WILLIAM DA SILVA SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
15 DE DEZEMBRO DE 2020

WILLIAM DA SILVA SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Profª. Drª. Elba Orocia Bravo Asenjo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
15 DE DEZEMBRO DE 2020

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

S237 Santos, William da Silva.

A Resolução de Problemas no Ensino de Áreas de Figuras Planas e Teorema de Pick / William da Silva Santos. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2020.

128 f. : il.
Bibliografia: 102 - 104.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.
Orientadora: Elba Orocia Bravo Asenjo.

1. Geometria. 2. Áreas de Figuras Planas. 3. Teorema de Pick. 4. Metodologia Resolução de Problemas. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

WILLIAM DA SILVA SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 15 de Dezembro de 2020.

Prof. Dr. Ausberto Silverio Castro Vera
D.Sc. - UENF

Prof. Dr. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Profª. Drª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Profª. Drª. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado durante todo o percurso.

Aos meus pais, Jamir e Terezinha, e meu irmão Walaci, por estarem sempre comigo, por todo apoio nos momentos de angústia e por não terem permitido que eu desistisse.

Aos meus avós, José e Francisca, pelas orações e pela ajuda dada durante a graduação. À minha avó Santa e minha tia Marli, pelo acolhimento todas as vezes que precisei.

Aos demais familiares e amigos, pela força e por entenderem meus momentos de ausência.

À Tuane Gomes e Aline Mazza, incentivadoras durante o curso, pelo empréstimo de livros e materiais.

À diretora da E.E.E.F.M. Jerônimo Monteiro, Luzia Helena dos Santos, pelo apoio e por permitir que esse trabalho fosse realizado. Aos colegas e amigos de trabalho, pelas palavras de incentivo.

Aos queridos alunos participantes da pesquisa, por terem aceitado esse desafio, tornando possível a conclusão deste trabalho.

À minha orientadora Elba, por toda dedicação e paciência durante esse período, sem a qual eu não teria conseguido.

Aos professores membros da banca: Ausberto, Nelson e Silvia, pelas valiosas contribuições.

Aos professores Oscar e Rigoberto, por coordenarem o curso com excelência e por toda ajuda prestada, e aos professores Geraldo (*in memorian*) e Luiz Henrique, pelos conhecimentos compartilhados.

Aos colegas e amigos de curso por todos os momentos de estudos e descontração. Em especial, ao Cássio pela parceria durante as cansativas viagens à Campos, e à Daniela e Wéllix, pela ajuda nos momentos mais difíceis.

À todos, meu muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Para realizar grandes conquistas, devemos não apenas agir, mas também sonhar; não apenas planejar, mas também acreditar.” (Anatole France)

Resumo

Estudar a Geometria é essencial não somente do ponto de vista acadêmico, mas também para compreender as formas dos objetos e elementos da natureza e suas relações. Mas, por muitas vezes a Geometria é deixada de lado em salas de aula por diversos motivos, o que gera resultados negativos nas avaliações e na aprendizagem dos estudantes. Diante das muitas possibilidades existentes, a presente dissertação traz a aplicação de uma sequência didática sobre Áreas de Figuras Planas com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic et al. (2014), adaptada ao Ensino Remoto. Optou-se por esta Metodologia, pois através dela, o aluno é colocado no centro do processo de aprendizagem, desenvolvendo sua autonomia, sendo o professor um criador de possibilidades para que isso aconteça. Com o isolamento social provocado pela pandemia do novo coronavírus, as atividades foram desenvolvidas de maneira *online* através de encontros pelo *Google Meet*. Assim, abriu-se mão de algumas etapas da Metodologia e outras foram adaptadas. Com o objetivo de investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, adaptada ao Ensino Remoto, pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Áreas de Figuras Planas, foi feita uma pesquisa qualitativa, baseada no estudo de caso, com 13 alunos de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública e estadual do município de Jerônimo Monteiro-ES. Durante o desenvolvimento dos problemas, os alunos foram levados a construir as fórmulas usuais para o cálculo de área dos principais quadriláteros e triângulos, além de conhecer o Teorema de Pick, que consiste em uma fórmula única para se calcular áreas de polígonos simples desenhados em uma malha quadriculada. Ao fim de cada etapa foram resolvidas situações-problemas, mostrando aos alunos o quanto a Geometria e a necessidade de seu estudo se fazem presentes em nossas vidas. Ao fim da pesquisa, com os dados coletados através de observações do professor-pesquisador e das respostas dadas pelos alunos aos problemas e a um questionário de percepção, concluiu-se que a Metodologia adotada produziu bons resultados na aprendizagem dos estudantes, destacando-se o empenho dos mesmos em concluir todas as atividades e a interação deles durante o processo de realização das tarefas, atuando de forma colaborativa com os colegas.

Palavras-chaves: Geometria, Áreas de Figuras Planas, Teorema de Pick, Metodologia Resolução de Problemas.

Abstract

Studying Geometry is essential not only from an academic point of view, but also to understand the shapes of objects and elements of nature and their relationships. However, Geometry is often neglected in classrooms for several reasons, which generates negative results in student evaluations and learning. In view of the many existing possibilities, the present dissertation brings the application of a didactic sequence on Areas of Flat Figures using the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving, proposed by Onuchic et al. (2014), adapted to Remote Education. This Methodology was chosen because, through it, the student is placed at the center of the learning process, developing his autonomy, and the teacher is a creator of possibilities for this to happen. With the social isolation caused by the new coronavirus pandemic, the activities were developed online through meetings through Google Meet. Thus, some stages of the Methodology were given up and others were adapted. In order to investigate the contributions that the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving, adapted to Remote Education, can bring to the process of teaching and learning the content of Flat Figures Areas, a qualitative research was carried out, based on the case study, with 13 students in a class 8th grade of elementary school in a public and state school in the municipality of Jerônimo Monteiro-ES. During the development of the problems, students were led to build the usual formulas for calculating the area of the main quadrilaterals and triangles, in addition to knowing the Pick's Theorem, which consists of a unique formula for calculating areas of simple polygons drawn on a checkered mesh. At the end of each stage, problem situations were solved, showing students how much Geometry and the need for its study are present in our lives. At the end of the research, with the data collected through the observations of the professor-researcher and the answers given by the students to the problems and a perception questionnaire, it was concluded that the adopted Methodology produced good results in the students' learning, highlighting their commitment to complete all the activities and their interaction during the process of carrying out the tasks, working collaboratively with colleagues.

Key-words: Geometry, Flat Figures Areas, Pick's Theorem, Problem Solving Methodology.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

a.C.	antes de Cristo
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NCTM	National Council of Teacher of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
MEC	Ministério da Educação
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
detM	Determinante da Matriz M
ICME	Sigla em inglês de Congresso Internacional de Educação Matemática
SEDU-ES	Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo
APNP's	Atividades Pedagógicas Não-Presencias
OMS	Organização Mundial da Saúde
OBMEP	Olímpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Geometria é a parte da matemática que estuda o espaço e as formas dos objetos que nele se encontram. Assim, ela está presente em diversas situações cotidianas dos povos, desde a Antiguidade. Segundo Lorenzato (1995):

> "A Geometria está por toda parte", desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la ... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área , volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria. (LORENZATO, 1995, p. 5).

Apesar de tal importância, o ensino de Geometria não recebe por parte dos professores a atenção merecida. Alguns autores explicam tal fato: Pavanello (1993) afirma que o abandono do ensino de Geometria no Brasil se dá por fatores históricos e cita a Lei 5692/71 que dá liberdade ao professor de escolher e aplicar os temas que mais se adequam a realidade dos seus alunos. Como muitos professores não se sentiam seguros nos conteúdos geométricos, não os incluíam em sala de aula. Já para Lorenzato (1995), essa omissão se deve a dois fatores: o não conhecimento dos conteúdos da Geometria, e à importância que se dá aos livros didáticos, uma vez que estes trazem a Geometria sempre nos últimos capítulos, e por falta de tempo letivo, não são dados.

Portanto, é preciso que estratégias sejam criadas para buscar melhores resultados, dentre elas podemos citar a inovação pedagógica dos professores de matemática em sala de aula, utilizando as mais variadas práticas existentes, como novas tecnologias, jogos e materiais manipulativos. A utilização dessas metodologias diferenciadas proporciona aulas mais dinâmicas e interessantes, fazendo com que os alunos sintam prazer em estudar, contribuindo assim com o conhecimento.

Neste trabalho, será dado enfoque ao conteúdo de Áreas de Figuras Planas, que além de ser um conteúdo essencial à vida acadêmica dos alunos, possui grandes aplicabilidades no cotidiano. Quando aplicamos um conteúdo matemático à vivência do aluno, este conteúdo ganha significado dentro de sua realidade, gerando então, uma aprendizagem mais sólida.

1.1 Metodologia

Como metodologia, será utilizada a Resolução de Problemas. Resolver um problema é algo natural para todos. Polya (2006) descreveu quais devem ser os passos a serem executados na resolução de um problema:

1. Compreender o Problema
2. Estabelecimento de um plano
3. Execução do plano
4. Retrospecto

Polya liderou pesquisas e muito contribuiu para que o ensino de Matemática, no geral, ganhasse novos ares. Após anos de estudos e pesquisas em países como Estados Unidos e países da Europa, a Resolução de Problemas ganha força no cenário educacional a partir dos anos 1980. O uso desta Metodologia é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: “[...] o ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas [...]” (BRASIL, 1998, p. 56).

Aqui, usaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (EAARP) proposta por Onuchic et al. (2014). Nesta metodologia, o aluno é colocado no centro do processo de aprendizagem, sendo ele o principal criador de seus conhecimentos. O professor atua como colaborador, dando suporte e atendendo as necessidades dos alunos, contribuindo para a construção do conteúdo em questão. As autoras sistematizaram essa metodologia em 10 etapas. São elas:

1. Proposição do problema
2. Leitura individual
3. Leitura em conjunto
4. Resolução do problema
5. Observar e incentivar
6. Registros das soluções na lousa
7. Plenária

8. Busca do consenso
9. Formalização do conteúdo
10. Proposição e resolução de novos problemas

Após a execução das 10 etapas e a partir do problema gerador, espera-se que o aluno desenvolva a habilidade e a competência exigidas naquele conteúdo.

A pesquisa foi desenvolvida durante o mês de setembro/2020 com um grupo específico de alunos de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública e estadual do município de Jerônimo Monteiro – ES, sendo o conteúdo proposto para esta série através do Currículo Mínimo do Estado do Espírito Santo (ESPÍRITO SANTO, 2020). Com a suspensão das aulas presenciais durante o período de aplicação, a metodologia foi adaptada para ser aplicada ao Ensino Remoto.

1.2 Questão de Pesquisa e Objetivos

Baseado nessas considerações, este trabalho tem como Problema de Investigação a seguinte pergunta: **Como a Metodologia EAARP adaptada ao Ensino Remoto pode contribuir para o estudo de Áreas de Figuras Planas de forma significativa?**

No intuito de responder a essa questão, tem-se como objetivo geral do trabalho: Investigar as contribuições que a aplicação de uma sequência didática baseada na Metodologia EAARP adaptada ao Ensino Remoto pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem de Áreas de Figuras Planas, no Ensino Fundamental.

Para que o objetivo geral seja alcançado, estabeleceram-se os seguintes objetivos específicos:

- Analisar processos históricos com relação ao ensino e aprendizagem de Geometria;
- Estudar a construção das fórmulas usadas para o cálculo de áreas das principais figuras planas;
- Estimular a argumentação e escrita matemática através de problemas de investigação e generalização;
- Aplicar o conteúdo em situações-problemas dentro da realidade dos alunos;
- Estudar o Teorema de Pick e utilizá-lo como forma alternativa para o cálculo de áreas.

1.3 Estrutura da Dissertação

A dissertação está dividida em sete capítulos, sendo esta Introdução (Capítulo 1), o primeiro deles. No Capítulo 2, mostra-se como a Geometria evoluiu ao longo dos anos e como seu ensino no Brasil se deu por movimentos históricos. No Capítulo 3, apresenta-se um estudo sobre as fórmulas usuais para o cálculo de áreas das principais figuras planas, além de ser apresentado o Teorema de Pick e uma demonstração de sua validade.

O Capítulo 4 mostra como a Resolução de Problemas se tornou uma metodologia de ensino. Será apresentada também a proposta de Onuchic et al. (2014), e suas contribuições no processo de ensino-aprendizagem.

No Capítulo 5, são descritas as características da pesquisa, os sujeitos nela envolvidos e a forma como foram aplicadas as atividades. No Capítulo 6, é relatada a aplicação, mostrando as dificuldades e as resoluções dos alunos e algumas análises de fatos ocorridos durante o desenvolvimento das atividades.

Por fim, no Capítulo 7 são dadas as considerações finais sobre o trabalho, mostrando os resultados obtidos. Neste Capítulo, são relatadas também as dificuldades encontradas, e apresentam-se algumas sugestões de melhorias, bem como algumas recomendações de trabalhos futuros.

Capítulo 2

História e Ensino da Geometria

Neste capítulo, apresenta-se uma breve história do desenvolvimento da Geometria ao longo dos anos, e também será apresentada a evolução do seu ensino no Brasil, até chegar aos dias atuais, passando por diversos momentos da história do país.

2.1 Um pouco de História

A Geometria sempre esteve presente no cotidiano do ser humano, desde a Antiguidade. É usada em situações rotineiras, às vezes, sem ser notada.

Noções de Geometria surgiram naturalmente através da necessidade de se realizar medições e construções, conforme explica Eves (1994):

> Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias. (EVES, 1994, p. 1-2).

Através de observações de espaços naturais, o homem passou a enxergar relações e propriedades geométricas, surgindo assim o que Eves (1994) chama de Geometria Científica.

Há de se destacar, que a Geometria se desenvolveu inicialmente no Egito, principalmente às margens do Rio Nilo. Foi ali, que as primeiras noções de área apareceram. Quando as cheias do Rio Nilo destruíam as marcações dos terrenos, os povos refaziam os cálculos para a nova repartição das terras, já que o imposto cobrado era proporcional a área cultivada (NOGUEIRA, 2008). Daí, vem o significado da palavra Geometria: Geo (Terra) + Metria (Medir).

Grande parte dos conhecimentos matemáticos dos egípcios foi registrada em papiros. Os papiros eram confeccionados a partir do caule da planta de mesmo nome, muito comum nas margens do Rio Nilo. Eram grafados por escribas, em escrita hierática (MOL, 2013).

Dentre os papiros mais famosos, destacamos o Papiro de Rhind, o de Moscou e o de Berlim. Os problemas escritos nos papiros eram relacionados ao cotidiano dos trabalhadores (VIDAL; EUSTÁQUIO, 2014).

Conforme Eves (1994) e Mol (2013), o Papiro de Rhind - Figura 1 - que data de aproximadamente 1650 a.C., foi adquirido pelo escocês Alexander Rhind em 1858. Possui cerca de 5 m de comprimento e 33 cm de largura e contém 84 ou 85 problemas matemáticos com soluções. Os problemas de Geometria se baseiam em aplicação de fórmulas para cálculo de áreas de terrenos e volumes (capacidade) de celeiros.

Figura 1 – Papiro de Rhind

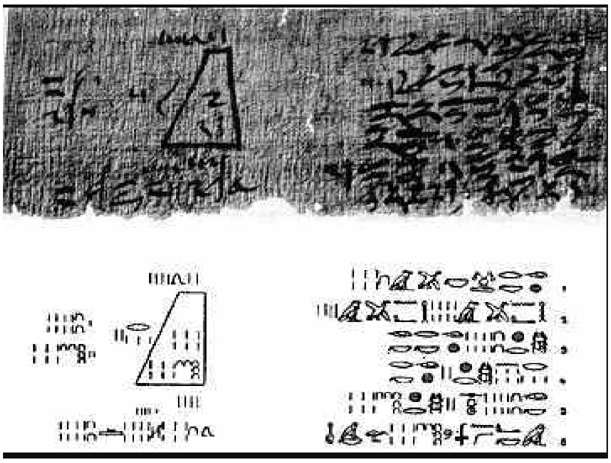
Fonte: (MOL, 2013, p. 22)

Dentre os problemas, Eves (1994) destaca o problema 51, no qual a área de um triângulo isósceles é obtida multiplicando-se a metade da medida da base pela medida da altura, formando assim dois triângulos retângulos, que sobrepostos, formam um retângulo.

Já o Papiro de Moscou, adquirido pelo russo Vladimir Golenishchev no final do século XIX, é menor e mais antigo que o Papiro de Rhind. Mol (2013) destaca o problema 14 (Figura 2), no qual é calculado o volume de um tronco de pirâmide, sendo a e b as medidas das bases e h a altura, através da fórmula:

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$

Figura 2 – Problema 14 do Papiro de Moscou



Fonte: (BECK, 2010, p. 51)

Os papiros mostram então, que a Geometria desenvolvida pelos egípcios se concentrava em problemas rotineiros, não havendo nenhuma forma de demonstração das fórmulas utilizadas. Há uma grande mudança na evolução da Matemática, quando se fala do seu desenvolvimento na Grécia. Um dos maiores nomes da matemática grega foi Tales de Mileto (624 – 546 a.C.). Tales é considerado o primeiro matemático da história. Era também comerciante, o que o levou ao Egito, onde teve acesso a Matemática que ali se desenvolvia, servindo de base para muitas de suas demonstrações. "Tales afirmava que, pela observação e raciocínio, deveríamos ser capazes de explicar tudo o que acontece na natureza." (MLODINOW, 2004, p. 2).

Mol (2013) explica:

> Ocorre, com Tales, uma mudança de perspectiva no estudo da geometria. A geometria e a aritmética até então praticadas na Mesopotâmia e no Egito tinham caráter prático e se limitavam a aplicar procedimentos numéricos para resolver problemas específicos, sem maiores preocupações com a estrutura intelectual ou com os princípios filosóficos da matemática envolvida. A tradição clássica atribui a Tales de Mileto a primeira ação no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo. (MOL, 2013, p. 32).

Não se pode falar da Matemática na Grécia sem citar Pitágoras. Nascido na ilha de Samos em 572 a. C., acredita-se que tenha estudado com Tales e dado sequência ao seu trabalho. Após viajar pelo Egito e por áreas do Oriente, mudou-se para Crotona, onde fundou a escola pitagórica. Os pitagóricos não costumavam registrar seus conhecimentos, por isso, tudo o que hoje é atribuído a Pitágoras, teria sido registrado anos depois. Eves (1994, p. 8) classifica a escola pitagórica como "uma irmandade unida por mistérios, ritos cabalísticos e cerimônias e empenhada no estudo de filosofia, matemática e ciências naturais".

Ainda segundo Eves (1994):

> Apesar da natureza mística de muitos estudos pitagóricos, os membros da sociedade produziram, durante os cerca duzentos anos que se seguiram à fundação da escola, uma grande quantidade de sólida matemática. Assim, em geometria produziram as propriedades das retas paralelas e usaram-nas para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos. (EVES, 1994, p. 8).

A maior obra, no entanto, é de autoria de Euclides: *Elementos*. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, mas acredita-se que viveu no século III a. C. *Os Elementos* são compostos por 13 livros e possivelmente não foi elaborado somente por Euclides, mas sim por um grupo que ele liderava e serviu de base para o Ensino de Matemática por quase dois milênios (ÁVILA, 2001). Contém 465 preposições, abrangendo geometria plana e espacial, álgebra, teoria dos números e álgebra geométrica grega.

Nesse período, não se usava fórmulas prontas como usamos hoje. Tudo era calculado por meio de proporções. Em *Os Elementos*, Euclides calculava a área de um triângulo, como sendo a metade da área do paralelogramo formado por dois triângulos iguais ao triângulo dado, enquanto que a área do paralelogramo é igual a área de um retângulo com as mesmas medidas de comprimento e altura (ÁVILA, 2001).

Os gregos deram um novo rumo para a Geometria. Ela passou a ser mais dedutiva e demonstrativa, não se apegando somente a problemas práticos, como faziam os egípcios. Sua evolução até os dias atuais passa ainda pela Índia e Arábia, com a contribuição dos hindus, até chegar na Europa, onde se concretizou no que chamamos de Geometria Moderna.

2.2 O Ensino de Geometria no Brasil

Sabemos da presença da Geometria no cotidiano das pessoas, seja por meio da visualização de formas, de objetos, espaços da natureza, etc. ou por meio de situações práticas da nossa rotina, como exemplo podemos citar a construção de moradias, onde se trabalha conceitos de paralelas e perpendiculares, noções de área, simetria, dentre outros. Diante dessa importância que a Geometria tem em nossa rotina, é natural pensar que seu ensino é algo indispensável aos nossos alunos.

Atualmente, a Geometria faz parte dos currículos de matemática em todos os níveis de escolaridade, mas muitos professores não ensinam parte de seu conteúdo em sala de aula, como explica Lorenzato (1995):

> O ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador; alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. No Brasil, já

> fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. (LORENZATO, 1995, p. 3).

O atual modelo de ensino de Geometria é fruto de processos históricos, e esta seção tem como objetivo mostrar como se deu sua evolução, passando por diversos pontos importantes da História do Brasil.

Os primeiros professores no Brasil foram os padres jesuítas, mas estes, ensinavam apenas catecismo e eram a única fonte de transmissão de conhecimento no Brasil colônia.

Com o crescimento econômico dos países europeus, Portugal elaborou projetos para acompanhá-los, e parte desses projetos consistia na exploração das colônias. Tal fato acarretou a expulsão dos jesuítas das terras brasileiras em 1759, pelo Marques de Pombal. Criou-se então, um modelo de aulas, denominado Aulas Régias, onde eram ensinadas disciplinas sem conexão entre si. É a partir daí que a Matemática desponta no Brasil com aulas de Aritmética, Álgebra e Geometria (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Esse método de ensino perdurou até 1648, ano da chegada dos militares no Brasil. Tinham como missão preparar novos militares para a segurança da colônia. Parte dessa preparação, consistia em aulas de Geometria, pois consideravam indispensáveis os conhecimentos geométricos para a execução de atividades de guerra, como o lançamento de bombas, por exemplo. A Geometria ensinada não tinha preocupação com formalismo e demonstrações, mas sim, trabalhar questões com aplicações práticas.

Foi nesse período que surgiram as Aulas de Artilharia e Fortificação, cujo objetivo era formar novos engenheiros (na época, denominava-se engenheiro aquele profissional do exército que participava das guerras). Nesse momento, a Geometria ganha muita força no Brasil (MENESES, 2007).

Há de se destacar, que nesse período surgiram os primeiros livros de matemática escritos no país, que eram usados nas Aulas de Fortificações. Eram eles: o Exame de Bombeiros e o Exame de Artilheiros, escritos pelo português José Fernandes Pinto Alpoim. O foco dos livros era a Geometria, voltada principalmente para assuntos militares, no estilo perguntas e respostas. Não continha demonstrações e formalismo, eram obras puramente didáticas (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Os temas abordados em tais livros ainda eram focados na formação de profissionais para o trabalho na área militar, trazendo exemplos práticos, conforme explica Meneses (2007):

> [· · ·] o autor se preocupava em caracterizar as noções de ponto, linha, perpedicular, paralelas, ângulo, círculo, triângulo, paralelogramo etc, a fim de apresentar os conhecimentos necessários , como descrito anteriormente, para a construção de um nível, graduação de uma esquadra, dar vento às balas e construir um petipé. (MENESES, 2007, p.25).

Esse tipo de ensinou durou por muitos anos no Brasil, sendo voltado principalmente para aqueles que almejavam a carreira militar, e posteriormente para aqueles que desejavam ingressar no Ensino Superior. Esse último se fortaleceu após a Independência do Brasil de Portugal, já que não era mais conveniente mandar alunos daqui para fazerem cursos superiores lá, tendo sido criadas então, faculdades aqui no Brasil. Com isso, foram criadas as Aulas Avulsas, cujo objetivo era a preparação de jovens para ingresso nos Cursos Superiores, sendo a Geometria um dos principais pré-requisitos para a entrada nos Cursos de Engenharia e Direito, por exemplo (CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

Nesse momento da história, a Geometria deixa de ser um conteúdo necessário somente à carreira militar e passa a se concretizar no cenário eduacional brasileiro como uma disciplina utilizada na formação e desenvolvimento intelectual do ser humano e se torna um conhecimento do cotidiano escolar. Esse tipo de ensino foi denominado Ensino Secundário (MENESES, 2007).

Foi criado em 1837 o Colégio D. Pedro II, que organizou o currículo e o ensino de matemática, servindo de exemplo para outras instituições no país. O conteúdo de matemática se dava em oito anos, sendo: Aritmética nos três primeiros anos, Geometria nos dois anos seguintes, Álgebra por um ano, e por fim, Matemática (Trigonometria e Mecânica) por mais dois anos. Até então, percebe-se que todo o conteúdo de Matemática ensinado atualmente, era dividido em disciplinas distintas, assim, a Geometria consistia em uma disciplina escolar, não parte da Matemática, como conhecemos hoje. A Geometria ensinada no Colégio Pedro II era baseada nas obras de Lacroix, matemático e escritor francês. Suas obras também faziam parte do ensino nas Escolas Militares, prova de que ainda havia uma influência do ensino militar no ensino secundário no Brasil (VALENTE, 1999 apud CALDATTO; PAVANELLO, 2015).

A Geometria aqui ensinada continha grande rigor, e assim continuou com a criação de obras de autores brasileiros, como Cristiano Benedito Ottoni, que trazia teoremas e corolários, sem mostrar aplicações na vida prática dos alunos. As obras de Ottoni tinham ainda a influência francesa, e inspiraram obras de outros autores. Novas obras surgiram com uma novidade: Exercícios. Como nos diz Meneses (2007):

> Sobre esses novos autores, cabe ressaltar a importância do surgimento dos exercícios nessas produções, o que fez com que os cursos ganhassem uma nova metodologia de ensino, pois o aluno, que até aquele presente momento era direcionado a tomar nota dos procedimentos, a partir da criação dos exercícios passou a ter a oportunodade de mostrar suas dificuldades durante a aprendizagem. Outro papel importante dos exercícios era preparar os alunos para os exames que vinham a seguir. (MENESES, 2007, p. 50-51).

A Geometria seguiu como disciplina autônoma até o aparecimento do Movimento da Matemática Moderna – o MMM. Este movimento surgiu na Europa ainda no século XIX, onde grupos de professores defendiam o ensino de uma matemática mais contextualizada, movidos por mudanças econômicas, sociais e revoluções em várias partes do mundo. Claras e Pinto (2008) destacam alguns fatores que justificam essa nova ideia.

> [· · ·] as mudanças que ocorriam no campo da economia, resultantes dos avanços tecnológicos e a expansão da indústria; as discussões e as reformulações dos currículos da escola secundária, observadas em vários países da Europa e também nos Estados Unidos, onde se discutia se o ensino deveria estar centrado na formação técnica ou na formação humanista; as propostas de democratização do ensino; e por último a preocupação em ensinar aos alunos uma Matemática mais prática, mais contextualizada, tendo em vista eliminar o alto nível de abstração e complexidade da "velha matemática". (CLARAS; PINTO, 2008, p. 4621).

Sobre o MMM, Duarte e Silva (2006) explicam que:

> [· · ·] buscava aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Como conseqüência, as propostas defendidas pelo movimento enfatizam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras. (DUARTE; SILVA, 2006, p. 88).

No Brasil, o MMM desponta em meados do século XX, liderado por um grupo de professores franceses, chamado Bourbaki, que atuava na publicação de livros com o objetivo de apresentar uma nova matemática, rigorosa, porém, mais simples. A grande inovação era a junção da Álgebra, Geometria e Aritmética numa só disciplina, denominada Matemática. Essa "nova disciplina" deveria ser pautada na Teoria dos Conjuntos (CLARAS; PINTO, 2008).

Sobre a matemática elaborada pelo grupo Bourbaki, Caldatto e Pavanello (2015) nos dizem que:

> Para esse grupo, a unidade da matemática é apoiada na teoria dos conjuntos e é hierarquizada em termos de estruturas. As estruturas fundamentais da matemática ou "estruturas–mães" poderiam ser classificadas como algébricas (cujo protótipo é o grupo), de ordem (cujo protótipo é a rede) e topológicas (fundamentadas nas noções de limite, continuidade e proximidade). (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 119).

Em relação ao ensino dos conteúdos de Geometria, criou-se um certo desconforto por parte dos professores, pois não tinham formação para ensinar Geometria com esse nível de rigor, se baseando em estruturas. O MMM exigia este tipo de ensino, o que levou muitos professores a deixar de lado a Geometria, sob qualquer enfoque (PAVANELLO, 1993). "Deste modo, um dos principais legados da Matemática Moderna para o processo educacional no Brasil foi o abandono da geometria na escola básica que perdura até meados da década de 2010." (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 120).

No geral, o MMM não teve nenhuma contribuição para a formação dos estudantes. Movidos pela tentativa de uma nova proposta de ensino, o NCTM - National Concil of Teacher of Mathematics publicou em 1980 nos Estados Unidos uma série de recomendações, essas ideias influenciaram as novas reformas que viriam a acontecer ao redor de todo o mundo. Dentre as recomendações, Lobo e Bayer (2004, p. 21) citam: “[...] o ensino fundamental deveria ser voltado para a cidadania e não apenas voltado à preparação para outras etapas de ensino; papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; uso de tecnologias.”

No Brasil, essas recomendações culminaram na criação dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) em 1998 pelo MEC. A criação dos PCN somado com a elaboração da LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação, em 1996, representa um marco no processo histórico do ensino de Matemática no Brasil, pois exibem o caminho a ser seguido para superar as lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna.

Com isso, a Geometria volta a ter seu espaço nas aulas de Matemática com aulas de construções geométricas com régua e compasso, aliados também a outros conteúdos da Matemática (LOBO; BAYER, 2004).

Organizando todo o conteúdo de Matemática, os PCN valorizam o estudo de Geometria enfatizando que através da Geometria, o aluno é capaz de compreender, descrever e representar o mundo em que vive, sendo possível a utilização de problemas relacionados ao cotidiano (BRASIL, 1998).

Caldatto e Pavanello (2015) dizem que apesar dos esforços realizados, principalmente na inserção da Geometria nos currículos de Matemática, os resultados não são os melhores ao se analisar o desempenho dos estudantes nas avaliações que medem o nível de aprendizagem, como ENEM, SAEB, dentre outras.

Dos muitos motivos que causam esse baixo índice de aprendizagem em Geometria, experiências profissionais nos permitem citar alguns, nos quais os professores:

1. Não se utilizam de metodologias diferenciadas, usando apenas a prática tradicional (aula expositiva);
2. Possuem insegurança em ensinar conteúdos geométricos;
3. Ficam presos ao livro didático, que nem sempre é um material bom;
4. Fazem uso da Geometria apenas como ferramenta auxiliar no ensino de Álgebra e Aritmética;
5. Não possuem material básico disponível nas escolas para uso em sala de aula (régua, compasso, transferidor).

Mediante os resultados negativos, é preciso repensar as aulas de Geometria. Há muitas possibilidades de recursos a serem utilizados pelos professores, tais como: jogos, materiais manipulativos, tecnologias, etc. Neste trabalho, opta-se pela Metodologia de

Ensino Resolução de Problemas, com a finalidade de colocar o aluno no centro do processo educacional, sendo ele, o responsável pela criação e construção do conhecimento.

Capítulo 3

Áreas de Superfícies Planas e Teorema de Pick

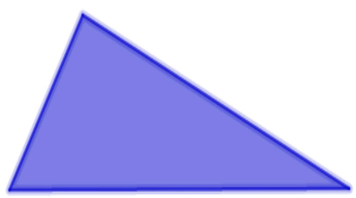
Neste capítulo, apresenta-se o conceito de Áreas de superfícies planas e mostram-se as fórmulas para o cálculo de áreas das figuras mais elementares, além de definir e demonstrar o Teorema de Pick.

