**Wellix Moreira da Silva**

# Aplicação dos Logaritmos em Escolas do Campo

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE**
**DARCY RIBEIRO - UENF**
**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ**

**17 DE DEZEMBRO DE 2020**

Wellix Moreira da Silva

# Aplicação dos Logaritmos em Escolas do Campo

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeyro – UENF

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
17 DE DEZEMBRO DE 2020

**FICHA CATALOGRÁFICA**
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

S586 Silva, Wellix Moreira da.

Aplicação dos Logaritmos em Escolas do Campo / Wellix Moreira da Silva. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.

100 f. : il.
Bibliografia: 71 - 74.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2021.
Orientador: Rigoberto Gregorio Sanabria Castro.

1. Logaritmo. 2. Interdisciplinaridade. 3. Cotidiano. 4. Calagem. 5. Escolas do Campo. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

Wellix Moreira da Silva

# Aplicação dos Logaritmos em Escolas do Campo

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 17 de Dezembro de 2020.

**Prof^a^. Gilmara Teixeira Barcelos**
D.Sc. - IFF Campus Campos Centro

**Prof. José Ramón Arica Chávez**
D.Sc. - UENF

**Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre**
D.Sc. - UENF

**Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro**
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho aos alunos de escolas do campo, que este trabalho seja útil em aproximar a matemática cada vez mais do cotidiano dos alunos.*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Vanair e Sebastiana, aos meus irmão, Patrícia e Herculano, por todo amor, incentivo e apoio durante essa caminhada.

Sou grato pela confiança depositada na minha proposta de projeto pelo meu orientador Prof. Rigoberto G. Sanabria Castro, por todo o suporte, pelas correções e incentivos.

Agradeço a gestão e a todos os funcionários da Escola Estadual Fazenda Paraíso, por ter me concedido a permissão de aplicar a proposta de trabalho e também pelo apoio recebido.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

‘‘Feliz é aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.’’
(Cora Coralina)

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo geral mostrar para os alunos de escolas do campo que a matemática está presente em seu cotidiano através das aplicações dos logaritmos no processo de calagem, que é um processo muito comum realizado nas plantações, que visa aumentar a produção da colheita. Para alcançar esses objetivos foi desenvolvida uma sequência didática composta por 4 atividades e um questionário, sendo a primeira uma pesquisa feita pelos alunos, com o objetivo de introduzir os alunos aos logaritmos, a segunda atividade uma lista de questões voltadas aos aspectos históricos dos logaritmos e suas propriedades, a terceira atividade é composta por uma lista de questões com aplicações dos logaritmos em várias áreas, a quarta atividade sendo uma lista de questões totalmente voltada para o processo de calagem e por fim um questionário. Com a aplicação dessa sequência didática foi observado que ao trabalhar um conteúdo em sala de aula, abordando sua história e suas aplicações, principalmente aplicações voltadas ao cotidiano dos alunos, pode gerar resultados satisfatórios no processo de ensino e eprendizagem.

**Palavras-chaves**: Logaritmo; Interdisciplinaridade; Cotidiano; Calagem; Escolas do Campo.

# Abstract

This work has the general objective of showing to the students in countryside schools that mathematics is present in their daily lives through logarithms' applications in the liming process, which is a very common process carried out in the plantations aiming to increase harvest's production. To achieve these objectives, a didactic sequence was developed consisting of 4 activities, the first being a research done by the students, the second activity a list of questions focused on the logarithms' historical aspects and their properties, the third one being composed of a questions list with applications of the logarithms in various areas, the fourth activity a list of questions totally focused on the liming process and finally a questionnaire. And with the application of this didactic sequence, it was observed that when working a content in class, approaching its history of origin and its applications, mainly applications directed to the daily life of the students, can generate satisfactory results in the process of teaching and learning.

**Key-words**:Logarithm; Interdisciplinarity; Daily Life; Liming; Countryside Schools.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Lista de quadros

# Lista de gráficos

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| NC | Necessidade de Calagem |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| pH | Potencial Hidrogeniônico |

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A Matemática é uma disciplina que com o passar dos anos percebe-se que há um descaso crescente por parte dos alunos, devido ao metódo tradicional de ensino que ainda é adotado pelas escolas, e também devido as várias tecnologias e meios de comunicação existentes, desta forma o professor não só deve dominar o conteúdo, mas também utilizar as tecnologias ao seu favor junto com novos métodos de ensino, para conseguir passar o conteúdo para os alunos. (CONCEIÇÃO; MENDES; BORGES, 2015).

O aprendizado da Matemática e suas tecnologias busca levar aos alunos a utilização dos conhecimentos científicos e a sua compreensão, para que consigam entender e explicar o funcionamento do mundo, assim também como auxiliar a tomada de decisões em diversas situações da vida com um olhar mais analítico. (BRASIL, 2000).

Então, como uma disciplina tão importante como a Matemática encontra tantas barreiras para ser ensinada? Grande parte do ensino, principalmente o da Matemática é passado como algo a parte da vida dos alunos, não conseguem associar o que aprendem com o que vivem no dia-a-dia, gerando perguntas que ouvimos muitas vezes como "pra que aprendemos isso?" "onde vou usar isso na minha vida". Essas perguntas mostram que os alunos não veem aplicação daquilo que estudam na Matemática com o seu cotidiano, e isso faz com que percam o interesse em aprender Matemática.

Nas escolas do campo essa barreira em ensinar Matemática aumenta, pois os alunos de escolas do campo em sua maioria não têm interesse em continuar os estudos após o ensino médio, muitos já trabalham e tem terras e criações aos seus cuidados, pois precisam trabalhar para ajudar com a renda familiar. Essa evasão se torna ainda mais intensa na período da colheita, onde as famílias precisam de mais mão de obra. Dessa forma se torna mais complicado a tarefa de ensinar, o aluno por si só não vai conseguir relacionar a trigonometria por exemplo ao trabalho diário feito na área rural. (ALVES, 2017; PORFIRIO, 2018).

E também de acordo com o PCN:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2000, p. 40).

Uma das formas de mostrar aos alunos onde os conteúdos aprendidos podem ser usados em suas atividades diárias e aumentar o interesse deles em aprender é por meio da interdisciplinaridade que segundo o PCN Brasil (2000, p. 21) "[...] a interdisciplinaridade tem uma função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas contemporâneos". Assim a interdisciplinaridade busca trazer o conhecimento para o dia-a-dia do aluno de forma que ele consiga ver claramente onde esse conteúdo é aplicado em coisas que ele já vivência e qual a importãncia em aprender tais conteúdos.

Um dos conteúdos específicos da Matemática, que encontra muitas barreiras na hora de ser ensinado, são os logaritmos, um tema com uma área de aplicação muito rica, que ao ser ensinado nas aulas, na grande maioria das vezes só é ensinado suas propriedades operatórias, Dessa forma os alunos não conhecem as áreas onde os logaritmos são aplicados. E por sí só os estudantes não conseguem fazer relções práticas com esse conteúdo. (FERREIRA, 2006; SOARES, 2011).

