

DANIELA ALONSO BOTELHO

SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS
DE PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O
ENSINO DOS PRINCÍPIOS
MULTIPLICATIVO E ADITIVO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Dezembro 2020

DANIELA ALONSO BOTELHO

SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE
PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO
DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Dezembro 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

B748

Botelho, Daniela Alonso.

SALA DA AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE PANDEMIA : UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO / Daniela Alonso Botelho. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2020.

211 f. : il.

Bibliografia: 133 - 139.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.

Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.

1. Análise Combinatória. 2. Princípios Multiplicativo e Aditivo. 3. Sala de Aula Invertida. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.


CDD - 510

DANIELA ALONSO BOTELHO

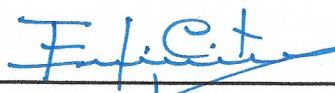
**SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE
PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO
DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

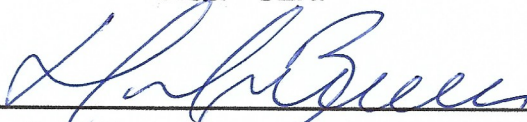
Aprovada em 16 de dezembro de 2020.



Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF



Profª. Elba Orocía Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF



Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF



Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho à minha mãe e ao meu padrasto, os maiores incentivadores nos meus estudos. Em especial à minha filha, minha maior inspiração para perseverar e vencer os desafios.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me proporcionou chegar até aqui, mostrando-me que posso ir mais longe que acreditava ser capaz.

Em especial à minha filha, Maria Luiza, que apesar de ainda não mensurar a importância dessa trajetória, foi minha principal motivação para persistir na busca pelo crescimento profissional.

À minha mãe Edima e ao meu padrasto Antônio pelo suporte emocional, nos momentos mais difíceis, pelo incentivo e por acreditarem no meu potencial.

Aos meus irmãos Nathália e Junio por compreenderem minha falta de envolvimento nas reuniões familiares e por me incentivarem a não desistir ao longo da caminhada.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática que contribuíram na construção dos meus conhecimentos. Em especial, ao meu orientador, professor Oscar Alfredo Paz La Torre, por todo o apoio oferecido, durante a orientação, pelos esclarecimentos e pelas críticas construtivas. Obrigada pela paciência em me ouvir e me tranquilizar nos momentos mais difíceis, tornando essa etapa final menos árdua.

Aos meus colegas de turma pela troca de conhecimentos, ao longo do curso, e pelos momentos agradáveis que compartilhamos, em especial Silvana e Willian com quem dividi, nessa reta final, momentos de ansiedade e insegurança.

Aos meus amigos que me incentivaram durante esse tempo. Em especial a Isabela, pelas palavras de conforto que me tranquilizaram nas horas de ansiedade e Jonatas que passou incontáveis horas ouvindo minhas lamentações, sempre dando apoio, motivando e dividindo suas experiências em relação ao curso.

À sociedade Brasileira de Matemática-SBM e à UENF pela oferta desse curso. A todos aqueles que, direta ou indiretamente, cooperaram para a realização desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A educação é um processo social, é desenvolvimento.
Não é a preparação para a vida, é a própria vida.”

John Dewey

Resumo

A Análise Combinatória tem sido apontada, por alunos e professores, como um tema matemático difícil de ensinar e aprender. Seu processo de ensino-aprendizagem apresenta dificuldades, pois nem sempre ocorre de forma gradual, durante todo o período de escolarização e, geralmente, está atrelado ao uso de fórmulas. Além disso, estudos apontam a necessidade de novas metodologias de ensino que contemplem a participação ativa dos alunos e que melhor atendam às necessidades da sociedade moderna, altamente conectada. Nesse contexto, destaca-se, neste trabalho, a Sala de Aula Invertida que faz parte do grupo de Metodologias Ativas como uma possível estratégia para potencializar o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos iniciais de Análise Combinatória que devem ser abordados nos anos finais do Ensino Fundamental II. Tendo em vista o exposto, a presente pesquisa tem por objetivo investigar, através da percepção dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como uma proposta didática baseada na metodologia Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. A partir dessa premissa, uma pesquisa com abordagem qualitativa é executada, por meio de intervenção pedagógica. Os dados foram coletados e registrados no diário de campo, após observação da pesquisadora, durante a realização das atividades propostas; do questionário e das avaliações diagnóstica e de aprendizagem. Em decorrência do cancelamento das atividades escolares presenciais, devido à pandemia da COVID-19, a proposta didática foi aplicada por meio do ensino remoto, com adoção de aulas *on-line* síncronas, em substituição às presenciais. Diante disso, verifica-se que a metodologia Sala de Aula Invertida promoveu a participação ativa do público-alvo e uma melhora do trabalho em equipe, contribuiu para que os participantes se tornassem mais autônomos e oportunizou o suporte de forma mais direcionada ao grupo com mais dificuldade. Constata-se que essa metodologia pode contribuir, de forma significativa, para o processo de ensino-aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chaves: Análise Combinatória; Princípios Multiplicativo e Aditivo; Sala de Aula Invertida.

Abstract

The Combinatory Analysis has been pointed out, by students and teachers, as a tough mathematical theme of teaching and learning. Its teaching-learning process presents difficulties, as it does not always occur gradually, during the entire period of schooling, and is usually linked to the use of formulas. In addition, studies point to the need for new teaching methodologies that contemplate the active participation of students and that better meet the needs of modern, highly connected Society. In this context, in this work, the Inverted Classroom which is part of the Active Methodologies group as a possible strategy to enhance the teaching-learning process of the initial concepts of Combinatory Analysis that must be discussed in the final years of the Elementary School II. In view of the above, this research aims to investigate, through the perception of 9th grade students, how a didactic proposal based on the Inverted Classroom methodology can contribute to the teaching and learning process of the Multiplicative Principles and Additive. Based on this premise, a research with a qualitative approach is performed, through pedagogical intervention. Statistical data were collected and recorded in the field diary, after observation by the researcher, during the activities; questionnaire and diagnostic and learning assessments. As a result of the cancellation of face-to-face school activities, due to the COVID-19 pandemic, the didactic proposal was applied through remote education, with the adoption of synchronous online classes, replacing the face-to-face ones. Therefore, it turns out that the Inverted Classroom methodology promoted the active participation of the target audience and an improvement in team work, contributed to the participants becoming more autonomous and provided support in a more targeted way to the group with more difficulties. It appears that this methodology can contribute, in a significant way, to the teaching-learning process of the Multiplicative and Additive Principles for students of the final years of Elementary School.

Key-words:Combinatory Analysis; Multiplicative and Additive Principles; Inverted Classroom.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação do Princípio Aditivo da Contagem	26
Figura 2 – Página inicial da plataforma <i>Khan Academy</i> na <i>web</i>	31
Figura 3 – Página inicial do aluno	32
Figura 4 – Domínio de Unidade	33
Figura 5 – Pontuações das recomendações	34
Figura 6 – Comparação dos recursos do <i>Meet</i> por edição do <i>Education</i>	35
Figura 7 – Exemplo de turmas criadas no <i>Google Sala de Aula</i>	37
Figura 8 – Página de atividade do <i>Google Sala de Aula</i>	38
Figura 9 – Princípios básicos que constituem as metodologias ativas	39
Figura 10 – Sala de Aula Invertida	43
Figura 11 – Primeira questão da atividade 1	62
Figura 12 – Terceira questão da atividade 1	63
Figura 13 – Quinta questão da atividade 1	64
Figura 14 – Vídeo “Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela”	65
Figura 15 – Primeira questão da atividade 3	67
Figura 16 – Item (a) da terceira questão – atividade 3	68
Figura 17 – Itens (b) e (c) da terceira questão – atividade 3	68
Figura 18 – Vídeo “Contagem de resultados usando diagrama de árvore”	70
Figura 19 – Vídeo “Como contar os resultados: vasos de flores”	70
Figura 20 – Exemplo da recomendação “O princípio da contagem”	71
Figura 21 – Terceira, quarta e quinta questões da atividade 5	72
Figura 22 – Sexta questão da atividade 5	73
Figura 23 – Sétima questão, da atividade 5	73
Figura 24 – Vídeo “Princípio aditivo - Análise combinatória - Aula 02”	74
Figura 25 – Vídeo “Análise Combinatória - Princípios aditivo e multiplicativo”	75
Figura 26 – Primeira questão da atividade 7	76
Figura 27 – Segunda questão da atividade 7	76
Figura 28 – Quarta questão da atividade 7	76
Figura 29 – Quinta questão da atividade 7	77
Figura 30 – Sétima questão da atividade 7	77

Figura 31 – Primeira questão da avaliação diagnóstica	80
Figura 32 – Segunda questão da avaliação diagnóstica	80
Figura 33 – Resolução sem conclusão do aluno A6 para a segunda questão da avaliação diagnóstica 1	80
Figura 34 – Terceira questão da avaliação diagnóstica	81
Figura 35 – Afirmação do aluno A2 para a terceira questão da avaliação diagnóstica 1	81
Figura 36 – Quarta questão da avaliação diagnóstica	81
Figura 37 – Quinta questão da avaliação diagnóstica	81
Figura 38 – Conversa com os alunos no grupo de <i>WhatsApp</i> da turma	82
Figura 39 – Sugestão do professor P1, em relação à segunda questão da atividade1	84
Figura 40 – Sugestão do professor P4 sobre a segunda questão, da atividade 1	84
Figura 41 – Segunda questão da atividade 1, antes da alteração	84
Figura 42 – Segunda questão da atividade 1, após a alteração	85
Figura 43 – Sugestão do professor P3 em relação ao item (b) da terceira questão - atividade 1	85
Figura 44 – Sugestão do professor P5 em relação ao item (b) da terceira questão - atividade 1	85
Figura 45 – Terceira questão, item (b), da atividade 1, antes das alterações	86
Figura 46 – Terceira questão, item (b) da atividade 1, após as alterações	86
Figura 47 – Sugestão do professor P4 em relação à segunda questão da atividade 5	87
Figura 48 – Segunda questão da atividade 5 antes da alteração	87
Figura 49 – Segunda questão da atividade 5, após a alteração	87
Figura 50 – <i>Kits</i> disponibilizados aos alunos	89
Figura 51 – Reuniões simultâneas no <i>Google Meet</i>	89
Figura 52 – Resolução correta da primeira questão - atividade 1, pelo grupo A	91
Figura 53 – Manipulação do material do <i>kit</i> 1 pelos grupos A e B, nesta ordem	92
Figura 54 – Formação dos anagramas pelos grupos A e B, nesta ordem	92
Figura 55 – Resolução correta da terceira questão - atividade 1, pelo grupo B	93
Figura 56 – Resolução correta da quarta questão – atividade 1, pelo grupo A	94
Figura 57 – Resolução incorreta do item (b) da quarta questão – atividade 1, pelo grupo B, antes da intervenção da pesquisadora	94
Figura 58 – Quinta questão da atividade 1	95
Figura 59 – Manipulação do <i>kit</i> 4 por uma aluna do grupo B	95
Figura 60 – Resolução incorreta dos itens (a) e (b) da quinta questão – atividade 1, pelo grupo A	96
Figura 61 – Resolução correta dos itens (a) e (b) da quinta questão – atividade 1, pelo grupo B	97
Figura 62 – Postagem da atividade 2 no <i>Google Sala de Aula</i>	99
Figura 63 – Material para recorte anexo à atividade 3	101

Figura 64 – Tentativa inicial de resolução do item (a) da primeira questão – atividade 3, pela aluna A3	102
Figura 65 – Construção correta do diagrama de árvore do item (a) da primeira questão – atividade 3, pelo grupo A	102
Figura 66 – Resolução correta dos itens (b) e (c) da primeira questão – atividade 3, pelo grupo B	103
Figura 67 – Questão 2 da atividade 3	103
Figura 68 – Construção correta do diagrama de árvore do item (a) da segunda questão – atividade 3, pelo grupo B	104
Figura 69 – Resolução correta da terceira questão – atividade 3, pelo grupo A	105
Figura 70 – Momento de discussão sobre as questões da <i>Khan Academy</i>	106
Figura 71 – Recomendação da atividade 4 na <i>Khan Academy</i>	106
Figura 72 – Primeira questão da recomendação “O princípio da contagem”	107
Figura 73 – Segunda questão da recomendação “O princípio da contagem”	108
Figura 74 – Questão 3 da recomendação “O princípio da contagem”	108
Figura 75 – Quarta questão da recomendação “O princípio da contagem”	109
Figura 76 – Resolução correta da terceira questão – atividade 5, pelo grupo B	110
Figura 77 – Resolução correta da quinta questão – atividade 5, pelo grupo A	111
Figura 78 – Resolução correta da sexta questão – atividade 5, pelo grupo B	113
Figura 79 – Resolução correta da sétima questão – atividade 5, pelo grupo A	114
Figura 80 – Problema elaborado pela aluna A4 – grupo A	115
Figura 81 – Problema transcrito pela aluna A7 – grupo B	116
Figura 82 – Postagem da atividade 6 no mural da turma no <i>Google Sala de Aula</i>	118
Figura 83 – Resumo postado pelo aluno A2	118
Figura 84 – Comentários sobre o resumo postado pela aluno A2	119
Figura 85 – Resolução incompleta da primeira questão – atividade 7, pelo grupo B	120
Figura 86 – Resolução correta da terceira questão – atividade 7, pelo grupo A	121
Figura 87 – Resolução correta da quarta questão – atividade 7, pelo grupo B	121
Figura 88 – Resolução correta da quinta questão – atividade 7, pelo grupo A	122
Figura 89 – Resolução correta da sexta questão – atividade 7, pelo grupo A	123
Figura 90 – Resolução correta da sétima questão – atividade 7, pelo grupo B	123
Figura 91 – Momento destinado à discussão das resoluções da atividade 7	124
Figura 92 – Brinde oferecido aos alunos pelo empenho na realização das atividades	125
Figura 93 – Comentário dos alunos sobre o modelo de aula que preferem	128
Figura 94 – Comentário dos alunos sobre a Sala de Aula Invertida	128

Lista de quadros

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes à Análise Combinatória abordados no Ensino Fundamental	25
Quadro 2 – Trabalhos Relacionados	50
Quadro 3 – Cronograma do desenvolvimento das atividades	60
Quadro 4 – Momento síncrono 1	61
Quadro 5 – Momento assíncrono 1	65
Quadro 6 – Momento síncrono 2	66
Quadro 7 – Momento assíncrono 2	69
Quadro 8 – Momento síncrono 3	71
Quadro 9 – Momento assíncrono 3	74
Quadro 10 – Momento síncrono 4	75

Lista de gráficos

Gráfico 1 – Número de acertos por questão da avaliação diagnóstica	83
Gráfico 2 – Número de acertos por questão do Teste de aprendizagem	100
Gráfico 3 – Número de acertos por questão da avaliação de aprendizagem	127

Lista de abreviaturas e siglas

AVA	Ambiente virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEE	Conselho Estadual de Educação
CNE	Conselho Nacional de Educação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
Ideb	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OBMEP	Olimpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

Sumário

Introdução	17
1 REFERENCIAL TEÓRICO	21
Aporte teórico	21
1.1 O estudo de Análise Combinatória	21
1.1.1 O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Fundamental	23
1.2 Conceitos básicos da Análise Combinatória	26
1.2.1 O Princípio Aditivo da Contagem	26
1.2.2 O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC)	27
1.3 As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação	28
1.3.1 A Khan Academy	31
1.3.2 O <i>Google Meet</i>	34
1.3.3 O <i>Google Sala de Aula (Google Classroom)</i>	36
1.4 Metodologias Ativas	38
1.4.1 A Sala de Aula Invertida	42
1.5 Trabalhos Relacionados	47
1.5.1 Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental	47
1.5.2 O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	48
1.5.3 Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental	49
1.6 Materiais manipuláveis no ensino de Matemática	51
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS	53
Aspectos Metodológicos	53
2.1 Caracterização da Pesquisa	53
2.2 A pandemia de COVID-19	55
2.2.1 Educação em tempos de pandemia	55
2.3 O espaço escolar	57
2.4 O público-alvo	57
2.5 Etapas da Pesquisa	58

2.6	A avaliação diagnóstica	58
2.7	A proposta didática	59
2.7.1	Detalhamento da proposta didática	60
2.7.1.1	Momento síncrono 1	61
2.7.1.2	Momento assíncrono 1	64
2.7.1.3	Momento síncrono 2	66
2.7.1.4	Momento assíncrono 2	69
2.7.1.5	Momento síncrono 3	71
2.7.1.6	Momento assíncrono 3	73
2.7.1.7	Momento síncrono 4	75
2.7.1.8	Momento síncrono 5	78
2.8	Elaboração dos questionários	78
3	ANÁLISE DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA E O TESTE EXPLORATÓRIO DA PROPOSTA DIDÁTICA	79
3.1	Aplicação e análise dos resultados da avaliação diagnóstica	79
3.1.1	Teste exploratório	83
3.1.1.1	Análise do questionário dos professores	83
4	EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS DA PRO- POSTA DIDÁTICA	88
	Experimentação e análise de dados da proposta didática	88
4.1	Momento síncrono 1	90
4.1.1	Experimentação da atividade 1 (síncrona)	90
4.2	Momento síncrono 2	98
4.2.1	Experimentação da atividade 2 (assíncrona)	99
4.2.2	Experimentação da atividade 3 (síncrona)	100
4.3	Momento síncrono 3	105
4.3.1	Experimentação da atividade 4 (assíncrona)	106
4.3.2	Experimentação da atividade 5 (síncrona)	109
4.4	Momento síncrono 4	117
4.4.1	Experimentação da atividade 6 (assíncrona)	117
4.4.2	Experimentação da atividade 7 (síncrona)	119
4.5	Análise geral da experimentação das atividades	124
4.6	Avaliação de aprendizagem	126
4.7	Análise do questionário dos alunos	127
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	130
	Considerações Finais	130

REFERÊNCIAS	133
APÊNDICES	140
APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	141
APÊNDICE B – ATIVIDADES PARA SEREM DESENVOLVIDAS NOS ENCONTROS SÍNCRONOS, ANTES DAS ALTERAÇÕES SUGERIDAS PELOS PROFESSORES	145
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DOS PROFESSORES	163
APÊNDICE D – ATIVIDADES PARA SEREM DESENVOLVIDAS NOS ENCONTROS SÍNCRONOS, APÓS AS ALTERAÇÕES SUGERIDAS PELOS PROFESSORES	172
APÊNDICE E – <i>KITS</i> UTILIZADOS PARA A REALIZAÇÃO DA ATIVIDADE 1	190
APÊNDICE F – TESTE PARA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM	193
APÊNDICE G – AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM	197
APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS	201
APÊNDICE I – RECOMENDAÇÃO “O PRINCÍPIO DA CONTAGEM” DA <i>KHAN ACADEMY</i>	204
APÊNDICE J – AUTORIZAÇÃO PARA A DIREÇÃO	207
APÊNDICE K – AUTORIZAÇÃO DOS RESPONSÁVEIS	209

Introdução

Segundo [Morgado et al. \(2016\)](#), a Análise Combinatória é apontada por professores do Ensino Médio como o conteúdo mais difícil de ensinar, uma vez que embora ela seja repleta de problemas interessantes, os alunos têm dificuldade para identificar a fórmula correta para cada situação. Os autores afirmam ainda que problemas combinatórios de enunciados simples exigem, muitas vezes, uma alta dose de criatividade para serem solucionados

Embora várias pesquisas, no âmbito da educação, corroborem as considerações de [Morgado et al. \(2016\)](#), a questão que gera maior preocupação, no que diz respeito à Educação Básica brasileira, não se limita apenas ao ensino de Análise Combinatória, mas ao da matemática como um todo.

De acordo com o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes¹ (Pisa), edição 2018, que contou com a participação de 79 países, dentre os quais o Brasil, 68,1% dos estudantes brasileiros não possuem nível básico de matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania.

Segundo o relatório do Pisa, a média de proficiência dos estudantes brasileiros em Matemática foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), levando o Brasil a ficar entre 69º e 72º lugar em matemática. A variação existe por conta da margem de erro adotada pela pesquisa.

Além disso, os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica ([IDEB, 2017](#)) mostram-se preocupantes. O Ideb mede o desempenho do sistema educacional brasileiro e é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

Dados do [IDEB \(2017\)](#) apontam para baixa proficiência em matemática nos anos

¹ O Pisa, criado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), é uma avaliação trienal, que abrange as áreas de Leitura, Matemática, Ciências e alguns tópicos inovadores. Busca avaliar até que ponto alunos de 15 anos de idade, conseguem pôr em prática os conhecimentos e habilidades adquiridos na escola. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf

finais do ensino fundamental e no ensino médio. De acordo com essa pesquisa os dois segmentos não alcançaram a meta proposta para esse ano.

Aos resultados insatisfatórios apontados pelo Pisa e pelo Ideb, somam-se as reclamações constantes do mercado de trabalho em relação ao perfil dos profissionais que saem das universidades. De acordo com [Munhoz \(2015\)](#):

Há uma reclamação geral com relação ao perfil do profissional formados nos bancos escolares das universidades na atualidade. Eles não estão conectados com a realidade do mercado e necessitam, cada vez mais, de participar de programas de formação permanente e continuada que confiram ao profissional as competências e habilidades que deles o mercado deseja. ([MUNHOZ, 2015](#), p. 24).

Sobre o fato supracitado, [Alves e Machado \(2018\)](#) concordam que as instituições de ensino devem preparar e formar o cidadão para atender às necessidades do mercado de trabalho e ressaltam que diante das constantes transformações do mercado e do mundo do trabalho “[...]a forma como se faz a educação também deve acompanhar e mudar, ou melhor, adaptar-se as necessidades da nova sociedade.” ([ALVES; MACHADO, 2018](#), p. 861).

[Carvalho \(2009\)](#) afirma que o mundo atual está marcado pelos avanços tecnológicos e científicos, os quais interferem nas várias esferas da vida social, inclusive nas escolas e no exercício profissional da docência. As pessoas estão cada vez mais conectadas. Contudo, de acordo com [Daros \(2018a\)](#):

Mesmo diante de tantos avanços tecnológicos e científicos, o modelo de aula continua predominantemente oral e escrito, assim como os recursos utilizados. Nesse contexto, têm-se mantido intactos muito giz, caderno e caneta. Quando mudam, ganham uma nova roupagem por meio da utilização de instrumentos audiovisuais, como a inserção de filmes, vídeos e apresentações gráficas e projetores multimídia. Já os alunos continuam a receber o conteúdo passivamente e cada vez mais esperam tudo produzido pelos professores. ([DAROS, 2018a](#), p. 3).

As transformações ocasionadas pelas tecnologias digitais exigem novas metodologias de ensino, as quais demandam novos suportes pedagógicos, modificando o papel do estudante e do professor e dando um novo significado ao conceito de ensino e aprendizagem ([BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015](#)).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ([BRASIL, 2000b](#)), orientam para uma prática de ensino mais ativa e destacam que “o aprendizado não deve ser centrado na interação individual de alunos com materiais instrucionais, nem se resumir à exposição de alunos ao discurso professoral[...].” ([BRASIL, 2000b](#), p. 7).

Diante de tudo que foi exposto, faz-se necessário repensar sobre os métodos tradicionais de ensino amplamente utilizados nos dias de hoje e que, como apontam pesquisas no âmbito nacional e internacional, não refletem resultados positivos para a educação.

Sendo assim, buscou-se, com esta pesquisa, propor uma abordagem para o ensino dos Princípios Multiplicativo e Aditivo que contemple a participação ativa do estudante, tendo como apoio as tecnologias digitais.

Dessa forma, optou-se por executar a proposta didática por meio da Sala de Aula Invertida, que faz parte do grupo de Metodologias Ativas. Segundo [Bergmann e Sams \(2019, p. 11\)](#), o conceito de Sala de Aula Invertida é basicamente o seguinte: “[...]o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula.”.

Em decorrência do atual cenário pandêmico em que se encontram o Brasil e o mundo, em que as atividades escolares presenciais foram canceladas por tempo indeterminado, levando escolas públicas e particulares a migrar do ensino presencial para o remoto emergencial, faz-se necessário adequar a metodologia ao atual contexto educacional. Dessa forma, neste trabalho, foi aplicada a metodologia de Sala de Aula Invertida, substituindo as aulas presenciais pelas *on-line* síncronas.

Face ao exposto, a seguinte questão de pesquisa foi formulada: Como a metodologia de ensino, denominada Sala de Aula Invertida, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental?

Com o intuito de responder a essa questão, o seguinte objetivo geral foi traçado: Investigar, através da percepção dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como uma proposta didática baseada na metodologia Sala de Aula Invertida, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

Para atingir o objetivo geral, foram definidos tais objetivos específicos:

- (i) realizar estudos e pesquisas sobre o ensino da Análise Combinatória e sobre a Sala de Aula Invertida;
- (ii) investigar recursos pedagógicos que facilitem o ensino e aprendizagem do Princípio Multiplicativo;
- (iii) elaborar a proposta didática e experimentá-la, por meio da Sala de Aula Invertida;
- (iv) Analisar o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, ao longo da experimentação da proposta didática.

A presente pesquisa tem abordagem qualitativa e foi executada por meio de intervenção pedagógica. Sua estrutura é dividida em cinco capítulos, além da Introdução.

O capítulo 1 traz algumas considerações sobre o estudo da Análise Combinatória e um resumo dos conceitos iniciais, abordados no Ensino Fundamental. Apresenta também

considerações relevantes sobre a influência e as contribuições das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação; sobre as Metodologias Ativas e a Sala de Aula Invertida. Além disso, mostra alguns trabalhos relacionados ao mesmo tema. Por fim, pondera sobre o uso de materiais manipuláveis, no ensino de matemática, bem como algumas considerações acerca do assunto.

No capítulo 2, os aspectos metodológicos são tratados, dentre eles: a caracterização da pesquisa adotada; os instrumentos de coleta de dados; as etapas a serem desenvolvidas na pesquisa; a elaboração da avaliação diagnóstica e o detalhamento da proposta didática.

O capítulo 3 apresenta os resultados da avaliação diagnóstica e o relato do teste exploratório, realizado com professores de matemática.

O capítulo seguinte dispõe sobre a experimentação da proposta didática, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e a análise do Questionário. Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa realizada.

Capítulo 1

Referencial teórico

Este capítulo apresenta o referencial teórico que fundamenta este trabalho. Ele está dividido em seis seções. Na primeira, uma investigação sobre o estudo de Análise Combinatória; a próxima, apresenta o referencial teórico, com o resumo dos conceitos básicos da Análise Combinatória, abordados no Ensino Fundamental. A terceira, mostra algumas ponderações importantes sobre a influência e as contribuições das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação. Ainda nessa seção encontram-se considerações sobre a *Khan Academy*, o *Google Meet* e o *Google Sala de Aula*. A quarta, indica os referenciais teóricos relacionados às Metodologias Ativas e à Sala de Aula Invertida. A seguinte, traz alguns trabalhos relacionados à presente pesquisa. A última seção vale-se de algumas observações sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática.

1.1 O estudo de Análise Combinatória

Nessa seção, o estudo de Análise Combinatória foi analisado com base na abordagem do livro de [Morgado et al. \(2016\)](#), nas assertivas presentes nos estudos de [Vazquez e Noguti \(2004\)](#), [Sabo \(2010\)](#), [Costa \(2003\)](#), [Mello \(2017\)](#), [Alves e Segadas \(2012\)](#), [Borba \(2010\)](#), [Borba \(2013\)](#) e nas propostas curriculares nacionais. Realizou-se uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN ([BRASIL, 1997](#); [BRASIL, 1998a](#)) e da Base Nacional Comum Curricular - BNCC ([BRASIL, 2018a](#)).

De acordo com [Vazquez e Noguti \(2004\)](#), a Análise Combinatória é um tema matemático que gera grande dificuldade em relação à formulação e interpretação dos seus enunciados; a partir dessa premissa, não é bem vista por alunos e professores. Segundo os autores, os problemas que envolvem conceitos combinatórios são considerados como um desafio para os estudantes, pois para resolvê-los é necessário: parar, concentrar-se, discutir e pensar, exigindo assim flexibilidade de pensamento.

[Morgado et al. \(2016\)](#) reforçam essa ideia como pode ser observado no trecho abaixo.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problema, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos dessa parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (MORGADO et al., 2016, p.2).

Mello (2017) ressalta que essa dificuldade em lidar com problemas que envolvem conceitos de Análise Combinatória, possivelmente, esteja relacionada à forma com a qual os professores costumam abordar esse tema, em sala de aula; geralmente, eles são conduzidos por livros didáticos que definem e modelam as diferentes formas de contagem através de seus rótulos.

Ainda sob a ótica do autor supramencionado, essa forma de abordagem do conteúdo passa ao aluno a ideia de que todo problema de Análise Combinatória se resume à tarefa de identificar se ora é um caso de arranjo, ora combinação ou permutação e, posteriormente, aplicar a fórmula correspondente.

Sendo assim, a Análise Combinatória pode parecer apenas um jogo de fórmulas complicadas, caso a aprendizagem dos seus conceitos ocorra de forma mecânica, restringindo sua aplicação a situações padronizadas, sem buscar acostumar o estudante com a análise cuidadosa de cada problema (MORGADO et al., 2016).

Em uma pesquisa realizada por Alves e Segadas (2012), com estudantes que acabaram de concluir o Ensino Médio, os autores constataram que a maioria dos participantes tentou recorrer ao uso de fórmulas para resolver problemas de contagem e que, em boa parte de suas escolhas, não utilizaram a fórmula correta. Esse fato indica, aparentemente, uma formalização precoce das técnicas de contagem da Análise Combinatória, não permitindo, por conseguinte, o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Além disso, esses autores identificaram nesses pesquisados uma maior dificuldade em lidar com o Princípio Aditivo e em reconhecer situações para aplicá-lo. Os autores afirmam que grande parte dos livros didáticos não trazem uma definição sobre esse princípio, sugerindo que seu uso ocorrerá de forma intuitiva, o que não foi constatado nessa pesquisa.

Segundo Borba (2013), os resultados dos seus estudos evidenciam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo que ocorre, a longo prazo, durante todo o período de escolarização e que é necessária a instrução escolar para o desenvolvimento amplo desse modo de pensar; ele também indica que o aprendizado da Análise Combinatória pode ser iniciado desde os anos iniciais de escolarização.

No entanto, estudos anteriores (SABO, 2010; COSTA, 2003), evidenciam que a prática de desenvolvimento gradual do raciocínio combinatório não ocorre, de fato, nas aulas de matemática. Isso pode ser justificado pelo fato de que grande parte dos professores de matemática do Ensino Fundamental não domina, suficientemente, os conceitos básicos

de Análise Combinatória a fim de que possa ensiná-los aos seus alunos. Já os professores do Ensino Médio, de modo geral, recorrem somente ao uso de fórmulas para resolver problemas de contagem (SABO, 2010; COSTA, 2003).

De acordo com Borba (2010), em seu estudo sobre o raciocínio combinatório na Educação Básica, é recomendável que os professores aproveitem as estratégias espontâneas desenvolvidas pelos alunos, tais como desenhos; diagramas e listagens, incentivando-os a pensarem sobre possíveis generalizações no estudo das situações combinatórias (BORBA, 2010). Segundo a autora:

Estas generalizações possibilitarão o reconhecimento da natureza multiplicativa dos problemas de Combinatória, o que facilitará a compreensão que nas diversas situações combinatórias o Princípio Fundamental da Contagem é válido e que este princípio é base das fórmulas utilizadas na Análise Combinatória. (BORBA, 2010, p. 14).

Sendo assim, considera-se valoroso o emprego do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, como técnica para resolução de problemas de contagem, uma vez que permite a generalização de resultados, assim como a compreensão dos conceitos de forma significativa.

O Princípio Multiplicativo, juntamente com o Princípio Aditivo, são uma importante estratégia para a resolução de problemas de Análise Combinatória, visto que podem ser aplicados aos diferentes tipos de problemas de contagem. Além disso, o Princípio Multiplicativo é a base das fórmulas de arranjo, permutação e combinação que utilizadas no ensino da Análise Combinatória.

1.1.1 O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Fundamental

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e (BRASIL, 1998a), estudos relativos a noções de combinatória estão incluídos no bloco de conteúdos “Tratamento da Informação” e devem ser trabalhados em todos os ciclos do Ensino Fundamental. O objetivo não é o desenvolvimento de um trabalho fundamentado na definição de termos ou de fórmulas, mas sim levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio fundamental da contagem.

A questão que surge é que nem todos os livros didáticos estão de acordo com as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental no que diz respeito ao desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória em todas as etapas do Ensino Fundamental. Dessa forma, não oferecem ao professor um auxílio suficiente para o trabalho com o desenvolvimento do raciocínio combinatório de forma gradual (COSTA, 2003).

A partir do que foi citado anteriormente e considerando que o livro didático é uma ferramenta importante para direcionar o trabalho docente, pode ocorrer que professores da

Educação Básica acabem postergando a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória, já que o livro didático não o contempla. Isso passa a mudar a partir do ano de 2020 com a implementação da BNCC nas escolas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. (BRASIL, 2018a, p. 7).

De acordo com o portal do Ministério da Educação (MEC)¹, com a homologação da etapa da BNCC referente à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental, em dezembro de 2017, a base passa a ser uma norma para as redes e escolas de todo o país.

Conforme a Resolução² CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017, estabelecida pelo Conselho Nacional de Educação, as escolas devem adequar seus currículos à BNCC até o início do ano letivo de 2020.

Com isso, os conceitos de Análise Combinatória que devem ser abordados no decorrer da Educação Básica começam a ser trabalhados, obrigatoriamente, na primeira etapa do Ensino Fundamental.

Os temas referentes ao ensino de Análise Combinatória que devem ser tratados no decurso do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018a) encontram-se detalhados, por ano de escolaridade, no Quadro 1

¹ Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/211-noticias/218175739/62371-ministro-da-educacao-entrega-base-nacional-comum-curricular-do-ensino-medio>

² Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79631-rcp002-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes à Análise Combinatória abordados no Ensino Fundamental

Ano de escolaridade	Objetos de conhecimento	Habilidades
4º	Problemas de contagem	Resolver, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5º	Problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
8º	O princípio multiplicativo da contagem	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Fonte: Elaboração própria.

É importante mencionar que a BNCC orienta que os problemas de contagem:

[...] devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (BRASIL, 2018a, p. 273).

Refletindo acerca do que foi exposto nessa seção, buscou-se, com esta pesquisa, elaborar uma sequência didática que auxiliasse o ensino e a aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo da Contagem para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II, seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular e visando a desenvolver as habilidades destacadas ao longo do texto.

1.2 Conceitos básicos da Análise Combinatória

Conforme [Morgado et al. \(2016\)](#), a maioria dos alunos do Ensino Médio entende a Análise Combinatória como o estudo das combinações, arranjos e permutações. No entanto, os autores afirmam que combinações, arranjos e permutações são alguns dos conceitos que permitem resolver determinados tipos de problemas de Análise Combinatória: aqueles relacionados à contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem a necessidade de enumerar seus elementos. Ainda de acordo com esses autores, a verdade é que a Análise Combinatória trata de diversos outros tipos de problemas e possui, além de combinações, arranjos e permutações, outras técnicas para atacá-los como, por exemplo: o Princípio da Inclusão-Exclusão; o princípio das gavetas de Dirichlet; as funções geradoras e a teoria de Ramsey. De um modo geral, pode-se dizer que a Análise Combinatória é o ramo da matemática que analisa estruturas e relações discretas ([MORGADO et al., 2016](#)).

1.2.1 O Princípio Aditivo da Contagem

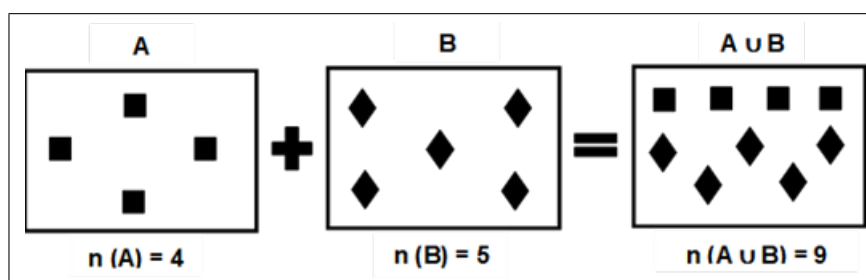
Como o presente trabalho está destinado aos estudantes do Ensino Fundamental, nesta seção serão abordados os conceitos iniciais da Análise Combinatória, sendo eles os Princípios Aditivo e Multiplicativo. As definições e os conceitos aqui relatados têm como base os livros de [Morgado et al. \(2016\)](#) e [Dante \(2008\)](#).

De acordo com [Morgado et al. \(2016\)](#), as operações aritméticas, quando aplicadas a problemas de contagem, motiva e favorece a aprendizagem dos estudantes. Segundo eles, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem.

Definição 1.1. ([MORGADO et al., 2016, p. 16](#)): *Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

A Figura 1 traz a ilustração do Princípio Aditivo da Contagem.

Figura 1 – Representação do Princípio Aditivo da Contagem



Fonte: Elaboração própria.

Exemplo 1.1. *Uma lanchonete oferece dois tipos de refrigerante e cinco tipos de suco. Sabendo que um cliente deseja adquirir um único tipo de bebida, de quantas maneiras*

distintas poderá fazer sua escolha?

Calculando:

Representado por R_1 e R_2 os dois tipos de refrigerante e por S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 , os cinco tipos de suco, poder-se-á considerar os conjuntos $R = \{R_1, R_2\}$ e $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, com dois e cinco elementos, respectivamente. Como esses conjuntos não possuem elementos em comum, tem-se $R \cup S = \{R_1, R_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, possui sete elementos. Como o cliente deseja adquirir um único tipo de bebida, deverá optar por apenas um dos elementos do conjunto $R \cup S$. Dessa forma, poderá fazer sua escolha de 7 maneiras distintas. O mesmo resultado poderia ter sido obtido através da aplicação direta do Princípio Aditivo. Como há 2 opções de refrigerante e 5 opções de suco e o cliente deseja adquirir um único tipo de bebida, deverá escolher um, dentre os dois tipos de refrigerante, ou um, dentre os cinco tipos de suco. Ele possui assim $2 + 5 = 7$ possibilidades de escolha.

1.2.2 O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Multiplicativo, ao lado do Princípio Aditivo, constitui a ferramenta básica para a resolução de problemas de contagem.

Definição 1.2. (*DANTE, 2008, p. 472*): *Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.*

Observação 1.1. *O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.*

Exemplo 1.2. *Alice deseja ir a uma festa hoje. Ela possui 3 vestidos (um preto, um vermelho e um azul) e 5 pares de sandálias apropriados ao evento. De quantas maneiras distintas a menina pode combinar um vestido e um par de sandálias?*

Observe que para compor as possíveis combinações, devem ser realizadas duas etapas sucessivas e independentes:

1ª: *Escolher 1 vestido dentre 3 disponíveis.*

2ª: *Escolher 1 par de sandália dentre 5 disponíveis.*

Calculando:

- I. Se Alice escolher o vestido preto ela poderá optar por uma das 5 sandálias, obtendo assim 5 combinações possíveis.*
- II. Se escolher o vestido vermelho, ela também poderá optar por uma das 5 sandálias, obtendo mais 5 combinações possíveis.*

III. Da mesma forma, se escolher o vestido azul, terá 5 opções para as sandálias, obtendo outras 5 combinações possíveis.

Logo, o total de opções é $5 + 5 + 5 = 15$.

O mesmo resultado poderia ter sido obtido através da aplicação do Princípio Multiplicativo. Como são 3 opções de vestido e, para cada vestido há 5 opções de sandálias, temos $3 \cdot 5 = 15$.

1.3 As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação

A inserção das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação - TDIC no ambiente escolar contemporâneo tem promovido investigações e debates entre pesquisadores da educação que buscam compreender a transformação do modo de ensinar e aprender no contexto dos avanços tecnológicos digitais (MARTINS; MASCHIO, 2014). Para Valente (2014), essa inserção tem “[...]alterado a dinâmica da escola e da sala de aula como, por exemplo, a organização dos tempos e espaços da escola, as relações entre o aprendiz e a informação, as interações entre alunos, e entre alunos e professor.” (VALENTE, 2014, p. 82).

De acordo com Moran (2015), o modelo de ensino tradicional, que valoriza a transmissão de informações pelo professor, foi apropriado durante o período em que o acesso à informação era difícil. Porém, hoje, com a disseminação de grande variedade de material e cursos através da internet, é possível aprender, em qualquer lugar, a qualquer hora e com pessoas diferentes.

As ferramentas e mídias digitais proporcionam à didática os instrumentos capazes de renovar as situações de interação, expressão, criação, comunicação, informação e colaboração, modificando-a em relação à didática tradicional, a qual é fundamentada na escrita e nos meios impressos (SOUSA; MOITA; CARVALHO, 2011). Para (MORAN, 2015, p. 16), “o ensinar e aprender acontece numa interligação simbiótica, profunda, constante, entre o que chamamos mundo físico e mundo digital.”

Um dos papéis da escola é preparar o estudante para o futuro. Dessa forma, “[...] a utilização efetiva das tecnologias da informação e comunicação, nesse ambiente, é uma condição essencial para inserção mais completa do cidadão nessa sociedade de base tecnológica.” (CARVALHO, 2009, p. 5).

Uma vez que a escola está inserida em uma sociedade digital, ela não pode negligenciar o desenvolvimento de competências relacionadas ao uso da tecnologia. Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2018a) define, como uma de suas competências gerais:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comuni-

cação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018a, p. 9).

De acordo com os PCN (BRASIL, 2000a), as novas tecnologias e as modificações na produção de bens, serviços e conhecimentos exigem que a escola proporcione aos alunos incorporarem-se ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho.

São vários os benefícios da integração das TDIC ao processo de ensino e aprendizagem, pois essas tecnologias proporcionam diferentes possibilidades de aprendizado e, se utilizadas corretamente, pela escola, constituem-se como oportunidade para que os alunos possam aprender mais e melhor (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015).

Para Moran (2018), as tecnologias contribuem para a construção da aprendizagem colaborativa, dentro e fora da escola. O autor ressalta que se torna cada vez mais importante a comunicação entre os alunos, compartilhando informações, participando de atividades em grupo, resolvendo desafios, avaliando-se mutuamente. Dessa forma, eles podem construir seus conhecimentos, a partir da comunicabilidade e interação com pessoas de culturas variadas e de diferentes lugares do mundo, algo que só se tornou possível devido ao advento das tecnologias digitais de informação e comunicação.

Os PCNEM (BRASIL, 2002) discorrem sobre os aspectos positivos de uma diversificação do material didático e salientam a relevância do uso do computador como ferramenta didática, visto que, aliado ao aprendizado da navegação na internet, permite o acesso a um universo de informações, além de oferecer a possibilidade de editar textos e organizar dados.

Sendo assim, torna-se fundamental que educadores revejam suas práticas pedagógicas considerando a crescente influência dos recursos tecnológicos digitais no processo de ensino-aprendizagem, já que:

Conhecer as novas formas de aprender, ensinar, produzir, comunicar e reconstruir conhecimento, é fundamental para a formação de cidadãos melhor qualificados para atuar e conviver na sociedade, conscientes de seu compromisso, expressando sua criatividade e transformando seu contexto. (CARVALHO, 2009, p. 6).

