrade)*

# Agradecimentos

A Deus, por todas as bênçãos recebidas.

Ao meu marido e filha, pela paciência em minha ausência durante as viagens para a realização do curso, pelo apoio e amor incondicionais.

Aos colegas de viagens, pelas longas conversas rodeadas por causos e gargalhadas, tornando o percurso mais ameno.

Aos colegas de turma do curso PROFMAT, pelas trocas de experiências e companheirismo.

Aos professores do curso PROFMAT-UFOP, pelas contribuições e profissionalismo.

Aos professores orientadores, em especial ao professor Wenderson Marques Ferreira, pelo apoio e paciência durante a orientação.

Aos professores que compõem a banca examinadora: Ana Paula da Silva Cota, Fábio Corrêa de Castro e Flávia Cristina de Figueiredo Coura pela disposição em avaliar e enriquecer este trabalho com as devidas sugestões.

# Resumo


Neste trabalho, estudamos os números que podem ser escritos como soma dos quadrados de dois números, exibindo as condições para que possam ser escritos de tal forma. Em seguida, observamos que se tivermos $a^2 = b^2 + c^2$, com $b$ e $c$ naturais não nulos, além de termos uma representação não trivial de $a^2$ como soma de dois quadrados, também podemos associar $a, b$ e $c$ às medidas dos lados de um triângulo retângulo, obtendo um terno pitagórico. Posteriormente, passamos a abordar a relação entres números complexos e tais ternos, mostrando como utilizar tais números para provar que os ternos pitagóricos são infinitos. Atividades didáticas envolvendo tais resultados também foram abordadas e sua realização em sala de aula, com alunos de Ensino Médio de uma escola pública de Coronel Fabriciano-MG e também de graduação em matemática da UFOP, são descritas. Os dados foram coletados por meio de observações durante a realização da atividade e através das respostas dadas aos questionários. Os resultados mostram que os alunos, tanto do Ensino Médio quanto da graduação em Matemática, não conheciam a relação abordada entre números complexos e ternos pitagóricos, e que atividades investigativas como essa, usando o aplicativo GeoGebra, são bem avaliadas nos dois níveis de ensino, podendo contribuir significativamente para o processo de aprendizagem.



**Palavras-chave**: Ternos pitagóricos; GeoGebra; Soma de dois Quadrados; Números Complexos; Atividade didática.

# Abstract

In this dissertation, we study the numbers that can be written as the sum of two squares, presenting necessary conditions to write them in such a way. We emphasize that if we have $a^2 = b^2 + c^2$, with $b$ and $c$ nonzero integers, we have a nontrivial representation of $a^2$ as the sum of two squares and, moreover, we can associate $a, b$ and $c$ to the measures of the sides of a triangle rectangle, obtaining a Pythagorean triple. In addition, we study the conection between complex numbers and such triples, showing how to use such numbers to prove that Pythagorean triples are infinite. Educational activities involving the previous results will also be presented and their application to a high school class from a public school in Coronel Fabriciano-MG and also to undergraduate mathematics students at UFOP, will be presented. The data were collected through observations during the activities and through the answers given to questionnaires. The results show that students, both in high school and University, didn't know the conection between complex numbers and Pythagorean triples and that investigative activities like the one we presented, using GeoGebra motivate students, are considered positive and can significantly contribute to the learning process.

**Keywords**: Pythagorean triples; GeoGebra; Sum of two squares; Complex numbers; Didactic activities.

# Sumário

CAPÍTULO 1

# Introdução

Números primos, ternos pitagóricos são alguns resultados de aritmética abordados no Ensino Fundamental. O texto base da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), [8], contempla habilidades envolvendo números primos indicadas para o sexto ano do Ensino Fundamental. Os ternos pitagóricos são inclusos nas habilidades e competências que contemplam o Teorema de Pitágoras estudado no nono ano do Ensino Fundamental. Já os números complexos são trabalhados no Ensino Médio e são contemplados pelo Currículo Básico de Minas Gerais (CBC), [14]. Em nosso trabalho, vamos tentar responder a várias perguntas sobre tais conceitos ou cujas respostas dependem deles. Quais as condições para que um número inteiro possa ser escrito como a soma de dois quadrados? Existem infinitos ternos pitagóricos? Existe alguma relação entre números complexos e ternos pitagóricos? Começaremos respondendo à primeira dessas perguntas, que também será a mais trabalhosa de se responder. Para tal, provaremos o Teorema da Soma dos Dois Quadrados:

**Teorema :***Um número natural $n$ é representado como a soma de dois quadrados, $n = x^2 + y^2, x; y \in \mathbb{N}$ se, e somente se, todo fator primo da forma $p = 4m + 3$ aparece com expoente par na decomposição de $n$ em fatores primos.*

O teorema anterior já foi abordado em outros trabalhos do PROFMAT e cada uma das dissertações que o tiveram como base possui um determinado enfoque, mostrando-nos as diversas possibilidades de abordagem de um mesmo tema. Podemos ver, em [20], bons estudos acerca dos conceitos fundamentais da aritmética enquanto observamos em [12] uma abordagem ampla sobre os critérios para que um número possa ser escrito como soma de dois quadrados também contemplados em nosso texto.

Notamos que se tivermos $a^2 = b^2 + c^2$, com $b$ e $c$ inteiros não nulos, podemos associar $a, b$ e $c$ às medidas dos lados de um triângulo retângulo, obtendo um terno pitagórico. Contudo, nosso intuito é ir além dos cálculos e utilizar o resultado para apresentar uma aplicabilidade dos números complexos que seja compreensível para os alunos do Ensino Médio, relacionando-os aos ternos pitagóricos. O trabalho [3] enfatiza algumas estruturas algébricas relacionadas ao conceito de anéis, com bastante foco nos ternos pitagóricos. Em [16], vemos um texto com definições dos números que podem ser escritos como soma de dois quadrados e ternos pitagóricos utilizando conceitos diferentes daqueles com os quais operamos em nossas demonstrações. Além desses anteriormente citados, vemos que o texto [9] apresenta análises aritméticas e geométricas dos critérios para que um número seja escrito como soma de dois quadrados relacionados às propriedades dos ternos pitagóricos.

É preciso destacar que o foco inicial de nosso trabalho era a abordagem somente em torno do Teorema da Soma dos Dois Quadrados. Porém, durante os estudos, percebemos que poderíamos abordar tal tema de modo diferente e, quem sabe, até mais intrigante, envolvendo uma relação pouco trabalhada entre complexos e ternos pitagóricos. Toda a orientação do trabalho, a atividade didática que fazemos no final e a forma à qual foi aplicada precisaram ser adaptadas diante do cenário de pandemia no ano de 2020.

Este trabalho busca uma maneira para encontrar outros ternos pitagóricos além daqueles conhecidos pelo estudante da educação básica, fazendo uma associação com números complexos utilizando como ferramenta o *software* matemático GeoGebra. Para a obtenção desse resultado, usamos definições e conceitos já trabalhados em outros textos do PROFMAT sobre números complexos e suas propriedades, tais como os trabalhos [15] e [22]. No entanto, nenhum dos textos aborda a aplicabilidade em sala de aula com o mesmo foco de nosso trabalho. Como feito em outros trabalhos do PROFMAT, tais como [7] e [4], também utilizaremos o aplicativo GeoGebra.

O Teorema da Soma de Dois Quadrados será nosso resultado principal do Capítulo 2 quando o provaremos formalmente e estabeleceremos exemplos. Alguns desses exemplos nos mostrarão que é possível que um mesmo número seja escrito de mais de uma forma como soma de dois quadrados. Embora não nos dediquemos a esse fato, temos aqui uma outra questão para investigação que pode dar origem a outros trabalhos.

Algumas propriedades dos números complexos e ternos pitagóricos serão abordados no Capítulo 3, levando em consideração a abordagem de livros didáticos do Ensino Médio, tais como [10]. Veremos que é fácil identificar que o quadrado do maior elemento de um terno pitagórico atende às condições do Teorema da Soma de Dois Quadrados, ou seja, um caso particular de tal resultado já é abordado no Ensino Fundamental. Ainda no Capítulo 3, estudaremos alguns conceitos básicos e propriedades dos números complexos para, finalmente, demonstrarmos a relação entre os dois assuntos.

A relação entre ternos pitagóricos e números complexos também será abordada em atividades descritas no Capítulo 4. Nesse mesmo capítulo, caraterizaremos os dois grupos de alunos participantes, alunos do Ensino Médio e da graduação em Matemática, descreveremos a dinâmica da atividade fazendo uma pequena análise da mesma e teremos uma breve descrição da importância da utilização do *software* GeoGebra durante a aplicação e obtenção dos resultados da atividade proposta. Foram elaborados questionários que visavam investigar a receptividade dos alunos, graduandos e concluintes do Ensino Médio, quanto à atividade aplicada e às análises dos mesmos encontram-se no Capítulo 5.

Por fim, no Capítulo 6 faremos as considerações finais do trabalho e, no apêndice, colocaremos os questionários já citados.

Em resumo, considerando o perfil do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), pretendemos ter em nosso trabalho um resultado matemático importante e uma aplicação em sala de aula, deixando alguma contribuição para o ensino da Matemática.

CAPÍTULO 2

# NÚMEROS ESCRITOS COMO SOMA DE DOIS QUADRADOS

Neste capítulo, responderemos à seguinte pergunta: quais números inteiros podem ser escritos como a soma dos quadrados de dois inteiros? Quando fazemos uma rápida inspeção entre alguns inteiros, encontramos números que podem ser escritos como a soma de dois quadrados, como por exemplo $5, 13, 25$. Em contrapartida, encontramos números como $6, 7, 12, 31$, que não podem ser escritos da mesma maneira. O que nos faz indagar: existe alguma característica que garanta a um número inteiro ser escrito como a soma de dois quadrados? Mostraremos que a resposta para essa pergunta é positiva, tendo [1] como principal referência. Antes, porém, vejamos um pouco da história dos estudos existentes sobre esse assunto.

## 2.1 Um pouco de História

Pierre de Fermat(1601- 1605) foi um advogado francês apaixonado por Matemática. É considerado uns dos grandes matemáticos da História. Seus estudos foram bastante relevantes, tendo contribuído em diversos campos de estudos como óptica, probabilidade e teoria dos números. Nesse último, seus estudos são considerados de absoluto destaque e importância. Uma de suas grandes contribuições foi o Teorema dos Dois Quadrados, que estabelece as condições para que um número seja escrito como soma de dois quadrados naturais, o qual abordaremos ao longo deste trabalho. Em [13], Dickson cita os estudos de grandes matemáticos como Legendre, Mersenne, Euler, que trabalharam com a questão dos números escritos como soma de quadrados e dedica um capítulo aos estudos de Fermat, a quem é comum atribuir o teorema da soma dos dois quadrados. Apesar de existirem muitas publicações com diferentes provas desse resultado, livros como A Mathematician's Apology (veja [17]) o citam como Teorema dos Dois Quadrados de Fermat. No artigo [5] é apresentado um breve resumo histórico sobre as contribuições dos matemáticos já citados, bem como de outros tais como Gauss e Girard, acerca do problema de se descobrir quais números poderiam ser escritos como a soma de dois quadrados.

## 2.2 Sobre Aritmética em $\mathbb{Z}_p$

Os resultados de aritmética são uma parte muito importante e elementar do estudo matemático. É o ramo da Matemática que trabalha os números e as operações possíveis entre eles. Um dos principais resultados dessa área é o Teorema Fundamental da Aritmética, o qual estabelece que todo número inteiro maior que 1 é fatorado como produto de primos. Sendo assim, é natural que iniciemos nossos estudos analisando se os números primos podem ser escritos como soma de dois quadrados. Dentre os primos ímpares, alguns como 5 e 13, podem ser escritos como soma de dois quadrados mas outros como 7 e 11 não podem. Enquanto o número 2, único primo par, pode ser escrito como $2 = 1^2 + 1^2$. Consideraremos para estudo, o conjunto dos números naturais incluindo o zero.

Para trabalharmos a demonstração do teorema principal alguns conceitos serão de extrema importância. Enunciaremos diversos resultados a seguir para maior completude do trabalho e comodidade do leitor. Optamos por deixá-los no próprio texto, em vez de em um Apêndice, para que fique mais fácil sua localização para os leitores que se interessem em relembrá-los. As demonstrações omitidas no texto podem ser vistas em [18]. Vejamos a seguir.

**Definição 2.1.** ***Congruências***: *Sejam $p \in \mathbb{N}$, não nulo, e $a, b \in \mathbb{Z}$. Então $a$ e $b$ são congruentes módulo $p$, se os restos de sua divisão euclidiana por $p$ forem iguais. Desta forma, define-se:*

$$a \equiv b \mod p.$$

*Uma condição imediata da definição de congruência é que se $a \equiv c \mod p$ e $b \equiv c \mod p$, tem-se que $p | a - b$.*

**Exemplo 2.1.** *Vejamos:*

- *Temos $21 \equiv 13 \mod 2$, já que os restos da divisão de $21$ e de$13$ por $2$ são iguais a $1$.*
- *Outro exemplo é $16 \equiv 7 \mod 3$, pois $16$ e $7$ deixam o mesmo resto quando divididos por $3$.*

Algumas propriedades importantes das Congruências serão utilizadas em nosso trabalho.

**Propriedade 2.1.** *Sejam $a, b, c, p \in \mathbb{Z}$, $p > 1$, temos:*

*(a)* $a + c \equiv b + c \mod p \Leftrightarrow a \equiv b \mod p$*;*

*(b)* $a \equiv b \mod p \Rightarrow ac \equiv bc \mod p$*;*

*Se tivermos* $m.d.c(p, a) = 1$ *vale a recíproca para o caso anterior.*

Outro conceito importante em nosso trabalho é o de Relação de Equivalência que apresentamos a seguir.

**Definição 2.2.** ***Relação de equivalência***: *Uma relação sobre um determinado conjunto* $X$*, denotada por* $\sim$*, é chamada Relação de Equivalência sempre que cumprir os seguintes itens:*

*(a) reflexiva:* $\forall\ a \in X$*, tem-se* $a \sim a$*;*

*(b) simétrica:* $\forall a, b \in X$*,* $a \sim b \Rightarrow b \sim a$*;*

*(c) transitiva:* $\forall a, b, c \in X$*, se* $a \sim b$ *e* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$*.*

O conjunto $[a]$ de todos os elementos que são relacionados a um elemento $a \in X$ é chamado de classe de equivalência de $a$. Em forma simbólica:

$$[a] = \{x \in X \setminus x \sim a\}.$$

A congruência está bem definida como uma Relação de Equivalência.

**Definição 2.3.** ***Classes Residuais***: *Seja* $p > 0$ *um número inteiro. Para cada* $a \in \mathbb{Z}$*, define-se*

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv a \mod p\}.$$

O subconjunto $[a] \in \mathbb{Z}_p$ é chamado de classe residual módulo $p$ do elemento $a$ de $\mathbb{Z}$.

**Definição 2.4.** *O conjunto de todas as classes residuais módulo* $p$ *será representado por* $\mathbb{Z}_p$*. Em outras palavras* $\mathbb{Z}_p = \{[0]; [1]; ...; [p-1]\}$.

**Exemplo 2.2.** *Seja* $p = 2$*. Em* $\mathbb{Z}_2$*, temos as classes:*

$[0] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0 \mod 2\} = \{2t; t \in \mathbb{Z}\}$*. O conjunto é formado por todos os números que quando divididos por 2 obtêm-se resto 0, ou seja, todos os pares.*

$[1] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 1 \mod 2\} = \{2t + 1; t \in \mathbb{Z}\}$*. Neste caso, o conjunto é formado por todos os números ímpares, porque são os números que divididos por 2 deixam resto igual 1.*

*Em* $\mathbb{Z}_5$*, temos as classes:*

$[0] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0 \mod 5\} = \{5t; t \in \mathbb{Z}\}$,

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 1 \mod 5\} = \{5t + 1, t \in \mathbb{Z}\},$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 2 \mod 5\} = \{5t + 2, t \in \mathbb{Z}\},$$
$$[3] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 3 \mod 5\} = \{5t + 3, t \in \mathbb{Z}\},$$
$$[4] = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 4 \mod 5\} = \{5t + 4, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Explicando a definição 2.4 em outras palavras: O conjunto $\mathbb{Z}$ é repartido em subconjuntos, sendo que cada um deles é formado por todos os números inteiros que possuem o mesmo resto quando divididos por $p$. Neste caso, existe uma relação de equivalência. Cada partição é chamada de *classe residual módulo p* e o conjunto de todas as classes residuais módulo $p$ é representado por $\mathbb{Z}_p$.

Em $\mathbb{Z}_p$, nós podemos definir as operações de adição e multiplicação como a seguir.

**Definição 2.5.** *Sejam $[x]$ e $[y] \in \mathbb{Z}_P$. Definimos*

- ***Adição:***$[x] + [y] = [a + b]$, *em que* $a \in [x], b \in [y]$;
- ***Multiplicação:***$[x] \cdot [y] = [a \cdot b]$,*em que* $a \in [x], b \in [y]$.

**Notação 2.1.** *Dados dois números inteiros $a$ e $b$, denote por $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Diremos, nesse caso, que $a$ divide $b$.*

**Notação 2.2.** *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, denote por $a \nmid b$ a representação da negativa da sentença anterior.*

O próximo resultado fornecerá dados para a melhor compreensão da sequência dos estudos.

**Proposição 2.1.** *Se $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com $p > 1$, temos $a \equiv b \mod p$ se, e somente se, $p|b - a$.*

Tal demonstração pode ser encontrada em [18], p. 166.

Afirmamos que a definição 2.5 independe das classes. De fato, essa afirmação é consequência da proposição a seguir.

**Proposição 2.2.** *Sejam $a, b, c, d, p \in \mathbb{Z}$, com $p > 1$.*

*i)* *Se $a \equiv b \mod p$ e $c \equiv d \mod p$, então $a + c \equiv b + d \mod p$.*

*ii)* *Se $a \equiv b \mod p$ e $c \equiv d \mod p$, então $ac \equiv bd \mod p$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $a \equiv b \mod p$ e $c \equiv d \mod p$, temos que $p|(b-a)$ e $p|(d-c)$.

i) Note que $p|(b-a)+(d-c)$. Por consequência, $p|(b+d)-(a+c)$, o que mostra $a+c \equiv b+d \mod p$.

ii) Para mostrar $ac \equiv bd \mod p$, é preciso mostrar que $p|bd - ac$. Somando e subtraindo $ad$ a $bd - ac$ e reagrupando, encontramos $bd - ad + ad - ac = d(b - a) + a(d - c)$. Como $p|(b - a)$ e $p|(d - c)$, temos que $p|d(b - a) + a(d - c)$. Logo, $p|bd - ac$ e isso mostra o resultado $ac \equiv bd \mod p$.

□

**Definição 2.6.** ***Inverso aditivo****: O elemento* $[-x] \in \mathbb{Z}_p$ *é dito inverso aditivo de* $[x] \in \mathbb{Z}_p$*, quando* $[x] + [-x] = [0]$.

Observe que, se $0 < x_0 \leq p - 1$, então as classes $[x_0]$ e $[p - x_0]$ são inversas aditivas uma da outra.

**Definição 2.7.** ***Inverso multiplicativo****: Um elemento* $[\overline{x}] \in \mathbb{Z}_p$ *é dito inverso multiplicativo de* $[x] \in \mathbb{Z}_p$*, quando* $[x][\overline{x}] = [1]$.

**Definição 2.8.** *Um elemento* $[x] \in \mathbb{Z}_p$ *é dito invertível, quando existir* $[\overline{x}] \in \mathbb{Z}_p$ *tal que* $[x][\overline{x}] = 1$*. Nesse caso, diremos que* $[\overline{x}]$ *é o inverso de* $[x]$.

O próximo resultado servirá como base para a demonstração do Teorema 2.1 apresentado em sequência.

**Proposição 2.3.** *Dois inteiros* $x$ *e* $p$ *são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros* $a$ *e* $b$ *tais que* $x \cdot a + b \cdot p = 1$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [18], p. 82.

O próximo Teorema é bastante relevante para a compreensão dos estudos que serão apresentados na próxima seção.

**Teorema 2.1.** *Um elemento* $[x] \in \mathbb{Z}_p$ *é invertível se, e somente se,* $m.d.c.(x, p) = 1$.

*Demonstração.* Se $[x]$ é invertível, então existe $[\overline{x}] \in \mathbb{Z}_p$ tal que $[1] = [x] \cdot [\overline{x}] = [x \cdot \overline{x}]$. Logo, $x \cdot \overline{x} \equiv 1 \mod p$ e, portanto, existe um inteiro $b$ tal que $x \cdot \overline{x} + b \cdot p = 1$. Segue-se que $x \cdot \overline{x} + b \cdot p = m.d.c(x, p)$, ou seja, $m.d.c(x, p) = 1$.

Por outro lado, se $m.d.c(x, p) = 1$, existem $b$ e $\overline{x}$ inteiros tais que $x \cdot \overline{x} + b \cdot p = 1$, ou seja, $1 - x \cdot \overline{x} = b \cdot p$. Logo, $p|1 - x \cdot \overline{x}$, isto é, $x \cdot \overline{x} \equiv 1 \mod p \Rightarrow [x] \cdot [\overline{x}] = 1$. Concluí-se que $[x]$ é invertível. □

Como consequência, se $p$ primo todos os elementos não nulos de $\mathbb{Z}_p$ são invertíveis. Nesse caso, diremos que $\mathbb{Z}_p$ é um **corpo**.

Todos os esses conceitos, apresentados até aqui, serão fundamentais na sequência do texto e mais detalhes podem ser vistos em [18].