Desta forma temos o seguinte questionamento: de que forma podemos trabalhar os logaritmos com os alunos do campo de forma a tornar esse conteúdo mais interessante para eles? Foi então pensado como resposta usando como base o (BRASIL, 2000), trabalhar com esses alunos, aplicações dos logaritmos voltadas ao seu dia-a-dia, sendo dessa forma o objetivo geral desse trabalho é mostrar para os alunos de escolas do campo que a matemática está presente em seu cotidiano através das aplicações dos logaritmos no processo de calagem.

Dessa forma definiu-se os seguintes objetivos específicos:

- Trabalhar a escrita matemática dos alunos, através de propriedades.
- Identificar o contexto histórico que a humanidade passava na época que levou a criação dos logaritmos.
- Determinar a importância que os logaritmos tiveram como ferramenta de cálculo.
- Descrever como a relação entre uma P.G e uma P.A e também as *regras prostafaréticas* podem ter contribuído para a concepção dos logaritmos.
- Identificar as propriedades dos logaritmos como ferramenta de cálculo.
- Identificar o logaritmo como função em suas aplicações.

- Descrever as propriedades operatórias dos logaritmos para resolver os diversos problemas de aplicação que estão envolvidos.
- Identificar a importância que os logaritmos tem nos dias de hoje, principalmente na forma de função.
- Desenvolver com os alunos um olhar mais técnico sobre o processo de calagem.
- Determinar que o processo de calagem também é essencial em viveiros de peixes.
- Deduzir com os alunos que um bom cálculo da Necessidade de Calagem (NC) é essencial para um bom resultado da colheita.
- Estimular o interesse do aluno em aprender ao trazer a matemática para o seu cotidiano.
- Ilustrar para os alunos que a matemática não é algo distante da realidade como eles costumam pensar, e sim algo que está presente no dia-a-dia de cada um.

Esse trabalho foi desenvolvido e aplicado na zona rural da Cidade de Espera Feliz, no estado de Minas Gerais, na Zona da Mata Mineira, nessa região é cultivado principalmente o café, que é a fonte de renda principal para a maioria dos agricultores. Esse trabalho está organizado em capítulos como segue.

O Capítulo 2 é uma revisão bibliográfica dividida em seções que são organizadas da seguinte forma:

A seção 2.1 é composta por um resumo sobre a história dos logaritmos, que foi passado para os alunos através de aulas expositivas, apresentando para eles os contextos históricos que levaram a sua descoberta, de forma tal que eles consigam entender a necessidade que tiveram naquela época e como conseguiram supri-la. A seção 2.2 trata sobre a teoria dos logaritmos, explicitando seus conceitos, propriedades e demonstrações. A seção 2.3 aborda as aplicações dos logaritmos nas diversas áreas do conhecimento que também foi apresentado aos alunos para conhecerem onde esse conteúdo é aplicado, como na Matemática financeira, escala de pH, abalos sísmicos, acústica, crescimento populacional, decaimento radioativo, psicologia, teoria da informação, com exemplos e questões sugeridas a serem aplicadas em cada uma dessas áreas. Na seção 2.4 é abordado o processo de calagem, que é o processo onde se aplica calcário ao solo e a lagoas de forma a reduzir sua acidez, melhorando a colheita e a criação de peixes, onde segundo Mesquita et al. (2016) o cálculo da quantidade exata de calcário a ser utilizada é fundamental para se ter os resultados desejados da produção.

O Capítulo 3 apresenta de forma detalhada a sequência didática da pesquisa que consiste na aplicação de 4 atividades, sendo a primeira atividade composta por uma pesquisa sobre os logaritmos, a segunda atividade consiste em uma lista de questões que contempla a história dos logaritmos, a terceira atividade é constituída de uma lista de questões que abordam as aplicações dos logaritmos em várias áreas do conhecimento e a quarta atividade é formada por questões focadas no procedimento do cálculo da calagem, terminando com a aplicação de um questionário.

No Capítulo 4 será apresentado a análise dos resultados da aplicação da sequência didática.

# Capítulo 2

# Revisão bibliográfica

Neste capítulo é apresentado uma revisão bibliográfica sobre os logarítmos sendo a seção 2.1 sobre a história dos logaritmos, a definição e propriedades dos logaritmos é abordada na seção 2.2, na seção 2.3 é comentado sobre as aplicações dos logaritmos em várias situações, e na seção 2.4 é apresentado de uma forma mais aprofundada a aplicação dos logaritmos no processo de calagem.

## 2.1 Breve história dos logaritmos

Com o desenvolvimento nas áreas de navegação, astronomia, comércio, guerra e outras ciências, houve a necessidade de se utilizar cada vez mais cálculos aritméticos mais complexos, de forma que se fez necessário o desenvolvimento de conceitos para que esses cálculos se tornassem mais rápidos e precisos, um desses conceitos foi os logaritmos, criado por John Napier. (EVES, 2004).

Ioannes Neper (John Napier, Figura 1 ), nasceu em 1550 no castelo de Merchiston, perto de Edimburgo na Escócia, propriedade de sua família. Seu pai era Sir Archibald Napier e sua mãe era Janet Bothwell. Começou a estudar religião aos 13 anos na Universidade de St. Andrews e em 1571 voltou para sua terra natal onde se casou com Elizabeth Stirling, que tiveram dois filhos. Depois da morte de sua esposa, se casou novamente com Agnes Chisholm e tiveram 10 filhos. Em 1608 com a morte de seu pai, Napier voltou a Merchiston onde passou o resto de sua vida. (MAOR, 2008).

Conforme diz Maor (2008, p. 16) o principal interesse de John Napier estava na religião, foi protestante ardoroso e anticatólico e em 1593 publicou o livro *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, que atacava a Igreja Católica e propunha que o papa era o Anticristo e previa também que o dia do juízo final aconteceria entre os anos de 1688 e 1700. Esse livro teve 21 edições e 10 delas lançadas ainda enquanto Napier vivia, deixando-o confiante de que seu nome já estava garantido na história.

Ainda de acordo com Maor (2008), embora a religião fosse o foco principal de

Figura 1 – John Napier

Fonte: (EVES, 2004, p. 341)

seus estudos, ele também tinha vários outros interesses, testou muitos estercos e sais para fertilizar o solo, inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível da água, tinha interesse também em questões militares, visto que existia um temor na época de que o rei Filipe II da Espanha estava se preparando para invadir a inglaterra.

Segundo Eves (2004) Napier gostava também de estudar Matemática e ciências, e foi a partir de seus estudos em Matemática que seu nome entrou para a história, com a descoberta dos logaritmos. Não se sabe de onde veio a ideia que levou Napier a criar os logaritmos, mas na época existiam um conjunto de fórmulas que eram bem conhecidas, chamadas *regras prostafaréticas*, são elas:

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$
$$2\,\mathrm{sen}\, a \cos b = \mathrm{sen}\,(a+b) + \mathrm{sen}\,(a-b)$$
$$2\cos a\,\mathrm{sen}\, b = \mathrm{sen}\,(a+b) - \mathrm{sen}\,(a-b)$$
$$2\,\mathrm{sen}\, a\,\mathrm{sen}\, b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

Fórmulas que transformam o produto de duas expressões trigonométricas em uma soma ou diferença de outras expressões trigonométricas, deixando o cálculo mais simples, provavelmente foram essas fórmulas que colocaram Napier no caminho certo.