Contudo, a simples utilização de tecnologias digitais de informação e comunicação, em sala de aula, não é suficiente para garantir uma ação pedagogicamente eficiente, pois “[...] a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações.” (BRASIL, 1998b, p. 140). É essencial que a tecnologia sirva para enriquecer o ambiente educacional, proporcionando a construção de conhecimentos através de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte dos alunos e dos professores (BRASIL, 1998b).

Além disso, o uso inadequado das tecnologias digitais, por parte do professor, compromete o ensino e a credibilidade do uso desse recurso como ferramenta didática. Não basta que o professor tenha domínio da utilização dessas tecnologias, "é preciso saber aliar os objetivos de ensino com os suportes tecnológicos que melhor atendam a esses objetivos."(KENSKI, 2003, p. 5).

Sabe-se que cada pessoa aprende de formas e em ritmos diferentes. Nesse sentido, um benefício oferecido pelas tecnologias de informação e comunicação que merece destaque é o fato de que elas "[...] oferecem recursos didáticos adequados às diferenças e necessidades de cada aluno." (OLIVEIRA; MOURA; SOUZA, 2015, p. 78), promovendo, dessa forma, o respeito à diversidade em sala de aula.

Nesse contexto, vale destacar o surgimento das plataformas adaptativas, ferramentas que facilitam o ensino personalizado.

Com o advento das ferramentas focadas em interatividade surgiram as plataformas adaptativas que são "softwares", especialmente desenvolvidos para analisar o comportamento de seus usuários e propor atividades personalizadas, um salto importante para personalização do ensino. (SUNAGA; CARVALHO, 2015, p. 147).

As plataformas adaptativas possuem uma programação fundamentada em algoritmos que unem os dados obtidos das interações dos usuários com os conteúdos oferecidos e, a partir daí, elabora um percurso personalizado para cada usuário; disponibilizando o que ele necessita aprender para progredir no seu desenvolvimento de competências e habilidades. Oferecem feedback imediato para o estudante, responsáveis e professor. Assim, o aluno pode avançar nos seus estudos ou retornar a um conceito para consolidá-lo. Já o docente, através das informações fornecidas pela plataforma, pode elaborar estratégias de ensino para que o aluno aprenda mais e melhor (XOTESLEM, 2018).

Dessarte, a partir dos dados fornecidos por essas plataformas, o professor pode intervir para ajudar um único aluno ou um grupo específico deles, propondo atividades diferenciadas, de acordo com as necessidades de cada um, algo que na sala de aula tradicional, sem o auxílio das tecnologias digitais, é muito difícil de se realizar.

Além das plataformas adaptativas, surgem também, como um novo espaço proporcionado pelas tecnologias digitais, os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA). "Em termos conceituais, os AVA consistem em mídias que utilizam o ciberespaço para veicular conteúdos e permitir interação entre os atores do processo educativo." (PEREIRA; SCHMITT; DIAS, 2007, p. 4).

Como afirma (KENSKI, 2003, p. 8), "a flexibilidade da navegação, no ambiente virtual, dá oportunidade para a diversificação e personalização dos caminhos e a articulação entre saberes formais e não formais." A autora reitera que interação, reciprocidade e compartilhamento de informações são pontos comuns a serem respeitados em ambientes

virtuais de aprendizagem.

Entretanto, segundo a autora supracitada, para que essas funcionalidades ocorram é necessária uma metodologia de ensino que tenha como foco a cooperação e a participação intensa de todos os envolvidos. Uma nova forma de ensinar que promova constantes desafios que possam ser superados através do trabalho em equipe e do compartilhamento de informações e opiniões (KENSKI, 2003).

1.3.1 A Khan Academy

Criada por Salman Khan, a *Khan Academy* é uma plataforma adaptativa, aberta, gratuita e acessível a todos que tem por objetivo “[...] promover uma educação de nível internacional gratuita para qualquer um, em qualquer lugar.” (KHAN, 2013).

Disponível na web, através do endereço eletrônico <http://pt.khanacademy.org> e também em aplicativo, a plataforma oferece a possibilidade de uma aprendizagem personalizada através de recursos como vídeos, exercícios e leitura. Nela, cada estudante tem controle sobre o tempo, local e ritmo de seu estudo.

A seguir será feito um apanhado sobre as principais funcionalidades dessa plataforma, por meio de uma adaptação das informações contidas no endereço <https://pt.khanacademy.org>.

O cadastro na *Khan Academy* pode ser feito por meio de uma conta *Google*, pela conta do *Facebook* ou por um *e-mail* de preferência do usuário. Além disso, são oferecidos três tipos de login: professores, alunos e pais.

A Figura 2 ilustra a página inicial da plataforma *Khan Academy* na web.

Figura 2 – Página inicial da plataforma *Khan Academy* na web



Fonte: <http://pt.khanacademy.org>, acesso em 29/04/2020.

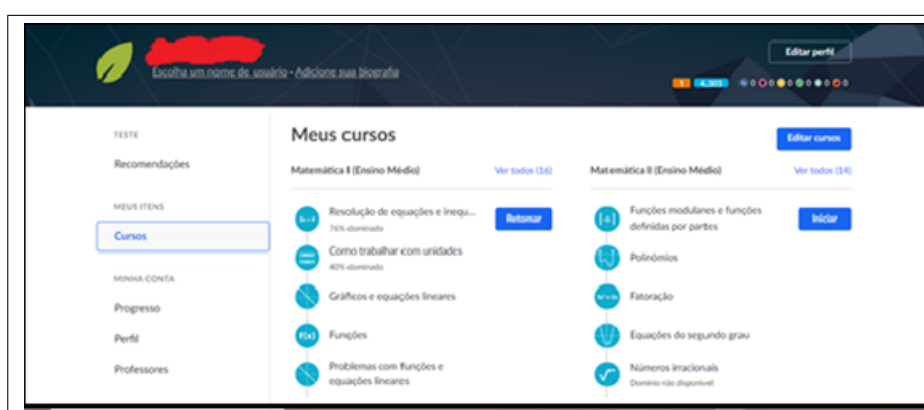
A *Khan Academy* possibilita trabalhar, ao mesmo tempo, com muitos alunos que se encontram em níveis de aprendizagem diferentes, uma vez que acompanha o ritmo de cada

um.

Outro ponto a se destacar é a oferta de bonificações que estimulam o estudante e tornam o aprendizado mais prazeroso. É possível acumular pontos, receber medalhas, trocar de avatar e avançar de nível, à medida que as atividades propostas pela plataforma ou recomendadas por um professor/tutor são realizadas.

Além disso, é possível estudar de forma independente ou seguindo a orientação de um professor/tutor. Na página inicial do aluno (Figura 3), o usuário encontra seu perfil e seu progresso nos cursos que vêm estudando de forma independente, além das recomendações feitas por seu tutor ou professor.

Figura 3 – Página inicial do aluno



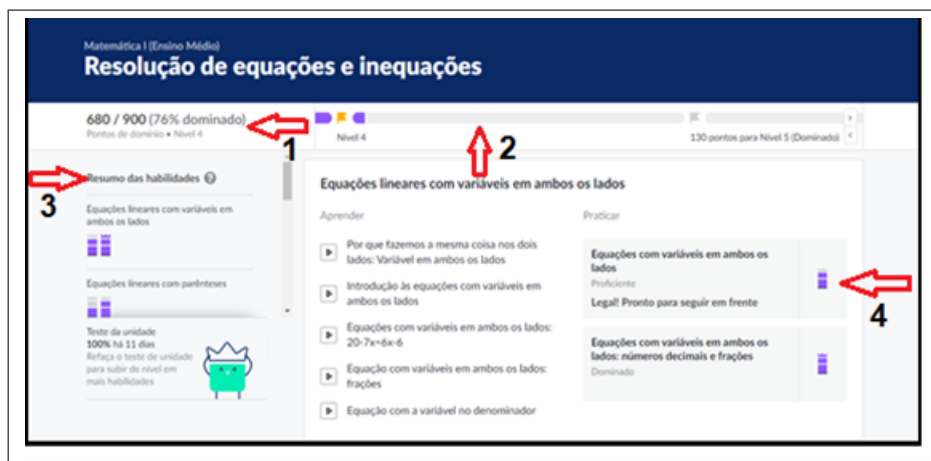
Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

Dentre as ferramentas oferecidas, no login do aluno destaca-se o Sistema de Domínio que pode ser do Curso ou de Unidade. Trata-se de um sistema que acompanha o progresso de aprendizado, em todos os cursos, todos os dispositivos e em vários idiomas.

Os cursos que possuem o sistema de domínio mostram: a fração geral atingida de pontos; a porcentagem que foi dominada e o nível de domínio. O aluno pode optar por fazer o Desafio do Curso, através dele é possível realizar uma avaliação que abrange amostras de habilidades de todo o curso. Nem todos os cursos contam com o sistema de domínio.

O domínio de unidade (Figura 4) indica: (1) o número total de pontos de domínio disponíveis na unidade; (2) o progresso, do nível 1 ao 6; (3) o resumo das habilidades, permitindo ao estudante visualizar seu progresso em cada habilidade; (4) em qual nível (Familiar, Proficiente ou Dominado) o estudante está em cada habilidade. Esses elementos estão apontados na Figura 4.

Figura 4 – Domínio de Unidade



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

A plataforma disponibiliza uma grande variedade de conteúdo do currículo de Matemática, de acordo com a BNCC e oferece *feedback*, imediato, em todas as atividades realizadas. Com isso, o aluno pode traçar seu percurso particular de aprendizagem, conforme suas necessidades e ainda aprender no seu próprio ritmo e de forma personalizada.

Também é possível fazer parte de alguma turma de um professor e receber dele recomendações que são atividades disponibilizadas pela plataforma e podem ser atribuídas de forma individual, a um grupo ou para toda a turma.

Para o professor, são oferecidas várias funcionalidades que possibilitam a personalização do ensino. Através da plataforma, é possível:

- a) Criar uma turma: Pode criar uma turma nova ou importar do *Google Sala de aula*. Ele escolhe os cursos, oferecidos pela plataforma, que deseja atribuir a sua turma. Os alunos podem ser convidados para participar através de um *link* ou utilizando um código, ambos gerados e compartilhados pelo docente que também pode convidar sua turma do *Google Sala de aula* ou criar contas e senhas e distribuí-las
- b) Fazer recomendações: Pode atribuir atividades, disponíveis na plataforma, para a turma toda ou somente para alguns e definir um prazo para que sejam realizadas. Além disso, é possível acompanhar o desempenho, por meio de um relatório completo, que permite visualizar quais e quantos alunos realizaram cada uma das recomendações, bem como a pontuação individual; o total de erros e acertos em cada questão e quais participantes erraram ou acertaram; a data e o horário de conclusão das atividades; o tempo que cada aluno destinou à plataforma; bem como as habilidades em que houve ou não progresso. No ícone “Notas” (Figura 5) é possível visualizar as pontuações das recomendações o que possibilita uma visão geral de como os alunos se saíram no conteúdo recomendado.

dessa ferramenta, o professor pode criar uma reunião, copiar o link e disponibilizar para os alunos nas redes sociais como *WhatsApp*, por exemplo. Também é possível criar a reunião e deixar agendada através do *Google Agenda* e adicionar o *e-mail* individual dos alunos (SILVA; ANDRADE; SANTOS, 2020).

A seguir, serão feitas algumas considerações sobre o *Google Meet* com base nas informações disponíveis [Google Meet \(2020\)](#).

Alguns requisitos são necessários para acessar o *Google Meet*. O acesso poderá ser realizado por usuários do *Google Workspace* (*Google Meet* com uma conta escolar ou de trabalho) ou por usuários que não são do *Google Workspace* (*Google Meet* com uma conta pessoal). No primeiro caso, é necessário que o administrador do *Google Workspace* ative o *Meet* para a organização e para criar uma reunião *on-line* o usuário deve fazer o login no *Google Workspace*. Já na segunda opção, faz-se necessária a criação de uma conta do *Google*.

Durante uma reunião, o *layout* da videochamada é alterado, automaticamente, mostrando o conteúdo e os participantes mais ativos. No entanto, o usuário pode alterá-lo, conforme sua preferência, optando por uma das quatro opções oferecidas pelo *Meet*.

Alguns recursos avançados de videoconferência do *Meet* são disponibilizados de acordo com a edição da conta *G Suite*. As edições *Education* oferecem às instituições de ensino fundamental, médio ou superior, um conjunto de ferramentas de produtividade, adaptadas para o ensino e a aprendizagem. A Figura (6) apresenta uma comparação dos recursos do *Meet* por edição do *Education*.

Figura 6 – Comparação dos recursos do *Meet* por edição do *Education*

	Education	Enterprise for Education
Número máximo de participantes por reunião	100	250
Reuniões seguras	✓	✓
Apresentações e compartilhamento de tela	✓	✓
Participantes externos	✓	✓
Ligação (números dos EUA e internacionais)		✓
App Meet para Android e iOS	✓	✓
Transmissão ao vivo no domínio (máximo de pessoas assistindo)		100.000
Gravar reuniões e salvá-las no Drive	*	✓
Cancelamento de ruído aprimorado		✓
Salas temáticas		✓
Enquetes		✓
Perguntas e respostas		✓

Fonte: Página do Administrador do *Google Workspace*.

Dentre as opções avançadas de videoconferência do aplicativo, destaca-se a gravação de reuniões. Através dessa opção, o professor pode registrar a sua aula e enviá-la aos alunos que não puderam participar ou que desejam assisti-la novamente. Os arquivos

são salvos na pasta de gravações do *Meet* do organizador, no Meu *Drive*. Entre março e dezembro de 2020, todos os usuários da edição *Education* tiveram acesso a esse recurso que não é disponibilizado para usuários que não possuem uma conta no *G Suite*.

Outra significativa opção do *Google Meet* é a possibilidade de usar salas temáticas para criar grupos durante uma videochamada. A pessoa que programa ou inicia a reunião precisa criá-las, no momento do encontro virtual, em um computador, sendo possível criar até cem. A distribuição dos participantes é igual e de forma aleatória, porém o criador pode movê-los de uma sala para a outra. Cabe evidenciar que esse recurso já citado só está disponível para usuários da edição *Enterprise for Education* que possuem permissão para criar reuniões.

De acordo com [Silva, Andrade e Santos \(2020\)](#), uma das vantagens de se trabalhar com o *Google Meet* é o fato de ser um ambiente virtual seguro, simples, de fácil acesso e eficiente para provocar os resultados almejados pelas escolas.

Um exemplo disso é o compartilhamento de telas do Power Point, Word, PDF ou outras janelas do computador com os participantes da sala para apresentar as atividades, documentos, tarefas, vídeos ou interagir via chat com mensagens para os integrantes. ([SILVA; ANDRADE; SANTOS, 2020](#), p. 7).

Nesta pesquisa, o *Google Meet* foi utilizado para a realização das reuniões *on-line* síncronas. Cabe mencionar que esse serviço não foi utilizado como ferramenta do *G Suite for Education*, o que trouxe limitações ao uso.

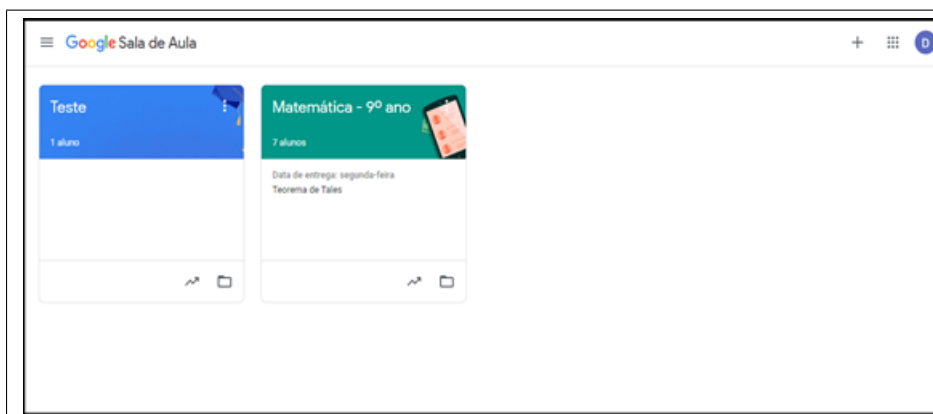
1.3.3 O *Google Sala de Aula (Google Classroom)*

O *Google Sala de Aula* é uma ferramenta que permite a criação de salas de aula virtuais para compartilhamento de informações e documentos, facilitando a comunicação entre professores e alunos. Escolas, organizações sem fins lucrativos e usuários que tenham uma conta pessoal do *Google* podem utilizá-lo de forma gratuita.

O *Google Sala de Aula* é um sistema de gestão de sala de aula para professores que gerencia múltiplas classes e níveis; envia mensagens anúncios, perguntas, avisos e tarefas para uma ou mais classes; também gerencia tarefas e compartilhamento de arquivos do tipo formulários, documentos, vídeos, entre outras aplicações. ([BERNARDO, 2018](#), p. 8).

A seguir, serão feitas algumas considerações sobre o *Google Sala de Aula*, com base nas informações disponíveis [Google Sala de Aula \(2020\)](#).

Nesse ambiente, os professores podem criar e gerenciar turmas (Figura 7), propor e corrigir atividades, enviar *feedback* para os alunos, em tempo real, e ver tudo em um só lugar. Além disso, torna o ensino mais produtivo e significativo, facilitando o processo das atividades, melhorando a colaboração e proporcionando a comunicação.

Figura 7 – Exemplo de turmas criadas no *Google Sala de Aula*

Fonte: *Google Sala de Aula*.

O *Google Sala de Aula* oferece muitos benefícios para os professores e alunos:

- (a) É fácil de configurar: os professores podem criar uma turma e adicionar alunos diretamente ou compartilhar um código para eles participarem;
- (b) Poupa tempo e papel: o fluxo de atividades é simples e digital, sem usar papel. Os docentes podem criar, corrigir e atribuir notas às atividades, rapidamente, e em um só lugar;
- (c) Comunicação e *feedback* aprimorados: os professores podem enviar avisos e iniciar debates com a turma instantaneamente. Já os alunos, podem interagir no mural da turma e compartilhar informações auxiliando uns aos outros;
- (d) Funciona com *apps* usuais: funciona com o *Documentos Google*, *Google Agenda*, *Gmail*, *Google Drive* e *Formulários Google*.

Na página “Atividades” os professores podem compartilhar informações (atividades, perguntas e materiais) e os alunos podem vê-las na página “Pendentes”, no mural ou na agenda da turma. É importante destacar que esse ambiente é acessível e seguro, pois não exibe anúncios e nunca usa seu conteúdo ou dados pessoais para fins publicitários.

Para criar uma atividade (Figura 8), basta acessar a página da turma, em “Atividades” clicar em “+ Criar” e selecionar a opção “Atividade”. No ícone “Adicionar” existem opções para inserir arquivos do *Google Drive*, fazer *upload*, adicionar vídeos do *Youtube* e *links*. Em seguida, seleciona a opção desejada, atribui um título e as instruções para a atividade. No ícone prazo é possível estipular uma data final para a entrega da atividade.

Figura 8 – Página de atividade do *Google Sala de Aula*

Fonte: *Google Sala de Aula*.

Ao anexar um arquivo do *Google Drive* (documento, apresentação ou planilha), o professor pode optar por permitir que os participantes da sala apenas visualizem o arquivo ou possa ser editado. Existe também a opção de fazer uma cópia do arquivo para cada aluno e, nesse caso, ela é enviada de forma individual e pode ser editada.

Os alunos realizam e entregam a atividade. O professor poderá então escrever anotações, adicionar uma nota e devolvê-la com *feedback* particular.

Outro ponto que merece destaque é a possibilidade de anexar os Formulários *Google* nas atividades propostas. Essa ação facilita a aplicação de avaliações e exercícios de fixação. Conforme afirma [Bernardo \(2018\)](#):

O *Google* Formulário encurta o caminho entre a aplicação da avaliação e a entrega dos resultados obtidos pelo aluno, diminuindo a ansiedade em receber o resultado de seu desempenho. O aluno tem a autonomia, dentro e fora da sala de aula, de verificar o desenvolvimento de sua aprendizagem através de exercícios com *feedbacks* pré-formulados pelos professores, deixando as dúvidas e a ampliação do conhecimento para que sejam esclarecidas na sala de aula ou através da interação promovida no *Google Sala de Aula*. ([BERNARDO, 2018](#), p. 8).

O *Google Sala de Aula* foi utilizado, neste trabalho, como ferramenta para a postagem das atividades que foram desenvolvidas nos momentos assíncronos e da avaliação de aprendizagem. Assim como o *Google Meet*, ele não foi utilizado como ferramenta do *G Suite for Education*.

1.4 Metodologias Ativas

Na seção anterior foram apresentadas algumas considerações importantes sobre a crescente influência das TDIC na forma de ensinar e aprender, evidenciando a necessidade da adoção de metodologias de ensino que melhor atendam às necessidades da socie-

dade atual, altamente conectada. Partindo dessa reflexão, esta seção apresenta algumas ponderações sobre as Metodologias Ativas.

Valente, Almeida e Geraldini (2017) definem as Metodologias Ativas como estratégias pedagógicas que visam a criar oportunidades de ensino para que os estudantes adquiram um comportamento mais ativo, envolvendo-os de forma a torná-los mais engajados, realizando tarefas que auxiliem no estabelecimento de relações com o contexto, no desenvolvimento de estratégias cognitivas e no processo de construção de conhecimento.

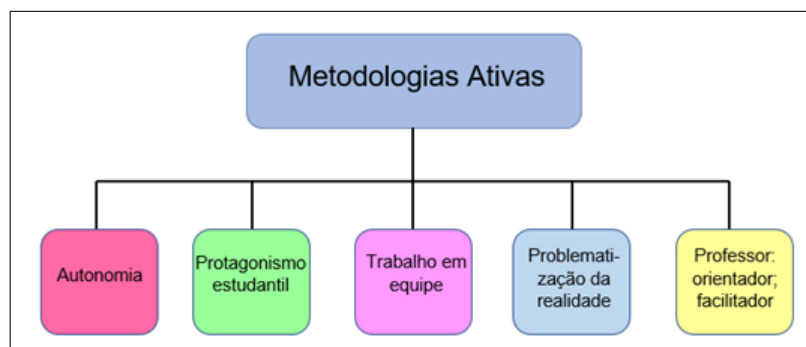
Almejando fortalecer o entendimento sobre essa metodologia, menciona-se, ainda, a definição de (PEREIRA, 2012):

Por Metodologia Ativa entendemos todo o processo de organização da aprendizagem (estratégias didáticas) cuja centralidade do processo esteja, efetivamente, no estudante. Contrariando assim a exclusividade da ação intelectual do professor e a representação do livro didático como fontes exclusivas do saber na sala de aula. (PEREIRA, 2012, p. 6).

Com base nos parágrafos supracitados, é possível ratificar que as Metodologias Ativas redirecionam o foco do processo de ensino-aprendizado, ou seja, do professor para o estudante que passa a assumir uma postura mais ativa na construção do seu próprio conhecimento. Sendo assim, a aprendizagem é realizada de diversas formas, opondo-se à ideia de que o professor e o livro didático são os únicos detentores do conhecimento.

A Figura 9 evidencia alguns dos princípios básicos que constituem as metodologias ativas, segundo Diesel, Baldez e Martins (2017).

Figura 9 – Princípios básicos que constituem as metodologias ativas



Fonte: Baseado em Diesel, Baldez e Martins (2017).

Abaixo, com base nos estudos de Diesel, Baldez e Martins (2017), apresentam-se algumas assertivas essenciais acerca dos princípios destacados na Figura 9

- (i) **Autonomia:** essas metodologias estimulam o desenvolvimento da autonomia do estudante, uma vez que oportunizam situações em que ele pode manifestar e posicionar-se de forma crítica; o que muitas vezes não ocorre no ensino tradicional em que, geralmente, eles têm o papel de receptores de informações.

- (ii) **Protagonismo estudantil:** o método ativo tem sua centralidade na figura do estudante que passa a assumir uma postura mais participante na sua aprendizagem, uma vez que suas experiências, saberes e opiniões são considerados como ponto de partida para a construção do conhecimento que ocorre de forma colaborativa.
- (iii) **Trabalho em equipe:** ao proporcionar momentos de discussões e trocas, a metodologia contribui para a interação constante entre os educandos. Dessa forma, eles são, constantemente, estimulados a refletir, expor opiniões e argumentar acerca de determinada situação.
- (iv) **Problematização da realidade:** a desarticulação entre a teoria e a prática pode ser um dos motivos de desmotivação, desinteresse e indiferença dos discentes. Desse modo, o conhecimento construído na escola precisa ser útil para a vida, de forma que eles consigam associá-lo com possibilidades reais de aplicação prática, ou seja, aprender com sentido. Na medida que eles exercem papel ativo em situações que envolvem a problematização da realidade dele, interagindo com o conteúdo - ouvindo, falando, indagando e discutindo - estará desenvolvendo diferentes habilidades como refletir, observar, comparar, dentre outras; não somente escutando aulas expositivas que, na maioria das vezes, são mais monologadas que dialogadas.
- (v) **Professor como orientador, facilitador:** o professor não deve transferir ou transmitir informações para que os alunos recebam de forma passiva, mas sim ensiná-los a pensar, o que significa “provocar, desafiar ou ainda promover as condições de construir, refletir, compreender, transformar, sem perder de vista o respeito à autonomia e dignidade desse outro” (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 278).

Ao comparar o modelo de ensino tradicional ao que é baseado em metodologias ativas, Valente (2018) aponta que, diferente do habitual que apenas transfere a informação do professor para o aluno, os ativos:

[...] procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizam, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas, fornecer e receber feedback, aprender a interagir com colegas e professor, além de explorar atitudes e valores pessoais. (VALENTE, 2018, p. 28).

Sendo assim, tendo por base o que foi exposto, verifica-se que as metodologias ativas se contrapõem às práticas pedagógicas do ensino tradicional, pois, na primeira opção, os educandos são levados a construir o conhecimento ao invés de recebê-lo pronto. A participação desse contexto também garante um papel protagonista e autônomo do estudante, tornando-o responsável por sua aprendizagem e modificando seu papel de mero receptor de informações transmitidas.

Atualmente, a maioria das instituições de ensino faz uso de métodos de ensino tradicionais e, portanto, “[...] o ensino acaba ocorrendo de modo repetitivo, isto é, as aulas

acabam sendo constituídas por falas do professor e audições dos alunos, normalmente desmotivados."(CAMARGO, 2018, p. 13), gerando dificuldades de aprendizagem.

Com base nessa premissa, ações pedagógicas, fundamentadas em metodologias ativas tornam-se relevantes, logo, ao envolver os aprendizes, de forma ativa, em todo o processo, promovem:

[...] o protagonismo estudantil, a apreensão das informações mediadas, habilidades comunicacionais, habilidades de raciocínio avançadas, trabalho em equipe, motivação, novos recursos de aprendizagem e respeito aos vários estilos de aprendizagem. (MOREIRA; RIBEIRO, 2016, p. 97).

Além disso, favorecem o aumento da flexibilidade cognitiva, que é “[...] a capacidade de alternar e realizar diferentes tarefas, operações mentais ou objetivos e de adaptar-nos a situações inesperadas [...]” (MORAN, 2018, p. 3). Dessa forma ocorre a superação de modelos mentais rígidos e automatismos pouco eficientes (MORAN, 2018).

Nesse novo cenário educacional, ocasionado pelo surgimento das metodologias ativas, o professor deixa de ser considerado como única fonte de conhecimento e informação e assume um papel de orientador, supervisor e facilitador do processo de aprendizagem (BARBOSA; MOURA, 2013).

Segundo Moran (2018), nos dias de hoje, já não faz mais sentido que o professor explique tudo e o aluno anote, pesquise e mostre o que aprendeu, já que a forma de fazer isso mudou, significativamente, e sobre qualquer assunto, há uma grande variedade de textos, vídeos e animações que oferecem as informações de maneira apropriada. Conforme o autor, cabe ao professor selecionar os materiais mais relevantes e criar um roteiro orientador para que os alunos estudem no ambiente virtual e, em sala de aula, recebem ajuda dele para ampliar o conhecimento.

Entretanto, cumpre enfatizar que para que o estudante abandone seu papel de mero receptor de conteúdo para assumir uma postura mais ativa diante do seu processo de aprendizagem, é necessário que os processos educativos acompanhem essas mudanças (DAROS, 2018b). Sendo assim:

As instituições de ensino precisam organizar, em seus currículos e cursos, atividades integradoras da prática com a teoria, do compreender com o vivenciar, o fazer e o refletir, de forma sistemática, em todas as áreas e durante todo o processo de profissionalização. (DAROS, 2018b, p. 10).

Dentro dessa nova concepção, as escolas precisam repensar seus espaços físicos como um todo. Nesse sentido, Moran (2015) enfatiza que as salas de aula devem oferecer diversas possibilidades, facilitando atividades em grupo, de plenário e individuais e, além disso, “[...] os ambientes precisam estar conectados em redes sem fio, para uso de tecnologias móveis o que implica ter uma banda larga que suporte conexões simultâneas necessárias [...]” (MORAN, 2015, p. 19).

Além disso, [Debald \(2020\)](#) chama a atenção para a importância de se investir na formação continuada dos docentes para que se possa romper com modelos de ensino tradicionais. Para o autor, iniciativas de inovação terão sucesso se a equipe docente receber capacitação qualificada.

Segundo [Valente \(2018\)](#), tradicionalmente, as metodologias ativas têm sido implementadas através de diversas estratégias e a integração das TDIC no seu desenvolvimento tem facilitado sua implantação. Nesse contexto, [Moran \(2018\)](#) ratifica que combiná-las com tecnologias digitais móveis é hoje estratégia para a inovação pedagógica, porquanto:

As tecnologias ampliam as possibilidades de pesquisa, autoria, comunicação e compartilhamento em rede, publicação, multiplicação de espaços e tempos; monitoram cada etapa do processo, tornam os resultados visíveis, os avanços e as dificuldades. As tecnologias digitais diluem, ampliam e redefinem a troca entre os espaços formais e informais por meio de redes sociais e ambientes abertos de compartilhamento e coautoria. ([MORAN, 2018, p. 12](#)).

Esse mesmo autor enfatiza que o destaque na palavra ativa deve sempre estar associado à aprendizagem reflexiva para que os processos, os conhecimentos e as competências do que se aprende, em cada atividade, tornem-se visíveis. Para que isso ocorra, o bom professor-orientador é decisivo da mesma forma que a tecnologia digital, pois permite o registro e a visibilização de todo processo de aprendizagem de cada estudante para todos ([MORAN, 2017](#)).

1.4.1 A Sala de Aula Invertida

Dentre as diversas metodologias ativas em que o aluno assume o papel de protagonista, destaca-se, aqui, a “*flipped classroom* ou Sala de Aula Invertida (SAI)” ([EVANGELISTA; SALES, 2018, p. 569](#)).

A abordagem de Sala de Aula Invertida adotada, nesta pesquisa, está fundamentada no trabalho, experiências e contribuições dos autores Jonathan Bergmann e Aaron Sams, professores de Química do estado do Colorado (EUA). Eles são considerados os pioneiros e proponentes ostensivos dessa prática, embora reconheçam que não foram os primeiros educadores a usar vídeos como ferramenta didática. Além disso, são os responsáveis pela expansão dessa abordagem em vários lugares do mundo.

No livro *Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem*, também desses autores, eles relatam suas frustrações pessoais por alunos não conseguirem traduzir o conteúdo das aulas em conhecimentos úteis que lhes permitissem fazer, corretamente, o dever de casa. Foi então que Aaron percebeu que o momento em que os educandos necessitam da presença física do professor é quando eles param de evoluir e precisam de ajuda individual e não de transmissão de uma série de informações que podem receber sozinhos. Sendo assim, partiu da premissa: “E se gravássemos todas as aulas, e se os

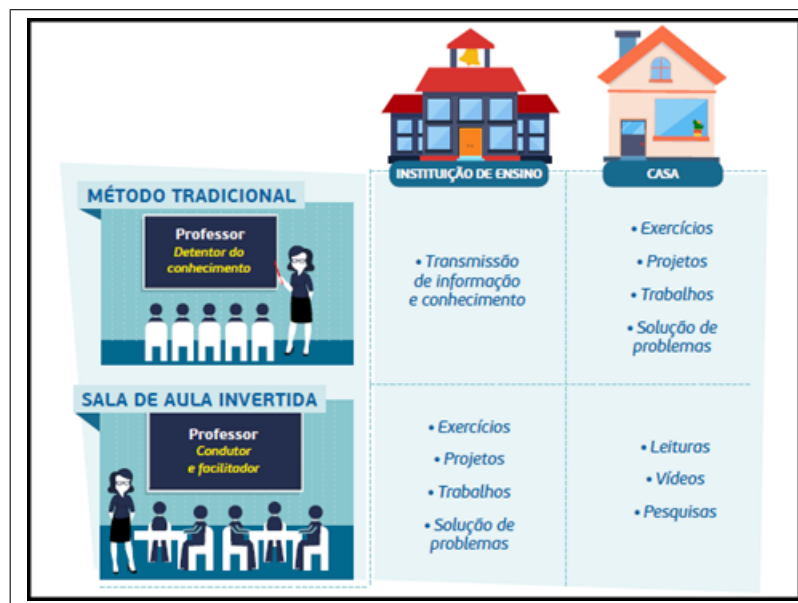
alunos assistissem ao vídeo como ‘dever de casa’ e usássemos, então, todo o tempo em sala de aula para ajudá-los com os conceitos que não compreenderam?” (BERGMANN; SAMS, 2019, p. 4).

Assim nasceu essa nova concepção:

Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula. (BERGMANN; SAMS, 2019, p. 11).

Enquanto no ensino tradicional, o espaço da sala de aula é destinado para o professor transmitir informações e, após à aula, o aluno deve realizar alguma atividade avaliativa para verificar se a matéria foi bem assimilada, no modelo citado acima, o estudante estuda o conceito antes da aula e, a sala de aula transforma-se em lugar de aprendizagem ativa, onde há questionamentos, discussões e atividades práticas (VALENTE, 2018). A ideia de Sala de Aula Invertida pode ser representada pelo esquema ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Sala de Aula Invertida



Fonte: Estratégias de ensino. Ensino Inovativo (2015).

É importante ponderar sobre como essa inversão pode resultar em melhoria na aprendizagem, visto que apenas há uma mudança entre as tarefas de casa e de aula, mas o aluno continua aprendendo através de aulas expositivas, porém em versões *on-line*. Para auxiliar nesse entendimento, Valente (2014) evidencia pontos positivos, tais como:

- Se o aluno tem contato com o material instrucional, antes da aula presencial, ele pode estudar no seu ritmo e buscar desenvolver o máximo de compreensão possível;

- (b) Através das atividades de autoavaliação, que geralmente fazem parte das tarefas on-line, os estudantes podem perceber suas principais dúvidas e planejar como melhor aproveitar o momento em sala de aula.
- (c) Os resultados da autoavaliação sinalizam para o professor os assuntos que os alunos tiveram mais dificuldade, então podem servir como ponto de partida para o encontro presencial. Além disso, o educador pode utilizar esses resultados para personalizar as atividades presenciais, conforme as necessidades dos alunos.
- (d) O tempo em sala de aula pode ser destinado ao aprofundamento dos conhecimentos adquiridos de forma *on-line* e ainda para construção de novos conhecimentos;
- (e) As atividades realizadas, em sala de aula, promovem a colaboração entre os discentes e a interação entre eles e os docentes, o que é essencial no processo de ensino e aprendizagem; algo que a sala de aula tradicional não incentiva.

Segundo [Bergmann e Sams \(2019\)](#), uma das grandes vantagens dessa inversão é que ela proporciona aos alunos o poder de “pausar” e “rebobinar” o professor. Os autores chamam a atenção para o fato de que, em uma aula tradicional, a exposição do conteúdo ocorre com muita rapidez, na opinião de alguns alunos e com muita lentidão para outros. Nesse contexto, o recurso de “pausar o professor” é poderoso porque permite a cada estudante absorver as informações no seu próprio ritmo.

Para [Souza e Andrade \(2016\)](#), trata-se de bem mais que uma mudança nos horários e nos espaços físicos.

Trata-se de um processo de aprendizagem que se realiza de fato, de maneira diferente, com a vantagem de o aluno aprender de forma mais personalizada, com autonomia para desenhar, programar seu aprendizado na valorização de suas habilidades e competências, tendo o professor como um facilitador do processo de aprendizagem. ([SOUZA; ANDRADE, 2016](#)).

Os parágrafos acima apontam para a personalização do ensino. Sabe-se que estudantes da mesma idade têm necessidades distintas, não aprendem, necessariamente no mesmo ritmo e da mesma maneira ([BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015](#)). Partindo desse conhecimento, [Bergmann e Sams \(2019\)](#) defendem que a inversão da sala de aula estabelece um referencial que proporciona aos alunos uma educação personalizada, adaptada às necessidades individuais.

De acordo com [Valente \(2014\)](#), a preparação do material para o estudo *on-line* e o planejamento das atividades presenciais são aspectos indispensáveis da implantação dessa metodologia. O autor destaca que para os materiais *on-line*, geralmente, são utilizados vídeos gravados pelo professor, porém deve haver cuidado com o número deles e o tamanho. "A ideia não é substituir a aula presencial por vídeos, pois os alunos reclamam do fato de a aula expositiva ser chata e essa mesma aula transformada em vídeo pode ficar mais chata ainda!" ([VALENTE, 2014](#), p. 90). Também é importante que o estudante realize um teste

on-line para que o professor possa saber o que foi assimilado do estudo, bem como as maiores dificuldades para serem elucidadas em sala de aula (VALENTE, 2014).

Vale ressaltar que, necessariamente, o professor não precisa gravar seus próprios vídeos. Ele pode optar por materiais desse tipo de outros professores, desde que sejam de boa qualidade. Alguns desejam inverter sua sala de aula, mas não têm tempo para gravar ou não se sentem confortáveis para fazer isso. Nesse caso, usar a opção acima, talvez seja a melhor escolha (BERGMANN; SAMS, 2019).

Em relação às atividades presenciais, devem ser propostas de forma coerente e que ajudem os estudantes no processo de construção do conhecimento. Podem ser discussões em grupo, resolução de problemas etc. Porém, em todos os casos, é indispensável que os estudantes recebam *feedback* imediato, uma vez que ele é fundamental para corrigir concepções equivocadas ou mal elaboradas (VALENTE, 2014).

Cabe ainda mencionar que não há uma única maneira de utilizar tal metodologia e nem um passo a passo a seguir que leve a resultados garantidos. Inverter a sala de aula tem mais a ver com a ideia de deslocar a atenção do professor para o aluno e para a aprendizagem (BERGMANN; SAMS, 2019).

Nesse contexto, Valente (2014) reitera que o tipo de material ou as atividades que o estudante realiza, *on-line* e na sala de aula, podem variar, conforme a proposta estabelecida; criando diferentes possibilidades para a abordagem. Todavia, algumas regras básicas, destacadas por esse autor, segundo o relatório *Flipped Classroom Field Guide 6*⁴, devem ser seguidas:

- (1) As atividades realizadas devem levar o estudante a recuperar, aplicar e ampliar o conhecimento adquirido durante o estudo *on-line*. Elas devem proporcionar momentos de questionamentos, resolução de problemas entre outras práticas de aprendizagem ativa.
- (2) O *feedback* deve ser oferecido aos alunos, imediatamente após o desenvolvimento das tarefas presenciais.
- (3) Tanto as atividades *on-line* quanto as presenciais devem ser computadas na avaliação formal dos alunos, incentivando que eles participem de ambas.
- (4) O material que será destinado ao estudo *on-line* e os ambientes de aprendizagem, em sala de aula, devem ser bem estruturados e planejados.

Um fato importante, evidenciado por Bergmann (2018), é que os alunos, muitas vezes, não realizam as tarefas de casa. Para o autor, isso ocorre por motivos como: falta de motivação; não possuir os conhecimentos prévios necessários para realizar a tarefa; falta de apoio adequado em casa ou falta de tempo. Além disso, ele ainda ressalta que alguns professores passam dever de casa porque, tradicionalmente, é isso que é feito e, raramente,

⁴ Disponível em: <https://tlc.uic.edu/files/2016/02/Flipped-Classroom-Field-Guide.pdf>

se faz uma análise mais profunda acerca da quantidade, qualidade ou a eficácia da tarefa. Consoante o autor, para contribuir positivamente com o aprendizado do estudante, o dever de casa não só tem que ser ensinado de forma proporcional à capacidade, mas também relevante e significativo.

Ainda de acordo com esse autor, essa inversão pode ser a solução para o problema supradito, posto que nesse modelo de ensino “os alunos fazem o trabalho leve antes da aula e o difícil em aula, onde o professor está lá para ajudá-los.” (BERGMANN, 2018, p. 11).

Vale acrescentar a isso que dentre as competências gerais da Educação Básica definidas pela BNCC (BRASIL, 2018a) destaca-se:

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. (BRASIL, 2018a, p. 10).

Pode-se afirmar que a Sala de Aula Invertida, ao propor atividades que incitam a colaboração e a cooperação entre os estudantes, é uma metodologia de ensino que contribui para o desenvolvimento da competência supracitada.

Por fim, é importante realizar uma breve discussão sobre a forma de avaliar nesse modelo de ensino. No modelo ativo, o processo de avaliação é contínuo, se realiza durante todo o processo e não apenas no fim (MUNHOZ, 2015).

No ensino tradicional, a avaliação tem por objetivo a exatidão da reprodução do conteúdo apresentado em sala de aula, sem a preocupação com averiguar se o aluno de fato compreendeu o conteúdo, na Sala de Aula Invertida, “a avaliação mensura o grau de desenvolvimento do aluno em relação a um estágio inicial que, se não comprovado, pode ser retomado até que o aluno seja considerado apto.”(MUNHOZ, 2015, p. 66).

Essa avaliação contínua da aprendizagem está prevista na Lei de Diretrizes e Bases, no primeiro item do inciso V do Art.24 está descrito que:

A verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios: a) avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais. (BRASIL, 2018b, p. 18).

Munhoz (2015) faz uma observação interessante acerca do método tradicional de avaliação. Ele afirma que não é difícil que alunos com elevada avaliação escolar não tenham sucesso no mercado ou, por outro lado, aqueles com baixo desempenho apresentem alto êxito. Para o autor, “isso ocorre devido ao erro no enfoque da avaliação, quando ela se restringe a avaliar a capacidade de retenção de conteúdo, ao invés da capacidade de solucionar problemas.” (MUNHOZ, 2015, p. 81).

1.5 Trabalhos Relacionados

Com o intuito de aprimorar este trabalho, foi realizada uma pesquisa no Catálogo de Teses e Dissertações, em busca de trabalhos com temas semelhantes.