3.1 Superfícies Planas

Para esta seção, serão utilizadas as Definições, Postulados e Teoremas, bem como a sequência seguida, a partir da obra de Pesco e Arnault (2012).

Superfície de um polígono é a união do polígono com seu interior. A Figura 3 mostra uma superfície triangular.

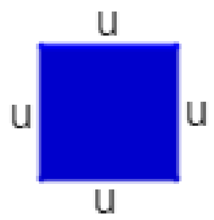
Figura 3 – Superfície Triangular



Fonte: Autoria Própria

A área de uma superfície plana é um número real positivo associado a essa superfície. A área expressa a medida de uma superfície numa certa unidade. Essa unidade será considerada como sendo um quadrado de lado u, como na Figura 4.

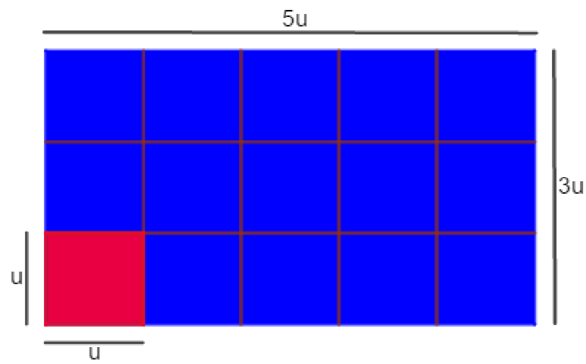
Figura 4 – Quadrado Unitário



Fonte: Autoria Própria

Encontrar a área de uma figura consiste em calcular quantos quadrados unitários "cabem" nessa figura. Exemplificamos com o retângulo da Figura 5.

Figura 5 – Área de um retângulo a partir do quadrado unitário

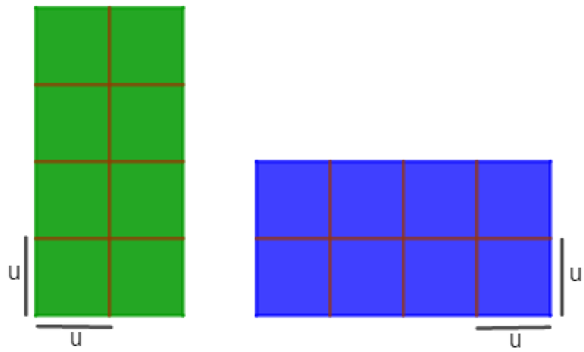


Fonte: Autoria Própria

A área do retângulo acima é $15u^2$, pois, como podemos observar, cabem 15 quadrados unitários no seu interior.

Superfícies Equivalentes: Duas superfícies que possuem a mesma área são denominadas Equivalentes. Assim, os retângulos da Figura 6 são Equivalentes.

Figura 6 – Retângulos Equivalentes

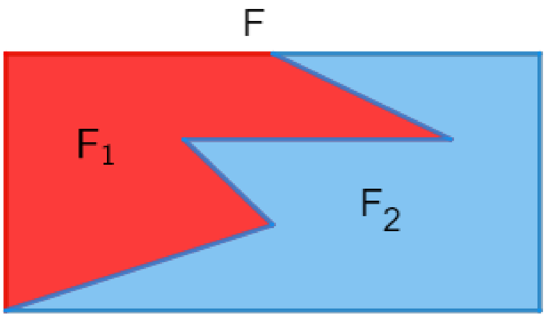


Fonte: Autoria Própria

Para o estudo de áreas de figuras planas, vamos precisar de dois postulados, que se seguem:

1) **Postulado da adição de áreas**: Seja uma superfície plana F, que pode ser obtida através da união de duas superfícies F_1 e F_2, onde F_1 e F_2 não possuem pontos interiores em comum. Então $Área_F = Área_{F_1} + Área_{F_2}$, como podemos observar na Figura 7.

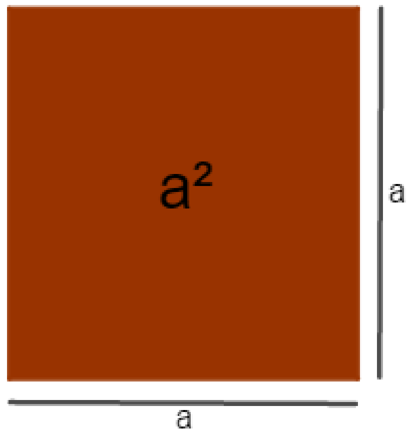
Figura 7 – Adição de Áreas



Fonte: Autoria Própria

2) **Postulado da unidade de áreas**: A área de uma superfície quadrada é o quadrado da medida do lado. Na Figura 8, o lado do quadrado mede a, então a área da superfície é a^2.

Figura 8 – Área de um Quadrado qualquer



Fonte: Autoria Própria

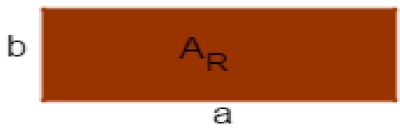
3.1.1 Área de um Retângulo

Teorema 3.1. *A área de um retângulo é o produto da base pela sua altura.*

Demonstração:

Vamos considerar um retângulo de base a e altura b, como o da Figura 9.

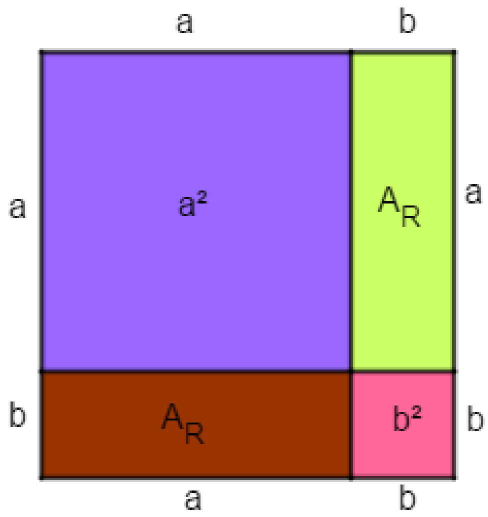
Figura 9 – Retângulo de base a e altura b



Fonte: Autoria Própria

A partir daí, construímos dois quadrados: um de lado a e outro de lado b, além de um outro retângulo, equivalente ao da Figura 9, formando assim , um quadrado de lado $a + b$, visto na Figura 10.

Figura 10 – Encontrando a área do retângulo



Fonte: Autoria Própria

Pelos postulados da Adição de áreas e Unidade de áreas, temos que a área do quadrado de lado $a + b$ equivale a soma das áreas dos dois retângulos de dimensões a e b e os quadrados de lado a e b. Ou seja,

$$a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2A_R = 2ab$$

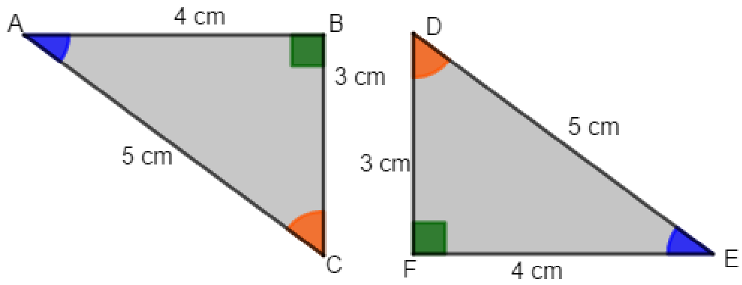
$$A_R = \frac{2ab}{2}$$

$$\boxed{A_R = ab}$$

Antes de prosseguirmos com o estudo das fórmulas do cálculo de áreas, precisamos conceituar o termo congruência. Na Geometria,congruência indica medidas iguais. Assim, dois segmentos congruentes são segmentos que possuem a mesma medida e vice-versa. Da mesma forma, ângulos congruentes são ângulos que possuem a mesma medida.

Figuras congruentes possuem ordenadamente todos os lados e todos os ângulos congruentes. Os triângulos ABC e DEF da Figura 11 são congruentes e escrevemos $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Figuras congruentes determinam superfícies congruentes (equivalentes).

Figura 11 – Exemplo de triângulos congruentes



Fonte: Autoria Própria

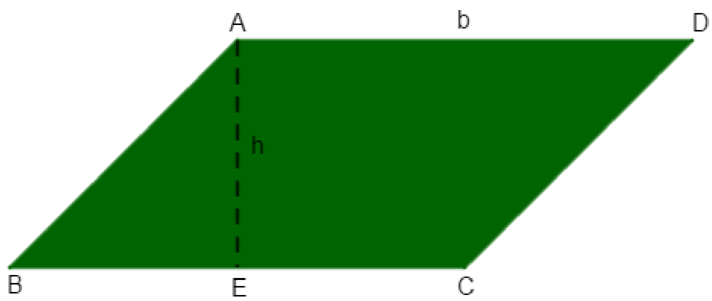
3.1.2 Área de um Paralelogramo

Teorema 3.2. *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo. Logo, a área de um paralelogramo equivale ao produto da sua base pela sua altura.*

Demonstração:

Vamos considerar o paralelogramo $ABCD$ da Figura 12.

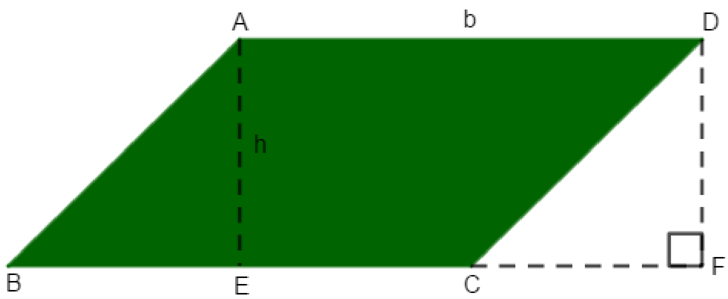
Figura 12 – Paralelogramo $ABCD$



Fonte: Autoria Própria

Traçando dois segmentos perpendiculares a reta suporte do lado BC: AE pelo vértice A e DF pelo vértice D, chegamos a Figura 13.

Figura 13 – Encontrando a área de um Paralelogramo



Fonte: Autoria Própria

Vamos mostrar que $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$.

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (lados opostos do paralelogramo)} \\ \overline{AE} = \overline{DF} \text{ (altura do paralelogramo)} \\ \overline{BE} = \overline{CF} \text{ (catetos do triângulo retângulo com hipotenusa e outro cateto congruentes)} \end{cases}$$

Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é equivalente a área do retângulo $AEFD$. Seja A_P a área do paralelogramo e A_R a área do retângulo. Então, pelo Teorema 3.1:

$$A_P = A_R$$

$$A_R = bh$$

$$\boxed{A_P = bh}$$

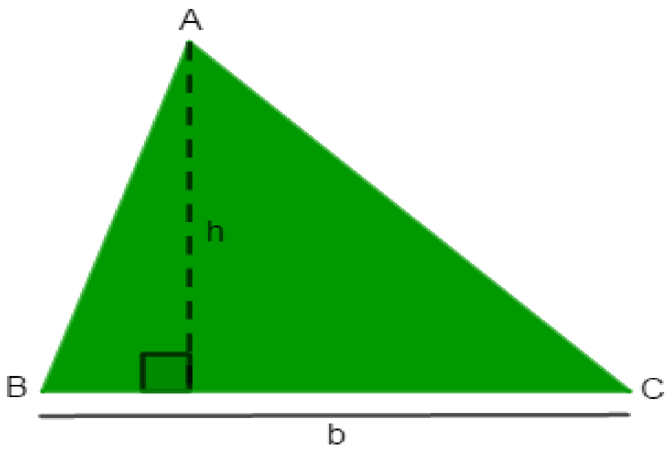
3.1.3 Área de um Triângulo

Teorema 3.3. *A área de um triângulo equivale a metade do produto de sua base pela altura.*

Demonstração:

Vamos considerar o triângulo ABC da Figura 14.

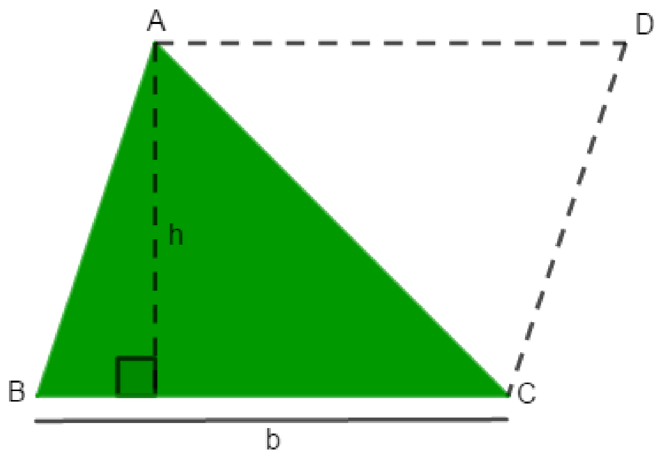
Figura 14 – Triângulo de base b e altura h



Fonte: Autoria Própria

Traçando AD e CD, paralelas a BC e AB, respectivamente, formamos o paralelogramo $ABCD$ da Figura 15.

Figura 15 – Encontrando a área do triângulo



Fonte: Autoria Própria

Por congruência de triângulos, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, pois

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} \text{ (lados opostos do paralelogramo)} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (lados opostos do paralelgramo)} \qquad \text{Caso } LLL \\ \overline{AC} \text{ comum} \end{cases}$$

Denotando a área dos triângulos congruentes por A_T e a área do paralelogramo por A_P, e usando o Postulado 1 e o Teorema 3.2, temos que:

$$A_T + A_T = A_P$$

$$2A_T = A_P$$
$$A_T = \frac{A_P}{2}$$
$$\boxed{A_T = \frac{bh}{2}}$$

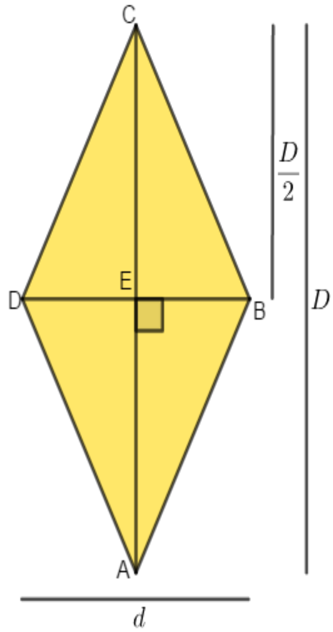
3.1.4 Área de um Losango

Teorema 3.4. *A área de um losango é igual à metade do produto de suas diagonais.*

Demonstração:

Consideremos o losango $ABCD$ da Figura 16 de diagonais AC e DB que se encontram no ponto E, e medem D e d, respectivamente.

Figura 16 – Área de um losango



Fonte: Autoria Própria

A diagonal DB divide o losango em dois triângulos congruentes: $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$, de base d e altura $\frac{D}{2}$. Usando o Postulado 1 e o Teorema 3.3, e denotando por A_L a área do losango e por A_T a área dos triângulos congruentes, temos que:

$$A_L = A_T + A_T$$

$$A_L = 2A_T$$

$$A_L = 2\frac{(\frac{D}{2})d}{2}$$

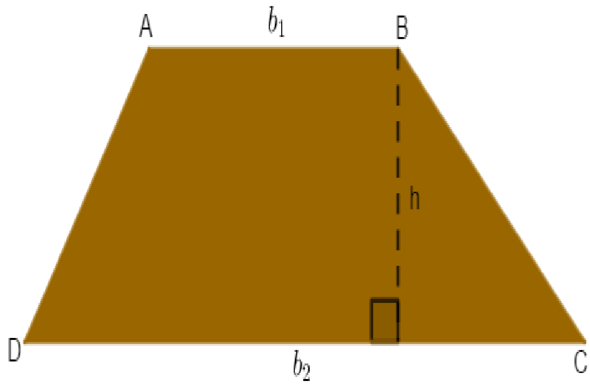
$$\boxed{A_L = \frac{Dd}{2}}$$

3.1.5 Área de um Trapézio

Teorema 3.5. *A área de um trapézio é igual à metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.*

Vamos considerar o trapézio $ABCD$ da Figura 17 de bases b_1 e b_2 e altura h.

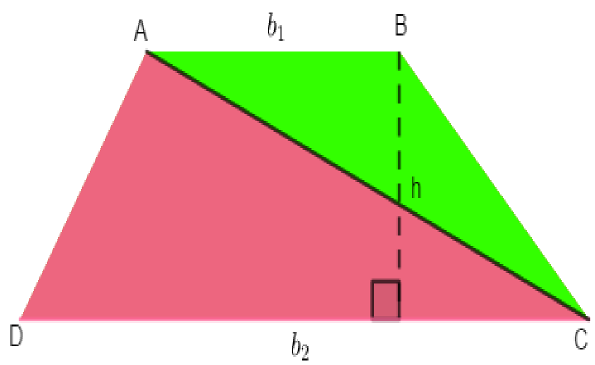
Figura 17 – Trapézio $ABCD$



Fonte: Autoria Própria

Traçando a diagonal AC no trapézio acima, formamos dois triângulos, o $\triangle ABC$ de base b_1 e altura h e o $\triangle ADC$ de base b_2 e altura h, conforme a Figura 18.

Figura 18 – Encontrando a área de um trapézio



Fonte: Autoria Própria

Pelo Postulado 1, podemos afirmar que a área do Trapézio (denotada por A_T) é equivalente a soma das áreas dos dois triângulos (Teorema 3.3). Ou seja,

$$A_T = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ADC}$$

$$A_T = \frac{b_1.h}{2} + \frac{b_2.h}{2}$$

$$\boxed{A_T = \frac{(b_1+b_2)h}{2}}$$

3.1.6 Área de um Polígono Regular

Teorema 3.6. *A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.*

Demonstração: Suponhamos um polígono regular de n lados, sendo:

a a medida do apótema,

l medida do lado do polígono e

$2p$ o seu perímetro, onde $2p = n.l$ e p é chamado de semiperímetro do polígono.

Esse polígono pode ser decomposto em n triângulo isósceles de base l e altura a. Pelo Postulado da Adição de áreas, e sendo conhecida a área de um triângulo (Teorema 3.3), a área A_P deste polígono, será dada por:

$$A_P = n.(\frac{l.a}{2})$$

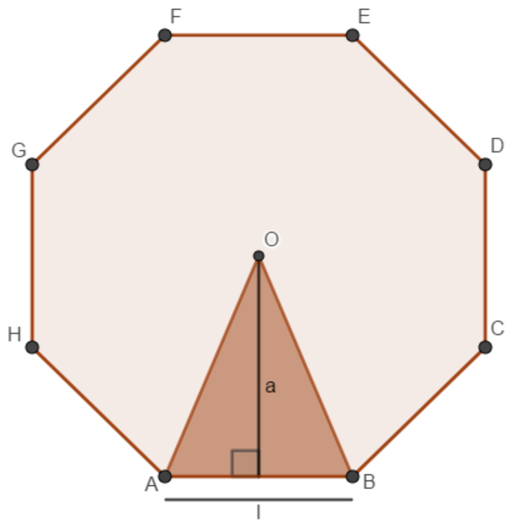
$$A_P = (n.l).\frac{a}{2}$$

$$A_P = \frac{2p.a}{2}$$

$$\boxed{A_P = p.a}$$

A Figura 19 ilustra o caso em que $n = 8$.

Figura 19 – Polígono regular de 8 lados



Fonte: Autoria Própria

3.1.7 Área de um Círculo

Teorema 3.7. *A área de um círculo é o produto do número π pelo quadrado do seu raio.*

Consideremos um círculo de raio R circunscrito ao polígono regular de n lados, como mostra a Figura 20, o caso em que $n = 8$.

Ao aumentarmos o número de lados do polígono, sua área e seu perímetro se aproximam da área e do perímetro do círculo. Ou seja, quando $n \to \infty$, temos que $l \to 0$, $2p \to C$ e $a \to R$, onde:

$2p$ é o perímetro do polígono regular, sendo p o semiperímetro;

l é a medida do lado do polígono;

a é a medida do apótema do polígono e

C é a medida do comprimento do círculo, sendo $C = 2\pi R$.

Decompondo o polígono em n triângulos, e admitindo que sua área se aproxima da área do círculo e denotando a área do círculo por A_C e a área do polígono por A_P, temos pelo Teorema 3.6 que

$$A_C = A_P$$

$$A_C = p.a$$

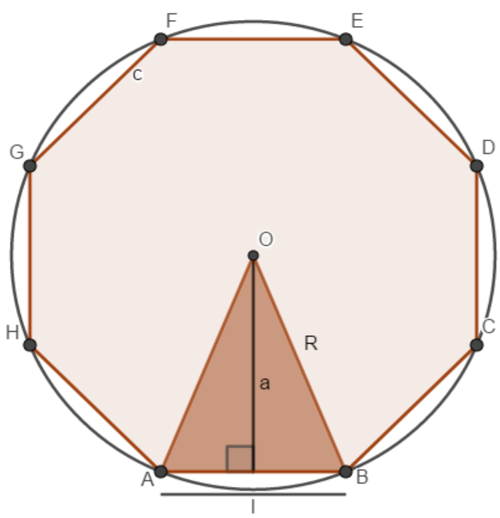
$$A_C = \frac{C}{2}.R$$

$$A_C = \frac{2\pi R}{2}.R$$

$$A_C = \pi R.R$$

$$\boxed{A_C = \pi R^2}$$

Figura 20 – Círculo circunscrito a um polígono regular de 8 lados



Fonte: Autoria Própria

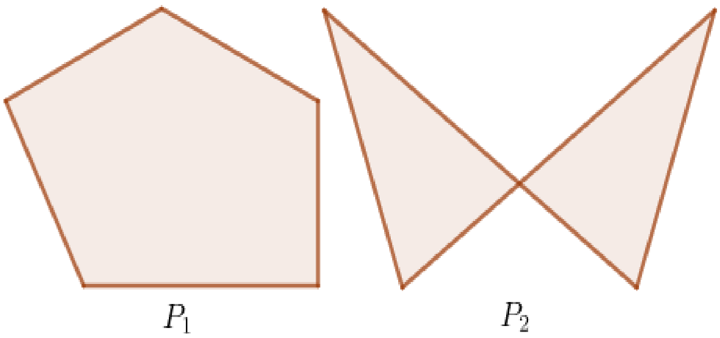
3.2 O Teorema de Pick

O conceito e a aplicação de áreas de figuras planas é assunto presente no cotidiano das pessoas. Seu ensino é dado desde o Ensino Infantil até o Ensino Médio frequentemente através de fórmulas, composição e decomposição de figuras (HERMES, 2015).

O austríaco Georg Alexander Pick (1859 – 1942) desenvolveu um método para o cálculo de áreas de figuras planas, conhecido como Teorema de Pick. Este teorema permite a obtenção da área de figuras através de uma simples contagem de pontos, desde que a figura seja um polígono simples desenhado numa rede de pontos no plano. Precisamos, então, conceituar polígono simples e rede de pontos no plano, o que será feito com base no trabalho de Hermes (2015).

Polígono simples: é um polígono cuja fronteira é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice, ou seja, um polígono é dito simples quando dois lados quaisquer não adjacentes não se interceptam. Na Figura 21, temos que P_1 é simples, enquanto P_2, não é simples.

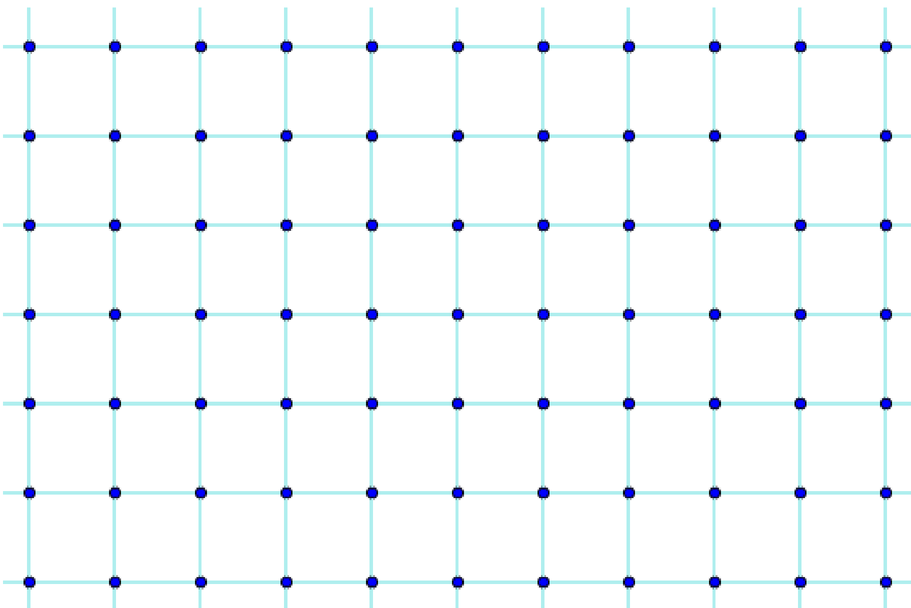
Figura 21 – Exemplos de polígno simples e não simples



Fonte: Autoria Própria

Uma **rede de pontos** no plano é o conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais. A distância de cada ponto aos pontos mais próximos na vertical e na horizontal é igual a 1 unidade, como na Figura 22.

Figura 22 – Rede de pontos no plano

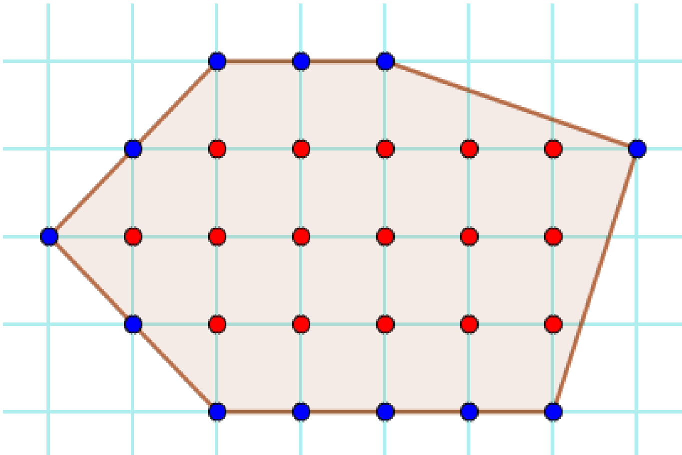


Fonte: Autoria Própria

Para a aplicação do Teorema de Pick, devemos desenhar um polígono simples numa rede de pontos, de modo que todos os vértices do polígono coincidam com pontos da rede. Ao fazermos isso, obtemos uma quantidade de pontos internos ao polígono, e uma quantidade de pontos da rede sobre as arestas do polígono. Definimos os pontos internos como pontos interiores (I) e os pontos sobre as arestas de pontos de borda (B).

Na Figura 23, temos os pontos de borda em azul, num total de 12, e 16 pontos interiores, na cor vermelha.

Figura 23 – Pontos de borda e pontos interiores



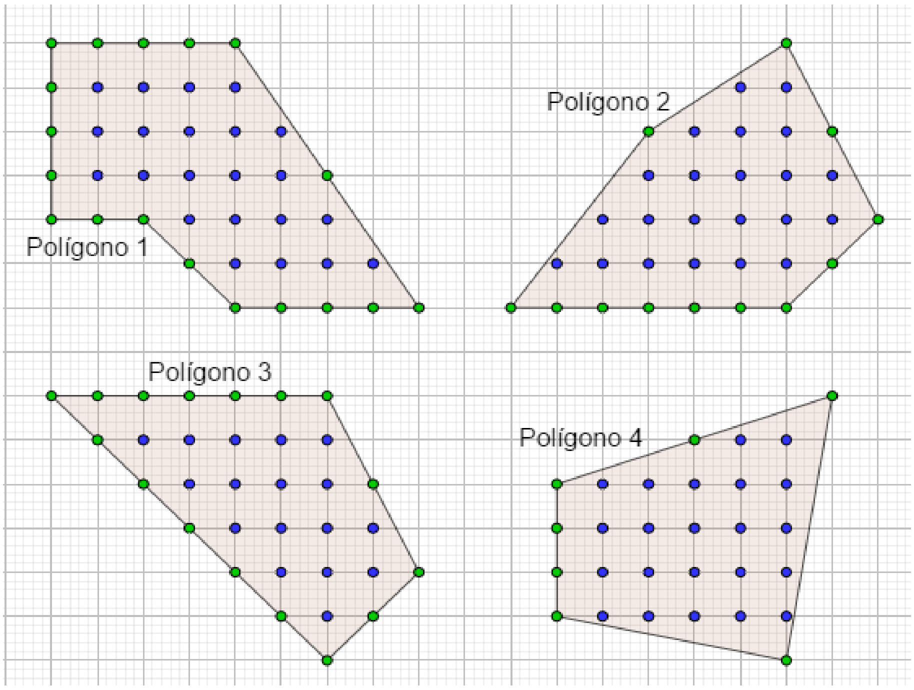
Fonte: Autoria Própria

Podemos assim, definir o Teorema de Pick.

Teorema 3.8. ***Teorema de Pick****: A área (A) de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede de pontos é dada pela fórmula $A = \frac{B}{2} + I - 1$, onde B é o número de pontos de borda do polígono e I é a quantidade de pontos interiores ao mesmo.*

Na Figura 24, temos 4 polígonos, e usando o Teorema de Pick, podemos calcular suas áreas. Em cada um, os pontos de borda estão na cor verde e os pontos interiores estão na cor azul.

Figura 24 – Cálculo de áreas de alguns polígonos com o Teorema de Pick



Fonte: Autoria Própria

No Polígono 1, temos B = 18 e I = 22, então A(Polígono 1) = $\frac{18}{2} + 22 - 1 = 30$.

No Polígono 2, temos B = 12 e I = 22, então A(Polígono 2) = $\frac{12}{2} + 22 - 1 = 27$.

No Polígono 3, temos B = 16 e I = 17, então A(Polígono 3) = $\frac{16}{2} + 17 - 1 = 24$.

No Polígono 4, temos B = 7 e I = 22, então A(Polígono 4) = $\frac{7}{2} + 22 - 1 = 24,5$.

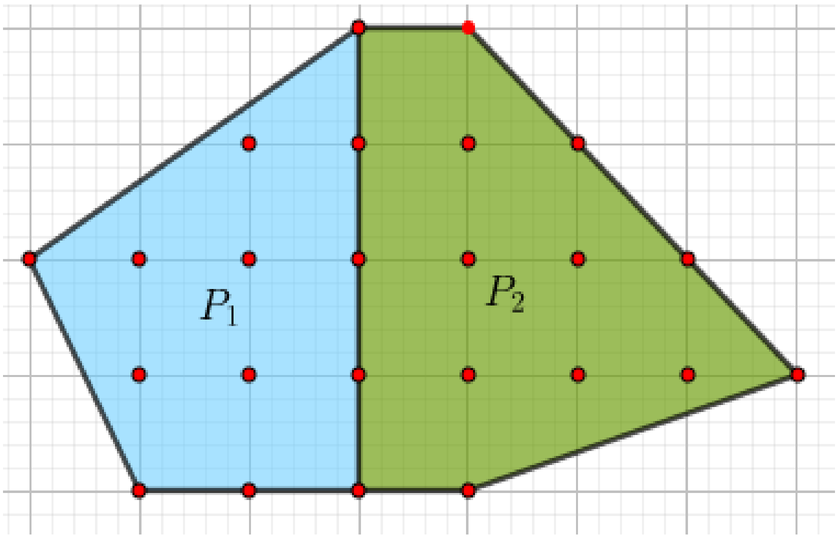
3.2.1 Demonstração do Teorema de Pick

Para a demonstração deste Teorema, será seguido como modelo o trabalho de Murty e Thain (2007), no qual é utilizado o Teorema de Minkowski como recurso na demonstração. A demonstração será feita em 4 passos.