De acordo com Maor (2008) uma outra ideia que pode ter levado Napier aos logaritmos é a relação que existe entre a progressão geométrica e a progressão aritmética que foi formulada por Michel Stifel em seu livro *Arithmetica integra*, onde na progressão geométrica:

$$q, q^2, q^3, q^4, \ldots, q^m, \ldots, q^n, \ldots$$

os expoentes formam a progressão aritmética:

$$1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots,\, m,\, \ldots,\, n,\, \ldots$$

de razão 1, dessa forma De acordo com Maor (2008) para saber a multiplicação de dois elementos da progressão geométrica, basta somar seus expoentes, deste modo se quisermos saber o valor de $q^3 \cdot q^4$ basta fazermos a soma dos expoentes $3 + 4 = 7$ logo o resultado será $q^7$, da mesma forma ocorre a divisão, se quisermos fazer a divisão $\frac{q^6}{q^4}$ basta subtrair os expoentes $6 - 4 = 2$ desta forma tendo como resultado $q^2$, a Tabela 1 exemplifica melhor essa relação.

Tabela 1 – Potências de base 3

| n | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |

Fonte: O autor

A partir dessa tabela vamos fazer a multiplicação de 27 por 243, basta localizar esses números na tabela, olhar a qual potência de 3 eles correspondem na linha de cima e fazer a soma, assim temos $3 + 5 = 8$, após é só olhar na tabela qual número representa $3^8$ esse número é 6.561, o que transformou uma conta de multiplicação a principio complicada em uma soma mais simples de ser realizada.

A Tabela 1 nos ajuda a resolver cálculos somente com números inteiros. Esse método seria mais útil se abrangesse quaisquer números, para isso havia duas maneiras: escolher um número fixo para as potências que devia ser um número pequeno suficiente para que as potências não aumentem tão rapidamente, ou usar expoentes fracionários, John Napier escolheu a primeira, visto que os expoentes fracionários não eram bem conhecidos na época, dessa forma o trabalho de Napier foi encontrar qual número pequeno o suficiente iria utilizar, depois de anos de estudos o número escolhido por Napier foi 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$. (MAOR, 2008).

A escolha desse número segundo Maor (2008) foi baseada em uma prática que era usada na trigonometria que consistia em dividir um círculo de raio unitário em $10^7$ partes, subtraindo então a unidade de sua $10^7$ parte obteve o número mais próximo de 1 nesse sistema que é $1 - 10^{-7}$, dai a idea de que John Napier possa ter se baseado nas *regras prostafaréticas* para a concepção dos logaritmos.

Como descrito por Maor (2008), John Napier dedicou 20 anos de sua vida resolvendo numerosos cálculos com o número que escolheu, completando sua tarefa em 1614 e dando o nome para sua invenção de logaritmo que significa “número proporcional” publicando sua criação também em 1614 num tratado em latim chamado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e em 1619 foi publicado postumamente pelo seu filho Robert o *Mirifici logarithmorum canonis constructio*.

> O reconhecimento universal caiu sobre seu inventor e a invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda a Europa e até mesmo da distante China. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos foi o astrônomo Johannes Kepler, que os utilizou com grande sucesso em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias (MAOR, 2008, p. 25).

A criação dos logaritmos chamou a atenção de cientistas do mundo todo e, segundo Maor (2008), Henry Briggs (1561-1631) que era um professor de geometria do colégio Gresham em Londres ficou tão impressionado com a criação de John Napier que resolveu ir até a Escócia se encontrar com Napier em pessoa.

Segundo Maor (2008), nesse encontro entre os dois matemáticos, Briggs deu sugestões para que as tabelas de logaritmos criadas por Napier ficassem mais adequadas. Tomar o logaritmo de zero igual a 1, no lugar de $10^7$ e tomar o logaritmo de 10 como uma potência mais acertada de 10. esse logaritmo foi decidido como 1 ficando assim $\log 10 = 1$, surgindo assim os logaritmos modernos.

Napier concordou com as propostas de Briggs, mas já estava com a idade avançada e sem forças para continuar, Briggs então tomou para si o trabalho de reformular as tabelas de logaritmos, terminando em 1624 onde publicou os resultados com o nome de *Arithmetica logarithmica* que continha os logaritmos de todos os números inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. O espaço entre 20.000 e 90.000 só foi preenchido em 1628 pelo editor holandês Adriaan Vlacq (1600-1667) na segunda edição de *Arithmetica logarithmica* e essas tabelas de logaritmos foram utilizadas até o século XX que só entrou em desuso devido a invenção do computador moderno. No Anexo A temos uma tabela de logaritmos retirada de Maor (2008).

De acordo com Maor (2008), houve outra pessoa que protestou pelo título de inventor dos logaritmos, seu nome era Joost Bürgi (1552-1632), Figura 2, que era um fabricante de relógios suíço. Bürgi também criou uma tabela de logaritmos mas no lugar do número usado por Napier $1 - 10^{-7}$ ele usou o número $1 + 10^{-4}$. Há evidencias de que Bürgi concluiu seus estudos em 1588 bem antes de Napier começar a desenvolver seu trabalho, mas Bürgi publicou seu trabalho somente em 1620, 6 anos após Napier, o que tornou Napier o detentor da criação dos logaritmos.

Conforme descrito por Eves (2004), John Napier teve outras contribuições na matemática como um dispositivo mnemônico que ficou conhecido como regra das partes circulares, contribuiu com pelo menos duas fórmulas trigonométricas que são conhecidas como *analogias de Napier* usado na trigonometria esférica e também um mecanismo para efetuar multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas que recebeu o nome de *barras de Napier* ou *ossos de Napier*.

Figura 2 – Joost Bürgi

Fonte: (THIENGO, 2013)

## 2.2 Definição e Propriedades dos Logaritmos

Com a criação das calculadoras e dos computadores modernos, o uso dos logaritmos como um instrumento para facilitar na resolução de certos cálculos foi cada vez mais sendo deixado de lado, se tornando quase sem utilidade nos dias atuais, mas os logaritmos ainda brilham quando se trata de suas aplicações, como a função logarítmica é inversa a função exponencial, tem uma vasta área de aplicação, que detalharemos melhor na próxima seção, assim aprender a definição e as propriedades dos logaritmos é de extrema importância para a compreensão de suas aplicações.

Nesta seção vamos abordar a definição e as propriedades dos logaritmos, usando como base os trabalhos: (DANTE, 2013; BIANCHINI; PACCOLA, 1997; IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977).