Inicialmente, uma busca utilizou o termo Análise Combinatória, obtendo-se 269 trabalhos. Aplicando os filtros disponíveis no site, refinou-se a pesquisa: (i) Ano: seleção dos trabalhos publicados de 2015 a 2019, foram encontrados 140 resultados. (ii) Grande área de Conhecimento: a opção foi Ciências exatas e da Terra e apresentou 103 trabalhos. (iii) Área de Conhecimento: Matemática, exibiu 95 opções. (iv) Área Avaliação: Matemática, mostrou 95 produções. (v) Área Concentração: Ensino de Matemática, trouxe 49 arquivos. Em seguida, realizou-se uma leitura do resumo, introdução e das considerações finais desses materiais.

Por fim, filtrou-se novamente, optando por aqueles direcionados a alunos do Ensino Fundamental, restando assim 3 apontamentos que são detalhados a seguir.

1.5.1 Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental

A dissertação intitulada “Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental” (BARRETO, 2017), de autoria de Alice Pontes Barreto teve como objetivo “propiciar uma sequência didática que favoreça a construção do raciocínio combinatório, desde os anos iniciais da Educação Básica, facilitando, com isso, o prosseguimento do conteúdo no Ensino Médio.” (BARRETO, 2017, p. 7). Para alcançar esse objetivo, a autora elaborou atividades, com base nos conceitos e procedimentos referentes a cada um dos ciclos do Ensino Fundamental. Ela utilizou a metodologia da Resolução de Problemas aliada ao uso de jogos e materiais manipuláveis.

Foram elaboradas 11 atividades. As três primeiras, direcionadas para discentes do 2º e/ou 3º ano do Ensino Fundamental. As atividades contemplavam questões cujas resoluções envolviam representações gráficas, contando com o auxílio de materiais manipuláveis. Segundo a autora, os exercícios foram preparados objetivando o favorecimento da leitura e a interpretação de problemas estimulando o espírito investigativo.

As atividades 4, 5 e 6 foram concentradas nos alunos do 4º e/ou 5º ano do Ensino Fundamental e elaboradas a fim de revisar os conceitos já aprendidos no 2º e 3º anos. Esse material abordava a identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contá-los através de estratégias pessoais.

As atividades 7 e 8 canalizaram-se nos estudantes do 6º e/ou 7º ano do Ensino Fundamental. O intuito era explorar problemas de contagem, por meio de representações gráficas, em um nível maior de dificuldade, incluindo também outras representações.

Já as atividades 9, 10 e 11 focaram-se nos alunos do 8º e/ou 9º ano do Ensino Fundamental. A abordagem tratava problemas de contagem, envolvendo os Princípios Multiplicativo e Aditivo e utilizava um jogo de tabuleiro, elaborado pela autora.

1.5.2 O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

O estudo realizado por Vanessa Prado Beraldo da Paz, relatado em sua dissertação intitulada “O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas” (PAZ, 2017) teve como público-alvo alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Bastos, São Paulo.

O referido trabalho trouxe como objetivo “apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) através da metodologia de Resolução de Problemas, dando ênfase na prática pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).” (PAZ, 2017, p. 9). Para alcançar tal propósito, a autora delineou e aplicou uma sequência didática, composta por questões da OBMEP adaptadas e que teve como tema o Princípio Fundamental da Contagem.

Inicialmente, ela aplicou uma avaliação diagnóstica, composta por quatro questões, retiradas do banco de questões da OBMEP – Níveis 1 e 2, algumas com adaptações. Essa etapa durou 100 minutos. Após a análise das respostas dos alunos, o material foi devolvido aos participantes da pesquisa e as questões resolvidas, em grupo, através da metodologia de Resolução de Problemas.

O segundo passo da sequência didática teve duração de 200 minutos, fragmentado em dois dias. Os estudantes foram divididos em grupos e os problemas da avaliação diagnóstica foram vistos novamente, com o objetivo de desenvolver as quatro etapas da metodologia Resolução de Problemas, elaborada por POLYA (2006), sendo eles: (i) Compreensão do problema; (ii) Estabelecimento de um plano; (iii) Execução do plano; (iv) Retrospecto. Para cada problema os participantes deveriam preencher uma ficha com perguntas que traziam o propósito de auxiliá-los a organizar o raciocínio, possibilitando que traçassem o plano mais eficaz de resolução. Além disso, para cada problema, receberam materiais concretos, confeccionados pela autora, para que pudessem manusear durante o exercício.

Para finalizar a sequência didática, uma avaliação - constituída por três problemas retirados do banco de questões da OBMEP, com algumas adaptações - foi elaborada e aplicada a fim de averiguar a aprendizagem dos alunos.

Após análise, a autora concluiu que “a metodologia de Resolução de Problemas

apresenta-se como uma excelente estratégia para se ensinar Matemática.” (PAZ, 2017, p. 98), pois, ao se trabalhar com questões contextualizadas, estimula o aluno a refletir e questionar sobre os problemas, buscando soluções e desenvolvendo sua autonomia, propiciando, dessa forma, um ambiente favorável para a aprendizagem.

1.5.3 Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental

A dissertação intitulada “Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental” (AZEVEDO, 2017), de autoria de Elionôra Rodrigues de Azevedo teve como objetivo “analisar como alunos do Ensino Fundamental solucionam problemas simples de análise combinatória não conhecendo suas definições, conceitos e fórmulas – e a partir desta investigação, propor novas formas de trabalhar esse tema com alunos mais novos.” (AZEVEDO, 2017, p. 6). Buscando alcançar respostas, foram propostas dois tipos de atividades denominadas “Atividades de Apresentação” e “Atividades Teste”. O público-alvo foram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Minas Gerais.

As Atividades de Apresentação foram constituídas por três atividades, todas realizadas em dupla. A atividade 1, composta por quatro questões, teve o intuito de introduzir a ideia do Princípio Fundamental da Contagem. Os alunos deveriam listar todas as possibilidades para, posteriormente, encontrar uma forma de padronizar. A atividade 2 foi composta por sete questões sobre anagramas.

A atividade 3 teve o objetivo de trabalhar o conceito de Combinação. Um texto introdutório sobre o sistema Braille foi apresentado, em seguida, o público-alvo deveria determinar quantas celas Braille distintas seria possível estabelecer.

Após a realização da etapa acima, os participantes deveriam resolver uma atividade teste, composta por quatro questões, retiradas do banco de questões da OBMEP.

Todo o conteúdo - Atividades de Apresentação e Teste – foi desenvolvido pelos alunos, com a intervenção da pesquisadora, sem a formalização de conceitos e sem o uso de fórmulas. As estratégias para tentar resolver eram pessoais. Na maioria das vezes, tentavam listar todas as possíveis possibilidades e em alguns casos conseguiam padronizar.

Segundo a autora, os resultados da pesquisa foram satisfatórios e acredita que trabalhar com os conceitos de análise combinatória no Ensino Fundamental pode contribuir, de forma significativa, para a solução de problemas mais complexos que serão abordados no Ensino Médio.

No Quadro 2 destaca-se o objetivo, semelhanças e diferenças entre os trabalhos descritos com este.

Quadro 2 – Trabalhos Relacionados

TÍTULO	AUTOR/ANO	PROPOSTA	SEMELHANÇA	DIFERENÇA
Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental	BARRETO (2017)	Propiciar uma sequência didática que favoreça a construção do raciocínio combinatório, desde os anos iniciais da Educação Básica, facilitando, com isso, o prosseguimento do conteúdo no Ensino Médio.	Explora os Princípios Multiplicativo e Aditivo. Propôs atividades com o uso de materiais manipuláveis. Parte da proposta é destinada a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.	A sequência didática é destinada a todas as etapas do Ensino Fundamental. Utilizou-se a metodologia Resolução de Problemas. Não foi aplicada.
O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	DA PAZ (2017)	Apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) através da metodologia de Resolução de Problemas, dando ênfase na prática pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP.)	Exploração do Princípio Fundamental da Contagem. A proposta foi aplicada. Utilizou materiais concretos.	O público-alvo foram alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Utilizou a metodologia de Resolução de Problemas. Também difere em relação ao objetivo e à sequência didática.
Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental	AZEVEDO (2017)	Analisar como alunos do Ensino Fundamental solucionam problemas simples de análise combinatória não conhecendo suas definições, conceitos e fórmulas – e a partir desta investigação, propor novas formas de trabalhar esse tema com alunos mais novos.	Exploração do Princípio Multiplicativo. A proposta foi aplicada. O público-alvo foram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.	Se difere no que tange à sequência didática, ao objetivo e à metodologia.

Fonte: Elaboração própria.

1.6 Materiais manipuláveis no ensino de Matemática

De acordo com [Reys \(1982 apud VALE, 1999\)](#) são denominados materiais manipuláveis os objetos ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar.

No que se refere aos materiais manipuláveis, utilizados para o ensino de matemática, [Rodrigues \(2015\)](#) os classifica em estruturados e não-estruturados. Os estruturados são aqueles que apresentam ideias matemáticas bem definidas, tais como: geoplano, material dourado, tangram, entre outros. Já os não-estruturados não têm função definida e seu uso depende da criatividade. São exemplos: carretéis, palitos de picolé, tampas de garrafa, caixas de papelão, entre outros objetos utilizados no cotidiano ([RODRIGUES, 2015](#)).

[Schulz e Herley \(2016\)](#) frisam a relevância do trabalho com materiais manipuláveis nas aulas de matemática, visto que, segundo esses autores, o manuseio desses materiais oferece aos alunos várias formas de aprendizagem por meio da ludicidade, curiosidade, manipulação, etc. Além disso,

A prática com Materiais Manipuláveis garante à criança a compreensão de conceitos Matemáticos, transformando uma aula cansativa, repetitiva e de informações decoradas em situações desafiadoras que vão além da sala de aula e da avaliação do professor, despertando no aluno o gosto pela Matemática. ([SCHULZ; HERLEY, 2016](#), p. 6).

[Gervázio \(2017\)](#) defende que no ensino da matemática, para que ocorra uma aprendizagem mais efetiva, é fundamental que se tenha uma teoria, porém essa deve estar aliada à prática. Dessa forma, “envolver os alunos com materiais concretos e manipulativos, com o intuito de promover uma familiarização com o universo matemático, deve ser um método indispensável para a educação.” [Gervázio \(2017, p. 45\)](#). Ainda segundo esse autor:

Mesclar o experimental com o abstrato, na didática da sala de aula, pode promover uma aprendizagem mais eficaz, pois estimula o cálculo mental, a dedução de estratégias, o domínio das operações fundamentais, a construção de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio lógico. E esses são os pontos cruciais para a efetivação do verdadeiro conhecimento matemático. ([GERVÁZIO, 2017](#), p. 45).

[Vale \(1999\)](#) afirma que são os objetos concretos que possibilitam a passagem para o nível abstrato. Sendo assim, a introdução de um conceito novo de matemática, independentemente do nível, poderá iniciar sempre com concreto, com a utilização de manipuláveis, posteriormente passar para o estágio semiconcreto; neles, os discentes observam as demonstrações do professor. Por fim avançar para o estágio abstrato, onde os discentes usarão apenas a simbologia.

Por outro lado, a simples utilização de material manipulável não garante uma aprendizagem efetiva e significativa. Para que isso ocorra é necessário que o planejamento da aula esteja pautado em objetivos claros e definidos. Além disso, deve haver a interação

professor/aluno/material e o uso de uma metodologia diferenciada (SCHULZ; HERLEY, 2016).

Diante do exposto, é possível avaliar que a utilização de manipuláveis, articulada com o conteúdo matemático a ser ensinado pode contribuir, de forma significativa, para aprendizagem do aluno.

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos do presente trabalho, descrevendo a caracterização da pesquisa; o atual contexto educacional; o espaço escolar; o público-alvo; as etapas da investigação; a elaboração da avaliação diagnóstica e o detalhamento da proposta didática.

2.1 Caracterização da Pesquisa

Entende-se como Pesquisa “[...] um procedimento formal, com método de pensamento reflexivo que requer tratamento científico e se constitui no caminho para conhecer a realidade ou para descobrir verdades parciais.” (MARCONI; LAKATOS, 2019, p. 169).

Buscando responder à questão de pesquisa “Como a metodologia de ensino denominada Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental?” a presente pesquisa possui abordagem qualitativa e foi executada por meio de intervenção pedagógica.

Por ser a aprendizagem subjetiva e o principal objeto de análise nesta pesquisa, os dados coletados foram, criticamente, analisados pela pesquisadora e apoiados no referencial teórico adotado, sem a utilização de elementos estatísticos.

Sendo assim, é possível inferir que se trata de uma pesquisa de abordagem qualitativa, o que é confirmado por Zanella (2013) quando declara que:

Enquanto o método quantitativo de pesquisa preocupa-se com a medição dos dados, o método qualitativo não emprega a teoria estatística para medir ou enumerar os fatos estudados. Preocupa-se em conhecer a realidade segundo a perspectiva dos sujeitos participantes da pesquisa, sem medir ou utilizar elementos estatísticos para análise dos dados. (ZANELLA, 2013, p. 99).

A partir do levantamento bibliográfico realizado, buscou-se elaborar e aplicar uma proposta didática, destinada a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II, almejando

investigar como a metodologia Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, para esse público-alvo. Justifica-se então, a escolha da técnica da pesquisa intervenção pedagógica que segundo [Damiani et al. \(2013\)](#):

[...] envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências. ([DAMIANI et al., 2013](#), p. 57).

Quanto à necessidade de diálogo com um referencial teórico, os autores supracitados evidenciam que uma investigação sem diálogo com as teorias existentes não teria significado. Ressaltam também que na pesquisa intervenção pedagógica há a tentativa de solucionar um problema coletivo, no qual pesquisadores e participantes agem de forma cooperativa ou participativa. No que se refere à possibilidade de produzir conhecimento, eles ainda declaram que os objetivos das intervenções pedagógicas vão além do desejo de testar ideias teóricas, colocando-as em prática, elas visam a promover avanços, nessas ideias, contribuindo para a produção de teoria educacional ([DAMIANI et al., 2013](#)).

Além disso, em razão do seu caráter aplicado, as intervenções pedagógicas podem ser consideradas pesquisas, uma vez que têm por objetivo contribuir para a solução de problemas práticos ([DAMIANI et al., 2013](#)).

Para a presente pesquisa, foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: as observações da pesquisadora, durante a realização das atividades, com registro em diário de campo; as atividades; o questionário e as avaliações diagnóstica e de aprendizagem.

Em relação à coleta de dados, [Marconi e Lakatos \(2019\)](#) declaram que as técnicas adotadas para a sua realização podem variar conforme as circunstâncias ou o tipo de investigação. É nessa fase da pesquisa que se iniciam a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas.

Ainda segundo esses autores, a observação tem um sentido muito mais amplo que, exclusivamente, ver e ouvir. Ela se baseia, também, em investigar fatos ou fenômenos que se pretendam estudar e possibilita ao pesquisador a percepção e obtenção de provas em relação a objetivos sobre os quais os sujeitos não notam, mas influenciam seu comportamento ([MARCONI; LAKATOS, 2019](#)).

Quanto ao diário de campo, trata-se de uma técnica de observação, rica em detalhes; impressões e registros que fazem a diferença na etapa de análise dos dados coletados ([GUERRA, 2018](#)).

Por fim, optou-se por utilizar o questionário como um dos instrumentos para a coleta de dados, uma vez que “[...]constitui o meio mais rápido e barato de obtenção de informações, além de não exigir treinamento de pessoal e garantir o anonimato.” ([GIL, 2002](#),

p. 115). Além disso, por garantir a não identificação dos responsáveis pelas respostas, possibilita que o respondente se sinta confortável para expor sua opinião (ZANELLA, 2013).

2.2 A pandemia de COVID-19

Em dezembro de 2019, ocorreu, em Wuhan na China, a transmissão de um novo coronavírus (SARS-CoV-2) e causou a COVID-19, sendo, posteriormente, propagada e transmitida pessoa a pessoa, se espalhando, rapidamente, pelo território chinês e em outros países, principalmente na Itália, Espanha, Estados Unidos, Canadá e Brasil (BRASIL, 2020a). A COVID-19 é uma doença respiratória causada por esse novo coronavírus que embora, geralmente, se apresente como infecções leves, pode evoluir para dispneia ou, em casos mais graves, Síndrome Respiratória Aguda Grave (SRAG) (BRASIL, 2020a).

Em 30 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou que o surto da doença provocada pelo novo coronavírus (COVID-19) representa uma emergência de saúde pública global e em 11 de março de 2020, a doença foi caracterizada pela OMS como uma pandemia (BRASIL, 2020a).

De acordo com especialistas, medidas como o isolamento e distanciamento social; uso de máscaras e formas mais apropriadas de higiene, tais como lavar as mãos, com frequência; o uso do álcool em gel; não levar a mão à boca, olhos ou nariz estão sendo as mais efetivas na não propagação do vírus e enquanto não há uma vacina o uso dessas medidas é importante para evitar a transmissão (SILVA; SILVA NETO; SANTOS, 2020).

2.2.1 Educação em tempos de pandemia

Como consequência das medidas preventivas contra a transmissão do coronavírus, destaca-se o cancelamento das atividades escolares presenciais, visto que esse espaço é um ambiente que concentra grande quantidade de sujeitos, favorecendo assim a propagação de doenças. No dia 13 de março de 2020, o Governador do Estado do Rio de Janeiro, Wilson Witzel, editou o decreto nº 46.970, suspendendo por 15 dias, as aulas presenciais nas escolas públicas e particulares, em todo o Estado. Em seu art. 4º, esse decreto dispõe o seguinte:

Art. 4º - De forma excepcional, com o único objetivo de resguardar o interesse da coletividade na prevenção do contágio e no combate da propagação do coronavírus, (COVID-19), determino a suspensão, pelo prazo de 15 (quinze) dias, das seguintes atividades: VI - das aulas, sem prejuízo da manutenção do calendário recomendado pelo Ministério da Educação, nas unidades da rede pública e privada de ensino, inclusive nas unidades de ensino superior, sendo certo, que o Secretário de Estado de Educação e o Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação deverão expedir em 48 (quarenta e oito horas) ato infralegal para regulamentar as medidas de que tratam o presente Decreto. (RIO DE JANEIRO, 2020a, p. 1).

Os Estados e municípios vêm editando seus próprios decretos e os reeditam, conforme o aumento da curva de contaminação.

Algumas alternativas foram propostas para assegurar o direito constitucional de acesso à educação. Dentre elas, no dia 17 de março de 2020, o Ministério da Educação publicou a Portaria nº 343, dispondo sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais durante o tempo que durar a pandemia de COVID-19 (BRASIL, 2020d). Esse documento foi alterado pelo MEC, através da Portaria nº 345/2020, publicada em 19 de março de 2020 e dispõe, em seu art.1º, que:

Fica autorizada, em caráter excepcional, a substituição das disciplinas presenciais, em andamento, por aulas que utilizem meios e tecnologias de informação e comunicação, por instituição de educação superior integrante do sistema federal de ensino, de que trata o art. 2º do Decreto nº 9.235, de 15 de dezembro de 2017. (BRASIL, 2020c, p. 1).

No que se refere à Educação Básica, no dia 18 de março, o Conselho Nacional de Educação publicou uma nota de esclarecimento, afirmando que seria da competência das autoridades dos sistemas de ensino federal, estaduais, municipais e distrital autorizar a realização de atividades, à distância, nos seguintes níveis e modalidades: Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional Técnica de nível Médio, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e Educação Especial (BRASIL, 2020b).

O conselho sugeriu uma série de atividades não presenciais que as redes de ensino podem utilizar, durante a pandemia. Algumas das alternativas sugeridas são: meios digitais, videoaulas, plataformas virtuais, redes sociais, programas de televisão ou rádio, material didático impresso e entregue aos responsáveis (ESTRELLA; LIMA, 2020).

Dessa forma, os Conselhos Estaduais de Educação (CEE) passaram a se posicionar a favor da adoção de atividades escolares à distância, na Educação Básica, enquanto permanecerem as medidas de isolamento, previstas pelas autoridades estaduais na prevenção e combate ao Coronavírus. Sendo assim, a secretaria estadual do Rio de Janeiro editou a Deliberação CEE nº 376, de 23 de março de 2020, que estabelece em seu Art.1º, que:

As instituições vinculadas ao Sistema de Ensino do Estado do Rio de Janeiro, públicas ou privadas da Educação Básica e públicas de Educação Superior poderão reorganizar suas atividades escolares, a partir de seus projetos pedagógicos, a serem realizadas pelos estudantes e profissionais da educação em regime especial domiciliar. (RIO DE JANEIRO, 2020b, p. 3).

Tanto escolas particulares como públicas realizaram uma rápida adaptação do ensino presencial, passando a adotar o Ensino Remoto Emergencial (JOYE; MOREIRA; ROCHA, 2020).

Há um consenso entre as autoridades, gestores e professores de que a educação precisa continuar, com a finalidade de não perder o ano letivo. Torna-se necessária, então, a

adaptação e a superação por parte de professores e alunos (PASINI; CARVALHO; ALMEIDA, 2020).

Face ao exposto anteriormente, urge uma adequação da metodologia, ao atual contexto educacional, caracterizado pela substituição das atividades escolares presenciais por remotas. Para este trabalho, adotou-se a metodologia de ensino Sala de Aula Invertida, com a utilização de aulas *on-line* síncronas, através do *Google Meet*, em substituição às presenciais.

2.3 O espaço escolar

A pesquisa foi desenvolvida com alunos de uma escola particular localizada na Avenida Campista, 155, Parque Guarus, na cidade de Campos dos Goytacazes.

A escola foi fundada em 1996 e oferece o ensino do maternal aos anos finais do Ensino Fundamental. Conta, atualmente, com 182 alunos matriculados.

O cancelamento das aulas, em razão da pandemia de COVID-19, levou a instituição a adotar o Ensino Remoto Emergencial e os encontros presenciais foram substituídas pelos *on-line* síncronos, realizados através de ferramentas como o *Google Meet*, *ZOOM* e *WhatsApp*, facilitando a comunicação entre professores e alunos. Também foi usada a plataforma *Google Sala de Aula* como ambiente virtual de aprendizagem. É importante mencionar que a escola não contratou o *G Suite for Education*, limitando assim os recursos oferecidos pelo *Google Meet*.

Esse estabelecimento de ensino foi escolhido por ser local de trabalho da pesquisadora.

É importante mencionar que a referida Unidade Escolar autorizou (Apêndice J), formalmente, a realização da pesquisa que contou também com a autorização, por escrito, dos responsáveis legais dos alunos participantes (Apêndice K).

2.4 O público-alvo

A pesquisa foi realizada em uma turma de 9º ano da escola supramencionada. A classe era composta por sete alunos, identificados por A1, A2,..., A7 em ordem alfabética.

A partir dos estudos relatados no referencial teórico desta pesquisa, constatou-se que, de forma geral, os estudantes possuem grande dificuldade em resolver problemas de contagem e que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo que deve ocorrer, durante todo período de escolarização. Sendo assim, realizou-se uma avaliação diagnóstica com o público-alvo, com o intuito de verificar o nível de conhecimento acerca dos conceitos dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.

A análise da avaliação mostrou que esses alunos possuíam uma grande defasagem em relação ao conteúdo.

2.5 Etapas da Pesquisa

Buscando atingir o objetivo geral, as seguintes etapas foram seguidas:

- 1) Revisão bibliográfica acerca do tema Análise Combinatória, TDIC, Metodologias Ativas e Sala de Aula Invertida em literaturas especializadas nos assuntos;
- 2) Pesquisa sobre recursos pedagógicos que facilitem o ensino e aprendizagem do Princípio Multiplicativo;
- 3) Elaboração, aplicação e análise dos resultados da avaliação diagnóstica;
- 4) Elaboração da proposta didática e questionários para coleta de dados;
- 5) Teste exploratório da proposta didática com professores de matemática;
- 6) Análise dos dados levantados no teste exploratório;
- 7) Aplicação da proposta didática e do questionário dos alunos;
- 8) Análise dos resultados obtidos na aplicação e no questionário.

Iniciou-se a pesquisa com uma revisão da literatura em livros e artigos, com a finalidade de averiguar as principais problemáticas relatadas pelos autores acerca do ensino de Análise Combinatória. Os documentos oficiais também foram lidos a fim de oferecerem orientações para o ensino de Análise Combinatória para a etapa do Ensino Fundamental.

Dando continuidade ao estudo, um levantamento bibliográfico sobre TDIC, Metodologias Ativas, Sala de Aula Invertida e recursos pedagógicos que facilitem o ensino e aprendizagem do Princípio Multiplicativo foi realizado. A opção pela metodologia ativa Sala de Aula Invertida acontece por apresentar-se como viável para aplicação através do ensino remoto, pois, conforme [Munhoz \(2015\)](#) não importa a forma de abordagem e efetivação, essa metodologia pode estar tanto no ambiente presencial, combinando momentos presenciais e não presenciais, ou nas salas de aula eletrônicas onde o processo de imersão do estudante é total, com acompanhamento de tutoria *on-line* ([MUNHOZ, 2015](#)).

Após o levantamento bibliográfico, cujos resultados estão no capítulo 1: Aporte Teórico, iniciou-se a elaboração da avaliação diagnóstica.

2.6 A avaliação diagnóstica

Segundo [Santos e Varela \(2007\)](#), a avaliação diagnóstica é uma etapa do processo educacional que deve ocorrer no início de cada ciclo de estudos e tem por finalidade averiguar o nível de conhecimentos anteriores adquiridos e quais as ações necessárias para solucionar dificuldades identificadas. Esse diagnóstico “[...] é constituído por uma sondagem,

projeção e retrospectiva da situação de desenvolvimento do aluno, dando-lhe elementos para verificar o que aprendeu e como aprendeu.” (SANTOS; VARELA, 2007, p. 4).

Sendo assim, foi elaborada e aplicada uma avaliação diagnóstica (Apêndice A) sobre os Princípios Aditivo e Multiplicativo, com o objetivo de verificar o nível de conhecimento dos alunos acerca desses conceitos.

A avaliação foi elaborada no formato de teste de múltipla escolha utilizando o Formulário *Google* e respondida, individualmente, pelos alunos, durante a aula *on-line* síncrona. Embora as questões fossem de múltipla escolha, a professora/pesquisadora solicitou aos alunos que enviassem a foto das resoluções das questões para o *WhatsApp*.

A partir dos dados obtidos com a análise dos resultados dessa avaliação, foi possível identificar as principais lacunas de aprendizagem em relação aos conceitos abordados.

2.7 A proposta didática

A partir dos resultados obtidos na avaliação diagnóstica, elaborou-se a proposta didática. Como já mencionado, as atividades foram aplicadas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. De acordo com o calendário escolar eram ministradas seis horas/aula de matemática, por semana, cada uma com duração de 50 minutos; sendo três, na terça-feira e a outra parte, na quinta-feira.

Os encontros estavam sendo ministrados por meio do Ensino Remoto Emergencial. A escola adotou o *Google Sala de Aula* como ambiente virtual de aprendizagem e os momentos *on-line* síncronos, a pesquisadora optou pelo *Google Meet* onde as reuniões aconteciam, seguindo o horário referente às aulas presenciais.

A proposta didática foi constituída por atividades de estudo individual e de trabalho em equipe, tendo a professora/pesquisadora o papel de mediadora, durante todo o processo, uma vez que, segundo Moran (2018), a aprendizagem formal é construída, a partir de um processo equilibrado entre: a construção individual – em que cada estudante percorre e escolhe seu caminho; a grupal – em que ele amplia sua aprendizagem, através da interação e compartilhamento de informações, atividades e produções em equipes e a tutorial, em que aprende com a orientação de profissionais mais experientes como um professor, mediador ou mentor (MORAN, 2018). Além disso, foram contemplados diferentes recursos e atividades, possibilitando aos discentes a aprendizagem de diferentes formas, favorecendo a personalização do ensino (MORAN, 2018).

Nesta pesquisa, optou-se por utilizar vídeos produzidos por terceiros. Segundo (BERGMANN; SAMS, 2019, p. 32), “usar vídeos produzidos por outros professores, em vez de fazer os próprios vídeos, talvez seja a melhor opção para quem está começando a inverter a sala de aula”.

Foram selecionados cinco vídeos, dentre os quais três eram do *YouTube* e dois da plataforma *Khan Academy*. Para a escolha, foram considerados os seguintes critérios: (i) não haver nenhum erro conceitual; (ii) utilizar uma linguagem clara e adequada ao 9º ano; (iii) não ser muito longo, para que não se tornasse cansativo para os alunos; (iv) estar de acordo com os objetivos estabelecidos.

As atividades elaboradas para serem desenvolvidas nos encontros síncronos (Apêndice B) foram submetidas a um teste exploratório com professores de matemática, todos com experiência no ensino de Análise Combinatória. A finalidade deste teste foi realizar uma avaliação da proposta didática e detectar possíveis falhas nela. A partir dele, as correções necessárias foram realizadas, antes da experimentação com os alunos. O produto das atividades que compõem a proposta didática encontra-se, detalhado, nas subseções a seguir.

2.7.1 Detalhamento da proposta didática

As atividades foram desenvolvidas, no decorrer do mês de setembro de 2020. O processo de desenvolvimento delas ocorreu, conforme o cronograma representado no Quadro 3

Quadro 3 – Cronograma do desenvolvimento das atividades

Data	Atividade Síncrona	Atividade Assíncrona	Duração
03/09/2020	Atividade 1		2h30min
03/09/2020 até 06/09/2020		Atividade 2	
08/09/2020	Atividade 3		2h30min
08/09/2020 até 09/09/2020		Atividade 4	
10/09/2020	Atividade 5		2h30min
10/09/2020 até 13/09/2020		Atividade 6	
15/09/2020	Atividade 7		2h30min
17/09/2020	Avaliação de Aprendizagem		1h40min

Fonte: Elaboração própria.

As subseções a seguir trazem o detalhamento das atividades que foram desenvolvidas, durante os momentos síncronos (Apêndice D) e assíncronos.

2.7.1.1 Momento síncrono 1

O Quadro 4 sintetiza as atividades desenvolvidas no primeiro momento síncrono. Logo após, detalha-se a Atividade 1.

Quadro 4 – Momento síncrono 1

Data	Atividades Desenvolvidas
03/09/2020	Aula inaugural: Apresentação da metodologia Sala de Aula Invertida; dos objetivos e das atividades a serem realizadas, tanto no momento assíncrono como no síncrono.
	Atividade 1 (em grupo): Resolução de problemas de contagem, com o apoio de materiais manipuláveis. Comparação das soluções das questões da atividade 1 entre os grupos, reflexão e discussão sobre elas.

Fonte: Autoria própria.

A atividade 1 foi composta por cinco questões que exploram diferentes tipos de agrupamentos. Os objetivos dela são: (i) utilizar materiais manipuláveis para facilitar o processo de compreensão do Princípio Multiplicativo, através da visualização de cada etapa da resolução dos problemas propostos e da verificação de todas as possibilidades de ocorrência já que, segundo [Schulz e Herley \(2016, p. 6\)](#), “através da manipulação, os alunos conseguem fixar o conteúdo já estudado e o proposto no momento”. (ii) reunir conhecimentos, ideias e estratégias utilizadas nas etapas de resolução dos problemas para, posteriormente, sistematizar o conceito do Princípio Multiplicativo, pois segundo [Bacich, Tanzi Neto e Trevisani \(2015\)](#), no que tange à Sala de Aula Invertida:

Podemos considerar algumas maneiras de aperfeiçoar esse modelo, envolvendo a descoberta e a experimentação como proposta inicial para os estudantes, ou seja, oferecer possibilidades de interação com o fenômeno antes do estudo da teoria. ([BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015](#), p. 56).

Para o desenvolvimento dessa etapa, cada aluno recebeu quatro kits de materiais manipuláveis (Apêndice E):

- a. *Kit* 1: uma boneca, três saias (uma vermelha, uma branca e uma rosa), duas blusas (uma branca e uma preta) e dois pares de sapatos (um par preto e um par marrom), todos feitos em E.V.A;
- b. *Kit* 2: as letras R, E e I (seis de cada) todas em E.V.A;
- c. *Kit* 3: dois dados (um vermelho e um amarelo) e uma moeda;
- d. *Kit* 4: dois balanços e quatro bonecos, todos de plástico.

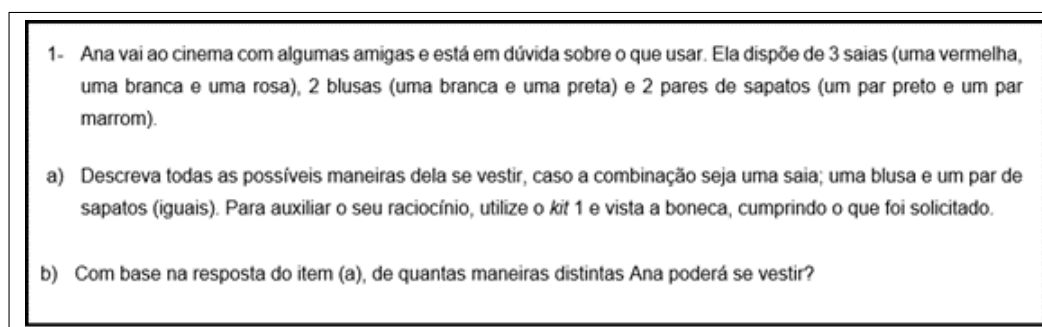
Em relação à disponibilização desses *kits*, duas possibilidades foram apresentadas: (i) cada aluno confeccionar o seu; (ii) a pesquisadora oferecê-los prontos e para serem retirados na escola. Todos os participantes escolheram a segunda opção.

Tais *kits* foram planejados com a finalidade de auxiliar na resolução das questões propostas nesta atividade, facilitando a visualização das possibilidades que deveriam ser descritas. Dessa forma, durante o desenvolvimento desta atividade, cada aluno deveria utilizar, como apoio, o *kit* referente à cada questão.

A primeira questão (Figura 11) foi composta por dois itens e trouxe um problema combinatório sobre as possíveis maneiras de combinar roupas e calçados.

No item (a) eles deveriam descrever todas as formas possíveis de uma pessoa se vestir com uma saia, uma blusa e um par de sapatos tendo à disposição: 3 saias, 2 blusas e 2 pares de sapatos, todos distintos. Para tal, deveriam, inicialmente, utilizar o *kit* 1 de material manipulável e vestir a boneca, de todas as formas possíveis. Na letra (b) foi solicitado o total de possibilidades do item (a).

Figura 11 – Primeira questão da atividade 1



Fonte: Autoria própria.

A segunda questão trouxe a definição de anagrama e apresentou, como exemplo, todos os da palavra “ANEL”.

Essa pergunta foi produzida com três itens: no (a), análise dos anagramas da palavra “ANEL”, descritos no enunciado; em seguida, os alunos deveriam identificar o que

diferenciava esses anagramas. O objetivo desse item foi verificar se os alunos conseguiriam perceber que anagramas são agrupamentos que se diferem apenas pela disposição das suas letras. No (b), eles deveriam utilizar as letras R, E e I, disponíveis no *kit 2* de material manipulável, para construir e, em seguida, descrever todos os anagramas da palavra “REI”. No item (c), precisavam determinar o total de anagramas da palavra “REI”. Buscou-se, com essa questão, apresentar aos alunos um exemplo de problema de contagem em que os agrupamentos se difiram apenas pela ordem de seus elementos.

A terceira questão (Figura 12) foi sobre as possibilidades de resultados no arremesso de uma moeda e um dado. Foi composta por três itens.

No (a), os alunos deveriam projetar, simultaneamente, uma moeda e um dado, disponíveis no *kit 3*, e registrar os resultados obtidos. Essa etapa ajudaria na solução do próximo item. No (b), eles projetariam, em uma tabela, todos os possíveis resultados nesse lançamento. Nesse item, optou-se pelo lançamento dos resultados em uma tabela, a fim de familiarizá-los com esse tipo de representação, por se tratar de uma forma de registro mais organizada. No (c), era preciso definir, com base nas informações da tabela, o total de possibilidades para o resultado desses arremessos.

Figura 12 – Terceira questão da atividade 1

3- Utilizando a moeda e um dos dados do *kit 3*, faça o que se pede nos itens a seguir.
(Use K: cara e C: coroa).

a) Lance, simultaneamente, uma moeda e um dado e observe as faces voltadas para cima. Realize esse processo três vezes e registre os resultados.

1º lançamento:
2º lançamento:
3º lançamento:

b) Complete a tabela abaixo, registrando os possíveis resultados no lançamento simultâneo de uma moeda e um dado.

	Face do dado	1	2	3	4	5	6
Face da moeda							
K		(k,1)					
C			(C,2)				

c) De acordo com seus registros na tabela do item anterior, há quantas possibilidades?

Fonte: Autoria própria.

A quarta questão, que foi composta por três itens, foi semelhante à anterior, todavia os educandos deveriam analisar os resultados possíveis no lançamento de dois dados distinguíveis (um vermelho e um amarelo), disponíveis no *kit 3*.

A distribuição dos itens ficou assim: (a) os alunos deveriam realizar três lançamentos, simultâneos, dos dois dados, e para cada arremesso, registrar o resultado. No item (b) era

preciso construir e registrar, em uma tabela, todas as possibilidades de resultado dessas jogadas. O (c), com base no anterior, determinaria o total de resultados possíveis nesses arremessos concomitantes.


Na quinta questão (Figura 13), as prováveis formas de organizar quatro amigos, em dois balanços, foi apresentada. Nela, os cinco itens traziam como intuito explorar diferentes tipos de agrupamentos.

No (a), com auxílio do material manipulável disponível no *kit 4*, eles descreveriam todas as maneiras possíveis, distintas, de ordenar esses elementos, de acordo com condições preestabelecidas. No (b), era preciso definir as possibilidades do item (a). Já o seguinte, (c), considerando todos os amigos, era preciso descrever todas as duplas que poderiam ser formadas. No item (d) determinar-se-ia o total de duplas do item anterior. No seguinte - (e) – fazia-se necessária a identificação da diferença entre as possibilidades descritas nos itens (a) e (c). O propósito desse foi verificar se os discentes conseguiriam perceber que os agrupamentos do item (a) se diferem pela ordem e natureza dos seus elementos, já no (c), se esses agrupamentos se diferem apenas pela natureza dos seus elementos.

Figura 13 – Quinta questão da atividade 1

5- Na cidade de Campos dos Goytacazes, há um parque muito atrativo para as crianças. Em determinado dia 4 amigos, Antônio, Bruno, Caio e Davi, resolveram brincar nele. Em cada item a seguir, faça o que se pede.

a) Utilizando como apoio o material disponível no *kit 4*, descreva todas as maneiras distintas dos quatro amigos brincarem nos balanços ilustrados na figura abaixo, sabendo que desejam brincar sempre dois a dois, um em cada balanço.



b) De acordo com a sua resposta para o item (a), há quantas opções?

c) Considerando os quatro amigos, descreva todas as possibilidades para a escolha de uma dupla.

d) Qual o total de possibilidades do item (c)?

e) Qual a diferença entre as possibilidades descritas no item (a) e no (c)?

Fonte: Autoria própria.

2.7.1.2 Momento assíncrono 1

O Quadro 5 sintetiza as atividades desenvolvidas no primeiro momento assíncrono. Posteriormente, apresenta-se o detalhamento da Atividade 2.

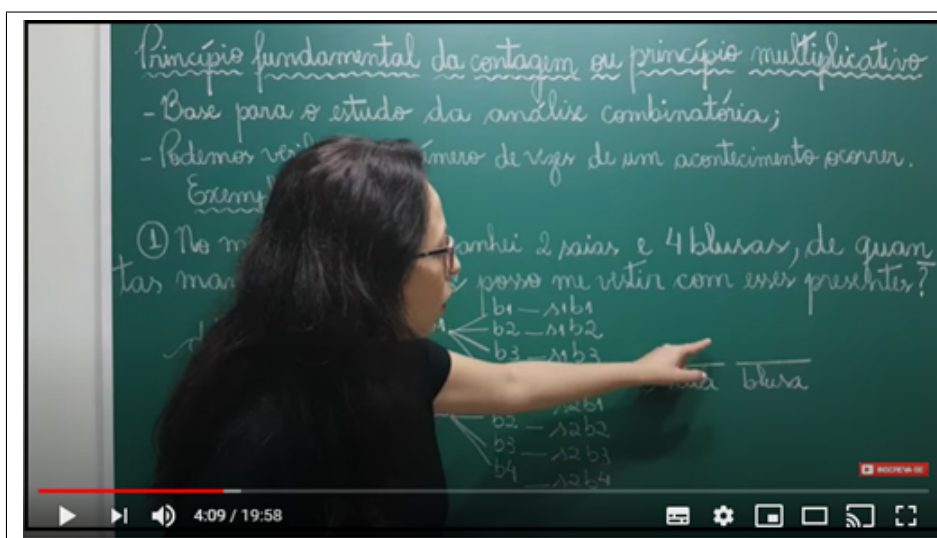
Quadro 5 – Momento assíncrono 1

Data	Atividades Desenvolvidas
03/09/2020 até 06/09/2020	Atividade 2 (individual): Assistir ao vídeo “Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela” do <i>YouTube</i> .
	Responder a um teste, com cinco questões objetivas, relacionadas ao vídeo, por meio do Formulário <i>Google</i> . Tanto o vídeo quanto o teste foram anexados no tópico da atividade, no <i>Google Sala de Aula</i> , disponível no mural da turma.

Fonte: Autoria própria.

Para esse momento os sujeitos da pesquisa necessitavam, inicialmente, assistir ao vídeo “Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela”¹ (Figura 14) do *YouTube*. Em seguida, responder a um teste intitulado “Teste para verificação de aprendizagem” (Apêndice F), com questões relacionadas ao vídeo, elaboradas por meio do Formulário *Google*. Ambos foram anexados ao tópico da atividade, no *Google Sala de Aula*, disponível no mural da turma.

Figura 14 – Vídeo “Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela”



Fonte: Canal Professora Angela Matemática.

O vídeo teve duração de 19 min 58s e introduziu o conceito do Princípio Multiplicativo e a construção do diagrama de árvore como método para auxiliar na compreensão desse

¹ <https://www.youtube.com/watch?v=3dm6pq6akQI>

princípio. Ele traz, como exemplos, a resolução de quatro problemas de contagem. Os dois primeiros são resolvidos, de forma preliminar, através do diagrama de árvore e, em seguida, aplicando o Princípio Multiplicativo. Os dois últimos são solucionados com a aplicação direta desse princípio e, por fim, a definição formal do Princípio Multiplicativo foi apresentada.

O teste, elaborado através do Formulário *Google*, contou com cinco situações-problema cuja resolução envolvia a aplicação do Princípio Multiplicativo. As questões foram retiradas ou adaptadas de [Dante \(2008, p. 472\)](#). Buscou-se, com esse exame, verificar o nível de compreensão do público-alvo sobre o conteúdo abordado no vídeo. Os resultados foram computados, automaticamente, pelo Formulário *Google* e salvos no *Google Drive* da pesquisadora. No final do prazo estipulado para a realização da atividade, os participantes receberam, por *e-mail*, as correções das questões.

2.7.1.3 Momento síncrono 2

O Quadro 6 sintetiza as atividades desenvolvidas, na segunda aula síncrona. Na sequência, o detalhamento da Atividade 3.