A seguir será organizada uma estrutura em um subconjunto adequado de $\mathbb{Z}_p$, e serão obtidos resultados auxiliares que, juntos, nos permitirão estabelecer as condições para que dois números sejam escritos como soma de dois quadrados. Seguiremos as ideias apresentadas em [1].

### 2.2.1 O Conjunto $X_p$

Vamos definir um subconjunto dos inteiros que contenha um representante de cada classe de $\mathbb{Z}_p$. Este conjunto será fundamental na sequência do texto. Seja $p$ primo ímpar e

$$X_p = \{0, 1, 2, ...p - 1\}.$$

É importante observar que em $X_p$ temos exatamente um representante de cada classe de $\mathbb{Z}_p$. Além disso, observamos que os elementos $x_0$ e $p - x_0$ pertencem a $X_p = \{0, 1, 2, ...p - 1\}$ para todo $x_0$ inteiro não nulo que pertença a este conjunto. Ou seja, $X_p$ possui um representante da classe $[x_0]$ e um representante de $[p - x_0]$, classe dos inversos aditivos de $[x_0]$ não nula.

**Notação 2.3.** *Dado $x \in X_p$, denote por $-x$ o elemento de $X_p$ tal que $[-x]$ é o inverso aditivo de $[x]$.*

**Notação 2.4.** *Dado $x \in X_p$, denote por $\overline{x}$ o elemento do conjunto $X_p$ tal que $[\overline{x}]$ é o inverso multiplicativo de $[x]$.*

Agora, vamos definir uma relação de equivalência em $X_p$, a qual também denotaremos $\sim$, do seguinte modo:

**Definição 2.9.** *Sejam $x, y \in X_p$. Então, $x \sim y$ se uma das quatro condições for satisfeita:*

*(a)* $x \equiv y \mod p$;

*(b)* $x \equiv -y \mod p$;

*(c)* $xy \equiv 1 \mod p$;

*(d)* $xy \equiv -1 \mod p$.

A partir de agora, $\sim$ indicará a relação anteriormente definida e denotaremos:

$$[x] = \{y \in X_p / y \sim x\}.$$

Em outras palavras, $[x]$ é a classe dos elementos de $X_p$ que se relacionam com $x$ pela relação de equivalência $\sim$.

A *Definição* 2.9 permite que façamos outra análise também muito importante:

**Definição 2.10.** *Temos por definição que:*

- $x \in [x]$ *por* $a$)*;*
- $-x \in [x]$ *por* $b$)*;*
- $\overline{x} \in [x]$ *por* $c$)*;*
- $-\overline{x} \in [x]$ *por* $d$).

Portanto, a classe $[x]$ contém os elementos $\{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\} \subseteq X_p$. Pela definição anterior, a classe $[x]$ obtida através da relação de equivalência $\sim$ possui um representante da classe $[x]$ em $\mathbb{Z}_p$ (que é o próprio $x$), possui um representante da classe dos inversos aditivos de $x$ em $\mathbb{Z}_p$ (o elemento $-x$), um representante da classe dos inversos multiplicativos de $x$ em $\mathbb{Z}_p$ ( elemento $\overline{x}$) e um representante da classe dos inversos multiplicativos do inverso aditivo de $x$ em $\mathbb{Z}_p$ (dado por $-\overline{x}$).

Para melhor compreensão da relação de equivalência definida em 2.9, segue um exemplo.

**Exemplo 2.3.** *Seja* $p = 7$*, temos*

- $[0] = \{0\}$*;*
- $[1] = \{1, 6\}$*;*
- $[2] = \{2, 5, 4, 3\}$*;*
- $[3] = \{3, 4, 5, 2\}$*;*
- $[4] = \{4, 3, 2, 5\}$*;*
- $[5] = \{5, 2, 3, 4\}$*;*

- $[6] = \{6, 1\}$.

  *Em cada classe, distinta da classe $[0]$, temos o elemento, seu inverso aditivo, seu inverso multiplicativo e o inverso multiplicativo de seu inverso aditivo. Podemos observar repetições imediatas das classes.*

Notamos, pelo exemplo, que $X_7 = [0] \cup [1] \cup [2]$, sendo esta união disjunta.

**Proposição 2.4.** *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.*

A demonstração pode ser vista em [12]. Neste mesmo texto, mostra-se que as classes de equivalências $[x]$ terão cardinalidade $2$ ou $4$, a menos que $x$ seja igual a $0$.

### 2.2.2 Alguns Lemas

Na sequência, mostraremos uma série de resultados auxiliares que nos permitirão obter a condição necessária para que um inteiro possa ser representado como a soma de dois quadrados. Tais resultados auxiliares serão obtidos utilizando fortemente a relação $\sim$ definida previamente no conjunto $X_p$.

Sejam $x \in X_p$, $-x$ seu inverso aditivo e $\overline{x}$ seu inverso multiplicativo, com $-x$ e $\overline{x} \in X_p$

**Lema 2.1.** *Seja $p$ um primo ímpar e $x \in X_p$ não nulo. O conjunto $\{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\}$ se reduz a um par se e somente se $x$ e $-x$ são raízes de $x^2 \equiv 1 \mod p$ ou de $x^2 \equiv -1 \mod p$.*

*Demonstração.* Seja $p$ primo ímpar, $1 < x < p$. De fato, há seis possibilidades de obtermos elementos iguais:

1. $x = -x$.
   Neste caso, temos
   $$x.\overline{x} \equiv (-x).\overline{x} \mod p.$$
   Portanto, encontramos
   $$1 \equiv -1 \mod p \Rightarrow 2 \equiv 0 \mod p.$$
   Tal situação é absurda, pois $p$ primo maior que $2$.

2. $\overline{x} = -\overline{x}$.
   Para esta situação, encontramos
   $$x.\overline{x} \equiv x.(-\overline{x}) \mod p.$$
   Tal identidade não pode ocorrer pela mesma justificativa de 1.

3. $x = \overline{x}$.
   Para este caso, obtemos

$$x.x \equiv x.\overline{x} \mod p \Rightarrow x^2 \equiv 1 \mod p,$$

   que atende nosso objetivo.

4. $x = -\overline{x}$.
   Tal situação nos traz

$$x.x \equiv x.(-\overline{x}) \mod p \Rightarrow x^2 \equiv -1 \mod p.$$

   Também corresponde ao resultado pretendido.

5. $-x = -\overline{x}$
   Este caso equivale ao item 3.

6. $\overline{x} = -x$
   Esta situação corresponde ao caso estudado no item 4.

Portanto, só teremos elementos repetidos no conjunto $\{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\}$ se $x = \overline{x}$ ou se $x = -\overline{x}$. Caso ocorram as situações anteriores, teremos $-x = -\overline{x}$ e $\overline{x} = -x$ respectivamente, e o conjunto se reduzirá a dois elementos apenas. Segue-se que se $x = \overline{x}$, temos $x.x \equiv x.\overline{x} \mod p$ o que é equivalente a $x^2 \equiv 1 \mod p$. Ou se $x = -\overline{x}$, temos o equivalente a $x^2 \equiv -1 \mod p$. □

**Exemplo 2.4.** *Para ilustrar, temos:*

*(a) Seja* $p = 11$*, temos* $[0] = \{0\}$*,* $[1] = \{1, 10\}$*,* $[2] = \{2, 9, 6, 5\}$ *e* $[3] = \{3, 8, 4, 7\}$ *nos quais cada elemento tem seu inverso aditivo e seu inverso multiplicativo também no conjunto. Como podemos notar, não há solução para* $x^2 \equiv -1 \mod 11$*, mas há solução para* $x^2 \equiv 1 \mod 11$.

*(b) Por outro lado, se temos* $p = 13$*, encontramos os conjuntos* $[0] = \{0\}$,$[1] = \{1, 12\}$, $[2] = \{2, 11, 7, 6\}$, $[3] = \{3, 10, 9, 4\}$, $[5] = \{5, 8\}$. *O conjunto* $\{5, 8\}$ *é o par procurado e fornece as duas soluções para* $x^2 \equiv -1 \mod 13$. *O outro par,* $\{1, 12\}$*, fornece as soluções para* $x^2 \equiv 1 \mod 11$.

**Observação 2.1.** *É importante observar, também, que as raízes de* $x^2 \equiv 1 \mod p$ *e* $x^2 \equiv -1 \mod p$ *nunca coincidem.*

*De fato, se tivéssemos* $x^2 \equiv 1 \mod p$ *e* $x^2 \equiv -1 \mod p$*, por transitividade, teríamos* $1 \equiv -1 \mod p$ *o que equivale a* $2 \equiv 0 \mod p$*. Temos então uma contradição pois* $p$ *é ímpar.*

Na sequência do texto haverá a necessidade de conhecermos o número de raízes de uma equação modular envolvendo polinômios com coeficientes inteiros. Para tal, vamos necessitar do resultado do teorema a seguir. Embora o utilizaremos no conjunto $X_p$ previamente definido, vamos apresentá-lo em $\mathbb{Z}_p$.

**Lema 2.2.** *Seja $p$ primo. Em $\mathbb{Z}_p$, um polinômio de grau $n$, com coeficientes inteiros, possui no máximo $n$ raízes módulo $p$, isto é, se $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$ for um polinômio de grau $n$, $f(x) \equiv 0 \mod p$ tem no máximo $n$ soluções.*

*Demonstração.* Se não houver solução, o resultado é válido. Caso contrário, iniciamos fazendo a seguinte observação: se $t$ inteiro não negativo, $x - r$ divide $x^t - r^t$, pois

$$(x-r)(x^{t-1} + x^{t-2}r + ... + xr^{t-2} + r^{t-1}) = x^t - r^t.$$

Se $f(x) \equiv 0 \mod p$ possuir raiz $r$, indicado por $f(r) \equiv 0 \mod p$, temos

$$f(x) \equiv f(x) - 0 \equiv f(x) - f(r) \mod p,$$

o que implica em

$$f(x) \equiv a_n x^n + ... + a_0 - (a_n r^n + ... + a_0) \mod p.$$

Segue-se a fatoração

$$f(x) \equiv a_n(x^n - r^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - r^{n-1}) + ... + a_1(x-r) + (a_0 - a_0) \mod p.$$

Como cada parêntese é divisível por $x - r$, temos

$$f(x) \equiv (x-r)g(x) \mod p,$$

com $g(x)$ sendo um polinômio de grau $n-1$. Daí, se $f(s) \equiv 0 \mod p$, com $s \neq r$, temos

$$(s-r)g(s) \equiv f(s) \equiv 0 \mod p.$$

Como $p$ primo, a relação anterior é válida se $s$ e $r$ pertencerem à mesma classe em $\mathbb{Z}_p$ (ou seja, se $s - r = kp, k \in \mathbb{Z}$) ou se $g(s) \equiv 0 mod p$. No primeiro caso, não acrescentaremos nenhum elemento novo de $\mathbb{Z}_p$ ao conjunto solução. Caso $s$ e $r$ pertençam a classes distintas, devemos ter $g(s) \equiv 0 mod p$ e, pela identidade anterior, $s$ também é raiz de $f(x) \equiv 0 mod p$.

Suponhamos por indução que um polinômio arbitrário $g$ possua grau $(n-1)$ e que haja, no máximo, $(n-1)$ raízes para $g(x) \equiv 0 \mod p$. Então, há no máximo $1 + (n-1)$ raízes para $f(x) \equiv 0 \mod p$. Dessa forma, segue-se das últimas identidades que há no máximo $n$ raízes módulo $p$ para o polinômio $f(x)$ de grau $n$. □

**Observação 2.2.** *O resultado anterior não é válido se trocarmos* $\mathbb{Z}_p$ *por* $\mathbb{Z}$. *Um exemplo disso ocorre se considerarmos* $f(x) = x^2 - x - 2$ *e* $p = 2$. *Notamos que as raízes* $-1$ *e* $2$ *do polinômio satisfazem* $f(-1) = f(2) \equiv 0 mod 2$. *Facilmente se nota que estas não são as únicas soluções do problema* $f(x) \equiv 0 mod 2$ *em* $\mathbb{Z}$ *já que, por exemplo, considerando* $x = 0$ *temos* $f(0) = -2 \equiv 0 mod 2$, *ou seja, exibimos uma terceira solução para a congruência.*

No próximo lema, mostraremos que $[x]$, definida na relação de equivalência $\sim$ pode ter no máximo duas classes com apenas dois elementos: $\{1, p-1\}$ e $\{x_0, p - x_0\}$ para algum $x_0 \in X_p, x_0 \neq 1$, sendo que a primeira delas sempre ocorre.

**Lema 2.3.**

*(i)* *Para* $p$ *primo do tipo* $p = 4m + 1$, *a equação* $x^2 \equiv -1 \mod p$ *possui duas soluções em* $\{1, 2, .., p-1\}$.

*(ii)* *Para* $p = 2$, *há uma única solução para a equação* $x^2 \equiv -1 \mod p$.

*(iii)* *Para primos do tipo* $p = 4m + 3$ *não há solução para a equação* $x^2 \equiv -1 \mod p$.

*Demonstração.* Inicialmente notemos que, pelo Lema anterior, a equação $x^2 \equiv 1 \mod p$ tem, no máximo, duas soluções.

Se $p = 2, x \in \{1\}$ e claramente $1$ é solução da equação dada. Vejamos

$$x^2 \equiv -1 \mod p \Rightarrow 1^2 + 1 \equiv 0 \mod 2.$$

Como a última expressão é verdadeira, temos o resultado.

Para $p$ ímpar, consideremos a relação de equivalência $\sim$ e o conjunto $\{1, 2, 3, ..., p-1\}$ a ela associado. Dessa forma, a classe de equivalência $\{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\}$ será gerada. Atente para o fato de que este último conjunto contém ambos os inversos de todos seus elementos.

Se os elementos da classe não forem distintos, o subconjunto $\{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\}$ se reduz a um par, e são satisfeitas as condições do Lema 2.1. Nesse caso, temos as possibilidades:

- Se $x = -x$, temos $x \equiv -x \mod p$ e segue-se

  $$x.\overline{x} \equiv (-x).\overline{x} \mod p.$$

  O que equivale a

  $$1 \equiv -1 \mod p,$$

  e encontramos

  $$2 \equiv 0 \mod p.$$

  O que é impossível, pois $(2 - 0)$ não é divisível por um primo ímpar.

- Se $x \equiv \overline{x} \mod p$, temos
$$x.x \equiv x.\overline{x} \mod p.$$
Segue-se
$$x^2 \equiv 1 \mod p,$$
que é equivalente a
$$x^2 - 1 \equiv 0 \mod p.$$
Pelo Lema 2.2, temos no máximo duas soluções para esta equação. Neste caso, as duas soluções são dadas explicitamente por $\{1, p-1\}$. Observe que se $x = 1$ temos $1 - 1 \equiv 0 \mod p$. Agora, quando $x = p - 1$ temos $p^2 - 2p + 1 - 1 \equiv 0 \mod p$. Para ambos os valores a congruência é satisfeita.

- Se $x \equiv -\overline{x} \mod p$, temos
$$x.x \equiv x.(-\overline{x}) \mod p.$$
Segue-se que
$$x^2 \equiv -1 \mod p.$$
Com isso, chegamos a
$$x^2 + 1 \equiv 0 \mod p.$$
Resultado que, pelo Lema 2.2, possui, no máximo, duas soluções. No entanto, observe que se $x_0 \in \{1, 2, 3...p-1\}$ for solução da equação $x^2 \equiv -1 \mod p$, $(p - x_0)$ também será. De fato, se
$$x_0^2 \equiv -1 \mod p$$
obtemos
$$(p - x_0)^2 = p^2 - 2px_0 + x_0^2 = 0 + 0 + x_0^2 \equiv -1 \mod p.$$
Outra situação é a de que $x_0^2 \equiv -1 \mod p$ possa não ter solução. Daí, percebemos que há duas possibilidades, ou $x^2 \equiv -1 \mod p$ não possui raiz, ou há duas soluções.

Passemos à conclusão do Lema, analisando os casos $p = 4m + 1$, que corresponde a $p - 1 = 4m$, e $p = 4m + 3$ que é equivalente a $p - 1 = 4m + 2$. Esses resultados são obtidos aplicando-se o Lema 2.1 que nos fornece as condições para que tenhamos as classes de equivalência com apenas dois elementos.

Perceba que se $p - 1 = 4m + 2$, o número de pares da decomposição em classes de equivalência ( como feito na página 23 ) é obrigatoriamente ímpar, caso contrário, a soma de todas as quádruplas e pares seria um número divisível por 4.

Para ilustrar a situação anterior, seja $x$ o número de quádruplas e $2y$ o número par de pares, assim

$$p - 1 = 4x + (2y).2 = 4(x + y).$$

O que é absurdo pois $p - 1 \equiv 2 \mod 4$.

Mas $\{1, p - 1\}$ sempre soluciona $x^2 \equiv 1 \mod p$, como já visto. Consequentemente, não existe $x_0 \neq 1$ tal que $\{x_0, p - x_0\}$ seja solução para $x^2 \equiv -1 \mod p$ (note que o Lema 2.2 estabelece que há, no máximo, duas soluções para tal equação). Consequentemente, temos uma única dupla na decomposição.

Por outro lado, se $p-1 = 4m$, o número $y$ de pares deve ser par. Caso contrário, teríamos $y = 2k + 1$ e

$$p - 1 \equiv 4x + (2k + 1).2 \mod 4.$$

Desta forma, teríamos $p - 1 \equiv 4(x + k) + 2 \equiv 2 \mod 4$, o que nos dá uma contradição pois, neste caso, $p - 1 \equiv 0 \mod 4$. Daí, temos que $\{1, p - 1\}$ é um par, porque soluciona $x^2 \equiv 1 \mod p$ e, como sabemos que há no máximo duas soluções para esta última equação, deve existir $x_0 \neq 1$ tal que $\{x_0, p_0 - x_0\}$ é outro par que soluciona $x^2 \equiv -1 \mod p$.

Portanto, chegamos à conclusão de que sendo $p - 1 = 4m$, equivalente a $p = 4m + 1$, há duas soluções para $x^2 \equiv -1 \mod p$ em $\{1, 2, ...p - 1\}$. E, para $p - 1 = 4m + 2$, o que equivale a $p = 4m + 3$, não há solução para $x^2 \equiv -1 \mod p$ em $\{1, 2, ..., p - 1\}$. Agora, quando temos $p = 2$, existe apenas uma solução $x = 1$ para $x^2 \equiv -1 \mod p$ em $\{1\}$.

$\square$

Para a próxima demonstração, utilizaremos um conhecido resultado de análise combinatória: o princípio das gavetas, que enunciaremos a seguir.

**Proposição 2.5.** *Se $n + 1$ ou mais objetos são colocados em $n$ ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.*

Para maiores informações ver em [21].

**Lema 2.4.** *Seja $\mathbb{Z}_p$, $p$ primo. Então, há sempre solução para $x^2 + y^2 \equiv -1 \mod p$.*

*Demonstração.* Vamos particionar o conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...p - 1\}$ em dois subconjuntos, de maneira que o primeiro subconjunto seja $A = \left\{0, 1, 2, 3... \frac{p-1}{2}\right\}$. Note que se $h = \frac{p-1}{2}$, os quadrados $0^2, 1^2, 2^2, ..., h^2$ são todos elementos distintos em $\mathbb{Z}_p$. De fato, se

$$x^2 \equiv y^2 \mod p \text{ em que } x, y \in A$$

teríamos

$$x^2 - y^2 \equiv 0 \mod p,$$

A expressão anterior equivale a

$$(x-y)(x+y) \equiv 0 \mod p.$$

Como $\mathbb{Z}_p$ é um corpo, o resultado anterior implica em:

$$x + y \equiv 0 \mod p \Rightarrow x \equiv -y \mod p$$

ou

$$x - y \equiv 0 \mod p \Rightarrow x \equiv y \mod p.$$

No primeiro caso, temos dois elementos, um simétrico ao outro, que deixam o mesmo resto quando divididos por $p$. Tal situação só pode acontecer se ambos forem equidistantes do elemento central $h$ do conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...p-1\}$. Sendo assim, somente um deles está no subconjunto $\{0, 1, 2, ..., h\}$.

Já o segundo caso, não pode ocorrer em $\left\{0, 1, 2, ..., \dfrac{p-1}{2}\right\}$ uma vez que todos os seus elementos são distintos.

Portanto, não há dois quadrados iguais nesse subconjunto. E, ao somarmos $1$ a cada elemento do conjunto $A$ e tomarmos seu inverso aditivo, continuamos a obter elementos distintos. Desta forma, podemos definir outro subconjunto como $B = \{-(1+y^2), y \in A\}$.