### 2.2.1 Definição

**Definição 2.1.** *Sejam $a$ e $b$ números reais positivos, com $a \neq 1$. Se $b = a^c$, dizemos que o expoente $c$ é o logaritmo de $b$ na base $a$, e escrevemos da seguinte forma:*

$$\log_a b = c \iff a^c = b. \tag{2.1}$$

Da Definição 2.1 temos:

$c$ é o logaritmo

$a$ é a base do logaritmo

$b$ é o logaritmando

Vamos ver alguns exemplos a partir da Definição 2.1:

**Exemplo 2.1.** $\log_2 8 = 3\, pois\, 2^3 = 8$

**Exemplo 2.2.** $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} 81 = -4\, pois\, \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$

Da Definição 2.1 dos logaritmos surgem algumas consequências e são elas:

1. $\log_a 1 = 0$, pois para qualquer $a > 0$ e com $a \neq 1$ temos $a^0 = 1$

2. $\log_a a = 1$, pois para todo $a > 0$ e com $a \neq 1$ vamos ter $a^1 = a$

3. $\log_a a^n = n$, pois para todo $a > 0$ e com $a \neq 1$ temos $a^n = a^n$

4. $a^{\log_a n} = n$, com $n > 0, a > 0$ e $a \neq 1$
   **Demonstração**: Fazendo $\log_a n = x$ e usando a definição 2.1 temos $a^x = n$, trocando o valor de $x$ por $a \log_a n$, temos $a^{\log_a n} = n$

5. $\log_a x = \log_a y \iff x = y$ com $a > 0, x > 0, y > 0\, e\, a \neq 1$
   **Demonstração**: Fazendo $\log_a x = m$ e $\log_a y = n$ temos que $a^m = x$ e $a^n = y$, dai vem:

   - Se $\log_a x = \log_a y \Rightarrow m = n \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow x = y$
   - Se $x = y \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow m = n \Rightarrow \log_a x = \log_a y$

### 2.2.2 Propriedades

**Propriedade 2.1** (Logaritmo do Produto)**.** *Qualquer que seja a base $a$ desde que $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que o logaritmo do produto de dois fatores é igual a soma dos logaritmos desses fatores.*

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

**Demonstração**: Fazendo $\log_a(m \cdot n) = z \Rightarrow a^z = (m \cdot n)$, $\log_a m = x \Rightarrow a^x = m$ e $\log_a n = y \Rightarrow a^y = n$, temos que mostrar que $z = x + y$.
Das igualdades acima temos:

$$\log_a(m \cdot n) = z \Rightarrow a^z = (m \cdot n) \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Assim:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Essa Propriedade 2.1 pode ser estendida para o caso onde o logaritmo do produto tenha n fatores reais positivos:

$$\log_a(b_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$$

**Demonstração**: Vamos fazer a demonstração por indução sobre n.

1. Para n=2 é verdadeiro como vimos em 2.1, onde:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

2. Vamos supor a validade da propriedade para n fatores, assim temos a hipótese de indução:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$$

3. Vamos mostrar a validade da propriedade para n+1 fatores:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \cdot b_{n+1}) = \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) \cdot b_{n+1}]$$

Tomando $(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = p$, temos pela propriedade 2.1):

$$\log_a(p \cdot b_{n+1}) = \log_a p + \log_a b_{n+1}$$

Substituimos $\log_a p$ por $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n)$, dai temos:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) + \log_a b_{n+1}$$

O primeiro logaritmo é a nossa hipotese de indução, logo:

$$\log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n + \log_a b_{n+1}$$

Demonstrando assim a extensão da propriedade 2.1 para n fatores

**Propriedade 2.2** (Logaritmo do quociente)**.** *qualquer que seja a base $a$ desde que $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que o logaritmo do quociente de dois fatores é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor,ficando assim:*

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

**Demonstração**: Fazendo $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = z \Rightarrow a^z = \left(\frac{m}{n}\right)$, $\log_a m = x \Rightarrow a^x = m$ e $\log_a n = y \Rightarrow a^y = n$, vamos mostrar que $z = x - y$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = z \Rightarrow a^z = \left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow a^z = \left(\frac{a^x}{a^y}\right) \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

assim:

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

**Observação 2.1.** *Note que em $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ se fizermos $m = 1$ temos:*

$$\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = \log_a 1 - \log_a n \Rightarrow 0 - \log_a n$$

*o que da:*

$$\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = -\log_a n$$

**Propriedade 2.3** (Logaritmo da potência)**.** *Em qualquer que seja a base $a$ desde que $a > 0$ e $a \neq 1$, temos que o logaritmo de uma potência de expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.*

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

**Demonstração**: Tomando $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ e $\log_a b^c = y \Rightarrow a^y = b^c$, vamos mostrar que $y = c \cdot x$.

Temos que: $\log_a b^c = y \Rightarrow a^y = b^c$, mas $b = a^x$, fazendo a substituição, temos: $a^y = (a^x)^c \Rightarrow a^y = a^{x \cdot c} \Rightarrow y = c \cdot x$ o que da:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

**Propriedade 2.4** (Propriedade da mudança de base)**.** *Sejam os números $a$,$b$ e $c$ onde $a > 0, b > 0, c > 0$ e com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, temos que:*

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

**Demonstração**: Suponhamos que $\log_c b = z$, $\log_a b = x$ e $\log_a c = Y$ vamos provar que $z = \frac{x}{y}$.

Das suposições acima, temos que: $c^z = b$, $a^x = b$ e $a^y = c$

$$c^z = b = a^x \Rightarrow c^z = a^x$$

Mas temos que $a^y = c$

Substituindo $c$: $(a^y)^z = a^x \Rightarrow a^{y \cdot z} = a^x \Rightarrow y \cdot z = x \Rightarrow z = \frac{x}{y}$

### 2.2.3 O Número e

Existe uma base usada nos logaritmos que é muito importante, visto que esse número aparece de forma natural na resolução de vários problemas, principalmente onde se aplica os logaritmos. Napier em seus estudos chegou próximo a esse número, que é o número *e*, que é dado como:

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828$$

Com esse número temos o sistema de logaritmos de base *e* que são chamados de logaritmos naturais ou logaritmos neperianos, sua notação é dada como: $\log_e x$ ou $\ln x$. (BIANCHINI; PACCOLA, 1997) .

## 2.3 Algumas aplicações gerais dos logaritmos

Nesta seção vamos apresentar algumas aplicações mais gerais dos logaritmos. No Apêndice A temos exemplos resolvidos, que podem ser usados em sala de aula buscando facilitar o aprendizado, tornando o conteúdo mais atraente para os estudantes. Outras aplicações bem como outros exemplos de atividades podem ser encontrados nos seguintes trabalhos: (ANGELIN, 2015; MOURA, 2018; OLIVEIRA, 2014; PEREIRA, 2016; RIBEIRO, 2017; ROCCHA, 2013; SILVA, 2016; THIENGO, 2013).

### 2.3.1 Matemática Financeira

Na Matemática Financeira os logaritmos são aplicados nos juros compostos, em problemas onde temos que encontrar o tempo $t$ que um certo capital $C$ aplicado a uma taxa de $i$ de juros gera ao final desse período um montante $M$.

Onde a fórmula de juros compostos é: $M = C \cdot (1+i)^n$

No Apêndice A temos atividades resolvidas sobre a aplicação dos logaritmos na Matemática Financeira, que podem ser usadas como exemplos em salas de aula para melhorar o processo de ensino e aprendizagem.