Quadro 6 – Momento síncrono 2

Data	Atividades Desenvolvidas
08/09/2020	Discussão sobre o conteúdo abordado no vídeo do momento assíncrono anterior; Reflexão e sistematização das resoluções das questões da atividade 1, utilizando o Princípio Multiplicativo;
	Atividade 3 (em grupo): Construção de diagramas de árvore, em questões que os relacionam ao Princípio Multiplicativo e, em seguida, comparação e discussão, entre os grupos, sobre os resultados obtidos.

Fonte: Autoria própria.

A atividade 3, teve como propósito relacionar o Princípio Multiplicativo com o diagrama de árvore para auxiliar na resolução de problemas de contagem, uma vez que essa forma de representação permite a visualização de todas as possibilidades de resultados.

Além disso, como citado na página 27, a BNCC orienta que esses tipos de problemas “[...] devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela

descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas [...]” (BRASIL, 2018a, p. 273).

A atividade foi composta por três questões e contou com um material, anexado a ele, que continha figuras para recorte que deveriam ser utilizadas para solucionar as questões 1 e 2. Todas as gravuras utilizadas foram retiradas do *Pixabay*² - um banco de imagens gratuito; nenhuma delas exigia atribuição.

A primeira questão (Figura 15) foi constituída por três itens e apresentou um problema sobre combinação de vestidos, sapatos e chapéus.

No item (a), os alunos deveriam recortar o material anexado e construir um diagrama de árvore para representar todas as possíveis formas de combinar um vestido, um par de sapatos e um chapéu. No (b), determinar-se-ia o as possíveis combinações, com base no diagrama do item anterior. No (c), era preciso definir o total de resultados do primeiro item, todavia utilizando o Princípio Multiplicativo.

Figura 15 – Primeira questão da atividade 3

1- Júlia precisa escolher um vestido, um chapéu e um par de sapatos para usar em um evento especial. Ela possui dois vestidos; dois chapéus e dois pares de sapatos apropriados para a ocasião, como pode ser observado na figura abaixo.



a) Utilizando o material disponível para recorte, em anexo nessa atividade, construa um diagrama de árvore para representar todas as possíveis maneiras de Júlia combinar um vestido, um par de sapatos e um chapéu.

b) A partir da atividade que você realizou no item anterior, analise quantas combinações Júlia pode obter.

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de combinações do item (a).

× × =

Total de opções para o vestido Total de opções para o par de sapatos Total de opções para o chapéu Total de combinações distintas de vestido, sapatos e chapéu

Fonte: Autoria própria.

Na segunda questão, foi apresentada uma situação de competição de dança, em uma escola, e determinada turma deveria escolher um casal representante dentre 4 meninos e 3 meninas.

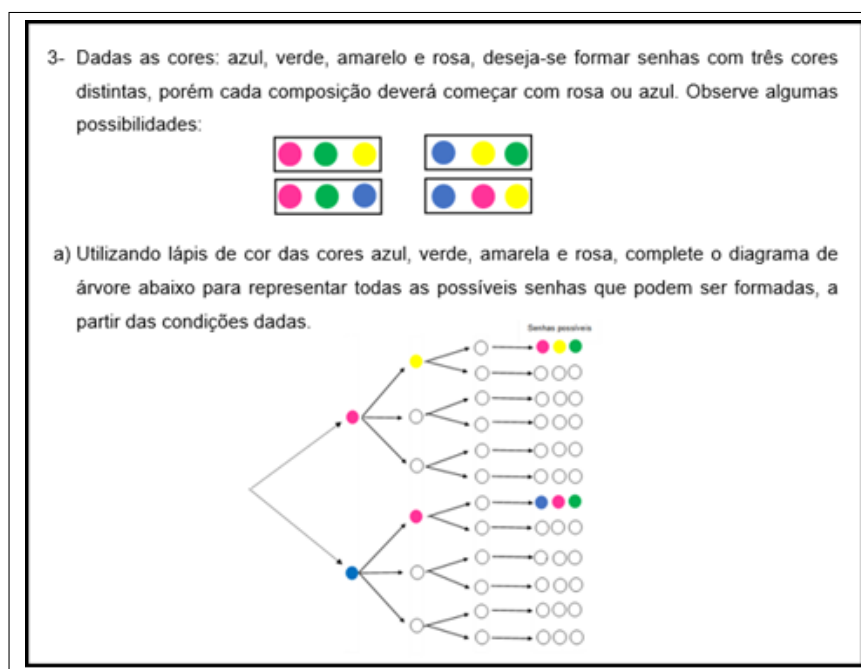
No item (a), utilizando o material disponível para recorte, um diagrama de árvore seria construído para representar as opções de escolha da dupla. No (b), era fundamental encontrar o total de possibilidades, de acordo com o diagrama do item precedente. No

² Disponível em: <https://pixabay.com/pt/>

(c), seria feito o cálculo das possibilidades de representantes, entretanto, valendo-se do Princípio Multiplicativo.

A terceira questão desenvolveu as possibilidades de formar senhas de três cores distintas, iniciadas pelos tons rosa ou azul, a partir de quatro cores. Essa parte foi composta por três itens, divididos: no (a) (Figura 16), os sujeitos da pesquisa utilizariam lápis de cor nas cores azul, verde, amarela e rosa para completar o diagrama de árvore e representar todas as possíveis senhas que poderiam ser formadas a partir das condições preestabelecidas; no (b), (Figura 17) era necessário determinar, de acordo com o item (a), o total de senhas; no (c), (Figura 17) o mesmo do item anterior, contudo, utilizando o Princípio Multiplicativo.

Figura 16 – Item (a) da terceira questão – atividade 3



Fonte: Autoria própria.

Figura 17 – Itens (b) e (c) da terceira questão – atividade 3

b) De acordo com o diagrama do item (a), quantas senhas podem ser formadas?

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar, de maneira direta, o total de senhas que podem ser formadas a partir das condições dadas.

× × =

Total de possibilidades para a 1ª cor Total de possibilidades para a 2ª cor Total de possibilidades para a 3ª cor Total de senhas

Fonte: Autoria própria.

2.7.1.4 Momento assíncrono 2

O Quadro 7 compendia as atividades desenvolvidas no segundo momento assíncrono. Sucessivamente, realiza-se o detalhamento da Atividade 4.

Quadro 7 – Momento assíncrono 2

Data	Atividades Desenvolvidas
08/09/2020 até 09/09/2020	Atividade 4 (individual): Acesso à plataforma <i>Khan Academy</i> e realização das recomendações (atividades) atribuídas pela professora/pesquisadora.

Fonte: Autoria própria.

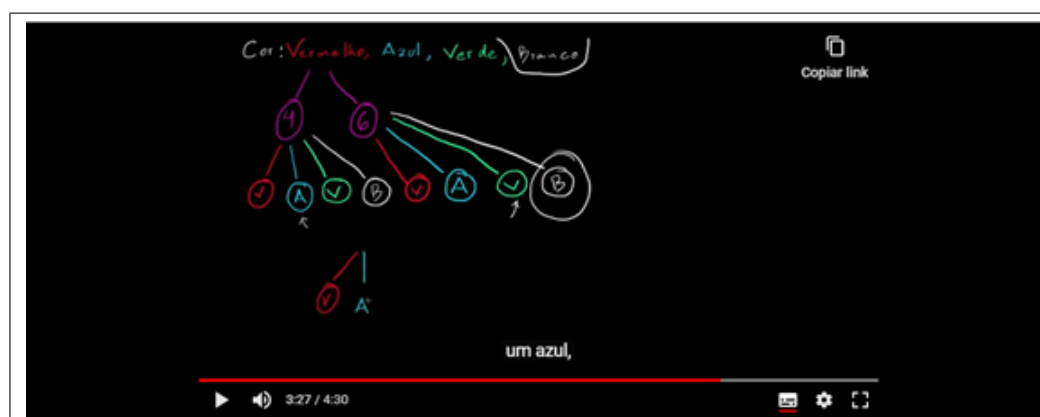
A Atividade 4 foi constituída por três recomendações – que complementaríamos as atividades 2 e 3 - atribuídas pela professora/pesquisadora, na Plataforma *Khan Academy*. Os estudantes acessariam a plataforma e realizariam as recomendações intituladas como:

- (i) Contagem de resultados usando diagrama de árvore;
- (ii) Como contar os resultados: vasos de flores;
- (iii) O princípio da contagem.

É importante mencionar que a utilização, para tal atividade, do recurso tecnológico supramencionado, deu-se em função da pesquisadora e do público participante já utilizarem essa ferramenta como apoio ao processo de ensino e aprendizagem de matemática, estando eles, portanto, habituados ao uso.

A recomendação (i) refere-se a um vídeo (Figura 18) - com duração de 4 min 30 s - que traz um exemplo de problema de contagem. A questão gira em torno da combinação de dois tipos de motores com quatro cores distintas para alcançar todas as possibilidades de escolha de um carro. Em seguida, determina-se a probabilidade de escolha de um automóvel específico. Essa situação resolve-se, inicialmente, através da construção e análise do diagrama de árvore e a ideia de multiplicação é apresentada no final.

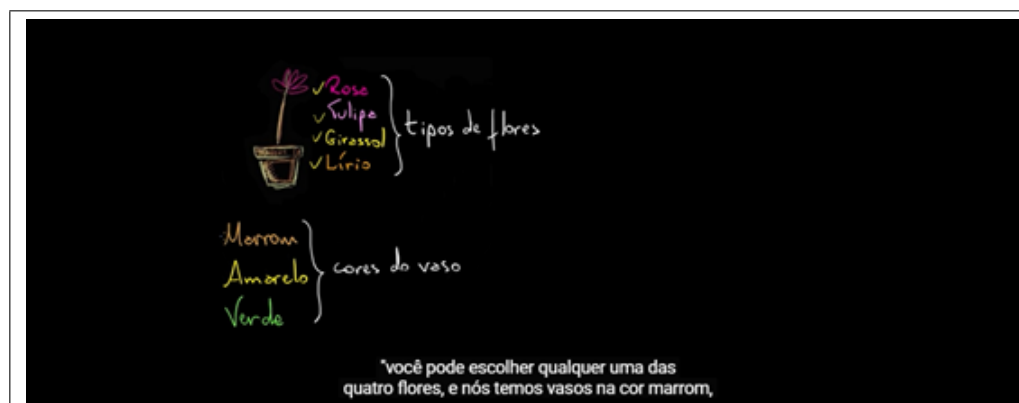
Figura 18 – Vídeo “Contagem de resultados usando diagrama de árvore”



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

A recomendação (ii) refere-se a um vídeo (Figura 19), com duração de 3 min, nele, aparece um problema de contagem em que é preciso fazer uma combinação de uma variedade de flor, dentre quatro disponíveis, com um tipo de vaso, dentre três à disposição. O problema é resolvido, inicialmente, através da descrição de todos os casos possíveis e, em seguida, utiliza-se a ideia do Princípio Multiplicativo.

Figura 19 – Vídeo “Como contar os resultados: vasos de flores”



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

Por fim, a recomendação (iii) (Figura 20) diz respeito a quatro problemas de contagem, selecionados pela própria plataforma, do banco de questões dela. No momento da recomendação, através de um recurso oferecido, decidiu-se que todos os alunos realizariam as mesmas questões.

Figura 20 – Exemplo da recomendação “O princípio da contagem”

O princípio da contagem

Você pode precisar de: [Calculadora](#)

Júlio vai fazer vários cursos de culinária. A tabela a seguir mostra quantos pratos diferentes são oferecidos em cada curso.

Curso	Número de pratos
Aperitivo	3
Prato principal	4
Sobremesa	3

Quantas combinações de refeição diferentes Júlio pode escolher?

[Mostrar calculadora](#)

A habilidade está em Proficiente! ● ● ○ ○

[Verificar](#)

Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

2.7.1.5 Momento síncrono 3

O Quadro 8 resume as atividades desenvolvidas na terceira aula síncrona. Em seguida, o detalhamento da Atividade 5.

Quadro 8 – Momento síncrono 3

Data	Atividades Desenvolvidas
10/09/2020	Discussão sobre as eventuais dúvidas acerca das questões resolvidas na plataforma <i>Khan Academy</i> ;
	Atividade 5 (em grupo): Resolução de situações-problema, com aplicação do Princípio Multiplicativo; Comparação e discussão, entre os grupos, sobre os resultados obtidos.

Fonte: Autoria própria.

A atividade 5, composta por oito questões, teve como objetivo verificar o nível de compreensão dos alunos acerca do Princípio Multiplicativo, por meio da resolução e elaboração de problemas de contagem que exploram esse conceito, pois, de acordo com a BNCC (BRASIL, 1998a, p. 311), os estudantes devem desenvolver a habilidade de “resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo”.

A primeira questão foi sobre as prováveis maneiras de um cliente fazer o pedido de

um salgado, uma bebida e uma sobremesa, em uma lanchonete que oferecia sete opções do alimento cinco do líquido e quatro do doce. Na questão subsequente, era necessário encontrar o total de números naturais, de três algarismos, que poderiam ser formados, com base em exigências estabelecida anteriormente.

A terceira questão (Figura 21) objetivou alcançar a quantidade de maneiras de uma pessoa escolher uma senha, composta por quatro dígitos, seguidos de três símbolos, porém com algumas restrições.


Prosseguindo, a quarta questão (Figura 21) deveria levá-los a encontrar o total de maneiras distintas de eleger um presidente e um vice-presidente dentre 93 candidatos. Já na quinta questão (Figura 21), o total de placas de carros que se formariam, a partir de um padrão estabelecido.

Figura 21 – Terceira, quarta e quinta questões da atividade 5

3- Uma senha bancária é formada por 4 dígitos seguidos de 3 símbolos (#, & e *). De quantas maneiras Ana pode escolher uma senha, se ela não pretende usar nem o algarismo 0 nem o símbolo #?

4- As turmas do 8º ano de certa escola, já pensando na formatura no ano seguinte, farão uma eleição entre os 93 alunos para a escolha do presidente e do vice-presidente da comissão de formatura. Considere que qualquer aluno, entre os 93, pode ser escolhido. De quantas maneiras distintas é possível formar essa dupla de representantes?

5- Desde 2016, na Argentina, as placas de carros (chamadas *chapas patentes*) estão sendo formadas no padrão Mercosul: duas letras do alfabeto de 26 letras, seguidas de 3 algarismos, seguidos de duas letras. Quantas placas podemos formar com esse padrão?



REPUBLICA DA ARGENTINA
AB 123 CD

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 205).

Na sexta questão (Figura 22), foram dados três símbolos e era preciso formar sequências de cinco figuras geométricas. Essa questão foi composta por dois itens: no item (a) eles determinariam o total de formações dessas sequências e no (b) também encontrariam o total de sequências, dessa vez, com algumas restrições.

Figura 22 – Sexta questão da atividade 5

6- Com os símbolos: ▲, ■ e ● deseja-se formar seqüências de cinco figuras geométricas, uma ao lado da outra.

a) De quantos modos distintos isso pode ser feito?

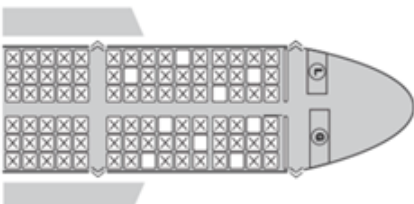
b) Se figuras vizinhas não podem ser iguais, quantas seqüências podem ser formadas?

Fonte: [lezzi et al. \(2011, p. 395\)](#).

Na sétima questão, (Figura 23) buscar-se-ia encontrar formas diferentes de acomodar uma família de sete pessoas, em nove poltronas.

Figura 23 – Sétima questão, da atividade 5

7- (Adaptada – Enem/2015) Uma família composta por 7 pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de acomodar a família nesse voo é dado por:

a) 181440

b) 36

c) 5040

d) 1440

e) 20

Fonte: Adaptada – Enem/2015.

Na oitava questão, os sujeitos elaborariam um problema de contagem e iriam resolvê-lo através do Princípio Multiplicativo. Em seguida, compartilhariam o problema com um colega de equipe que resolveria a questão. Por fim, o aluno que elaborou o problema deveria fazer a correção da solução do colega.

2.7.1.6 Momento assíncrono 3

O Quadro 9 resume as atividades desenvolvidas no terceiro momento assíncrono. Ulteriormente, detalha-se a Atividade 6.

Quadro 9 – Momento assíncrono 3

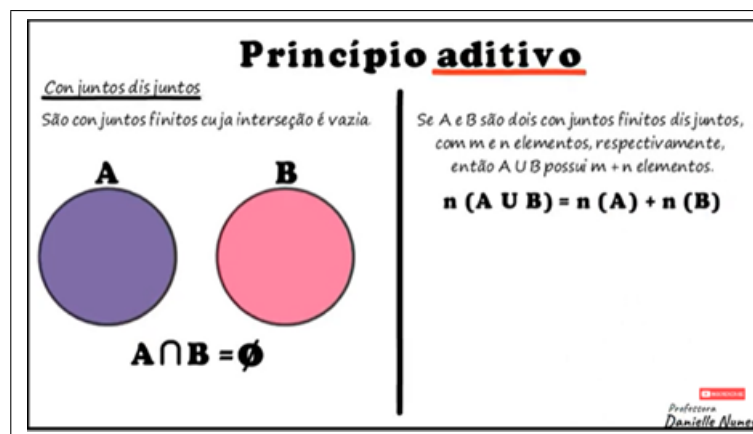
Data	Atividades Desenvolvidas
10/09/2020 até 13/09/2020	Atividade 6: Assistir aos vídeos “Princípio aditivo - Análise combinatória - Aula 02” e “Análise Combinatória - Princípios aditivo e multiplicativo”, ambos do <i>YouTube</i> . Produção de um resumo dos conteúdos abordados nos vídeos e postagem no mural da turma, no <i>Google Sala de Aula</i> .

Fonte: Autoria própria.

A Atividade 6 buscou reforçar o conceito de Princípio Multiplicativo e apresentar a conceituação do Princípio Aditivo, destacando a distinção entre eles. Para isso, foram selecionados dois vídeos do *YouTube*.

O primeiro vídeo (Figura 24), intitulado “Princípio aditivo - Análise combinatória - Aula 02”³, com duração de 3 min 34 s, traz a definição desse princípio e mostra um exemplo simples de aplicação desse conceito.

Figura 24 – Vídeo “Princípio aditivo - Análise combinatória - Aula 02”



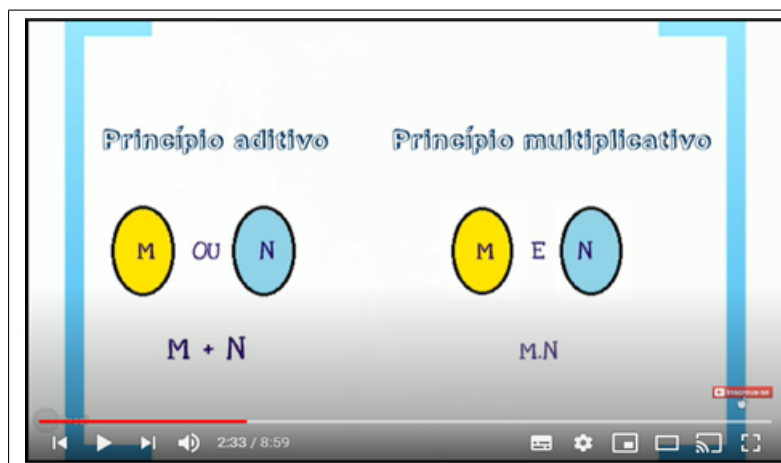
Fonte: Canal MATEMÁTICA Professora Danielle Nunes.

Já o segundo vídeo (Figura 25), intitulado “Análise Combinatória - Princípios aditivo e multiplicativo”⁴, com duração de 8 min 59 s, expõe, primeiramente, dois problemas de contagem, com a finalidade de mostrar situações diferentes: uma para aplicar o Princípio Multiplicativo e na outra, o Aditivo, evidenciando as distinção desses conceitos. Prosseguindo, são apresentados e resolvidos alguns problemas de contagem cujas resoluções envolvem a aplicação somente do Princípio Multiplicativo ou dos dois.

³ https://www.youtube.com/watch?v=FGRV_C8hJ5s

⁴ <https://www.youtube.com/watch?v=2dtHUK54j0c&t=186s>

Figura 25 – Vídeo “Análise Combinatória - Princípios aditivo e multiplicativo”



Fonte: Canal Toda a Matemática.

Para finalizar essa atividade, os participantes fariam um resumo sobre os conteúdos abordados nos vídeos, reforçando a diferença entre os conceitos dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Essas sínteses deveriam ser publicadas em um prazo estabelecido, pela professora/pesquisadora, no mural da turma, no *Google Sala de Aula*.

2.7.1.7 Momento síncrono 4

O Quadro 10 resume as atividades desenvolvidas, na quarta aula síncrona. Na sequência, o detalhamento da Atividade 7.

Quadro 10 – Momento síncrono 4

Data	Atividades Desenvolvidas
15/09/2020	Discussão sobre o conteúdo abordado no vídeo do momento assíncrono anterior
	Atividade 7 (em grupo): Resolução de situações-problema, com aplicação dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Comparação e discussão entre os grupos sobre os resultados obtidos.

Fonte: Autoria própria.

A Atividade 7 foi composta por sete questões e buscou averiguar o nível de compreensão acerca dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, através da resolução de problemas de contagem que exploram esses conceitos.

Na primeira questão (Figura 26), era imprescindível encontrar quantos anagramas de determinada palavra possuíam as vogais e as consoantes alternadas.

Figura 26 – Primeira questão da atividade 7

1- Quantos anagramas da palavra ESCOLA têm as vogais e as consoantes alternadas?

Fonte: Dante (2008, p. 483).

Na segunda questão (Figura 27), calcular-se-ia o total de números de três algarismos distintos que poderiam ser formados com alguns algarismos dados, porém foi estabelecida a condição de que esses números deveriam ser maiores que 350.

Figura 27 – Segunda questão da atividade 7

2- Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantos números naturais de três algarismos distintos maiores que 350 podemos formar?

Fonte: Dante (2008, p. 483).

Na terceira questão, em uma cantina eram vendidas seis variedades de biscoitos, quatro de sucos e cinco de frutas. Os participantes precisavam determinar quantas maneiras diferentes uma pessoa poderia compor um lanche, sabendo que ela deseja escolher, exatamente, dois alimentos diferentes.

A quarta questão (Figura 28) tratou sobre as maneiras de se formar códigos, a partir de três símbolos. Ela foi composta por três itens: no (a), o total de códigos de cinco símbolos, começados por um determinado símbolo, seria calculado; no (b) quantos códigos poderiam ser formados com dois até quatro símbolos? no (c), era para encontrar quantos códigos se formariam, com três símbolos diferentes.

Figura 28 – Quarta questão da atividade 7

4- Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: •, -, x. Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

- de cinco símbolos começam por "••"?
- contêm de dois a quatro símbolos?
- são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

Fonte: lezzi et al. (2011, p. 395).

Na quinta questão (Figura 29), apresentou-se a seguinte situação: uma empresa criará uma página na internet e precisa definir um formato de senha para acesso ao sítio. O

programador ofereceu cinco formatos. Era preciso definir o que melhor atendia às condições estabelecidas.

Figura 29 – Quinta questão da atividade 7

5- (Enem/2017) Uma empresa construirá sua página na *internet* e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidos pelo programador, descritos no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das posições. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V


Fonte: Enem/2017.

Na sexta questão, retirada do banco de questões da OBMEP, buscava-se resolver a seguinte situação: o total de ordens diferentes em que três casais de namorados podem sentar-se em um banco, de modo que cada namorado se sente ao lado de sua respectiva namorada. Na sétima questão (Figura 30), era preciso saber o total de livros de uma biblioteca, conhecendo o código desses impressos e sabendo que cada um recebe um código, formado por três letras do alfabeto e esses exemplares são colocados em estantes em ordem alfabética.

Figura 30 – Sétima questão da atividade 7

7- (OBMEP/2016) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

a) 676
b) 1352
c) 2016
d) 2028
e) 2030



Fonte: OBMEP/2016.

2.7.1.8 Momento síncrono 5

O momento síncrono 5 foi destinado à aplicação da avaliação de aprendizagem (Apêndice G). Segundo Munhoz (2015), já citado anteriormente, na página 49, no modelo ativo o processo de avaliação é contínuo, realiza-se, durante todo o processo e não apenas no fim.

Com base nas afirmações do autor, cabe salientar que a avaliação de aprendizagem trouxe como propósito complementar o processo avaliativo. Esse processo aconteceu, durante toda a experimentação da proposta, averiguando não só os conhecimentos construídos, mas também as lacunas de aprendizagem, em relação ao estudo dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, que o público-alvo ainda apresentava.

Para finalizar a experimentação, elaborou-se, por meio do Formulário *Google*, uma avaliação, composta por sete questões de múltipla escolha. Diferente da diagnóstica, na de aprendizagem priorizou-se questões com níveis variados de dificuldade, visto que os alunos já haviam realizado atividades dessa forma, durante a experimentação da proposta didática.

2.8 Elaboração dos questionários

Usando o recurso do Formulário *Google*, idealizaram-se dois questionários: um, para ser respondido pelos professores, participantes do teste exploratório (Apêndice C) e outro pelos alunos, participantes da experimentação da proposta didática (Apêndice H).

O questionário, direcionado para os docentes, possui, para cada atividade a ser avaliada, quatro afirmações, colocadas a fim de levantar dados, e um espaço para comentários ou sugestões.

O que foi destinado aos alunos, constitui-se de seis perguntas: quatro de múltipla escolha e duas abertas. A finalidade é de captar a percepção desses estudantes sobre a metodologia Sala de Aula Invertida.

Capítulo 3

Análise da avaliação diagnóstica e o Teste exploratório da proposta didática

Neste capítulo, relatam-se a aplicação e a análise da avaliação diagnóstica e o teste exploratório, com professores de matemática.

3.1 Aplicação e análise dos resultados da avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica foi composta por cinco questões. Como os alunos haviam relatado à pesquisadora que não recordavam dos conceitos dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, julgou-se conveniente selecionar questões consideradas de nível básico, com enunciados simples e que poderiam ser resolvidas através da descrição e enumeração de todos os casos possíveis. Caso o resultado dessa avaliação fosse considerado satisfatório, seria aplicada uma outra, com questões de níveis mais avançados.

A avaliação foi realizada no dia 07 de julho de 2020. Nesse dia, participaram da aula 6 alunos e de acordo com as observações realizadas, durante o desenvolvimento, eles tiveram dificuldade para lembrar e aplicar, corretamente, os Princípios Multiplicativo e Aditivo.

A primeira questão (Figura 31) trouxe um problema simples sobre as possíveis maneiras de escolher um par de calçados, nela, os alunos deveriam utilizar a ideia intuitiva do Princípio Aditivo. Apenas um participante marcou a opção correta, porém não registrou nenhum tipo de resolução o que sugere que pode ter sido marcada de forma aleatória. A maioria (4) tentou aplicar o Princípio multiplicativo e um escolheu a opção de forma incerta.

Figura 31 – Primeira questão da avaliação diagnóstica

Carla pretende ir ao shopping com suas amigas, mas está em dúvida sobre o que calçar. Sabendo que ela dispõe de 3 pares de sandálias e 4 pares de tênis, todos distintos, de quantas maneiras Carla poderá escolher um par de calçados?

Fonte: Autoria própria.

Na segunda questão (Figura 32), precisavam determinar o total de possibilidades para escolher um lanche composto de um sanduíche e um copo de suco. Todos marcaram a opção correta. A maior parte (5) resolveu utilizando o Princípio Multiplicativo e apenas um tentou utilizar uma estratégia pessoal, como mostra a Figura 33, porém não conseguiu concluir seu raciocínio. Acredita-se que ele marcou a opção de maneira casual.

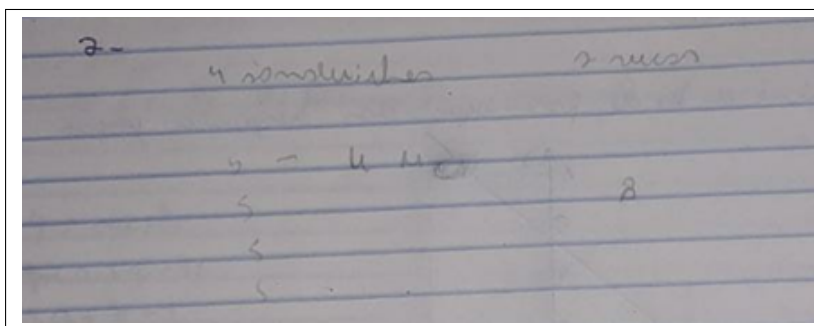
Figura 32 – Segunda questão da avaliação diagnóstica

Para fazer um lanche, uma pessoa deve escolher um sanduíche e um copo de suco. Sabendo que há 4 opções de sanduíche e 2 opções de suco, de quantas maneiras essa pessoa poderá escolher seu lanche?

Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Resolução sem conclusão do aluno A6 para a segunda questão da avaliação diagnóstica

1



Fonte: Dados da pesquisa.

A terceira questão (Figura 34) era para determinar o total de números de dois algarismos que poderiam ser formados com três opções de algarismos. Somente dois marcaram a opção correta, contudo um deles afirmou “não fiz nada” (Figura 35), evidenciando uma resposta aleatória.

Figura 34 – Terceira questão da avaliação diagnóstica

Quantos números de dois algarismos é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3? *

Fonte: adaptado de [lezzi et al. \(2011, p. 394\)](#).

Figura 35 – Afirmação do aluno A2 para a terceira questão da avaliação diagnóstica 1

A photograph of a student's handwritten response on lined paper. The text is written in dark ink and reads "3 - não fez nada". The paper has horizontal lines, and the handwriting is somewhat slanted.

Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta questão (Figura 36) era semelhante à terceira, porém os números deveriam ser formados por algarismos distintos. Nenhum dos participantes teve êxito.

Figura 36 – Quarta questão da avaliação diagnóstica

Quantos números de dois algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3? *

Fonte: adaptado de [lezzi et al. \(2011, p. 394\)](#).

Na quinta questão (Figura 37), o total de maneiras distintas de se combinar uma calça com uma blusa, tendo três calças e cinco blusas disponíveis era o desafio apresentado a eles. Todos responderam corretamente.

Figura 37 – Quinta questão da avaliação diagnóstica

Uma pessoa dispõe de 3 calças e 5 blusas, todas distintas. De quantas maneiras essa pessoa pode combinar uma calça com uma blusa? *

Fonte: Autoria própria.

Após observação e análise de todas as respostas, constatou-se que a maioria dos sujeitos da amostra tentou aplicar o Princípio Multiplicativo para resolver todas as questões, entretanto foi possível perceber que estavam fazendo isso de forma mecânica, simplesmente, multiplicavam os valores que apareciam nos enunciados das questões. Em conversa com eles, através de um grupo de *WhatsApp* criado pela pesquisadora para facilitar a comunicação, ao serem questionados sobre a razão pela qual eles haviam multiplicado

os valores que apareciam nos enunciados, praticamente, todos responderam que não se lembravam como resolver e multiplicaram. A Figura 38 ilustra parte da referida conversa com os alunos.

Figura 38 – Conversa com os alunos no grupo de *WhatsApp* da turma



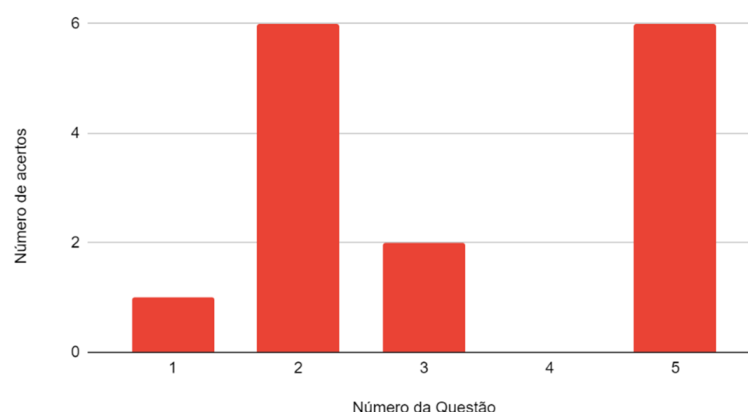
Fonte: Dados da pesquisa.

Essa justificativa dos estudantes pôde ser confirmada, durante a análise das resoluções, pois todos acertaram as questões 2 e 5, nas quais o Princípio Multiplicativo podia ter sido aplicado de maneira direta, pois elas traziam nos enunciados, de forma explícita, o número de opções para cada decisão que deveria ser tomada. Nota-se, contudo, que nos exercícios 3 e 4 essas informações não foram mostradas de forma explícita e, somente um sujeito, resolveu corretamente.

Os resultados obtidos nessa avaliação mostraram que o público-alvo possuía uma grande deficiência em relação aos conteúdos abordados. Sendo assim, optou-se por desenvolver esta pesquisa, nessa turma de 9º ano, durante o período de duas semanas, de forma paralela ao conteúdo curricular, com o objetivo de que eles não chegassem ao Ensino Médio com essa defasagem.

O Gráfico 1 ilustra o resultado quantitativo do desenvolvimento dos alunos, relacionando o número de acertos, por questões da avaliação diagnóstica.

Gráfico 1 – Número de acertos por questão da avaliação diagnóstica



Fonte: Autoria própria.

3.1.1 Teste exploratório

Com o objetivo de realizar uma avaliação das atividades que deveriam ser desenvolvidas, durante os momentos síncronos, e identificar possíveis falhas nelas, realizou-se um teste exploratório com professores de matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental. Através dele, as correções necessárias foram realizadas, antes da experimentação com os alunos. Posteriormente, solicitou-se aos docentes que respondessem a um questionário (Apêndice C) sobre a avaliação das atividades.

O teste exploratório foi feito com cinco profissionais de matemática das redes pública e privada de ensino, do município de Campos dos Goytacazes, em agosto de 2020. Eles foram identificados como P1, P2, ..., P5 e escolhidos por terem experiência no ensino de Análise Combinatória, podendo, então, oferecer opiniões bem fundamentadas. Do total, quatro lecionam há mais de cinco anos na Educação Básica.

As atividades e o questionário foram enviados, por *e-mail*. Eles responderam, realizando uma análise da proposta através do questionário citado. Nele, os professores deveriam assinalar para cada afirmação a opção que considerassem mais adequada, sabendo que a variação de notas ocorre de 1 a 5, em que 1 é a nota mínima e 5 é a máxima a se atribuir. Além disso, para cada atividade, foi destinado um espaço para comentários ou sugestões que eles julgassem pertinentes. A seguir, serão apresentadas a análise do questionário e as questões que receberam sugestões de alterações, bem como as modificações realizadas.

3.1.1.1 Análise do questionário dos professores

Em relação à atividade a ser desenvolvida no encontro síncrono 1 (Atividade 1), todos atribuíram a nota máxima nos itens: relevância para o estudo do tema e atenção aos objetivos propostos. Dos cinco, dois conferiram nota 4 nos quesitos - avaliar se as questões

possuíam um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II e se estavam claras sobre o que deveria ser feito. Os demais atribuíram a nota máxima.

Na oportunidade, os docentes fizeram algumas sugestões. Na segunda questão, itens (b) e (c), os alunos deveriam utilizar o material manipulável, referente a essa questão, para construir e, em seguida, descrever todos os anagramas da palavra “ANEL” que começam com a letra A e os do vocábulo “SABER” que são iniciado com B e terminam com A. O professor P1 sugeriu acrescentar uma questão em que não houvesse restrições para os anagramas. Já o P4 sugeriu algo semelhante ao P1. As Figuras 39 e 40 mostram as recomendações do P1 e P4, respectivamente.

Figura 39 – Sugestão do professor P1, em relação à segunda questão da atividade 1

Questão 2) Poderia acrescentar uma pergunta sobre o total de anagramas, sem determinar condições para letra inicial ou final.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 40 – Sugestão do professor P4 sobre a segunda questão, da atividade 1

NO ITEM " A " DA QUESTÃO 2, PODERIA SER PEDIDO APENAS OS ANGRAMAS E NÃO FIXANDO UMA LETRA PARA COMEÇAR.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como os alunos deveriam construir e descrever todos os anagramas, julgou-se apropriado substituir as palavras “ANEL” e “SABER” por uma que tivesse menos transposições de letras e ainda retirar as restrições para a construção delas. Dessa forma, essa questão foi modificada conforme mostram as Figuras 41 e 42.

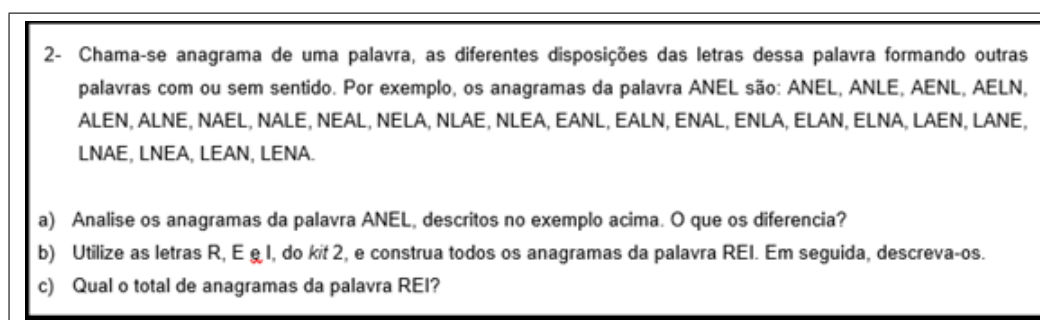
Figura 41 – Segunda questão da atividade 1, antes da alteração

2- Chama-se anagrama de uma palavra, as diferentes disposições das letras dessa palavra formando outras palavras com ou sem sentido. Por exemplo, os anagramas da palavra REI são: REI, RIE, IRE, IER, ERI e EIR.

- a) Analise os anagramas da palavra REI, descritos no exemplo acima. O que os diferencia?
- b) Utilize as letras A, N, E e L, do kit 2, e construa todos os anagramas da palavra ANEL que começam com a letra A e, em seguida, descreva-os.
- c) Agora, considere a palavra SABER. Construa e descreva todos os anagramas dessa palavra que começam com a letra B e terminam com a letra A.
- d) De acordo com as respostas anteriores, determine o total de anagramas dos itens (b) e (c).

Fonte: Autoria própria.

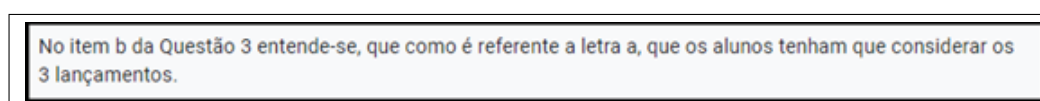
Figura 42 – Segunda questão da atividade 1, após a alteração



Fonte: Autoria própria.

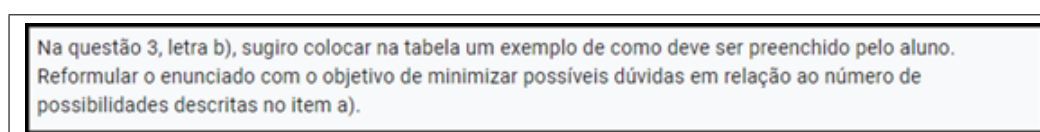
Ainda na atividade 1, no item (b) da terceira questão, o objetivo era que os estudantes registrassem, em uma tabela, todos os resultados possíveis, no lançamento de uma moeda e um dado. Os professores P3 e P5 sugeriram a reformulação do enunciado de forma a torná-lo mais claro quanto ao que deveria ser feito. Além disso, o P5 indicou que fossem incluídos alguns exemplos na tabela para facilitar a compreensão dos alunos sobre como deveriam preenchê-la. As Figuras 43 e 44 mostram as sugestões dos professores P3 e P5.

Figura 43 – Sugestão do professor P3 em relação ao item (b) da terceira questão - atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 44 – Sugestão do professor P5 em relação ao item (b) da terceira questão - atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa.

As alterações foram feitas conforme mostram as Figuras 45 e 46 .

Figura 45 – Terceira questão, item (b), da atividade 1, antes das alterações

b) Registre na tabela abaixo todas as possibilidades para o resultado do item (a).

Face do dado \ Face da moeda	1	2	3	4	5	6
K						
C						

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 46 – Terceira questão, item (b) da atividade 1, após as alterações

b) Complete a tabela abaixo, registrando os possíveis resultados no lançamento simultâneo de uma moeda e um dado.

Face do dado \ Face da moeda	1	2	3	4	5	6
K	(k,1)					
C		(C,2)				

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito à atividade que seria desenvolvida no encontro síncrono 2 (Atividade 3), todos os professores conferiram nota máxima ao avaliarem: sua relevância para o estudo do tema, se possuía um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II e se atendia ao objetivo proposto. Sobre a clareza do material, somente um participante atribuiu nota 4, os demais concederam nota máxima. Não foram sugeridas alterações para essa atividade.

Sobre o que seria desenvolvido no encontro síncrono 3 (Atividade 5), todos os docentes atribuíram nota máxima, ao identificarem a relevância dela para o estudo do tema, bem como sua sincronia com o objetivo apresentado. Dois deles, porém, deram nota 4, ao observarem se as questões possuíam um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II e se estavam claras em relação ao que deveria ser feito. Os demais, conferiram a nota máxima.

Ainda sobre a atividade supramencionada, o professor P5 propôs aumentar a qualidade de visualização da imagem anexa na sétima questão. A pesquisadora aceitou a sugestão e fez o sugerido. Na segunda questão, os estudantes deveriam determinar o total de números naturais de três algarismos que poderiam ser formados, a partir de algumas condições dadas. O enunciado não apresentava restrições quanto aos algarismos que poderiam ser usados para formar os números. Esperava-se que os eles entendessem que deveriam considerar todos os algarismos do sistema decimal. O professor P4 recomendou que o enunciado informasse de forma mais clara os algarismos que eles tinham à disposição

deles. A Figura 47 mostra essa recomendação.

Figura 47 – Sugestão do professor P4 em relação à segunda questão da atividade 5

O NÍVEL DAS QUESTÕES ESTÁ MUITO BOM SEGUINDO A SEQUÊNCIA EM QUE AS ATIVIDADES ESTÃO SENDO APLICADAS. QUANTO A QUESTÃO 2, SERIA INTERESSANTE INFORMAR QUAIS ALGARISMOS O ALUNO TEM A SUA DISPOSIÇÃO PARA UTILIZAR.

Fonte: Dados da pesquisa.

A alteração foi realizada, como pode ser observado nas Figuras 48 e 49.

Figura 48 – Segunda questão da atividade 5 antes da alteração

2- Quantos números naturais de três algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das centenas corresponde a um múltiplo de 3 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 5?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 49 – Segunda questão da atividade 5, após a alteração

2- Dispondo dos dez algarismos do sistema decimal (0, 1, 2, ..., 9), quantos números naturais de três algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das centenas corresponde a um múltiplo de 3 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 5?

Fonte: Dados da pesquisa.

Sobre o material que seria trabalhado no encontro síncrono 4 (Atividade 7), todos os docentes conferiram nota máxima, ao analisarem se era relevante para o estudo do tema, se estava clara sobre o que deveria ser feito e se atendia ao que se propunha. Se as questões possuíam um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II, um deles deu nota 3 e outro, 4. Os demais, nota máxima. Não houve solicitação de mudança para essa atividade.