Daí, temos $\dfrac{p-1}{2} + 1$ quadrados distintos da forma $x^2, x \in A$ em $\mathbb{Z}_p$ e, também, temos esta mesma quantidade de números distintos da forma $-(1+y^2); y \in A$. Fazendo a união dos elementos dos conjuntos $A$ e $B$ obtemos um total de

$$\left(\frac{p-1}{2} + 1\right).2 = p - 1 + 2 = p + 1 \text{ elementos, mas } p + 1 > p.$$

O número de elementos de $\mathbb{Z}_p$ é dado por $p$ e temos $p+1$ quadrados ao unirmos os conjuntos $A$ e $B$. Observamos que os elementos de $A$ são todos distintos em $\mathbb{Z}_p$ e os elementos de $B$ também o são. Consequentemente, temos dois elementos congruentes módulo $p$, sendo que os mesmos devem ser um de cada conjunto. Desse modo, ao menos um par $(x; y)$ satisfaz $x^2 \equiv -(1+y^2) \mod p$. $\square$

**Lema 2.5.** *Nenhum $n = 4m + 3$ é soma de dois quadrados.*

*Demonstração.* Considere um número par $x = 2k$. Dessa forma, seu quadrado também é par

$$(2k)^2 = 4k^2.$$

O que implica em

$$x^2 \equiv 4k^2 \equiv 0 \mod 4.$$

No caso de um número ímpar $x = 2k + 1$, temos que seu quadrado também é ímpar

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Implicando em

$$x^2 \equiv 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \mod 4.$$

Dessa forma, se $x$ e $y$ forem ambos pares, obtemos $x^2$ e $y^2$ pares, e assim, é válida a congruência

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \mod 4.$$

No caso em que temos $x$ e $y$ números ímpares, temos $x^2$ e $y^2$ ímpares, logo

$$x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \mod 4.$$

Quando temos $x$ par e $y$ ímpar, obtemos $x^2$ par e $y^2$ ímpar, daí

$$x^2 + y^2 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \mod 4.$$

Desta forma, dados $x; y \in \mathbb{Z}$, nunca ocorre $x^2 + y^2 \equiv 3 \mod 4$ o que mostra o teorema. $\square$

**Proposição 2.6.** *Cada primo $p = 4m + 1$ é uma soma de dois quadrados, isto é, $p = x^2 + y^2$ sendo $x, y \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Seja $\lfloor \sqrt{p} \rfloor$ o único número inteiro $i$ tal que $i \leq \sqrt{p} < i + 1$, ou seja, $i$ é o maior número inteiro menor do que $\sqrt{p}$. Considere o conjunto $A$ formado pelos pares ordenados $(x'; y')$ com $x'; y' \in \{0, 1, 2, 3, ..., \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}$. O número de elementos deste conjunto é $\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1$. Assim sendo, fazemos a relação dois a dois entre os elementos deste conjunto e chegamos ao número de $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2$ pares. Aqui não estamos descontando os pares contados em dobro, que ocorrem no caso $x' = y'$. Note que

$$\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1 > \sqrt{p}.$$

Isto implica em

$$(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2 > (\sqrt{p})^2 = p.$$

Portanto, a quantidade de pares relacionados é encontrada através de $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2$, e esse valor é maior que $p$.

Agora, considere $s \in \mathbb{Z}$ e defina

$$f(x'; y') = x' - sy' \mod p.$$

Nesse caso, $x' - sy'$ nos conduzem a $(\lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1)^2$ números inteiros. Também sabemos que há, no máximo, $p$ restos na divisão de um número inteiro por $p$. Com isso, pelo princípio da casa dos pombos, para cada $s \in \mathbb{Z}$, existem dois pares distintos

$$(x'; y'), (x", y") \in \{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\} \times \{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}$$

com

$$x' - sy' \equiv x'' - sy'' \mod p.$$

Isto implica em

$$x' - x'' \equiv s(y' - y'') \mod p. \tag{2.1}$$

Se definirmos

$$x := |x' - x''|; y := |y' - y''|,$$

teremos

$$|x - x''|; |y - y''| \in \{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}.$$

Temos $x$ e $y$ definidos como a diferença em módulo de dois termos positivos do conjunto $\{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}$. Por conseguinte, temos

$$(x; y) \in \{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\} \times \{0, 1, 2, ..., \lfloor\sqrt{p}\rfloor\}.$$

Porém, a relação de congruência estabelecida em (2.1) não está em módulo. Dessa maneira,

$$x \equiv \pm sy \mod p.$$

É de nosso conhecimento que os pares $(x'; y')$ e $(x''; y'')$ são distintos. Dessa forma, $x$ e $y$ não podem ser iguais a zero simultaneamente.

Por outro lado, seja $s \in \mathbb{Z}$ uma solução de $s^2 \equiv -1 \mod p$ cuja existência é garantida pelo Lema 2.3. Da congruência $x \equiv \pm sy \mod p$ obtemos

$$x^2 \equiv s^2 y^2 \mod p.$$

Devido à escolha de $s$, segue-se que $x^2 \equiv -y^2 \mod p$. Uma vez que $x < \lfloor\sqrt{p}\rfloor < \sqrt{p}$, é válido que $x^2 < p$. A partir daí, sabendo que ocorre a mesma situação com $y$, temos

$$(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ com } 0 < x^2 + y^2 < 2p \text{ e } x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p.$$

Por fim, perceba que entre $0$ e $2p$ o único número divisível por $p$ é o próprio $p$. Logo, chegamos ao resultado desejado $x^2 + y^2 = p$. $\square$

## 2.3 O resultado principal

Para melhor sequência em nosso trabalho, definiremos os números que são objetos de nosso estudo.

**Definição 2.11.** *O número $n$ é dito* representável *se $n = x^2 + y^2$ para algum par $x, y \in \mathbb{N}$.*

**Lema 2.6.** *São válidas as propriedades dos números representáveis:*

*(1) Os números $1$ e $2$ são representáveis.*

*(2) Todo número primo do tipo $p = 4m + 1$ é representável.*

*(3) Nenhum número primo da forma $p = 4m + 3$ é representável.*

*(4) O produto de dois representáveis é também representável.*

*(5) Se $n = x^2 + y^2$ é representável, então $nz^2$ também é representável para todo $z \in \mathbb{Z}$.*

*Demonstração.* Para a propriedade $(1)$, temos que

$$1 = 1^2 + 0^2 \text{ e } 2 = 1^2 + 1^2.$$

As propriedades $(2)$ e $(3)$ são resultados já mostrados anteriormente na Proposição 2.6 e no Lema 2.5, respectivamente.

A propriedade $(4)$ diz que se dois números $n_1 = x_1^2 + y_1^2$ e $n_2 = x_2^2 + y_2^2$, então seu produto também é representável. Afirmamos que

$$n_1.n_2 = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Para mostrar a validade deste resultado, temos

$$n_1.n_2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

Aplicando a propriedade distributiva, encontramos

$$n_1.n_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2.$$

Adicionando e subtraindo $2x_1x_2y_1y_2$ ao resultado e reagrupando, temos

$$n_1.n_2 = (x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2) + (x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2).$$

E, assim, escrevemos os agrupamentos como produtos notáveis e o resultado desejado é encontrado

$$n_1.n_2 = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Para a propriedade $(5)$, temos que, se $n = x^2 + y^2$ for representável, o multiplicamos por $z^2$, obtendo $nz^2 = z^2(x^2 + y^2)$. Em seguida, aplicando a propriedade distributiva, encontraremos

$$nz^2 = (xz)^2 + (yz)^2,$$

e temos o resultado.

$\square$

Neste ponto de nosso estudo, surgem algumas questões bastante pertinentes. Conforme vimos, se houver um número cuja decomposição contém apenas fatores primos do tipo $p = 4m + 1$, pela Propriedade $(4)$ do Lema 2.6, este número será representável. Mas, o que acontece quando aparecem na decomposição fatores primos dos tipos $4m + 1$ e $4m + 3$, simultaneamente? Fazendo uma rápida inspeção, encontramos alguns casos de números representáveis e não representáveis, que possuem fatores primos dos dois tipos em sua decomposição. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.5.** *Para $n = 35$, temos em sua fatoração $n = 5 \times 7$, primos de ambos os tipos e, podemos escrevê-lo como as somas $35 = 1^2 + 34, 35 = 2^2 + 31, 35 = 3^2 + 26, 35 = 4^2 + 19, 35 = 5^2 + 10$. Verificamos que não é representável.*

*No entanto, para $n = 245$, temos em sua decomposição $n = 5 \times 7^2$ (ou seja, tem os mesmos fatores primos que 35) e podemos escrevê-lo como a soma $245 = 14^2 + 7^2$.*

Para entender melhor o que acontece com um número inteiro, independente do tipo de seus fatores, passemos para o próximo resultado.

**Lema 2.7.** *Seja $p = 4m + 3$, primo, e $n = x^2 + y^2$, em que $x, y \in \mathbb{N}$, representável. Se um número primo $p = 4m + 3$ é fator na decomposição em fatores primos de $n = x^2 + y^2$, então $p|x$ e $p|y$.*

*Demonstração.* Seja $n = x^2 + y^2$ um representável e $p = 4m + 3$ um fator primo de sua decomposição. Sendo assim, podemos escrever $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$. Vamos provar que $p|x$ e $p|y$.

Suponha que $p \nmid x$, ou seja, $x \not\equiv 0 \mod p$. Dessa maneira, podemos multiplicar a equação $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$ pelo inverso multiplicativo de $x^2$

$$x^2\overline{x}^2 + y^2\overline{x}^2 \equiv 0 \mod p.$$

Da última expressão obtemos

$$1 + y^2\overline{x}^2 \equiv 0 \mod p,$$

e segue-se

$$y^2\overline{x}^2 \equiv -1 \mod p.$$

Mas, pelo Lema 2.3, essa equação não possui solução para primo $p = 4m + 3$. O que nos dá uma contradição. Logo, $x|p$ e por analogia, $y|p$. □

**Corolario 2.1.** *Se $n$ for representável e $p = 4m + 3$ for um de seus fatores, então $p^2$ também é um de seus fatores e $\frac{n}{p^2}$ também é representável.*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.7, temos que como $p|x$ e $p|y$, então $p^2|(x^2 + y^2)$. Suponha $n = x^2 + y^2$ representável e $p = 4m + 3$ um fator de sua decomposição. Deste modo $n \equiv 0 \mod p$. Se o expoente do primo $p = 4m + 3$ é par, temos que $p^2|n$. Desse modo, $p^2$ deve estar na decomposição do número representável $n$. Fazendo $n = kp^2, k \in \mathbb{N}$, temos

$$x^2 + y^2 = kp^2.$$

Dividimos toda a equação por $p^2$

$$\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \left(\frac{y}{p}\right)^2 = \frac{n}{p^2} = k.$$

Podemos observar que o quociente de cada parcela é um número inteiro, pois $p^2|x^2$ e $p^2|y^2$ como visto anteriormente. Vimos, também, que $\frac{n}{p^2}$ é representável como a soma de dois quadrados. Desta maneira, concluímos que $p^2$ é um fator na decomposição de $n$. □

Vamos passar agora para o resultado principal do nosso trabalho.

**Teorema 2.2.** *Um número natural $n$ é representado como a soma de dois quadrados, $n = x^2 + y^2, x; y \in \mathbb{N}$ se, e somente se, todo fator primo da forma $p = 4m + 3$ aparece com expoente par na decomposição de $n$ em fatores primos.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que se $n$ for representável, o expoente de todo fator primo $p = 4m + 3$ é par.

Seja $n = x^2 + y^2$ representável, e $p = 4m + 3$ um de seus fatores. Se $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$, pelo Lema 2.7, temos que $x|p$ e $y|p$. Assim, podemos escrever

$$x = kp; k \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$x^2 = k^2p^2.$$

E, com isso, temos que $p^2|x^2$. A mesma justificativa vale para mostrar que $p^2|y^2$. Pelo Corolário 2.1, temos $p^2|n$.

Por outro lado, veremos que se todos os expoentes dos fatores primos do tipo $4m+3$ forem pares, $n$ será representável. Seja

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_n^{\alpha_n}.$$

Nessa decomposição cada fator primo $p$ só pode ser 2, do tipo $p = 4m+1$, ou do tipo $p = 4m+3$. Podemos reagrupar seus fatores em dois grupos em que todos os fatores primos do primeiro grupo são 2 ou do tipo $4m+1$, e todos os fatores do segundo grupo são do tipo $4m+3$. Assim, teremos

$$n = (2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_l^{\alpha_l})(p_{l+1}^{\alpha_{l+1}} p_{l+2}^{\alpha_{l+2}} p_{l+3}^{\alpha_{l+3}} ... p_n^{\alpha_n}).$$

A representação anterior pode ser escrita como

$$n = Q_1 \times Q_2.$$

Como $Q_1$ é formado apenas pelo número 2 (que é representável) ou por primos do tipo $4m+1$ afirmamos que tal fator da decomposição é representável. De fato, pela Proposição 2.6 e pela propriedade $(4)$ do Lema 2.6, concluímos o afirmado.

Por hipótese, cada termo de $Q_2$ possui expoente par. Assim, podemos escrevê-lo

$$Q_2 = z^2.$$

Dessa forma, temos

$$n = Q_1 z^2.$$

Usando a propriedade $(5)$ do Lema 2.6 temos que $n$ é representável e concluímos o resultado.

$\square$

**Exemplo 2.6.** *Alguns números nos quais existem fatores primos $p = 4m+3$ em sua decomposição:*

1. $n = 45$ *que ao ser decomposto encontramos* $n = 3^2 \times 5$ *e podemos escrever como* $n = 9 + 36$.

2. $n = 1.805$, *em que temos* $n = 19^2 \times 5$ *e podemos escrever como* $n = 1.444 + 361$.

3. $n = 28$, *sua decomposição é* $n = 2^2 \times 7$ *e é fácil verificar que não se trata de um representável.*

*Podemos destacar, também, o número* $= 1.189$ *que ao ser decomposto encontramos* $n = 29 \times 41$*, primos do tipo* $4m + 1$*, e pode ser escrito de duas maneiras diferentes como soma de dois quadrados:* $n = 17^2 + 30^2$ *e* $n = 33^2 + 10^2$*. Outro exemplo é o número* $50$ *cuja decomposição é* $n = 2 \times 5^2$ *e pode ser escrito, também, de duas formas como soma de quadrados:* $n = 5^2 + 5^2$ *e* $n = 7^2 + 1^2$*.*

É interessante, também, observar que alguns números representáveis satisfazem o Teorema de Pitágoras. De fato, sejam $a$,$b$ e $c$ as medidas dos lados de um triângulo retângulo, sendo $c$ o maior lado como sua hipotenusa, $a$ e $b$ como catetos, pelo Teorema, temos $c^2 = a^2 + b^2$. E assim, $c^2$ é um número representável. Esse caso em particular será abordado no próximo capítulo. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.7.** *Seja um triângulo retângulo cujos lados são* $a$*,* $b$ *e* $c$*.*

1. *Sejam* $a = 3$*,* $b = 3$*, e* $c = 5$*. Temos que* $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$*.*
2. *Para* $a = 9$*,* $b = 40$ *e* $c = 41$*. Temos* $40^2 + 9^2 = 1.600 + 81 = 1.681$ *que por sua vez equivale a* $41^2$*.*

Como vimos, o tema abordado desafiou e intrigou grandes matemáticos que trabalharam de forma diversificada em seu estudo. Este resultado é de extrema importância e relevância como cita G.H.Hardy (ver [17]): "Este é o Teorema de Fermat, que é classificado, com muita justiça, como um dos mais requintados da Aritmética". (Hardy, 1940, p. 97, tradução nossa)[1]. Neste trabalho, conseguimos mostrar o resultado de forma concisa e sem muitos conhecimentos matemáticos avançados.

[1] "This is Fermat's theorem, which is ranked, very justly, as one of the finest of arithmetic".

CAPÍTULO 3

# TERNOS PITAGÓRICOS E NÚMEROS COMPLEXOS

Ternos Pitagóricos e Números Complexos são dois assuntos que fazem parte dos currículos da educação básica. Neste Capítulo, faremos um estudo da relação entre os dois assuntos e apresentaremos os resultados teóricos que justificam, do ponto de vista matemático, para uma atividade prática, a ser vista no próximo capítulo, e na qual encontraremos sequências numéricas que atendem aos critérios do Teorema de Pitágoras e cujo quadrado das hipotenusas obtidas também atende ao Teorema da Soma de Dois Quadrados. Para tanto, começaremos recordando alguns conceitos e definições básicas desses dois assuntos.

## 3.1 Ternos pitagóricos

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais antigos e conhecidos da matemática. Ele estabelece a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Esse importante resultado recebe o nome do filósofo e matemático grego Pitágoras de Samos (570 a.C – 495 a.C). É curioso, no entanto, saber que muito antes dos estudos de Pitágoras, essa relação já era conhecida. Os babilônios já usavam as triplas de números que formam o triângulo retângulo cerca de mil anos antes da demonstração feita por Pitágoras. Uma prova disso é um artefato conhecido como Plimpton $322$, um objeto de barro que contém triplas de números gravados, sendo válida a seguinte relação: o quadrado de um deles é sempre a soma dos quadrados dos outros dois números. Para maiores detalhes deste grande teorema, sugerimos ver História da Matemática, de Boyer [2].

### 3.1.1 Definições iniciais

Apesar da referência ao Teorema de Pitágoras, o termo "terno pitagórico"nem sempre é de conhecimento dos estudantes, principalmente alunos do Ensino Fundamental. Para melhor leitura, podemos assim definir.

**Definição 3.1.** *Sejam $a$, $b$ e $c \in \mathbb{N}$ não nulos, que correspondem respectivamente às medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo, respectivamente, e atendem à relação $c^2 = a^2 + b^2$. Então a sequência numérica $(a, b, c)$ é chamada de* terno pitagórico.

Como visto, o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre escrita como a soma dos quadrados dos catetos. Portanto, utilizando a nomenclatura utilizada no Capítulo anterior, $c^2$ é um representável. De fato, a decomposição em fatores primos de

$$c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k},$$

em que $p_i$ é um fator primo e $\alpha_i$ um número inteiro, para $i = 1, 2, ..., k$. Temos a decomposição de $c^2$ satisfazendo

$$c^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_k^{2\alpha_k}.$$

Essa escrita está de acordo com o Teorema 2.2 visto no capítulo 2 .

Note que se $c \in \mathbb{N}$, por consequência, $c^2$ também é natural. Fazendo $n = c^2$, temos que $n$ é um quadrado perfeito. Agora, se considerarmos a soma $n = c^2 + 0^2$, temos uma forma em que $n$ é representado como soma de dois quadrados. Deste modo, todo número quadrado perfeito pode ser escrito como soma de dois quadrados. Contudo, se existir uma outra forma desse número ser representado como soma de dois quadrados, o mesmo pode ser associado ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Um bom exemplo de terno pitagórico é $(3, 4, 5)$. Outros ternos que aparecem com facilidade nos exercícios dos livros da educação básica são $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$. Observe que nenhum deles é composto por três inteiros ímpares, isso pode ser facilmente explicado pelo fato de que o quadrado de um inteiro ímpar também é ímpar, e a soma de dois números ímpares resulta em um inteiro par.

**Lema 3.1.** *Dado um terno pitagórico, é impossível que seus dois menores valores sejam números ímpares.*

*Demonstração.* Considere o terno pitagórico $(a, b, c)$ com $c$ o maior elemento. Suponha $a$ e $b$ ímpares. Como o quadrado de um número ímpar também é ímpar, temos que $c$ é par. Nesse caso, se $a = 2p + 1$, $b = 2q + 1$ e $c = 2l$, temos

$$(2q + 1)^2 + (2p + 1)^2 = 4l^2.$$

Fazendo os cálculos

$$4q^2 + 4q + 1 + 4p^2 + 4p + 1 = 4l^2 \Rightarrow 4(q^2 + p^2 + q + p) + 2 = 4l^2,$$

que equivale a

$$2(q^2 + p^2 + q + p) + 1 = 2l^2.$$

Chegamos a um resultado em que temos um número par igual a um número ímpar, o que é um absurdo. Logo, concluímos que, ou as medidas dos dois catetos são pares ou um dos catetos tem medida par e o outro ímpar. $\square$

Para ilustrar o lema anterior, podemos citar os ternos $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ em que encontramos um cateto com medida par e outro ímpar. Por outro lado, temos os ternos $(6, 8, 10)$ e $(12, 16, 20)$ cujos catetos possuem ambos medidas pares. Como consequência do que vimos no Lema 3.1, temos o resultado a seguir.

**Corolario 3.1.** *Dado um terno pitagórico, pelo menos um dentre seus dois menores valores é par.*

Então, podemos afirmar que todo quadrado perfeito é hipotenusa de um terno pitagórico? A resposta para esta pergunta é não. Em alguns casos, a única escrita possível de um quadrado como soma de outros dois quadrados é a opção, como vimos, em que temos um dos quadrados igual a zero.

**Exemplo 3.1.** *Vejamos alguns casos:*

1. *Para $n = 25$, podemos escrever $25 = 16 + 9$ ou $25 = 5^2 + 0$. A sequência $(5, 4, 3)$ é um terno pitagórico.*

2. *Para o caso em que $n = 9$, a única maneira para o escrevermos como soma de dois quadrados de números naturais é $n = 3^2 + 0^2$.*

3. *Para o caso $n = 325$, podemos encontrar três formas diferentes para escrevê-lo como soma de dois quadrados: $325 = 17^2 + 6^2$, $325 = 10^2 + 15^2$ e $325 = 18^2 + 1^2$. No entanto, não associamos um terno pitagórico às medidas dos lados de triângulos retângulos cujo quadrado da hipotenusa seja $325$.*

Embora tenhamos as condições para que um número seja escrito como soma de dois quadrados, é inabitual e pode ser difícil encontrar dois quadrados cuja soma seja esse número. Se, em particular, esse número for o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo, cujas medidas dos lados formam um terno pitagórico conhecido, a a forma de representá-lo como soma de dois quadrados já nasce trivialmente.

Mas, como podemos encontrar outros ternos? Os ternos pitagóricos são finitos ? Existe alguma técnica que possa nos ajudar a responder estas questões? Na sequência deste trabalho iremos apresentar algumas ideias e sugestões para compreendermos melhor esses números.

Por outro lado, também mostraremos uma relação existente entre os ternos pitagóricos e os números complexos. Para isso, veremos somente as propriedades básicas desse conjunto numérico necessárias para a compreensão da atividade descrita no próximo Capítulo, sem muito aprofundamento.