### 2.3.2 Abalos Sísmicos

Segundo Dante (2013) um Sismo ou terremoto, é um fenômeno onde o solo se move de forma cíclica que geram ondas fazendo assim com que o solo se mova para baixo, para cima e de um lado para outro, esse fenômeno é causado quando rochas da litosfera são submetidas a altas tensões e se acomodam, quando esse fenômeno ocorre sob o oceano, pode vir a acontecer tsunamis.

Os terremotos ocorrem em regiões onde há o contato entre placas tectônicas ou em falhas entre blocos rochosos. O maior terremoto registrado foi o Grande Terremoro do chile em 1960 que registrou 9,5 pontos na escala Richter.

A escala Richter foi criada em 1935 por Charles F. Richter e de acordo com Dante (2013) corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas geradas pelo terremoto (sísmicas) a 100km do epicentro, e sua fórmula é:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Onde:

- I é a intensidade do terremoto, que pode variar de 0 até 9,5(maior terremoto registrado).
- $E$ é a energia liberada em quilowatt-hora $kWh$.

- $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$.

No Apêndice A temos atividades resolvidas sobre abalos sísmicos onde é aplicado os logaritmos para serem resolvidos, essas atividades podem ser usadas como exemplo nas salas de aula.

### 2.3.3 Acústica

De Acordo com Donoso (2005) chamamos de Som a sensação auditiva que detectamos com nossos ouvidos, essa sensação é provocada por perturbações em um meio material que causa vibrações que se propagam até serem captadas pelos ouvidos. Essas vibrações precisam de um meio material para se propagarem, sejá um meio gasoso, líquido ou sólido, sendo assim o som não se propaga no vácuo.

Nossos ouvidos conseguem distinguir sons "fracos" dos sons "fortes" através da intensidade do som. O nível dessa intensidade sonora varia de acordo com o logaritmo de intensidade do som, onde a menor intensidade de som que nossos ouvidos conseguem captar (menor intensidade de som Audível) é $10^{-12} W/m^2 = I_0$ e a intensidade do som que se quer determinar é $I$, assim para determinarmos o nível sonoro (*Nis*) usamos a fórmula:

$$Nis = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

A unidade de medida usada é o bel homanagem a Alexander Grahan Bell (inventor do telefone), mas ná prática usamos o decibel $(dB)$ como unidade de medida que é a décima parte do bel, de forma que a fórmula fica:

$$Nis = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

No Apêndice A temos exercícios resolvidos sobre acústica que envolvem logaritmos na sua resolução, esses exercícios podem ser utilizados em sala de aula como exemplos.

### 2.3.4 Crescimento Populacional

Um dos modelos que descrevem o crescimento populacional mais conhecido é o do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798, de acordo com Tavoni e Oliveira (2013) o modelo Malthusiano supõe que a taxa pela qual uma determinada população cresce em um instante é proporcional a quantidade de habitantes existentes naquele instante.

É um modelo usado também para calcular populações em um curto espaço de tempo, já que não leva em consideração os fatores externos que podem influenciar no crescimento de certa população de forma a aumentar ou diminuir seu crescimento. Assim a fórmula para se calcular o crescimento populacional segundo o modelo de Malthus é:

$$P = P_0 e^{kt}$$

onde:

- $k > 0$ é a constante de proporcionalidade.
- $P_0$ é a população inicial.
- $t$ é o tempo que se quer estimar do crescimento de certa população.
- $P$ é a população após passar um período $t$ de tempo.

No Apêndice A temos exemplos de atividades resolvidas que envolvem a aplicação dos logaritmos em questões relacionadas a crescimento populacional, essas atividades são sujestões de exemplos que podem ser utilizados para introduziar os alunos as aplicações dos logaritmos.

### 2.3.5 Decaimento Radioativo

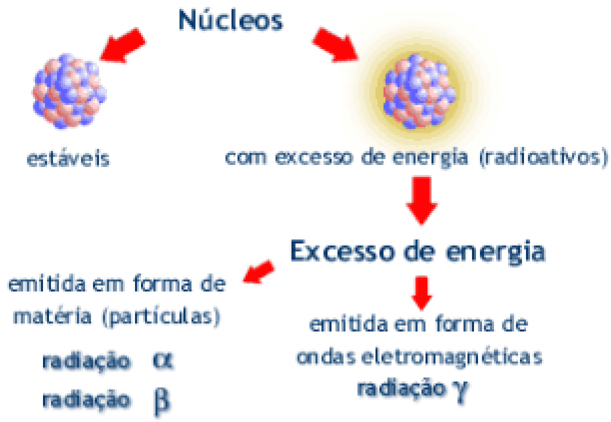
Segundo Cardoso (200-) “O esquecimento de uma rocha de urânio sobre um filme fotográfico virgem levou à descoberta de um fenômeno interessante: o filme foi velado (marcado) por alguma “alguma coisa” que saía da rocha”, essa “coisa” é chamada de radiação.

Ainda de acordo com Cardoso (200-), elementos com massas próximas à do urânio como o polônio e o rádio apresentam a mesma propriedade de emitir radiação, assim os elementos que tem essa caracteristica são chamados de radioativos, esses elementos tem um núcleo muito energético, por ter partículas em demasia, esses elementos tendem a se estabilizar e nesse processo emitem particulas, como mostra a Figura 3.

Com essa emissão de particulas, o número de prótons no núcleo desses elementos radioativos sofre uma variação, assim esses elementos se “transformam” em outros elementos, essa “transformação” tem o nome de decaimento radioativo, e o decaimento radioativo de cada elemento acontece com uma velocidade única para cada elemento. (CARDOSO, 200-).

Para que possamos saber qual é a “duração” de um elemento radioativo antes que ele se transforme em outro, é preciso estabelecer um método de comparação, para isso usamos o conceito de meia-vida, que é o tempo necessário para que um elemento radioativo reduza sua atividade pela metade, e cada elemento possui um tempo de meia-vida próprio, assim passado o tempo de meia vida de um certo elemento, a atividade dele é a metade de atividade inicial, A Quadro 1 contêm o valor da meia-vida de certos elementos.

Figura 3 – Emissão de particulas




Fonte: (CARDOSO, 200-, p. 5)

No Apêndice A temos exemplos resolvidos de atividades que relacionam a aplicação dos logaritmos no contexto do decaimento radioativo, esses exemplos ficam como sugestão que podem ser usadas em salas de aula para auxiliar no processo de ensino.

Quadro 1 – Meia-vida de alguns nuclídeos

| Nuclídeo | Meia-vida |
|---|---|
| $^{238}U$ | $4,5 \cdot 10^9$ anos |
| $^{234}Th$ | $24,5$ dias |
| $^{234}Pa$ | $6,7$ horas |
| $^{234}U$ | $2,7 \cdot 10^5$ anos |
| $^{218}Po$ | $3$ minutos |
| $^{210}Bi$ | $5$ dias |
| $^{210}Pb$ | $19,4$ anos |
| $^{206}Ti$ | $4,3$ minutos |

Fonte: (EICHLER; CALVETE; SALGADO, 1997, p. 37)

### 2.3.6 Potencial Hidrogeniônico

Segundo Atkins e Jones (2012), há uma dificuldade em descrever de forma quantitativa a concentração dos íons de hidrogênio de determinada solução, pois essa concentração pode assumir várias ordens de grandeza podendo ser maior que $1$ mol/L e ser menor que $10^{-14}$ mol/L.