1° passo: Se P é um polígono, tal que $P = P_1 \bigcup P_2$, onde P_1 e P_2 são polígonos que satisfazem o Teorema de Pick, sendo $P_1 \bigcap P_2$ um segmento de reta, então P satisfaz o Teorema.

Prova: Suponhamos que $P = P_1 \bigcup P_2$, como na Figura 25, P_1 e P_2 são polígonos que satisfazem o Teorema de Pick.

Figura 25 – $P = P_1 \bigcup P_2$



Fonte: Autoria Própria

Seja B_{P_1} e I_{P_1}, a quantidade de pontos de borda e pontos interiores, respectivamente, de P_1. E B_{P_2} e I_{P_2}, a quantidade de pontos de borda e interiores de P_2. Como P_1 e P_2 satisfazem o Teorema de Pick, temos que:

$$A_{P_1} = \frac{B_{P_1}}{2} + I_{P_1} - 1 \qquad \text{e}$$

$$A_{P_2} = \frac{B_{P_2}}{2} + I_{P_2} - 1$$

Note que:

$$A_P = A_{P_1} + A_{P_2}$$
$$A_P = \frac{B_{P_1}}{2} + I_{P_1} - 1 + \frac{B_{P_2}}{2} + I_{P_2} - 1$$
$$AP = \frac{B_{P_1} + B_{P_2}}{2} + I_{P_1} + I_{P_2} - 2 \quad (*)$$

Sendo $P_1 \bigcap P_2$ um segmento de reta, vamos considerar k sendo a quantidade de pontos em $P_1 \bigcap P_2$. Assim,

$$B_P = (B_{P_1} - k + 2) + (B_{P_2} - k) = B_{P_1} + B_{P_2} - 2k + 2 \qquad \text{e}$$

$$I_P = I_{P_1} + I_{P_2} + k - 2$$

Vamos então, verificar se P satisfaz o Teorema.

$$A_P = \frac{B_P}{2} + I_P - 1 = \frac{(B_{P_1} + B_{P_2} - 2k + 2)}{2} + (I_{P_1} + I_{P_2} + k - 2) - 1$$

Simplificando,

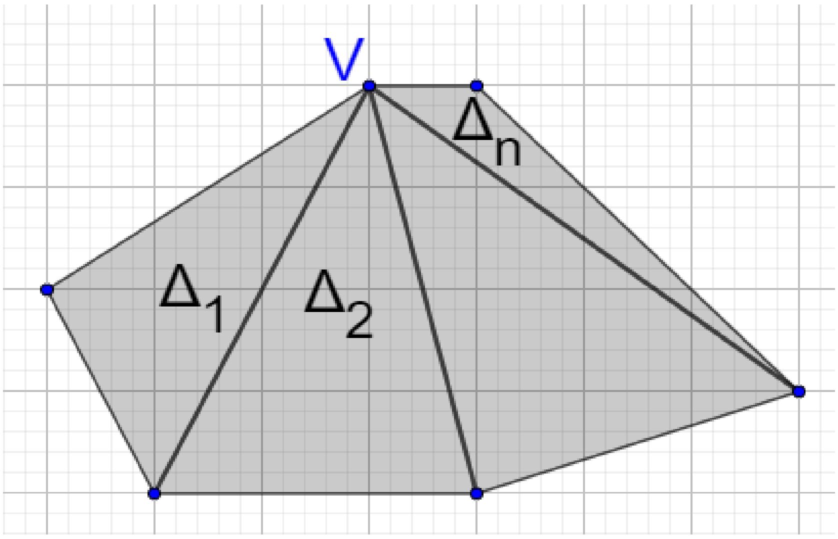
$$A_P = \frac{B_{P_1} + B_{P_2}}{2} + I_{P_1} + I_{P_2} - 2 \quad (**)$$

Ao comparar as expressões (*) e (**), podemos afirmar que P satisfaz o Teorema. Podemos generalizar este resultado quando P for escrito como a união finita de polígonos.

2º passo: Todo polígono P pode ser decomposto em n triângulos, ou seja, $P = \triangle_1 \bigcup \cdots \bigcup \triangle_n$., onde cada $\triangle_i$ é um triângulo, e existe um vértice V de P que pertence a todos os $\triangle_i$'s.

Prova: Escolhe-se um vértice V de P. Ligando V a todos os outros vértices, o polígono está decomposto em triângulos, como na Figura 26. Note que se o polígono possuir p vértices, será decomposto em $p-2$ triângulos.

Figura 26 – $P = \triangle_1 \bigcup \cdots \bigcup \triangle_n$

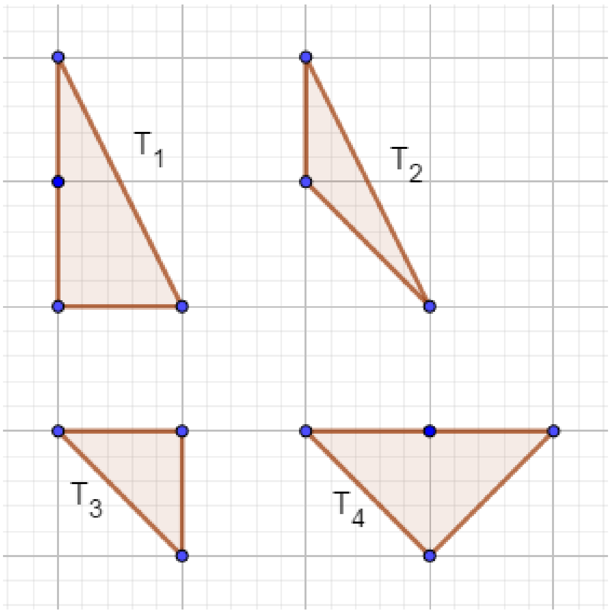


Fonte: Autoria Própria

Antes do 3º passo, precisamos conceituar triângulo fundamental.

Triângulo fundamental é um triângulo que possui exatamente três pontos de borda e nenhum ponto interior, sendo os três pontos de borda justamente os três vértices do triângulo. Na Figura 27, vemos que T_2 e T_3 são fundamentais, enquanto T_1 e T_4 não são.

Figura 27 – Triângulos fundamentais e não fundamentais

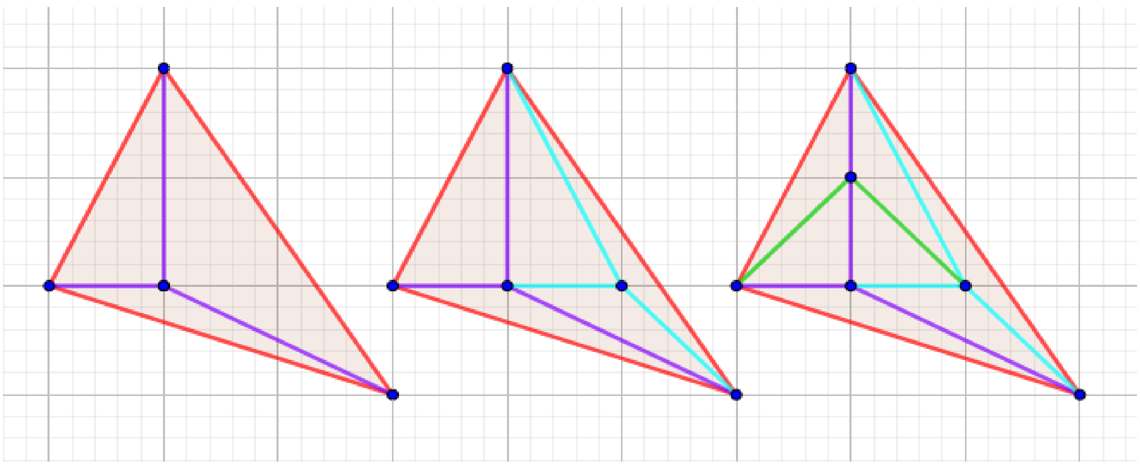


Fonte: Autoria Própria

3º passo: Cada $\triangle_i$ pode ser escrito como a união de triângulos fundamentais.

Prova: Dado um ponto interior de algum $\triangle_i$ sobre a rede de pontos, podemos ligá-lo aos 3 vértices de $\triangle_i$. Podemos repetir esse processo quantas vezes for necessário, como ilustrado na Figura 28.

Figura 28 – Decomposição de um triângulo em triângulos fundamentais



Fonte: Autoria Própria

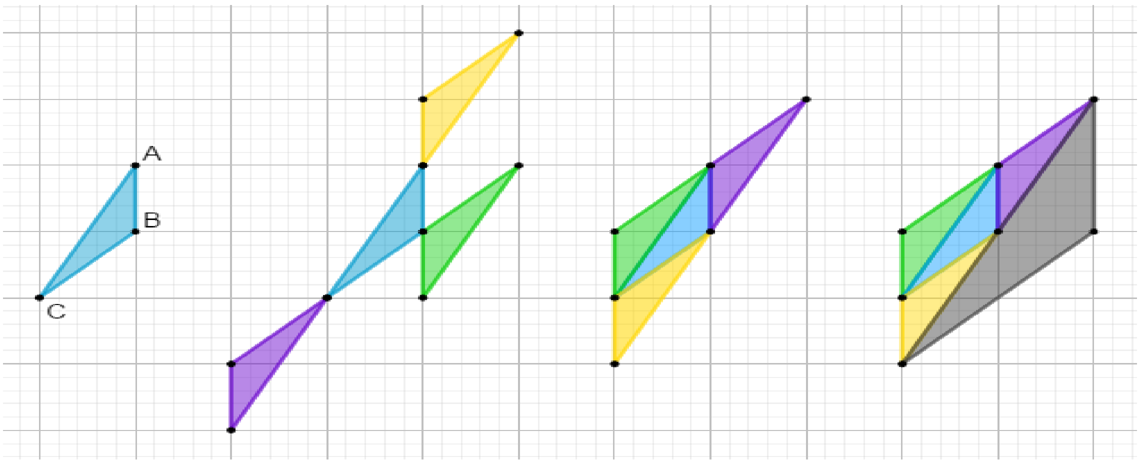
4º passo: A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

Para a prova deste passo, vamos usar o seguinte resultado:

Teorema de Minkowski: Seja $\mathcal{C}$ uma região convexa, simétrica e limitada em $\mathbb{R}^n$ com volume maior que 2^n. Então $\mathcal{C}$ contém pelo menos um ponto inteiro não nulo.

Prova do 4º passo: Consideremos o $\triangle_{ABC}$ fundamental. Inicialmente, vamos rotacionar o $\triangle_{ABC}$ por cada um de seus vértices, obtendo mais três triângulos fundamentais. Depois, vamos transladar cada um dos triângulos obtidos a fim de obter metade de um paralelogramo, e completamos o paralelogramo, conforme ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Ilustração do 4º passo



Fonte: Autoria Própria

Assim, obtemos somente um ponto sobre a rede de pontos no interior do paralelgramo.

Podemos imaginar o paralelogramo transladado, de modo que o ponto interior coincida com a origem, e temos uma região convexa (pois para dois pontos quaisquer pertencentes à região formada, o segmento que os une também pertencerá à região), limitada (pelos lados do paralelogramo (região) gerado) e simétrica (pois é uma região invariante à rotações e translações).

Como não há pontos não nulos interiores ao paralelogramo sobre a rede de pontos, concluímos, pelo *Teorema de Minkowski*, (ao fazer $n = 2$, pois se trata de uma região em $\mathbb{R}^2$) que a área do paralelogramo é menor ou igual a $2^2 = 4$ (por contradição). Como o paralelogramo é formado por 8 triângulos fundamentais, e a área é invariante por rotações e translações, e denotando a área do $\triangle ABC$ por $A_{\triangle ABC}$ temos que

$$8A_{\triangle ABC} \leq 4$$

$$A_{\triangle ABC} \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Por outro lado, sendo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, a área do $\triangle_{ABC}$ pode ser obtida como $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\text{det M}|$, onde

$$M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$$

Como as coordenadas dos vértices do $\triangle_{ABC}$ são todas inteiras, segue que $|\text{det M}| \in \mathbb{N}$, ou seja, $|\text{det M}| \geqslant 1$. Daí,

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\text{det M}| \geqslant \frac{1}{2}.1$$

$$A_{\triangle ABC} \geqslant \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Das expressões (1) e (2), temos que $\frac{1}{2} \leqslant A_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{2}$, de onde concluímos que

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$$

Para terminar a demonstração e comprovar a validez do Teorema, precisamos verificar que um triângulo fundamental o satisfaz. Num triângulo fundamental, temos 3 pontos de borda (B) e 0 pontos interiores (I). Assim,

$$A_{\text{Triângulo fundamental}} = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$$

provando assim o resultado.

Capítulo 4

A Resolução de Problemas

Neste capítulo, relata-se a forma como a Resolução de Problemas se tornou uma Metodologia de ensino e como pode ser utilizada em sala de aula.

4.1 História da Resolução de Problemas

Os currículos de matemática do século XX até meados do mesmo século não sofreram grandes alterações. Consistiam, em sua maioria, numa forma de ensino no qual os alunos apenas reproduziam o que era passado pelos professores, em exercícios de repetição, fazendo com que muitos estudantes não aprendessem, de fato, as técnicas utilizadas nas resoluções, se apegando na memorização dos procedimentos (SCHOENFELD, 1996).

Nessas condições, houve a necessidade de se fazer uma adaptação nas tendências em educação matemática, o que provocou por volta dos anos 1960, a criação do Movimento da Matemática Moderna, cujo ensino era baseado na lógica, na abstração e no formalismo. Criou-se uma grande expectativa em torno deste Movimento, por se tratar de uma revolução na forma de ensinar matemática, mas o Movimento esbarrou no despreparo dos professores em relação a esse tipo de ensino, o que junto com outros fatores, fez com que o Movimento não atingisse nenhum resultado esperado, como explica Onuchic e Allevato (2011):

> O tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

Conforme nos diz Romanatto (2012),

> Esse movimento não teve o sucesso esperado e assim continuou a busca por uma educação matemática de modo a preparar os estudantes para um mundo que exigia cada vez mais conhecimentos matemáticos. (ROMANATTO, 2012, p. 302).

A partir das décadas de 1970 e 1980, muitos pesquisadores e professores, principalmente nos Estados Unidos, concentravam seus estudos em torno de um modelo de educação matemática que fosse capaz de estimular o aprendizado do aluno, colocando-o como centro do processo educativo. Nesse ponto, a resolução de problemas surge como uma metodologia capaz de estimular o raciocínio, levando o aluno a construir seu conhecimento através da aprendizagem por descoberta (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

O Conselho Nacional de Professores de Matemática - NCTM (sigla em inglês de National Council of Teachers of Mathematics), lançou um documento no ano de 1980 intitulado *An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 1980s* (NATIONAL COUNCIIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, INC., 1980), no qual foi proposto que a Matemática a partir de então, tivesse foco na resolução de problemas, por acreditar que esta metodologia seria capaz de aliar teoria e prática, resolvendo questões que ultrapassassem as fronteiras das ciências matemáticas (ONUCHIC et al., 2014).

Com isso, muitos trabalhos vieram a divulgar a resolução de problemas e suas contribuições no processo de ensino-aprendizagem. Conforme nos diz Romanatto (2012),

> A proposta sugerida aos professores de Matemática tem característica própria, pois os problemas são tomados como desafios que possibilitam aos estudantes elaborar ou adquirir ideias e aspectos da Matemática. Essa perspectiva metodológica da resolução de problemas permite ao estudante a alegria de vencer obstáculos criados por sua curiosidade, vivenciando o "fazer matemática". (ROMANATTO, 2012, p. 302).

Na opinião das autoras Onuchic e Allevato (2011), muitos materiais foram produzidos nessa fase, como lista de atividades e problemas. O foco nessa estratégia de ensino era a aprendizagem por descoberta, sendo o aluno o principal responsável por tal.

Apesar do fato de a maioria das pesquisas acerca da resolução de problemas e seus benefícios terem sido feitas basicamente nos anos 80, George Polya (1887 – 1985) já havia feitos estudos e publicações a respeito do tema. Nascido na Hungria, Polya é considerado o pai da Resolução de Problemas, e escreveu um dos principais trabalhos da área em 1944, intitulado: A Arte de Resolver Problemas (POLYA, 2006). Nessa obra, o autor descreve quatro passos para resolver qualquer problema. São eles:

1. **Compreensão do Problema**: Inicialmente, deve-se analisar todos os dados do problema a fim de compreendê-lo. Indagações e sugestões a serem feitas: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? Trace uma figura. Adote uma notação adequada*.

2. **Estabelecimento de um Plano**: Alinhar todos os dados a fim de encontrar um plano de resolução. Indagações e sugestões a serem feitas: *Conhece um problema correlato? Considere a incógnita! Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar*

possível a execução do plano? Utilizou todos os dados? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

3. **Execução do Plano**: Colocar em prática e executar o plano estabelecido na fase anterior. Indagações e sugestões a serem feitas: *Verifique cada passo! É possível ver claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?*

4. **Retrospecto**: Examinar a solução encontrada. Sugestões e indagações a serem feitas: *É possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

Durante a resolução de um problema, Polya (2006) descreve qual deve ser o posicionamento do professor diante dos seus alunos. Sugere que atue como mediador, compreendendo o entendimento e o raciocínio dos estudantes, fazendo intervenções para lhes mostrar o melhor caminho para se chegar a uma resposta correta. O autor diz que

> Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, *sem dar na vista*.
>
> O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante*. (POLYA, 2006, p. 1).

Sobre Polya, Onuchic et al. (2014) nos diz que

> Sua preocupação estava voltada para a melhoria das habilidades da resolução de problemas pelos estudantes e, para que isso ocorresse, era preciso que os professores se tornassem bons resolvedores de problemas e que estivessem interessados em fazer de seus estudantes também bons resolvedores. (ONUCHIC et al., 2014, p. 23).

As quatro fases devem ser seguidas como um roteiro. Cita ainda a possibilidade de ocorrer ao aluno uma ideia que lhe seja suficiente resolver o problema saltando as etapas, mas que pode ser algo desastroso, se ele não compreender o problema. Ressalta a importância da última fase: o retrospecto, pois, segundo ele, muitos detalhes podem se perder, se o aluno não examinar toda a solução.

Segundo os autores Souza, Pizzol e Gaudio (2018), os quatro passos sugeridos por Polya servem de base para a resolução de qualquer problema matemático, seja ele de Geometria ou Regra de Três, ao seguir o roteiro, pode-se chegar ao resultado, inclusive nos problemas não matemáticos.

Polya diz que todas as indagações e os passos que ele sugere são simples e que ocorrem de forma natural, e sua lista é uma ordenação desses passos e sugestões, afirmando que

> Elas indicam uma certa conduta que se apresenta naturalmente a qualquer um que esteja realmente interessado em seu problema e tenha alguma dose de bom senso. Mas aquele que procede de maneira certa geralmente não se preocupa em exprimir o seu procedimento em termos claros, ou possivelmente é incapaz de fazê-lo. A nossa lista procura assim expressar tal fato. (POLYA, 2006, p. 3).

O trabalho desenvolvido por George Polya inspirou muitos outros trabalhos na área, principalmente nas contribuições que a Resolução de Problemas poderia ter dentro da Educação Matemática. Com isso, durante os anos 70, surgia pesquisas acerca da utilização da Resolução de Problemas dentro dos currículos de Matemática, visto que nesse período, se buscava uma forma de contornar o fracasso deixado por movimentos, como o Movimento da Matemática Moderna, que insistiam em currículos de Matemática voltados a excessivas preocupações com o rigor de demonstrações, baseados em estruturas lógicas, que enfatiza a teoria dos conjuntos. O ensino nessa época, era então, voltado para demonstrações com linguagens complexas, distante de situações práticas e reais (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Sobre o início das pesquisas em torno da Resolução de Problemas, Allevato e Onuchic (2009) afirmam que

> A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessa década é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática em termos de resolução de problemas reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam enfatizando a memorização de um conjunto de fatos, o domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 136).

Confrme Onuchic et al. (2014) eventos durante a década de 1970 enfatizavam a importância da adoção da Resolução de Problemas como estratégia de ensino nas escolas, como o “Segundo Congresso Internacional de Educação Matemática” (II-ICME), realizado na Inglaterra em 1972 e o primeiro “Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática”, na Universidade da Georgia, em 1976. Com a contribuição de diversos pesquisadores, esses eventos mostram que a Resolução de Problemas ganhava cada vez mais força no cenário mundial.

Na busca de um currículo escolar alinhado com as novas tendências em Educação Matemática, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino ganha o apoio de pesquisadores que se empenhavam em uma melhor forma de se ensinar Matemática, e principalmente, de se aprender Matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Apesar dos diversos trabalhos publicados, Onuchic e Allevato (2011) dizem que não houve clareza na forma de utilizar a Resolução de Problemas em sala de aula, não havendo concordância em como explorar esta metodologia para se atingir resultados. Onuchic (1999) explica que essa divergência de opiniões se deu pelas diferentes ideias que se tinham na abordagem da Resolução de Problemas em sala de aula e em como a usar como o foco do ensino de Matemática, sendo essa a proposta do NCTM (1980) com o *An Agenda for Action* (NATIONAL COUNCIIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, INC., 1980).

Segundo Schroeder e Lester (1989), há três diferentes formas de se abordar a Resolução de Problemas em sala de aula: (1) ensinar *sobre* resolução de problemas; (2) ensinar matemática *para* resolver problemas; e (3) ensinar matemática *através* da resolução de problemas.

A primeira abordagem consiste na aplicação do método de Polya, ou de suas variações, preocupando-se em propor estratégias na Resolução de Problemas. Na segunda abordagem, prioriza-se a Matemática e como ela pode ser útil para se resolver problemas do cotidiano. Aqui, o professor deveria trabalhar o conteúdo com os alunos, e depois usá-lo na Resolução de Problemas. Os alunos são avaliados de acordo com a capacidade de usar a Matemática nos problemas. No terceiro tópico, ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, o foco é no aluno e em como ele irá construir conhecimento. Nessa abordagem, o professor inicia a aula com um problema, e os alunos, usando conhecimentos já adquiridos anteriormente, discutem a resolução do mesmo, e após, o professor faz a formalização do conteúdo.

4.2 A Resolução de Problemas como Metodologia

O NCTM seguiu publicando trabalhos relevantes para a Educação Matemática, dentre eles Onuchic et al. (2014) citam as obras: Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar em 1995, e Princípios e Padrões para a Matemática Escolar, em 2000. Este último, ficou conhecido como os Standards 2000 e trazia todo o trabalho feito pelo NCTM ao longo dos anos anteriores. “Esses documentos desempenharam, inclusive, um papel importantíssimo na implantação, sistematização e divulgação da RP no currículo escolar americano, com reflexos em currículos do mundo inteiro.” (ONUCHIC et al., 2014, p. 31).

Para Onuchic e Allevato (2011), foi a partir dos Standards que professores e pesquisadores passaram a pensar no ensino de Matemática através da Resolução de Problemas como metodologia para sala de aula.

Segundo Onuchic (2013), os Standars 2000 sugeriram profundas mudanças no processo de ensino-aprendizagem de Matemática e sob a influência dos Standards, foram criados no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

- PCNs - Matemática - 1º e 2º ciclos - 1ª a 4ª séries - 1997;
- PCNs - Matemática - 3º e 4º ciclos - 5ª a 8ª séries - 1998;
- PCNs - Matemática - ensino médio – 1999;

- PCNs - Matemática - ensino médio - orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – 2002;
- Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – 2006.

Os PCN sugerem que a Resolução de Problemas seja o ponto de partida para a atividade matemática ao afirmar que: "Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução." (BRASIL, 1998, p. 40).

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), a utilização da Resolução de Problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem, se resume aos seguintes princípios:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 40 - 41).

Sobre o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic et al. (2014) afirmam que essa é uma abordagem mais atual, e acreditam ser essa uma metodologia adequada ao cenário em que se encontram as escolas.

Vinch e Bergamin (2014) defendem o uso da Resolução de Problemas, ao afirmar que

> Essa, como estratégia didática para o ensino da matemática, desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, estimula a curiosidade, desperta o espírito explorador e prepara o aluno para lidar com situações novas em seu dia a dia, sendo motivado a pensar, conhecer, ousar e solucionar

> problemas matemáticos dentro e fora da escola. (VINCH; BERGAMIN, 2014, p. 62).

Considera-se nesse trabalho, a metodologia de ensino da Matemática através da Resolução de Problemas, por acreditar que nessa abordagem, o aluno é o construtor do seu conhecimento, sendo o problema, o meio pelo qual ele se comunica com a Matemática, onde o professor é o responsável por guiá-lo até a efetivação do conteúdo estudado em questão.

Sobre esta metodologia, Zuffi e Onuchic (2007) afirmam que

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar"ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir. (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 83).

Também nessa perspectiva Onuchic e Allevato (2011) afirmam que o problema deve ser o ponto de partida, e através dele, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e conteúdos e definem problema como "[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.81).

Onuchic et al. (2014) chamam o problema de problema gerador, pois é através dele que os alunos irão construir um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento, afirmando que o conteúdo matemático necessário para a resolução ainda não foi trabalhado com os alunos.

De acordo com as autoras supracitadas, durante a resolução de um problema em sala, as atividades devem ser organizadas em 10 etapas:

1. **Proposição do problema**: O professor escolhe ou desenvolve um problema que vise a construção do conteúdo que se pretende naquela aula.

2. **Leitura individual**: Após receber o problema impresso, cada aluno faz sua leitura do problema, na qual poderá entrar em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua interpretação (compreensão) do problema.

3. **Leitura em conjunto**: Após a leitura individual, são formados pequenos grupos, onde os alunos leem novamente o problema e o discutem. O professor atua nesse momento, auxiliando os alunos na compreensão do problema, mas as ações são realizadas pelos alunos.

4. **Resolução do problema**: Nessa etapa, os alunos resolvem o problema gerador utilizando a linguagem matemática e outros recursos, se necessário, como: linguagem escrita, gráficos, imagens, etc.

5. **Observar e incentivar**: O professor deve estimular a troca de ideias, incentivando-os a usar conhecimentos prévios, que são conhecimentos já adquiridos em momentos anteriores, além de auxiliá-los em suas dificuldades, mas sem fornecer respostas, de modo que os alunos sejam os responsáveis por suas resoluções.

6. **Registro das resoluções na lousa**: Depois de terem as resoluções, um integrante de cada grupo se dirige à lousa, onde registra a solução do seu grupo, independente da resposta, seja ela correta ou não.

7. **Plenária**: Nessa etapa, alunos e professor discutem juntos as soluções registradas na etapa anterior. Os alunos devem defender suas ideias e pontos de vista e avaliar suas próprias resoluções.

8. **Busca do consenso**: Novamente em conjunto, alunos e professor discutem as soluções apresentadas, a fim de se chegar em um consenso. Momento oportuno para aperfeiçoar leitura e escrita matemática, fundamentais na construção do conhecimento.

9. **Formalização do conteúdo**: Neste momento, o professor na lousa, redige uma resolução correta, formal, utilizando linguagem matemática adequada e estruturada, onde os conceitos e procedimentos construídos através da resolução do problema, são padronizados. Deve ainda, destacar as diferentes técnicas operatórias e se necessário, construir demonstrações.

10. **Proposição e resolução de novos problemas**: Após a formalização do conteúdo, o professor propõe novos problemas a fim de analisar se os conceitos introduzidos através do problema gerador foram compreendidos pelos estudantes, além disso, esses novos problemas serão úteis na aplicação do conteúdo estudado em exercícios práticos e situações matemáticas.

Onuchic et al. (2014) adotam a nomenclatura Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas por acreditarem que esses três tópicos ocorrem simultaneamente dentro das situações em sala de aula durante a construção do conhecimento pelo aluno, onde o professor atua como mediador. “A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema.” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 142).

Reunindo opiniões de outros autores, Onuchic e Allevato (2011) elencam algumas das contribuições desta Metodologia:

- Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
- Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
- Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
- Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
- Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Capítulo 5

Metodologia

Neste capítulo, será descrito o formato da pesquisa e os sujeitos envolvidos nela. Serão também apresentados os problemas elaborados para a aplicação da pesquisa.

Durante a execução das atividades, os alunos irão se deparar com problemas puramente algébricos e outros empregados em situações do dia a dia. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, um problema é definido como:

> [· · ·] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. (BRASIL, 1998, p. 41).

Comumente, um problema matemático é tido como um exercício que possui alguma aplicação no cotidiano das pessoas, e principalmente, dos alunos. Recorrendo novamente aos Parâmetros Curriculares Nacionais, vê-se a importância de se trabalhar problemas puramente algébricos, a fim de garantir a consolidação do conteúdo, quando afirma que:

> Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p. 23).

5.1 Caracterização da Pesquisa

Este trabalho tem como problema de investigação: **Como a Metodologia EAARP adaptada ao Ensino Remoto pode contribuir para o estudo de Áreas de Figuras Planas de forma significativa?** Com o objetivo de responder esta pergunta, será feita uma pesquisa qualitativa, baseada no estudo de caso.

Na pesquisa qualitativa, o processo é mais importante que o produto (LUDKE; ANDRÉ, 2011). Busca-se então, analisar as diferentes percepções dos indivíduos envolvidos no processo. O foco é interpretar as dificuldades apresentadas pelos alunos e atuar de forma a superar essas dificuldades.

O estudo de caso é uma abordagem específica da pesquisa qualitativa. No estudo de caso, as ações ocorrem no intuito de responder perguntas do tipo “como?” e “por quê?” (GODOY, 1995).

Bicudo (1993) afirma que pesquisar é compreender e interpretar de forma significativa os dados obtidos a partir de uma interrogação. Movidos pelo problema de investigação, e a fim de respondê-lo, será aplicada uma sequência didática, em um grupo de alunos matriculados no 8º ano do Ensino Fundamental, na qual serão levados a construir o conhecimento acerca de Áreas de Figuras Planas, através da Resolução de Problemas, seguindo as etapas: (i) preparação das atividades; (ii) aplicação das atividades; (iii) análise dos dados (resultados obtidos). Para a etapa (iii), os dados foram coletados através das respostas desenvolvidas pelos alunos nos problemas e no questionário de percepção, além de observações feitas pelo professor-pesquisador.

> A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar. É um elemento básico de investigação científica [...] A observação ajuda o pesquisador a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento. (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 190-191).

5.2 Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa será feita com 13 alunos de uma turma de 8º ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Jerônimo Monteiro”, localizada no município de Jerônimo Monteiro – ES, mediante Autorização da direção da escola, vista no Apêndice A.

A escola (Figura 30) possui uma infraestrutura regular e oferece à comunidade o Ensino Fundamental Anos Iniciais, Ensino Fundamental Anos Finais, Ensino Médio, Ensino Médio Integrado ao Técnico em Informática e Educação de Jovens e Adultos, funcionando nos turnos matutino, vespertino e noturno. Possui um laboratório móvel de informática, com 40 *Chromebooks* em funcionamento, biblioteca, laboratório de Ciências, quadra poliesportiva, auditório e amplo espaço de lazer. No ano de 2020, a escola possui 1030 alunos matriculados, no total.

Figura 30 – EEEFM Jerônimo Monteiro

Fonte: Foto tirada pelo autor

A aplicação da pesquisa se dará com a turma 8º M01. A escolha da turma e da escola se deu pelo fato de o pesquisador trabalhar como professor de Matemática nessa escola e nessa turma desde 2019.

A turma escolhida possui 32 alunos, sendo 16 meninos e 16 meninas. No geral, a turma apresenta bons resultados em avaliações. Os alunos são participativos, demonstrando interesse nas aulas. As famílias (maioria) são presentes e atuantes. Na turma, há alunos da zona urbana e alunos da zona rural.