## 3.2 Números complexos

Segundo [10], a história dos números complexos tem início por volta do século $XV$, quando o matemático italiano Frei Luca Pacioli(1445-1517) publicou o livro Suma de Aritmética e Geometria, no qual fez a seguinte afirmação: *"Não há regra geral para solução de problemas do tipo cubos e coisas igual a número"*. Porém, ao menos um matemático da época não desistiu desses estudos e, por volta de 1515, Scipione Del Ferro(1465-1526) conseguiu solucionar a equação de terceiro grau $x^3 + px = q$, a qual representava a expressão "cubo e coisas igual a número"citada por Pacioli. Apesar da descoberta, Del Ferro não publicou seus estudos mas mostrou a solução a um de seus discípulos, Fiore. Nessa época, Niccolò Tartaglia, engenheiro e professor em Veneza, soube que Fiore, discípulo de Del Ferro, conhecia a solução para a equação e decidiu que também iria solucioná-la por seus próprios meios e conseguiu. Em 1545, o italiano Girolamo Cardano publicou seu livro Ars Magna, no qual trata da resolução da equação do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ele havia aplicado uma fórmula deduzida por ele para resolver a equação

$$x^3 - 15x = 4$$

e obteve como solução o número $4$, a partir da expressão

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}.$$

A grande pergunta era: como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam? Nesse momento as raízes quadradas de números negativos começaram a ser estudadas e os números complexos apareceram. No século $XVIII$, Euler introduziu o símbolo $i$ para representar a raiz quadrada de $-1$. Finalmente, em 1806, a representação geométrica dos números complexos foi elaborada pelo matemático suíço Jean-Robert Argand. Anos depois, Gauss adotou a representação geométrica de Argand e a divulgou em seus trabalhos. Ele fez com que a representação do plano complexo ficasse conhecida favorecendo sua aplicabilidade.

O conjunto $\mathbb{C}$ é um conjunto cujos elementos - os números complexos- são tais que podem ser somados, multiplicados e também possibilitam a extração da raiz de índice par de um número negativo. A notação preferida pelos livros do Ensino Médio para definir números complexos é a forma algébrica:

$$\mathbb{C} = \{a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Podemos observar que o número complexo escrito nessa forma possui duas partes: uma parte representada por $a$, chamada de parte *real*, e outra por $b$ representando a parte *imaginária*.

### 3.2.1 Operações com números complexos na forma algébrica

As operações entre números complexos na forma algébrica são definidas de modo a preservar as propriedades operatórias dos números reais. Mais informações sobre números complexos podem ser vistas em [19].

**Definição 3.2.** ***Adição e Subtração de Números Complexos****: Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podemos definir as operações de adição e subtração entre $z$ e $w$ da seguinte forma:*

***Adição****: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$*

***Subtração****: $z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$*

Na definição anterior, percebemos que foram feitos apenas agrupamentos das partes real e imaginária dos complexos envolvidos. A seguir, definiremos a multiplicação entre números complexos. Em tal definição, a propriedade distributiva é aplicada:

**Definição 3.3.** ***Multiplicação de Números Complexos****: Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, define-se:*

$$z \times w = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

**Exemplo 3.2.** *Sejam $z = 1 + 5i$ e $w = 4 + 7i$ dois números complexos.*

*a)* $z + w = (1 + 4) + (5 + 7)i = 5 + 12i$;

*b)* $z - w = (1 - 4) + (5 - 7)i = -3 - 2i$;

*c)* $z \times w = (1 \times 4 - 5 \times 7) + (1 \times 7 + 5 \times 4)i = -31 + 27i$.

**Definição 3.4.** *Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O número complexo $\overline{z} = a - bi$ é chamado de* conjugado *de $z = a + bi$. Dessa forma, os números complexos $z$ e $\overline{z}$ são conjugados se possuírem partes reais congruentes e partes imaginárias simétricas.*

Observe que, se $z$ não nulo, o produto $z \cdot \overline{z}$ é sempre um número real não negativo, por isso podemos estabelecer a definição a seguir.

**Definição 3.5.** ***Divisão de números complexos****: Dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $w \neq 0$, define-se:*

$$\frac{z}{w} = \frac{z \times \overline{w}}{w \times \overline{w}}.$$

### 3.2.2 Representação geométrica de um número complexo

Por volta do século $XIX$, Argand(1768- 1822) e Gauss(1777-1855), tendo por base os estudos de Caspar Wessel(1745-1818) e trabalhando de forma independente, criaram uma associação entre as partes real e imaginária de um número complexo e as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, possibilitando uma visualização mais fácil desses números. Essa representação usava a mesma associação usada para representar cada número real a um único ponto da reta real. Dessa forma, cada elemento $a + bi$, com $a$, $b \in \mathbb{R}$ do conjunto dos números complexos corresponde a um único ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano e vice-versa.

A parte real de $z$ é representada no eixo das abscissas e tal eixo é chamado de *eixo real*. Já a parte imaginária é representada no eixo das ordenadas, que é *eixo imaginário*o. O plano cartesiano assim redefinido é chamado **Plano de Argand-Gauss**. O ponto $P(a, b)$ é chamado de imagem do número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 3.3.** *Veja na Figura 1 a representação geométrica dos números complexos:*

*a)* $z_1 = 3 + 4i$

*b)* $z_2 = 2 - i$

*c)* $z_3 = 2i$

*d)* $z_4 = 5$

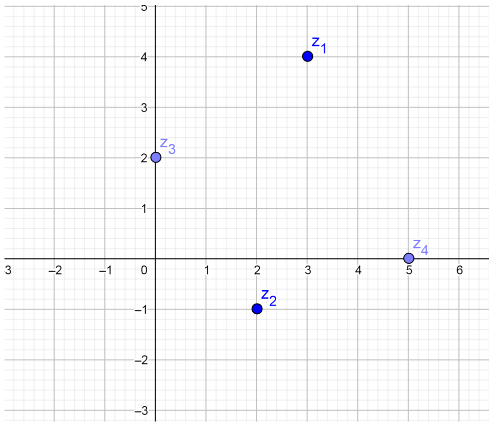


Figura 1 – Representação de $z_1$, $z_2$, $z_3$ e $z_4$ no Plano Argand-Gauss.

Já vimos que um número complexo pode ser representado por um ponto no plano. Veremos que ele também pode ser representado por um vetor, que é um segmento de reta orientado.

Todo vetor é determinado por dois pontos do plano, uma origem e uma extremidade, e é caracterizado por uma direção, um sentido e um módulo (comprimento do segmento). Desse modo, um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, pode ser representado no plano Argand-Gauss por um vetor $\overrightarrow{OP}$ de origem no ponto $O(0, 0)$ e extremidade no ponto $P(a, b)$. Assim, é possível determinar o módulo (comprimento) e o argumento (direção) de um número complexo conforme definiremos a seguir.

**Definição 3.6.** ***Módulo de um número complexo****: O módulo de um número complexo $z = a+bi$, indicado por $|z|$ ou $\rho$, é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$, ou seja, é a distância da origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(a, b)$, indicada por $d_{(O,P)}$, e é dada por*

$$|z| = d_{(O,P)} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}.$$

*O que equivale a escrever*

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exemplo 3.4.** *O número complexo $z_1 = 3 + 4i$ pode ser representado no plano Argand-Gauss pelo vetor $\overrightarrow{u}$ de origem no ponto $O(0, 0)$ e extremidade no ponto $P(3, 4)$.*

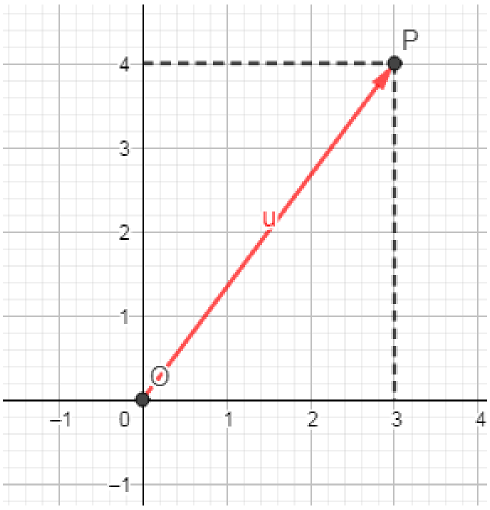


Figura 2 – Representação gráfica do vetor associado ao complexo $3 + 4i$.

*O módulo do vetor* $\overrightarrow{u}$ *é dado por*

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

**Definição 3.7.** ***Argumento de um número complexo****: A direção do* vetor $\overrightarrow{OP}$ *é dada pelo ângulo* $\theta$*, formado pelo vetor e pelo semieixo real positivo, com* $0 \leq \theta < 2\pi$*, considerado no sentido anti-horário. O ângulo* $\theta$ *é chamado* argumento *de* $z$*, indicado por* $arg(z)$*, para um número complexo não nulo* $z = a + i$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*. Com isso, o ângulo* $\theta$ *é tal que*

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \text{ e } \cos\theta = \frac{a}{\rho}.$$

**Exemplo 3.5.** *Tomemos o número complexo* $z_2 = 2 + 2i$ .

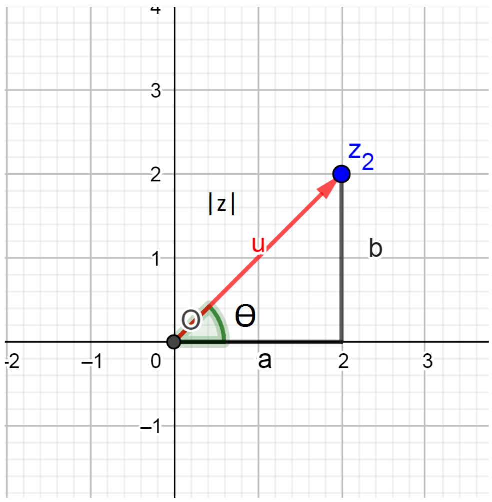


Figura 3 – Representação de $z_2$.

*Calculamos o valor do módulo*

$$|z| = \rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

*Então, temos que*

$$\text{sen}\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ } e \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*Concluímos que* $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *e que* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

### 3.2.3 Forma trigonométrica ou polar de um número complexo

Vimos que um número complexo $z$ pode ser representado por um ponto $P(a, b)$, no qual expressamos $z$ através de coordenadas cartesianas. Quando essa representação é feita utilizando o vetor $\overrightarrow{OP}$, dizemos que o argumento e módulo são as coordenadas polares de $z$. Dessa forma, podemos expressar o número complexo $z = a + bi$, não nulo e com $a, b \in \mathbb{R}$, por meio de suas coordenadas polares. Utilizaremos as Definições 3.7 e 3.6 para encontrarmos essa expressão. Vimos que $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Vimos, também, que

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho\text{sen}\theta$$

e

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho\cos\theta.$$

Substituindo os valores de $a$ e $b$ na forma algébrica de $z$, obtemos

$$z = a + bi = \rho\cos\theta + (\rho\text{sen}\theta)i,$$

o que equivale a

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta).$$

Essa é a *forma trigonométrica* do número complexo $z$. Essa representação facilita algumas operações como a multiplicação, a divisão, a potenciação e a radiciação de números complexos.

### 3.2.4 Operações com números complexos na forma trigonométrica

Para as próximas definições, é preciso relembrar como operamos a soma e subtração dos arcos trigonométricos.

a) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$,

b) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$,

c) $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$,

d) $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$.

As demonstrações e abordagens mais completas dessas operações podem ser encontradas em [19].

**Multiplicação**: Sejam os números complexos não nulos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2)$ na forma trigonométrica. O produto $z_1 \cdot z_2$ é obtido da seguinte maneira:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1+\theta_2)].$$

Podemos generalizar a definição da multiplicação de dois números complexos para a multiplicação de $n$ fatores complexos em que $z_i = \rho_i(\cos\theta_i + i \cdot \text{sen}\theta_i)$, com $i = 1, 2, ..., n$ e

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n.$$

Assim, obtemos o módulo e o argumento de $z$, dados, respectivamente, por

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot ... \cdot \rho_n,$$

e

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$$

**Divisão**: Sejam os números complexos $z_1$ e $z_2$, com $z_2$ não nulo, citados na definição anterior, expressos na forma trigonométrica. Para obter o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, definimos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1-\theta_2)].$$

**Exemplo 3.6.** *Dados os números complexos* $z_1 = 3 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right]$ *e* $z_2 = 5 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right]$. *Temos:*

*a)* $z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = 15 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sen\frac{3\pi}{4}\right).$

*b)* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3}{5} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right).$

As operações em $\mathbb{C}$ são compatíveis com as operações em $\mathbb{R}$. Por isso vamos proceder da mesma maneira com a potenciação em $\mathbb{C}$, que será de fundamental importância para a atividade proposta na sequência do trabalho.

**Teorema 3.1.** ***Potenciação(Primeira Fórmula de De Moivre)**: Seja o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, não nulo.Então*

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)).$$

A demonstração segue-se da generalização da multiplicação de números complexos, vista anteriormente, para obter $z^n = [\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)]^n$. Assim, encontramos:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)).$$

Os casos particulares dos expoentes $0$ e $1$ seguem a definição em $\mathbb{R} : z^0 = (a + bi)^0 = 1$ e $z^1 = (a + bi)^1 = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 3.7.** *Dados os números complexos $z = 3 \cdot \left[\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right]$. Então, para obter $z^2$, procedemos*

$$z^2 = 3^2 \cdot \left[\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = 9 \cdot (\cos\pi i \cdot \text{sen}\pi)$$

*Observe que, no caso de $z^2$, o argumento dobra e a norma é o quadrado da medida inicial. Essa observação é bem relevante para a compreensão da atividade proposta no Capítulo seguinte.*

Por fim, temos a radiciação dos números complexos. Mas, para isso, definiremos a raiz *n-ésima* de $z$.

**Definição 3.8.** *Todo número complexo $w$ tal que $w^n = z$ é chamado de raiz enésima de $z$.*

Utilizando a definição 3.1, podemos encontrar uma maneira para deduzir as raízes enésimas de $z$ .

**Definição 3.9.** *Seja o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \cdot$ sen$\theta)$. As raízes enésimas de $z$ são dadas por:*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \textit{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

*Com $k = 0, 1, 2, 3...., (n - 1)$; e com $n$ natural e $n > 1$.*

O índice $k$ de $w_k$ indica que $z$ possui $n$ raízes distintas, todas com o mesmo módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$ e argumentos $\dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}$, distintos entre si.

Um estudo mais aprofundado sobre o conjunto dos números complexos pode ser encontrado em alguns trabalhos do PROFMAT, tais como [15] e [22].

Os números complexos e ternos pitagóricos são conteúdos básicos que dificilmente têm seus estudos correlacionados. Nosso próximo passo é estabelecer uma relação entre esses dois conteúdos. O Teorema que veremos a seguir será usado, no próximo Capítulo, em uma atividade prática usando o *software* matemático Geogebra, que permite dinamismo e melhor visualização das representações feitas.

## 3.3 Números complexos e sua relação com ternos pitagóricos

Como vimos, o quadrado da medida correspondente à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujas medidas formam ternos pitagóricos, é um caso especial de números que atendem ao Teorema da Soma de Dois Quadrados. Neste ponto de nosso texto, responderemos às questões lançadas anteriormente: os ternos pitagóricos são finitos? Como podemos encontrar outras sequências pitagóricas? Existe alguma técnica para que isso seja feito com maior eficácia? Para começarmos a responder essas perguntas, iniciaremos analisando todos os pontos de coordenadas cartesianas inteiras e a distância de cada um desses pontos à origem. Tome $P = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

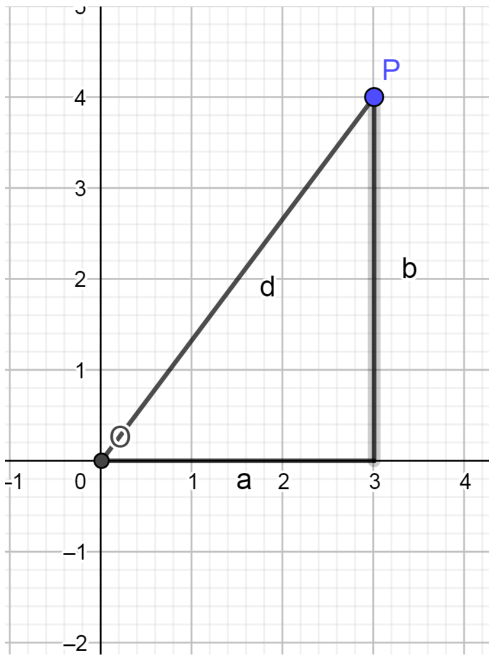


Figura 4 – Triângulo retângulo cujos lados correspondem às medidas da distância, dada por $d$, do ponto $P$ à origem e das projeções de $a$ e $b$ no eixo imaginário e real.

Podemos observar a que distância de $P$ à origem e as projeções $a$ e $b$ formam um triângulo retângulo. Aplicando Teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_{P,O})^2 = a^2 + b^2.$$

Note que, como $a$ e $b$ são inteiros, a distância de $P$ até a origem também é um número inteiro ou uma raiz de número inteiro. Assim, a sequência numérica $d_{P,O}, a$ e $b$ refere-se às medidas dos lados de um triângulo retângulo e o número $(d_{P,O})^2$ é representável. Então, quando perguntamos como podemos encontrar ternos pitagóricos, a resposta é procurar pontos de coordenadas inteiras cuja distância até a origem seja um valor inteiro. Nesse ponto de nosso estudo começamos a relacionar os ternos pitagóricos e os Números Complexos.

Podemos começar analisando o ponto $P(a, b)$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, no plano de Argand-Gauss. Observe que o ponto $P(a, b)$ representa um único número complexo $z = a + bi$.

**Teorema 3.2.** *Seja $z = a + bi$ um número complexo, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a^2 - b^2$ e $2ab$ forem não nulos, então o número complexo $z^2$ é tal que sua distância à origem e as medidas de suas projeções nos eixos real e imaginário formam um terno pitagórico.*

*Demonstração.* Seja $z = a + bi$ um número complexo, com $a, b \in \mathbb{Z}$, não nulos, e o ponto $P(a, b)$ sua representação geométrica no plano Argand-Gauss. Consideremos o triângulo cujos vértices são a origem, o ponto $P(a, b)$ e sua projeção $B(a, 0)$ no eixo $x$. As medidas dos lados desse triângulo são a medida da projeção de $P(a, b)$ nos eixos real e imaginário, e a distância de $P$ à origem dada por

$$d_{(P,O)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

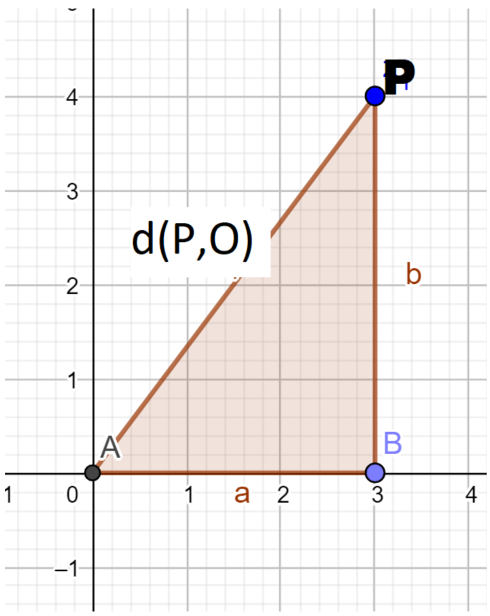


Figura 5 – Representação geométrica de $z = a + bi$ e do triângulo retângulo cujos vértices são a origem, $(a, b)$ e $(a, 0)$.

Observe que o valor de $d_{(P,O)}$ ou será um número inteiro ou raiz de um inteiro. Para garantir que essa distância seja sempre um valor inteiro, podemos elevá-la ao quadrado. Como o ponto $P(a, b)$ corresponde ao número complexo $z$, elevamos $z$ ao quadrado e obtemos

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2.$$

Como $i^2 = -1$, segue-se que

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

Reorganizando os elementos, encontramos

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Dessa maneira, temos que $z^2$ é um número complexo com a parte real igual a $a^2 - b^2$ e parte imaginária igual a $2ab$. Como $a, b \in \mathbb{Z}$, ambas as partes de $z^2$ também são inteiras e, assim, o ponto $P'(a^2 - b^2; 2ab)$ possui coordenadas inteiras.

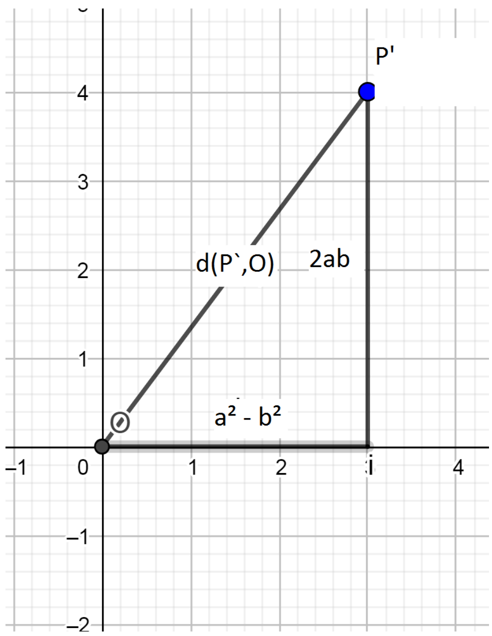


Figura 6 – Representação geométrica de de $P'(a^2 - b^2, 2ab)$ e do triângulo formado por este ponto, por sua projeção no eixo $x$ e pela origem.