De acordo com Atkins e Jones (2012), para driblar a dificuldade de ter que trabalhar com ordens de grandeza tão variadas, usa-se o Potencial hidrogeniônico (pH) para indicar a concentração de íons de hidrogênio, a escala de pH é uma escala logarítmica que é encontrada aplicando o logaritmo decimal negativo da concentração desses íons de hidrogênio.

$$pH = -\log(H^+)$$

De acordo com Atkins e Jones (2012), a escala de pH foi introduzida em 1909 pelo químico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen usada na época em um trabalho de controle de qualidade na fabricação de cerveja e hoje em dia é altamente utilizada nas ciências em geral.

Pela definição de pH:

O sinal negativo nos diz que quanto maior for a concentração de íons de hidrogênio, menor será o valor do pH, assim temos:

- Quando o pH for menor que 7 dizemos que a substância é ácida.
- Quando o pH de uma substância for igual a 7 dizemos que é uma substância neutra.
- Quando o pH for maior que 7 dizemos que a substância é básica.

No Apêndice A temos exemplos de atividades resolvidas sobre pH que podem ser usadas em salas de aula no processo de trabalhar a aplicabilidade dos logaritmos em demais áreas do conhecimento.

### 2.3.7 Psicologia

Nessa seção vamos estudar duas leis desenvolvidas na psicologia que tem como base em suas fórmulas os logarítmos, a lei de Hick-Hyman e a lei de Fitts.

#### 2.3.7.1 Lei de Hick-Hyman

A lei de Hick-Hyman (HICK, 1952; HYMAN, 1953) foi fórmulada por William Edmund Hick (1912-1974) e por Ray Hyman, nascido em 23 de julho de 1928 (92 anos). É uma lei que define o tempo médio que uma pessoa leva para fazer uma escolha onde há *n* opções para serem escolhidas.

Se todas essas escolhas possuem uma igual probabilidade, a fórmula para calcular o tempo médio de escolha é:

$$T = K \cdot \log_2 (n + 1)$$

Onde:

- $T$ é o tempo médio para se fazer uma escolha em n opções
- K é uma constante, geralmente usado $K = 150$ milissegundos
- n é a quantidade de opções disponíveis para a escolha

Quando as $n$ opções de escolha possuem probabilidades diferentes, usa-se a fórmula:

$$T = K \cdot \sum_{1}^{i} p_i \log_2 \left(1 + \frac{1}{p_i}\right)$$

Onde $p_i$ é a probabilidade da opção $i$

Abaixo temos um exercício resolvido sobre a lei de Hick-Hyman que fica como sugestão de exemplo para ser usadas nas aulas sobre logaritmo, de forma a mostrar para os alunos a aplicabilidade dos logaritmos em diversas situações.

**Exemplo 2.3.** ***[Autoria própria]*** *Uma lista telefônica existem 1 023 nomes em ordem alfabética, qual o tempo médio que uma pessoa leva para encontrar um nome em específico nessa lista?*

*Usando a lei de Hick e assumindo $K = 150$ milissegundos, temos:*

$$T = 150 \cdot \log_2 (1\,023 + 1) = 150 \cdot \log_2 1\,024 = 150 \cdot 10 = 1\,500ms$$

*Assim o tempo médio para uma pessoa encontrar um nome em específico nessa lista é de 1,5 segundos*

#### 2.3.7.2 Lei de Fitts

> A relação entre velocidade e precisão de movimentos é inversamente proporcional, caracterizada pelo aumento de precisão quando a velocidade de movimento é reduzida assim como por uma redução da precisão quando o movimento é realizado em velocidades mais altas(OELKE; RAITER, 2010, p. 1).

Essa relação foi definida por Paul Morris Fitts Jr. (1912-1965) no seu artigo “The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of moviment” (FITTS JR, 1954). A lei de Fitts surgiu em estudos de psicologia mas hoje em dia é muito usada pelos designers.

Existe algumas variações na fórmula da lei de Fitts, mas nesse trabalho vamos usar a fórmula original proposta por ele em 1954 que é a seguinte:

$$ID = \log_2 \left(\frac{2D}{L}\right)$$

onde:

- $ID$ é o índice de dificuldade que quanto maior, se torna mais difícil acertar o alvo.
- $D$ e a distância entre o objeto e o alvo a ser acertado.
- $L$ é a largura do alvo dada em pixels.

Segue uma questão resolvida sobre a lei de Fitts que pode ser usada como exemplos nas aulas de logaritmo, com intuito de trabalhar sua interdisciplinaridade e mostrar para o aluno suas aplicações.

**Exemplo 2.4.** ***[Autoria própria]*** *Sabe-se que o $ID$ (índice de dificuldade) para acertar um certo alvo é 5 e sua distância ao alvo é 12 pixels, qual é a largura do alvo?*

*Pela fórmula da lei de Fitts, temos:*

$$5 = \log_2\left(\frac{2 \cdot 12}{L}\right) = \log_2\left(\frac{24}{L}\right)$$

*Escrevendo na forma de potência:*

$$\left(\frac{24}{L}\right) = 2^5 \Rightarrow L = \frac{24}{32} = 0,75$$

*Assim a largura do alvo é 0,75 pixels*

### 2.3.8 Teoria da Informação

Cada evento com probabilidade $P$ de ocorrer vem associado a ele uma quantidade de informação $I$, segundo Reza (1961) se pode calcular essa quantidade de informação associada a tal evento sabendo que sua probabilidade de ocorrência é $P$ usando a fórmula:

$$I = -\log_2 P$$

O logaritmo usado é em base 2, e a unidade de medida da quantidade de informação $I$ é dada em bits. Se observarmos o resultado coroa no lançamento de uma moeda, o resultado será:

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,bit$$

Isto decorre porque no lançamento de uma moeda, temos dois eventos equiprováveis, o resultado "cara" e o resultado "coroa", assim de acordo com Reza (1961) podemos generalizar o caso onde temos $N$ eventos equiprováveis, onde a quantidade de informação associada a observação de um desses eventos é:

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{2^N}\right) = N\,bits$$

Vamos apresentar abaixo duas atividades resolvidas que mostram a aplicação dos logaritmos na teoria da informação e ficam como sugestão para serem usadas como conteúdo interdisciplinar sobre os logaritmos.