Capítulo 4

Experimentação e análise de dados da proposta didática

Neste capítulo, a experimentação e as análises dos dados serão relatadas. Como mencionado, anteriormente, em virtude do cancelamento das aulas presenciais, a metodologia Sala de Aula Invertida, adotada nesta pesquisa, foi adaptada à atual realidade educacional em que se encontram alunos e professores.

Sendo assim, as atividades foram desenvolvidas, em três momentos assíncronos, com a postagem do material de estudo, no mural da turma, no *Google Sala de Aula* e em outros cinco momentos *on-line* síncronos, através de reuniões no *Google Meet*.

Em relação à disponibilização dos exercícios e do material manipulável para os alunos, foram sugeridas duas alternativas: (i) cada participante imprimir suas atividades e confeccionar o material manipulável; (ii) a pesquisadora disponibilizar as atividades impressas e o material manipulável, ambos para serem retirados na escola. Todos decidiram pela última opção.

Dessa forma, além das atividades impressas, cada estudante recebeu quatro *kits* de material manipulável (Figura 50), descritos no capítulo anterior, e um frasco de álcool em gel para higienização, como medida de prevenção contra o coronavírus.

Figura 50 – Kits disponibilizados aos alunos

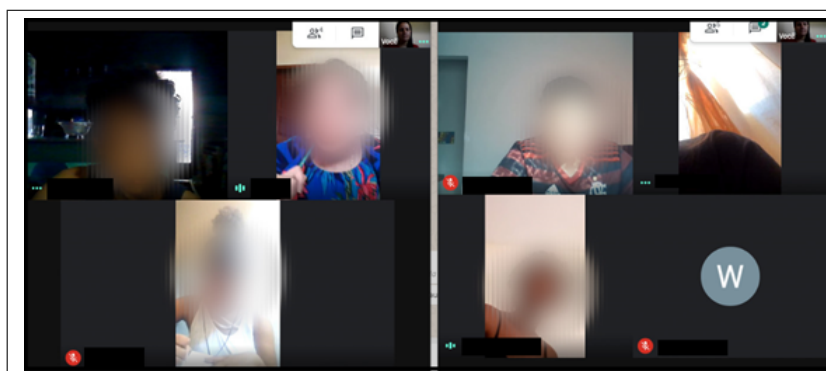


Fonte: Dados da pesquisa.

Os sujeitos da pesquisa foram identificados como A1, A2, ..., A7, em ordem alfabética. As atividades 1, 3, 5 e 7, referentes aos momentos síncronos, foram realizadas em grupos - um com 3 alunos e outro com 4 - denominados como grupo A e grupo B, respectivamente. O A foi composto pelos alunos A1, A3 e A4, e o B, A2; A5; A6 e A7.

Com exceção do último momento síncrono, destinado à aplicação da avaliação de aprendizagem, que durou duas horas-aula (equivalente a 100 minutos), nos demais, a média foi de três horas-aula, o que corresponde a 150 minutos.

Os encontros foram iniciados com uma reunião no *Google Meet* e contaram com participação de todos os alunos que, na ocasião, discutiram sobre a realização das atividades, nos momentos assíncronos, e receberam orientações sobre o que deveriam fazer síncrono. Em seguida, eram criadas duas reuniões, simultâneas, na mesma ferramenta (Figura 51). Cada grupo recebia o link, pelo *WhatsApp*, referente ao local em que deveria entrar.

Figura 51 – Reuniões simultâneas no *Google Meet*

Fonte: Dados da pesquisa.

É importante mencionar que os próprios alunos sugeriram a formação dos grupos, utilizando como critério a afinidade entre eles. A sugestão foi aceita, a fim de oferecer-lhes autonomia nas decisões e ainda buscar promover um ambiente mais confortável para discussão. De acordo com [Bergmann e Sams \(2019\)](#), a autonomia é um dos fatores relevantes para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos na Sala de Aula Invertida. Os grupos mantiveram essa configuração até o término da aplicação da proposta didática.

Julga-se importante destacar que, durante todo o desenvolvimento das atividades dos encontros *on-line* síncronos, a pesquisadora solicitou o envio de fotos das resoluções para fins de análise. Como em momentos anteriores, os estudantes haviam relatado problemas nesse envio, por meio do *Google Sala de Aula*; a pedidos deles, as imagens foram encaminhadas pelo *WhatsApp*.

As atividades desenvolvidas, nas duas situações supramencionadas, estão descritas, a seguir, de forma detalhada com dia, objetivos e resultado da aplicação.

4.1 Momento síncrono 1

O primeiro momento síncrono ocorreu no dia 03 de setembro de 2020. Nesse dia, todos os alunos estavam presentes e realizaram a atividade 1 cujos objetivos eram: (i) utilizar materiais manipuláveis para facilitar o processo de compreensão do Princípio Multiplicativo, através da visualização de cada etapa da resolução dos problemas propostos e da verificação de todas as possibilidades de ocorrência; (ii) reunir conhecimentos, ideias e estratégias utilizadas nas etapas de resolução dos problemas, para posteriormente sistematizar o conceito do Princípio Multiplicativo.

Inicialmente, a turma foi convidada a participar de uma reunião, através do *Google Meet*. Nesse instante, eles foram apresentados à metodologia Sala de Aula Invertida, conheceram os objetivos almejados e as atividades que deveriam ser desenvolvidas, durante todo o processo de experimentação da proposta didática. Nessa ocasião, definiram-se os grupos que perduraram até o final da experimentação, como já citado.

Posteriormente, os sujeitos foram direcionados para sua sala de reunião, conforme o grupo escolhido, e iniciaram a realização da atividade supramencionada. Os integrantes das equipes realizaram a interpretação e discussão dos exercícios, com o mínimo possível de interferência.

4.1.1 Experimentação da atividade 1 (síncrona)

Essa atividade foi composta por 5 questões. Na primeira, havia dois itens e trazia um problema combinatório sobre as possíveis maneiras de uma pessoa combinar uma saia, uma blusa e um par de sapatos. No item (a), manipulando o material do *kit* 1, era preciso

descrever todas as combinações possíveis.

Inicialmente, os dois grupos tentaram montar as combinações de forma aleatória, sem nenhuma estratégia pré-estabelecida, mas logo perceberem que essa não era a forma mais inteligente de proceder. Nesse momento, expressões do tipo: “Pera aí, se a gente fizer de qualquer maneira, vai ficar confuso”, “É melhor fixar duas coisas e ir trocando a outra”, foram ditas por ambos.

O B mostrou-se preocupado, a princípio, usando expressões do tipo: “Vai dar muito trabalho pra fazer”, “Isso confunde muito”. Já o A reagiu, com naturalidade e, imediatamente, começou a trabalhar. A pesquisadora percebeu que eles conseguiram alcançar o raciocínio esperado e sem nenhuma intervenção, nessa questão.

Observou-se grande entusiasmo dos sujeitos na manipulação dos objetos. Os itens (a) e (b) foram respondidos, corretamente, pelas duas equipes. A Figura 52 destaca a resolução da primeira questão pelo grupo A e a Figura 53 mostra a manipulação do *kit* 1 pelos grupos A e B, respectivamente.

Figura 52 – Resolução correta da primeira questão - atividade 1, pelo grupo A

1- Ana vai ao cinema com algumas amigas e está em dúvida sobre o que usar. Ela dispõe de 3 saias (uma vermelha, uma branca e uma rosa), 2 blusas (uma branca e uma preta) e 2 pares de sapatos (um par preto e um par marrom).

a) Descreva todas as possíveis maneiras dela se vestir, caso a combinação seja uma saia; uma blusa e um par de sapatos (iguais). Para auxiliar o seu raciocínio, utilize o *kit* 1 e vista a boneca, cumprindo o que foi solicitado.

Blusa Branca = BB
 Blusa Preta = BP
 Saia Branca = SB
 Saia Rosa = SR
 Saia Vermelha = SV
 Sapato preto = SP
 Sapato marrom = SM

BB+SB+SP	BP+SR+SP
BB+SR+SP	BP+SV+SP
BB+SV+SP	BP+SB+SM
BB+SB+SM	BP+SR+SM
BB+SR+SM	BP+SV+SM
BB+SV+SM	
BP+SB+SP	

b) Com base na resposta do item (a), de quantas maneiras distintas Ana poderá se vestir?

Uma poderá se vestir de 12 maneiras diferentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 53 – Manipulação do material do *kit 1* pelos grupos A e B, nesta ordem

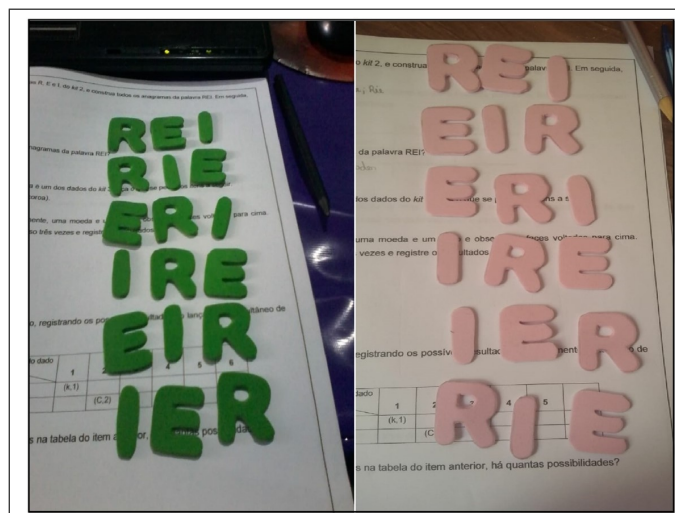
Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda questão, composta por três itens, trouxe um problema com anagramas. Buscou-se introduzir esse conceito, sem a utilização de fórmulas, apresentando um exemplo de problema de contagem em que os agrupamentos se diferem apenas pela ordem de seus elementos.

No item (a), da referida questão, era preciso analisar os anagramas da palavra ANEL e identificar o que os diferenciava. Os dois grupos perceberam, facilmente, que a distinção se dava apenas pela disposição das letras. No (b), com auxílio do material manipulável, todos os anagramas da palavra REI deveriam ser descritos; no (c), determinar-se-ia o total de anagramas dessa palavra. Essa questão foi respondida pelas equipes, de forma imediata, e sem interferência da pesquisadora

A Figura 54 mostra a construção dos anagramas pelos grupos A e B, nesta ordem.

Figura 54 – Formação dos anagramas pelos grupos A e B, nesta ordem



Fonte: Dados da pesquisa.

A terceira questão, também composta por três itens, foi sobre as possibilidades de resultados no lançamento de uma moeda e um dado.

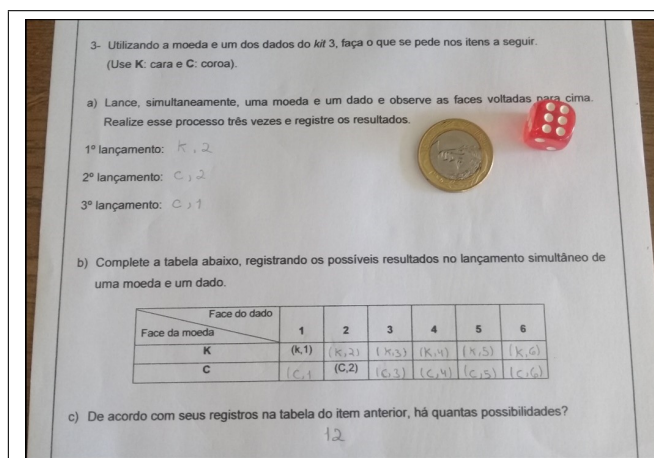
No item (a) dessa questão era necessário lançar, simultaneamente, uma moeda e um dado, disponíveis no *kit 3*, e registrar os resultados obtidos. No começo, ambos grupos ficaram com dúvidas sobre o que seriam esses “resultados”, o que exigiu a intervenção da pesquisadora, explicando que, nesse arremesso concomitante dos objetos, o resultado seria constituído pelas faces da moeda e do dado que ficaram voltadas para cima. Após a explicação, conseguiram responder de forma correta.

No item (b) registrar-se-ia, em uma tabela, todos os possíveis resultados desse lançamento; no (c), o total de possibilidades do item (b) seria relacionado.

O grupo A resolveu esses itens facilmente. Já no B, os participantes A2 e A5 apresentaram dúvida, no preenchimento da tabela, pois acharam que seria necessário lançar a moeda e o dado até que se encontrassem todos os resultados possíveis. Os demais integrantes dessa equipe elucidaram, sem a pesquisadora, a dúvida dos colegas. O aluno A6 explicou que: “Não precisa fazer todos os lançamentos. Como o dado tem 6 lados, então pode sair qualquer um desses 6 lados com cara ou qualquer um dos 6 lados com coroa”.

A Figura 55 destaca a resolução da terceira questão pelo grupo B.

Figura 55 – Resolução correta da terceira questão - atividade 1, pelo grupo B



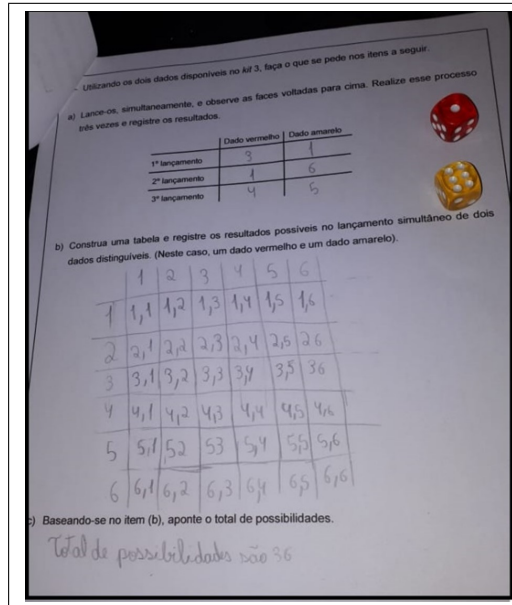
Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta questão, com três itens, foi semelhante à terceira, porém agora, era preciso analisar os resultados possíveis, no lançamento de dois dados distinguíveis (um vermelho e um amarelo) fornecidos no *kit 3*.

O grupo A conseguiu resolver todos os itens, corretamente (Figura 56). O B respondeu ao (a) de forma acertada, todavia, no item (b) (Figura 57) construiu a tabela considerando os resultados para três lançamentos dos dados. Observou-se, então, uma interpretação equivocada do enunciado; o que fez a pesquisadora intervir, fazendo a releitura

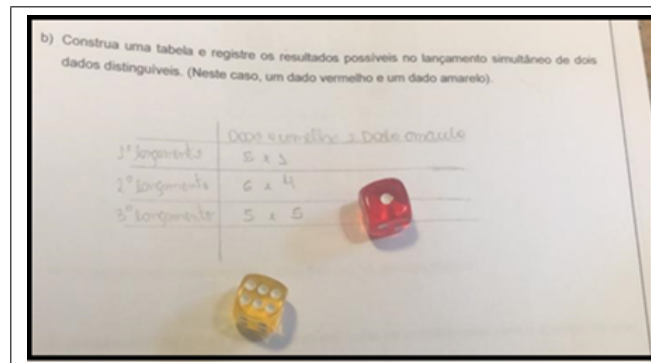
do enunciado, propiciando a correta interpretação e, conseqüentemente, a questão refeita, sem erros. O item (c) foi respondido, perfeitamente, pelos dois grupos.

Figura 56 – Resolução correta da quarta questão – atividade 1, pelo grupo A



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 57 – Resolução incorreta do item (b) da quarta questão – atividade 1, pelo grupo B, antes da intervenção da pesquisadora




Fonte: Dados da pesquisa.

A quinta questão (Figura 58) foi composta por cinco itens e teve como objetivo explorar diferentes tipos de agrupamentos, levando os alunos a compreenderem que nos problemas de contagem, alguns agrupamentos se diferem pela natureza e ordem de seus elementos e outros se diferenciam apenas pela natureza dos elementos.

Figura 58 – Quinta questão da atividade 1

5- Na cidade de Campos dos Goytacazes, há um parque muito atrativo para as crianças. Em determinado dia 4 amigos, Antônio, Bruno, Caio e Davi, resolveram brincar nele. Em cada item a seguir, faça o que se pede.

a) Utilizando como apoio o material disponível no *kit 4*, descreva todas as maneiras distintas dos quatro amigos brincarem nos balanços ilustrados na figura abaixo, sabendo que desejam brincar sempre dois a dois, um em cada balanço.



b) De acordo com a sua resposta para o item (a), há quantas opções?

c) Considerando os quatro amigos, descreva todas as possibilidades para a escolha de uma dupla.

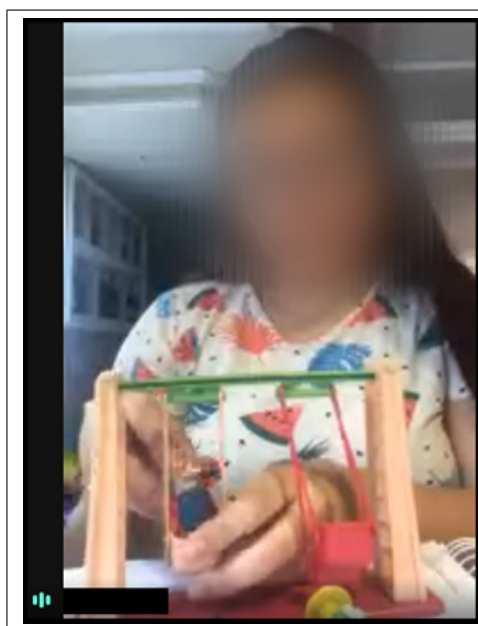
d) Qual o total de possibilidades do item (c)?

e) Qual a diferença entre as possibilidades descritas no item (a) e no (c)?

Fonte: Dados da pesquisa.

Para auxiliar na visualização do problema, os estudantes utilizariam o material manipulável do *kit 4*. Eles foram instruídos, previamente, a abrirem os *kits* apenas no momento da aula, o que gerou grande entusiasmo neles, no primeiro contato com o material.

Antes mesmo que fizessem a leitura da questão, os participantes, com certo encantamento, começaram a manusear os manipuláveis, só por diversão. Após alguns minutos da euforia inicial, eles começaram a análise da questão. A Figura 59 mostra um momento de interação de uma das alunas com o *kit 4*.

Figura 59 – Manipulação do *kit 4* por uma aluna do grupo B

Fonte: Dados da pesquisa.

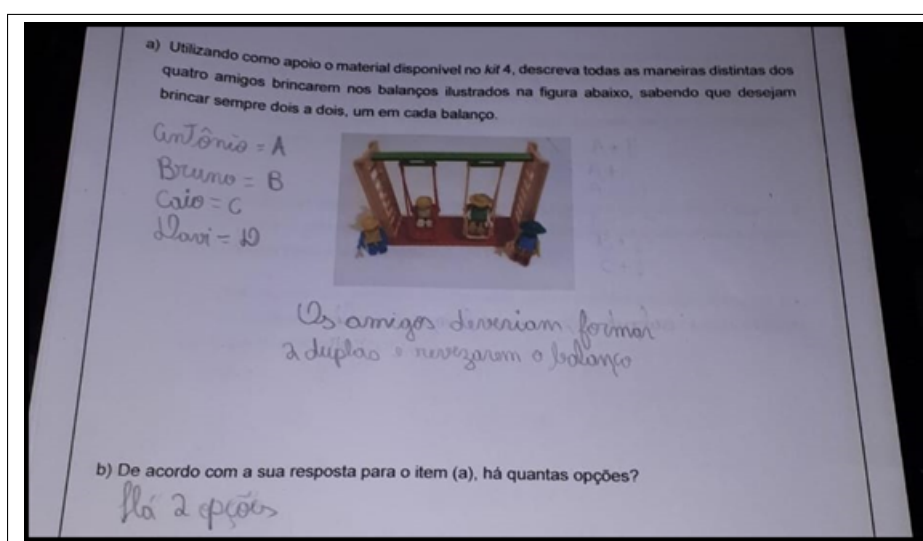
Essa foi a questão que eles apresentaram mais dificuldade. Inicialmente, por não terem feito uma leitura completa de todos os itens, interpretaram (a) e (c) da mesma maneira. No entanto, como o item (e) solicitava que identificassem a diferença entre as possibilidades dos itens (a) e (c), as dúvidas surgiram. Nesse momento, expressões do tipo: “Ué, mas não são iguais?”, “Professora, como assim a diferença? Pra mim é a mesma coisa” e “Não consigo ver nenhuma diferença” foram ditas com muita frequência. A pesquisadora sugeriu que fizessem uma releitura da questão, com bastante atenção, que se colocassem na posição da pessoa que seria responsável por organizar as crianças no brinquedo e trocassem opiniões com seus colegas de equipe.

No item (a), era preciso descrever as formas distintas de quatro crianças brincarem nos balanços, de acordo com as condições dadas; no (b), o total de possibilidades do item (a) seria determinado.

Inicialmente, o grupo A descreveu as possibilidades de duplas, porém não visualizou que as brincadeiras poderiam ser feitas de duas maneiras diferentes. Ao observar que deveria haver alguma diferença entre esse item e o (c), alterou a resposta, ainda com erro. A discussão entre os integrantes revelou que a alteração da resposta foi feita, exclusivamente, para diferenciá-la do outro item, todavia, sem nenhuma convicção.

Como já estava terminando o tempo destinado para resolver as questões, a pesquisadora resolveu não intervir, deixando para esclarecer as dúvidas no momento de discussão entre os grupos, no final da aula. A Figura 60 destaca a resolução dos itens (a) e (b) pelo grupo A.

Figura 60 – Resolução incorreta dos itens (a) e (b) da quinta questão – atividade 1, pelo grupo A



Fonte: Dados da pesquisa.


O grupo B deu as respostas corretamente (Figura 61). Preliminarmente, assim como o A, considerou, apenas o total de duplas que poderiam ser formadas. Ao detectarem a

diferença da resposta com o item(c), voltaram a discutir o assunto e, pós alguns minutos, o aluno A5 observou que embora fosse possível formar 6 duplas diferentes, cada uma poderia revezar nos balanços, totalizando 12 maneiras.

Figura 61 – Resolução correta dos itens (a) e (b) da quinta questão – atividade 1, pelo grupo B

5- Na cidade de Campos dos Goytacazes, há um parque muito atrativo para as crianças. Em determinado dia 4 amigos, Antônio, Bruno, Caio e Davi, resolveram brincar nele. Em cada item a seguir, faça o que se pede.

a) Utilizando como apoio o material disponível no kit 4, descreva todas as maneiras distintas dos quatro amigos brincarem nos balanços ilustrados na figura abaixo, sabendo que desejam brincar sempre dois a dois, um em cada balanço.



Antônio, Bruno
Bruno, Antônio
Caio, Davi
Davi, Caio
Antônio, Davi
Davi, Antônio
Bruno, Caio
Caio, Bruno
Antônio, Caio
Caio, Antônio
Bruno, Davi
Davi, Bruno

b) De acordo com a sua resposta para o item (a), há quantas opções?
12 opções

Fonte: Dados da pesquisa.

Os itens (c) e (d) foram respondidos, de forma acertada, por ambos os grupos. O item (e) pedia a distinção entre as possibilidades descritas nos itens (a) e (c).

A intenção para o item (e) era que eles visualizassem o seguinte: no item (a), escolhida uma dupla para brincar, ela poderia interagir de duas maneiras distintas - por exemplo, no dueto Antônio e Bruno: Antônio no balanço 1 e Bruno no balanço 2 ou invertendo os brinquedos - ou seja, a ordem dos elementos é primordial. Já no (c), como o objetivo era apenas descrever as possíveis duplas, a alteração da ordem não modifica o resultado, isto é, não é importante.

Embora o grupo B tenha resolvido os itens (a) e (c) corretamente, não conseguiu explicar a diferença, assim como o A. Ao final, tomando por base as respostas, propôs-se uma reflexão, entre os grupos, e uma comparação das resoluções das questões de cada equipe. Para essa etapa, uma nova reunião, ainda nesse encontro, com a participação de todos, foi criada. Na oportunidade, as respostas foram analisadas e discutidas.

No segundo encontro síncrono, houve a sistematização das resoluções mencionadas no parágrafo anterior, utilizando o Princípio Multiplicativo.

As questões de 1 a 4 foram resolvidas, corretamente, pelos dois grupos, e não geraram conflito de opinião entre eles. Em relação à 5, eles expuseram o raciocínio que os levou às respostas dos itens (a) e (c), pois os outros itens dependiam desses. Os integrantes do grupo A não visualizaram nenhuma distinção entre os dois e colocaram uma resposta qualquer para o (a), apenas para diferenciá-lo do outro. Após a explicação do grupo B, observou-se que os integrantes do A se convenceram da resposta dos colegas.

Na oportunidade, a pesquisadora explicou aos alunos que nos problemas de contagem existem agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante, como o caso do item (a). Ela afirmou ainda que existem agrupamentos em que a ordem dos elementos não importa, pois não gera um agrupamento diferente, como era o caso do item (c). No final, todos os alunos disseram ter compreendido e fizeram a correção dos itens incorretos.

Durante a realização dessa atividade, observou-se bastante interação entre os integrantes de cada grupo, além de entusiasmo na manipulação dos objetos. Foi possível observar que esse manuseio atrelado às intervenções da pesquisadora, à atividade e à colaboração entre os membros das equipes proporcionaram aos alunos não só momentos de reflexão, mas também contribuíram para a construção do conhecimento deles.

4.2 Momento síncrono 2

Para esse encontro, realizado no dia 08 de setembro de 2020, no momento assíncrono, os alunos deveriam realizar, individualmente, a atividade 2, composta por um vídeo, disponibilizado no mural da turma no *Google Sala de Aula* e um teste constituído por 5 questões relacionadas ao conteúdo abordado no vídeo.

Seguindo as orientações de [Bergmann e Sams \(2019\)](#), iniciou-se o encontro com uma discussão acerca do conteúdo do vídeo. A pesquisadora fez perguntas do tipo: “Todos assistiram ao vídeo?”, “Consideraram a explicação clara?”, “Fizeram as anotações mais relevantes sobre o conteúdo?”, “Tiveram dúvidas?”, entre outras.

Em relação à explicação do conteúdo da videoaula, todos declararam ter sido clara e não haver dúvida. Apenas a aluna A5 não estava presente e o A2 alegou não ter tido tempo hábil para a resposta, por ter assistido ao vídeo um pouco antes do início da aula. Sobre esse último fato, [Bergmann \(2018, p. 33\)](#) ressalta que “[...] nem todos os alunos irão fazer os deveres de casa. A conclusão dessa tarefa é um problema que existe independentemente de você inverter ou não suas aulas.”.

Com o intuito de aumentar as chances de os alunos realizarem a tarefa de casa, o autor supramencionado sugere que os mesmos devem saber que serão responsabilizados pelo trabalho que realizam e uma forma de fazer isso é atribuindo nota às atividades ([BERGMANN, 2018](#)). Aderindo à sugestão deste autor, como o aluno A2 não realizou

completamente a tarefa e não era possível realizá-la durante esse encontro, não recebeu a nota máxima destinada a ela.

Na oportunidade, levantou-se uma discussão sobre as questões do teste de verificação de aprendizagem que apresentaram alguma resposta errada e as mesmas foram rapidamente esclarecidas. Apesar do aluno A2 não ter respondido ao teste, como havia assistido ao vídeo, conseguiu acompanhar a discussão das questões e relatou ter compreendido o processo de resolução das mesmas.

Em seguida, retomou-se à atividade 1 e tendo por base o que foi respondido pelos participantes, foi proposta a reflexão e a sistematização das resoluções das questões, através da aplicação do Princípio Multiplicativo.

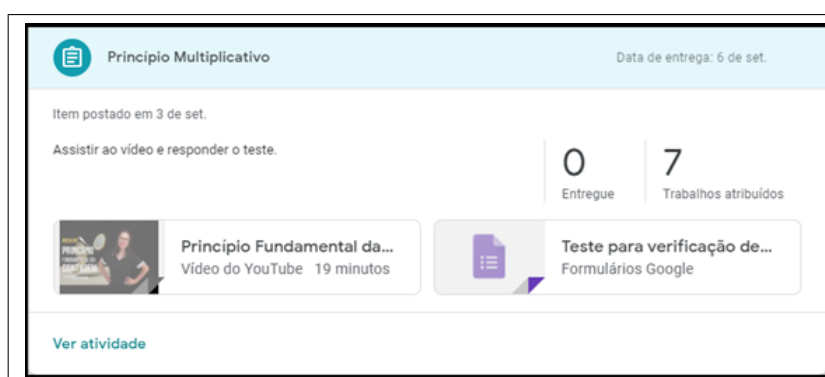
A forma de resolução citada no parágrafo anterior teve como anseio buscar alcançar os objetivos iniciais da atividade: (i) utilizar materiais manipuláveis para facilitar o processo de compreensão do Princípio Multiplicativo, visualizando não só as etapas da resolução dos problemas propostos, mas também as possibilidades de ocorrência; (ii) reunir conhecimentos, ideias e estratégias utilizadas nas etapas de resolução e, posteriormente, sistematizar o conceito do Princípio Multiplicativo, com ênfase na importância desse princípio para facilitar o cálculo de problemas de contagem, nos quais há muitas possibilidades de casos.

No momento seguinte, os grupos seguiram para reuniões distintas para o desenvolvimento da atividade 3. A seguir, encontram-se, detalhadas, as experimentações das atividades 2 (assíncrona) e 3 (síncrona).

4.2.1 Experimentação da atividade 2 (assíncrona)

Para essa atividade, foi postado no mural da turma, no *Google Sala de Aula* (Figura 62), o *link* da videoaula “Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela” (<https://www.youtube.com/watch?v=3dm6pq6akQI&t=431s>) e um teste intitulado “Teste para verificação de aprendizagem” (Apêndice F).

Figura 62 – Postagem da atividade 2 no *Google Sala de Aula*



Fonte: *Google Sala de Aula*.

O vídeo teve como objetivo introduzir o conceito do Princípio Multiplicativo e a construção do diagrama de árvore como método para auxiliar na sua compreensão.

O teste, elaborado através do Formulário *Google*, foi composto por cinco questões de múltipla escolha, retiradas ou adaptadas de [Dante \(2008, p. 472\)](#) e teve por finalidade averiguar a qualidade da assimilação do conteúdo.

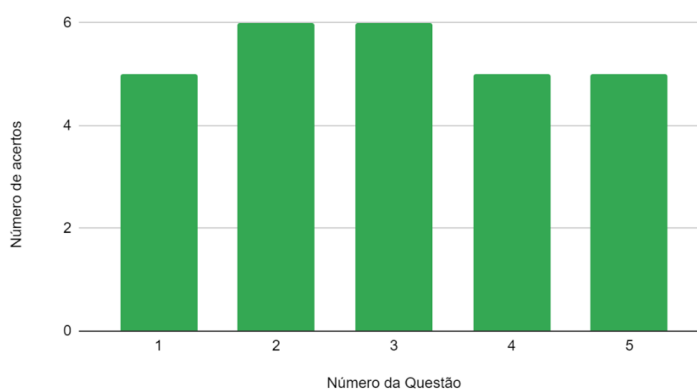
Os estudantes tiveram um prazo de três dias (entre 03/09/20 e 06/09/20) para realização dessa tarefa. Os resultados foram computados, automaticamente, pelo Formulário *Google* e salvos no *Google Drive* da pesquisadora. Apenas um aluno não realizou essa atividade, dentro do prazo.

Ao final, todos os participantes que efetuaram a tarefa receberam, por *e-mail*, sua pontuação e o *feedback* das resoluções das questões.

Embora o teste tenha sido constituído por questões de múltipla escolha, solicitou-se o envio de fotos das resoluções das questões para uma análise mais detalhada da aprendizagem. A partir desse diagnóstico, foi possível observar que o conteúdo do vídeo foi bem absorvido pelo público-alvo.

O Gráfico 2 ilustra o resultado quantitativo do desenvolvimento dos alunos, relacionando o número de acertos, por questões.

Gráfico 2 – Número de acertos por questão do Teste de aprendizagem



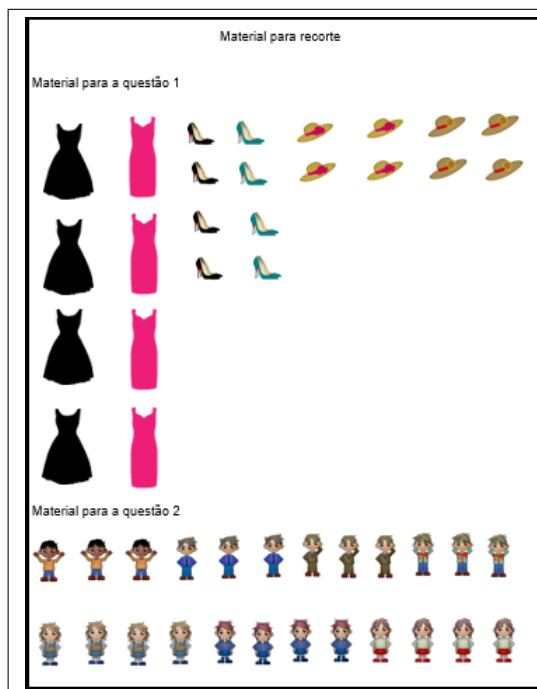
Fonte: Elaboração própria.

4.2.2 Experimentação da atividade 3 (síncrona)

A atividade 3 foi elaborada com três questões e teve como objetivo relacionar o Princípio Multiplicativo com o diagrama de árvore para auxiliar na resolução de problemas de contagem, uma vez que esse tipo de representação permite a visualização de todas as possibilidades de resultados. Para realizar as duas primeiras questões, era necessário

recortar as figuras que foram disponibilizadas no material, anexo a essa atividade (Figura 63).

Figura 63 – Material para recorte anexo à atividade 3



Fonte: *Google Sala de Aula*.

A primeira questão, foi constituída por três itens e apresentou um problema sobre combinações de vestidos, sapatos e chapéus. No item (a), os alunos deveriam recortar os manipuláveis e construir um diagrama de árvore para representar as possíveis formas de combinação de um vestido, um par de sapatos e um chapéu; tendo à disposição dois vestidos, dois pares de sapatos e dois chapéus.

Inicialmente, os dois grupos tiveram dúvidas em relação à construção do diagrama. Nesse momento, não houve intervenção, mas uma sugestão para análise da estrutura do diagrama, representado na terceira questão. Recomendou-se também que eles consultassem as anotações referentes ao vídeo que haviam assistido, na aula anterior, para que chegassem a uma conclusão entre eles. Caso fosse observada uma dificuldade para elucidar a questão, uma intervenção seria feita.

Após seguir as sugestões oferecidas, o grupo B logo compreendeu como deveria ser feito e construiu o diagrama corretamente. No A, a aluna A3 chegou a montar as possíveis combinações, porém não utilizou o diagrama de árvore (Figura 64). Ela perguntou: “Professora, pode ser assim?”. A pesquisadora respondeu que as combinações estavam corretas, porém o objetivo desse item era que fosse construído o diagrama de árvores para representar as possibilidades.

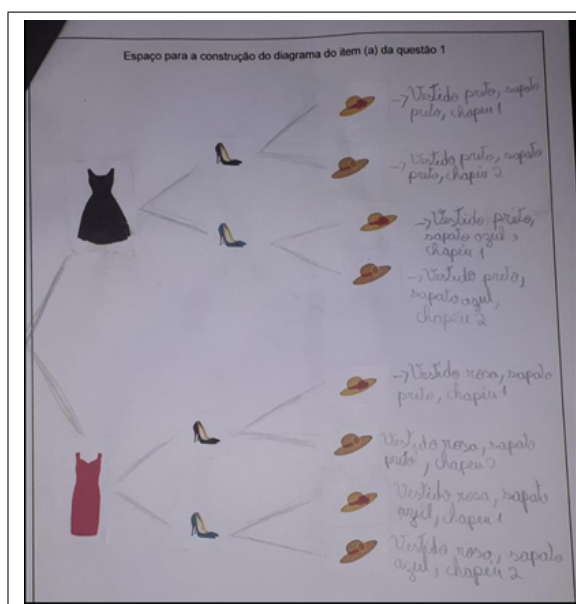
Figura 64 – Tentativa inicial de resolução do item (a) da primeira questão – atividade 3, pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da análise do diagrama, ilustrado na terceira questão, e das anotações sobre o vídeo, a aluna A4 elaborou o diagrama e explicou aos seus colegas de equipe como deveriam proceder. Todos declararam ter entendido e então construíram o diagrama de forma correta. A Figura 65 destaca a construção do diagrama de árvore pelo grupo A.

Figura 65 – Construção correta do diagrama de árvore do item (a) da primeira questão – atividade 3, pelo grupo A



Fonte: Dados da pesquisa.

Os itens (b) e (c) foram respondidos, acertadamente, pelas duas equipes, sem

dificuldade. A Figura 66 destaca a resolução desses itens pelo grupo B.

Figura 66 – Resolução correta dos itens (b) e (c) da primeira questão – atividade 3, pelo grupo B

b) A partir da atividade que você realizou no item anterior, analise quantas combinações Júlia pode obter.

8 combinações

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de combinações do item (a).

2	×	2	×	2	=	8
Total de opções para o vestido		Total de opções para o par de sapatos		Total de opções para o chapéu		Total de combinações distintas de vestido, sapatos e chapéu

Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda questão (Figura 67), também com três itens, apresentou uma situação de uma escola onde seria realizada uma competição de dança e determinada turma deveria escolher um casal representante.

Figura 67 – Questão 2 da atividade 3

2- Em uma escola, será realizada uma competição de dança entre as turmas do 9º ano. Para cada estilo de dança que será apresentado a turma deverá eleger dois representantes - um menino e uma menina. Em uma das turmas, 4 meninos e 3 meninas candidataram-se para representar o estilo forró. Dessa forma:

a) Utilizando o material disponível para recorte, anexo a essa atividade, represente, por meio de um diagrama de árvore, todas as possibilidades de representantes dessa turma, no estilo forró.

b) Baseando-se no item anterior, existem quantas combinações de representantes?

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de possibilidades para a escolha do casal.

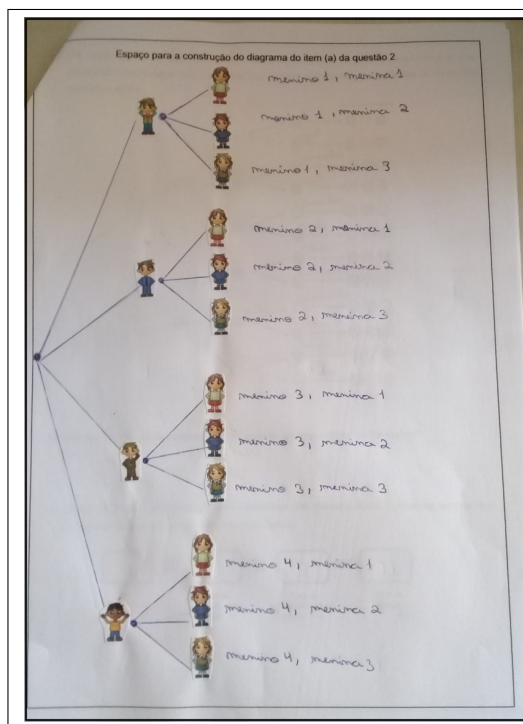
	×		=	
Total de possibilidades para o menino		Total de possibilidades para a menina		Total de possibilidades para o casal representante

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a) era para construir, utilizando o material para recorte, um diagrama de árvore para representar todas as possibilidades de escolha do casal representante. Como os alunos já haviam construído um diagrama, na primeira questão, realizaram essa parte,

com facilidade. Os itens (b) e (c) também foram respondidos, sem erros, por ambos os grupos. A Figura 68 destaca a construção do diagrama pelo grupo B.

Figura 68 – Construção correta do diagrama de árvore do item (a) da segunda questão – atividade 3, pelo grupo B



Fonte: Dados da pesquisa.

A terceira questão, com três itens, trouxe o total de possibilidades de se formar senhas de três cores distintas, a partir de quatro cores, porém, a combinação deveria, necessariamente, começar com rosa ou azul.

No item (a), eles completariam o diagrama de árvore para representar todas as possibilidades de senhas. Em um primeiro momento, alguns ficaram confusos em relação à posição das cores na senha, entretanto, com o apoio dos demais colegas, as dúvidas foram sendo sanadas. Os dois grupos conseguiram preencher, sem erros, o diagrama, assim como o (b) e o (c). A Figura 69 destaca a resolução da terceira questão pelo grupo A.

Figura 69 – Resolução correta da terceira questão – atividade 3, pelo grupo A

Utilizando lápis de cor das cores azul, verde, amarela e rosa, complete o diagrama de árvore abaixo para representar todas as possíveis senhas que podem ser formadas, a partir das condições dadas.

Senhas possíveis

b) De acordo com o diagrama do item (a), quantas senhas podem ser formadas?

Podem ser formadas 12 senhas

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar, de maneira direta, o total de senhas que podem ser formadas a partir das condições dadas.

$2 \times 3 \times 2 = 12$

Total de possibilidades para a 1ª cor Total de possibilidades para a 2ª cor Total de possibilidades para a 3ª cor Total de senhas

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a realização dessa atividade, observou-se a interação, constante, entre os membros das equipes. Após sanada a dúvida inicial, sobre a elaboração do diagrama de árvore, as questões foram resolvidas, com facilidade.

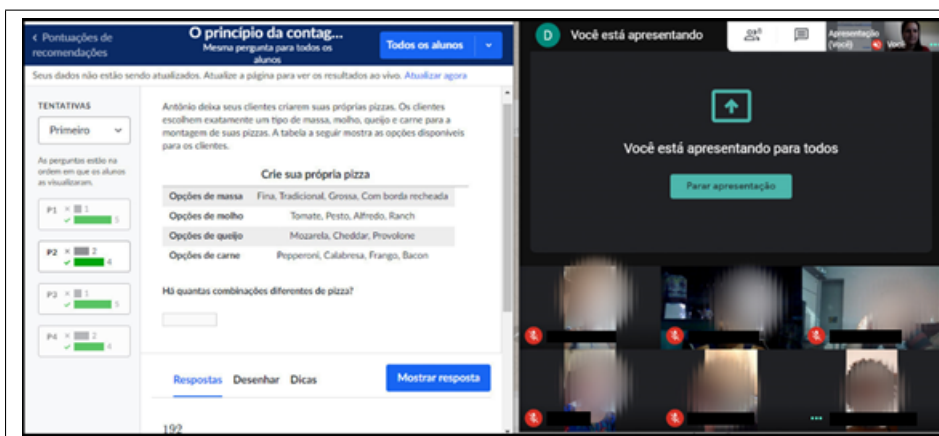
Observou-se, ainda, que a variedade de recursos utilizados para o desenvolvimento da referida tarefa gerou entusiasmo nos sujeitos da pesquisa, proporcionando uma aprendizagem mais agradável. Constatou-se também que eles conseguiram relacionar o Princípio Multiplicativo com o diagrama de árvore, alcançando o objetivo proposto pela pesquisadora.

4.3 Momento síncrono 3

Esse encontro foi realizado no dia 10 de setembro de 2020 e todos os alunos estavam presentes. Para esse momento, a atividade 4 (assíncrona), composta por 3 recomendações, na plataforma *Khan Academy*, deveria ter sido, previamente, realizada.