Para encontrarmos a medida $d_{(P',O)}$, fazemos

$$d_{(P',O)} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2$$

e encontramos novamente um inteiro. Daí, concluímos que as três medidas encontradas $|a^2 - b^2|$, $2|ab|$ e $d_{(P',O)} = a^2 + b^2$ representam um terno pitagórico e, automaticamente, $d_{(P',O)} = a^2 + b^2$ é representável. □

**Observação 3.1.** *Observamos que se $a^2 - b^2 = 0$ ou $2ab = 0$, no teorema anterior, o complexo $z^2$ se localizará em um dos eixos do plano de Argand-Gauss. Nesse caso, não teremos o terno pitagórico já que uma das medidas das projeções aos eixos será nula. Caso tenhamos uma das projeções nos eixos nula, isso nos conduzirá a um caso degenerado que não atende à nossa definição de terno pitagórico (que exige valores positivos) mas ainda nos fornece a distância de $z^2$ à origem como um número representável trivial (com um dos quadrados da soma sendo nulo). Como a demonstração desse caso especial se enquadra no caso geral, não a faremos separadamente.*

Assim, encontramos uma maneira prática para obter outros ternos pitagóricos através da aplicação do Teorema 3.2. E, nessas condições, podemos responder a outra pergunta deixada anteriormente: os ternos pitagóricos são finitos? Não, uma vez que $a^2 - b^2$ e $2ab$ são inteiros, podemos aplicar o resultado ao complexo $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ obtendo um novo terno pitagórico. Aplicações sucessivas desse resultado aos complexos obtidos e variações nos inteiros $a$ e $b$ nos mostram que infinitos ternos podem ser obtidos.

**Corolario 3.2.** *Existem infinitos ternos pitagóricos.*

De fato, o resultado é imediato pelo fato de existirem infinitos números complexos com coordenadas inteiras.

Na prática, dado um complexo do tipo $a + bi$, a demonstração do teorema 3.2 nos mostra que um terno pitagórico pode ser obtido considerando-se $(|a^2 - b^2|, 2|ab|$ e $a^2 + b^2)$.

**Exemplo 3.8.** *Vamos aplicar o Teorema anterior para tentarmos encontrar ternos a partir dos números complexos:*

*a)* $z = 3 + 5i$

*Fazendo* $z^2$, *encontramos:*

$$z^2 = -16 + 30i$$

*Dessa maneira encontramos os catetos* $16, 30$ *e a hipotenusa é dada por* $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$, *como pode ser observado na Figura 7. Temos o terno Pitagórico* $(16, 30, 34)$.

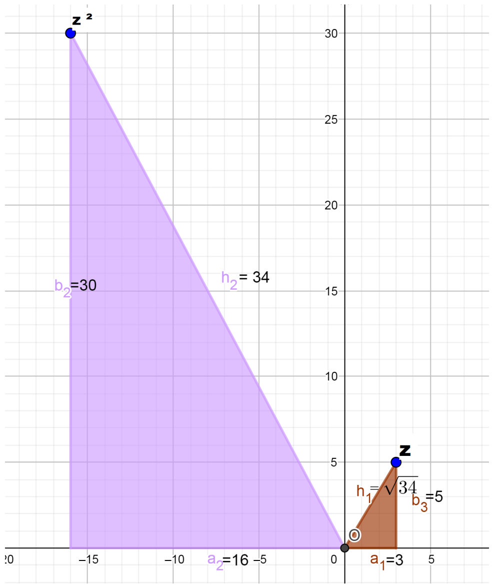


Figura 7 – Representação geométrica de dois triângulos retângulos cujos lados são as distâncias de $z$ e de $z^2$ à origem, e suas projeções aos eixos real e imaginário referente à letra a

*b)* $z = 2 + 2i$ *Elevando esse número ao quadrado, temos:*

$$z^2 = 8i.$$

*Nesse caso, temos um complexo com parte real nula e encontramos um triângulo degenerado [veja Figura 8]. Não obtemos um terno pitagórico.*

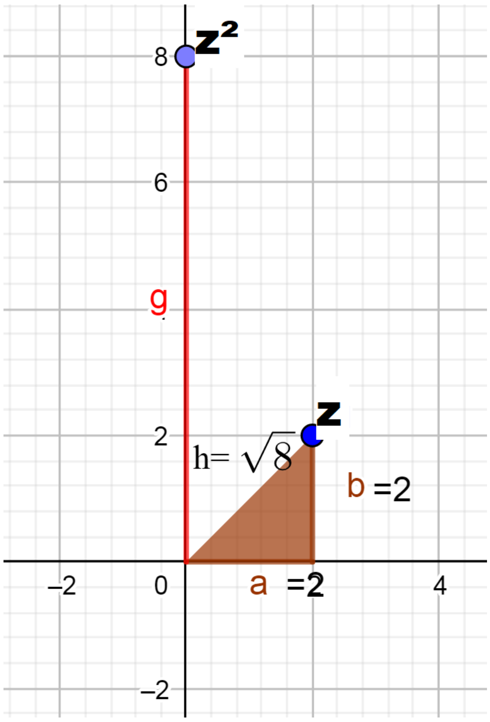


Figura 8 – Representação geométrica do triângulo associado ao complexo $z$ e do triângulo degenerado associado a $z^2$.

Contudo, será que todos os pontos associados a ternos podem ser gerados usando essa técnica? A resposta para essa questão é não! Nem todos os ternos podem ser gerados a partir de um número complexo $a + bi$. Podemos observar que o lado do triângulo correspondente à parte imaginária é sempre um número par, já que se origina a partir do cálculo $2ab$. Isso nos garante obter apenas complexos cujas partes imaginárias sejam números pares que podem ser expressos da forma $2ab$ a partir dos valores $a$ e $b$ do complexo original.

Um outro exemplo é o número complexo $z = 6 + 8i$. Tal número não pode ser obtido aplicando-se o teorema 3.2 a nenhum complexo do tipo $a + bi$ com $a$ e $b$ inteiros, embora tenhamos um terno bem conhecido. No entanto, o número complexo $z = 8 + 6i$ é possível ser obtido aplicando o teorema 3.2 ao complexo $3 + i$ . Mas, por que isso ocorre se são os mesmos inteiros $8$ e $6$ que formam os números complexos citados? De acordo com o que vimos, a parte imaginária do número complexo $6 + 8i$, seria obtida através da expressão $2ab$ e teria as seguintes opções para que fosse gerada a partir de um complexo $a + bi$ (suporemos que a e b são positivos já que os demais casos têm o mesmo raciocínio)

- Tomando $a = 2$ e $b = 2$, teríamos $2 \cdot 2 \cdot 2$;

• Tomando $a = 4$ e $b = 1$, teríamos $2 \cdot 4 \cdot 1$ ou invertendo a posição $2 \cdot 1 \cdot 4$.

Em nenhuma das opções, com os valores possíveis para $a$ e $b$, conseguiríamos obter a parte real $6$ através da expressão $a^2 - b^2$.

Outro exemplo dessa situação é o terno $(3, 4, 5)$. Não conseguiríamos obtê-lo se o número $3$ correspondesse à parte imaginária e o $4$ à parte real do complexo $z^2$. Já o número complexo $z = 3 + 4i$, possui em sua a parte imaginária um número par, sendo possível sua obtenção através do cálculo $2ab$ e a parte real através de $a^2 - b^2$. De fato, $z = 3 + 4i$ pode ser obtido a partir da aplicação do Teorema ao complexo $2 + i$.

Respondidas as perguntas iniciais, passaremos, no Capítulo seguinte, à atividade proposta de nosso trabalho. Essa atividade contará com a ajuda do software matemático GeoGebra e será aplicada, com diferentes objetivos, em uma turma do Ensino Médio e para alguns alunos da graduação em Matemática.

CAPÍTULO 4

# Atividade Com Alunos do Ensino Médio e Alunos de Graduação em Matemática

Neste capítulo, apresentaremos as atividades realizadas com estudantes do do Ensino Médio e com alunos da graduação em Matemática, tanto de licenciatura quanto de bacharelado. A atividade precisou de adaptações devido ao período de pandemia no ano de 2020. Todas as orientações foram feitas de modo não presencial, utilizando ferramentas digitais de comunicação. O objetivo principal da atividade foi elaborar uma aplicação para os números complexos, fazendo uma relação dos mesmos com os ternos pitagóricos, utilizando o software matemático GeoGebra. Outro objetivo, presente em quase todos os trabalhos que utilizam o GeoGebra, é verificar as potencialidades desse programa em atividades de ensino.

O *software* GeoGebra foi escolhido para a atividade por ser uma ferramenta gratuita e de fácil acesso. Está disponível para uso de forma online, em computador e, também, *smartphone* e possui uma interface fácil de trabalhar, com boa conexão entre álgebra e geometria e proporcionando uma visualização de movimentos dinâmicos. Visto que o GeoGebra é de grande importância para o decorrer e compreensão da prática proposta, vamos iniciar apresentando mais informações sobre essa ferramenta.

## 4.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito, de código aberto, multiplataforma e de matemática dinâmica com interface amigável que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em uma mesma aplicação, atingindo desde a educação básica ao ensino superior. O GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, em 2001, durante a elaboração de sua tese. Segundo o site do Instituto GeoGebra de São Paulo [11], o software é usado em, aproximadamente, 190 países e traduzido para cerca de 55 idiomas. Os institutos foram criados em diversos países para dar suporte à sua utilização.

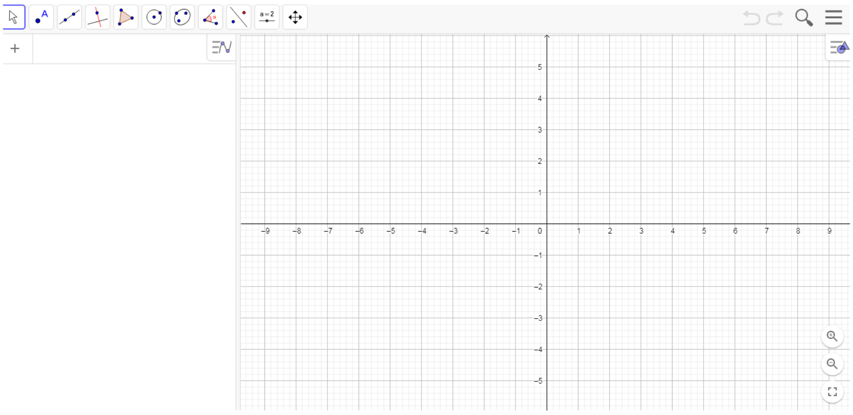

Figura 9 – Tela inicial do GeoGebra.

Os recursos disponibilizados no GeoGebra possibilitam ao usuário fazer conjecturas e investigar soluções para as possíveis indagações surgidas durante o estudo de um conteúdo. Professor e aluno podem, juntos, explorar todas as possibilidades que esse recurso oferece. Alguns trabalhos do PROFMAT, tais como [7], mostram um pouco das ferramentas disponíveis e os recursos mais utilizados. Já o trabalho, também do PROFMAT, [4], traz um exemplo da versatilidade do GeoGebra e de como pode ser utilizado nesta busca pela produção do conhecimento através da investigação. Muitos outros textos de conclusão de cursos da graduação em licenciatura em Matemática, e também de programas de pós graduação, dentre os quais citamos o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEDMAT) da UFOP e de outras instituições, também abordam a utilização do GeoGebra e suas contribuições para o ensino-aprendizagem, como por exemplo [6].

Em nossa atividade, o GeoGebra é de fundamental importância, tendo uma adaptação relativamente simples para atividades realizadas de modo não presencial, e permitindo, com sua dinâmica, que obtenhamos os resultados esperados em menor tempo.

## 4.2 Relacionando números complexos e ternos pitagóricos usando o Geogebra

O ano de 2020 trouxe desafios muito grandes para o nosso trabalho. Em um cenário de pandemia por conta do novo Coronavírus foi preciso que se fizessem adaptações nos métodos de aplicação inicialmente pensados para a atividade prática. Todas as orientações foram feitas respeitando as normas da Organização Mundial de Saúde (O.M.S.) que sugeriu o distanciamento social. A solução para conseguirmos nosso objetivo foi utilizar os meios de comunicação digital. Aplicativos como *Google Meet* e *WhatsApp* foram essenciais nesse cenário pelo qual passamos.

A mesma atividade foi aplicada em dois grupos diferentes de estudantes, com direcionamentos e objetivos distintos, de acordo com a escolaridade de cada um deles. A atividade foi realizada em um único encontro com cada grupo de estudo através de videoconferência utilizando o *Google Meet* como aplicativo de comunicação e o GeoGebra como ferramenta principal de trabalho dos alunos. A mestranda também utilizou quadro branco cuja imagem foi projetada para os alunos quando necessário.

### 4.2.1 Sujeitos e contexto

Os sujeitos deste estudo são dois grupos diferentes de estudantes. O primeiro grupo é formado por dez alunos de uma escola da rede pública estadual de Minas Gerais, situada na cidade de Coronel Fabriciano-MG. Todos os dez alunos participantes fazem parte de turmas do Ensino Regular diurno para as quais a mestranda leciona o conteúdo de matemática. Eles aceitaram o convite para participarem da atividade proposta. Nove desses alunos são concluintes do terceiro ano e um aluno do segundo ano do Ensino Médio e, por conta da pandemia, não puderam estudar o conteúdo de números complexos presencialmente. Além disso, as alterações nos currículos da rede estadual ocorridas durante a pandemia fizeram com que os conteúdos ministrados nas aulas fossem distintos daqueles que normalmente seriam vistos, caso não houvesse a pandemia. Por isso, um grupo de conversa virtual foi criado utilizando o aplicativo *WhatsApp* e aconteceram encontros virtuais extra-curriculares, através do *Google Meet*, para que o tópico números complexos pudesse ser abordado. Dessa forma, puderam desenvolver o conhecimento necessário para o entendimento da atividade proposta. Para eles, o objetivo da atividade foi apresentar uma aplicação dos números complexos e sua relação com os ternos pitagóricos.

O segundo grupo é composto por alunos da graduação em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), sendo dois alunos do Bacharelado e oito alunos da Licenciatura, futuros professores de matemática. Os alunos são de turmas bem diversificadas e estão cursando períodos finais do curso de Matemática. Devido à paralisação das atividades letivas nos meses em que a atividade foi realizada, um grupo de alunos que já haviam cursado disciplinas que abordam conceitos de números complexos na UFOP foi convidado pelos orientadores do trabalho, que também trabalham nos cursos de graduação da UFOP. Dentro desse grupo, os dez já citados aceitaram participar da pesquisa, sendo que três se encontravam na primeira metade do curso e os demais encontravam-se na segunda metade do curso, mais próximos da conclusão. Além disso, seis deles participam do Programa de Educação Tutorial de Matemática da UFOP-PETMAT, outros dois alunos atuam como tutores do Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e uma aluna é bolsista do Programa Residência Pedagógica. Além do mesmo objetivo da atividade feita com os alunos do Ensino Médio, um segundo objetivo, nesse caso, foi trazer reflexões e apresentar as potencialidades do GeoGebra em sala de aula, no caso específico, na atividade que mostra uma aplicação não usual dos números complexos, relacionando-os com os ternos pitagóricos.

### 4.2.2 Roteiro da atividade

**Objetivos:**

• Para os alunos do ensino médio: apresentar uma aplicação dos números complexos para a obtenção de ternos pitagóricos.

• Para os alunos de graduação, além de termos o mesmo objetivo da aplicação da atividade para os alunos do ensino médio, ainda queremos analisar as potencialidades do uso o GeoGebra.

**Conteúdo:** números complexos e ternos pitagóricos.

**Pré-requisitos:** •conceito de ternos pitagóricos, pode ser associado à habilidade EF09MA14, [8]. • operações básicas com números complexos (adição, multiplicação, representação no plano, potenciação de números complexos na forma algébricas), conteúdo contemplado pelo Eixo Temático VII, tópico 37 do CBC mineiro, [14].

**Metodologia:** a atividade foi conduzida pela mestranda, que mediou as discussões de modo a levar os alunos a concluírem que ao quadrado de cada complexo $z = a + bi$, com $a, b$ inteiros, é possível associar-se um triângulo retângulo, de lados inteiros. As medidas desses lados (excetuando-se alguns casos degenerados) correspondem às medidas de um terno pitagórico. O registro da atividade foi feito através da plataforma *Google Meet*, tanto com a gravação quanto com o arquivo com as mensagens de texto. As impressões dos alunos, algumas de suas falas e respostas a perguntas feitas pela mestranda também foram registradas através do *Chat* do *Google Meet* ou através de manifestações durante as aulas. Também foram propostos questionários (ver apêndice) com o objetivo de obter informações sobre as impressões dos participantes acerca da atividade.

**Materiais usados:** GeoGebra, lápis e papel pelos alunos; GeoGebra e quadro pela mestranda; plataforma *Google Meet* para realização e também registro da atividade.

**Tempo estimado**: 120 minutos.

**Descrição da parte da atividade feita com o auxílio do GeoGebra:** para execução da atividade, relataremos os passos e, brevemente, seu objetivo, deixando mais detalhes para a descrição da atividade nas páginas seguintes.

1. Usando o GeoGebra, criar controles deslizantes $a, b$ com incremento 1 e intervalo entre 0 e 3.

   Objetivo: os valores inteiros $a$ e $b$ estarão associados a complexos $z = a + bi$ com coordenadas inteiras. Utilizamos inicialmente valores positivos para facilitar as discussões, mas ao final da atividade retiramos tal limitação dos controles deslizantes.

2. Na caixa de entrada criar os pontos $D(a, b), A(0, 0), B(a, 0)$.

   Objetivo: Representar o complexo $z = a + bi$ no plano, obtendo o ponto $D$. Definimos o ponto $B$ como sendo sua projeção no eixo real e tais pontos, juntamente com a origem, serão os vértices de um triângulo retângulo.

3. Utilizando a ferramenta polígono no quinto botão superior, criar o polígono $ABD$.

   Objetivo: com a ferramenta polígono é possível identificar o triângulo com vértices nos pontos $A, B, D$, obter os segmentos correspondentes aos seus lados e suas respectivas medidas.

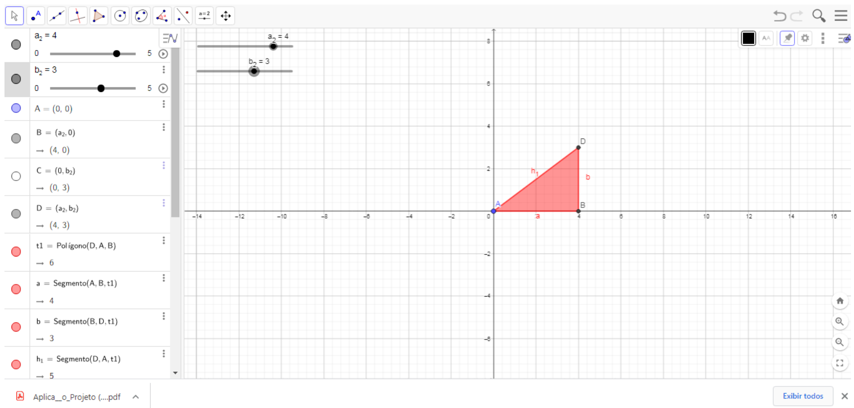


Figura 10 – Representação do polígono $ABD$.

4. Variar os parâmetros $a$ e $b$ e observar o que acontece com o triângulo $ABD$.

   Objetivo: a variação dos valores de $a$ e $b$ permite visualizar todos os triângulos formados utilizando o método descrito no item 2. Permite, também, observar que a medida da hipotenusa dos triângulos formados trata-se de um valor inteiro ou é a raiz de um número inteiro.

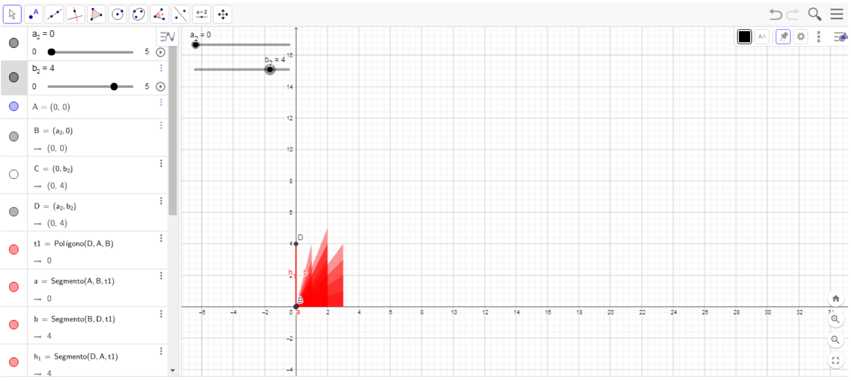

Figura 11 – Representação da variação dos parâmetros $a$ e $b$

5. Na caixa de entrada criar os pontos $G(a^2 - b^2, 2ab)$ e $E(a^2 - b^2, 0)$.

   Objetivo: o ponto $G$ corresponde à representação de $z^2$ no plano, e definimos o ponto $E$ como sua projeção no eixo real. O novo triângulo retângulo terá como vértices os pontos $A, G, E$.

6. Criar o polígono $AEG$.

   Objetivo: utilizando a ferramenta polígono é possível visualizar o triângulo retângulo $AEG$ e identificar as medidas dos segmentos correspondentes aos seus lados.

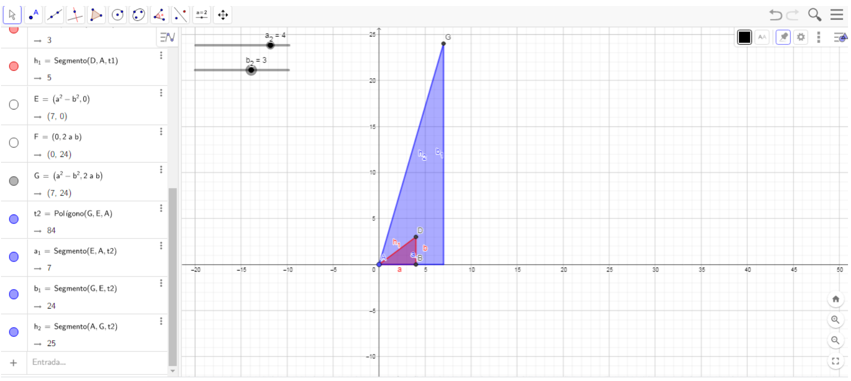

Figura 12 – Representação dos polígonos $ABD$ e $AEG$

7. Variar os parâmetros $a, b$.

   Objetivo: nesse ponto, fazemos a comparação entre as medidas dos lados, principalmente a hipotenusa, dos dois triângulos formados e observamos que o polígono $AEG$ sempre possui medidas inteiras para seus lados. Também é possível perceber para quais valores de $a$ e $b$ o triângulo $AEG$ é degenerado.