**Exemplo 2.5.** ***[Autoria própria]*** *A informação que um determinado evento forneceu foi de 5 bits, qual a probabilidade desse evento ocorrer?*

*Aplicando a fórmula, temos:*

$$5 = -\log_2 P \Rightarrow P = 2^{-5} = 3,125\%$$

**Exemplo 2.6.** ***[Autoria própria]*** *No lançamento de 2 dados, temos que a soma dos resultados obtidos nos 2 dados foi um número primo, qual é a informação associada a esse evento?*

*No lançamento de 2 dados, temos um total de* $6 \times 6 = 36$ *resultados possível, vamos análizar os resultados onde a soma dos números é um número primo:*

- *(1,1)(1,2)(1,4)(1,6)*
- *(2,1)(2,3)(2,5)*
- *(3,2)(3,4)*
- *(4,1)(4,3)*
- *(5,2)(5,6)*
- *(6,1)(6,5)*

*Temos então 15 casos favoráveis, logo a probabilidade de no lançamento a soma dos valores ser um número primo é:*

$$\frac{15}{36} \approx 41,7\%$$

*Aplicando ná fórmula agora, temos:*

$$I = -\log_2 0,417 = -\left(\frac{\log 0,417}{\log 2}\right) = 1,262 bits$$

*Assim a informação associada a esse evento é de 1,262 bits*

## 2.4 O Processo de Calagem

Nesta seção apresentamos um resumo bibliográfico sobre o processo de calagem voltado para as lavouras de café e viveiros de peixes, processo esse que é muito utilizado no campo, de forma que possa ser usada em sala de aula como uma aplicação dos logaritmos, para que os alunos, principalmente da área rural, possam ver que a matemática está presente no cotidiano de todos.

### 2.4.1 Calagem nas plantações

Segundo Mesquita et al. (2016) a palavra calagem tem origem da palavra calcário, que atualmente é o corretivo de solo mais usado na agricultura. Corretivo de solo é qualquer produto com capacidade de melhorar a produtividade do solo e reduzir as características do solo que são prejudiciais as plantas, e tem como objetivos, corrigir a acidez, fornecer nutrientes essenciais, estimular a atividade microbiana, além de diminuir ou mesmo anular os efeitos em níveis tóxicos do ferro, manganês e do alumínio.

A calagem é práticada a muito tempo, a cerca de pelo menos 3 mil anos, segundo Wiethölter (2000) com os primeiros relatos de seu uso vindo dos gregos que usavam marga que é um depósito de argila misturada com calcário, logo após, os romanos aprenderam dos gregos o uso da marga.

De acordo com Wiethölter (2000) em 1813 na Inglaterra, Sir Humphry Davy relatou em seu livro "Elements of Agricultural Chemistry" uma forma de determinar o teor de $CaCO_3$ (Carbonato de Cálcio) nos solos e em 1832 Edmund Ruffin em seu livro "An Essay on Calcareous Manure" usou o médoto de Sir Humphry Davy junto aos seus estudos para neutralizar a acidez do solo o que foi considerado o primeiro trabalho ciêntifico sobre acidez do solo e o cultivo de plantas.

Segundo Wiethölter (2000) foi aproximadamente em 1900 onde começaram a surgir teorias sobre as reações do Alumínio (Al) com o solo e no ínicio da década de 1920 onde começaram os estudos que relacionavam o desenvolvimento das plantações com o teor de Al existente no solo, apartir dai foram se aperfeiçoando esses estudos até chegar nos métodos de análise do solo que usamos nos dias de hoje.

A ação do corretivo no solo começa assim que é aplicado e perdura por meses ou, dependendo das especificações do corretivo utilizado, pode durar até alguns anos, a aplicação geralmente é feita dois a três meses antes das épocas do ano mais chuvosas, já que a chuva potêncializa a eficiência da aplicação.

Em lavouras de café a aplicação pode ser feita através de maquinas ou manualmente, a aplicação manual é geralmente feita em terrenos mais montanhosos e ela é feita abaixo da saia do cafeeiro. A calagem também pode ser feita em toda a extensão do terreno, caso a análise mostre necessidade, mas o principal local de aplicação é sob a saia do cafeeiro que é o local de maior atuação radicular da planta.

### 2.4.2 Análise do solo

Para se fazer uma análise do solo, primeiro fazemos a extração de amostragens do terreno, essa amostragem deve ser feita de forma cuidadosa para que não comprometa o resultado da análise evitando a indicação de calagem e adubação de forma incorreta o que acarreta em perdas econômicas e danos ambientais.

De acordo com Ribeiro, Guimarães e Alvarez (1999) para que a amostragem represente de forma fiel o solo, a área de extração deve ser homogênea, para isso é feita a divisão do terreno em glebas (porções do terreno), para que cada gleba seja a mais homogênea póssivel, é levado em conta, na sua divisão, caracteríticas como: posição topográfica, vegetação, cor e textura do solo, etc. e se ainda assim as áreas homogêneas ficarem grandes, é recomendado que se faça uma subdivisão nessas glebas de forma a ter no máximo um tamanho de 10 ha

De acordo com Mesquita et al. (2016) a amostragem deve ser feita antes da arruação (processo feito antes da colheita de forma a impedir que o café se misture a restos de vegetação e com a terra) e no mínimo 60 dias após a ultima adubação e é um processo que idealmente deve ser repetido todos os anos.

Conforme Ribeiro, Guimarães e Alvarez (1999) Para se ter uma boa representação do terreno, deve ser feita a coleta de 20 a 30 amostras em cada gleba aumentando a quantidade de amostras até 30 de acordo com a heterogeneidade da gleba, e para que seja feita uma boa coleta é indicado que as amostras sejam retiradas de forma uniforme em toda a gleba, uma forma eficiente de fazer esse processo é fazer as coletas das amostras por meio de um caminho em zig-zag.

Segundo Ribeiro, Guimarães e Alvarez (1999) é importante que essas amostras tenham um mesmo volume, e para que tenha esse padrão basta usar ferramentas chamadas Trados de amostragem, mas usando uma pá ou um enxadão também se consegue resultados satisfatórios e de acordo com Mesquita et al. (2016) a amostragem deve ser feita em uma camada de 20 a 40 cm, usando o mesmo buraco para se fazer uma segunda amostragem de 0 a 20 cm, cada amostragem deve ser colocada em baldes de plastico diferentes.

Em lavouras de café é recomendavel que essas amostras sejam retiradas abaixo da copa da planta que é o lugar com maior atividade radicular e também onde as adubações são feitas, caso se queira também fazer uma análise do terreno como um todo pode-se também pegar amostras nas entrelinhas das filheiras dos pés de café, mas mantendo separadas as amostras das entrelinhas com as amostras retiradas abaixo dos pés de café.

De acordo com Mesquita et al. (2016) outra análise importante que é complementar a análise do solo, é a análise foliar, que através dela conseguimos saber os teores de macro e micronutrientes existentes na planta, analisando se estão presentes em quantidades adequadas, essa amostragem é geralmente feita entre os meses de novembro e dezembro.

Para essa amostragem é importante que seja feita na mesma divisão de glebas utilizadas para a análise do solo, deve-se coletar pelo menos 100 folhas em um mínimo de 25 pés de café, a coleta é feita em forma de zig-zag retirando o 3º ou 4º par de folhas no terço médio da planta (Figura 4, Figura 5), é importante que as folhas sejam guardadas em sacos de plástico limpos, e segundo Mesquita et al. (2016, p. 10) “Caso haja demora no envio, é aconselhável lavar as folhas em água corrente, enxaguar com água filtrada, secar, cuidadosamente, e colocar em geladeira, na parte inferioir, até o dia seguinte”.