No dia anterior, a pesquisadora acessou a plataforma para verificar quais alunos haviam realizado a tarefa, bem como as dificuldades para responder ao grupo de questões que fazia parte de uma das recomendações. A partir dos dados coletados, foi possível identificar as dificuldades. Dessa forma, iniciou-se a aula com uma discussão sobre o assunto (Figura 70).

Figura 70 – Momento de discussão sobre as questões da *Khan Academy*



Fonte: Dados da pesquisa.

No momento seguinte, os grupos seguiram para reuniões distintas e iniciaram o desenvolvimento da atividade 5. Nas subseções, a seguir, encontram-se, detalhadas, as experimentações das atividades 4 (assíncrona) e 5 (síncrona).

4.3.1 Experimentação da atividade 4 (assíncrona)

Essa atividade teve por objetivo complementar as atividades 2 e 3, reforçando o conceito do Princípio Multiplicativo e a construção do diagrama de árvore. Era preciso realizar, individualmente, na plataforma *Khan Academy*, três recomendações intituladas como: (i) Contagem de resultados, usando o diagrama de árvore; (ii) Como contar os resultados: vasos de flores; (iii) O princípio da contagem (Apêndice I). Essas recomendações foram atribuídas no dia 08/09/2020 e tinham como data final para realização 09/09/2020, como mostra a Figura 71 .

Figura 71 – Recomendação da atividade 4 na *Khan Academy*



Fonte: Dados da pesquisa.

Dos 7 alunos da turma, somente a A7 não fez nenhuma das recomendações. A A5

só realizou a intitulada “O princípio da contagem”. Os demais fizeram todas. Embora as alunas A7 e A5 não tenham realizado nenhuma ou apenas uma das recomendações, isso não ocasionou, para ambas, dificuldades para acompanhar a discussão das questões, pois eram atividades complementares às anteriores e não abordavam um conteúdo novo.

De qualquer forma, as alunas mencionadas foram pontuadas, proporcionalmente, ao que foi realizado, com o intuito de que assumissem postura responsável. Cabe mencionar que elas não receberam instrução sobre os vídeos invertidos, pois segundo Bergmann (2018, p. 35), “[...] isso envia a mensagem para aqueles que concluíram as tarefas de que não vale a pena fazê-las.”. O autor afirma que o professor não deve ser condescendente com as más escolhas dos alunos.

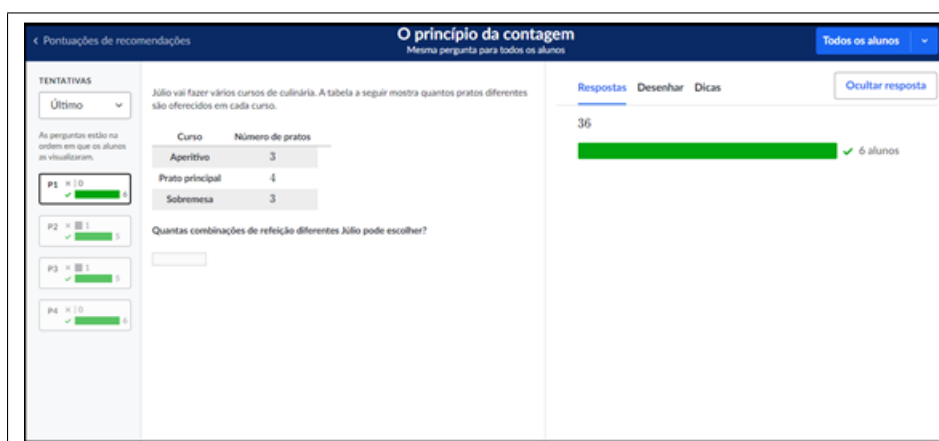
As recomendações “Contagem de resultados usando diagrama de árvore” e “Como contar os resultados: vasos de flores” foram dois vídeos que abordavam o Princípio Multiplicativo e o diagrama de árvore. Já o “O princípio da contagem” tratava-se de um grupo de quatro questões cujas resoluções envolviam o Princípio Multiplicativo.

Ao atribuir essa última atividade na plataforma, a pesquisadora optou que todos respondessem ao mesmo grupo de perguntas. Esse recurso é oferecido pela plataforma.

Os dados obtidos, após as respostas, mostraram que os alunos A2 e A5 realizaram mais de uma tentativa a fim de acertar todas as questões, assim como o A6 que mesmo assim não conseguiu acertar tudo. Os demais, responderam, corretamente, de uma única vez. O detalhamento, realizado a seguir, leva em consideração os resultados da última tentativa deles.

Na primeira questão, foi dada uma tabela com o número de pratos diferentes que são oferecidos, em cada curso de culinária. O objetivo era determinar o total de combinações de refeição diferentes que uma pessoa poderia escolher. Todos concluíram, de maneira precisa, como mostra a (Figura 72).

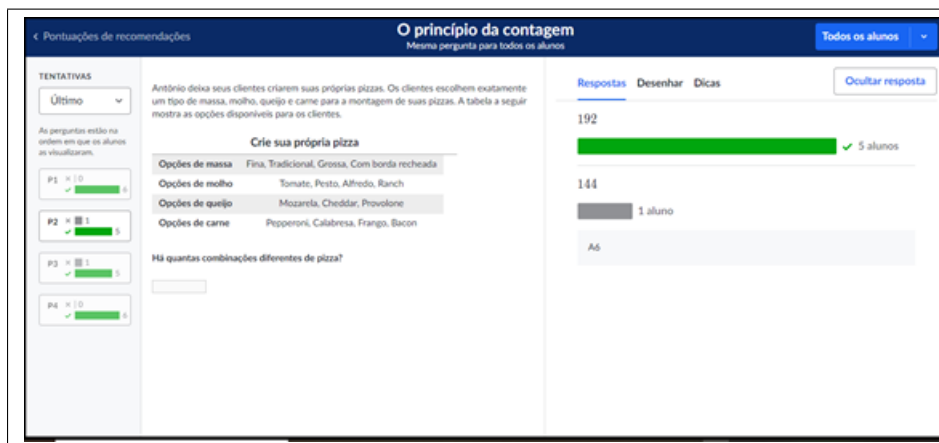
Figura 72 – Primeira questão da recomendação “O princípio da contagem”



Fonte: Plataforma Khan Academy.

A segunda questão apresentou uma tabela com as opções de massa, molho, queijo e carne oferecidos por uma pizzaria. A finalidade era determinar o total de maneiras distintas de um cliente criar uma pizza, escolhendo exatamente um tipo de massa, molho, queijo e carne. Apenas o aluno A6 não respondeu essa questão corretamente, conforme a Figura 73. Durante a aula, ele relatou que se confundiu na hora de contar as opções para cada escolha.

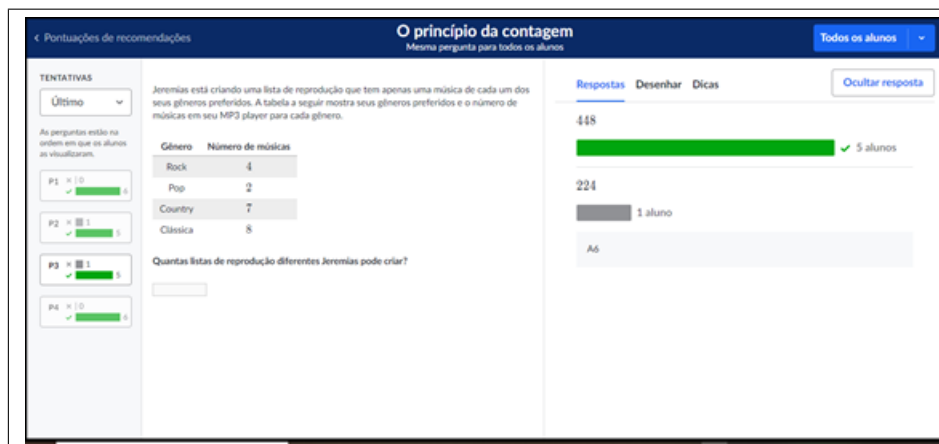
Figura 73 – Segunda questão da recomendação “O princípio da contagem”



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

Na terceira questão, uma pessoa deseja criar uma lista de reprodução, com apenas uma música de cada um dos seus gêneros preferidos. A tabela apresentava o número de músicas disponíveis para cada gênero. O propósito era determinar o total de listas de reprodução que poderiam ser criadas. Somente o aluno A6 errou (Figura 74). No momento de discussão das questões, ele alegou ter se esquecido de multiplicar por um dos valores da tabela, no caso, o valor 2.

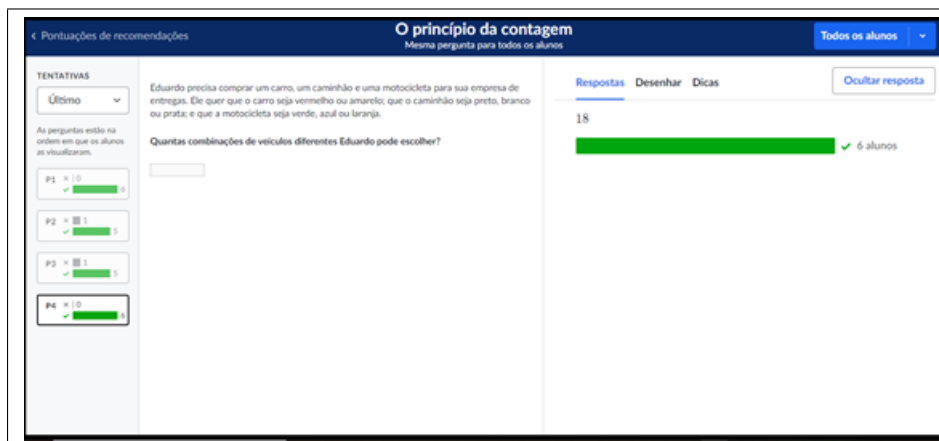
Figura 74 – Questão 3 da recomendação “O princípio da contagem”



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

Na quarta questão, uma pessoa precisa comprar um carro, um caminhão e uma motocicleta, porém existem algumas restrições para as cores de cada veículo. O objetivo era determinar o total de combinações de veículos diferentes que essa pessoa poderia escolher. Todos conseguiram concluir de modo certo como mostra a (Figura 75).

Figura 75 – Quarta questão da recomendação “O princípio da contagem”



Fonte: Plataforma *Khan Academy*.

4.3.2 Experimentação da atividade 5 (síncrona)

A atividade 5, com oito questões, buscou verificar o nível de compreensão dos discentes acerca do Princípio Multiplicativo, através da resolução e elaboração de problemas de contagem que exploram esse conceito.

É importante mencionar que, durante o desenvolvimento dessa atividade, houve uma constante discussão entre os integrantes de cada grupo, com destaque para o A, nesse havia intensa cooperação e, poucas vezes, a pesquisadora interveio. Isso não significa que não houve dúvidas, porém, quando surgiam, na maioria das vezes, eram discutidas e sanadas entre eles. Eles resolveram todas as questões sem erro.

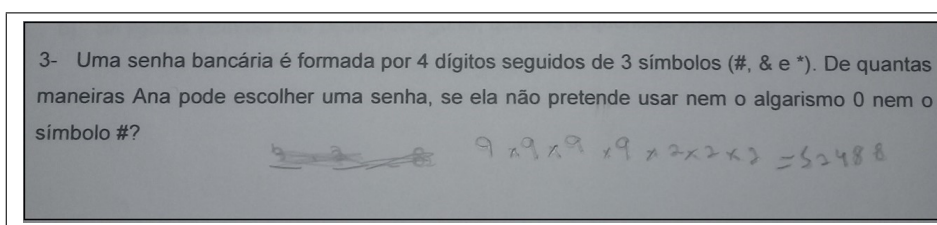
Ainda sobre a atividade supramencionada, após alguns minutos do seu início, a pesquisadora percebeu que o grupo B precisaria bem mais de ajuda que o A, o que foi feito dessa forma. Cabe ainda destacar que, embora o B tenha solicitado ajuda constante, ela buscou não oferecer respostas prontas. Ao término, realizou-se a comparação e discussão das resoluções, entre os grupos.

A primeira questão foi sobre as possíveis maneiras de um cliente fazer o pedido de um salgado, uma bebida e uma sobremesa, em uma lanchonete que oferecia sete opções do primeiro, cinco do líquido e quatro do doce. Ambos os grupos resolveram com facilidade. Na próxima, era preciso determinar o total de números naturais de três algarismos que poderiam se formar, a partir de algumas condições dadas. Nessa parte, a pesquisadora

precisou intervir no grupo B, pois estava confundindo os conceitos de múltiplos e divisores e, após o esclarecimento, conseguiu resolver.

Na terceira questão, o objetivo era determinar de quantas maneiras uma pessoa poderia escolher uma senha, composta por quatro dígitos, seguidos de três símbolos, com algumas restrições. O grupo B concluiu que existiam 9 possibilidades para os dígitos e 2 para os símbolos, entretanto não considerou que era preciso escolher 4 dígitos e 3 símbolos. Nesse momento, com a intervenção, explicou-se que como a senha é formada por quatro dígitos e três símbolos, dever-se-ia compô-la, considerando sete etapas: (i) escolher o 1º dígito; (ii) escolher o 2º dígito;...; (v) indicar o 1º símbolo; ...; (vii) indicar o 3º símbolo. Após as orientações, a equipe solucionou a tarefa. Observou-se que o grupo A elucidou a questão com facilidade. A Figura 76 destaca a resolução da questão 3 pelo grupo B.

Figura 76 – Resolução correta da terceira questão – atividade 5, pelo grupo B



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na quarta questão, determinar-se-ia o número de maneiras, distintas, de eleger um presidente e um vice-presidente dentre 93 candidatos. Inicialmente, o grupo B concluiu que seriam 93×93 maneiras. A intervenção trouxe o seguinte questionamento: "Escolhido o presidente, esse também poderá concorrer ao cargo de vice-presidente?". Todos do grupo responderam que não. Então surgiu outro questionamento: "Então são 93 candidatos para a segunda escolha?". Os integrantes concluíram que o cálculo correto era 93×92 . A equipe A resolveu desembaraçadamente.

Na quinta questão, o intuito era determinar o total de placas de carros que poderiam ser formadas de acordo com um padrão preestabelecido. Essa etapa gerou um pouco mais de discussão entre os sujeitos do grupo A, porém não solicitaram ajuda da pesquisadora e conseguiram concluir prontamente.

O B cometeu o mesmo erro da terceira questão - concluiu que eram 26 opções para escolher uma letra e 10 opções para escolher um algarismo, porém, não visualizaram o total de etapas que eram necessárias, escrevendo como resposta 26×10 . O grupo pediu para a pesquisadora verificar se o cálculo estava correto e ela explicou que deveriam proceder como na terceira questão, identificando as etapas de resolução do problema e o total de possibilidades para cada uma. Ainda assim apresentaram dificuldade, necessitando de mais uma intervenção que trouxe os seguintes questionamentos:

P: Olhando para o formato da placa, qual deverá ser a primeira escolha que vocês deverão fazer?

A6: Uma letra.

P: E quantas opções vocês têm para escolher essa letra?

A6: 26.

P: Escolhida a 1ª letra, qual deverá ser a próxima escolha?

A5: Outra letra.

P: E quantas opções existem para essa escolha?

A5: 26.

P: Escolhida a 2ª letra, qual a próxima escolha vocês deverão fazer?

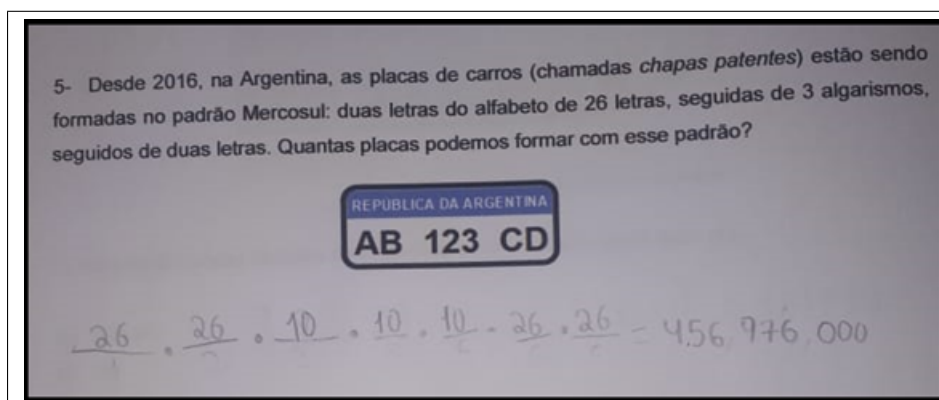
A6: Um número.

P: Quantas opções vocês têm?

A6: 10.

Nesse momento o aluno A6 compreendeu e disse: “Já entendi professora! Então é pra fazer $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$, não é?”. Ele finalizou a explicação para os colegas e a equipe conseguiu resolver a questão. A Figura 77 ilustra a resolução dessa questão pelo grupo A.

Figura 77 – Resolução correta da quinta questão – atividade 5, pelo grupo A



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na sexta questão, composta por dois itens, foram dados três símbolos e era preciso formar sequências de cinco figuras geométricas. No item (a), seria determinado o total de modos distintos de fazer isso.

Inicialmente, o grupo B entendeu que a expressão “modos distintos” significava que não poderia repetir os símbolos e concluiu que o cálculo seria 3×2 . Além da interpretação errada, observou-se, novamente, que eles não visualizavam o total de etapas necessárias para chegar à resolução.

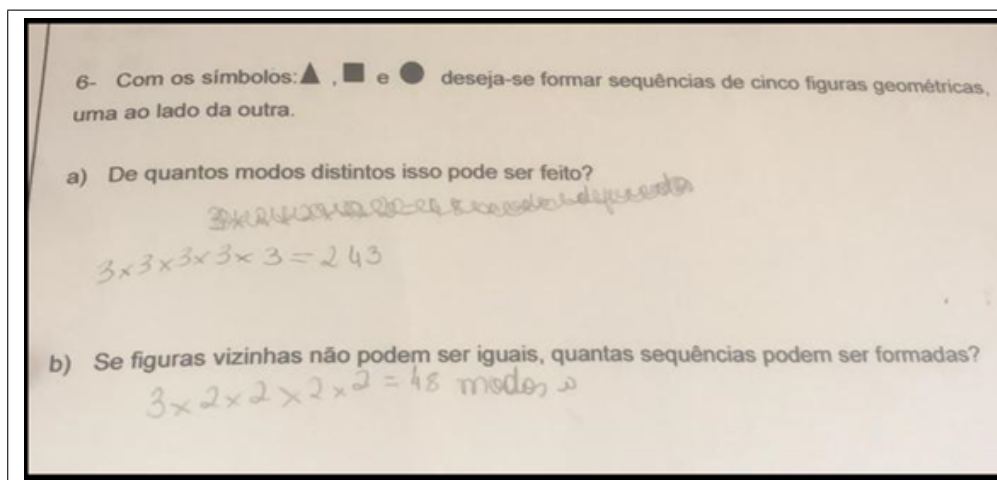
Após a interferência, foi esclarecido que a expressão “modos distintos” se referia ao total de maneiras diferentes de se formar as sequências e não que as figuras deveriam ser diferentes. O grupo foi despertado, ainda, para o fato de que as sequências deveriam ser formadas por cinco símbolos e só havia três disponíveis, então não era possível que todos fossem distintos. A aluna A7 então questionou: “Então tem que fazer 3×3 , professora?”. Observou-se que o grupo ainda estava com dificuldade para identificar as etapas de resolução do problema.

Diante da dificuldade exposta no parágrafo anterior, na tentativa de mantê-los motivados, uma vez que já estavam ficando desanimados, julgou-se importante esclarecer, novamente, sobre a quantidade de etapas que seriam necessárias para chegar à conclusão, logo, como as sequências devem ter cinco símbolos, seriam realizadas cinco etapas: (i) escolher o 1º símbolo; (ii) escolher o 2º símbolo; ...; (v) escolher o 5º símbolo e para cada etapa deveriam analisar o total de opções disponíveis. A partir dessa explicação e após discussão entre eles, conseguiram responder. O grupo A não apresentou dificuldade.

No item (b), também deveriam determinar o total de sequências, porém figuras vizinhas não poderiam ser iguais. Observou-se que os integrantes do A ficaram um pouco confusos, em um primeiro momento, pois entenderam que todas as figuras deveriam ser distintas, o que não era possível. Porém, não demorou muito para que percebessem a interpretação errada e conseguissem solucionar.

No grupo B, também houve interpretação equivocada, porém como já havia sido esclarecido que isso não era possível, logo o erro foi detectado e a equipe solicitou ajuda. Sugeriu-se que enunciado fosse relido, com mais atenção, e que o número de opções disponíveis para cada etapa da resolução do problema fosse pensado. Após alguns minutos de discussão e reclamações, pois estavam achando as questões difíceis, o A6 conseguiu concluir certo e explicou aos colegas o seu raciocínio. A Figura 78 apresenta a resolução da sexta questão pelo grupo B.

Figura 78 – Resolução correta da sexta questão – atividade 5, pelo grupo B



Fonte: Dados da Pesquisa.

A sétima questão, adaptada do ENEM, trazia como propósito determinar o total de formas distintas de acomodar uma família, composta por 7 pessoas, em um voo que possuía nove poltronas disponíveis. O grupo A, discutiu bastante sobre a melhor forma de resolver, sendo essa a que apresentaram mais dificuldade. Após algum tempo de debate, o aluno A1 solicitou a ajuda da pesquisadora para verificar se seu raciocínio estava correto: “Professora, eu pensei assim: são sete pessoas e nove lugares, então a 1ª pessoa terá 9 opções, a 2ª terá 8, e a última terá 3 opções, está certo?”. Como o raciocínio do aluno estava correto o mesmo conseguiu explicar para os demais integrantes do seu grupo.

O grupo B não conseguiu chegar a uma conclusão a respeito dessa questão e solicitou a ajuda da pesquisadora que fez os seguintes questionamentos: “De quantas maneiras a primeira pessoa pode escolher um lugar?” “E a segunda pessoa?” “E a terceira?”. Na medida que o grupo foi respondendo corretamente, ele percebeu como deveria resolver. A Figura 79 evidencia a resolução dessa questão, pelo grupo A.

nenhuma situação-problema parecida, ponderou-se que A7 tivesse retirado o problema da internet.

A resolução do problema elaborado por A7 foi efetuada, incorretamente, por A5 e a forma como A7 fez a correção reforçou a suspeita de cópia, principalmente ao ser questionada, pelo *WhatsApp*, sobre o que seria feito se três pessoas ficassem, sempre juntas e em qualquer ordem. Buscou-se com essa indagação aferir se ela saberia responder de forma parecida com o que escreveu. Como a aluna não teve ideia de como resolver e a pesquisadora encontrou o mesmo problema na internet, concluiu-se que não elaborou o problema.

Os demais integrantes do grupo B alegaram não ter ideia para elaboração. As Figuras 80 e 81 ilustram os problemas escritos pelas alunas A4, do grupo A, e A7, do grupo B.

Figura 80 – Problema elaborado pela aluna A4 – grupo A

A

Agora você deverá elaborar e resolver, através do Princípio Multiplicativo, um problema de contagem de possibilidades. Em seguida, forneça o seu problema para um colega de equipe e peça para que ele o resolva. Faça a correção da solução do colega e, caso existam, aponte os erros cometidos.

Apresente o enunciado do problema:

Carol faz um jogo de cartas, e precisa escolher um tênis, um salto e uma bota. Sendo que na loja existe 5 tipos de tênis, 8 tipos de salto e 3 tipos de botas. Quantas maneiras distintas Carol pode escolher um tênis, um salto e uma bota?

Sua solução para o problema:

$$\frac{5}{\text{tênis}} \times \frac{8}{\text{salto}} \times \frac{3}{\text{botas}} = 120 \text{ maneiras}$$

Nome do colega que resolveu o problema:

Comentário sobre a solução do seu colega:

Solução: $5 \times 8 \times 3 = 120$
Ele acertou, pois fez tudo que o enunciado pediu.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 81 – Problema transcrito pela aluna A7 – grupo B

Agora você deverá elaborar e resolver, através do Princípio Multiplicativo, um problema de contagem de possibilidades. Em seguida, forneça o seu problema para um colega de equipe e peça para que ele o resolva. Faça a correção da solução do colega e, caso existam, aponte os erros cometidos.

Apresente o enunciado do problema:

de quantas maneiras 6 pessoas podem sentar em um banco de 6 lugares de modo que dois deles sempre fiquem juntos em qualquer ordem?

Sua solução para o problema:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$120 \times 2 = 240 \text{ maneiras}$$

Nome do colega que resolveu o problema:

Comentário sobre a solução do seu colega:

ela errou porque na hora ela não prestou atenção porque se 2 pessoas são pra ficar no mesmo banco então elas pensam sem contar como a mesma pessoa e como os dois podem sentar juntos de maneira diferente. Temos $2 \times 120 = 240$ em todos os 6 pessoas podem sentar nos 6 lugares se 2 deles ficarem juntos.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, observou-se que o grupo A conseguiu resolver as questões com bastante autonomia, sem a necessidade de muitas intervenções da pesquisadora. Através da observação e análise das resoluções das questões, foi possível constatar que eles compreenderam o conceito do Princípio Multiplicativo de forma satisfatória.

Já o grupo B apresentou bastante dificuldade em identificar as etapas de resolução dos problemas, solicitando, constantemente, a ajuda da pesquisadora que pôde acompanhar mais de perto a equipe.

Para [Bergmann e Sams \(2019\)](#), esse é o principal motivo pelo qual os estudantes aprendem mais no modelo invertido, pois permite que o professor direcione sua atenção aos que apresentam mais dificuldade. Segundo esses autores, isso não quer dizer que os melhores alunos são ignorados, porém o foco da atenção não se concentra mais neles.

Em alguns momentos pode-se observar que alguns participantes do grupo B estavam

ficando um pouco desmotivados, em razão das dificuldades encontradas. Como tentativa de mantê-los motivados, a pesquisadora propôs um brinde aos alunos que não desistissem de realizar as tarefas, mantendo a interação com os colegas da equipe. Essa proposta gerou certo entusiasmo em todos os alunos.

4.4 Momento síncrono 4

Esse encontro ocorreu no dia 15 de setembro de 2020. Nesse dia, todos os discentes estavam presentes. Iniciou-se o momento com uma reflexão sobre as resoluções da atividade 5, desenvolvida no encontro síncrono anterior.

Como durante o desenvolvimento das questões, observou-se que o grupo B apresentou dificuldades, sobretudo em identificar as etapas que deveriam realizar para resolver os problemas, a pesquisadora buscou reforçar bastante a explicação sobre o passo a passo para resolução de cada um dos problemas propostos. Quando todos afirmaram que não havia nenhuma dúvida, iniciou-se a discussão sobre os conteúdos abordados na videoaula que os eles deveriam ter assistido no momento assíncrono anterior a esse.

Indagados sobre terem assistido ao vídeo e se apresentaram dúvidas, todos responderam positivamente e alegaram não ter questionamentos. Alguns declararam ter assistido ao vídeo, mais de uma vez, para uma compreensão mais clara do conteúdo. No momento seguinte, cada grupo seguiu para sua respectiva reunião para o desenvolvimento da atividade 7.

Nas subseções a seguir são relatadas as experimentações das atividades 6 (assíncrona) e 7 (síncrona).

4.4.1 Experimentação da atividade 6 (assíncrona)

O objetivo dessa atividade foi reforçar o conceito de Princípio Multiplicativo e apresentar o Princípio Aditivo, destacando a distinção entre eles.

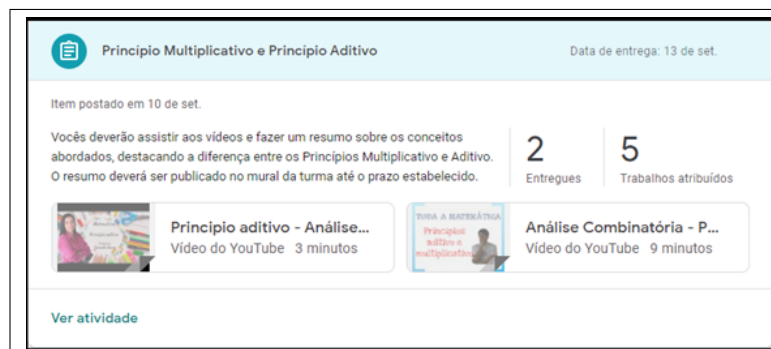
Para atingir tal intento, foram postados, no mural da turma, no *Google Sala de Aula*, dois vídeos do *YouTube*, intitulados “Princípio aditivo - Análise combinatória - Aula 02” e “Análise Combinatória - Princípios aditivo e multiplicativo”.

Após observarem os vídeos supracitados, os sujeitos deveriam postar, no mural da turma, um resumo sobre o que eles haviam compreendido a respeito dos conceitos abordados, bem como suas respectivas dúvidas. A pesquisadora, no encontro síncrono anterior, orientou a turma sobre a construção dos resumos, falou sobre a diferença entre escrever e transcrever e salientou a importância de utilizar um discurso próprio.

Além disso, foi solicitado aos alunos que analisassem os resumos produzidos pelos colegas, fazendo comentários ou sugestões, de forma educada. Eles tiveram um prazo de

três dias (entre 10/09/20 e 13/09/20) para a realização dessa atividade. A Figura 82 ilustra a postagem da atividade 6, no mural da turma, no *Google Sala de Aula*.

Figura 82 – Postagem da atividade 6 no mural da turma no *Google Sala de Aula*

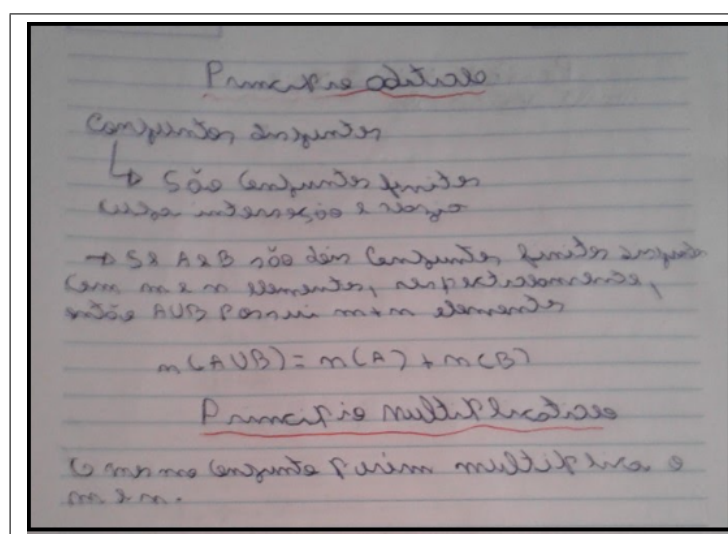


Fonte: Plataforma *Google Sala de Aula*.

Ao término do prazo estabelecido para a realização da atividade, os resumos postados foram analisados, seguidos de alguns comentários da pesquisadora. Somente a aluna A4 não fez sua publicação na plataforma, alegando ter tido problemas de acesso, no entanto, ela enviou pelo *WhatsApp*.

Através da análise dos resumos, observou-se que o público-alvo apresentou dificuldade para elaborar um discurso próprio e acabou transcrevendo alguns trechos que julgou mais importante, daquilo que assistiu nos vídeos. Além disso, somente os alunos A1 e A3 realizaram algum comentário, sendo esses realizados, exclusivamente, na publicação do aluno A2. As Figuras 83 e 84 destacam o resumo do aluno A2 e alguns comentários realizados, pelos colegas e pela pesquisadora.

Figura 83 – Resumo postado pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 84 – Comentários sobre o resumo postado pela aluno A2



Fonte: Plataforma *Google Sala de Aula*.

4.4.2 Experimentação da atividade 7 (síncrona)

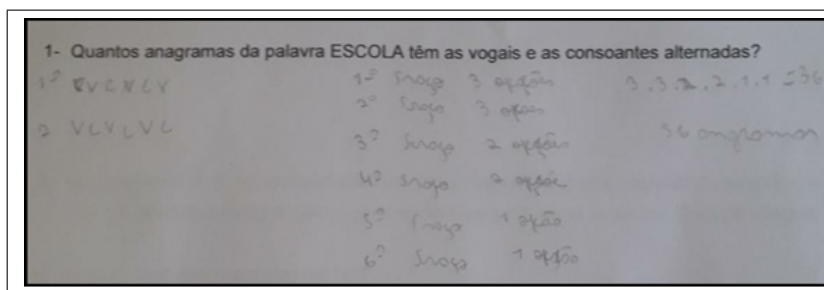
Essa atividade buscou averiguar o nível de compreensão dos alunos, acerca dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Foi composta por sete questões cujas resoluções envolviam, em algumas, somente a aplicação do Princípio Multiplicativo e, em outras, a aplicação dos dois Princípios.

Na primeira questão, era preciso determinar o total de anagramas da palavra ESCOLA, utilizando, de forma alternada, vogais e consoantes. Inicialmente, os dois grupos ficaram um pouco confusos em relação à forma de montar a estratégia correta para a resolução. Deveriam considerar o caso em que os anagramas começam por vogal e o que se iniciam por consoante.

Após alguns minutos de discussão, ambas as equipes, elaboraram o esquema correto para a resolução, contudo a B calculou o total de anagramas apenas para uma das possibilidades. Através da análise da resolução desse grupo foi possível observar que o erro se deu, exclusivamente, pela falta de atenção, visto que o esquema elaborado estava correto.

No momento de discussão entre os grupos, os integrantes do B relataram ter esquecido de realizar o cálculo quando os anagramas começassem por vogal. O A resolveu de forma correta. A Figura 85 ilustra a resolução dessa questão pelo grupo B.

Figura 85 – Resolução incompleta da primeira questão – atividade 7, pelo grupo B



Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda questão foram dados os algarismos de 1 a 8 e os discentes deveriam determinar o total de números naturais de três algarismos distintos, maiores que 350, que poderiam ser formados com esses algarismos. Essa questão gerou bastante discussão no grupo A, entretanto eles conseguiram concluir que deveriam considerar dois casos: (i) números maiores que 350, porém menores que 400 e (ii) números maiores que 400, depois utilizar o Princípio Aditivo para achar o total de números solicitados; dessa forma chegaram ao resultado correto.

Essa questão gerou bastante debate no time B que chegou à conclusão, equivocada, de que para o algarismo das centenas havia, exatamente, 5 alternativas: 4, 5, 6, 7 e 8. A pesquisadora interferiu com o seguinte comentário: “O número 361, por exemplo, é maior que 350, mas não começa com nenhuma das opções que vocês consideraram”. O time entendeu que o 3 poderia, em alguns casos, ocupar a ordem das centenas, mas ainda assim apresentou dificuldade para elaborar a estratégia correta de resolução e solicitou ajuda da pesquisadora que sugeriu, obedecendo às condições impostas pelo problema, que fossem considerados todos os números naturais maiores que 350, porém menores que 400 e depois os naturais maiores que 400. Após essa sugestão, o grupo conseguiu resolver.

Na terceira questão, em uma cantina, eram vendidos seis tipos de biscoitos, quatro tipos de sucos e cinco tipos de frutas. O objetivo era determinar o total de maneiras de uma pessoa comprar um lanche, sabendo que precisa escolher dois alimentos diferentes. Para tal, seria necessário considerar três casos possíveis: (i) a pessoa escolher biscoito e suco; (ii) optar por biscoito e fruta ou (iii) suco e fruta. Para determinar o total dessas possibilidades seria necessário aplicar o Princípio Multiplicativo e, em seguida, o Princípio Aditivo.

No início, a aluna A7, do grupo B, sugeriu que deveriam multiplicar todas as possibilidades para cada alimento, porém o A6 observou que dessa forma estariam considerando que a pessoa compraria não 2, mas sim 3 alimentos. Ele conseguiu elaborar a estratégia correta para a resolução e convenceu os demais integrantes do seu grupo. As duas equipes solucionaram a questão acertadamente. A Figura 86 mostra a resolução dessa questão,

pelo grupo A.

Figura 86 – Resolução correta da terceira questão – atividade 7, pelo grupo A

3. Bia foi à cantina de sua escola para comprar um lanche. Nessa cantina são vendidos seis tipos diferentes de biscoitos, quatro tipos diferentes de sucos e cinco tipos diferentes de frutas. De quantas maneiras distintas Bia pode comprar seu lanche sabendo que ela deseja escolher exatamente dois alimentos diferentes.

$$\begin{array}{l} 6 \cdot 4 = 24 \\ 4 \cdot 5 = 20 \\ 6 \cdot 5 = 30 \end{array}$$

$$24 + 20 + 30 = 74$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta questão, composta por três itens, apresentou as maneiras de se formar códigos, a partir de três símbolos. O item (a) foi respondido, com facilidade, por ambas as equipes. O (b) gerou, nos grupos, um pouco de dúvida quanto à interpretação do enunciado. A pesquisadora precisou intervir explicando que os códigos poderiam ser formados por dois, três ou quatro símbolos. Após o esclarecimento eles descobriram o resultado. Em relação ao item (c), os estudantes não apresentaram dificuldade. A Figura 87 ilustra a resolução dessa questão, pelo grupo B.

Figura 87 – Resolução correta da quarta questão – atividade 7, pelo grupo B

4. Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: 0, 1. Os diferentes códigos são seqüências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

a) de cinco símbolos começam por "1"?

$$1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 81$$

b) contêm de dois a quatro símbolos?

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 4 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 = 27 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 81 \\ 4 + 27 + 81 = 112 \end{array}$$

c) são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

$$0 \cdot 1 \cdot 0 = 6$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A quinta questão, retirada do Enem, trouxe como objetivo a escolha do formato de senha que atendesse às condições estabelecidas pelo problema. Essa questão gerou bastante debate nas equipes, pois uma e outra interpretaram, erroneamente, a questão.

Foi necessário fazer a leitura da questão várias vezes. Acredita-se que a dificuldade se deu pela grande quantidade de informações do enunciado. Aos poucos, as ideias foram surgindo, a pesquisadora foi orientando, quando era preciso ou era solicitada e os times conseguiram resolver. A Figura 88 destaca a resolução dessa questão, pelo grupo A.

Figura 88 – Resolução correta da quinta questão – atividade 7, pelo grupo A

5 - (Enem/2017) Uma empresa construirá sua página na *internet* e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidos pelo programador, descritos no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDLDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das posições. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a) I $4^{\text{a}} \text{ opção} - \frac{26 \times 10}{L} \times \frac{10}{D} \times \frac{10}{D} \times \frac{10}{D} \times \frac{10}{D} = 2,600,000$

b) II $2^{\text{a}} \text{ opção} - \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{D \times D \times D \times D \times D} = 1,000,000$

c) III $3^{\text{a}} \text{ opção} - \frac{26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10}{L \times L \times D \times D \times D} = 6,760,000$

d) IV $4^{\text{a}} \text{ opção} - \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{D \times D \times D \times D \times D} = 100,000$

e) V $5^{\text{a}} \text{ opção} - \frac{26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10}{L \times L \times L \times D \times D} = 1,457,600$

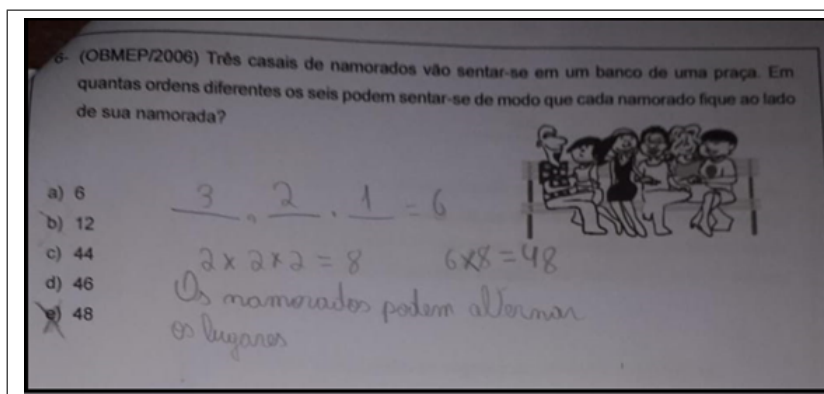
Fonte: Dados da pesquisa.

A sexta questão, retirada da OBMEP, era para determinar o total de ordens diferentes em que três casais de namorados podem sentar-se em um banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua parceira. Essa questão também gerou bastante discussão.

No grupo A, o aluno A1 sugeriu que cada casal deveria ser contado como uma única pessoa e dessa forma o primeiro teria três opções de lugares, o segundo, duas, e o terceiro, uma, sendo o total de possibilidades dado por $3 \times 2 \times 1$. Na ocasião, a aluna A3 chamou a atenção dos colegas para o fato de que cada casal poderia se sentar de duas formas diferentes e fez o seguinte questionamento: "Vocês se lembram daquela questão onde os bonequinhos tinham que revezar nos balanços?". Ela estava se referindo à questão 5 da atividade 1, em que os manipuláveis foram utilizados como suporte para a resolução dos problemas. Os demais integrantes do grupo recordaram-se, imediatamente e concordaram com a colega.

A pesquisadora observou que a manipulação dos objetos foi importante para a construção do conhecimento dos conceitos trabalhados, corroborando com Vale (1999, p. 5), quando ela afirma que "cada novo conceito introduzido com os manipuláveis faz com que a matemática se torne viva e dê significado a ideias abstratas, através de experiências com objetos reais." O grupo A concluiu a questão sem erro, como mostra a Figura 89.

Figura 89 – Resolução correta da sexta questão – atividade 7, pelo grupo A

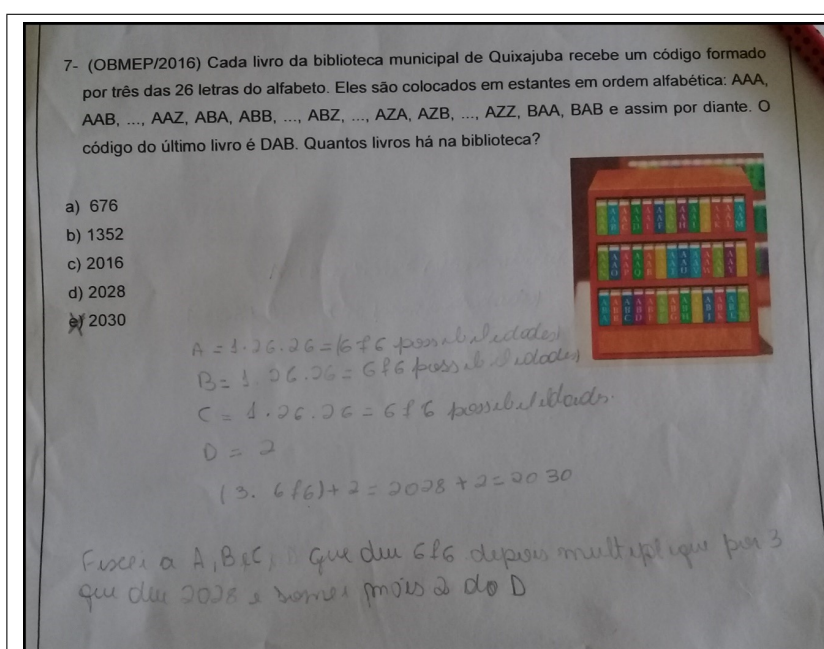


Fonte: Dados da pesquisa.