A escola está com as atividades presenciais suspensas, desde 20 de março de 2020, devido à pandemia do novo coronavírus, conforme Decretos e Portarias Estaduais. A Figura 31 mostra o decreto estadual mantendo a suspensão das atividades presenciais durante o mês de setembro.

Figura 31 – Decreto Estadual

Governadoria do Estado

Decretos

DECRETO Nº 4721-R, DE 29 DE AGOSTO DE 2020.

Altera os Decretos nº 4.601-R, de 18 de março de 2020, nº 4.629-R, de 15 de abril de 2020, e nº 4.636-R, de 19 de abril de 2020, e dá outras providências.

O **GOVERNADOR DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO,** no exercício das atribuições legais e constitucionais,
Considerando que a saúde é direito de todos e dever do Estado, garantido mediante políticas sociais e econômicas que visem à redução do risco de doença e de outros agravos e ao acesso universal e igualitário às ações e serviços para sua promoção, proteção e recuperação, na forma do art. 196 da Constituição da República;
Considerando a Declaração de Emergência em Saúde Pública de Importância Internacional pela Organização Mundial da Saúde em 30 de janeiro de 2020, em decorrência da Infecção Humana pelo novo coronavírus (COVID-19);
Considerando a Portaria nº 188/ GM/MS, de 3 de fevereiro de 2020, que Declara Emergência em Saúde Pública de Importância Nacional - ESPIN, em decorrência da Infecção Humana pelo novo coronavírus (COVID-19);
Considerando a necessidade de adoção de ações coordenadas para enfrentamento da Emergência em Saúde Pública de Importância Estadual e Internacional, decorrente do novo coronavírus (COVID-19);
Considerando o Decreto Nº 4.593-R, de 13 de março de 2020, que dispõe sobre o estado de emergência em saúde pública no Estado do Espírito Santo e estabelece medidas sanitárias e administrativas para prevenção, controle e contenção de riscos, danos e agravos decorrentes do surto de novo coronavírus (COVID-19) e dá outras providências,

DECRETA:

~~Art. 1º Fica prorrogada até o dia 13 de setembro de 2020 a suspensão~~

~~adequar às orientações da SESA para unidades administrativas que realizam atendimento ao público e manuseio de processos, para viabilizar o retorno dos servidores abrangidos pelo **caput** deste artigo às atividades presenciais em 14 de setembro de 2020.~~
~~§ 4º Fica facultada aos gestores a antecipação do retorno dos servidores abrangidos pelo **caput** deste artigo às atividades presenciais, desde que suas setoriais se encontrem adequadas aos termos do § 3º deste artigo.”~~
(NR)

Art. 4º O art. 9º do Decreto nº 4.636-R, de 19 de abril de 2020, passa a vigorar com a seguinte redação:
~~“Art. 9º (...)~~
~~(...)~~
~~§ 1º Fica mantida a suspensão da realização de eventos e atividades com a presença de público, tais como eventos desportivos, comemorativos, shows, feiras, comícios, passeatas e afins enquanto durar o Estado de Emergência em Saúde Pública em decorrência da Pandemia do novo coronavírus (COVID 19), ainda que previamente autorizadas, independentemente do quantitativo de pessoas, exceto nas hipóteses do inciso II do § 3º deste artigo e para eventos corporativos, acadêmicos, técnicos e científicos, tais como congresso, simpósio, conferência, palestra, assembleia, workshop e seminário, que poderão funcionar conforme requisitos estabelecidos em portaria da SESA.~~
~~(...)~~
§ 3º (...)
I - das aulas presenciais em todas as escolas da educação infantil, ensino fundamental e ensino médio, inclusive educação profissional técnica de nível médio, das redes de ensino pública e privada, até o dia 30 de setembro de 2020;
~~I-A - das aulas presenciais em todas universidades e faculdades, inclusive estabelecimentos destinados a pós graduação, da rede pública e privada, até o dia 13 de setembro de 2020, exceto as atividades práticas obrigatórias e o estágio curricular dos cursos do ensino superior e de pós graduação **lato sensu** e **stricto sensu** da área de saúde e para concludentes, do último ano ou semestre, a depender do regime do curso, se anual ou semestral, de todos os cursos do ensino superior e de pós-graduação **lato sensu** e **stricto sensu**.~~
~~II - das atividades de cinemas, teatros, boates, casas de shows e afins, até dia 30 de setembro de 2020, exceto cinemas, espetáculos teatrais, shows e outras apresentações culturais no formato **drive in** e teatros~~

Fonte: Diário Oficial do Estado do Espírito Santo

Com a suspensão das aulas, a Secretaria Estadual de Educação (SEDU-ES) passou a trabalhar as APNP’s (Atividades Pedagógicas Não Presenciais). Nesse contexto, os alunos recebem videoaulas e exercícios por aplicativos de celular. Os alunos sem condições de acesso a internet, recebem atividades impressas na escola, de forma presencial.

Com a pandemia, foi criado um grupo no aplicativo de mensagens *WhatsApp*, onde é mantido o contato entre professores e alunos. Porém, nem todos os alunos possuem celular, ou acesso a internet. Portanto, para a aplicação desta pesquisa, foi selecionado um grupo específico de alunos da turma, tendo como critério de seleção, as condições de acesso à internet, sendo 8 meninas e 5 meninos, todos moradores da zona urbana do município.

Inicialmente, foi realizado no dia 02/09 um encontro pelo *Google Meet* (vinculado ao *G Suite for Education*) com os alunos selecionados para a pesquisa, com o objetivo de explicar como seria a aplicação das atividades. Repletos de dúvidas e curiosidades, eles se mostraram animados e dispostos em participar da pesquisa.

O *Google Meet* é um dos serviços gratuitos da empresa Google, usado para reuniões, aulas e encontros através de videochamadas, permite a participação de até 250 pessoas ao mesmo tempo. Com o isolamento imposto pela pandemia, vem sendo muito utilizado por escolas e empresas.

Após elaborar as atividades, o professor pesquisador disponibilizou-as impressas na escola para que os alunos as buscassem, seguindo todas as recomendações de proteção à saúde, dadas pela OMS. Junto com as atividades, foi enviada às famílias uma autorização (Apêndice B), para que assinassem permitindo a participação dos alunos na pesquisa.

5.3 Elaboração das Atividades

A sequência didática foi elaborada de acordo com a proposta de Onuchic et al. (2014). Os problemas (Apêndice C) visam à construção do conhecimento do conteúdo de Áreas de Figuras Planas pelos alunos. No modelo de ensino tradicional, o professor mostra as fórmulas para os alunos através de uma aula expositiva, resolve alguns exemplos e passa exercícios. Estes exercícios não passam de mera repetição dos exemplos resolvidos pelo professor. Com isso, os alunos aprendem a calcular áreas a partir de repetições, não tendo uma consolidação do conteúdo. Espera-se nessa sequência didática, que os alunos entendam o "porquê" das fórmulas, e que possam aplicá-las em situações do cotidiano, ou em problemas matemáticos. Após construir e aplicar as fórmulas para o cálculo de áreas de quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos, trapézios e losangos, eles serão levados a conhecer o Teorema de Pick, que consiste numa fórmula única para o cálculo de áreas de qualquer polígono simples, desde que esteja desenhado numa malha quadriculada.

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido. (PERETTI; COSTA, 2013, p. 7).

O conteúdo de áreas de figuras planas está previsto no Currículo do estado de Espírito Santo (ESPÍRITO SANTO, 2020) para o 8º ano do Ensino Fundamental, conforme Figura 32.

Figura 32 – Áreas de Figuras Planas no Currículo do 8º ano

CURRÍCULO DO Espírito Santo

Matemática – 8º Ano do Ensino Fundamental (Continuação)

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Código da Habilidade	Habilidade
Grandezas e medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	EF08MA19	Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: ESPÍRITO SANTO (2020, p. 178)

Como será trabalhado o Teorema de Pick como alternativa no cálculo de áreas, não serão propostos neste trabalho, problemas envolvendo Círculos, uma vez que o Teorema não se aplica nestes casos.

Estão apresentados nas subseções a seguir os problemas elaborados, separados por encontros.

5.3.1 1º Encontro: Problema 1

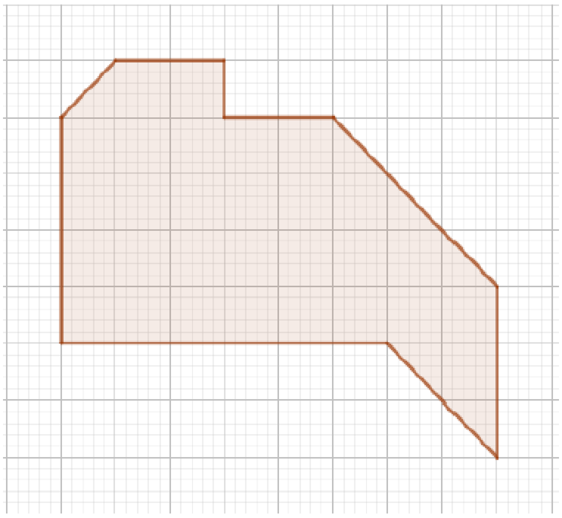
A sequência didática irá proporcionar aos estudantes a possibilidade de construir todo o conteúdo de Áreas de Figuras Planas, iniciando pelo cálculo de áreas a partir da contagem de unidades de área, passando pelas fórmulas usuais para cálculo de áreas de quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos, trapézios e losangos, chegando por fim, no Teorema de Pick, que consiste na utilização de uma fórmula única.

Portanto, o problema proposto (Figura 33) para o 1º encontro, tem por objetivos:

- Dar a noção intuitiva de área;
- Exercer o cálculo de áreas a partir da contagem de unidades de área;
- Reconhecer que a área de uma figura depende da unidade de medida de área estabelecida.

Figura 33 – Problema 1

Problema 1: Observe o polígono abaixo, desenhado numa malha quadriculada.



a) Considerando um quadradinho da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?
b) Se cada quadradinho possuir 1 cm² de área, qual é a área da figura?
c) Se cada quadradinho possuir 2 cm² de área, qual é a área da figura?
d) Considerando dois quadradinhos da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?
e) Se cada unidade de medida do item anterior possuir 5 cm², qual é a área da figura?
f) Se aumentarmos a unidade de medida, o que acontece com a medida da área da figura? Justifique.

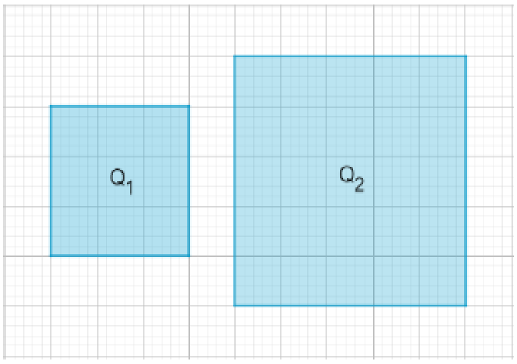
Fonte: Autoria Própria

5.3.2 2º Encontro: Problemas 2, 3 e 4

Após trabalhar a noção intuitiva de área, serão propostos três problemas (Figuras 34, 35 e 36), que têm por objetivos, fazer com que os alunos possam construir as fórmulas usadas para cálculo de áreas de quadrados, retângulos e triângulos, através de observações.

Figura 34 – Problema 2

Problema 2: Na malha onde estão desenhados os quadrados abaixo, cada quadradinho unitário possui 1 cm em cada lado.



a) Complete a tabela:

	Medida do lado	Medida da área
Q_1		
Q_2		

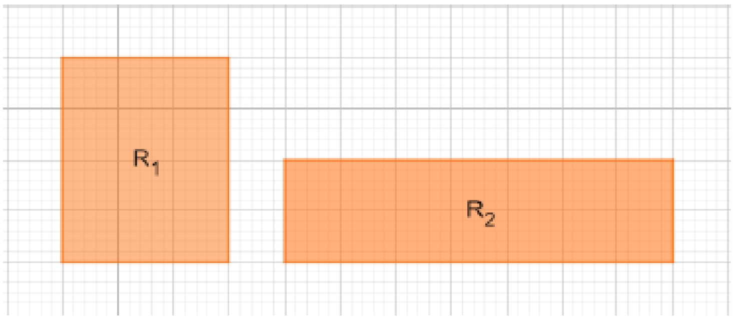
b) Em cada quadrado, que relação pode ser observada entre a medida de seu lado e sua área?

c) Se um quadrado possuir lado medindo ℓ cm, qual será sua área?

Fonte: Autoria Própria

Figura 35 – Problema 3

Problema 3: Cada quadradinho unitário da malha abaixo possui 1 cm em cada lado.



a) Observando os retângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
R_1			
R_2			

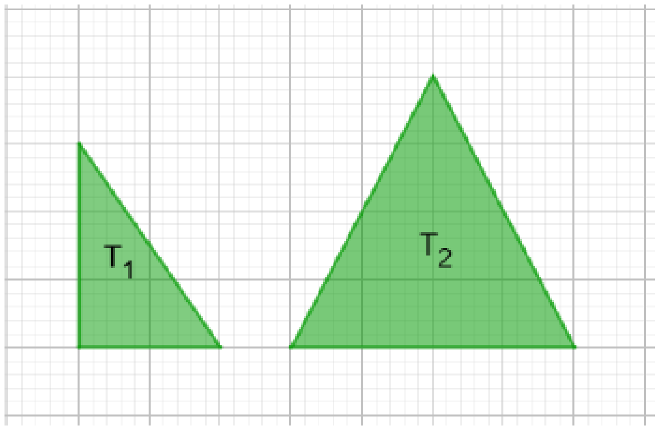
b) Em cada retângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

c) Se um retângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

Fonte: Autoria Própria

Figura 36 – Problema 4

Problema 4: Considere também que cada quadradinho unitário da malha possui 1 cm de cada lado.



a) Observando os triângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
T_1			
T_2			

b) Em cada triângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

c) Se um triângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

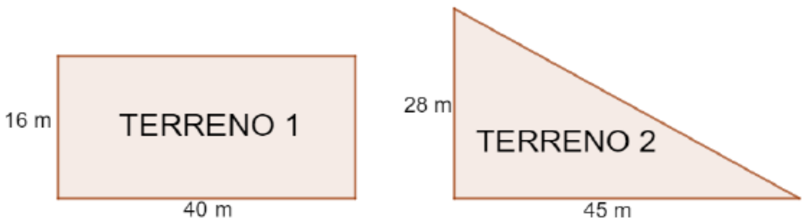
Fonte: Autoria Própria

5.3.3 3º Encontro: Problemas 5 e 6

Serão aqui oferecidos dois problemas (Figuras 37 e 38) para que os alunos apliquem as fórmulas obtidas na aula anterior em situações-problema, para que percebam que o conteúdo de áreas de Figuras Planas está presente no nosso cotidiano. Trabalhando com aplicações do cotidiano, os alunos tendem a ter mais motivação e avaliar a matemática de forma positiva.

Figura 37 – Problema 5

Problema 5: Ronaldo é um agricultor do município de Jerônimo Monteiro e pretende comprar um terreno para iniciar uma pequena plantação de laranja. Ele encontrou dois terrenos, com as medidas e formas indicadas abaixo.



Se os dois terrenos forem vendidos por um mesmo preço, qual terreno é mais vantajoso para Ronaldo?

Fonte: Autoria Própria

Figura 38 – Problema 6

Problema 6: Sandra quer comprar um tapete quadrado para a sala de sua casa que possui 3,5 m em cada lado. Cada metro quadrado do tapete é vendido por R$ 14,00. Quantos reais, Sandra irá gastar para comprar o tapete?

Fonte: Autoria Própria

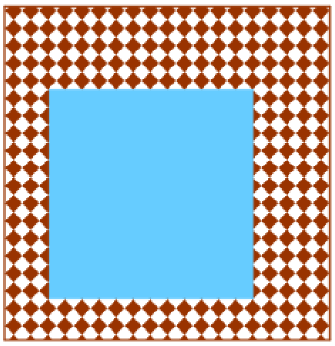
5.3.4 4º Encontro: Problemas 7 e 8

Serão dados dois problemas (Figuras 39 e 40), nos quais os alunos serão levados a:

- Compor e/ou decompor uma figura em duas ou mais partes (figuras) e
- Calcular área de uma figura através da soma ou da diferença entre áreas de figuras que a compõem.

Figura 39 – Problema 7

Problema 7: O quintal da casa de Camila tem o formato de um quadrado com 17 m em cada lado. Ela pretende construir uma piscina, também quadrada, com 11 m em cada lado e, em seguida, colocar piso em toda área restante.



Camila escolheu um piso que é vendido em caixas, sendo que:

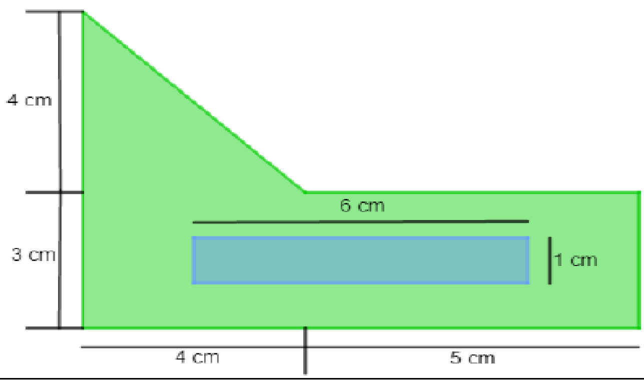
- Cada caixa cobre 2 m²;
- Cada caixa custa R$ 45,00.

PERGUNTA: Quantos reais Camila irá gastar na compra do piso?

Fonte: Autoria Própria

Figura 40 – Problema 8

Problema 8: Qual é a área verde da figura?



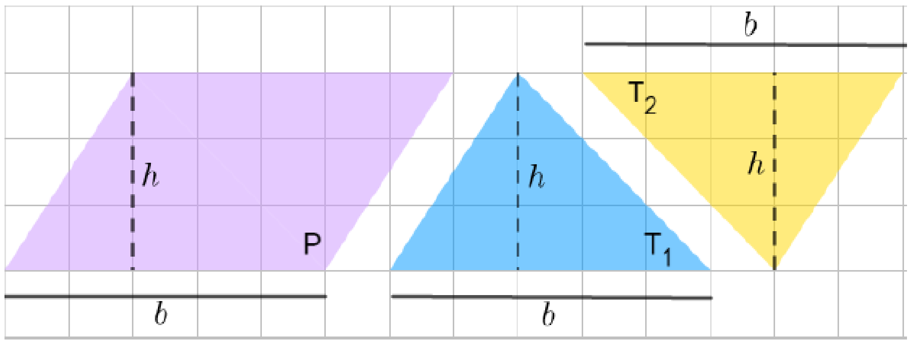
Fonte: Autoria Própria

5.3.5 5º Encontro: Problemas 9, 10 e 11

Nesse momento, os alunos irão utilizar todos os conhecimentos já adquiridos nas aulas anteriores para construir as fórmulas para o cálculo de áreas de paralelogramos (Figura 41), trapézios (Figura 42) e losangos (Figura 43), através das fórmulas já conhecidas e da decomposição de figuras, se baseando em observações, nos três próximos problemas.

Figura 41 – Problema 9

Problema 9: O paralelogramo P da figura abaixo possui base medindo *b* e altura medindo *h*, e pode ser decomposto em dois triângulos: T_1 e T_2, que possuem também base *b* e altura *h*.

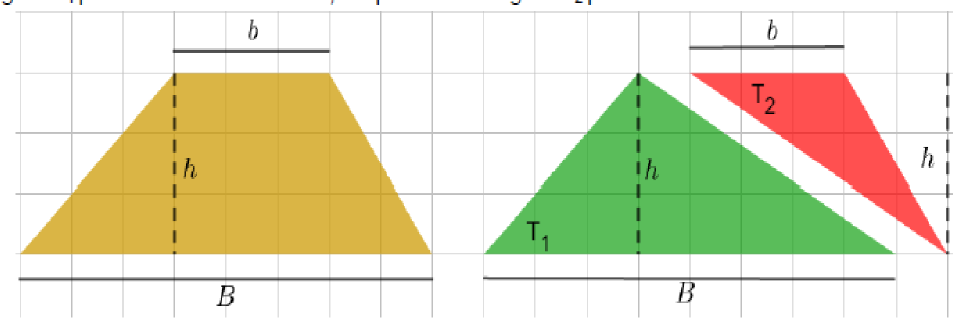


a) Qual é a área do triângulo T_1?
b) Qual é a área do triângulo T_2?
c) Qual é a área do paralelogramo?
d) Qual a relação entre as áreas de um retângulo e um paralelogramo, se tiverem mesmas medidas nas bases e alturas?

Fonte: Autoria Própria

Figura 42 – Problema 10

Problema 10: O trapézio na figura abaixo possui base <u>maior</u> medindo *B*, base menor medindo *b* e altura *h*, e foi decomposto em dois triângulos: T_1 e T_2.
O triângulo T_1 possui base *B* e altura *h*, enquanto o triângulo T_2 possui base *b* e altura *h*.



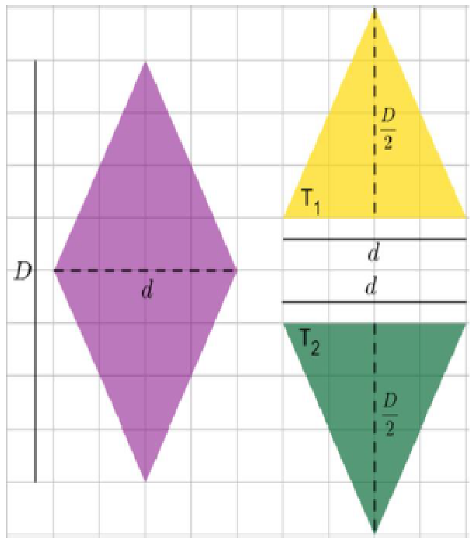
a) Qual é a área do triângulo T_1?
b) Qual é a área do triângulo T_2?
c) Qual é a área do trapézio?

Fonte: Autoria Própria

Figura 43 – Problema 11

Problema 11: O losango na figura abaixo possui diagonal maior medindo D e diagonal menor medindo d, e foi decomposto em dois triângulos congruentes: T_1 e T_2. Os triângulos possuem base medindo d e altura medindo $\frac{D}{2}$.

a) Qual é a área do triângulo T_1?
b) Qual é a área do triângulo T_2?
c) Qual é a área do losango?



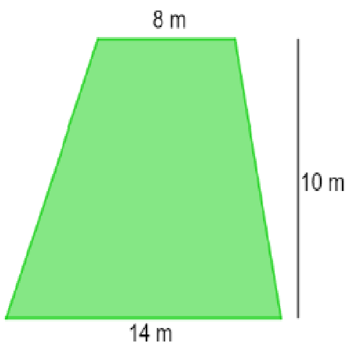
Fonte: Autoria Própria

5.3.6 6º Encontro: Problemas 12, 13 e 14

Aqui, serão propostos três exercícios (Figuras 44, 45 e 46) com aplicações em situações-problema, a fim de que o aluno perceba a importância do conteúdo, e coloque em prática as fórmulas da aula anterior.

Figura 44 – Problema 12

Problema 12: Um jardim no formato de trapézio com as medidas indicadas na figura, será todo gramado pela prefeitura da cidade.



Sabe-se que:

- 1 kg de semente é suficiente para gramar 8 m²;
- Cada kg de semente custa R$ 26,30;
- A loja só vende embalagens de 1 kg.

PERGUNTA: Quanto a prefeitura irá gastar na compra das sementes?

Fonte: Autoria Própria

Figura 45 – Problema 13

Problema 13: Pedrinho quer construir uma pipa em forma de losango de tal forma que as varetas meçam 45 cm e 30 cm. Quantos centímetros quadrados de papel seda, Pedrinho irá gastar?

Fonte: Autoria Própria

Figura 46 – Problema 14

Problema 14: Uma sala retangular que mede 6 m de comprimento e 4 m de largura será toda ladrilhada com peças em formato de paralelogramo. Cada peça possui 12 cm de base e 8 cm de altura. Quantas peças serão necessárias para preencher toda a sala?

Fonte: Autoria Própria

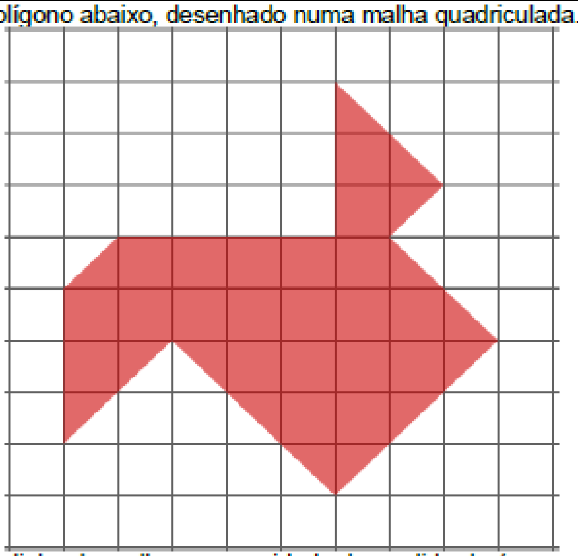
5.3.7 7º Encontro: Problema 15

No 7º encontro, os alunos conhecerão o Teorema de Pick. Para tanto, será proposto um problema, no qual serão levados a comparar a área de uma figura resolvida de duas formas: através da contagem de unidades de área e pela contagem de pontos de borda e pontos interiores. Espera-se que o resultado obtido seja o mesmo.

Antes de propor o problema (visto na Figura 47), serão trabalhados os conceitos de pontos de borda e interiores, como pré-requisitos para a realização do problema.

Figura 47 – Problema 15

Problema 15: Observe o polígono abaixo, desenhado numa malha quadriculada.



a) Considerando um quadradinho da malha como unidade de medida de área, qual é a área da figura?
b) Denotando a quantidade de pontos de borda por B, qual é o valor de B?
c) Denotando a quantidade de pontos interiores por I, qual é o valor de I?
d) Calcule o valor da expressão abaixo, substituindo B e I pelos valores encontrados nos itens (b) e (c).

$$\frac{B}{2} + I - 1$$

e) Compare o resultado do item (a) com o item (d). O que você concluiu?

Fonte: Autoria Própria

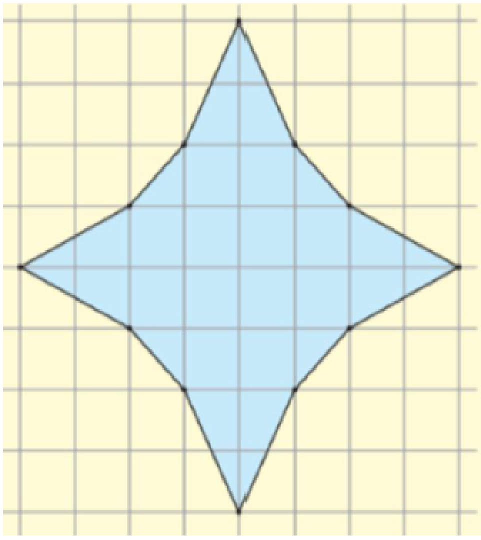
5.3.8 8º Encontro: Problemas 16 e 17

Aqui, serão apresentadas duas questões da OBMEP (Figura 48 e 49), tendo como objetivo, aplicar o Teorema de Pick em problemas que envolvam o cálculo de área. Espera-se que os alunos percebam a facilidade em usar este Teorema, e sua utilidade.

Figura 48 – Problema 16

Problema 16: [OBMEP – 2016 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – QUESTÃO 2] A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

A) 12
B) 22
C) 32
D) 64
E) 100

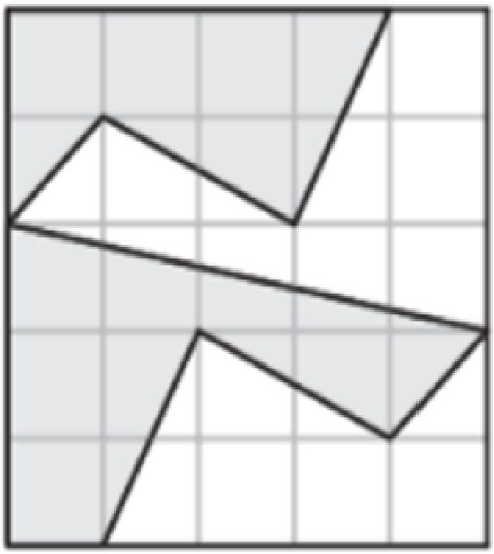


Fonte: OBMEP, 2016

Figura 49 – Problema 17

Problema 17: [OBMEP – 2011 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – QUESTÃO 11] Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

A) 10 cm²
B) 12,5 cm²
C) 14,5 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²



Fonte: OBMEP, 2011

Capítulo 6

Aplicação da Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com 13 alunos de uma turma de 8º ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Jerônimo Monteiro, no município de mesmo nome, no estado do Espírito Santo. Os alunos participantes serão aqui identificados como A1, A2, A3, $\cdots$, A12 e A13.

Os problemas foram desenvolvidos em encontros virtuais, através do *Google Meet*. Os encontros foram realizados em quatro dias, sendo dois encontros por dia, com duração de 1 hora para cada encontro, totalizando cerca de 8 horas para a aplicação dos problemas. Na Figura 50, vê-se os dias em que aconteceram os encontros, além dos conteúdos trabalhados e os problemas desenvolvidos em cada dia.

Figura 50 – Datas dos encontros virtuais e atividades desenvolvidas

Dia / Data	Conteúdos trabalhados	Problemas resolvidos
1º dia: 15/09	• Noção intuitiva de área • Fórmulas para cálculo de áreas de quadrados, retângulos e triângulos	1, 2, 3 e 4
2º dia: 17/09	• Situações-problema envolvendo cálculo de áreas de quadrados, retângulos e triângulos • Cálculo de áreas por decomposição	5, 6, 7 e 8
3º dia: 22/09	• Fórmulas para cálculo de áreas de paralelogramos, trapézios e losangos • Aplicações das fórmulas em situações-problema	9, 10, 11, 12, 13 e 14
4º dia: 24/09	• O Teorema de Pick • Aplicações em questões da OBMEP	15, 16 e 17

Fonte: Autoria Própria

Conforme explicado, a metodologia escolhida foi a Metodologia EAARP, seguindo a proposta de Onuchic et al. (2014), adaptada ao Ensino Remoto. Assim, abriu-se mão de algumas etapas da proposta original e outras foram readaptadas.

A terceira etapa – Leitura em Conjunto – não aconteceu, pois os alunos participantes da pesquisa encontravam-se em suas casas, portanto, atuaram individualmente.

A quinta etapa – Observar e Incentivar – teve de ser modificada. Não foi possível observar os trabalhos sendo desenvolvidos individualmente, tão pouco em grupos.

A sexta etapa – Registro das soluções na lousa – obviamente não pôde ser feita, sendo realizada oralmente.

A nona etapa – Formalização do Conteúdo – por vezes aconteceu de forma oral e por vezes foi feita através do compartilhamento de tela do computador do professor-pesquisador.

Algumas outras observações precisam ser feitas antes de entrarmos nas resoluções dos problemas:

- Apesar da boa participação dos alunos, em alguns momentos não houve interação, pois se sentiam envergonhados em expor suas dúvidas e respostas.
- Nem todos os alunos puderam participar de todos os encontros, por motivos pessoais. Assim, os ausentes pediam aos colegas que enviassem fotos dos problemas resolvidos, o que gerou muitas soluções iguais.
- Na dúvida de algum aluno, o professor-pesquisador o auxiliava de forma oral, assim, todos os outros alunos ouviam as explicações, o que também gerou muitas respostas iguais.
- Foi explicado aos alunos que em caso de resolução errada, esta deveria ser mantida, pois o objetivo principal não era acertar a questão, como estão acostumados nas metodologias tradicionais. Todavia, o professor-pesquisador acredita que alguns alunos em alguns problemas apagaram a resolução original e refizeram após as etapas da Plenária e Formalização do Conteúdo.
- Após a realização de todos os problemas, o professor-pesquisador pediu aos alunos que entregassem as atividades na escola para que fizesse a retirada, visto que o mesmo não reside no município onde se localiza a escola. A aluna A11 não pôde entregar no dia marcado, o professor pediu, então, para que o enviasse fotos das atividades, o que não aconteceu antes da escrita deste capítulo.