**Questionamentos:**

Durante atividades como a nossa, o professor deve estar aberto e mobilizar a participação dos alunos. Dessa forma, nos organizamos para que os alunos fossem incentivados a fazerem perguntas, a interagirem, a indicarem suas dúvidas. Mesmo assim, um roteiro prévio com alguns questionamentos que seriam feitos no decorrer da atividade foi elaborado. As perguntas foram apresentadas aos alunos na medida em que a atividade se desenvolvia, sempre com a mediação da mestranda.

1. Ao representar o primeiro número complexo, as medidas do triângulo retângulo formado por suas projeções nos eixos e pela distância do ponto que o representa à origem, formam ternos pitagóricos?
2. Em caso negativo, o que falta ou o que precisaria mudar para que as medidas correspondam a ternos pitagóricos?
3. Qual operação pode ser feita para que a hipotenusa seja um número inteiro e os catetos continuem inteiros?
4. Quando representamos $z^2$, o triângulo obtido a partir de suas projeções nos eixos e do segmento que une sua representação no plano à origem possui medidas inteiras?
5. Por que alguns triângulos degeneram? Em quais condições não obtemos triângulo?
6. Existem infinitos ternos pitagóricos? Como podemos usar nossa descoberta para responder essa pergunta?

**Comentários:** a atividade foi realizada na modalidade de webconferência usando o aplicativo *Google Meet* em um único encontro para cada grupo de participantes.

## 4.3 Descrição da atividade com os alunos do Ensino Médio

A atividade foi realizada respeitando o distanciamento social, seguindo orientações da OMS devido à pandemia causada pelo novo coronavírus. Na atividade, o orientador da mestranda esteve presente, auxiliando na dinâmica da sala. Como a pesquisadora mestranda é também professora dos alunos, utilizamos indistintamente a indicação mestranda ou professora para nos referirmos a ela na descrição da atividade.

O encontro com os alunos do Ensino Médio da escola pública aconteceu de forma remota, usando o aplicativo para vídeochamada *Google Meet*. Eles foram orientados, anteriormente, a baixarem o aplicativo GeoGebra no celular ou utilizar link para o GeoGebra *online*. Os alunos também receberam orientações através de vídeos explicativos gravados, especificamente para a atividade, mostrando as diversas ferramentas do aplicativo e a forma de utilização.

No início do encontro, os alunos foram orientados a usar tanto o quadro de mensagens (*chat*) quanto o microfone para comunicação. Os recursos utilizados para a aplicação da atividade foram apresentação em *slides*, quadro branco e o software GeoGebra.

O primeiro questionamento lançado a eles foi se conheciam o conceito de ternos pitagóricos. Alguns alunos responderam que sim, porém acreditamos que apenas associaram o nome às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Em seguida, foi apresentada a definição de ternos pitagóricos e foi pedido que eles dessem exemplos. Os alunos citaram os ternos $(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$ e $(12, 16, 20)$. Após esse último terno ser citado, uma aluna questionou se todos os ternos seriam obtidos a partir dos múltiplos de $(3, 4, 5)$, mesmo que o terno $(20, 21, 29)$ já tivesse surgido. A partir dessa pergunta, tentamos explorar a questão da dificuldade que tiveram em pensar em outros trios. Perguntas como "acreditam ser limitada a quantidade de ternos pitagóricos?", "será que existe algum meio mais fácil para encontrarmos os ternos que não são múltiplos de $(3, 4, 5)$?"fizeram com que as respostas se dividissem.

O quadro branco foi usado para que os alunos visualizassem a representação do número complexo $z_1 = 2 + i$ no plano de Argand-Gauss e, a partir daí, associassem um triângulo usando as medidas das projeções do ponto no eixo real, no eixo imaginário e a sua distância à origem como medidas dos lados. O objetivo era perceber que, usando essa associação, o triângulo formado possui medidas inteiras para os catetos.

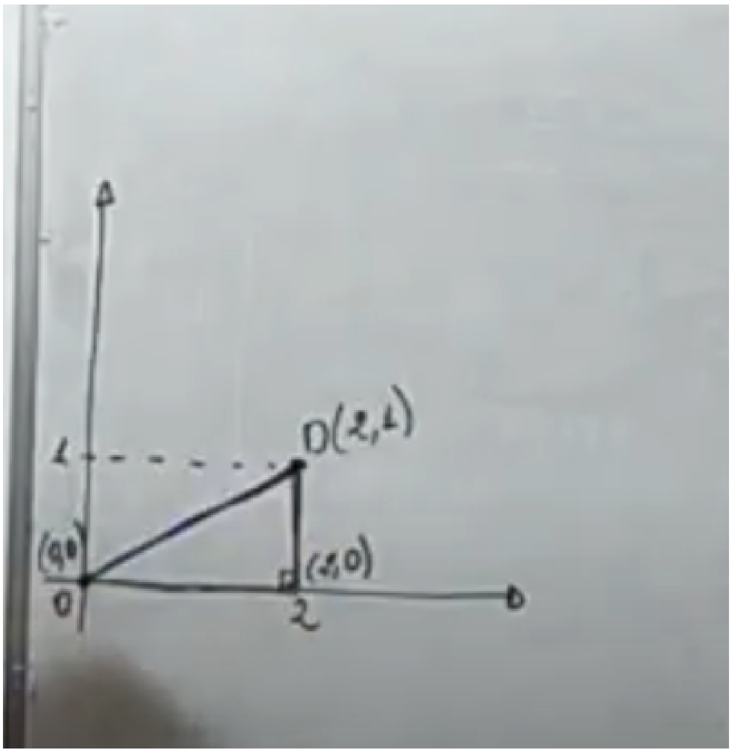


Figura 13 – Ao ponto $z = 2 + i$ foi associado o triângulo retângulo de vértices $(0, 0), (2, 1)$ e $(2, 0)$, cujas medidas dos lados correspondem à distância de $D(2, 1)$ à origem e às medidas da projeção de tal ponto nos eixos.

Em seguida, foi pedido que calculassem a medida da hipotenusa, correspondente à distância do ponto à origem. As três medidas dos lados do triângulo retângulo obtido $2, 1, \sqrt{5}$ foram analisadas e foi perguntado se a sequência de números formava um terno pitagórico. Um dos alunos respondeu que sim e, retomando o conceito dado no início do encontro, ele rapidamente pôde perceber que um dos números era irracional e concluiu que não se tratava de um terno pitagórico.

Foi pedido que os alunos citassem outros números complexos com $a$ e $b$ inteiros para que pudessem ser associados a outros triângulos usando o mesmo processo citado anteriormente. Ainda usando o quadro branco, cada número complexo citado pelos alunos foi listado com a sequência das três medidas dos lados do triângulo associado. Para cada sequência foi perguntado se formava um terno e, quando respondiam que não formavam, outro questionamento era lançado: por que não forma um terno? O que atrapalha? Uma aluna citou o número complexo $3 + 4i$ mostrando que havia percebido que o valor da hipotenusa do triângulo associado a este número é $5$ e as medidas formavam um terno pitagórico.

Todos esses passos foram importantes para que os alunos pudessem compreender a construção do triângulo e, a partir daí, eles foram convidados a usar o GeoGebra para associar outros números complexos a triângulos seguindo os passos 1, 2, 3 e 4 do roteiro da atividade, descrito anteriormente. Ao variar os valores, os alunos foram mais uma vez questionados se as medidas dos lados dos triângulos obtidos formavam ternos. A dinâmica permitida pelo programa e as medidas já apresentadas na janela de álgebra promoveram agilidade às variações. Na janela de álgebra os valores apareciam em decimais e questionamos que valores seriam esses. Os alunos responderam que seriam as raízes relativas às medidas da hipotenusa e observamos que seriam aproximações delas.

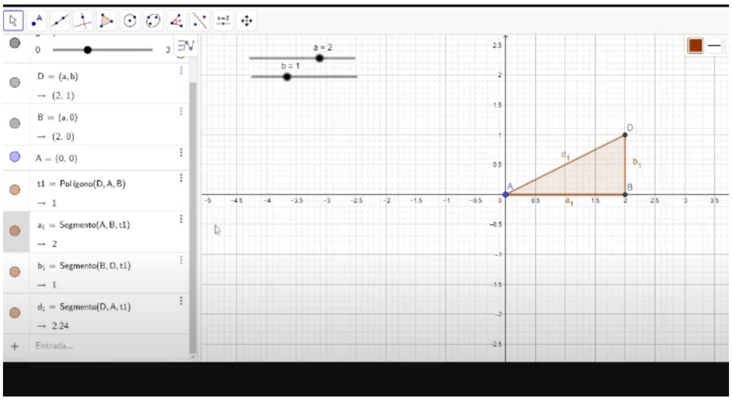


Figura 14 – Construção do triângulo associado ao número complexo $z = a + bi$ usando o GeoGebra, com $a = 2$ e $b = 1$.

Em seguida, foram feitos novamente os questionamentos: Bastaram as duas medidas inteiras dos catetos para formar ternos pitagóricos? Aonde está o problema quando as medidas dos triângulos não formam ternos? Os alunos conseguiram responder que não bastavam duas medidas inteiras para os catetos e que o problema era a hipotenusa ser a raiz de um número inteiro no caso de as medidas não formarem ternos. Com isso, perguntou-se o que poderia ser feito para que essa raiz resultasse em um número inteiro e dois alunos responderam "elevar ao quadrado", o que era esperado. Nesse momento, foi feita a pergunta: Se a medida do lado do triângulo que não é inteira é a hipotenusa, que corresponde à distância do ponto à origem, então para elevar esse valor ao quadrado, precisamos usar qual estratégia? Os alunos sugeriram elevar o número complexo ao quadrado. Para verificação da sugestão, o quadro foi usado para fazer os cálculos com alguns exemplos como $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 6 + i$, $z_3 = 4 + 2i$ e $z_4 = 3 + 4i$, e obtivemos os números complexos ${z_1}^2 = 3 + 4i$, ${z_2}^2 = 35 + 12i$, ${z_3}^2 = 12 + 16i$ e ${z_4}^2 = -7 + 24i$. A estratégia foi fazer, para cada novo número complexo obtido, a representação no plano complexo, a associação ao triângulo retângulo conforme já explicado, para, em seguida, listarmos os valores das medidas dos três lados do novo triângulo.

Um aluno observou que o valor da hipotenusa do triângulo associado a ${z_4}^2$ era 25 porque era o quadrado da hipotenusa do triângulo associado a $z_4$, fazendo assim, a análise esperada da situação. Os alunos puderam analisar que, em todos os exemplos trabalhados, as medidas obtidas dos lados do novo triângulo eram inteiras e, por consequência, formavam os ternos pitagóricos $(3,4,5),(35,12,37)$, $(12,16,20)$ e $(7,24,25)$, respectivamente. Até mesmo para o caso do número complexo $3+4i$, cujas medidas dos lados do triângulo associado correspondia a um terno, tivemos um novo terno obtido a partir de seu quadrado. A pergunta feita nesse momento foi: Tomando um número complexo $z=a+bi$, com $a$ e $b$ inteiros, associando este número a um triângulo com medidas dos lados dadas pelas projeções nos eixos imaginário, real e pela medida da distância do ponto à origem como medidas dos lados, se estas medidas não formarem ternos pitagóricos, fazendo $z^2$ e associando o novo triângulo ao mesmo processo, sempre obteremos medidas inteiras para o novo triângulo? As respostas se dividiram entre sim e não.

Essa indagação fez com que a dinâmica seguisse para a próxima etapa que foi usar o GeoGebra para a construção de outros triângulos associados ao quadrado de um número complexo $z=a+bi$, seguindo as orientações dos passos 5 e 6. Os cálculos para encontrar $z^2$ foram feitos no quadro. Depois disso, cada ponto a ser utilizado como vértice do novo triângulo associado ao número complexo $z^2=a^2-b^2+2abi$ foi identificado e feita sua representação. Os pontos necessários foram $A=(0,0),G=(a^2-b^2,2ab)$ e $E=(a^2-b^2,0)$. Sobre as coordenadas do ponto $G=(a^2-b^2,2ab)$, que representa $z^2$, foi perguntado se eram valores inteiros e os alunos conseguiram observar que se tratavam de valores inteiros uma vez que $a$ e $b\in\mathbb{Z}$. Seguindo o passo 7 do roteiro, os alunos puderam perceber as mudanças que ocorriam durante a variação dos parâmetros $a$ e $b$. A primeira questão apresentada foi: sempre será formado um novo triângulo? Os estudantes rapidamente disseram que não e notaram que para alguns valores os triângulos degeneram. Aproveitando essas respostas, mais uma questão foi feita: em quais condições não obtemos triângulo? Os alunos conseguiram concluir que não se obtém triângulo quando $a=b$, ou ainda, quando $a$ ou $b$ são nulos.

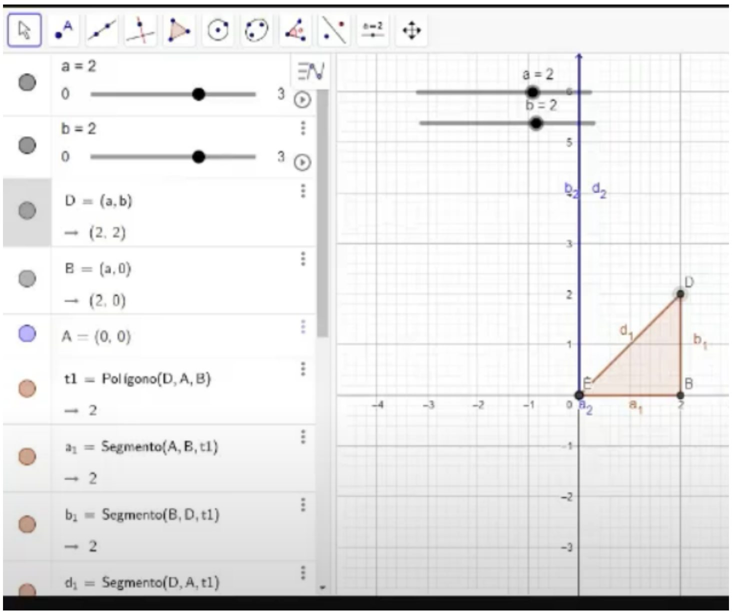


Figura 15 – Representação do triângulo degenerado associado a $z^2$ quando $a = b = 2$.

Os alunos foram instruídos, mais uma vez, a variarem os parâmetros $a$ e $b$ para que pudessem analisar as medidas dos segmentos indicadas na parte lateral esquerda da interface do GeoGebra. Perguntou-se: Quando representamos $z^2$, o triângulo obtido a partir de suas projeções nos eixos e sua distância à origem possui medidas inteiras? A dinâmica e os vários exemplos proporcionados pelo GeoGebra fizeram com que a pergunta que anteriormente havia dividido a turma passasse agora a ter resposta afirmativa dos participantes.

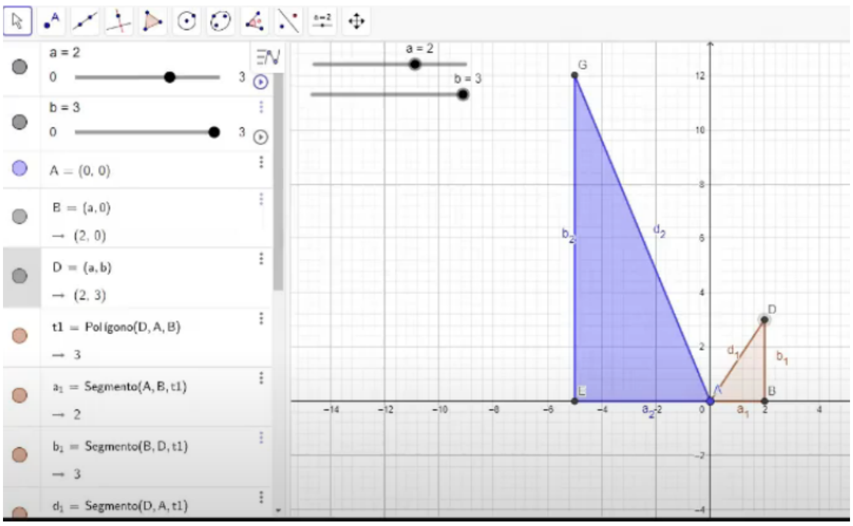


Figura 16 – O triângulo $DAB$ corresponde ao triângulo associado a $z = 2 + 3i$ e o triângulo $GAE$ corresponde ao triângulo associado a $z^2$. Na janela de álgebra temos os valores das medidas dos lados.

Nesse ponto, os alunos foram levados a pensar no porquê de sempre se obterem medidas inteiras para os triângulos formados a partir das projeções nos eixos e distância à origem do ponto que representa $z^2$. Analisando o triângulo associado a $z^2$, desenhado inicialmente no quadro, e efetuando as operações juntamente com a professora, puderam perceber que as medidas dos catetos seriam dadas por $|a^2-b^2|$ e $2|ab|$. Aqui observamos que o GeoGebra já indica na janela de álgebra o valor das medidas dos lados do triângulo, ou seja, já calcula os módulos caso a operação algébrica retorne valores negativos. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras e efetuando os cálculos necessários, mostrou-se que o valor da hipotenusa desse triângulo sempre será dado por $a^2+b^2$. Novamente, os alunos foram questionados se o valor obtido para a hipotenusa seria um valor sempre inteiro e um aluno respondeu, prontamente, que sim por serem $a$ e $b$ valores inteiros, notando os casos degenerados já descritos.

Depois disso, outra questão foi levantada: Tudo o que fizemos até aqui, utilizamos intervalos de valores para $a$ e $b$ entre $0$ e $3$, será que o resultado obtido também é válido para os inteiros negativos? Alguns alunos responderam que sim e foi pedido que usassem o GeoGebra para conferirem a resposta. Usando ainda os mesmos comandos, foi pedido que alterassem os parâmetros dos controles deslizantes $a$ e $b$ para mínimo $-3$ e máximo $3$. Variando mais uma vez os parâmetros concluíram que a descoberta era válida para todos inteiros $a$ e $b$ não nulos.

Para finalizar a atividade, foi pedido que experimentassem sozinhos a descoberta. Pensassem em um número complexo com $a, b \in \mathbb{Z}$ , fizessem sua representação no plano complexo, associando a um triângulo usando como medidas dos lados as projeções e distância do ponto à origem e, caso esse triângulo não tivesse medidas que formassem ternos pitagóricos, deveriam encontrar um terno a partir dele. Uma aluna citou $z = -5 + 7i$ e o número foi representado no quadro. Os alunos identificaram que as medidas dos lados do triângulo associado eram $5, 7, \sqrt{74}$ e observaram que não formavam terno pitagórico. Quando a turma foi questionada sobre como poderiam encontrar um terno a partir de $z = -5 + 7i$, um aluno respondeu que bastava elevar $z$ ao quadrado. Com a orientação da professora, eles conseguiram perceber que era o caminho certo, porém já estava registrado no quadro uma expressão prática e rápida para encontrarem o terno utilizando as medidas encontradas para os lados do triângulo associado a $z^2$, que são $|a^2 - b^2|, 2|ab|$ e $a^2 + b^2$.

Para a resolução da questão apresentada no exemplo dado $z = -5 + 7i$, os alunos foram citando as operações feitas para encontrarem os valores dos catetos do triângulo associado a $z^2$. No momento em que perguntamos qual seria o valor da hipotenusa do triângulo associado a $z^2$, um aluno respondeu rapidamente que tal valor era $74$. Questionado pela mestranda sobre como chegou ao resultado, o aluno respondeu que esse era o quadrado de $\sqrt{74}$, mostrando compreensão do conteúdo trabalhado.

Por fim, chegaram à conclusão da atividade respondendo a uma pergunta feita no início do encontro: a quantidade de ternos pitagóricos é limitada? Uma aluna escreveu nas mensagens que a quantidade de ternos pitagóricos é infinita porque os números naturais são infinitos, mostrando ter compreendido toda a dinâmica.

```
02:08:42.442,02:08:45.442
[redacted] existem infinitos

02:09:34.733,02:09:37.733
[redacted]: os numeros naturais são infinitos
```

Figura 17 – Resposta de uma aluna à questão: a quantidade de ternos pitagóricos é limitada?

Concluímos enunciando o Teorema 3.2, deixando o momento seguinte aberto para dúvidas ou comentários e, também, para que respondessem o questionário em formato de formulário *online*.

Os alunos mostraram-se motivados e interessados durante todo o tempo decorrido no encontro. Conseguiram, com a orientação devida, acompanhar e compreender todo o processo utilizando o GeoGebra. Outras observações e comentários sobre a dinâmica poderão ser vistas no capítulo posterior no qual analisaremos as respostas aos questionários

## 4.4 Descrição da atividade com os alunos da graduação em Matemática

O encontro com os alunos da graduação em Matemática aconteceu na modalidade remota utilizando o aplicativo de comunicação digital *Google Meet*, assim como ocorreu com os alunos de Ensino Médio. Esses alunos já eram familiarizados com as ferramentas disponibilizadas pelo GeoGebra e e receberam um material revisional sobre números complexos. Tal material não era de uso obrigatório, mas relembrou aos que tiveram interesse sobre definições e propriedades básicas no conjunto $\mathbb{C}$. Além da mestranda e dos alunos convidados, também participaram o orientador e o coorientador do trabalho.