A equipe B usou o mesmo raciocínio da A, entretanto, na hora de considerar que cada casal poderia se sentar de duas formas distintas, fez apenas para um casal. No momento destinado à comparação e discussão das resoluções entre os grupos, eles afirmaram ter sido falta de atenção, mas que haviam compreendido a questão.

A sétima questão, também da OBMEP, apresentava o seguinte problema: cada livro de uma biblioteca recebia um código formado por três letras do alfabeto e esses exemplares eram organizados em ordem alfabética. Foi dado o código do último livro e o objetivo era determinar o total de obras da biblioteca. Mais uma questão permeada por debate, nas duas equipes, no entanto elas conseguiram chegar a uma estratégia correta para a resolução. A Figura 90 destaca a resolução dessa questão, pelo grupo B.

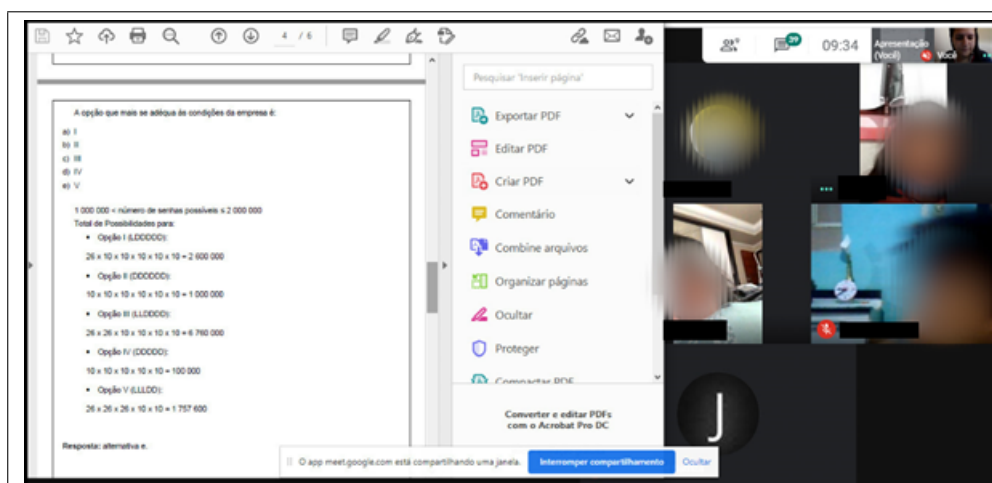
Figura 90 – Resolução correta da sétima questão – atividade 7, pelo grupo B



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao término dessa atividade, as soluções foram comparadas e discutidas entre os grupos. A única questão cuja resolução foi diferente foi a sexta, em que o grupo B relatou ter errado por falta de atenção. Além disso, a pesquisadora retomou as questões com maior dificuldade (Figura 91), a fim de esclarecer eventuais dúvidas, pois algumas respostas poderiam não ter ficado bem compreendidas para alguns sujeitos.

Figura 91 – Momento destinado à discussão das resoluções da atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa.

É importante mencionar que, durante o desenvolvimento dessa atividade, observou-se um avanço no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, em especial do grupo B que estava apresentando mais dificuldade nas atividades anteriores.

Por meio da cooperação, entre os membros dos times, foi possível elaborar estratégias para a resolução de problemas de contagem mais complexos que aqueles propostos nas atividades anteriores e, além disso, cabe citar que à medida que eles avançavam, solicitavam a intervenção com menos frequência.

A partir das observações realizadas pela pesquisadora e das análises das respostas dos discentes, pôde-se concluir que a aprendizagem dos conteúdos abordados ocorreu de forma satisfatória.

4.5 Análise geral da experimentação das atividades

Quanto à experimentação da proposta didática, é possível afirmar que os estudantes ofereceram uma contribuição significativa para o desenvolvimento desta pesquisa. Eles realizaram as atividades, com entusiasmo, em quase todos os momentos. Durante todo o processo de experimentação, observou-se uma postura mais ativa deles e um maior engajamento na realização das tarefas propostas.

No decorrer do desenvolvimento da atividade 5, a pesquisadora percebeu que os integrantes do grupo B estavam ficando desmotivados, em razão das dificuldades que surgiram. Segundo [Munhoz \(2015\)](#), quando o aluno abandona seu papel de mero receptor e passa a assumir uma postura mais ativa no seu processo de aprendizagem, pode, inicialmente, se sentir abandonado e incapaz de assumir a responsabilidade que lhe está sendo atribuída. Sendo assim, uma estratégia para mantê-los motivados, que obteve sucesso, foi oferecer um brinde para que não desistissem de realizar as atividades e mantivessem a interação com os colegas.

No final da aplicação, como todos haviam se empenhado no desenvolvimento das tarefas, a pesquisadora os bonificou com uma caixa de bombons, deixada na escola, (Figura 92) para cada aluno.

Figura 92 – Brinde oferecido aos alunos pelo empenho na realização das atividades



Fonte: Dados da pesquisa.

Também é importante esclarecer que mesmo através da aplicação remota, em que todos se viam, apenas, através de uma tela, os trabalhos foram realizados de forma colaborativa, com grande troca de informações e discussões entre seus integrantes. Esse fato ratifica a tese de [Diesel, Baldez e Martins \(2017\)](#), quando afirmam que “o trabalho com metodologias ativas de ensino favorece a interação, constante, entre os estudantes.” ([DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017](#), p. 277). Essa interação foi considerada como um dos benefícios mais valiosos, proporcionados pela Sala de Aula Invertida, visto que os discentes dessa turma tinham uma grande dificuldade de trabalhar em equipe.

Além disso, através dessa interação, foi possível identificar a equipe com mais dificuldade e, dessa forma, acompanhá-la mais de perto. Esse fato corrobora a afirmação de [Bergmann e Sams \(2019\)](#) de que “um dos grandes benefícios da inversão é o de que os alunos que têm dificuldade recebem mais ajuda.” ([BERGMANN; SAMS, 2019](#), p. 12).

No modelo de ensino tradicional, trabalhado na sala de aula presencial e principalmente nas aulas remotas, havia certa dificuldade em diagnosticar as principais lacunas de aprendizagem desses alunos, no momento da aula, visto que quase não interagiam.

Outro benefício, proporcionado pela Sala de Aula Invertida, foi o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, tornando-os responsáveis pelo seu processo de aprendizagem. Como confirma a ideia de Diesel, Baldez e Martins (2017), ao declararem que ações pedagógicas, norteadas por metodologias ativas, estimulam a autonomia dos alunos.

A intervenção da pesquisadora era solicitada, geralmente, quando os integrantes das equipes apresentavam divergências de opiniões ou quando não conseguiam, mesmo após discussão, encontrar uma estratégia para resolver a questão.

Acredita-se que a metodologia Sala de Aula Invertida, aliada à intervenção da pesquisadora, ao trabalho em equipe e às atividades propostas proporcionou momentos de reflexões e contribuiu para o processo de aprendizagem dos alunos.

4.6 Avaliação de aprendizagem

Conforme cronograma apresentado no Quadro 3, no dia 17 de setembro de 2020, foi realizada a avaliação de aprendizagem (Apêndice G), essa contou com a participação de todos os alunos da turma. Ela foi elaborada através do Formulário *Google* e composta por sete questões de múltipla escolha, com níveis variados de dificuldade.

Essa avaliação teve por propósito complementar o processo avaliativo que ocorreu, durante toda a experimentação da proposta didática, auxiliando na verificação de quais foram os conhecimentos construídos e as lacunas de aprendizagem que o público-alvo ainda apresentava, em relação ao estudo dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

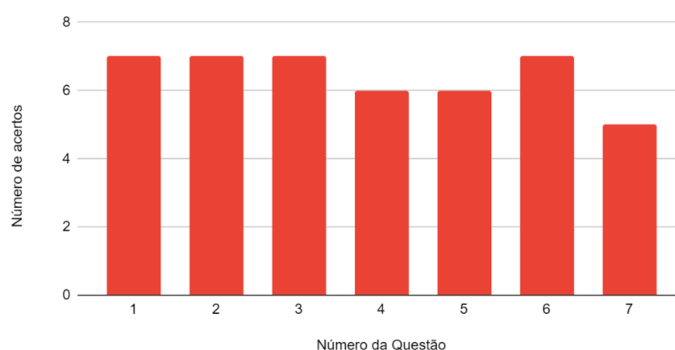
A aula foi iniciada com uma reunião, no *Google Meet*. A pesquisadora compartilhou a tela com os alunos, apresentando as questões da avaliação. Em seguida, eles deveriam acessar o *Google Sala de Aula* e responder à avaliação que foi postada no mural da turma.

Solicitou-se a resolução, no caderno, e o posterior envio de foto do material para o *WhatsApp* da pesquisadora, com a finalidade de realizar uma análise mais detalhada da aprendizagem. Essa opção de envio se deu pelo fato de que, às vezes, os sujeitos relatavam problemas para enviá-la para o *Google Sala de Aula*.

Ao comparar os resultados obtidos nessa avaliação com os da avaliação diagnóstica, é possível verificar que houve um grande avanço quanto ao número de acertos.

O Gráfico 3 ilustra o resultado quantitativo do desenvolvimento dos alunos, relacionando o número de acertos por questão.

Gráfico 3 – Número de acertos por questão da avaliação de aprendizagem



Fonte: Elaboração própria.

4.7 Análise do questionário dos alunos

O questionário, respondido pelos alunos participantes da pesquisa (Apêndice H), buscou verificar a percepção do público-alvo em relação à metodologia Sala de Aula Invertida. Foi elaborado através do Formulário *Google* e enviado por meio do grupo da turma, no *WhatsApp*. Com o intuito de que as respostas fossem as mais sinceras possíveis, não foi necessária a identificação dos participantes.

Sobre a explicação dos conteúdos abordados nas videoaulas, do total, 57,1% consideraram a explicação de fácil compreensão e 42,9% de média compreensão. Esses índices não estão coerentes com o que foi relatado por eles, durante os encontros síncronos, uma vez que, nesses momentos, quando questionados sobre a clareza das explicações, todos respondiam positivamente e alegavam não ter dúvida.

Acredita-se que esse percentual que avaliou a explicação como de média compreensão esteja relacionado ao fato de que alguns alunos, durante o encontro síncrono 4, afirmaram ter assistido aos vídeos mais de uma vez para uma melhor compreensão. Considera-se também a possibilidade de que eles tenham apresentado uma percepção geral de complexidade dos exercícios, levando em consideração o tema em si e não a explicação propriamente.

Em relação ao trabalho em equipe, todos os alunos disseram que ajudou no desenvolvimento de sua aprendizagem 57,1% afirmaram que ajudou bastante e o restante declarou que ajudou.

Quando questionados se preferiam, como tarefa de casa, assistir à explicação do conteúdo através de vídeos ou resolver exercícios mais complexos, todos escolheram a primeira opção.

Em relação à adaptação ao modelo de aula invertida, somente um aluno relatou ter um pouco de dificuldade, o restante alegou que não teve dificuldade.

As duas últimas perguntas foram abertas. A penúltima, interrogou-os sobre a preferência pelas aulas de forma tradicional, com o professor expondo o conteúdo de forma oral/escrita e o aluno anotando; ou aulas em que os alunos resolvem exercícios e trabalham em equipe. Eles deveriam justificar sua resposta. A preferência pela segunda opção foi unânime, como mostra a Figura 93.

Figura 93 – Comentário dos alunos sobre o modelo de aula que preferem

Aulas onde os alunos resolvem exercícios e trabalham em equipe, pois ajuda na hora da resolução do exercício e ajuda no desenvolvimento em trabalho de grupo.
Onde os alunos resolvem os exercícios e trabalham em equipe
Aulas que resolvem exercícios e trabalham em equipe. Pois eu acho melhor de compreender, praticamos varias exercicio, e um ajuda o outro nas dúvidas.
Prefiro em trabalho em equipe. Por que assim um pode ajudar o outro com que não sabe.
Onde os alunos trabalham em equipe, é muito mais fácil
Aulas onde os alunos resolvem exercícios e trabalham em equipe, ajuda no trabalho em equipe e você pode assistir os vídeos a hora que você quiser e voltar quantas vezes for melhor pra você entender
Eu prefiro as aulas onde os alunos trabalham em grupo, porque faz isso ser mais divertido, além de melhorar a trabalho em grupo.

Fonte: Dados da pesquisa.

A última pergunta solicitou a opinião deles sobre o modelo Sala de Aula Invertida, destacando os pontos que consideraram positivos e negativos. A Figura 94 mostra os comentários dos alunos.

Figura 94 – Comentário dos alunos sobre a Sala de Aula Invertida

Os pontos positivos foi que trabalhamos em equipe, conseguimos ter compreensão da atividade. Não vi nenhum ponto negativo!
Positivo e fácil compreender uma matéria quando todos estão se ajudando Ajuda na interação com as pessoas fora que um ajuda o outro...
Negativo não me lembro de pontos negativos
Os pontos positivos é que melhorou o trabalho em equipe, além de ajudar no aprendizado, os pontos negativos é em questão de cada um ter um tipo de opinião e o grupo não conseguir compreender ou ter outra opinião.
Trabalho em equipe , um melhor entendimento das atividades Se vc não tem internet fica difícil utilizar esse modo de sala de aula invertida
Ponto positivo- é mais fácil de fazer as atividades, vc entende mais a matéria Ponto negativo- pra mim n tem ponto negativo
Tem uma fácil, compreensão porque às vezes temos vergonha de tirarmos dúvidas com o professor, já pelo vídeo podemos voltar a explicação várias vezes.
Positivos:
Os vídeos aulas ajudam bastante , pelo fato que você pode ver a explicação quantas vezes você quiser e na hora que você estiver em dúvida.
O trabalho em equipe ajuda muito no entendimento da materia.
Negativos:
Eu prefiro que seja em presencial, pois as vezes a internet fica ruim, o canal de comunicação (meet) as vezes para de funcionar por problemas técnicos, e isso acaba prejudicando o grupo, porque tem que ser a mesma resposta e resolução das questões. Então essa questão do presencial ser melhor que o online.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com base nos comentários dos participantes, cabe declarar que dentre os principais pontos positivos em relação à Sala de Aula Invertida, destacados por eles, estão: o trabalho em equipe e a explicação do conteúdo, através de videoaulas, como tarefa de casa, possibilitando que assistam à explicação quantas vezes precisarem.

Sobre esse último ponto, destacado pelos alunos, no parágrafo anterior, [Bergmann e Sams \(2019, p. 21\)](#) afirmam que “quando invertemos a sala de aula, transferimos o controle remoto para os alunos.” Dessa forma, é possível que cada aluno aprenda no seu próprio ritmo.

Em relação ao trabalho em equipe, os mesmos autores supramencionados afirmam que a inversão da sala de aula aumenta a interação entre os alunos que passam a se ajudar, em vez de dependerem apenas do professor como único transmissor do conhecimento ([BERGMANN; SAMS, 2019](#)).

Considerando as observações realizadas pela pesquisadora, a análise das respostas do questionário, bem como das atividades propostas, pode-se confirmar os benefícios oferecidos pela Sala de Aula Invertida. Essa combinação de fatores, aliada à metodologia citada, anteriormente, proporcionou momentos de reflexão no público-alvo e ainda contribuiu para que a aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo ocorresse de forma satisfatória.

Capítulo 5

Considerações Finais

As pesquisas realizadas no início deste trabalho apontam que, sob a ótica de alunos e professores, a Análise Combinatória se apresenta como um dos conteúdos matemáticos mais complexos. Além disso, os métodos de ensino tradicionais, tendo o professor como centro do processo de ensino-aprendizagem e o aluno como sujeito passivo, não atendem mais às necessidades da sociedade moderna, altamente conectada. Nesse contexto, pode-se observar a premência de se pensar em novas metodologias de ensino que contemplem a participação ativa dos estudantes e tenham como suporte as tecnologias digitais.

Diante do supradito, pode-se, de maneira relevante, investigar as contribuições da metodologia de ensino Sala de Aula Invertida para o processo de ensino-aprendizagem, dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II.

O objetivo geral da pesquisa teve como premissa investigar, através da percepção dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como uma proposta didática baseada na metodologia Sala de Aula Invertida, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Tal objetivo foi alcançado visto que o trabalho conseguiu verificar que a Sala de Aula Invertida, aliada às atividades propostas e à intervenção da pesquisadora: (i) proporcionou aos alunos momentos de reflexões e aprendizagem significativa; (ii) promoveu a participação ativa desses no seu próprio processo de aprendizagem e ainda a colaboração entre eles, favorecendo o trabalho em equipe; (iii) contribuiu para o desenvolvimento da autonomia deles que se tornaram menos dependentes da ajuda do professor; (iv) oportunizou a identificação, por parte da pesquisadora, do grupo de alunos com mais dificuldade e, a partir dessa observação, o suporte de forma mais direcionada.

Cabe citar, ainda, um maior engajamento dos alunos na realização das tarefas. No modelo tradicional, a maioria deles não se compromete com a realização das atividades.

Em relação à aprendizagem do conteúdo, as observações realizadas pela pesquisadora, as análises dos resultados das atividades propostas e da avaliação de aprendizagem

permitem concluir que ocorreu de forma satisfatória.

É importante mencionar que a utilização das TDIC apresentou-se como um fator extremamente positivo, uma vez que possibilitou a visualização das principais dificuldades encontradas pelos alunos, durante o estudo on-line, e, conseqüentemente, um melhor aproveitamento dos encontros síncronos que passaram a ser destinados para sanar as dúvidas e resolver problemas.

No que diz respeito às videoaulas, os alunos consideraram como um dos principais pontos positivos proporcionados pela Sala de Aula Invertida, pois poderiam assistir à explicação do conteúdo no seu próprio ritmo e no momento que considerassem mais oportuno.

Cumprе ressaltar que os estudos realizados para o desenvolvimento desta pesquisa, assim como a elaboração e aplicação da proposta didática, proporcionaram momentos de aprendizagem que contribuíram para o crescimento profissional e científico da pesquisadora.

Através das observações feitas, durante as atividades, e das análises das resoluções das questões, pôde-se constatar que a principal dificuldade dos discentes foi identificar quais eram as etapas de resolução dos problemas, o que permite constatar que, provavelmente, a falta de estímulo ao raciocínio combinatório, durante os anos de escolaridade, tenha sido o fator principal. No entanto, através da realização das atividades, das discussões em grupo e intervenções da pesquisadora percebeu-se uma melhora significativa em relação à forma de raciocinar diante de problemas de contagem.

As adversidades enfrentadas, pela pesquisadora, para o desenvolvimento desta pesquisa centraram-se na rápida migração do ensino presencial para o Ensino Remoto Emergencial, exigindo ampliar seus conhecimentos, em relação ao uso das tecnologias digitais para um ensino totalmente *on-line*.

Face ao exposto destaca-se o fato de que, durante as reuniões simultâneas através do *Google Meet*, nos momentos em que os grupos interagiam com mais intensidade, ficava difícil acompanhar a discussão entre eles e sendo necessário solicitar que os integrantes de um grupo parassem a discussão por um momento para que a pesquisadora pudesse compreender os outros participantes.

Um aspecto que pode ser melhorado, no caso da aplicação da metodologia de forma totalmente remota, é a instalação de uma extensão ao *Google Meet* que permita silenciar todas as reuniões necessárias em um dado momento. Cabe mencionar que a pesquisadora desconhecia a existência da referida extensão. No entanto, tomando por base os resultados obtidos, conclui-se que esta dificuldade não acarretou um prejuízo para a aprendizagem do conteúdo.

As observações realizadas, durante os encontros *on-line* síncronos, os resultados das atividades e a avaliação de aprendizagem sinalizaram que a metodologia proporcionou

um satisfatório aprendizado do tema, permitindo responder à questão de pesquisa que foi: Como a metodologia de ensino, denominada Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental?

Os resultados obtidos indicaram que a referida metodologia, aliada a uma proposta didática que contemple a utilização de materiais manipuláveis, tendo como apoio as tecnologias digitais e a intervenção da pesquisadora pode contribuir, de forma significativa, para o processo de ensino-aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Como perspectiva futura, a partir deste trabalho, sugere-se o aprimoramento da proposta didática: com a gravação de vídeos de autoria própria a fim de melhor trabalhar os objetivos propostos e ainda facilitar a compreensão dos alunos; um aperfeiçoamento em relação ao uso de ambientes virtuais de aprendizagem e ferramentas tecnológicas para a Educação; a aplicação da proposta para um quantitativo maior de estudantes, propiciando uma coleta de dados mais ampla e a experimentação da proposta em um contexto educacional que permita mesclar o ensino presencial com *on-line*.

Espera-se que esta pesquisa contribua para a reflexão sobre a importância de se trabalhar com metodologias ativas, tendo como apoio as tecnologias digitais, para a construção do conhecimento matemático.

Referências

ALVES, J. S.; MACHADO, P. S. Metodologias ativas: por que usá-las? In: CONGRESSO INTERNACIONAL UMA NOVA PEDAGOGIA PARA A SOCIEDADE FUTURA, 3, 2018, Rio Grande do Sul. *Anais [...]*. Rio Grande do Sul, Brasil, 2018. p. 861–863. Citado na página 18.

ALVES, R.; SEGADAS, C. Sobre o Ensino de Análise Combinatória: Fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. *Acta Scientiae*, v. 14, n. 3, p. 405–420, set. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

AZEVEDO, E. R. D. *Uma proposta para a inserção de problemas de contagem no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, fev. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/4808/1/elionorarodriguesdeazevedo.pdf>. Citado na página 49.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. *Ensino Híbrido: Personalização e tecnologia na educação*. Primeira. [S.l.]: Pensa, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 18, 29, 44 e 61.

BARBOSA, E.; MOURA, D. Metodologias Ativas de Aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. *Boletim Técnico do Senac*, v. 39, n. 2, p. 48–67, maio 2013. ISSN 0102-549X. Disponível em: <https://www.bts.senac.br/bts/article/view/349/333>. Citado na página 41.

BARRETO, A. P. *Proposta de atividades para o desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, nov. 2017. Disponível em: https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150460991. Citado na página 47.

BERGMANN, J. *Aprendizagem Invertida para resolver o problema do dever de casa*. Porto Alegre: Penso, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 98 e 107.

BERGMANN, J.; SAMS, A. *Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem*. Rio de Janeiro: LTC, 2019. Citado 10 vezes nas páginas 19, 43, 44, 45, 59, 90, 98, 116, 125 e 129.

BERNARDO, S. F. A Sala de Aula Invertida: Possibilidades Pedagógicas no Ensino de Língua Espanhola com o uso de Google Sala de Aula. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO, 16, 2018, Pernambuco. *Anais[...]*. Pernambuco, Recife, 2018. ISSN: 1984-6355. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.

- BORBA, R. O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. *Anais[...]*. Salvador, BAHIA, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- BORBA, R. E. Vamos Combinar, arranjar e permutar: Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. *Anais[...]*. Curitiba, Paraná, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 21, 23 e 71.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília, DF, 1998. Citado na página 29.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)-Bases Legais*. Brasília, DF, 2000. Citado na página 29.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF, 2000. Citado na página 18.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática; médio, ensino. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, 2002. Citado na página 29.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular. Educação é a Base*. Brasília, DF, 2018. Versão final. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Citado 7 vezes nas páginas 21, 24, 25, 28, 29, 46 e 67.
- BRASIL. *LDB: Lei de diretrizes e bases da Educação Nacional*. Brasília, DF, 2018. Citado na página 46.
- BRASIL. *Diretrizes para Diagnóstico e Tratamento da COVID-19*. [S.l.], 2020. Citado na página 55.
- BRASIL. Nota de esclarecimento. *Diário Oficial da união*, mar. 2020. Acesso em 01/10/2020. Disponível em: <http://consed.org.br/media/download/5e78b3190caee.pdf>. Citado na página 56.
- BRASIL. Portaria N° 345, de 19 de março de 2020 que altera a Portaria MEC N° 343, de 17 de março de 2020. *Diário Oficial da União*, seção 1-extra, mar. 2020. Citado na página 56.
- BRASIL. Portaria N° 343, de 17 de março de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do novo Coronavírus-COVID-19. *Diário Oficial da União*, ago. 2020. Acesso em 18/08/2020. Disponível em: <https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-343-de-17-de-marco-de-2020-248564376>. Citado na página 56.
- CAMARGO, F. Por que usar metodologias ativas de aprendizagem? In: *A sala de aula inovadora. Estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo*. Porto Alegre: Penso, 2018. cap. 3, p. 13–18. Citado na página 41.

CARVALHO, R. As Tecnologias no cotidiano escolar: Possibilidades de articular o trabalho pedagógico aos recursos tecnológicos. In: *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense. Cadernos PDE*. SEED, 2009. v. 1. ISBN 978-85-8015-039-1. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2008_uenp_ped_artigo_rosiani_carvalho.pdf. Citado 3 vezes nas páginas 18, 28 e 29.

COSTA, C. A. *As Concepções dos Professores de Matemática sobre o uso da Modelagem no desenvolvimento do Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

DAMIANI, M. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de Educação | FaE/PPGE/UFPel*, n. 45, p. 57–67, maio 2013. ISSN 2178-079X. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822>. Citado na página 54.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicações*. Terceira. São Paulo: Ática, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 66, 76 e 100.

DAROS, T. Por que inovar na educação? In: CAMARGO, F.; DAROS, T. (org.). *A sala de aula inovadora. Estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo*. Porto Alegre: Penso, 2018. cap. 1, p. 3–7. Citado na página 18.

DAROS, T. A sala de aula inovadora. Estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. In: CAMARGO, F.; DAROS, T. (org.). *Metodologias ativas: aspectos históricos e desafios atuais*. Porto Alegre: Penso, 2018. cap. 2, p. 8–12. Citado na página 41.

DEBALD, B. *Metodologias ativas no ensino superior – o protagonismo do aluno*. Penso, 2020. E-book. Disponível em: <https://ler.amazon.com.br/?asin=B084WPZKJ6>. Citado na página 42.

DIESEL, A.; BALDEZ, A.; MARTINS, S. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Thema*, v. 14, n. 1, p. 268–288, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 39, 40, 125 e 126.

ESTRELLA, B.; LIMA, L. *CNE aprova diretrizes para escolas durante a pandemia*. 2020. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/12-noticias/acoes-programas-e-projetos-637152388/89051-cne-aprova-diretrizes-para-escolas-durante-a-pandemia>. Citado na página 56.

EVANGELISTA, A.; SALES, G. A Sala de Aula Invertida (*Flipped Classroom*) e as possibilidades de uso da Plataforma Professor online no domínio das Escolas Públicas Estaduais do Ceará. *Experiências em Ensino de Ciências*, v. 13, n. 5, p. 566–583, set. 2018. Citado na página 42.

GERVÁZIO, S. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 9, p. 42–55, jul. 2017. ISSN 2316-9664. Citado na página 51.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. Quarta. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 54.

- GIOVANNI JÚNIOR, J.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática: 8º ano: Ensino fundamental: anos finais*. São Paulo: FTD, 2018. Citado na página 72.
- GOOGLE MEET. *Ajuda do Google Meet*. 2020. Disponível em: <https://support.google.com/meet#topic=7306097>. Citado na página 35.
- GOOGLE SALA DE AULA. *Ajuda do Sala de Aula*. 2020. Disponível em: https://support.google.com/edu/classroom/answer/6020279?hl=pt-BR&ref_topic=7175444. Citado na página 36.
- GUERRA, E. *Manual de Pesquisa Qualitativa*. Porto Alegre: Penso, 2018. Citado na página 54.
- IDEB. *Resumo Técnico- Resultados do índice de desenvolvimento da educação básica*. 2017. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_ideb_2005-2017.pdf. Citado na página 17.
- IEZZI, G. et al. *Conecte: Matemática, Ciências e aplicações*. Primeira. São paulo: Saraiva, 2011. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 73, 76 e 81.
- JOYE, C.; MOREIRA, M.; ROCHA, S. Educação a Distância ou Atividade Educacional Remota Emergencial: em busca do elo perdido da educação escolar em tempos de COVID-19. *Research, Society and Development*, v. 9, n. 7, p. 1–29, maio 2020. ISSN 2525-3409. Citado na página 56.
- KENSKI, V. Aprendizagem mediada pela tecnologia. *Revista Diálogo Educacional*, v. 4, n. 10, p. 1–10, set. 2003. ISSN 1518-3483. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189118047005>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- KHAN, S. *Um mundo, uma escola*. Intrínseca, 2013. *E-book*. Disponível em: <https://ler.amazon.com.br/?asin=B00AU5A24Y>. Citado na página 31.
- MARCONI, M.; LAKATOS, E. *Fundamentos de Metodologia Científica*. Oitava. São Paulo: Atlas, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- MARTINS, O.; MASCHIO, E. As Tecnologias Digitais na escola e a formação docente: Representações, apropriações e práticas. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, v. 14, n. 3, p. 1–21, set. 2014. ISSN 1409-4703. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44732048020>. Citado na página 28.
- MELLO, H. P. *Desmitificando o Ensino de Análise Combinatória*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- MORAN, J. Mudando a Educação com metodologias Ativas. In: SOUZA, C. A. D.; MORALES, E. (org.). *Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens*. PR: UEPG, 2015. v. 2, p. 15–33. Acesso em 15/03/2020. Disponível em: <https://www.ucs.br/site/midia/arquivos/bibliografia-PGCIMA-canela.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 41.
- MORAN, J. Metodologias ativas e modelos híbridos na educação. In: YAEGASHI, S. et al. (org.). *Novas Tecnologias Digitais: Reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento*. Curitiba: Editora CRV, 2017. cap. 1, p. 23–25. Citado na página 42.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: *Metodologias ativas para uma educação inovadora. Uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018. cap. 1, p. 1–25. Citado 4 vezes nas páginas 29, 41, 42 e 59.

MOREIRA, J.; RIBEIRO, J. Prática Pedagógica baseada em Metodologia Ativa: Aprendizagem sob a Perspectiva do Letramento Informacional para o Ensino na Educação Profissional. *Periódico Científico Outras Palavras*, v. 12, n. 2, p. 93–114, 2016. ISSN 1806-7530. Citado na página 41.

MORGADO, A. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Décima. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 17, 21, 22 e 26.

MUNHOZ, A. *Vamos inverter a sua Sala de Aula?* São paulo: Clube de Autores, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 18, 46, 58, 78 e 125.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S.; SOUZA, E. TIC'S na Educação: A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação na Aprendizagem do Aluno. *Pedagogia em Ação*, v. 7, n. 1, p. 75–94, 2015. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/11019/8864>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 34.

PASINI, C.; CARVALHO, E.; ALMEIDA, L. *A Educação Híbrida em tempos de pandemia: Algumas considerações*. Santa Maria - RS, 2020. Observatório Socioeconômico da COVID-19. Citado na página 57.

PAZ, V. P. B. D. *O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, set. 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152084>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

PEREIRA, A.; SCHMITT, V.; DIAS, M. Ambientes Virtuais de Aprendizagem. In: *Ambientes Virtuais de Aprendizagem: Em diferentes contextos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007. cap. 1, p. 4–22. Citado na página 30.

PEREIRA, R. Método Ativo: Técnicas de Problematização da Realidade aplicada à Educação Básica e ao Ensino Superior. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL "EDUCAÇÃO MATEMÁTICA", 6, 2012, São Cristovão. *Anais[...]*. São Cristovão, SE, 2012. Citado na página 39.

REYS, R. Considerations for teaching using manipulative materials. In: RESTON (ed.). *Teaching made aids for elementary school mathematics*. [S.l.], 1982. Citado na página 51.

RIO DE JANEIRO. Decreto Nº 46.970 de 13 de março de 2020. Dispõe sobre medidas temporárias de prevenção ao contágio e de enfrentamento da propagação decorrente do novo coronavírus (COVID-19), do regime de trabalho de servidor público e contratado, e dá outras providências. *Diário Oficial do Estado do Rio de Janeiro*, ago. 2020. Acesso em 25/08/2020. Disponível em: http://sistemas.rj.def.br/publico/sarova.ashx/Portal/sarova/imagem-dpge/public/arquivos/Decreto_Estadual_46970_prevencao_e_regime_de_trabalho_servidores.pdf. Citado na página 55.

RIO DE JANEIRO. Deliberação CEE Nº 376, de 23 de março de 2020. Orienta as Instituições integrantes do Sistema Estadual de Ensino do Estado do Rio de Janeiro sobre o desenvolvimento das atividades escolares não presenciais, em caráter de excepcionalidade e temporalidade, enquanto permanecerem as medidas de isolamento previstas pelas autoridades estaduais na prevenção e combate ao Coronavírus-COVID-19. *Diário Oficial do Estado do Rio de Janeiro*, mar. 2020. Acesso em 01/10/2020. Disponível em: http://www.cee.rj.gov.br/deliberacoes/D_2020-376.pdf. Citado na página 56.

RODRIGUES, A. *O uso de materiais manipulativos e jogos através de oficinas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade federal do Piauí, Teresina, 2015. Citado na página 51.

SABO, R. D. *Saberes Docentes: A Análise Combinatória no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

SANTOS, M. D.; VARELA, S. *A Avaliação como um Instrumento Diagnóstico da Construção do Conhecimento nas Séries Iniciais*. 2007. Disponível em: https://web.unifil.br/docs/revista_eletronica/educacao/Artigo_04.pdf. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

SCHULZ, A. P.; HERLEY, V. A utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática no ensino fundamental I. In: ENCITEC, 12, 2016, Cascavel. *Anais[. . .]*. Cascavel, Paraná, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 61.

SILVA, D.; ANDRADE, L.; SANTOS, S. D. Alternativas de ensino em tempos de pandemia. *Research, Society and Development*, v. 9, n. 9, ago. 2020. ISSN 2525-3409. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 36.

SILVA, E. D.; SILVA NETO, J. G.; SANTOS, M. D. Pedagogia da Pandemia: Reflexões sobre a educação em tempos de isolamento social. *Revista Latino-Americana de Estudos Científicos*, v. 1, n. 4, p. 29–44, jul. 2020. ISSN 2675-3855. Citado na página 55.

SOUSA, R.; MOITA, F.; CARVALHO, A. B. *Tecnologias Digitais na Educação*. Editora da Universidade Estadual da Paraíba, 2011. 267 p. *E-book*. Disponível em: <https://ler.amazon.com.br/?asin=B00MMLK47E>. Citado na página 28.

SOUZA, P. D.; ANDRADE, M. D. Modelos de rotação do ensino híbrido: estações de trabalho e sala de aula invertida. *Revista E-Tech: Tecnologias para Competitividade Industrial*, v. 9, n. 1, p. 3–16, 2016. ISSN 1983-1838. Citado na página 44.

SUNAGA, A.; CARVALHO, C. As tecnologias no Ensino Híbrido. In: *Ensino híbrido: Personalização e tecnologia na educação*. Porto Alegre: Penso, 2015. cap. 7, p. 141–154. Citado na página 30.

VALE, I. Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. *Actas ProfMat*, p. 111–120, 1999. Associação de Professores de Matemática. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 122.

VALENTE, J.; ALMEIDA, M.; GERALDINI, A. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. *Revista Diálogo Educacional*, v. 17, n. 52, p. 455–478, abr. 2017. ISSN 1518-3483. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.7213/1981-416X.17.052.DS07>. Citado na página 39.

VALENTE, J. A. *Blended learning* e as mudanças no ensino superior: A proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, n. 4, p. 79–97, 2014. ISSN 0104-4060. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155037796006>. Citado 4 vezes nas páginas 28, 43, 44 e 45.

VALENTE, J. A. A sala de aula invertida e a possibilidade de ensino personalizado: Uma experiência com a graduação em midialogia. In: *Metodologias ativas para uma educação inovadora. Uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018. cap. 1, p. 26–44. Citado 3 vezes nas páginas 40, 42 e 43.

VAZQUEZ, C. M.; NOGUTI, F. Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Pernambuco. *Anais[...]*. Pernambuco, Recife, 2004. Citado na página 21.

XOTESLEM, W. V. *Personalização do ensino de matemática na perspectiva do Ensino Híbrido*. Dissertação (mathesis) — Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Citado na página 30.

ZANELLA, L. C. *Metodologia de Pesquisa*. Segunda. Florianópolis.: Departamento de Ciências da Administração. UFSC, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.

Apêndices

APÊNDICE A

Avaliação diagnóstica

12/11/2020

Avaliação diagnóstica

Avaliação diagnóstica

Esta avaliação tem por objetivo verificar o nível de conhecimento da turma acerca dos conceitos dos Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem.

***Obrigatório**

1. Endereço de e-mail *

2. Escreva o seu nome: *

3. Carla pretende ir ao shopping com suas amigas, mas está em dúvida sobre o que calçar. Sabendo que ela dispõe de 3 pares de sandálias e 4 pares de tênis, todos distintos, de quantas maneiras Carla poderá escolher um par de calçados? *

Marcar apenas uma oval.

- 4 maneiras
- 7 maneiras
- 10 maneiras
- 12 maneiras
- 20 maneiras

12/11/2020

Avaliação diagnóstica

4. Para fazer um lanche, uma pessoa deve escolher um sanduíche e um copo de suco. Sabendo que há 4 opções de sanduíche e 2 opções de suco, de quantas maneiras essa pessoa poderá escolher seu lanche? *

Marcar apenas uma oval.

- 5 maneiras
 8 maneiras
 10 maneiras
 15 maneiras
 18 maneiras

5. Quantos números de dois algarismos é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3? *

Marcar apenas uma oval.

- 3 números
 6 números
 9 números
 12 números
 14 números

6. Quantos números de dois algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3? *

Marcar apenas uma oval.

- 3 números
 6 números
 9 números
 12 números
 14 números

12/11/2020

Avaliação diagnóstica

7. Uma pessoa dispõe de 3 calças e 5 blusas, todas distintas. De quantas maneiras essa pessoa pode combinar uma calça com uma blusa? *

Marcar apenas uma oval.

- 6 maneiras
- 10 maneiras
- 15 maneiras
- 18 maneiras
- 24 maneiras



Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE B

Atividades para serem desenvolvidas nos encontros síncronos, antes das alterações sugeridas pelos professores

B.1 Atividade 1

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho	Turma: _____ Data: ___ / ___ / 2020	
---	---	--	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Ana vai ao cinema com algumas amigas e está em dúvida sobre o que usar. Ela dispõe de 3 saias (uma vermelha, uma branca e uma rosa), 2 blusas (uma branca e uma preta) e 2 pares de sapatos (um par preto e um par marrom).

a) Descreva todas as possíveis maneiras dela se vestir, caso a combinação seja uma saia; uma blusa e um par de sapatos (iguais). Para auxiliar o seu raciocínio, utilize o *kit 1* e vista a boneca, cumprindo o que foi solicitado.

b) Com base na resposta do item (a), de quantas maneiras distintas Ana poderá se vestir?

2- Chama-se anagrama de uma palavra, as diferentes disposições das letras dessa palavra formando outras palavras com ou sem sentido. Por exemplo, os anagramas da palavra REI são: REI, RIE, IRE, IER, ERI e EIR.

a) Analise os anagramas da palavra REI, descritos no exemplo acima. O que os diferencia?

b) Utilize as letras A, N, E e L, do *kit 2*, e construa todos os anagramas da palavra ANEL que comecem com a letra A e, em seguida, descreva-os.

c) Agora, considere a palavra SABER. Construa e descreva todos os anagramas dessa palavra que começam com a letra B e terminam com a letra A.

d) De acordo com as respostas anteriores, determine o total de anagramas dos itens (b) e (c).

3- Utilizando a moeda e um dos dados do *kit 3*, faça o que se pede nos itens a seguir.

(Use K: cara e C: coroa).

a) Lance, simultaneamente, uma moeda e um dado e observe as faces voltadas para cima.

Realize esse processo três vezes e registre os resultados.

1º lançamento:

2º lançamento:

3º lançamento:

b) Registre na tabela abaixo todas as possibilidades para o resultado do item (a).

Face da moeda \ Face do dado	1	2	3	4	5	6
K						
C						

c) De acordo com seus registros na tabela do item anterior, há quantas possibilidades?

4- Utilizando os dois dados disponíveis no *kit 3*, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Lance-os, simultaneamente, e observe as faces voltadas para cima. Realize esse processo três vezes e registre os resultados.

	Dado vermelho	Dado amarelo
1º lançamento		
2º lançamento		
3º lançamento		

b) Construa uma tabela e registre os resultados possíveis no lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis. (Neste caso, um dado vermelho e um dado amarelo).

c) Baseando-se no item (b), aponte o total de possibilidades.

5- Na cidade de Campos dos Goytacazes, há um parque muito atrativo para as crianças. Em determinado dia 4 amigos, Antônio, Bruno, Caio e Davi, resolveram brincar nele. Em cada item a seguir, faça o que se pede.

a) Utilizando como apoio o material disponível no *kit 4*, descreva todas as maneiras distintas dos quatro amigos brincarem nos balanços ilustrados na figura abaixo, sabendo que desejam brincar sempre dois a dois, um em cada balanço.




b) De acordo com a sua resposta para o item (a), há quantas opções?

c) Considerando os quatro amigos, descreva todas as possibilidades para a escolha de uma dupla.

d) Qual o total de possibilidades do item (c)?

e) Qual a diferença entre as possibilidades descritas no item (a) e no (c)?

B.2 Atividade 3




PROFMAT

Escola: Doutor Félix Miranda

Aluno(a): _____ Turma: _____

Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ___ / ___ / 2020




UENF

Universidade Federal do
Estado Fluminense Tony Ribeiro

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Júlia precisa escolher um vestido, um chapéu e um par de sapatos para usar em um evento especial. Ela possui dois vestidos; dois chapéus e dois pares de sapatos apropriados para a ocasião, como pode ser observado na figura abaixo.