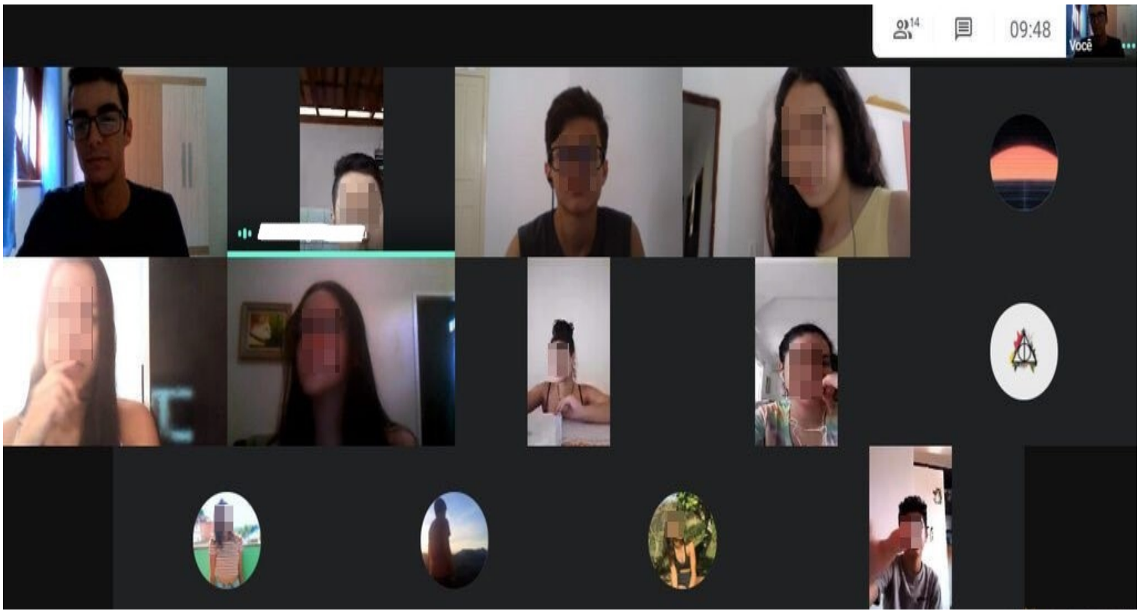
Feitas as considerações, as seções a seguir mostram o desenvolvimento dos problemas pelos alunos.

6.1 1º Dia

Esta seção traz o desenvolvimento dos Problemas 1, 2, 3 e 4.

6.1.1 Problema 1 - Noção intuitiva de área

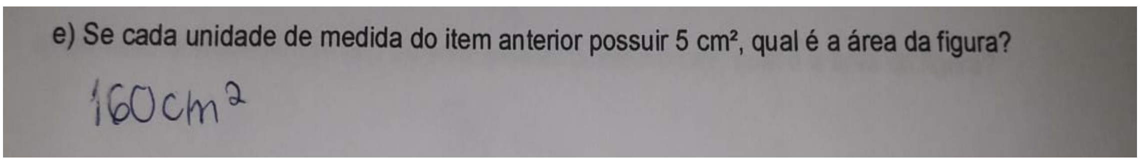
Figura 51 – Professor-pesquisador e alunos participando da pesquisa



Fonte: Dados da pesquisa

No Problema 1, os alunos (Figura 51) conheceram a noção intuitiva de área: Definida a unidade de área, a área de uma figura é a quantidade de unidades que cabem nessa figura. Portanto, inicialmente, no item (a), tiveram de contar quantos quadradinhos havia na figura do problema proposto. A aluna A8 questionou se deveria contar somente os quadradinhos inteiros, o professor interferiu, dizendo que deveriam contar também os quadradinhos incompletos, com a finalidade de juntar os pedaços para formar uma unidade inteira. Eles não tiveram dificuldades e entenderam bem os itens (b) e (c), em que a área da figura seria a quantidade de unidades de área "vezes" a área de uma unidade. No item (d), a aluna A9 pediu ajuda com a contagem da nova unidade de área. O professor interferiu novamente, dizendo que deveriam contar os quadradinhos de "dois em dois". Rapidamente ela compreendeu e finalizou a questão. Na Figura 52, podemos observar um equívoco cometido pelo aluno A2 no item (e), ao desconsiderar que há 16 unidades de área na figura, agindo como se ainda fossem 32.

Figura 52 – Resolução equivocada do item (e) do Problema 1 feita pelo aluno A2

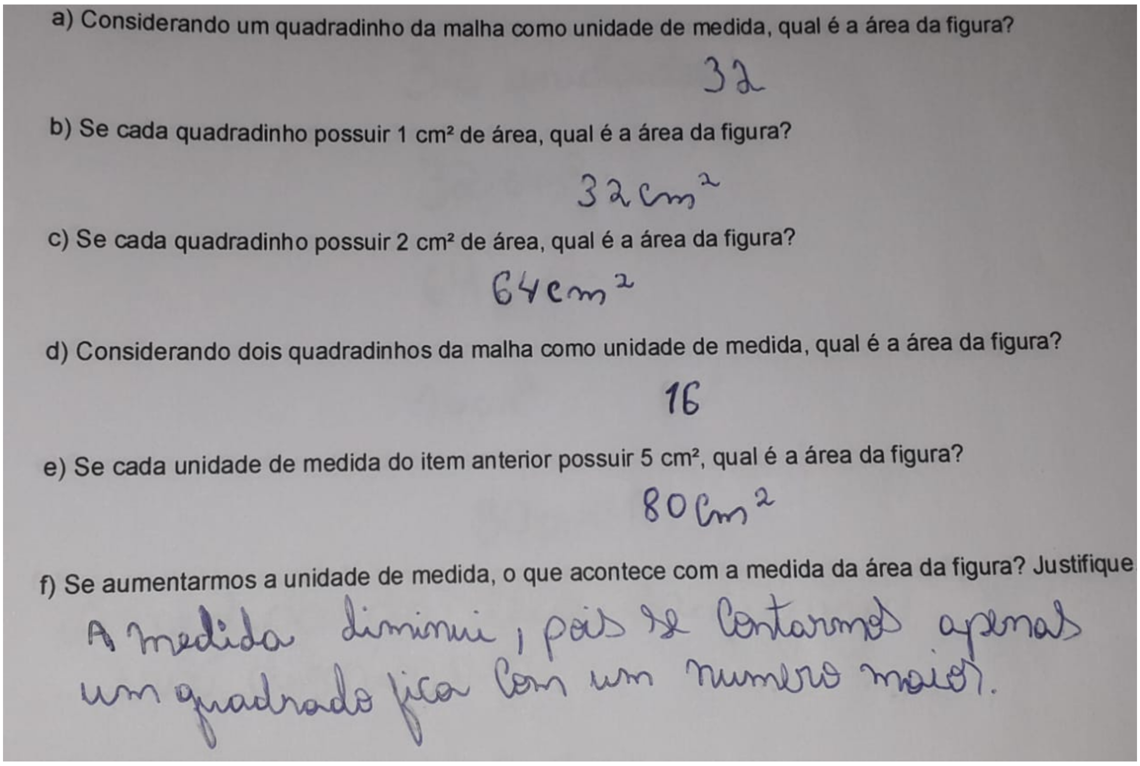


Fonte: Dados da Pesquisa

No item (f), eles entenderam que quanto maior for a unidade de área, menor será a medida da área.

Durante a Plenária, a aluna A4 expôs seus resultados encontrados e alguns alunos disseram ter encontrado as mesmas respostas. No geral, eles não tiveram dificuldade. A Figura 53 mostra a resolução completa e correta do aluno A6, dentre muitas respostas semelhantes.

Figura 53 – Resolução correta do Problema 1 feita pelo aluno A6


a) Considerando um quadradinho da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?

32

b) Se cada quadradinho possuir 1 cm² de área, qual é a área da figura?

32 cm²

c) Se cada quadradinho possuir 2 cm² de área, qual é a área da figura?

64 cm²

d) Considerando dois quadradinhos da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?

16

e) Se cada unidade de medida do item anterior possuir 5 cm², qual é a área da figura?

80 cm²

f) Se aumentarmos a unidade de medida, o que acontece com a medida da área da figura? Justifique

A medida diminui, pois se contarmos apenas um quadrado fica com um numero maior.

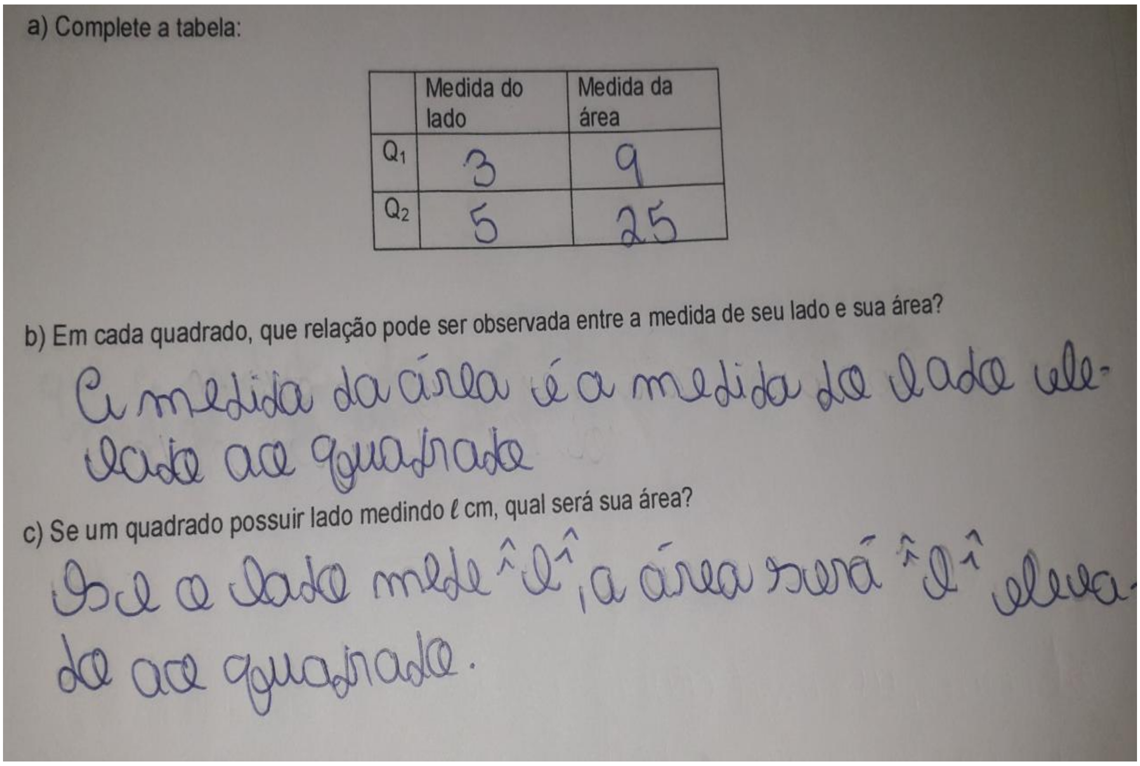
Fonte: Dados da Pesquisa

6.1.2 Problema 2 - Cálculo da Área de um Quadrado

No Problema 2, os alunos utilizaram a noção intuitiva de área desenvolvida no Problema 1, para descobrir a fórmula do cálculo da área de um quadrado, através de observações.

Eles entenderam bem como preencher a tabela do item (a) e não tiveram dificuldade em encontrar a relação pedida no item (b). No item (c), a aluna A9 questionou sobre como deveria escrever. O professor a orientou a seguir os itens (a) e (b) e sugeriu que tratasse l como um número qualquer. A aluna entendeu, e concluiu a questão, vista na Figura 54. Durante a Plenária, a aluna A8 registrou oralmente suas respostas, quando os demais afirmaram ter feito da mesma forma.

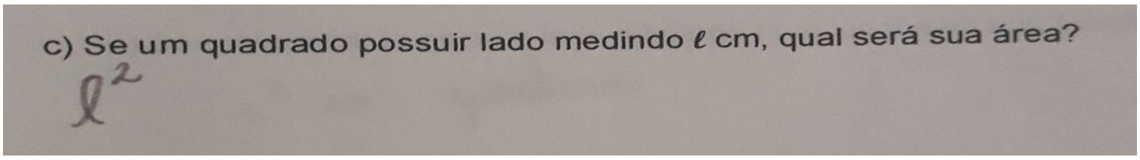
Figura 54 – Resolução correta do Problema 2 feita pela aluna A9



Fonte: Dados da Pesquisa

Alguns alunos responderam ao item (c) com a escrita matemática, fazendo uso da generalização, como a aluna A5, na Figura 55.

Figura 55 – Generalização do item (c) do Problema 2 feita pela aluna A5

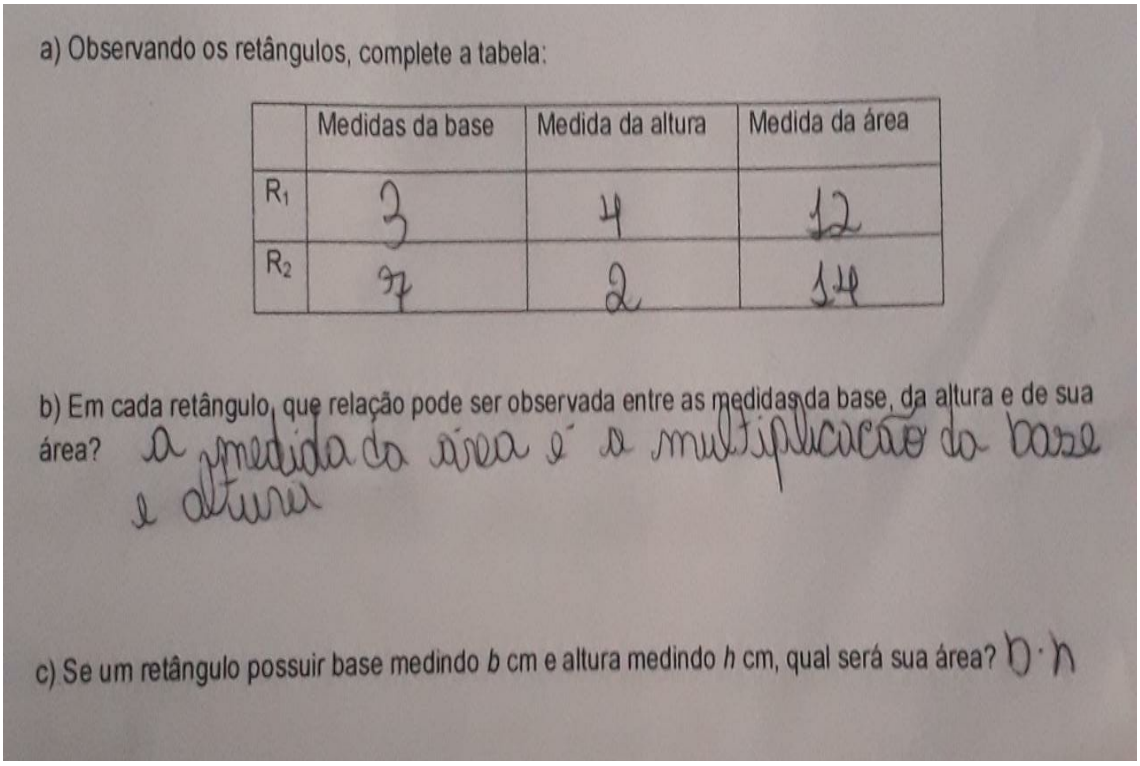


Fonte: Dados da Pesquisa

6.1.3 Problema 3 - Cálculo da Área de um Retângulo

No Problema 3, os alunos procederam de forma análoga ao Problema 2. Resolveram toda a questão com facilidade, atingindo os objetivos propostos. Todos os alunos concluíram e acertaram os três itens, finalizando com a fórmula ou o método para se calcular área de retângulos. Na Figura 56, temos as respostas da aluna A12.

Figura 56 – Resposta correta do Problema 3 feita pela aluna A12



a) Observando os retângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
R_1	3	4	12
R_2	7	2	14

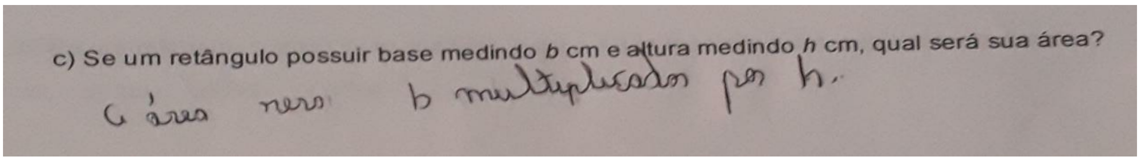
b) Em cada retângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área? a medida do área é a multiplicação da base e altura

c) Se um retângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área? b · h

Fonte: Dados da Pesquisa

Alguns alunos não generalizaram o item (c), escrevendo a resposta em linguagem comum, como o aluno A13, na Figura 57.

Figura 57 – Resposta correta do item (c) do Problema 3 sem linguagem matemática feita pelo aluno A13



c) Se um retângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

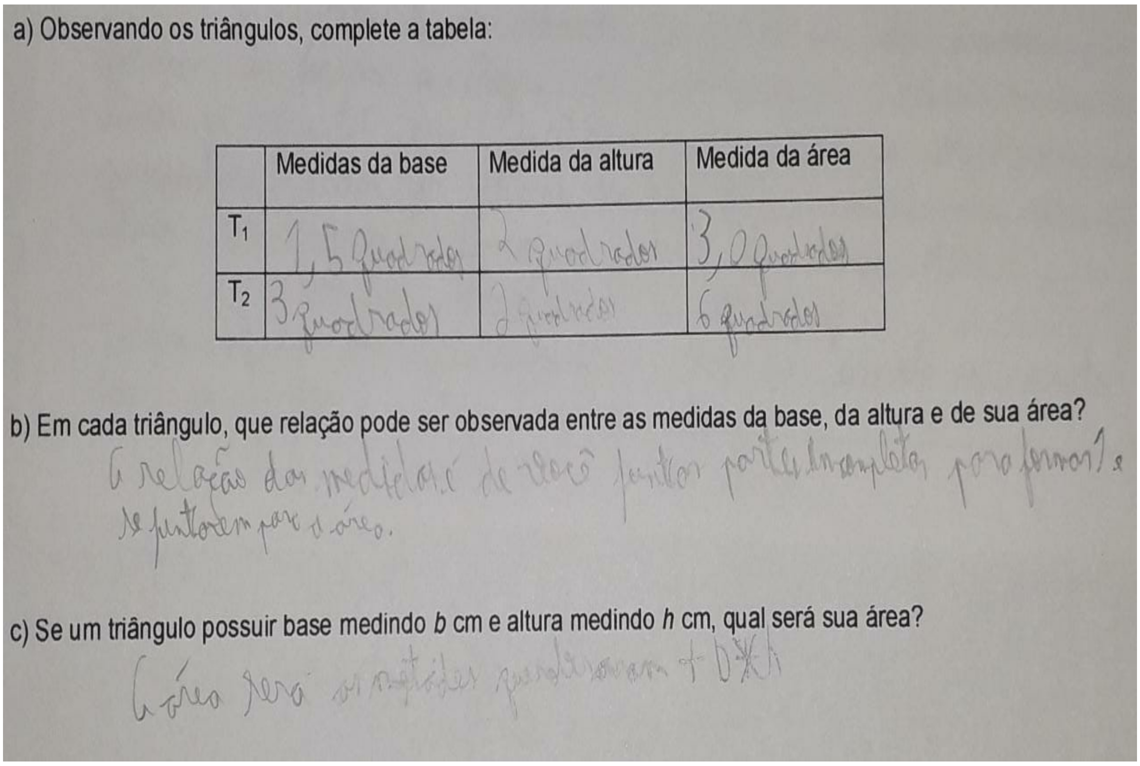
a área será b multiplicado por h.

Fonte: Dados da Pesquisa

6.1.4 Problema 4 - Cálculo da Área de um Triângulo

O objetivo do Problema 4 é que os alunos finalizem o item (c) com a fórmula para o cálculo de área de triângulo. Após o desenvolvimento e análise das respostas, concluímos que o objetivo foi alcançado por quase todos os alunos. Somente o aluno A3 respondeu aos itens de forma errada, ao contar no item (a) as medidas dos lados e alturas nos triângulos considerando apenas quadradinhos completos. Como os itens (b) e (c) dependiam do item (a), ele não conseguiu alcançar a proposta da questão, como podemos ver na Figura 58.

Figura 58 – Resposta incorreta do Problema 4 feita pelo aluno A3


a) Observando os triângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
T_1	1,5 quadrados	2 quadrados	3,0 quadrados
T_2	3 quadrados	2 quadrados	6 quadrados

b) Em cada triângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

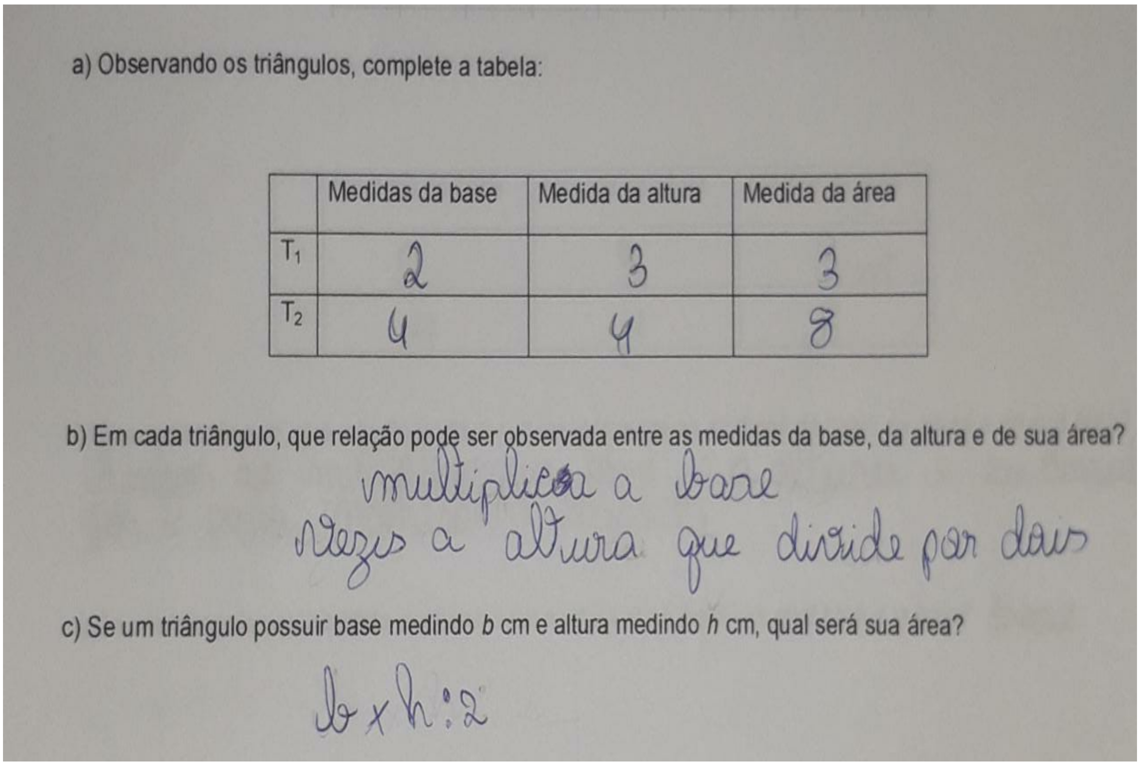
A relação das medidas é de você juntar partes incompletas para formar 1 e se juntarem para a área.

c) Se um triângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

Fonte: Dados da Pesquisa

Na Figura 59, temos a solução completa e correta, feita pelo aluno A10, dentre muitas soluções semelhantes.

Figura 59 – Resposta correta do Problema 4 feita pelo aluno A10


a) Observando os triângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
T_1	2	3	3
T_2	4	4	8

b) Em cada triângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

multiplica a base vezes a altura que divide por dois

c) Se um triângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

b x h : 2

Fonte: Dados da Pesquisa

Importante ressaltar que nenhum aluno escreveu $\frac{b.h}{2}$ no item (c), como geralmente aparece nos livros didáticos. Porém, todos eles entenderam como se calcula a área de um triângulo. Durante a etapa da Formalização do Conteúdo, o professor explicou que a resposta deles não estava errada, que apenas usaram uma notação diferente. O fato de não terem escrito a fórmula em fração interferiu no desenvolvimento dos Problemas 9, 10 e 11, como será descrito posteriormente.

A ideia de generalizar utilizada nos problemas 2, 3 e 4 é sugerida pelos PCN, quando diz que: “No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas.” (BRASIL, 1998, p. 118).

6.2 2º Dia

Esta seção mostra o desenvolvimento e análise dos problemas 5, 6, 7 e 8. Esses problemas têm por objetivo aplicar os conhecimentos descritos na seção anterior em situações do cotidiano ou não.

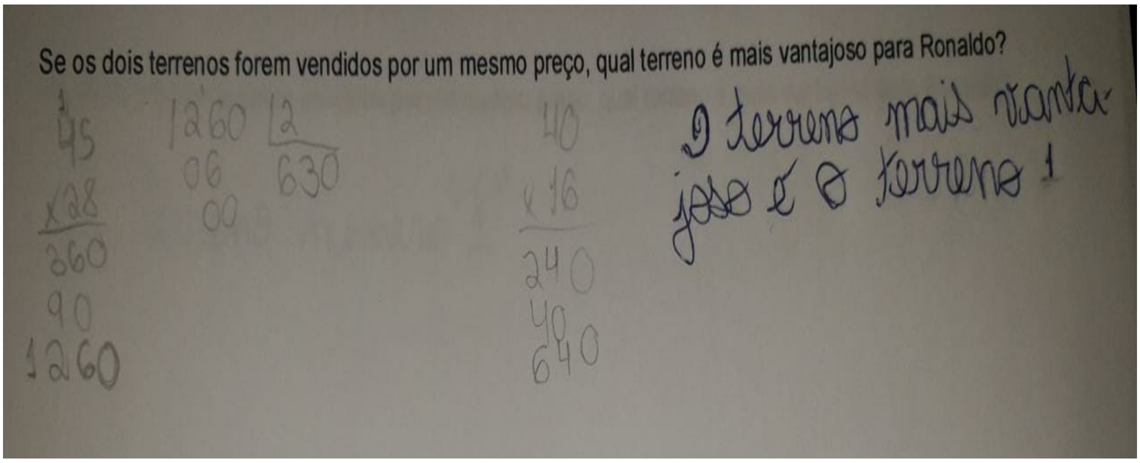
6.2.1 Problemas 5 e 6 - Aplicações das Fórmulas do Cálculo de Áreas

Os Problemas 5 e 6 consistiam na aplicação das fórmulas construídas nos Problemas anteriores. Assim, o professor optou por realizar a Plenária após o desenvolvimento dos dois problemas.

No Problema 5, os alunos calcularam a área de dois terrenos e deveriam analisar qual terreno seria mais vantajoso para um produtor de laranjas. Nenhum aluno solicitou ajuda do professor durante a quarta etapa, que é a etapa da Resolução do Problema, propriamente dita e onde geralmente surgem as dúvidas.

Com exceção do aluno A13, todos os alunos resolveram corretamente o Problema, concluindo que o Terreno 1 é o mais vantajoso, por ser maior. Na Figura 60, vemos a resolução do aluno A2.

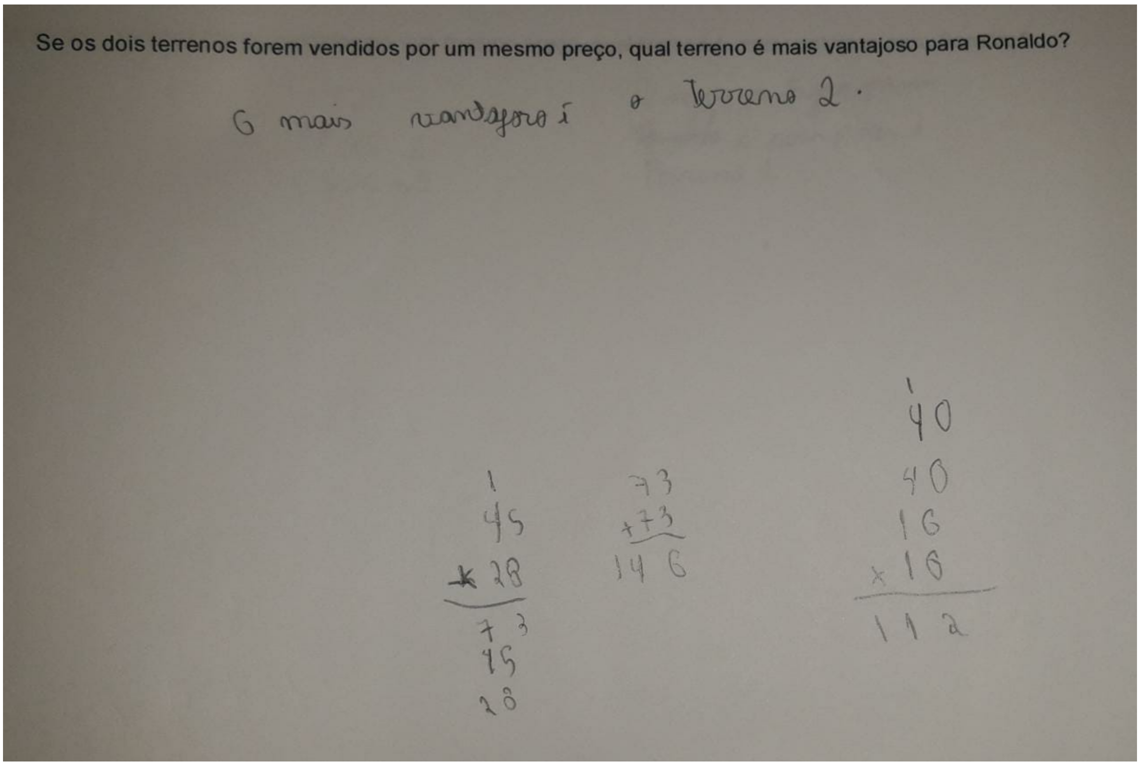
Figura 60 – Resposta correta do Problema 5 feita pelo aluno A2



Fonte: Dados da Pesquisa

O aluno A13 resolveu o Problema somando os lados dos terrenos, claramente fazendo confusão entre os conceitos de área e perímetro, como visto na Figura 61.

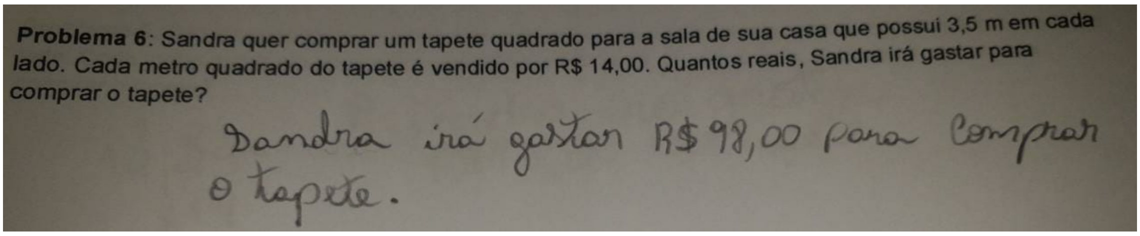
Figura 61 – Resposta incorreta do Problema 5 feita pelo aluno A13



Fonte: Dados da Pesquisa

No Problema 6, os alunos deveriam calcular a área do tapete, e em seguida, calcular a quantia gasta por Sandra, multiplicando a área pelo preço do metro quadrado. Nem todos conseguiram concluir a questão com êxito. O aluno A3 deixou em branco. O aluno A6 calculou a área do tapete de forma errada. Apesar de não apresentar os cálculos nem o raciocínio, percebe-se que fez 3,5 + 3,5, em vez de 3,5 x 3,5, gerando uma resposta equivocada, vista na Figura 62.