O objetivo dessa atividade com esse público foi não só apresentar uma aplicação não usual dos números complexos, relacionando-os aos ternos pitagóricos, mas também fazer uma análise de como o GeoGebra pode agilizar e auxiliar o trabalho do professor em dinâmicas como essa.

O roteiro da aula foi bem parecido com o aplicado à turma do Ensino Médio. Porém, o interessante para eles é o compartilhamento de ideias que podem ser usadas em sala de aula, uma vez que a maioria dos participantes serão futuros professores de matemática. Os alunos da graduação também foram orientados a utilizarem tanto o *chat* disponível pelo aplicativo de videochamada utilizado quanto o microfone para participação. Os recursos utilizados foram apresentação em *slides*, quadro branco e o *software* GeoGebra.

Para iniciarmos a dinâmica, lançamos a pergunta "Você conhece alguma aplicação dos números complexos (dentro ou fora da matemática)? Em caso afirmativo, indique a aplicação". Apresentamos a questão em *slide* e pedimos que a resposta fosse registrada em um formulário *online* cujo *link* foi colocado na caixa de mensagens da videochamada para que fosse acessado. O intuito foi ter registros que possibilitem fazer comparações entre o que sabiam, ou conheciam, sobre o assunto antes e após a realização da atividade. A análise das respostas desse questionário será feita na seção 5.2.

Em seguida, perguntamos se sabiam o conceito de ternos pitagóricos. Uma aluna respondeu que se tratava das medidas dos lados de um triângulo retângulo e outro aluno disse que não se recordava, mas que pensava ser algo relacionado ao Teorema de Pitágoras. Apresentamos a definição 3.1 e enfatizamos o fato de que os três números precisam ser, necessariamente, naturais. Logo após, pedimos que dessem exemplos de ternos. O primeiro terno $(3, 4, 5)$ foi citado com certa rapidez, depois um outro aluno citou que todos os múltiplos desse terno seriam outros exemplos. Aproveitando essa fala, perguntamos se os ternos eram obtidos apenas a partir dos múltiplos do terno citado e eles responderam que não. Porém, quando pedimos que citassem ternos que não fossem múltiplos de $(3, 4, 5)$ eles sentiram certa dificuldade. Perguntamos, então, se a quantidade de ternos era ilimitada, tendo em vista a dificuldade deles em encontrar tais valores. Um dos alunos respondeu que eram infinitos e que para verificar, bastava pensar nos múltiplos do terno $(3, 4, 5)$. Nesse momento, perguntamos se eles conheciam alguma maneira de encontrar ternos pitagóricos que não fossem múltiplos de um terno conhecido e todos responderam que não.

A continuidade da dinâmica foi feita pela mestranda utilizando o quadro para representação geométrica do número complexo $z = 3 + i$, indicada pelo ponto $(3, 1)$ no plano de Argand-Gauss. Foi explicado que a intenção era associar um triângulo retângulo à representação de $z$ de modo que as medidas dos lados desse triângulo retângulo fossem as medidas das projeções do ponto no eixo real, no eixo imaginário e a medida da distância do ponto $(3, 1)$ à origem como valor de cada lado. Para o complexo $z$ dado, foram obtidos como vértices os pontos $(3, 1)$, $(3, 0)$ e $(0, 0)$. Explicamos, também, que a escolha do número complexo $z = 3 + i$, com coordenadas inteiras, foi estratégica para obtenção de catetos com valores inteiros para o triângulo associado utilizando o método descrito.

Após a representação, no quadro, do ponto e do triângulo a ele associado, pedimos que calculassem, rapidamente, a medida da hipotenusa. Com as medidas dos três lados listados $3, 1, \sqrt{5}$, perguntamos se essa sequência formava um terno pitagórico e todos concordaram que não. Em seguida, pedimos que indicassem outros números complexos com as partes real e imaginária inteiras para que pudéssemos fazer a associação do triângulo retângulo do modo já indicado. Uma aluna citou o ponto $(3, 4)$, percebendo que os valores das coordenadas $a$ e $b$ seriam os valores dos catetos e, assim, conseguiríamos obter o terno pitagórico $(3, 4, 5)$. Aqui, como feito com a turma do Ensino Médio, listamos cada número complexo juntamente com as medidas dos lados do triângulo associado para verificar se tais valores formavam ternos pitagóricos. Posteriormente, convidamos os alunos a investigarem se seria uma boa ideia usarmos a tática de pensar em um número complexo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ inteiros, associar $z$ a um triângulo usando as projeções de $D = (a, b)$ nos eixos coordenados e o comprimento de sua distância à origem como medidas dos lados para obter ternos pitagóricos. Para isso, perguntamos aos graduandos quais pontos deveríamos usar como vértices para o triângulo e eles citaram os pontos $D = (a, b)$, $A = (0, 0)$ e $B = (a, 0)$. Então, os alunos foram convidados a utilizarem o GeoGebra e seguirem os passos 1, 2 e 3 que constam no roteiro da atividade descrito na subseção 4.2.2 desse capítulo.

Depois dos passos anteriores concluídos, pedimos que os alunos efetuassem o passo 4 do roteiro, que é variar os parâmetros $a$ e $b$ dos controles deslizantes criados. Alguns dos números complexos obtidos foram $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$, $2 + 3i$ e $3 + i$, que foi o nosso exemplo inicial.

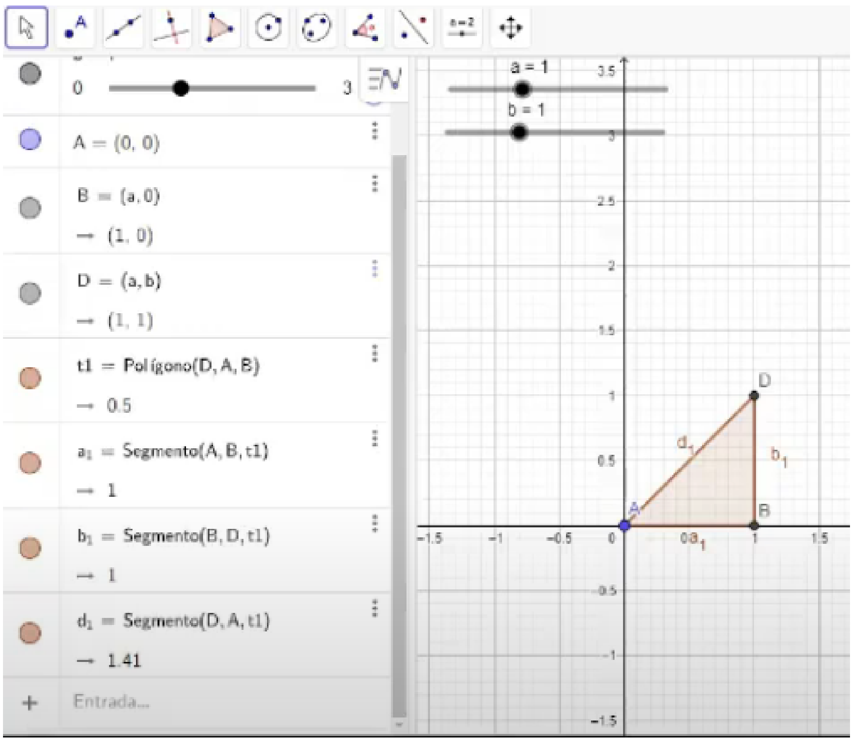


Figura 18 – Representação do triângulo associado ao número complexo $1 + i$.

A cada triângulo obtido, perguntamos se as medidas dos lados formavam ternos pita-

```
00:44:30.496,00:44:33.496
[redacted]: A hipotenusa ao quadrado teria que ser um quadrado perfeito, certo?
```

Figura 19 – Pergunta do graduando feita através da caixa de mensagem.

góricos. Os alunos sabiam que a janela de álgebra do GeoGebra mostra os valores decimais para as medidas não inteiras da hipotenusa, por isso pedimos que fizessem o cálculo dessa medida mentalmente em cada caso. Para todos os números complexos representados, os alunos responderam que as medidas dos lados do triângulo associado não formavam ternos e observaram que todos os valores das hipotenusas encontradas eram raízes não exatas de números inteiros.

Aproveitamos as respostas dos alunos para fazermos outra pergunta: o que impede as medidas formarem ternos pitagóricos?. Alguns alunos responderam que o problema era o fato de a hipotenusa ser uma raiz não exata de número inteiro. Retomamos ao exemplo $z = 3 + i$ e $3, 1, \sqrt{10}$ como as medidas dos lados do triângulo associado. Perguntamos o que poderia ser feito para que $\sqrt{10}$ fosse inteiro, ressaltando que tratava-se do comprimento da distância do ponto que representa $z$ até a origem. Um aluna respondeu que uma opção era elevar as três medidas dos lados ao quadrado e pedimos que fizessem os cálculos para verificarem se essa estratégia atenderia. Um aluno respondeu que sim, pois obteríamos três medidas inteiras. Orientamos que o objetivo é encontrar um terno pitagórico, portanto, os valores precisavam atender ao Teorema de Pitágoras e um outro aluno constatou que os valores obtidos não atendiam o objetivo. Em meio às tentativas para responderem à questão, um dos alunos perguntou se a medida da hipotenusa do triângulo associado ao quadrado sempre seria um quadrado perfeito.

Deixamos que discutissem sobre a dúvida entre os próprios alunos e concluíram que o quadrado da hipotenusa é um quadrado perfeito quando tratar-se de um terno pitagórico.

Voltamos, então, à pergunta: o que fazer para que a medida da hipotenusa fosse um número inteiro? E um dos alunos sugeriu "elevar $3 + i$ ao quadrado". Fizemos o cálculo sugerido obtendo $z^2 = 8 + 6i$. A representação de $z^2$ foi feita no quadro, associando ao triângulo retângulo cujos catetos são as medidas das projeções desse ponto nos eixos coordenados, e a hipotenusa é a medida da distância do mesmo ponto à origem $(8, 6, 10)$. Dessa forma, os alunos puderam observar os triângulos associados a $z$ e $z^2$, bem como os respectivos valores dos lados. Perguntamos se as medidas do triângulo associado a $z^2$ formavam ternos pitagóricos e as respostas de todos foram positivas. Então, questionamos se conseguiríamos obter um terno pitagórico a partir de $3 + 4i$, também citado inicialmente, para o qual já havíamos conseguido o terno $(3, 4, 5)$ com o triângulo associado a esse número complexo. Os alunos não hesitaram em dar uma resposta positiva. Para verificação dessa resposta, efetuamos $(3 + 4i)^2$ e obtivemos o número complexo $(-7 + 24i)$. Representamos esse número e fizemos o mesmo processo obtendo um triângulo associado cujos catetos medem 7 e 24. Para completar o triângulo, pedimos aos alunos que calculassem a medida da hipotenusa. Quando um deles respondeu $25$, perguntamos como havia chegado ao resultado imaginando que ele teria comparado os resultados das hipotenusas do primeiro exemplo. Porém, o aluno respondeu que usou calculadora ao aplicar Teorema de Pitágoras aos valores obtidos para os catetos, formando o terno pitagórico $(7, 24, 25)$.

Indagados sobre o porquê não terem conseguido pensar nesse terno no início da dinâmica, os alunos responderam não se tratar de um terno que apareça com frequência nos exercícios. Então, recapitulando todo o processo o qual nos possibilitou encontrar ternos pitagóricos em ambos os exemplos trabalhados, perguntamos: sempre obteremos medidas inteiras para os lados do triângulo associado a $z^2$? Essa questão deu início ao segundo momento da dinâmica, em que o GeoGebra foi usado para obter outros triângulos associados ao quadrado de um número complexo $z = a + bi$.

O número $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ foi identificado, representado no quadro pela mestranda e associado ao triângulo de vértices $G = (a^2 - b^2, 2ab), A = (0, 0), E = (a^2 - b^2, 0)$. Tudo isso feito com a efetiva participação dos alunos. Foi perguntado, ainda, se as coordenadas de $G$ eram inteiras. Os alunos responderam, sem dificuldade, que sim porque $a$ e $b$ eram inteiros. Esse momento foi importante para que os alunos compreendessem o que vinha a seguir usando o GeoGebra.

Pedimos aos alunos que voltassem ao GeoGebra e seguissem os passos 5 e 6 do roteiro, mantendo o primeiro triângulo construído na tela. Quando todos já estavam prontos, pedimos que variassem os valores dos controles deslizantes, primeiro $a$ e depois $b$. O primeiro questionamento lançado foi: sempre formaremos triângulo usando os pontos $G, A$ e $E$ indicados? Para quais valores de $a$ e $b$ não obtemos triângulo? Os alunos não tiveram dificuldade em observar que não formarão triângulos os casos em que $a = b$ e também quando $a$ ou $b$ nulos.

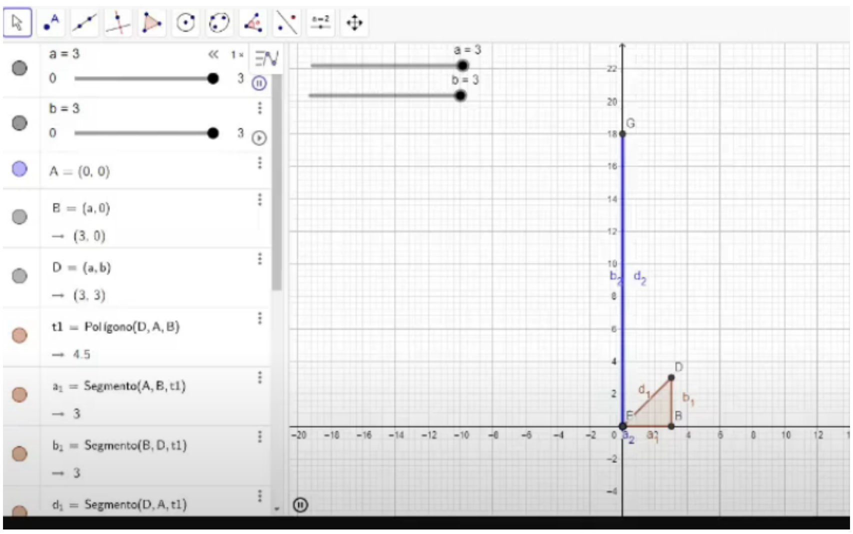


Figura 20 – Representação do triângulo degenerado associado a $z^2$ para o caso $a = b = 3$.

Em seguida, pedimos que observassem as medidas dos lados dos triângulos obtidos e perguntamos: quando se formam triângulos, as medidas de seus lados são inteiras? Variando mais uma vez os parâmetros, os alunos puderam concluir que essas medidas eram inteiras.

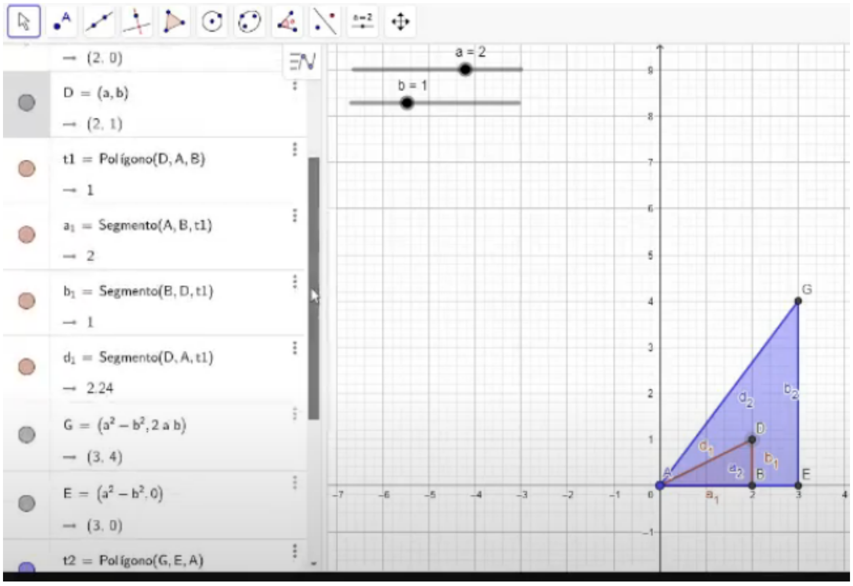


Figura 21 – O triângulo $DAB$ corresponde ao triângulo associado a $z = 2+i$ e o triângulo $GAE$ corresponde ao triângulo associado a $z^2$. Na janela de álgebra temos os valores das medidas dos lados.

"Por que isso acontece?", com essa pergunta o quadro foi usado para mostrar que a associação utilizada permite obter um triângulo com medidas dos catetos iguais a $|a^2 - b^2|$ e $2|ab|$. E que, por consequência, a hipotenusa mede $a^2 + b^2$.

Fizemos então, o mesmo questionamento feito à turma do Ensino Médio: Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ inteiros, tomando o quadrado de $z$ e o associando a um triângulo usando as medidas das projeções nos eixos do ponto obtido com a representação de $z^2$ no plano de Argand-Gauss e a medida da distância desse ponto à origem, as medidas dos lados formarão um terno pitagórico?

A maioria dos alunos respondeu que sim, apenas uma aluna disse que ainda não tinha certeza. Para esclarecer a dúvida, pedimos a ela para citar um número complexo qualquer desde que possuísse partes real e imaginária inteiras. A aluna ficou tímida e não citou o número mas, com a participação dos demais alunos, a representação do número complexo $z = 5 + 11i$, citado por uma outra aluna, foi feita e os valores $5, 11, \sqrt{146}$ foram listados como medidas dos lados do triângulo associado a $z$. Visto que as medidas não formavam um terno pitagórico, perguntamos como poderíamos obter um terno a partir de $z = 5 + 11i$. Um dos alunos respondeu que deveríamos "elevar ao quadrado". Com as devidas orientações, os alunos perceberam que era a estratégia correta, mas utilizar as medidas encontradas para os lados do triângulo associado a $z^2$, que são $|a^2 - b^2|$, $2|ab|$ e $a^2 + b^2$, seria mais prático e rápido. A partir daí, usaram essas expressões para encontrarem o terno $(96, 110, 146)$. Um terno pouco conhecido e que, dificilmente, pensariam.

Perguntamos se a estratégia utilizada para encontrar ternos era válida apenas para os inteiros positivos. Os alunos responderam sim a essa pergunta e, para verificarem, voltaram ao GeoGebra, alteraram os valores mínimos dos controles deslizantes para $-3$. Depois, variaram os parâmetros $a$ e $b$ e constaram que nossa estratégia era válida também para valores inteiros negativos de $a$ e $b$.

Para finalizar, concluímos enunciando o Teorema 3.2, deixando o momento aberto para dúvidas e comentários enquanto respondiam um questionário *online* sobre a atividade. Nesse momento, voltamos à pergunta inicial: você conhece alguma aplicação dos números complexos (dentro ou fora da matemática)? Conversamos com os alunos sobre as respostas que haviam dado e sobre a resposta que dariam após a atividade. É interessante ressaltar que, enquanto aguardávamos que respondessem o questionário, dois alunos comentaram que não estudaram o conteúdo de números complexos durante o Ensino Médio. Outro comentário feito foi de que esse conteúdo é pouco explorado nos livros do Ensino Médio, mesmo sendo uma ferramenta interessante e poderosa.

```
02:01:17.228,02:01:20.228
[redacted]: Difícil pensar nessa explicação pro ensino médio. No meu nem vimos sobre complexos kk

02:02:08.855,02:02:11.855
[redacted]: tbm não vi Complexos no EM rs

02:03:16.963,02:03:19.963
[redacted]: embora tenha estudado no IF, muitos assuntos do EM eu não vi (Complexos, Estatística e Probabilidade, Geo Analítica, Combinatória...) >.<
```

Figura 22 – Imagem do chat no qual os graduandos escreveram seus comentários.

Durante toda a dinâmica, os alunos da graduação demonstraram interesse e foram muito participativos. Acompanharam cada passo efetuado, como parte integrante do processo e mostraram compreensão do conteúdo abordado. Como já conheciam as ferramentas do GeoGebra, não demonstraram dificuldade em seu manuseio fazendo com que as etapas nas quais o *software* fora utilizado, fossem executadas em menos tempo em comparação à turma do Ensino Médio na realização dos mesmos procedimentos. Demais considerações sobre a atividade e o questionário serão feitas na seção 5.2.

CAPÍTULO 5

# Análises das respostas dos alunos aos questionários

Faremos agora a análise das respostas aos questionários respondidos aos alunos durante as duas atividades. Com tais questionários, que podem ser vistos no Apêndice, pretendíamos ter um registro sobre as impressões e opiniões dos participantes em relação às atividades.

A mesma atividade foi proposta a alunos do Ensino Médio e da graduação em Matemática. O objetivo da realização em grada grupo de estudantes foi diferente e, por isso, os questionários disponibilizados de forma *online*, aos quais os dois grupos responderam, também foram distintos.

Para os alunos do Ensino Médio, um único questionário contendo quatro perguntas foi disponibilizado ao final da atividade. O objetivo foi avaliar a receptividade da dinâmica utilizando mídias digitais para o ensino da Matemática verificando qual a opinião dos alunos sobre a atividade proposta utilizando o conceito de números complexos.

Os alunos da graduação foram convidados a responder dois questionários, um no início contendo somente uma pergunta e outro ao final da prática. A pergunta inicial tem a finalidade de investigar se os alunos conheciam diferentes aplicações dos números complexos e a mesma pergunta foi retomada ao final da avaliação para que pudéssemos fazer uma comparação com as respostas do questionário respondido após a dinâmica. O segundo questionário, composto por seis perguntas, tem por objetivo refletir sobre a importância de se mostrar diferentes aplicações envolvendo o conteúdo de números complexos no Ensino Médio, investigar o quanto o GeoGebra pode auxiliar o professor em sala de aula e avaliar a contribuição da atividade para a formação de docentes.