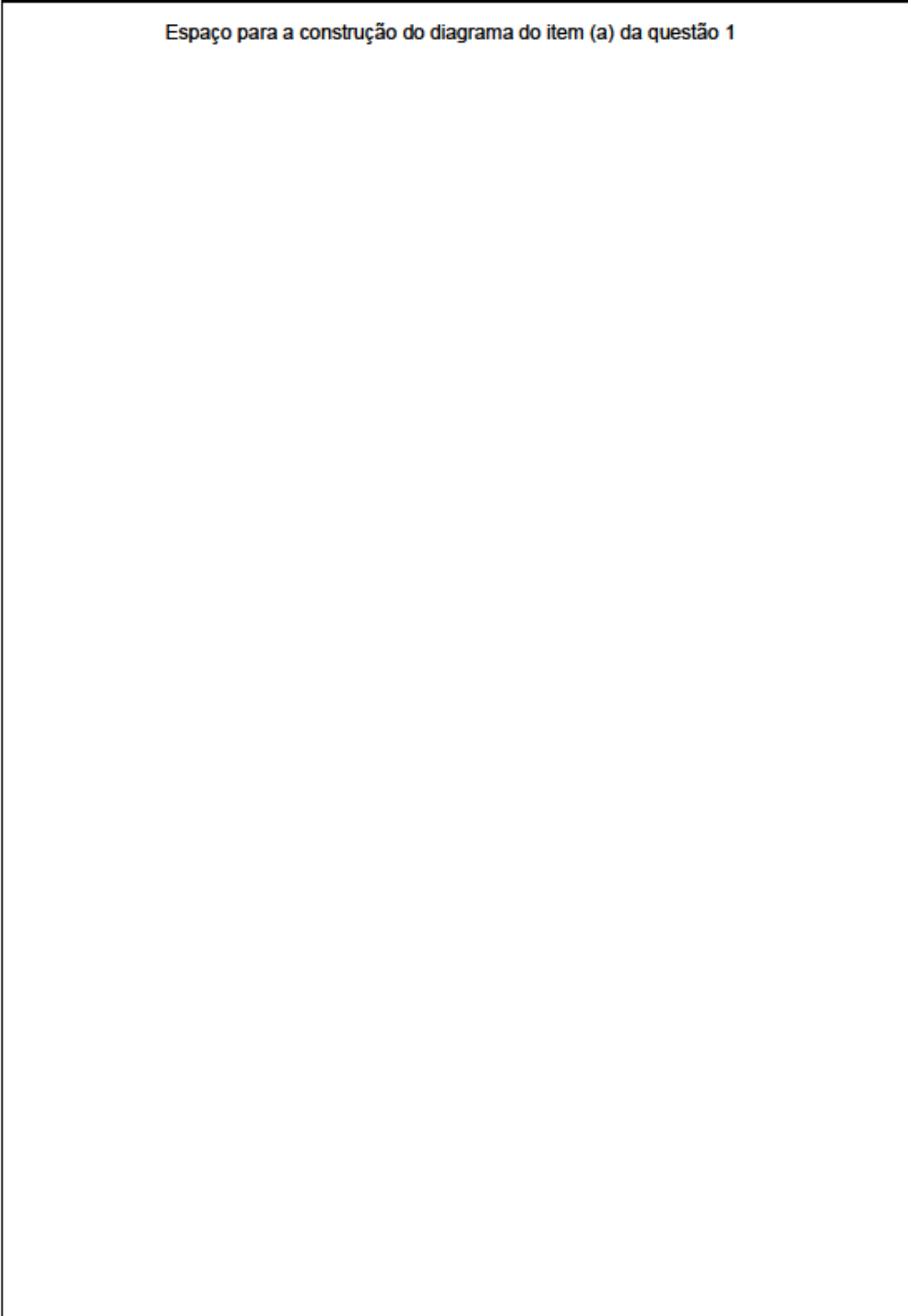
a) Utilizando o material disponível para recorte, em anexo nessa atividade, construa um diagrama de árvore para representar todas as possíveis maneiras de Júlia combinar um vestido, um par de sapatos e um chapéu.

b) A partir da atividade que você realizou no item anterior, analise quantas combinações Júlia pode obter.

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de combinações do item (a).

<input style="width: 60px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	×	<input style="width: 60px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	×	<input style="width: 60px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	=	<input style="width: 60px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>
Total de opções para o vestido		Total de opções para o par de sapatos		Total de opções para o chapéu		Total de combinações distintas de vestido, sapatos e chapéu

Espaço para a construção do diagrama do item (a) da questão 1



2- Em uma escola, será realizada uma competição de dança entre as turmas do 9º ano. Para cada estilo de dança que será apresentado a turma deverá eleger dois representantes - um menino e uma menina. Em uma das turmas, 4 meninos e 3 meninas candidataram-se para representar o estilo forró. Dessa forma:

a) Utilizando o material disponível para recorte, anexo a essa atividade, represente, por meio de um diagrama de árvore, todas as possibilidades de representantes dessa turma, no estilo forró.

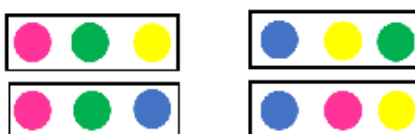
b) Baseando-se no item anterior, existem quantas combinações de representantes?

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de possibilidades para a escolha do casal.

$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

Total de possibilidades para o menino Total de possibilidades para a menina Total de possibilidades para o casal representante

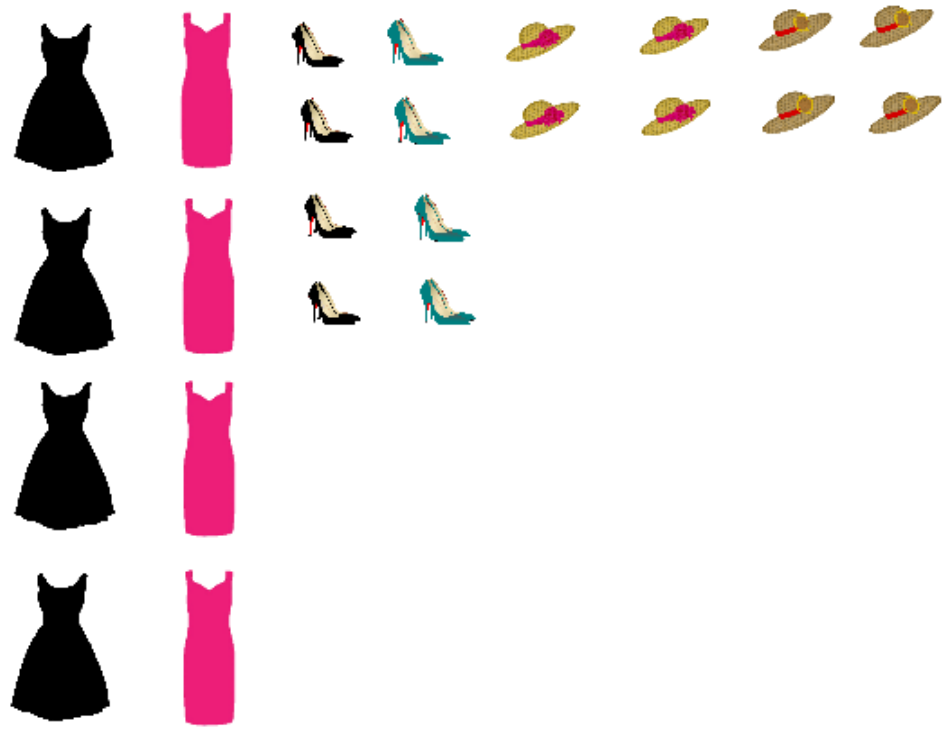
3- Dadas as cores: azul, verde, amarelo e rosa, deseja-se formar senhas com três cores distintas, porém cada composição deverá começar com rosa ou azul. Observe algumas possibilidades:




Espaço para a construção do diagrama do item (a) da questão 2

Material para recorte



Material para a questão 1



Material para a questão 2



B.3 Atividade 5

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno: _____ Turma: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ___ / ___ / 2020	
---	--	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

- 1- Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um salgado, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas sete opções de salgados, cinco opções de bebidas e quatro opções de sobremesas. Sabendo que um cliente deseja aproveitar a promoção, de quantas maneiras distintas ele pode fazer seu pedido?
- 2- Quantos números naturais de três algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das centenas corresponde a um múltiplo de 3 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 5?
- 3- Uma senha bancária é formada por 4 dígitos seguidos de 3 símbolos (#, & e *). De quantas maneiras Ana pode escolher uma senha, se ela não pretende usar nem o algarismo 0 nem o símbolo #?

4- As turmas do 9º ano de certa escola, pensando na formatura no final do ano, farão uma eleição entre os 93 alunos para a escolha do presidente e do vice-presidente da comissão de formatura. Considere que qualquer aluno, entre os 93, pode ser escolhido. De quantas maneiras distintas é possível formar essa dupla de representantes?

5- Desde 2016, na Argentina, as placas de carros (chamadas *chapas patentes*) estão sendo formadas no padrão Mercosul: duas letras do alfabeto de 26 letras, seguidas de 3 algarismos, seguidos de duas letras. Quantas placas podemos formar com esse padrão?



6- Com os símbolos: ▲, ■ e ● deseja-se formar seqüências de cinco figuras geométricas, uma ao lado da outra.

a) De quantos modos distintos isso pode ser feito?

b) Se figuras vizinhas não podem ser iguais, quantas seqüências podem ser formadas?

7- (Adaptada – Enem/2015) Uma família composta por 7 pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

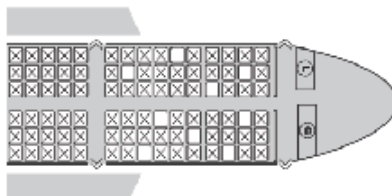


Ilustração em: www.gabrielnli.com.br, 02 out. 2012 (gabrielnli)

O número de formas distintas de acomodar a família nesse voo é dado por:

- a) 181440
- b) 36
- c) 5040
- d) 1440
- e) 20

8- Agora você deverá elaborar e resolver, através do Princípio Multiplicativo, um problema de contagem de possibilidades. Em seguida, forneça o seu problema para um colega de equipe e peça para que ele o resolva. Faça a correção da solução do colega e, caso existam, aponte os erros cometidos.



Apresente o enunciado do problema:

Solução do problema:

Nome do colega que resolveu o problema:

Comentário sobre a solução do seu colega:

B.4 Atividade 7

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno(a): _____ Turma: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ____ / ____ / 2020	
---	--	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Quantos anagramas da palavra ESCOLA têm as vogais e as consoantes alternadas?

2- Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantos números naturais de três algarismos distintos maiores que 350 podemos formar?

3- Bia foi à cantina de sua escola para comprar um lanche. Nessa cantina são vendidos seis tipos diferentes de biscoitos, quatro tipos diferentes de sucos e cinco tipos diferentes de frutas. De quantas maneiras distintas Bia pode comprar seu lanche sabendo que ela deseja escolher exatamente dois alimentos diferentes.

4- Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: • , - , x. Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

a) de cinco símbolos começam por "•"?

b) contêm de dois a quatro símbolos?

c) são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

5- (Enem/2017) Uma empresa construirá sua página na *internet* e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidos pelo programador, descritos no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das posições. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

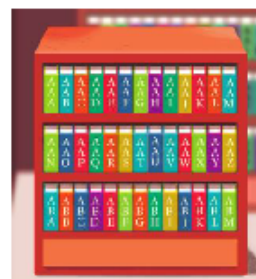
- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

6- (OBMEP/2006) Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?



- a) 6
- b) 12
- c) 44
- d) 46
- e) 48

7- (OBMEP/2016) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?



- a) 676
- b) 1352
- c) 2016
- d) 2028
- e) 2030

APÊNDICE C

Questionário dos professores

12/11/2020

Questionário para os professores

Questionário para os professores

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

***Obrigatório**

1. Nome: *

2. Há quanto tempo você leciona na Educação Básica? *

Marcar apenas uma oval.

- 0 - 5 anos
- 5 - 10 anos
- 10 - 15 anos
- 15 - 20 anos
- Mais de 20 anos

Avaliação sobre as atividades

Em relação às atividades, assinale para cada afirmação a opção que considera mais adequada, sabendo que a variação de notas ocorre de 1 a 5, em que 1 é a nota mínima e 5 é a nota máxima a se atribuir.

Em relação à atividade para o encontro síncrono 1:

12/11/2020

Questionário para os professores

3. A atividade é relevante para o estudo do tema. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

4. As questões possuem um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

5. A atividade está clara em relação ao que deve ser feito. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

12/11/2020

Questionário para os professores

6. A atividade atende aos objetivos propostos. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

7. O espaço a seguir é destinado a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

Em relação à atividade para o encontro síncrono 2:

8. A atividade é relevante para o estudo do tema. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

12/11/2020

Questionário para os professores

9. As questões possuem um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II. *

Marcar apenas uma oval.

- 1
 2
 3
 4
 5

10. A atividade está clara em relação ao que deve ser feito. *

Marcar apenas uma oval.

- 1
 2
 3
 4
 5

11. A atividade atende ao objetivo proposto. *

Marcar apenas uma oval.

- 1
 2
 3
 4
 5

12/11/2020

Questionário para os professores

12. O espaço a seguir é destinado a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade .

Em relação à atividade para o encontro síncrono 3:

13. A atividade é relevante para o estudo do tema. *

Marcar apenas uma oval.

- 1
 2
 3
 4
 5

14. As questões possuem um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II. *

Marcar apenas uma oval.

- 1
 2
 3
 4
 5

12/11/2020

Questionário para os professores

15. A atividade está clara em relação ao que deve ser feito. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

16. A atividade atende ao objetivo proposto. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

17. O espaço a seguir é destinado a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

Em relação à atividade para o encontro síncrono 4:

12/11/2020

Questionário para os professores

18. A atividade é relevante para o estudo do tema. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

19. As questões possuem um nível de dificuldade adequado aos anos finais do Ensino Fundamental II. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

20. A atividade está clara em relação ao que deve ser feito. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

12/11/2020

Questionário para os professores

21. A atividade atende ao objetivo proposto. *

Marcar apenas uma oval.

1

2

3

4

5

22. O espaço a seguir é destinado a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.



Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE D

Atividades para serem desenvolvidas nos encontros síncronos, após as alterações sugeridas pelos professores

D.1 Atividade 1

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno(a): _____ Turma: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho	
---	---	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Ana vai ao cinema com algumas amigas e está em dúvida sobre o que usar. Ela dispõe de 3 saias (uma vermelha, uma branca e uma rosa), 2 blusas (uma branca e uma preta) e 2 pares de sapatos (um par preto e um par marrom).

a) Descreva todas as possíveis maneiras dela se vestir, caso a combinação seja uma saia; uma blusa e um par de sapatos (iguais). Para auxiliar o seu raciocínio, utilize o *kit* 1 e vista a boneca, cumprindo o que foi solicitado.

b) Com base na resposta do item (a), de quantas maneiras distintas Ana poderá se vestir?

2- Chama-se anagrama de uma palavra, as diferentes disposições das letras dessa palavra formando outras palavras com ou sem sentido. Por exemplo, os anagramas da palavra ANEL são: ANEL, ANLE, AENL, AELN, ALEN, ALNE, NAEL, NALE, NEAL, NELA, NLAE, NLEA, EANL, EALN, ENAL, ENLA, ELAN, ELNA, LAEN, LANE, LNAE, LNEA, LEAN, LENA.

a) Analise os anagramas da palavra ANEL, descritos no exemplo acima. O que os diferencia?

b) Utilize as letras R, E e I, do *kit 2*, e construa todos os anagramas da palavra REI. Em seguida, descreva-os.

c) Qual o total de anagramas da palavra REI?

3- Utilizando a moeda e um dos dados do *kit 3*, faça o que se pede nos itens a seguir.
(Use K: cara e C: coroa).

a) Lance, simultaneamente, uma moeda e um dado e observe as faces voltadas para cima. Realize esse processo três vezes e registre os resultados.

1º lançamento:

2º lançamento:

3º lançamento:

b) Complete a tabela abaixo, registrando os possíveis resultados no lançamento simultâneo de uma moeda e um dado.

Face da moeda \ Face do dado	1	2	3	4	5	6
K	(k,1)					
C		(C,2)				

c) De acordo com seus registros na tabela do item anterior, há quantas possibilidades?

4- Utilizando os dois dados disponíveis no *kit 3*, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Lance-os, simultaneamente, e observe as faces voltadas para cima. Realize esse processo três vezes e registre os resultados.

	Dado vermelho	Dado amarelo
1º lançamento		
2º lançamento		
3º lançamento		

b) Construa uma tabela e registre os resultados possíveis no lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis. (Neste caso, um dado vermelho e um dado amarelo).

c) Baseando-se no item (b), aponte o total de possibilidades.

5- Na cidade de Campos dos Goytacazes, há um parque muito atrativo para as crianças. Em determinado dia 4 amigos, Antônio, Bruno, Caio e Davi, resolveram brincar nele. Em cada item a seguir, faça o que se pede.

a) Utilizando como apoio o material disponível no *kit 4*, descreva todas as maneiras distintas dos quatro amigos brincarem nos balanços ilustrados na figura abaixo, sabendo que desejam brincar sempre dois a dois, um em cada balanço.




b) De acordo com a sua resposta para o item (a), há quantas opções?

c) Considerando os quatro amigos, descreva todas as possibilidades para a escolha de uma dupla.

d) Qual o total de possibilidades do item (c)?

e) Qual a diferença entre as possibilidades descritas no item (a) e no (c)?

D.2 Atividade 3




PROFMAT

Escola: Doutor Félix Miranda

Aluno(a): _____ Turma: _____

Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ___ / ___ / 2020




UENF

Universidade Federal do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Júlia precisa escolher um vestido, um chapéu e um par de sapatos para usar em um evento especial. Ela possui dois vestidos; dois chapéus e dois pares de sapatos apropriados para a ocasião, como pode ser observado na figura abaixo.



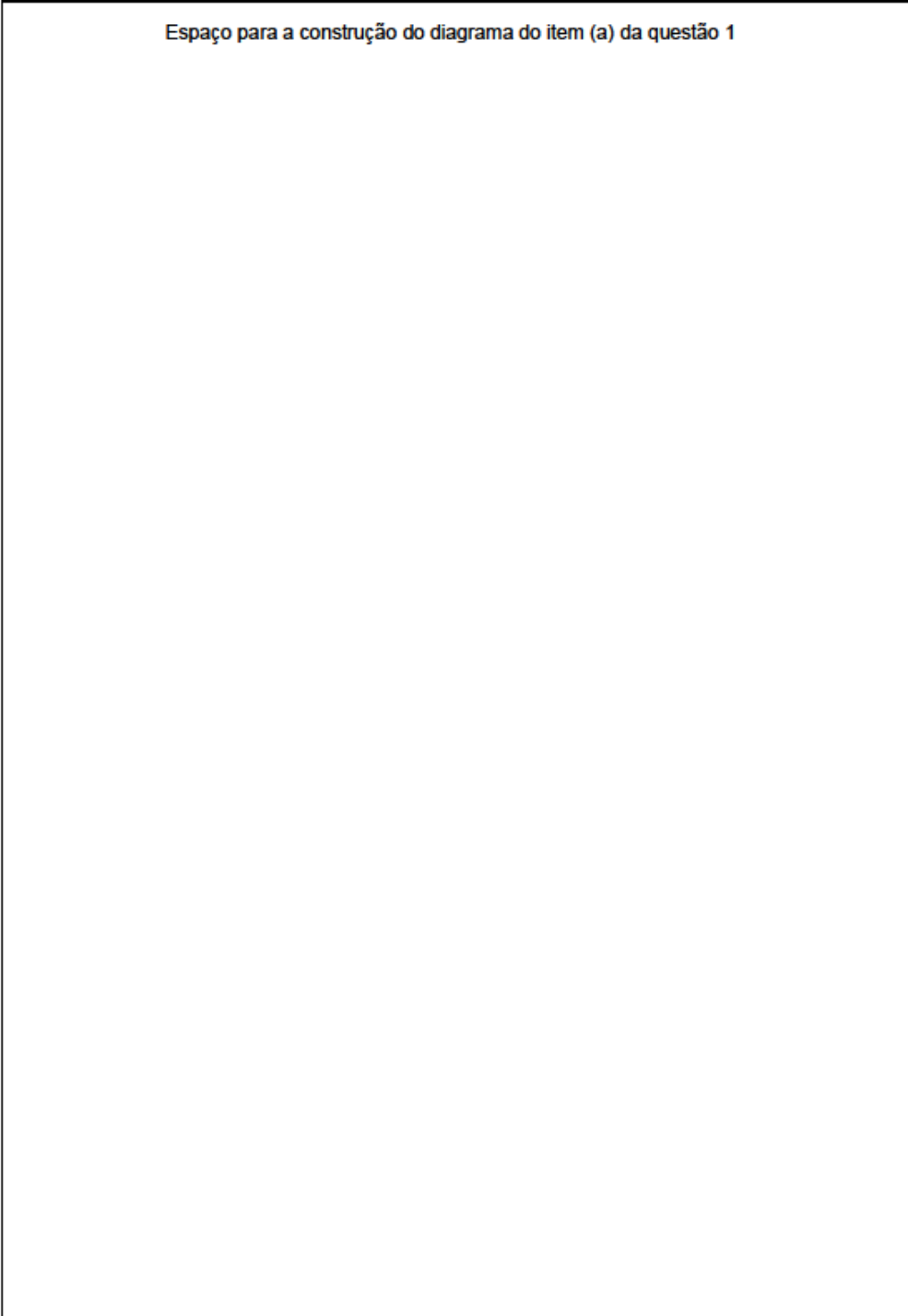
a) Utilizando o material disponível para recorte, em anexo nessa atividade, construa um diagrama de árvore para representar todas as possíveis maneiras de Júlia combinar um vestido, um par de sapatos e um chapéu.

b) A partir da atividade que você realizou no item anterior, analise quantas combinações Júlia pode obter.

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de combinações do item (a).

<input style="width: 50px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	×	<input style="width: 50px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	×	<input style="width: 50px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>	=	<input style="width: 50px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/>
Total de opções para o vestido		Total de opções para o par de sapatos		Total de opções para o chapéu		Total de combinações distintas de vestido, sapatos e chapéu

Espaço para a construção do diagrama do item (a) da questão 1



2- Em uma escola, será realizada uma competição de dança entre as turmas do 9º ano. Para cada estilo de dança que será apresentado a turma deverá eleger dois representantes - um menino e uma menina. Em uma das turmas, 4 meninos e 3 meninas candidataram-se para representar o estilo forró. Dessa forma:

a) Utilizando o material disponível para recorte, anexo a essa atividade, represente, por meio de um diagrama de árvore, todas as possibilidades de representantes dessa turma, no estilo forró.

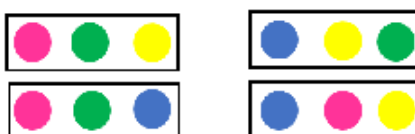
b) Baseando-se no item anterior, existem quantas combinações de representantes?

c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar o total de possibilidades para a escolha do casal.

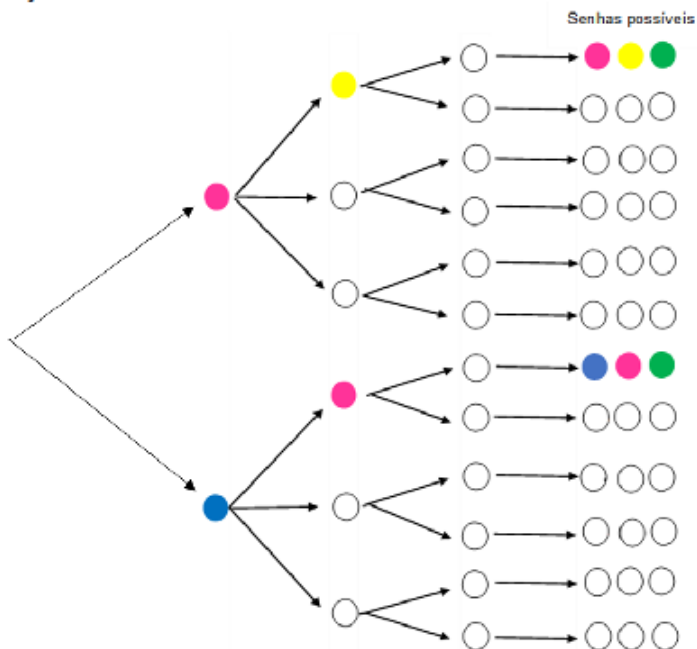
$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

Total de possibilidades para o menino Total de possibilidades para a menina Total de possibilidades para o casal representante

3- Dadas as cores: azul, verde, amarelo e rosa, deseja-se formar senhas com três cores distintas, porém cada composição deverá começar com rosa ou azul. Observe algumas possibilidades:



- a) Utilizando lápis de cor das cores azul, verde, amarela e rosa, complete o diagrama de árvore abaixo para representar todas as possíveis senhas que podem ser formadas, a partir das condições dadas.

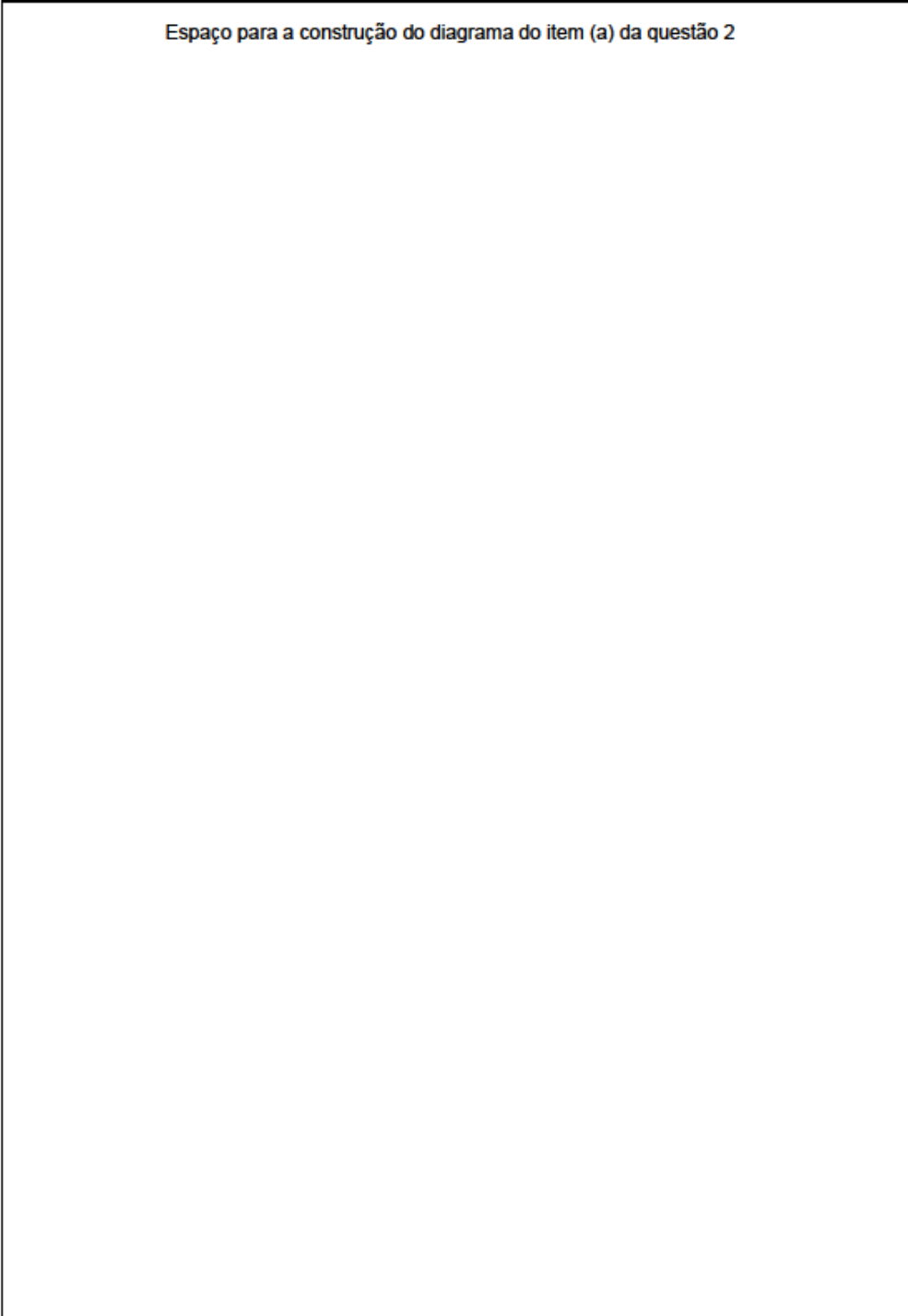


- b) De acordo com o diagrama do item (a), quantas senhas podem ser formadas?
- c) Utilize o Princípio Multiplicativo para determinar, de maneira direta, o total de senhas que podem ser formadas a partir das condições dadas.

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

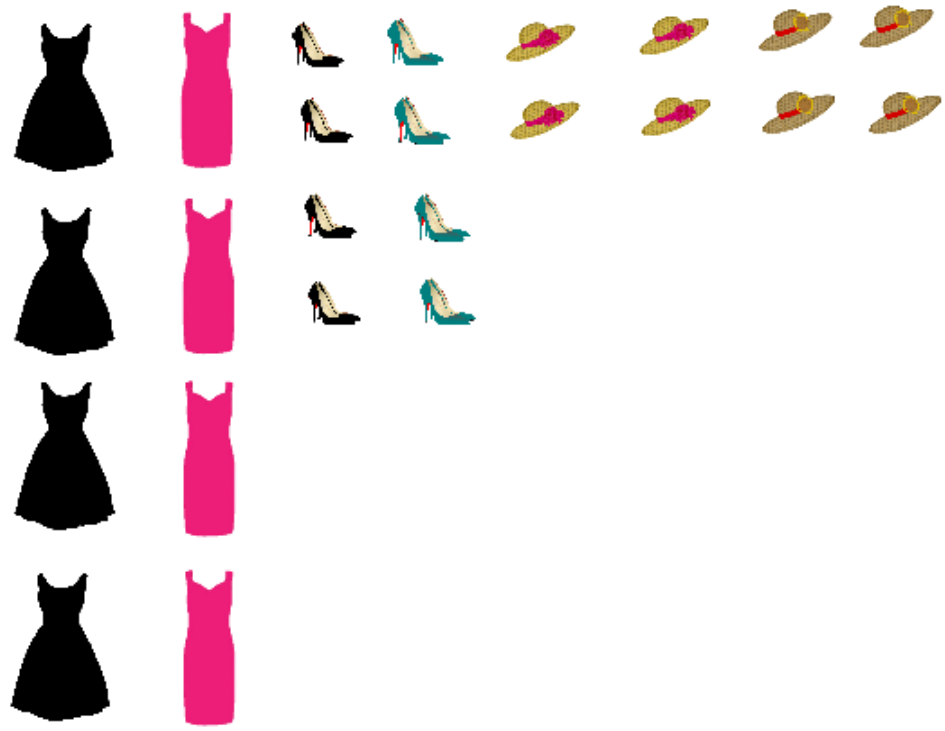
Total de possibilidades para a 1ª cor
Total de possibilidades para a 2ª cor
Total de possibilidades para a 3ª cor
Total de senhas

Espaço para a construção do diagrama do item (a) da questão 2




Material para recorte

Material para a questão 1





Material para a questão 2



The image displays two sections of cutout material. The first section, titled 'Material para a questão 1', contains four rows of clothing items. Each row consists of a black dress on the left and a pink dress on the right. To the right of these dresses are four pairs of shoes: two pairs of black high-heeled shoes and two pairs of teal high-heeled shoes. To the far right of the shoe pairs are eight hats, arranged in two rows of four. The second section, titled 'Material para a questão 2', contains two rows of cartoon characters. The first row has 12 characters: three boys in orange shirts, three boys in blue shirts, three boys in brown shirts, and three boys in light blue shirts. The second row has 12 characters: four girls in blue dresses, four boys in blue shirts, and four girls in white shirts with red skirts.

D.3 Atividade 5

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno(a): _____ Turma: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ___ / ___ / 2020	
---	--	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um salgado, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidas sete opções de salgados, cinco opções de bebidas e quatro opções de sobremesas. Sabendo que um cliente deseja aproveitar a promoção, de quantas maneiras distintas ele pode fazer seu pedido?

2- Dispondo dos dez algarismos do sistema decimal (0, 1, 2, ..., 9), quantos números naturais de três algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das centenas corresponde a um múltiplo de 3 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 5?

3- Uma senha bancária é formada por 4 dígitos seguidos de 3 símbolos (#, & e *). De quantas maneiras Ana pode escolher uma senha, se ela não pretende usar nem o algarismo 0 nem o símbolo #?

4- As turmas do 8º ano de certa escola, já pensando na formatura no ano seguinte, farão uma eleição entre os 93 alunos para a escolha do presidente e do vice-presidente da comissão de formatura. Considere que qualquer aluno, entre os 93, pode ser escolhido. De quantas maneiras distintas é possível formar essa dupla de representantes?

5- Desde 2016, na Argentina, as placas de carros (chamadas *chapas patentes*) estão sendo formadas no padrão Mercosul: duas letras do alfabeto de 26 letras, seguidas de 3 algarismos, seguidos de duas letras. Quantas placas podemos formar com esse padrão?

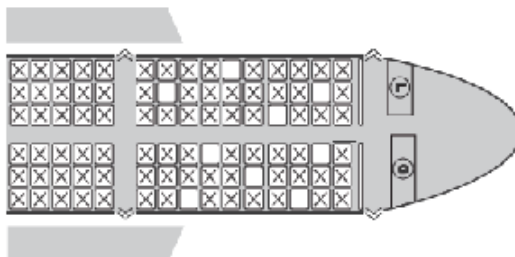


6- Com os símbolos: ▲, ■ e ● deseja-se formar sequências de cinco figuras geométricas, uma ao lado da outra.

a) De quantos modos distintos isso pode ser feito?

b) Se figuras vizinhas não podem ser iguais, quantas sequências podem ser formadas?

7- (Adaptada – Enem/2015) Uma família composta por 7 pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gol.com.br. Acesso em: 30 out. 2015 (adaptado).

O número de formas distintas de acomodar a família nesse voo é dado por:

- a) 181440
- b) 36
- c) 5040
- d) 1440
- e) 20

8- Agora você deverá elaborar e resolver, através do Princípio Multiplicativo, um problema de contagem de possibilidades. Em seguida, forneça o seu problema para um colega de equipe e peça para que ele o resolva. Faça a correção da solução do colega e, caso existam, aponte os erros cometidos.



Apresente o enunciado do problema:

Sua solução para o problema:

Nome do colega que resolveu o problema:

Comentário sobre a solução do seu colega:

D.4 Atividade 7

	Escola: Doutor Félix Miranda Aluno(a): _____ Turma: _____ Prof.ª Daniela Alonso Botelho Data: ___ / ___ / 2020	
---	---	---

Prezado(a) aluno(a), os dados coletados, por meio deste material, são para fins de pesquisa educacional, promovida por Daniela Alonso Botelho, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Oscar Alfredo Paz La Torre. As informações fornecidas serão tratadas, somente, para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1- Quantos anagramas da palavra ESCOLA têm as vogais e as consoantes alternadas?

2- Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, quantos números naturais de três algarismos distintos maiores que 350 podemos formar?

3- Bia foi à cantina de sua escola para comprar um lanche. Nessa cantina são vendidos seis tipos diferentes de biscoitos, quatro tipos diferentes de sucos e cinco tipos diferentes de frutas. De quantas maneiras distintas Bia pode comprar seu lanche sabendo que ela deseja escolher exatamente dois alimentos diferentes.

4- Um programador de computador criou um código especial que utiliza apenas os símbolos: • , - , x. Os diferentes códigos são sequências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

a) de cinco símbolos começam por "•"?

b) contêm de dois a quatro símbolos?

c) são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?

5- (Enem/2017) Uma empresa construirá sua página na *internet* e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidos pelo programador, descritos no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das posições. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é:

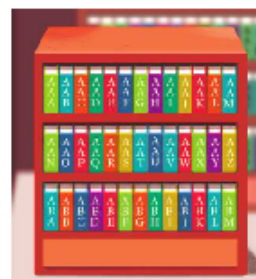
- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

6- (OBMEP/2006) Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?



- a) 6
- b) 12
- c) 44
- d) 46
- e) 48

7- (OBMEP/2016) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?



- a) 676
- b) 1352
- c) 2016
- d) 2028
- e) 2030

APÊNDICE E

***Kits* utilizados para a realização da Atividade 1**

E.1 Kit 1



E.2 Kit 2



E.3 Kit 3



E.4 Kit 4



APÊNDICE F

Teste para verificação de aprendizagem

12/11/2020

Teste para verificação de aprendizagem

Teste para verificação de aprendizagem

O objetivo deste teste é fazer uma verificação de aprendizagem sobre o conteúdo abordado no vídeo "Princípio Fundamental da Contagem - AULA 1 - Curso de Análise Combinatória - Professora Angela".

***Obrigatório**

1. Endereço de e-mail *

2. Escreva o seu nome. *

3. De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato? *

Marcar apenas uma oval.

- 60
 12
 15
 30
 120

4. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas são as possibilidades para o resultado? *

Marcar apenas uma oval.

- 64
 32
 16
 8
 4

12/11/2020

Teste para verificação de aprendizagem

5. Numa lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos tomar um lanche composto por 1 sanduíche, 1 refrigerante e 1 sorvete? *

Marcar apenas uma oval.

- 80
 60
 20
 12
 9

6. Existem 2 vias de locomoção de uma cidade A para uma cidade B e 3 vias de locomoção da cidade B a uma cidade C. De quantas maneiras pode-se ir de A a C, passando por B? *

Marcar apenas uma oval.

- 2
 3
 5
 6
 9

7. Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? *

Marcar apenas uma oval.

- 2401
 1000
 1296
 210
 840

12/11/2020

Teste para verificação de aprendizagem

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

 Formulários

APÊNDICE G

Avaliação de aprendizagem

12/11/2020

Avaliação de aprendizagem

Avaliação de aprendizagem

***Obrigatório**

1. Endereço de e-mail *

2. Escreva o seu nome: *

3. O total de anagramas da palavra SABER é dado por: *

Marcar apenas uma oval.

720

250

120

60

30

4. Uma lanchonete oferece 5 tipos de sucos e 4 tipos de refrigerantes. Maria deseja comprar apenas um tipo de bebida. De quantas maneiras distintas ela pode fazer sua escolha? *

Marcar apenas uma oval.

9

20

26

30

35

12/11/2020

Avaliação de aprendizagem

5. Para fazer um lanche, uma pessoa deve escolher um sanduíche e um copo de suco. Sabendo que há 4 opções de sanduíche e 2 opções de suco, de quantas maneiras essa pessoa poderá escolher seu lanche? *

Marcar apenas uma oval.

- 2
 8
 10
 15
 18

6. (DANTE, 2008, p.477) De quantas maneiras 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? *

Marcar apenas uma oval.

- 60
 56
 25
 15
 8

7. (DANTE, 2008, p.478) Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor? *

Marcar apenas uma oval.

- 1296
 900
 360
 320
 216

12/11/2020

Avaliação de aprendizagem

8. (MORGADO et al, 2016, p.22) O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código "morse"? *

Marcar apenas uma oval.

- 2
 8
 16
 25
 30

9. 7- (OBMEP/2016) Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1ª posição seja maior do que 1, o da 2ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas 52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2. Quantas senhas Fernanda poderá formar? *

Marcar apenas uma oval.

- 30 240
 15800
 3024
 1024
 580

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE H

Questionário dos alunos

12/11/2020

Questionário dos alunos

Questionário dos alunos

Este questionário tem por objetivo verificar a opinião dos alunos em relação à metodologia Sala de Aula Invertida.

***Obrigatório**

1. Em relação à explicação do conteúdo das videoaulas, você considerou: *

Marcar apenas uma oval.

- de fácil compreensão
 de média compreensão
 de difícil compreensão

2. O trabalho em equipe ajudou no desenvolvimento de sua aprendizagem? *

Marcar apenas uma oval.

- não ajudou
 ajudou um pouco
 ajudou
 ajudou bastante

3. O que você prefere realizar como tarefa de casa? *

Marcar apenas uma oval.

- Assistir a explicação do conteúdo através de videoaulas.
 Resolver exercícios mais complexos.

12/11/2020

Questionário dos alunos

4. Você teve dificuldade de adaptação ao modelo Sala de Aula Invertida? *

Marcar apenas uma oval.

sim

um pouco

não

5. Você prefere aula de forma tradicional, onde o professor expõe o conteúdo de forma oral/escrita e o aluno anota, ou aulas onde os alunos resolvem exercícios e trabalham em equipe? Justifique sua resposta. *

6. Dê a sua opinião sobre a metodologia Sala de Aula Invertida. Destaque os pontos positivos e negativos. *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE I

Recomendação “O Princípio da Contagem” da *Khan Academy*

Júlio vai fazer vários cursos de culinária. A tabela a seguir mostra quantos pratos diferentes são oferecidos em cada curso.

Curso	Número de pratos
Aperitivo	3
Prato principal	4
Sobremesa	3

Quantas combinações de refeição diferentes Júlio pode escolher?

Antônio deixa seus clientes criarem suas próprias pizzas. Os clientes escolhem exatamente um tipo de massa, molho, queijo e carne para a montagem de suas pizzas. A tabela a seguir mostra as opções disponíveis para os clientes.

Crie sua própria pizza

Opções de massa	Fina, Tradicional, Grossa, Com borda recheada
Opções de molho	Tomate, Pesto, Alfredo, Ranch
Opções de queijo	Mozarela, Cheddar, Provolone
Opções de carne	Pepperoni, Calabresa, Frango, Bacon

Há quantas combinações diferentes de pizza?

Jeremias está criando uma lista de reprodução que tem apenas uma música de cada um dos seus gêneros preferidos. A tabela a seguir mostra seus gêneros preferidos e o número de músicas em seu MP3 player para cada gênero.

Gênero	Número de músicas
Rock	4
Pop	2
Country	7
Clássica	8

Quantas listas de reprodução diferentes Jeremias pode criar?

Eduardo precisa comprar um carro, um caminhão e uma motocicleta para sua empresa de entregas. Ele quer que o carro seja vermelho ou amarelo; que o caminhão seja preto, branco ou prata; e que a motocicleta seja verde, azul ou laranja.

Quantas combinações de veículos diferentes Eduardo pode escolher?

APÊNDICE J

Autorização para a Direção



TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezado(a) Diretor(a),

Os alunos do 9º ano do Centro de Educação Criativa estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pela mestranda e professora de matemática, Daniela Alonso Botelho. A pesquisa será realizada através do ensino remoto, durante o horário das aulas de matemática, e tem por objetivo investigar a contribuição da modalidade Sala de Aula Invertida para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Os alunos irão experimentar uma modalidade de ensino que visa desenvolver a autonomia e protagonismo do estudante, além de promover um ensino personalizado. Tendo como objetivo principal a melhoria no ensino aprendizagem dos alunos, gostaria de pedir sua autorização para que a Instituição e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, Alceir Faria Pereira, diretor(a) do Centro de Educação Criativa, autorizo a participação da turma do 9º ano na pesquisa tem por objetivo investigar a contribuição da modalidade Sala de Aula Invertida para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, desenvolvida pela mestranda Daniela Alonso Botelho.

Assinatura

Dr. Alceir Faria Pereira
Registro Nº 18858 - MEC
DIRETOR

Campos dos Goytacazes, 29 de julho de 2020.

APÊNDICE K

Autorização dos responsáveis



TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezados Pais ou Responsáveis,

Os alunos do 9º ano do Centro de Educação Criativa estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pela mestranda e professora de matemática, Daniela Alonso Botelho. A pesquisa será realizada através do ensino remoto, durante o horário das aulas de matemática e tem por objetivo investigar a contribuição da modalidade Sala de Aula Invertida para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Os alunos irão experimentar uma modalidade de ensino que visa desenvolver a autonomia e protagonismo do estudante, além de promover um ensino personalizado. Tendo como objetivo principal a melhoria no ensino aprendizagem do seu filho(a), pedimos sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que aprovando a participação do seu filho(a), destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, _____, autorizo a participação do meu filho(a) na pesquisa desenvolvida pela professora de matemática, Daniela Alonso Botelho.

Nome do aluno: _____

Assinatura

Campos dos Goytacazes, 29 de julho de 2020.