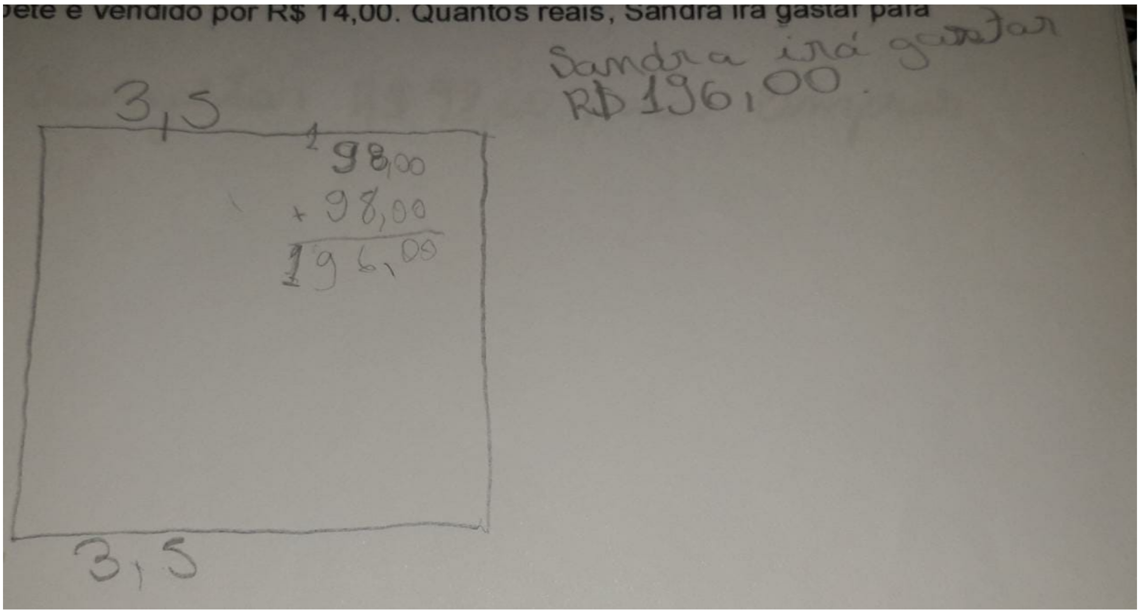
Figura 62 – Resposta incorreta do Problema 6 feita pelo aluno A6



Fonte: Dados da Pesquisa

O aluno A13 novamente resolveu a questão trabalhando com perímetro, equívoco cometido também pela aluna A7, cuja resolução se encontra na Figura 63.

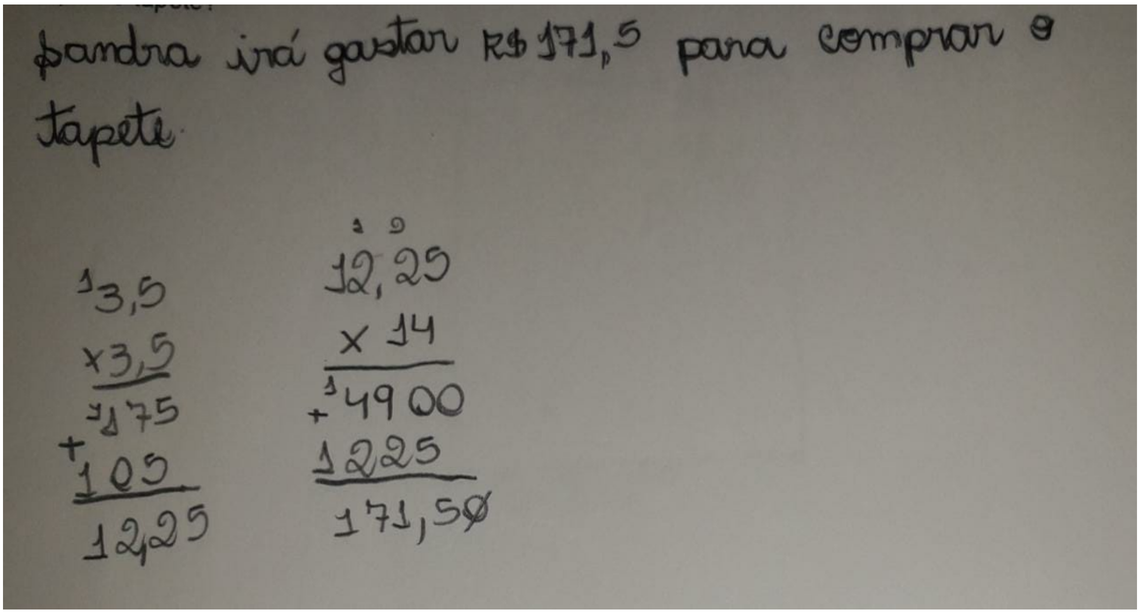
Figura 63 – Resposta incorreta do Problema 6 feita pela aluna A7



Fonte: Dados da Pesquisa

Os demais alunos resolveram corretamente. Na Figura 64, encontra-se a resolução correta da aluna A8.

Figura 64 – Resposta correta do Problema 6 feita pela aluna A8



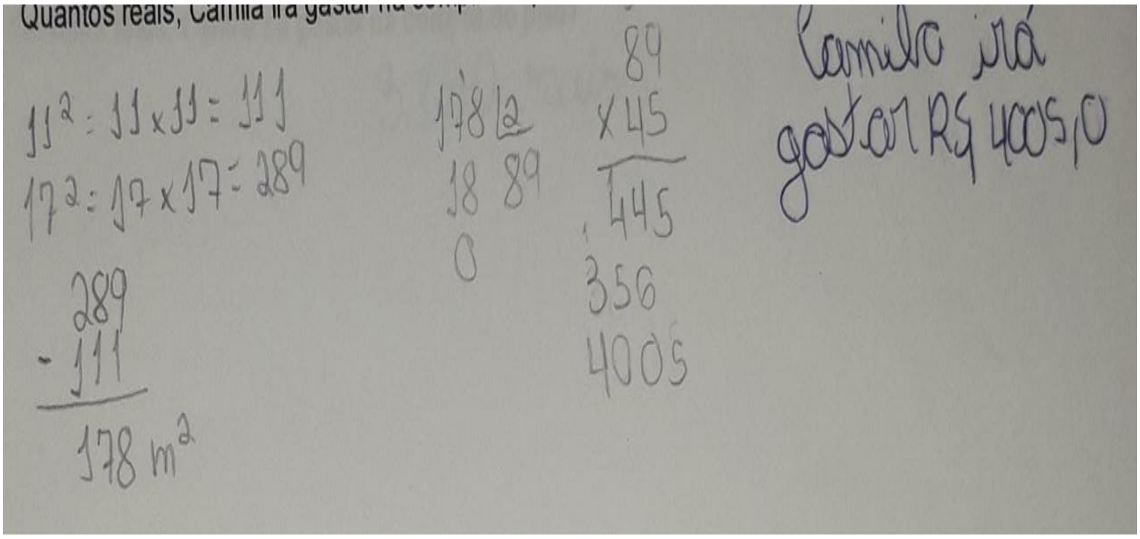
Fonte: Dados da Pesquisa

Mesmo com uma grande parcela dos alunos concluindo corretamente os problemas, percebe-se que ainda se faz muita confusão entre área e perímetro, mesmo não sendo feita nenhuma atividade relacionada a perímetro nessa pesquisa. Henriques e Silva (2019) na obra: *Área e Perímetro nos anos finais do Ensino Fundamental*, abordam essa confusão feita por muitos alunos. Com o suporte de diversos autores, buscam encontrar a origem deste problema tão comum e sugerem uma sequência de atividades, cujo objetivo é fazer com que os alunos saibam diferenciar estes os dois conteúdos. Malloy (1999) diz que apesar de muitos alunos conseguirem aplicar fórmulas de cálculo de áreas e perímetros, eles não conseguem diferenciar tais conteúdos, calculando área quando se pede perímetro e calculando perímetro quando se pede área. Fato ocorrido com a aluna A7 no Problema 6 e com o aluno A13 nos Problemas 5 e 6.

6.2.2 Problema 7 - Situação-Problema envolvendo Cálculo de Áreas por Decomposição

No Problema 7, os alunos usaram a decomposição de figuras, no caso, dois quadrados, para calcular a área a ser colocada piso. Em seguida, utilizar as informações do Problema para calcular o valor gasto por Camila. O professor leu o problema para os alunos e eles rapidamente o resolveram. O aluno A2 e a aluna A7 cometeram um erro de cálculo ao encontrar a área do quintal ($11^2 = 111$, em vez de 121), o que levou a uma resposta errada, como podemos ver na Figura 65.

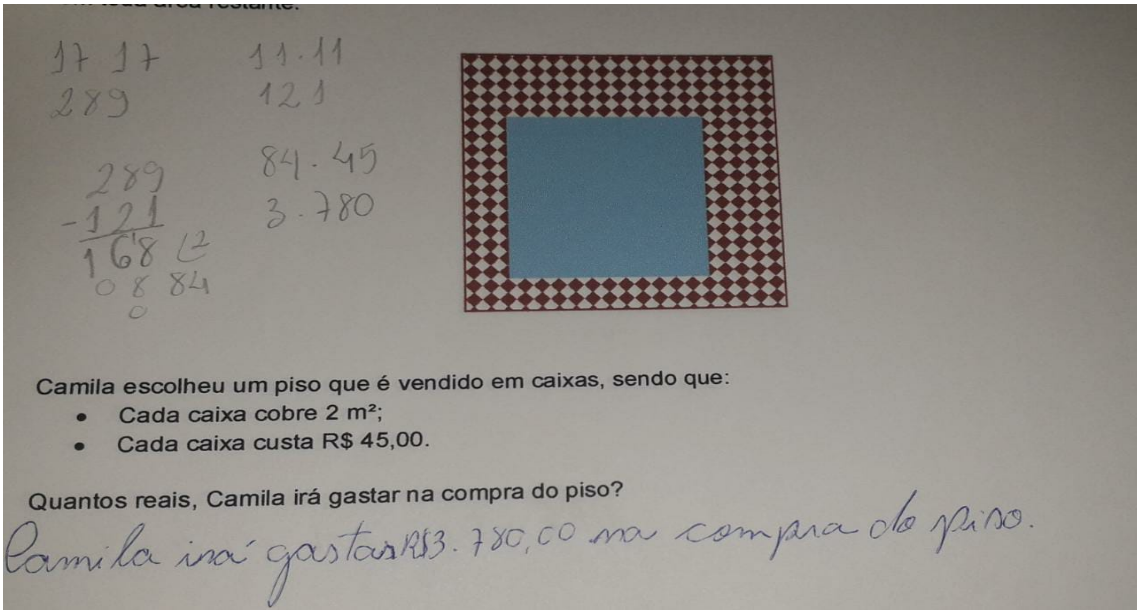
Figura 65 – Erro de cálculo no Problema 7 feito pelo aluno A2



Fonte: Dados da Pesquisa

Na Plenária, a aluna A4 descreveu o passo a passo de sua resolução. Muitos alunos disseram ter feito da mesma forma. O professor afirmou que a resolução estava correta. Na Figura 66, temos a resolução correta da aluna A4.

Figura 66 – Resposta correta do Problema 7 feita pela aluna A4

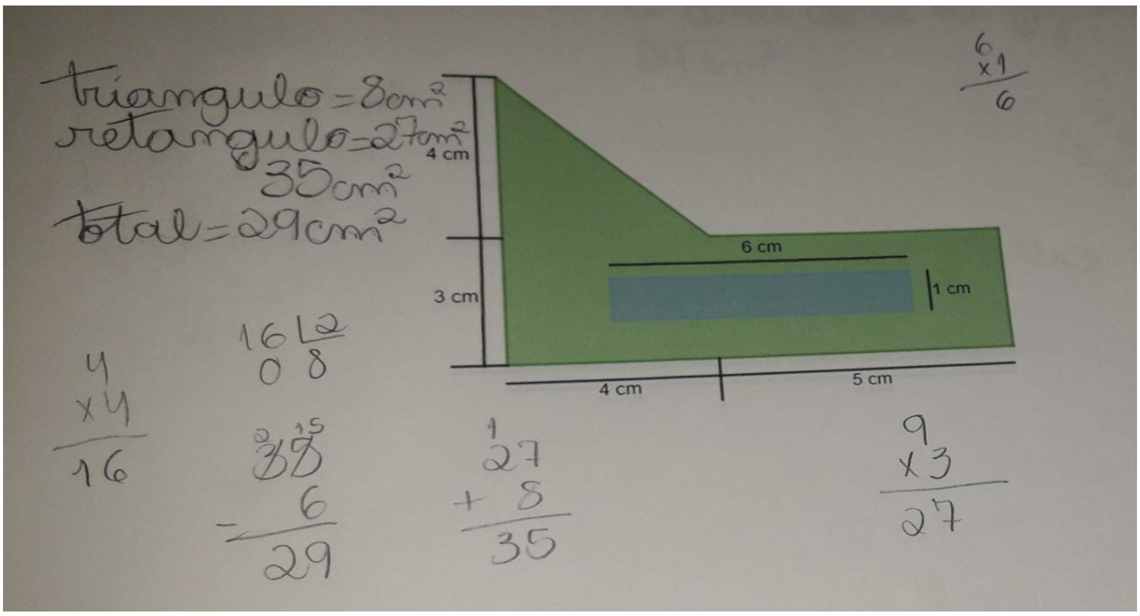


Fonte: Dados da Pesquisa

6.2.3 Problema 8 - Cálculo de Área de uma Figura por Decomposição

Inicialmente, o professor-pesquisador deixou que os alunos elaborassem alguma estratégia de resolução do Problema 8. Como nenhum deles expôs sua estratégia, o professor questionou: *"como vocês vão calcular a área pedida, se a figura não possui nenhum formato das figuras estudadas?"*, o aluno A3 então disse: *"vamos dividir ela!"*, o professor confirmou. Os alunos não tiveram dificuldades em resolver o Problema. Na figura 67, temos a resolução correta da aluna A1.

Figura 67 – Resposta correta do Problema 8 feita pela aluna A1



Fonte: Dados da Pesquisa

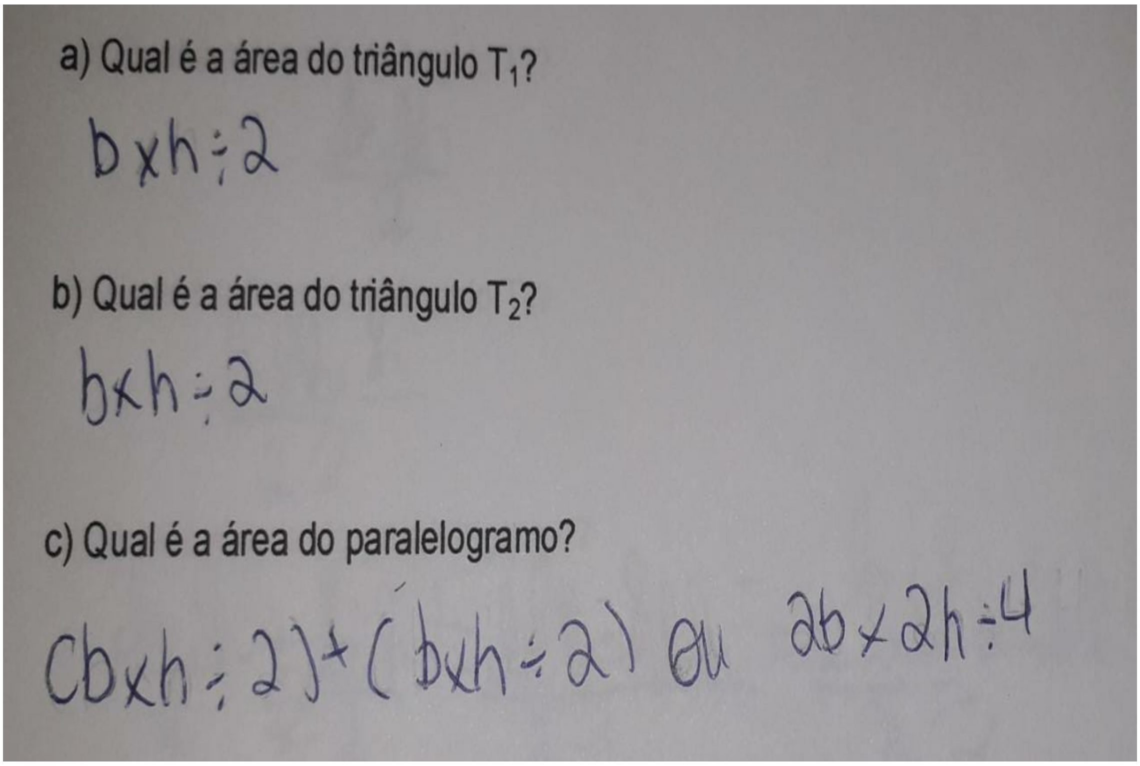
6.3 3º Dia

Esta seção traz o desenvolvimento e análises dos problemas 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

6.3.1 Problema 9 - Cálculo da Área de um Paralelogramo por Decomposição

No Problema 9, os alunos deveriam seguir os itens, e ao final, encontrar a fórmula para o cálculo de área do paralelogramo. Inicialmente, não entenderam que deveriam calcular as áreas dos triângulos, e após somar, encontrariam a área do paralelogramo. Os alunos A6 e A13 questionaram sobre o que deveriam fazer. O professor-pesquisador explicou que deveriam seguir os itens, sem pular etapas. Com isso, alguns conseguiram fazer os itens (a) e (b), escrevendo b x h : 2 para representar as áreas dos triângulos. Assim, no momento de somar as áreas, encontraram dificuldade e não conseguiram finalizar a questão, como na Figura 68, onde temos a resolução do aluno A2. O professor-pesquisador acredita que alguns outros alunos possam ter feito errado, mas apagaram após a Formalização do conteúdo feita por compartilhamento de tela. A aluna A8 afirmou ser mais fácil do que parecia.

Figura 68 – Tentativa incompleta para o Problema 9 feita pelo aluno A2

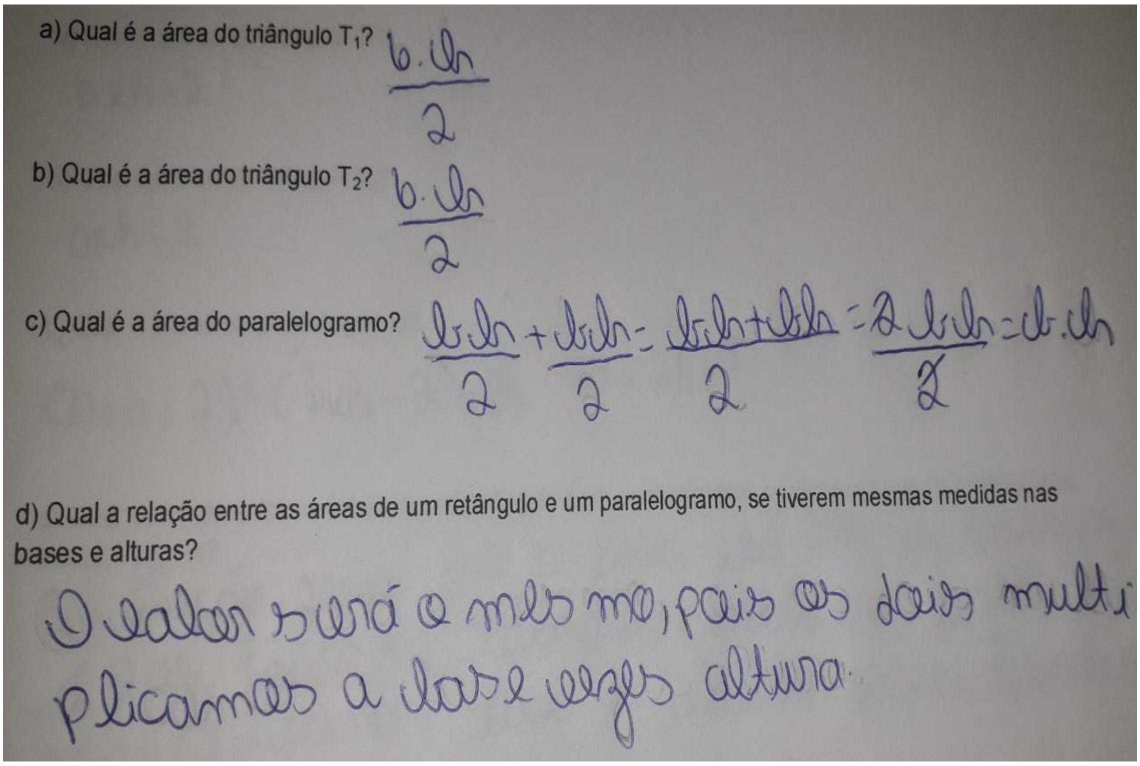


Fonte: Dados da Pesquisa

O professor-pesquisador explicou que, normalmente, quando queremos escrever algo relacionado à divisão, escrevemos em forma de fração. Após a Formalização do

Conteúdo, muitos alunos “copiaram” o desenvolvimento correto. Com o item (c) feito, eles entenderam como responder ao item (d). A Figura 69 mostra os itens (a), (b) e (c) feitos como o professor-pesquisador fez, e a relação correta encontrada pela aluna A9.

Figura 69 – Resolução do Problema 9 feita pela aluna A9

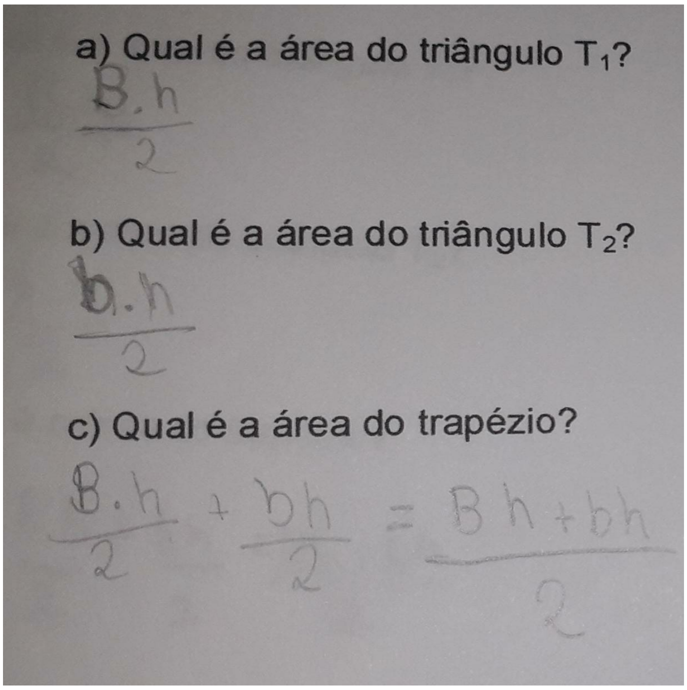


Fonte: Dados da Pesquisa

6.3.2 Problema 10 - Cálculo da Área de um Trapézio por Decomposição

No Problema 10, os alunos deveriam seguir os mesmos passos do Problema 9, até concluir o item (c) com a fórmula para o cálculo de área de um trapézio. Como haviam entendido o Problema anterior, conseguiram realizar os itens (a) e (b) com facilidade. No item (c), agiram corretamente, somando as áreas dos triângulos. Perceberam que b e B representam valores diferentes, o que impossibilita a soma dos termos bh e Bh. A Figura 70, traz as respostas corretas da aluna A7.

Figura 70 – Resposta satisfatória do Problema 10 feita pela aluna A7



Fonte: Dados da Pesquisa

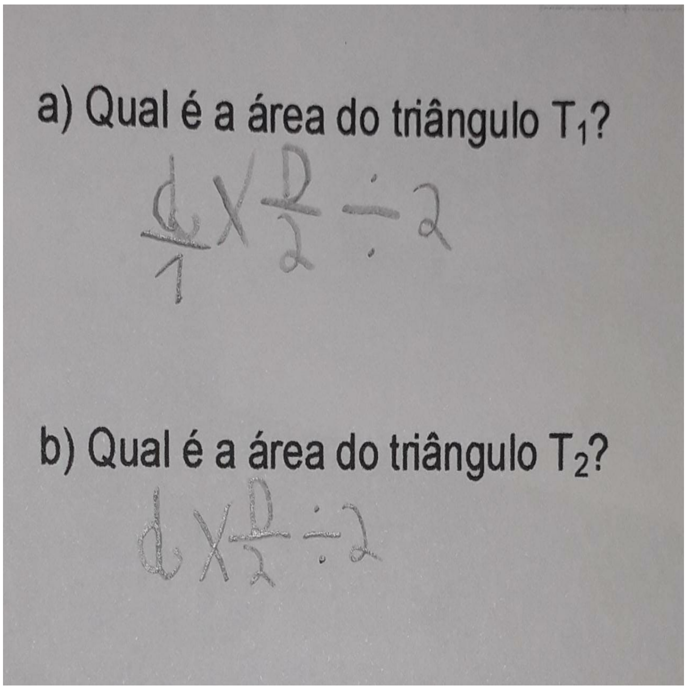
Durante a Formalização do Conteúdo, quase todos os alunos afirmaram ter chegado em $\frac{Bh+bh}{2}$, o professor-pesquisador disse que as respostas deles não estavam erradas, que com a expressão que eles encontraram, já era possível calcular a área de um trapézio. Mas, o professor continuou simplificando a expressão, até chegar em $\frac{(B+b)h}{2}$, e que é essa expressão que eles irão encontrar nos livros didáticos. Para finalizar, o professor-pesquisador explicou a fórmula, dizendo que para se calcular a área de um trapézio, deve-se: *"somar as bases, multiplicar pela altura, e dividir por 2"*. Os alunos entenderam e anotaram em um local à parte.

6.3.3 Problema 11 - Cálculo da Área de um Losango por Decomposição

O objetivo aqui é obter a fórmula para o cálculo da área de um losango. Os alunos deveriam proceder como nos problemas anteriores, porém não conseguiram finalizar o item (a), já que teriam duas divisões de frações. Argumentaram que não estavam conseguindo. O professor-pesquisador optou então, por fazer a Formalização do Conteúdo e explicar como deveriam ter feito. Os alunos acharam muito difícil, e disseram que não conseguiriam fazer sozinhos.

Na Figura 71, vemos a tentativa do aluno A3.

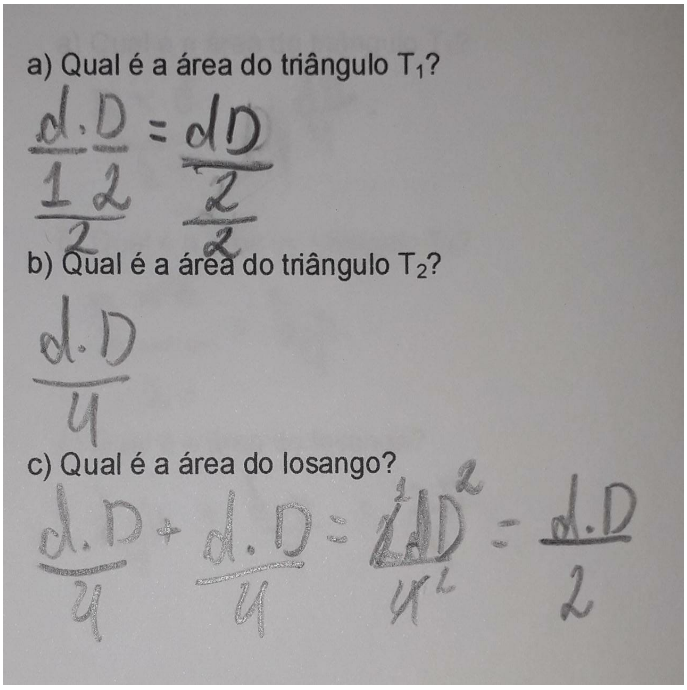
Figura 71 – Tentativa para o Problema 11 feita pelo aluno A3



Fonte: Dados da Pesquisa

Muitos alunos novamente copiaram o desenvolvimento feito pelo professor-pesquisador, como mostrado na Figura 72, da aluna A5.

Figura 72 – Resposta apresentada para o Problema 11 pela aluna A5



Fonte: Dados da Pesquisa

O professor-pesquisador enfatizou o método para se calcular a área de um losango:

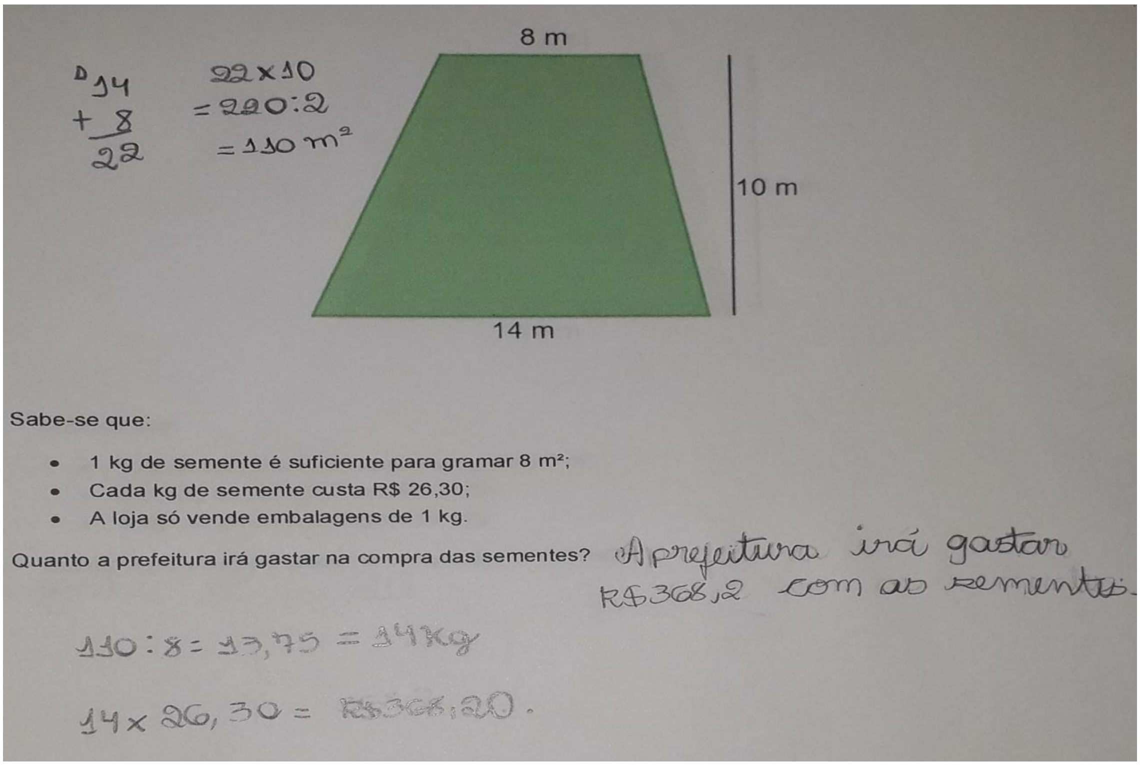
“multiplicamos as diagonais e dividimos por 2”. Os alunos entenderam.