## 5.1 Análise das respostas ao questionário destinado aos alunos do Ensino Médio

Por termos feito a atividade de modo remoto, as transcrições das respostas digitadas pelos alunos em forma de figura ou de fotos da planilha de resposta não trazia nenhuma diferença e, por esse motivo, optamos pela transcrição. Para melhor analisarmos as respostas, os alunos foram nomeados individualmente de $A_1$ a $A_{10}$.

A primeira pergunta tinha por objetivo investigar se os alunos conheciam a relação entre ternos pitagóricos e números complexos.

1. Você esperava que os conceitos de números complexos e de ternos Pitagóricos tivessem alguma conexão?

Nove alunos responderam que não sabiam, sendo que uma aluna também disse que não sabia o que eram ternos pitagóricos até a realização da atividade e que, como comentado no relato das atividades, apenas uma aluna disse sim, mas sem nenhuma explicação adicional.

A segunda pergunta pretendia conhecer a opinião dos alunos sobre a importância da aplicação prática dos números complexos.

2. Após ter estudado os números complexos, você considera importante ter visto uma aplicação desse conceito? Justifique.

Todos os dez alunos consideraram importante conhecer uma aplicação para os números complexos. Abaixo temos as transcrições das respostas dos alunos $A_7$ e $A_{10}$ como exemplo.

$A_7$: Sim, pois com a ajuda da fórmula estudada foi bem mais fácil encontrar novos números.

$A_{10}$: Eu considero importante pois abriu a possibilidade de novos aprendizados.

O fato de os alunos terem aprovado a atividade mostra que nossos objetivos foram atingidos. Consideramos que, além da aplicação em si, o uso de ferramentas de Geometria dinâmica pode ter sido um fator que contribuiu para a avaliação. Isso será visto na resposta à terceira pergunta:

3. Você acha que o uso do GeoGebra facilitou o entendimento/compreensão da Atividade? Justifique sua resposta.

Um dos alunos relatou dificuldade no manuseio do GeoGebra. Os outros nove alunos relataram que o GeoGebra proporcionou uma boa visualização e melhor compreensão da atividade. Abaixo temos as transcrições das respostas de três alunos para ilustrar.

$A_7$: Com certeza, visualizar o que estamos fazendo foi crucial para o entendimento, e a praticidade do software é excelente.

$A_8$: Sim, por ele tivemos uma visualização melhor do que estávamos calculando.

$A_9$: Sim, o GeoGebra ajudou bastante, pois visualizar a imagem ajuda a raciocinar melhor.

A última pergunta visava conhecer a opinião dos alunos sobre a relação apresentada entre ternos pitagóricos e números complexos usando os recursos digitais.

4. De um modo geral, o que achou da atividade? Justifique sua resposta.

Todos os dez alunos responderam que gostaram da atividade de maneira geral. Transcrevemos as justificativas de alguns para exemplificar.

$A_1$: Adorei, muito interessante e o conteúdo é muito gostoso de se fazer.

$A_7$: Foi uma boa experiência e um bom aprendizado, ficou bem claro que com a ajuda do GeoGebra é muito mais fácil encontrar números complexos.

$A_8$: Bem interessante, eu particularmente achei que não iria compreender mas acabei entendendo muito bem.

Analisando as respostas do questionário e a participação dos alunos durante a atividade, observamos que demonstraram uma boa compreensão do conteúdo e que conseguiram fazer afirmações relevantes para a dinâmica desenvolvida. Apesar de terem recebido as orientações apenas por meio de vídeos instrucionais, souberam utilizar bem as ferramentas do GeoGebra.

O fato de a aplicação da atividade com alunos de ensino médio ter sido exitosa fez com que questionássemos sobre a possibilidade de aplicação em sala para os alunos de graduação (em especial para os de licenciatura), como será visto na próxima seção .

## 5.2 Análise das respostas dos questionários destinados aos alunos da graduação em Matemática

Os alunos da graduação responderam a dois questionários e foram nomeados de $G_1$ a $G_{10}$ de forma individual. As respostas foram transcritas diretamente da planilha obtida a partir do formulário *online* no qual responderam as perguntas.

As análises das respostas aos questionários nos levaram a refletir sobre a importância que o professor deve atribuir à abordagem em sala de aula com exemplos que ilustrem as aplicações do conteúdo.

O primeiro questionário, constituído apenas por uma pergunta, foi respondido no início da dinâmica e objetivava saber se os alunos conheciam algumas aplicações dos números complexos e, principalmente, se já conheciam a relação que seria apresentada entre esse conteúdo e ternos pitagóricos .

Para não induzir nenhuma resposta, a pergunta foi feita de modo bastante direto, antes mesmo de iniciarmos a atividade. Os alunos sabiam apenas que o tema com o qual trabalharíamos se tratava de algo relativo a números complexos e sequer o título do trabalho foi informado a eles.

**• Você conhece alguma aplicação dos números complexos (dentro ou fora da matemática)? Em caso afirmativo, indique a aplicação.**

Cinco alunos responderam que não conheciam ou que não se recordavam de nenhuma aplicação dos números complexos, enquanto os outros cinco conseguiram apresentar algumas aplicações. A seguir, temos algumas dessas respostas que representam as opiniões manifestadas majoritariamente pelos participantes.

$G_5$: Conheço as representações geométricas e o uso como cálculo de raiz par de negativos, apenas.

$G_7$: Conheço sim, pela minha monografia eu vi aplicação dos números complexos para provar o teorema dos números primos.

$G_{10}$: Conheço algumas aplicações na Engenharia Elétrica e áreas afins, como Mecatrônica e Automação. Uma das aplicações é na determinação de corrente elétrica alternada.

Observamos que apenas a aplicação citada pelo aluno $G_5$ fez referência a conteúdos do Ensino Médio e que dois daqueles que mostraram alguma resposta, as trouxeram com base em suas graduações prévias (no caso do aluno $G_{10}$ que já é graduado em engenharia) ou em estudos específicos como os apresentados pelo aluno $G_7$.

O segundo questionário foi respondido ao final da atividade. A primeira questão foi:

1. Você já havia imaginado a conexão entre os números complexos e os ternos pitagóricos?

Todos os dez alunos responderam que não haviam imaginado a relação entre os dois conteúdos.

A segunda pergunta abordava o uso de recursos computacionais, como o GeoGebra, como ferramenta para agilizar e auxiliar o trabalho do professor e saber como os alunos agiriam sem essa ferramenta.

2. Como você faria essa atividade com seus alunos sem utilizar o GeoGebra?

A maioria dos alunos relataram que usariam a malha quadriculada e apenas um aluno disse que não saberia como fazer sem utilizar o GeoGebra. As transcrições seguintes exemplificam algumas das soluções citadas pelos alunos.

$G_3$: Utilizando diferentes triângulos com várias medidas para eles calcularem e tirarem suas conclusões usando folha quadriculada e fazendo perguntas.

$G_5$: Tentaria utilizar papel quadriculado, mas a aplicação seria limitada a números pequenos, visto a dificuldade de ter dimensões que extrapolem o papel.

$G_7$: Usando papel quadriculado e régua, pedindo que eles desenhassem.

As respostas dos alunos eram esperadas por nós uma vez que quase todos já possuíam contato com o GeoGebra e suas potencialidades em sala de aula. Vários relatam que seria possível a abordagem sem o programa, mas ressaltam que seria um trabalho mais complicado. Em respostas como as de $G_5$, fica claro que os alunos entendem as potencialidades do uso de programas de geometria dinâmica em sala.

A terceira pergunta visava refletir sobre a praticidade do uso do GeoGebra em atividades como a executada.

3. Você considera que a maneira como a atividade foi proposta, usando o GeoGebra, facilitou seu entendimento? Justifique.

Todos os alunos responderam que a utilização do *software* facilitou a compreensão do conteúdo apresentado.

$G_4$: Sim. O uso do GeoGebra é sempre bem vindo na explicação de qualquer conteúdo aplicável. Facilita muito a visualização e entendimento.

$G_5$: Certamente. O GeoGebra facilita a forma de "mecanizar"e generalizar o processo.

$G_{10}$: Sim. O Geogebra possibilita melhor visualização dos triângulos, além de possibilitar alterar as coordenadas de forma rápida, observando diversos casos. O Geogebra foi muito importante para vermos que $|a|$ tem que ser diferente de $|b|$ e que $a$ e $b$ não podem ser nulos.

As respostas a essa pergunta confirmam as impressões obtidas da análise da questão anterior. Os alunos abordam conceitos como visualização, facilidade de generalização, facilitação de cálculos, dinamismo de movimentos e os associam ao uso do programa.

A pergunta seguinte levou os graduandos a pensarem sobre as práticas em sala de aula, de um modo geral.

4. Você acha que a atividade desenvolvida é adequada para ser aplicada em uma turma de Ensino Médio? Justifique.

Todos os dez alunos concordaram que a atividade é apropriada para aplicação às turmas de Ensino Médio.

$G_7$: Sim, é uma forma interessante de trabalhar números complexos e relacionar dois conteúdos matemáticos, além de instigar o aluno com o uso do software Geogebra.

$G_{10}$:Acredito que seja adequada sim, pois aborda conceitos do ensino médio. No entanto, é necessário verificar questão de tempo, pois, infelizmente, nas escolas é necessário comprimir um currículo grande em poucas aulas.

Com as respostas a essa pergunta pudemos perceber que alguns alunos não estudaram conceitos de números complexos em seu ensino médio e abordaram esse fato nas respostas. Essas respostam também se conectam às impressões que tivemos com os alunos do Ensino Médio e já analisadas na seção anterior.

A próxima pergunta buscava a opinião dos graduandos sobre a atividade, para saber se a mesma é relevante para a formação do docente.

5. Como, em sua opinião, esta atividade contribuiu para a sua formação enquanto futuro professor de matemática?

Todos os alunos ressaltaram contribuições em sua formação. Alguns destacaram a importância de serem trabalhadas mais aplicações dos números complexos. Vejamos, algumas dessas respostas.

$G_6$: Conheci uma aplicação interessante dos complexos e que vou citar nas aulas, pois a falta de conhecimento acerca de conceitos matemáticos pode desmotivar alunos.

$G_8$: Me inspirou a buscar meios alternativos para tornar o ensino mais didático e trouxe uma alternativa para o ensino deste conteúdo, que é na maioria das vezes abstrato.

$G_9$: Foi bem enriquecedor. Pois a proposta nos fornece ferramentas e outro caminho para lidar com um tema que é mais "abstrato".

Observamos que atividades semelhantes podem ser utilizadas em sala com outros tópicos matemáticos e consideramos produtivo que os alnos tenham gostado e considerado a atividade enriquecedora e, até mesmo, inspiradora. Uma das alunas cita sua intenção em utilizar a atividade em sua futura prática como professora.

Para finalizar o questionário, a última questão queria uma opinião geral dos graduandos sobre toda a dinâmica apresentada.

6. De maneira geral, o que achou da atividade proposta? Justifique brevemente sua resposta.

Os alunos, de maneira geral, classificaram a atividade como interessante. Um aluno respondeu que gostaria de ter mais atividades remotas como essa. Outros dois alunos destacaram que a forma pela qual a dinâmica foi conduzida instigou a curiosidade e facilitou a compreensão. Seguem algumas das justificativas.

$G_5$: Achei a atividade bem interessante, pois ela mescla alguns conceitos de geometria com uma aplicação para os números complexos que, acredito eu, seja uma forma atrativa de engajar os alunos com o conteúdo.

$G_3$: Uma atividade que me faz refletir como poderei relacionar e exemplificar as diversas linhas da matemática na sala de aula.

$G_6$: Achei muito interessante, principalmente por não conhecer a aplicação dos números complexos, mas também por relembrar sobre os ternos pitagóricos e ver mais uma forma de usar o Geogebra em sala de aula, pois acredito que o uso da tecnologia na educação pode ser muito interessante.

## 5.3 Comentário geral sobre a atividade

Ao tratas das respostas dos dez questionários e a participação dos alunos do Ensino Médio, percebe-se que a atividade obteve boa recepção e avaliação. Apesar do pouco domínio, por parte dos alunos, do recurso computacional utilizado e o encontro ter acontecido na modalidade remota, o objetivo de apresentar uma aplicação dos números complexos relacionando-os com os ternos pitagóricos foi alcançado.

Os alunos da graduação mostraram-se entusiasmados com a relação apresentada entre os conteúdos abordados. Três dos alunos falaram, ao final da dinâmica, que não estudaram o conteúdo de números complexos durante o Ensino Médio. Entre eles, uma graduanda revelou que a aplicação desse conteúdo era uma dúvida persistente desde o seu estudo na graduação.

01:55:16.727,01:55:19.727
[redacted] Agora sim

01:55:33.062,01:55:36.062
[redacted]: E era uma dúvida minha desde o 1° periodo hahaha

Figura 23 – Comentário da graduanda sobre a atividade.

Analisando as respostas dos graduandos, percebe-se a crença de que a aplicação de um conteúdo matemático torna a sua compreensão mais fácil. Principalmente, quando o assunto é considerado abstrato, como é o caso dos números complexos.

Alguns trabalhos do PROFMAT também fizeram aplicação de atividades com alunos do ensino médio como, por exemplo, [4] e outros como [7], fizeram com futuros professores. Em nosso trabalho, optamos por aplicar a atividade para os dois grupos e pudemos analisar a receptividade em ambos.

As impressões dos graduandos foram produtivas e ficamos satisfeitos com a intenção dos mesmos citarem a pretensão de utilizar nossas ideias na prática enquanto professores. Esperamos ter contribuído para a formação desses futuros profissionais. A boa receptividade dos alunos do ensino médio mostra a necessidade de mais atividades práticas em sala de aula, principalmente, quando o conteúdo é considerado abstrato.

# CAPÍTULO 6

# Considerações finais

Nesse estudo, pudemos contribuir para a formação de futuros professores de Matemática e alunos do Ensino Médio, propondo uma atividade que utiliza os números complexos para encontrar ternos pitagóricos, apresentando uma aplicação inusual desse conjunto numérico.

O cômputo fundamentado pelas falas e respostas dadas ao questionário, tanto dos alunos do Ensino Médio quanto da graduação, mostra que esse tipo de atividade é interessante para a boa compreensão de conteúdos em sala de aula porque uma aplicação de um assunto considerado abstrato facilita o entendimento por parte do aluno.

O estudo também mostrou que o uso dos recursos computacionais, como o GeoGebra, pode agilizar o trabalho do professor em sala de aula e motivar o aluno a ser parte do processo da sua própria aprendizagem.

O nosso grande desafio na aplicação dessa atividade foi manter o interesse dos alunos durante todo o processo. Havia a necessidade de que a dinâmica fosse concluída em apenas um encontro remoto, tendo em vista o cenário de pandemia e paralisação das aulas presenciais das escolas de educação básica e universidades. Havia, também, o receio de que a falta de contato humano prejudicasse a participação e compreensão por parte dos alunos. E, por assim ser, foi preciso elaborar um roteiro em que buscamos o diálogo com o aluno, fazendo-o questionar e deduzir as etapas de cálculos que resultaram na expressão que possibilita encontrar ternos pitagóricos a partir de um determinado número complexo. O uso do GeoGebra agilizou e facilitou todo o processo. O que observamos pelas respostas dos participantes dadas aos questionários, é que nosso objetivo, em cada grupo, foi alcançado.

Quanto à minha experiência pessoal, pude retomar e aprofundar conteúdos vistos na disciplina Aritmética do PROFMAT que foram essenciais para a fundamentação do resultado principal apresentado no Capítulo 2. Através desse trabalho pude conhecer e estudar a relação entre ternos pitagóricos e números complexos. Foi possível constatar que a relação é simples e pode ser trabalhada com turmas do Ensino Médio. Percebi a necessidade de pesquisar mais aplicações e práticas que possam ser usadas em sala para conteúdos que geralmente são apresentados de modo teórico sem muitas aplicações. Em minha experiência profissional, usava poucas vezes o GeoGebra e vim a aprofundar os conhecimentos sobre suas ferramentas durante o curso PROFMAT. Desde então, já inseri o uso em meus planos de aulas porque percebi o quão útil é para o professor e o quão é compreensível para o aluno quando um conteúdo é trabalhado com o auxílio desse *software*. A oportunidade de aplicar a mesma atividade para meus alunos do Ensino Médio e para os alunos da graduação, proporcionou um amadurecimento profissional. Pude refletir sobre minhas práticas pedagógicas buscando um melhor resultado para a aprendizagem de meus alunos e pude participar de um processo o qual espero que tenha contribuído para a formação de futuros professores.

No decorrer do curso PROFMAT, pude experimentar, novamente, a cadeira de discente, e refletir o quanto as minhas práticas pedagógicas podem influenciar na aprendizagem de meus alunos. Reviver esse cenário fez com que eu renovasse minhas expectativas e abrisse horizontes frente aos desafios que a educação traz. Compartilhei experiências profissionais e pessoais proporcionando um enriquecimento particular em muitos aspectos.

# APÊNDICE A

# Apêndice

Questionários através dos quais foram obtidas as percepções dos alunos do Ensino Médio e dos graduandos em Matemática acerca da atividade.

**Questionário respondido pelos alunos do Ensino Médio.**

1. Você esperava que os conceitos de número complexo e de ternos Pitagóricos tivessem alguma conexão?
2. Após ter estudado os números complexos, você considera importante ter visto uma aplicação desse conceito? Justifique.
3. Você acha que o uso do GeoGebra facilitou o entendimento/compreensão da Atividade? Justifique sua resposta.
4. De um modo geral, o que achou da atividade? Justifique sua resposta.

**Questionário inicial respondido pelos alunos da graduação.**

• Você conhece alguma aplicação dos números complexos (dentro ou fora da matemática)? Em caso afirmativo, indique a aplicação.

**Questionário respondido pelos alunos da graduação ao final da atividade.**

1. Você já havia imaginado a conexão entre os números complexos e os ternos pitagóricos?
2. Como você faria essa atividade com seus alunos sem utilizar o GeoGebra?
3. Você considera que a maneira como a atividade foi proposta, usando o GeoGebra, facilitou seu entendimento? Justifique.

4. Você acha que a atividade desenvolvida é adequada para ser aplicada em uma turma de ensino médio? Justifique.

5. Como, em sua opinião, esta atividade contribuiu para a sua formação enquanto futuro professor de matemática?

6. De maneira geral, o que achou da atividade proposta?Justifique brevemente sua resposta.

# Referências

[1] G. M. Aigner, M.; Ziegler. *As provas estão n'O livro*. Edgard Blücher, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 20.

[2] U. C. Boyer, C. B.; Merzabach. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019. Citado na página 37.

[3] D. R. Brittes. *Números primos como soma de dois quadrados*. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2014. Citado na página 12.

[4] I. C. S. Cardoso. *Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução: uma proposta para futuros professores do Ensino Médio*. Universidade Federal de Ouro Preto (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Brasil, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 12, 56 e 82.

[5] W. N.; Littlejohn L. L. ; Vorster S. J. R. Clarke, F. W.; Everitt. *HJS Smith and the Fermat two squares theorem*. *The American Mathematical Monthly*, 106(7):652–665, 1999. Citado na página 15.

[6] M. A. Cometti. *Discutindo o ensino de integrais múltiplas no cálcuo de várias variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem*. Universidade Federal de Ouro Preto (Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Brasil, 2018. Citado na página 56.

[7] T. M. G. Conceição. *Lápis, papel, GeoGebra e a Fórmula de Bháskara: uma experiência com alunos do nono ano*. Universidade Federal de Ouro Preto (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Brasil, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 12, 56 e 82.

[8] BRASIL-Ministério da Educação-Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular, 2018. www.basenacionalcomum.mec.gov.br/abase.html[Online; accessado em 16 de março de 2021]. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 58.

[9] C. M. Da Silva. *Propriedades aritméticas e geométricas das ternas pitagóricas*. Universidade Federal de Feira de Santana (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2014. Citado na página 12.

[10] L. R. Dante. *Matemática contexto aplicações*, volume 3. Ática, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 40.

[11] Instituto GeoGebra de São Paulo; Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias (PUC-SP). *Sobre o GeoGebra*, 2020. www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html[Online; accessado em 05 de novembro de 2020]. Citado na página 56.

[12] D. S. Debortoli. *Números que podem ser escritos como soma de dois quadrados de números naturais*. Universidade Federal de Santa Catarina (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 22.

[13] L. E. Dickson. *History of the theory of numbers: diophantine analysis*, volume 2. Courier Corporation, 2013. Citado na página 15.

[14] CBC-Currículo Básico Comum-Secretaria do Estado da Educação de Minas Gerais. Currículo básico comum- ensino médio, 2007. www.curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/cbc.html[Online; accessado em 16 de março de 2021]. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 58.

[15] R. Gomes. *Números Complexos e Polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra*. Universidade Federal de Goiás (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 48.

[16] A. M. Gonçalves. *Geometria Aritmética: triplas pitagóricas e números que são soma de dois quadrados*. Universidade Federal de Mato Grosso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2016. Citado na página 12.

[17] G. H. Hardy. *A mathematician's apology*. Cambridge University Press, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 35.

[18] A. Hefez. *Aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 16, 18, 19 e 20.

[19] G. Iezzi. *Matemática ciência e aplicações*, volume 2. Atual, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.

[20] P. S. C. Lôbo. *Números inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados*. Universidade Estadual do Ceará (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Brasil, 2015. Citado na página 11.

[21] P. C. P Morgado, A. C.; Carvalho. *Matemática Discreta*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 27.

[22] H. R. Pereira. *Números Complexos, Equações Algébricas, Transformação de Mobius*. Universidade Federal de Goiás (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 48.