Em suma, nos três problemas descritos nesta seção até o momento, os alunos tiveram muitas dificuldades, principalmente na simplificação de expressões literais. Este conteúdo (monômios e operações) foi trabalhado com a turma de forma não presencial. O professor-pesquisador acredita que por isso os alunos não consolidaram bem os procedimentos, e assim, não conseguiram finalizar os problemas.

6.3.4 Problema 12 - Solução de uma situação-problema utilizando a Fórmula do Cálculo de Área de um Trapézio

O Problema consiste na utilização da fórmula do cálculo da área de um trapézio na aplicação de uma situação-problema. Durante a resolução, os alunos estavam inseguros em relação à fórmula, com frases do tipo: “*Tem que somar, né?*”, o professor-pesquisador pediu que olhassem novamente a fórmula, e observassem na figura quais seriam os valores das bases e da altura. Após calcular a área, eles deveriam seguir as informações adicionais para concluir o problema. Como 1 kg de semente é suficiente para gramar $8m^2$ do jardim, eles deveriam dividir a área encontrada, que foi $110m^2$, por 8, para depois multiplicar por R$26,30, que é o preço de 1 kg da semente. Após fazer a divisão e encontrar 13,75, o aluno A6 perguntou se deveria arredondar para cima ou para baixo, já que a loja só vende embalagens de 1 kg. Antes que o professor-pesquisador respondesse, a aluna A8 falou: “*acho que tem que arredondar pra cima, pois se comprar 13 kg, vai faltar semente...*”, o professor confirmou. A Figura 73 mostra o desenvolvimento correto da aluna A8. Com exceção do aluno A3, todos os alunos responderam corretamente. O aluno A3 deu como resposta final R$182,00, mas não apresentou o desenvolvimento. Possivelmente, fez 13 x 14.

Figura 73 – Resposta correta do Problema 12 feita pela aluna A8

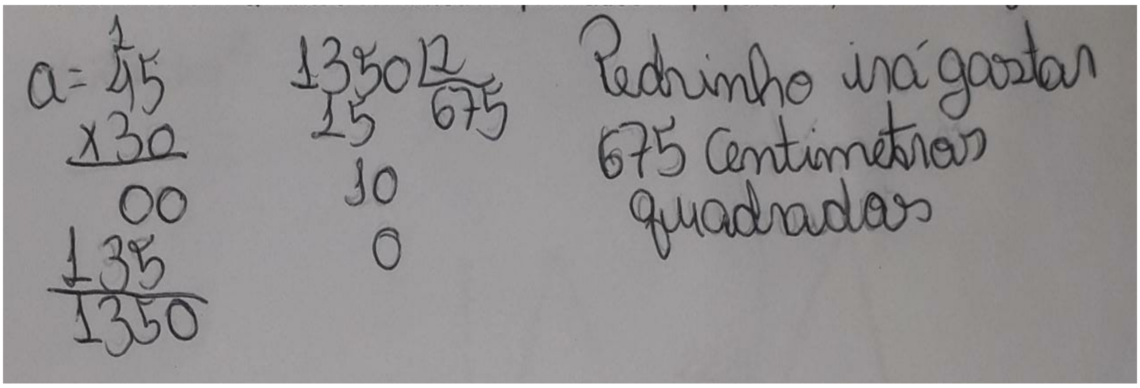


Fonte: Dados da Pesquisa

6.3.5 Problema 13 - Solução de ums situação-problema utilizando a Fórmula do Cálculo de Área de um Losango

No Problema 13, os alunos resolveram um problema com losango. Bastava multiplicar as medidas das diagonais e dividir por 2. Não tiveram dificuldades, e todos resolveram corretamente. Na Figura 74, temos a resposta da aluna A12.

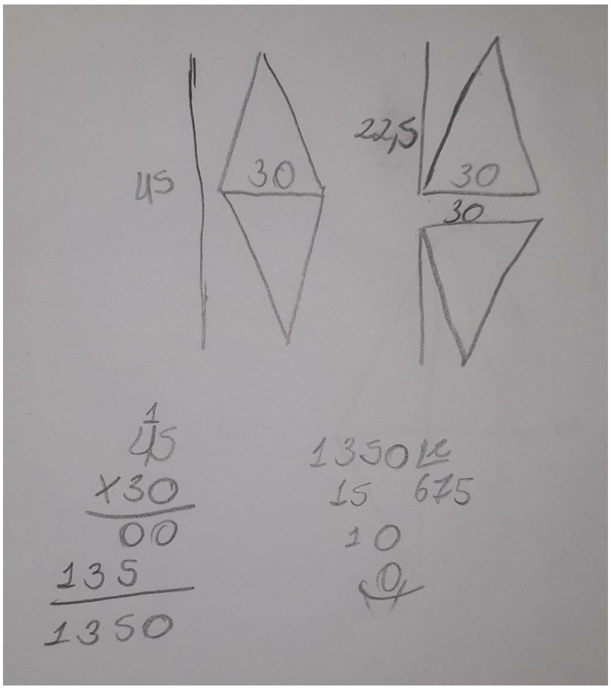
Figura 74 – Resposta correta do Problema 13 feita pela aluna A12



Fonte: Dados da Pesquisa

Interessante destacar a tentativa de resolução da aluna A5, decompondo o losango em dois triângulos. Porém, não utilizou a decomposição para calcular a área da pipa, como podemos ver na Figura 75.

Figura 75 – Tentativa de decomposição da pipa feita pela aluna A5

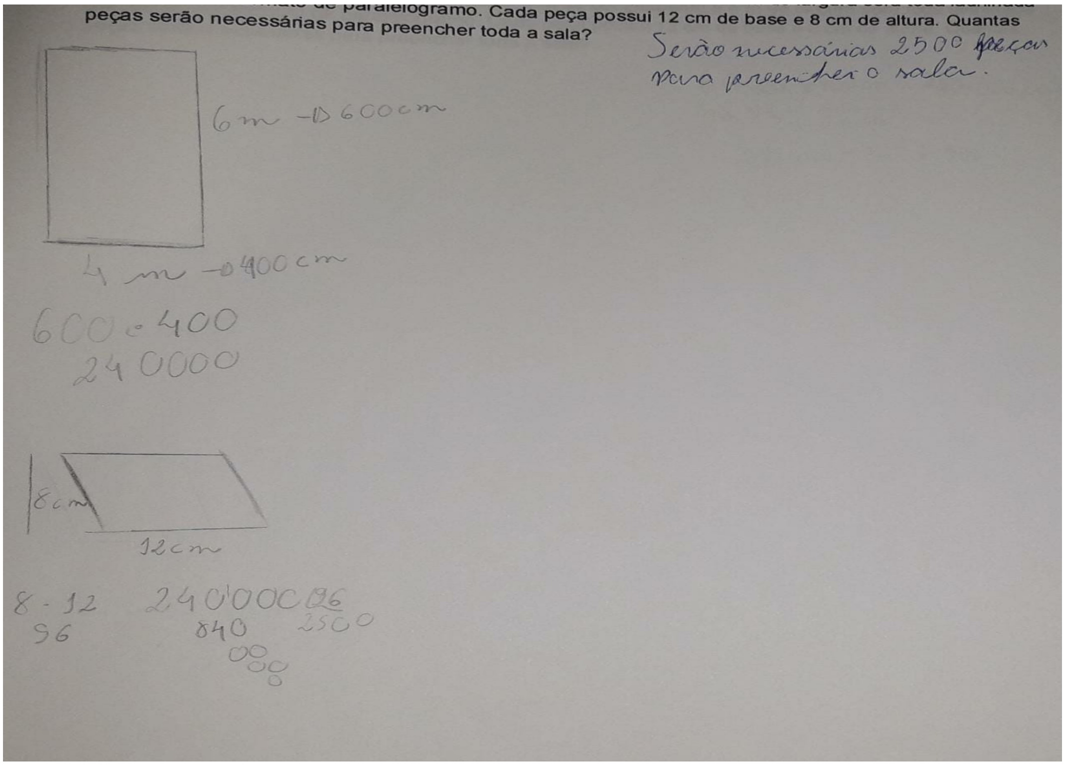


Fonte: Dados da Pesquisa

6.3.6 Problema 14 - Solução de uma situação-problema utilizando a Fórmula do Cálculo de Área de um Paralelogramo

O objetivo do problema é aplicar o cálculo de área de paralelogramos em uma situação prática. Os alunos deveriam calcular a área da sala e dividi-la pela área de uma peça utilizada, mas deveriam observar as unidades de medida, a sala está em metros e a peça, em centímetros. Rapidamente calcularam as áreas, tanto da sala quanto da peça, sem nenhum questionamento sobre as unidades de medida. No momento de concluir o problema, a aluna A4 questionou se teria algum problema a sala estar em metros e as peças, em centímetros, e se deveria "fazer alguma coisa" em relação a isso. O professor explicou que como estávamos interessados em comparar áreas, estas deveriam estar na mesma unidade de medida. A aluna A7 interrogou: "*Então tem que converter, né?*", o professor afirmou que sim. O aluno A6 questionou: "*Converter qual?*". O professor-pesquisador explicou que a conversão de metros para centímetros seria mais fácil. Assim fizeram e todos conseguiram finalizar a questão corretamente, como na Figura 76, onde temos a resolução da aluna A4.

Figura 76 – Resposta correta do Problema 14 feita pela aluna A4



Fonte: Dados da Pesquisa

6.4 4º Dia

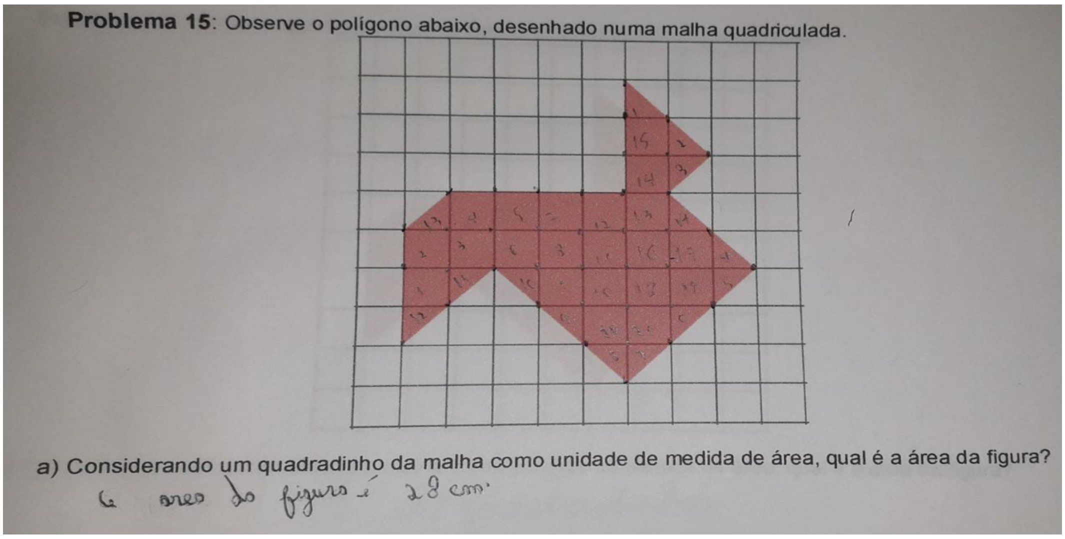
Nesta seção, será discutido e analisado o desenvolvimento dos Problemas 15, 16 e 17.

6.4.1 Problema 15 - O Teorema de Pick

O objetivo do Problema 15 é que os alunos descubram uma nova forma de se calcular áreas: O Teorema de Pick. Partindo do cálculo de áreas por contagem de unidades de área, eles deveriam seguir os itens, e concluir no final que a expressão $\frac{B}{2} + I - 1$ resulta na medida da área encontrada inicialmente.

No item (a), nenhum aluno teve dificuldade, pois se lembraram do Problema 1, onde deveriam juntar metades dos quadradinhos para formar uma unidade. Na Figura 77, podemos ver a estratégia utilizada pelo aluno A13 para realizar a contagem das unidades.

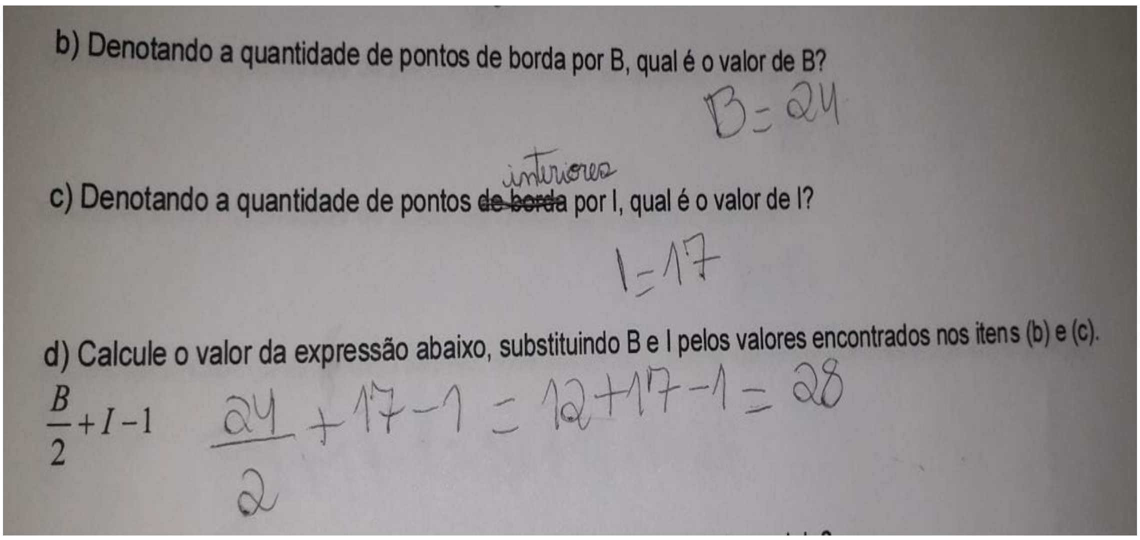
Figura 77 – Estratégia e resposta satisfatória do item (a) do Problema 15 feitas pelo aluno A13



Fonte: Dados da Pesquisa

Antes que os alunos resolvessem os itens (b) e (c), o professor-pesquisador teve de mostrar aos alunos o que são pontos de borda e pontos interiores, através do compartilhamento de tela. Os alunos entenderam bem o que são e como marcar os pontos interiores, mas tiveram um pouco de dificuldade em entender os pontos de borda. O professor explicou mais algumas vezes até que todos entendessem. Os alunos conseguiram responder os itens (b) e (c) corretamente e com isso resolveram a expressão do item (d) sem dificuldades. A Figura 78 [1] mostra as respostas corretas da aluna A1.

Figura 78 – Resposta dos itens (b), (c) e (d) do Problema 15 feita pela aluna A1

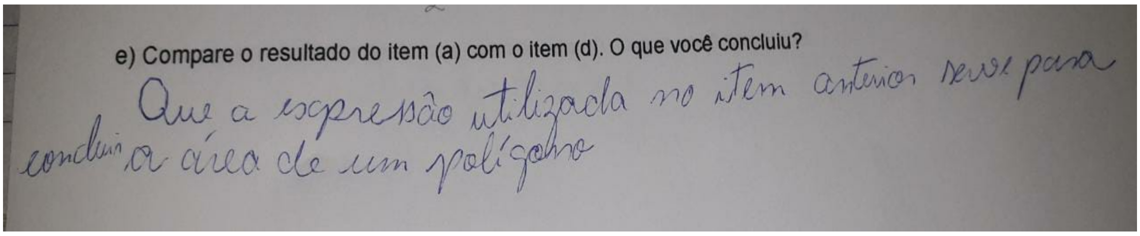


Fonte: Dados da Pesquisa

[1] Durante a elaboração dos problemas, houve um erro de digitação no item (c) do Problema 15. No momento da aplicação, o professor-pesquisador pediu aos alunos que corrigissem. No Apêndice C, o problema encontra-se sem o erro.

No item (e), eles deveriam concluir que, como as respostas do item (a) e do item (d) são iguais, a expressão pode ser utilizada no cálculo de áreas. A aluna A4, apresentou a conclusão esperada, vista na Figura 79.

Figura 79 – Conclusão correta do item (d) do Problema 15 feita pela aluna A4



Fonte: Dados da Pesquisa

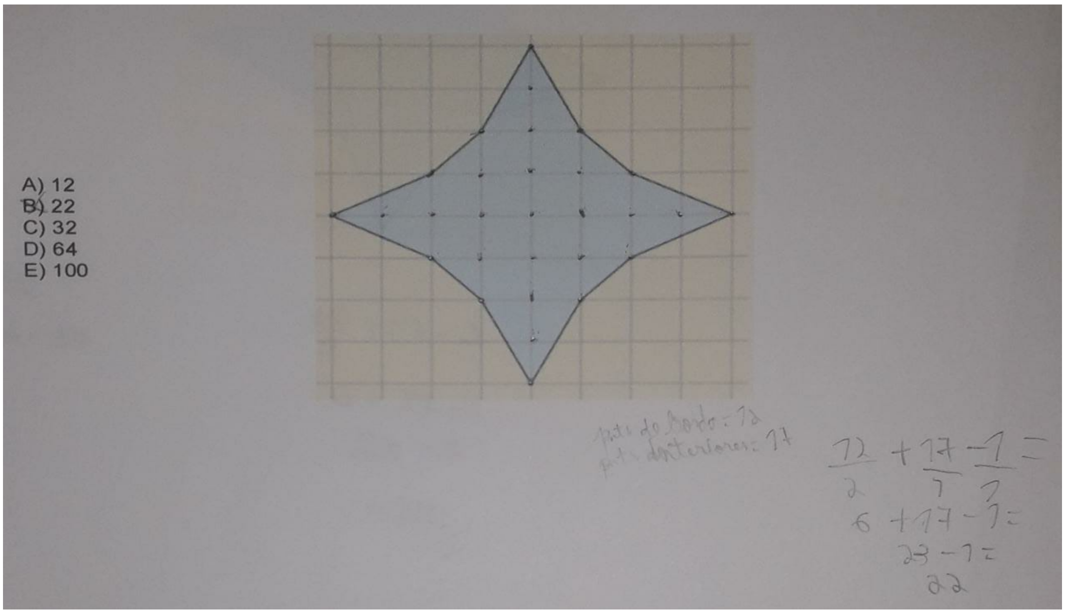
Na Formalização do Contéudo, o professor-pesquisador explicou que aquela expressão é conhecida como Teorema de Pick, e é utilizada no cálculo de áreas de qualquer polígono, desde que esteja desenhado numa malha quadriculada. O professor destacou ainda, que este Teorema é interessante, pois é uma fórmula que pode ser usada em qualquer figura, até nas que não possuem um formato conhecido, o que a difere das fórmulas usuais, em que há uma fórmula para cada figura.

6.4.2 Problemas 16 e 17 - Aplicações do Teorema de Pick

Os Problemas 16 e 17 consistiam na aplicação do Teorema de Pick em questões da OBMEP. Os alunos deveriam calcular as áreas solicitadas, através da contagem de ponto de borda e interiores.

Nenhum aluno teve dificuldade no Problema 16, todos encontraram os valores dos pontos de borda e interiores corretamente. A Figura 80 mostra a marcação dos pontos e o cálculo correto do aluno A3.

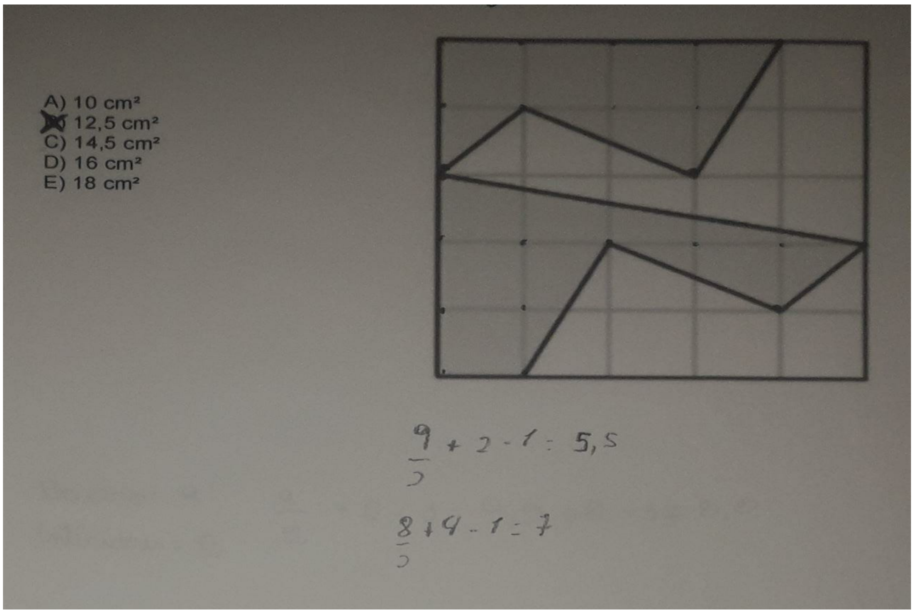
Figura 80 – Resposta correta do Problema 16 feita pelo aluno A3



Fonte: Dados da Pesquisa

No Problema 17, eles deveriam decompor a figura em dois polígonos e aplicar o Teorema de Pick duas vezes. Fato percebido rapidamente por todos, após o aluno A6 perguntar: "*Tem que fazer dos dois e somar?*". O professor disse que sim, e assim fizeram. A Figura 81, traz a marcação dos pontos e a aplicação correta do Teorema pelo aluno A6.

Figura 81 – Resposta correta do Problema 17 feita pelo aluno A6



Fonte: Dados da Pesquisa

Após a Plenária, o professor questionou os alunos sobre a aplicação do Teorema de Pick. A aluna A12 disse que gostou muito, pois segundo ela, "é uma fórmula só". As alunas

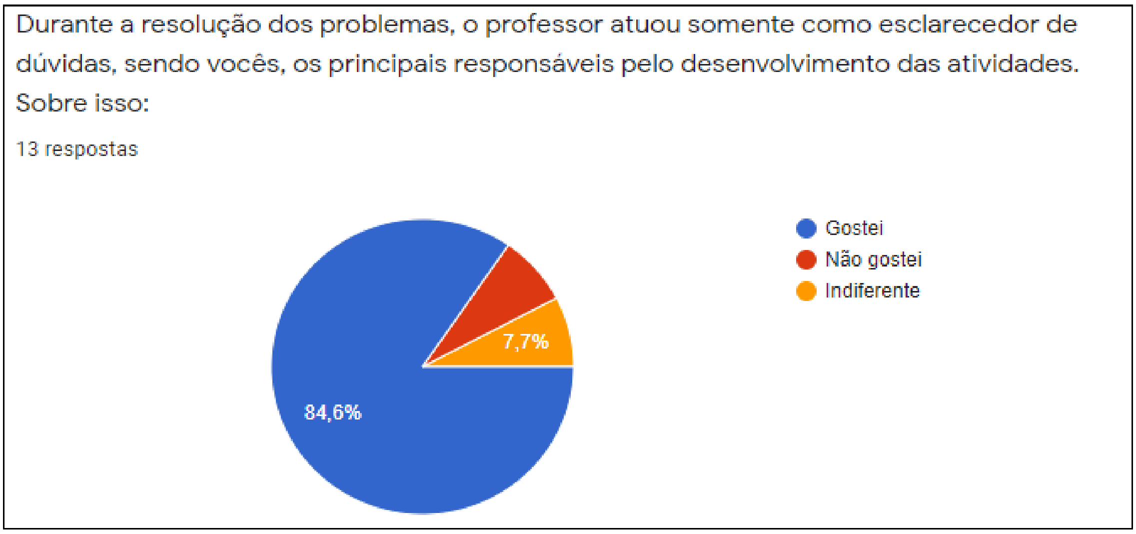
A1 e A7, e os alunos A6 e A13 disseram que também gostaram, com afirmações do tipo: "é bem mais fácil".

6.5 Avaliação das Atividades da Pesquisa

Após o término do desenvolvimento das atividades, os alunos responderam três perguntas criadas pelo professor-pesquisador. Essas perguntas tiveram como objetivo coletar informações, opiniões e a análise dos alunos participantes da pesquisa, para saber se os objetivos da pesquisa foram atingidos.

A primeira pergunta questionava-os sobre a atitude do professor-pesquisador. A pergunta, as opções e a quantidade de respostas em cada opção estão na Figura 82.

Figura 82 – Primeira pergunta do Questionário de Percepção dos alunos e respostas

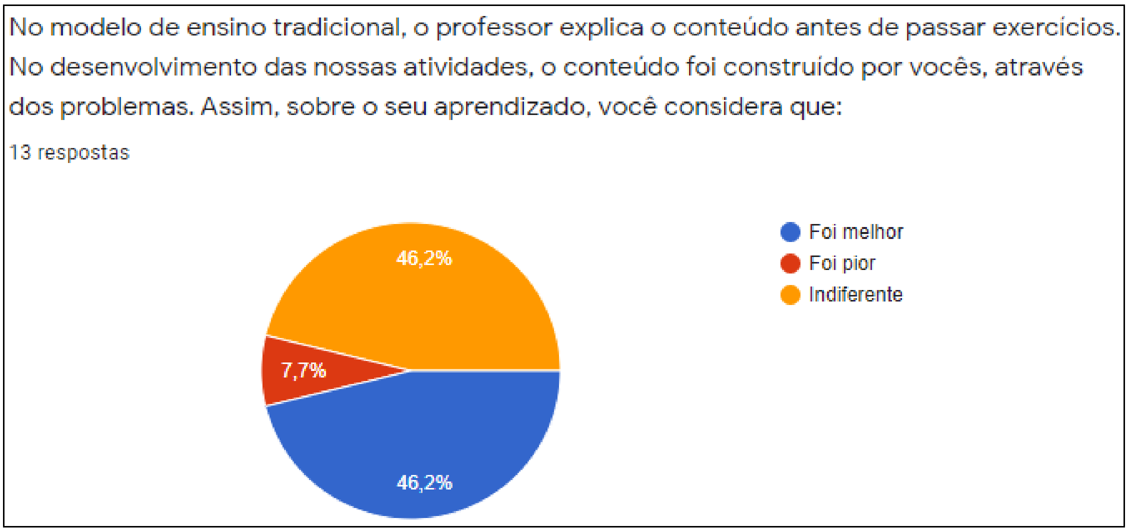


Fonte: Dados da Pesquisa

Observando o gráfico gerado, percebemos que 11 alunos disseram ter gostado da postura do professor-pesquisador em ser um observador e incentivador, deixando que os alunos fossem os criadores de seus próprios conhecimentos, 1 aluno disse não ter gostado e 1 respondeu que foi indiferente, na sua visão. Conclui-se então, que a Metodologia aplicada contribui na formação do aluno, pois ele desenvolve a sensação de autonomia, aumentando sua confiança para resolver os problemas.

Na segunda pergunta, os alunos responderam sobre a aprendizagem em relação ao conteúdo com o uso da Metodologia adotada.

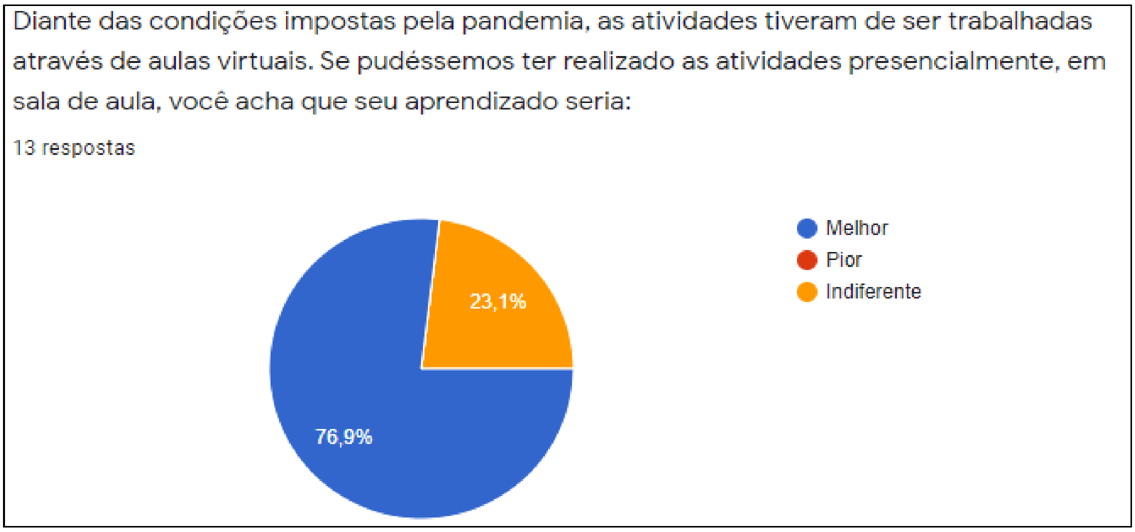
Figura 83 – Segunda pergunta do Questionário de Percepção dos alunos e respostas



Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com a Figura 83, vemos que 6 alunos afirmaram ter uma melhor aprendizagem com a metodologia utilizada, 1 aluno disse que a aprendizagem foi pior, e 6 afirmaram ter sido indiferente. Com isso, concluímos que parte dos alunos ainda se sente insegura com metodologias diferenciadas. Vale a pena ressaltar que a metodologia não pôde ser aplicada da forma como gostaríamos, o que se tornou um fator importante, pois as atividades em grupos contribuem muito para a construção do conhecimento, para o debate e compartilhamento de ideias, e essas atividades não puderam ser realizadas. Nesse sentido, fez-se a terceira pergunta, vista na Figura 84.

Figura 84 – Terceira pergunta do Questionário de Percepção dos alunos e respostas



Fonte: Dados da Pesquisa

Podemos ver no gráfico gerado pelas respostas dos alunos, que 76,9% dos alunos, ou seja, 10 dentre 13 afirmaram que teriam um melhor aprendizado se a metodologia pudesse ter sido aplicada presencialmente, 3 alunos disseram ser indiferente, e nenhum aluno respondeu que seria pior. Observa-se que a metodologia não se tornou totalmente efetiva na aprendizagem dos alunos pela forma como teve de ser abordada, por encontros virtuais.

Capítulo 7

Considerações Finais

No decorrer da pesquisa, notou-se o quanto a Geometria é desvalorizada por parte dos professores. Busca-se aqui, justificar este fato por meio de fatores históricos. Por muito tempo, acreditava-se que o ensino de Matemática com rigor, baseado em demonstrações, pudesse ter resultados positivos na aprendizagem dos alunos. Esse rigor matemático colocava os professores em situação desconfortável em relação aos conteúdos de Geometria, o que levou a um quase abandono destes conteúdos nas escolas. Porém, esse alto grau de rigor não se fez efetivo em nenhuma área da Matemática, o que levou pesquisadores e professores a buscar novas metodologias no ensino de Matemática, em geral. Dentre essas metodologias, a Resolução de Problemas foi muito bem vista e aceita pela comunidade científica, o que fez com que fosse recomendada por muitos especialistas e instituições, bem como pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL (1998)), aqui no Brasil.

Optou-se então, pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Onuchic et al. (2014), adaptada ao Ensino Remoto, com o objetivo de centralizar o processo de aprendizagem no aluno. O conteúdo escolhido foi Áreas de Figuras Planas, que é de extrema importância para a formação escolar dos estudantes, além de possuir diversas aplicações no cotidiano da sociedade, como um todo. A pesquisa foi desenvolvida com um grupo de estudantes de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Espírito santo, já que esse conteúdo é recomendado para tal nível escolar, por ESPÍRITO SANTO (2020).

Originalmente, a pesquisa seria desenvolvida seguindo todos os passos propostos pelas autoras Onuchic et al. (2014), dentro da sala de aula, porém, não foi possível devido às condições de vida impostas pela pandemia do novo coronavírus, o que causou a suspensão das atividades presenciais. Assim, houve a necessidade de readaptar a metodologia, de modo a desenvolver as atividades de forma online, por encontros virtuais, com 13 alunos de uma turma, já que nem todos possuem condições de acesso à internet suficientes para a participação na pesquisa.

Destaca-se a participação e empenho por parte dos alunos durante o desenvolvimento das atividades. Mostraram-se preocupados em cumprir todas as atividades, contribuindo para que a pesquisa pudesse ser efetivada. A participação dos estudantes foi essencial, pois a Metodologia utilizada necessitava dessa participação e interação entre alunos e entre alunos e professor. Observou-se, porém, que nem todos se sentiram confortáveis em expor seus resultados, dúvidas e opiniões durante os encontros virtuais. Com isso, o professor-pesquisador encontrou dificuldades em se dividir entre realizar os passos da Metodologia, obter a atenção dos alunos e estimular a participação dos mesmos.

Na execução dos problemas, observou-se que os alunos os realizaram com facilidade até certo momento. Na medida em que os problemas exigiam alguns pré-requisitos, como operações com termos algébricos para encontrar a fórmula para o cálculo de áreas de paralelogramos, trapézios e losangos, os alunos encontravam dificuldades. Portanto, verifica-se que para garantir a eficiência na construção dessas fórmulas, se faz necessário uma revisão de operações com monômios, frações algébricas e operações com frações. Sugerimos também que se faça uma ou duas aulas para diferenciar os conceitos de área e perímetro, visto que alguns alunos confundem esses conceitos, calculando perímetro em alguns problemas. Constatou-se também que houve uma motivação maior dos alunos na realização dos problemas com aplicações, como os problemas do tapete e do jardim, por exemplo.

Este trabalho buscou analisar as contribuições que a Metodologia EAARP adaptada ao Ensino Remoto pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem de Áreas de Figuras Planas, e após a aplicação de uma sequência didática, conclui-se que a Metodologia: desencadeia a autonomia nos estudantes; promove interação entre alunos; desenvolve a criticidade e faz com que o aluno exerça um papel ativo na construção do conteúdo. Porém, o fato de não ser aplicada da forma original, fez com que os resultados não ficassem totalmente da forma como eram esperados.

Sugere-se para trabalhos futuros, a utilização de materiais manipulativos como o Tangram, no estabelecimento de unidades de área e no cálculo de áreas por composição e decomposição de figuras, e o Geoplano, que pode ser útil durante as atividades com o Teorema de Pick, com a marcação de diferentes polígonos, garantindo uma melhor visualização e contagem dos pontos de borda e interiores.

Referências

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. *Boletim Gepem*, p. 133, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 56.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do professor de matemática*, v. 45, 2001. Citado na página 23.

BECK, V. C. A matemática no Egito Antigo. *EREMATSUL, Rio Grande do Sul*, 2010. Citado na página 22.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. *Pró-posições*, v. 4, n. 1, p. 18–23, 1993. Citado na página 59.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF: Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 17, 27, 54, 58, 80 e 100.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 26 e 27.

CLARAS, A. F.; PINTO, N. B. O movimento da matemática moderna e as iniciativas de formação docente. In: *Anais do VIII Congresso Nacional de Educação–EDUCERE/III Congresso Ibero-Americano sobre Violências nas Escolas–CIAVE*. Curitiba/PR: PUC: [s.n.], 2008. Citado na página 26.

DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. da. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. *Práxis Educativa (Brasil)*, Universidade Estadual de Ponta Grossa, v. 1, n. 1, p. 87–93, 2006. Citado na página 26.

ESPÍRITO SANTO. *Currículo ES 2020*. Vitória: Secretaria da Educação, 2020. v. 06. Citado 4 vezes nas páginas 18, 62, 63 e 100.

EVES, H. *Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. ISBN 8570564562. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 23.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, SciELO Brasil, v. 35, n. 3, p. 20–29, 1995. Citado na página 59.

HENRIQUES, M. D.; SILVA, A. M. da. *Área e Perímetro nos anos finais do Ensino Fundamental*. Rio de Janeiro: Autografia, 2019. ISBN 978-85-518-1737-7. Citado na página 83.

HERMES, J. D. V. O Teorema de Pick. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 203–213, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 59.

LOBO, J. d. S.; BAYER, A. Ensino de Geometria no Ensino Fundamental. *Acta scientiae, Canoas, RS*, v. 6, n. 1, p. 19–26, 2004. Citado na página 27.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista Blumenau: SBEM, Ano III*, n. 4, p. 3–13, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 16, 23 e 24.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. *Em Aberto*, v. 5, n. 31, 2011. Citado na página 58.

MALLOY, C. E. Perimeter and area through the van hiele model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 5, n. 2, p. 87, 1999. Citado na página 84.

MENESES, R. S. de. *Uma história da Geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino*. Dissertação (Mestrado) — PUC/SP, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

MLODINOW, L. A janela de Euclides. *A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial*, 2004. Citado na página 22.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

MURTY, M. R.; THAIN, N. Pick's theorem via minkowski's theorem. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 114, n. 8, p. 732–736, 2007. Citado na página 43.

NATIONAL COUNCIIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, INC. *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980 S.* RESTON, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.

NOGUEIRA, V. L. de. Uso da Geometria no Cotidiano. *Secretaria de Estado da Educação-SEED. Universidade Estadual do Norte do Paraná-UENP. Programa de Desenvolvimento Educacional-PDE*, 2008. Citado na página 20.

ONUCHIC, L. d. l. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP*, p. 199–220, 1999. Citado na página 52.

ONUCHIC, L. d. l. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? e para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico*, v. 20, n. 1, 2013. Citado na página 53.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, p. 73–98, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 49, 50, 52, 53, 55, 56 e 57.

ONUCHIC, L. d. L. R. et al. *Resolução de problemas: teoria e prática*. São Paulo: Paco Editorial, 2014. Citado 14 vezes nas páginas 8, 9, 17, 19, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 62, 73 e 100.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 26.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. D. Sequência didática na matemática. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 8, n. 17, 2013. Citado na página 62.

PESCO, D. U.; ARNAULT, R. G. T. *Geometria Básica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2012. v. 1. ISBN 978-85-7648-677-0. Citado na página 29.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 17, 50, 51 e 52.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas. *Investigar para aprender matemática*, p. 61–72, 1996. Citado na página 49.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics*, v. 31, p. 42, 1989. Citado na página 53.

SOUZA, L. P. D.; PIZZOL, E. T.; GAUDIO, P. D. V. A resolução de problemas matemáticos segundo pólya. *Conhecimento em Destaque*, v. 7, n. 17, 2018. Citado na página 51.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. São Paulo: Annablume, 1999. Citado na página 25.

VIDAL, M. C. P.; EUSTÁQUIO, R. G. Fatos históricos que valorizam o ensino da Geometria. *PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE. Curitiba: SEED/PR*, v. 1, 2014. Citado na página 21.

VINCH, T.; BERGAMIN, M. A Resolução de Problemas como estratégia didática para o ensino de Matemática. *Educação Matemática em Revista*, v. 1, n. 01, p. 57–63, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. d. I. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores. *Revista iberoamericana de educación matemática*, v. 11, p. 79–97, 2007. Citado na página 55.

Apêndices

APÊNDICE A

Autorização da Direção

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

AUTORIZAÇÃO

Prezada diretora,

Eu, **William da Silva Santos**, professor e discente, regularmente matriculado no curso de Pós-Graduação em Matemática, pela Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, venho solicitar por meio desta, a V. Senhoria, **Luzia Helena dos Santos, diretora da E.E.E.F.M. Jerônimo Monteiro**, a autorização para que possa desenvolver meu experimento de mestrado na turma 8º M01 .

As atividades serão realizadas durante a execução das Atividades Pedagógicas Não Presenciais – APNP's, com o seguinte tema: A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK, onde os alunos irão obter de forma significativa e motivadora, o entendimento de assuntos relacionados ao Cálculo de Áreas de Fguras Planas.

Atenciosamente

Campos dos Goytacazes, 26 de agosto de 2020

William da Silva Santos

William da Silva Santos
Prof. de Matemática

De acordo,

Luzia Helena dos Santos
Diretora Escolar
Aut: 1101-S Data: 07/10/2011

Luzia Helena dos Santos
Diretora

APÊNDICE B

Autorização dos Responsáveis

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Senhores pais ou responsáveis,

Os alunos da turma 8º M01 da E.E.E.F.M. "Jerônimo Monteiro", em que seu filho (a) encontra-se matriculado (a), estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, realizado pelo mestrando e professor de Matemática, William da Silva Santos.

A pesquisa será realizada durante a execução das Atividades Pedagógicas Não Presenciais – APNP's, com aulas online pelo Google Meet, com o seguinte tema: A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E TEOREMA DE PICK. O objetivo das aulas é que os alunos possam obter de forma significativa e motivadora, o entedimento de assuntos relacionados ao Cálculo de Áreas de Figuras Planas, contribuindo para o atingimento da melhoria no ensino e aprendizagem de seu filho (a).

Solicitamos a sua autorização para que ele (a) possa participar das atividades, e a permissão para que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que caso esteja de acordo preencha a autorização a seguir:

Eu, ____, autorizo a participação de meu filho (a) ____ na pesquisa desenvolvida pelo mestrando William da Silva Santos na área profissional de Matemática.

Campos dos Goytacazes, 26 de agosto de 2020

____

Assinatura do responsável

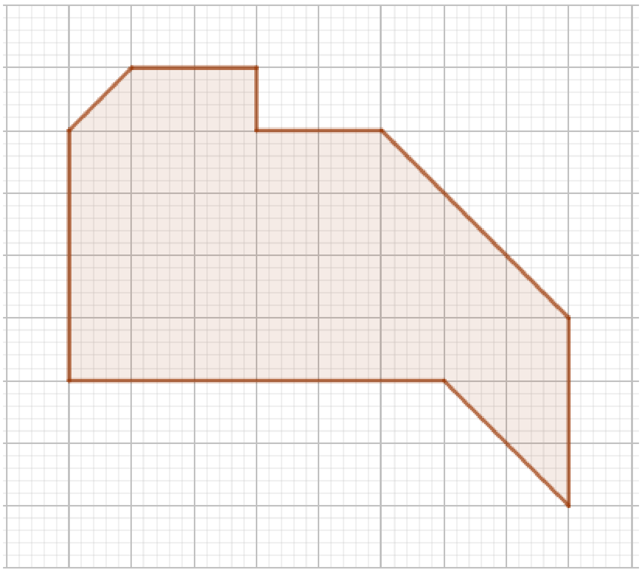
APÊNDICE C

Problemas

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 1: Observe o polígono abaixo, desenhado numa malha quadriculada.



a) Considerando um quadradinho da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?

b) Se cada quadradinho possuir 1 cm² de área, qual é a área da figura?

c) Se cada quadradinho possuir 2 cm² de área, qual é a área da figura?

d) Considerando dois quadradinhos da malha como unidade de medida, qual é a área da figura?

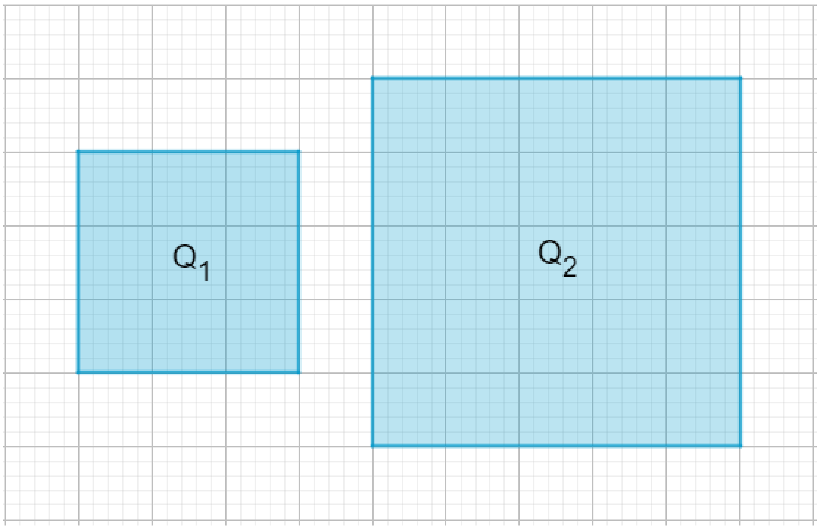
e) Se cada unidade de medida do item anterior possuir 5 cm², qual é a área da figura?

f) Se aumentarmos a unidade de medida, o que acontece com a medida da área da figura? Justifique.

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 2: Na malha onde estão desenhados os quadrados abaixo, cada quadradinho unitário possui 1 cm em cada lado.



a) Complete a tabela:

	Medida do lado	Medida da área
Q_1		
Q_2		

b) Em cada quadrado, que relação pode ser observada entre a medida de seu lado e sua área?

c) Se um quadrado possuir lado medindo ℓ cm, qual será sua área?

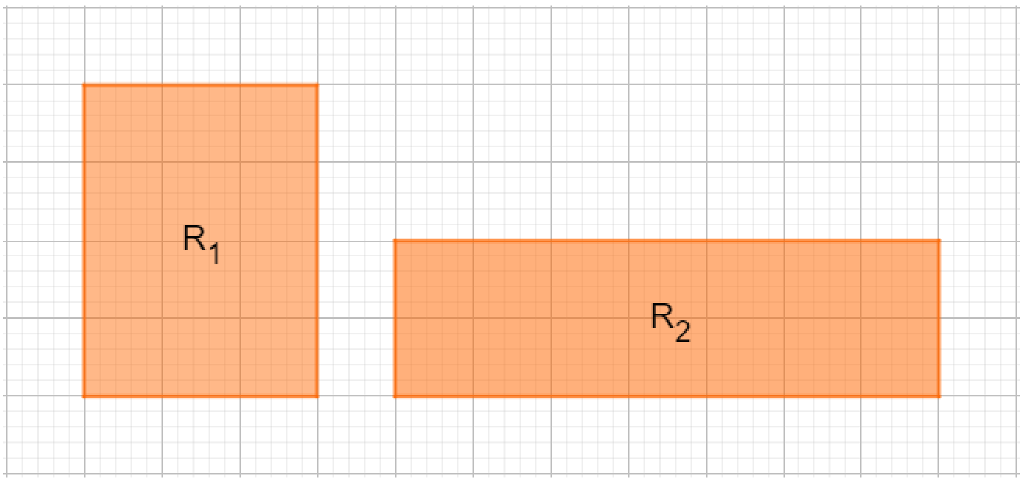
Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____

Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 3: Cada quadradinho unitário da malha abaixo possui 1 cm em cada lado.



a) Observando os retângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
R_1			
R_2			

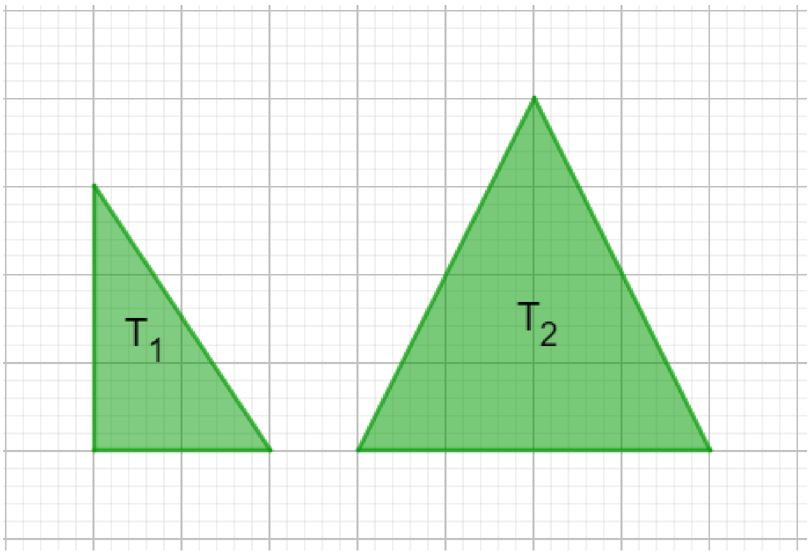
b) Em cada retângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

c) Se um retângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos — Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ______________

Problema 4: Considere também que cada quadradinho unitário da malha possui 1 cm de cada lado.



a) Observando os triângulos, complete a tabela:

	Medidas da base	Medida da altura	Medida da área
T_1			
T_2			

b) Em cada triângulo, que relação pode ser observada entre as medidas da base, da altura e de sua área?

c) Se um triângulo possuir base medindo *b* cm e altura medindo *h* cm, qual será sua área?

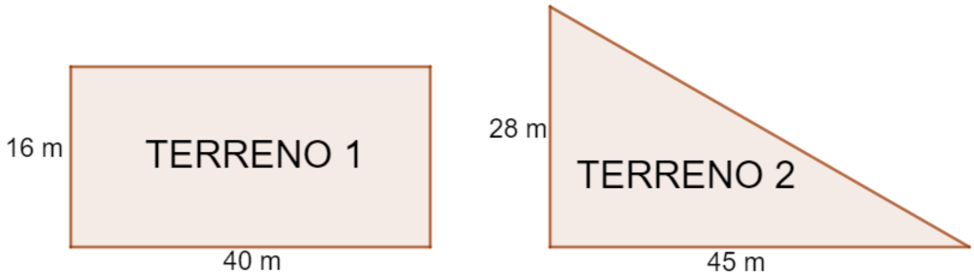
Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____

Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 5: Ronaldo é um agricultor do município de Jerônimo Monteiro e pretende comprar um terreno para iniciar uma pequena plantação de laranja. Ele encontrou dois terrenos, com as medidas e formas indicadas abaixo.



Se os dois terrenos forem vendidos por um mesmo preço, qual terreno é mais vantajoso para Ronaldo?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

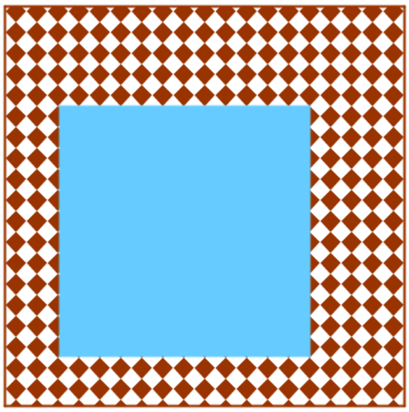
Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 6: Sandra quer comprar um tapete quadrado para a sala de sua casa que possui 3,5 m em cada lado. Cada metro quadrado do tapete é vendido por R$ 14,00. Quantos reais, Sandra irá gastar para comprar o tapete?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos   Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____   Turma: ______________

Problema 7: O quintal da casa de Camila tem o formato de um quadrado com 17 m em cada lado. Ela pretende construir uma piscina, também quadrada, com 11 m em cada lado e, em seguida, colocar piso em toda área restante.



Camila escolheu um piso que é vendido em caixas, sendo que:

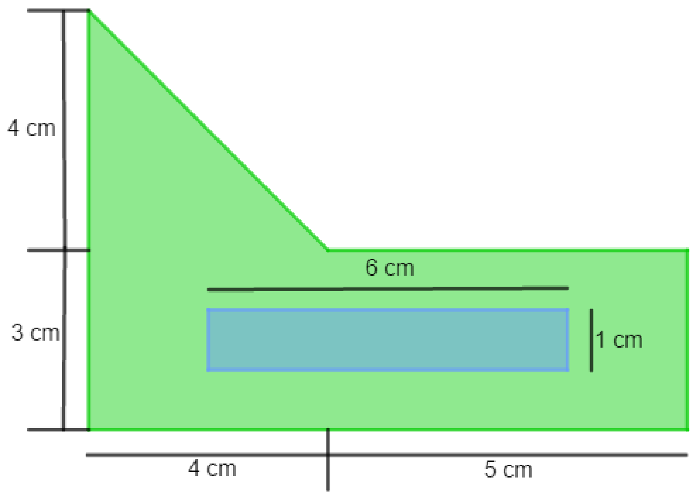
- Cada caixa cobre 2 m²;
- Cada caixa custa R$ 45,00.

Quantos reais, Camila irá gastar na compra do piso?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: _________________

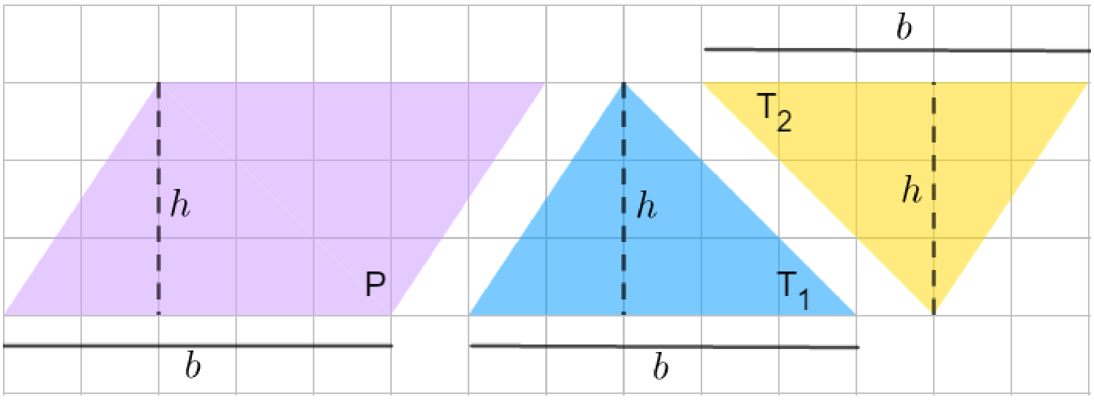
Problema 8: Qual é a área verde da figura?



Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 9: O paralelogramo P da figura abaixo possui base medindo *b* e altura medindo *h*, e pode ser decomposto em dois triângulos: T_1 e T_2, que possuem também base *b* e altura *h*.



a) Qual é a área do triângulo T_1?

b) Qual é a área do triângulo T_2?

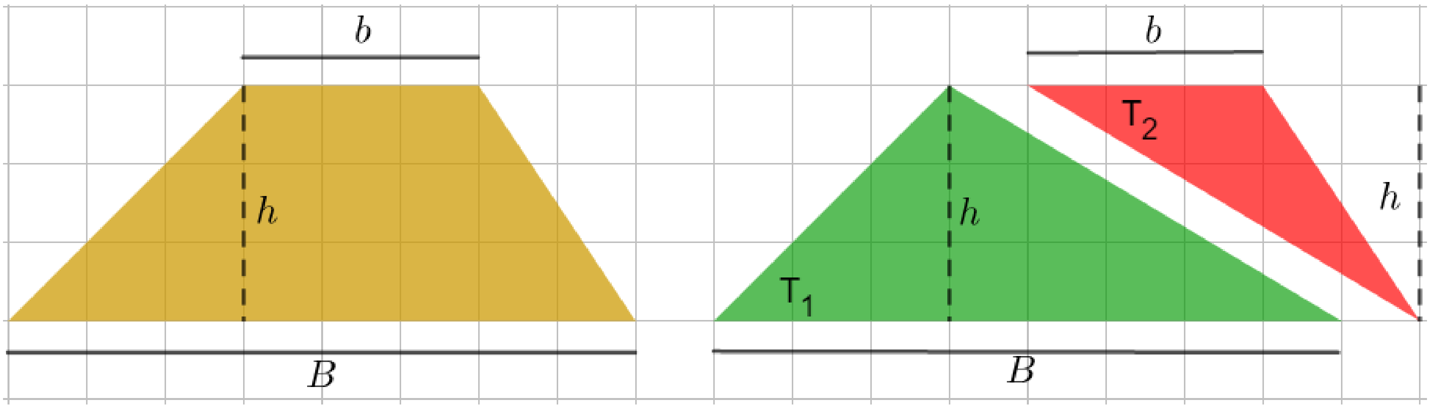
c) Qual é a área do paralelogramo?

d) Qual a relação entre as áreas de um retângulo e um paralelogramo, se tiverem mesmas medidas nas bases e alturas?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 10: O trapézio na figura abaixo possui base maior medindo *B*, base menor medindo *b* e altura *h*, e foi decomposto em dois triângulos: T_1 e T_2.
O triângulo T_1 possui base *B* e altura *h*, enquanto o triângulo T_2 possui base *b* e altura *h*.



a) Qual é a área do triângulo T_1?

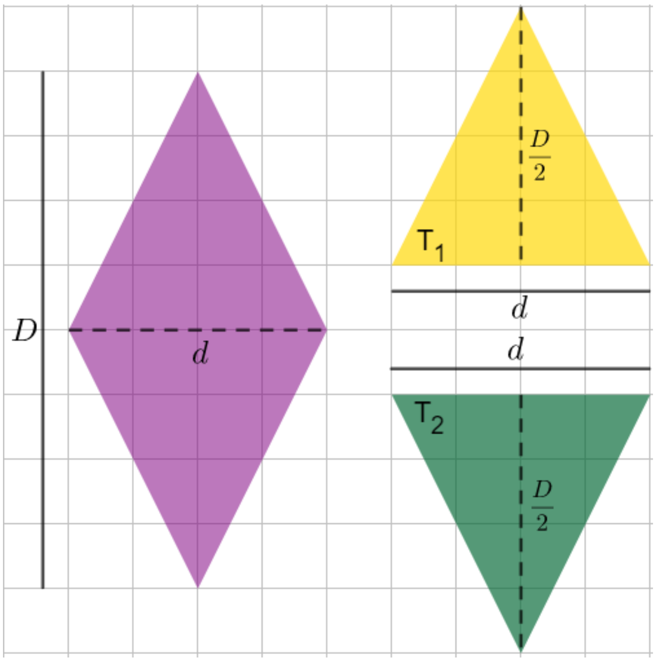
b) Qual é a área do triângulo T_2?

c) Qual é a área do trapézio?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ___/___/_____
Aluno (a): ____ Turma: ______________

Problema 11: O losango na figura abaixo possui diagonal maior medindo *D* e diagonal menor medindo *d*, e foi decomposto em dois triângulos congruentes: T_1 e T_2. Os triângulos possuem base medindo *d* e altura medindo
$\frac{D}{2}$.



a) Qual é a área do triângulo T_1?

b) Qual é a área do triângulo T_2?

c) Qual é a área do losango?

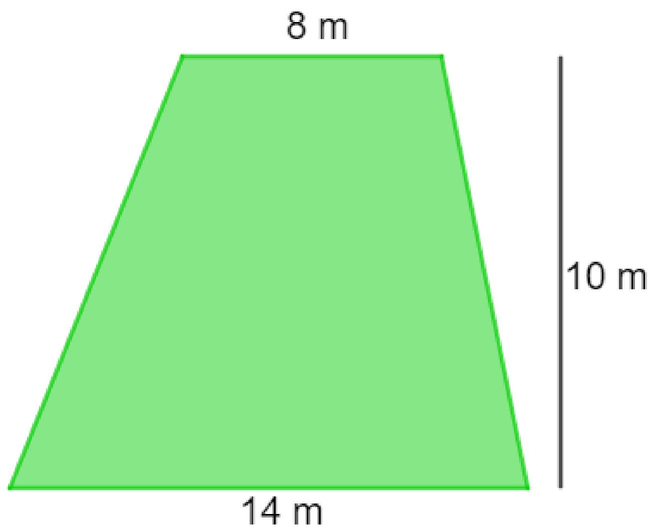
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos   Data: ___/___/____
Aluno (a): ____   Turma: _____________

Problema 12: Um jardim no formato de trapézio com as medidas indicadas na figura, será todo gramado pela prefeitura da cidade.



Sabe-se que:

- 1 kg de semente é suficiente para gramar 8 m²;
- Cada kg de semente custa R$ 26,30;
- A loja só vende embalagens de 1 kg.

Quanto a prefeitura irá gastar na compra das sementes?

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos   Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____   Turma: ________________

Problema 13: Pedrinho quer construir uma pipa em forma de losango de tal forma que as varetas meçam 45 cm e 30 cm. Quantos centímetros quadrados de papel seda, Pedrinho irá gastar?

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos | Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ | Turma: ________________

Problema 14: Uma sala retangular que mede 6 m de comprimento e 4 m de largura será toda ladrilhada com peças em formato de paralelogramo. Cada peça possui 12 cm de base e 8 cm de altura. Quantas peças serão necessárias para preencher toda a sala?

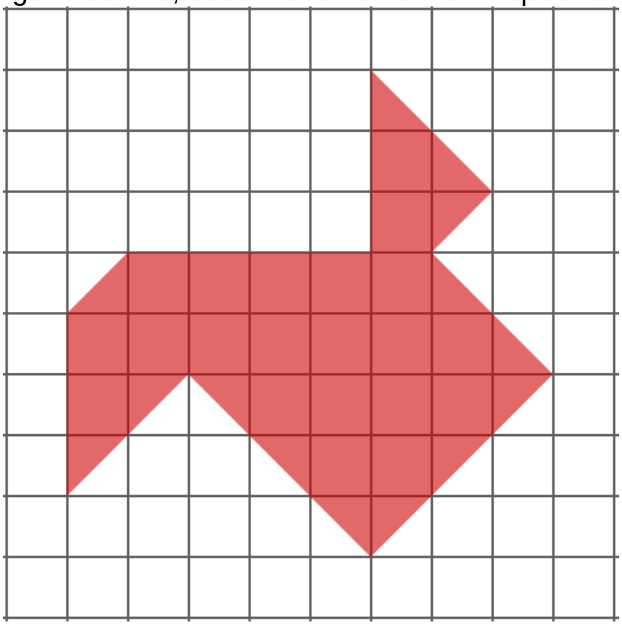
Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____

Aluno (a): ____ Turma: _________________

Problema 15: Observe o polígono abaixo, desenhado numa malha quadriculada.



a) Considerando um quadradinho da malha como unidade de medida de área, qual é a área da figura?

b) Denotando a quantidade de pontos de borda por B, qual é o valor de B?

c) Denotando a quantidade de pontos interiores por I, qual é o valor de I?

d) Calcule o valor da expressão abaixo, substituindo B e I pelos valores encontrados nos itens (b) e (c).

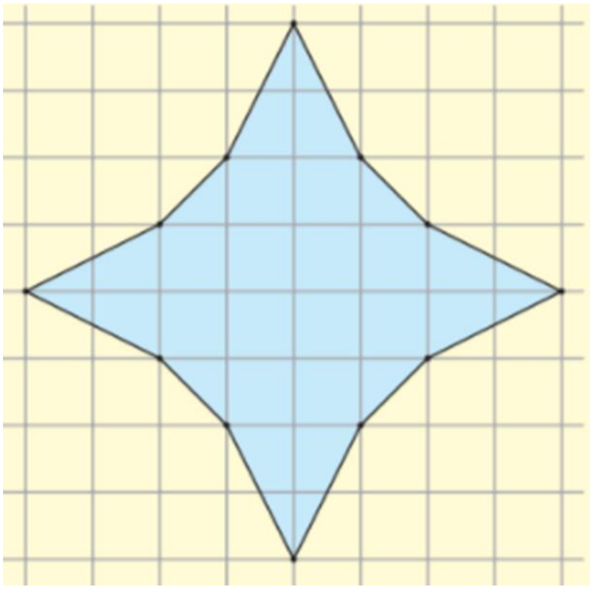
$$\frac{B}{2}+I-1$$

e) Compare o resultado do item (a) com o item (d). O que você concluiu?

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 16: [OBMEP – 2016 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – QUESTÃO 2] A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



A) 12
B) 22
C) 32
D) 64
E) 100

Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Atividade de Aplicação para Dissertação

Professor / Pesquisador: William da Silva Santos Data: ____/____/_____
Aluno (a): ____ Turma: ________________

Problema 17: [OBMEP – 2011 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – QUESTÃO 11] Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

A) 10 cm²
B) 12,5 cm²
C) 14,5 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²