Figura 4 – Folhas a serem retiradas para análise foliar

Fonte: O autor

De acordo com Souza, Miranda e Lobato (1997) em uma análise de solo, podemos calcular três pH’s diferentes, o pH em água, o pH em $CaCl_2$ (Cloreto de Cálcio) e o pH SMP que utiliza a solução tampão SMP (recebeu esse nome por conta de seus criadores: Shoemaker, Mc. Lean, Y. Pratt), solução tampão é uma solução que resiste a mudanças de pH e em seu trabalho ele explica os passos para se calcular esses pH’s:

Figura 5 – Terço médio do cafeeiro

Fonte: O autor

> O pH em água ou em $CaCl_2$ é determinado tomando-se 10 ml de solo mais 25 ml de água destilada ou da solução de $CaCl_2$ 0,01M, agitandi-se por 10 minutos e tendo-se o pH após uma hora . Nestes Mesmos fracos defini-se o pH SMP pela adição de 5 ml da solução SMP, ..., agitando-se por 15 minutos a 220 rpm e , após o repouso de uma hora, procedendo-se à leitura do pH.(SOUZA; MIRANDA; LOBATO, 1997, p. 6)

O pH SMP é de extrema importância para esse trabalho, pois éxiste uma relação entre o pH SMP e o logaritmo natural da acidez potencial (H+Al), que será explicado mais a frente como usar essa relação para auxiliar no cálculo da Necessidade de Calagem do solo (NC). Segundo Teixeira et al. (2017) a acidez potencial é definida pela soma da acidez não trocável (que é constituída pelo hidrogênio de ligação covalente junto aos compostos de alumínio e aos coloides com carga negativa) com a acidez trocável (constinuída pelos íons de $H^+$ e $Al^{3+}$).

Como o Brasil é um país de dimensões continentais, existe uma grande diversidade de solos com características muito distintas entre eles, desta forma existe uma série de equações diferentes que relacionam o pH SMP com a Acidez potencial ($H+Al$), como o trabalho foi aplicado no estado de Minas Gerais, vamos usar a equação usada neste Estado proposta por Corrêa, Lopes e Carvalho (1985) que é:

$$\ln(H + Al) = 8,0629 - 1,1110pHSMP \tag{2.2}$$

É com essa equação que vamos mostrar a interdisciplinaridade dos logaritmos com o processo de calagem.

Segundo Ribeiro, Guimarães e Alvarez (1999) no Estado de Minas Gerais usamos dois métodos para calcularmos a quantidade de calcário a ser aplicada de forma adequada no solo, que chamamos de Necessidade de Calagem (NC) que são: "Método de neutralização da acidez trocável e da elevação dos teores de Ca e de Mg trocáveis" e o "Método da Saturação de Bases". O Método de Saturação de bases vai ser o método utilizado nesse trabalho, pois pela sua fórmula fica mais visível a relação entre o pH SMP e a acidez potêncial.

#### 2.4.2.1 Método da Saturação de Bases

Como descrito por Ribeiro, Guimarães e Alvarez (1999), Mesquita et al. (2016) o cálculo da Necessidade de Calagem (NC) usando "'Método da Saturação de Bases" busca aumentar o valor das concentrações no solo, dos elementos: Cálcio (Ca), Magnésio (Mg), Potássio (K) e Sódio (Na), e também diminuir a acidez do solo, que é causada pelos íons de Hidrogênio (H) e Aluminío (Al). A essas concentrações dos elementos Cálcio, Magnésio, Potássio e Sódio, damos o nome de saturação de bases $(V)$. Para o cálculo da necessidade de calagem usamos dois valores para a $(V)$:

1. Chamamos de $(V_1)$ a saturação de bases atual do solo, que é a concentração atual dos elementos Ca, Mg, K e Na. É um valor dado em porcentagem, e sua fórmula é dada por:

$$V_1 = \frac{SB \times 100}{T} \tag{2.3}$$

Onde:

- SB é a soma das bases, e seu valor é a soma das concentrações dos elementos Ca, MG, K e Na dadas em centimol de carga por decímetro cúbico $(cmol_c/dm^3)$ .

$$SB = Ca + Mg + K + Na \tag{2.4}$$

- T também chamada de CTC a pH 7 é a capacidade de troca catiônica a pH 7, que se traduz na capacidade que o solo tem de reter os íons de elementos como:

Ca, Mg, K e Na disponibilizando esses elementos para as plantas absorverem. É calculado pela fórmula:

$$T = (H + Al) + SB, \tag{2.5}$$

onde o valor da acidez potencial (H+Al) pode ser calculado pela Equação 2.2

2. Chamamos de $V_2$ a saturação de bases adequada para a plantação, o valor de $V_2$ é o valor das concentrações de Ca, MG, K e Na que queremos no solo ao final do processo de calagem, ele é dado em porcentagem e varia de cultura para cultura, mas na maior parte das plantações gira em torno de $60\%$ a $70\%$ (a cultura de café requer $V_2 = 60\%$)

Sabendo os valores da soma das bases, da capacidade de troca catiônica, da saturação de bases atual e da saturação de bases desejada, podemos cálcular o valor da Necessidade de Calagem (NC) que vai nos dar a quantidade de calcário a ser usada em toneladas por hectare ($t/ha$), através da equação:

$$NC = \frac{T(V_2 - V_1)}{PRNT} \tag{2.6}$$

Onde $PRNT$ é o poder relativo de neutralização total do calcário, seu valor é dado em porcentagem e quanto mais próximo de $100\%$ melhor é a qualidade do calcário, esse valor é encontrado na embalagem do calcário.

Vamos apresentar agora um exemplo de como o cálculo da calagem pode ser feito:

**Exemplo 2.7.** *Um produtor de café da cidade de Espera Feliz (MG) fez uma análise de solo para saber a quantidade de calcário necessária a ser utilizada em sua plantação, na Tabela 2 temos alguns dos valores mostrados no resultado dessa análise:*

Tabela 2 – Resultado da análise do solo

| pH SMP | Ca | Mg | K |
|---|---|---|---|
| $5,3$ | $0,55Cmol_c/dm^3$ | $0,14Cmol_c/dm^3$ | $0,13Cmol_c/dm^3$ |

Fonte: O autor

*Através dos resultados obtidos nessa tabela, qual será a quantidade de calcário que deverá ser usada na plantação desse produtor sabendo que o método utilizado foi o da saturação de bases? (considere o $V_2 = 60\%$ para plantação de café e $PRNT = 100\%$)*

*Temos que a fórmula utilizada para calcular a necessidade de calagem é dada por:*

$$NC = \frac{T(V_2 - V_1)}{PRNT}$$

*Falta sabermos os valores de $T$ e $V_1$*

*Para calcular o valor de $T$ precisamos dos valores de Ca, Mg e K que temos na tabela, e precisamos também do valor de $H + Al$ que não está na tabela, mas temos o valor do pH SMP assim pela Equação 2.2 conseguimos calcular o valor de $H + Al$:*

$$\ln(H + Al) = 8,0629 - 1,1110pHSMP$$

$$\ln(H + Al) = 8,0629 - 1,1110 \cdot 5,3$$

$$\ln(H + Al) = 8,0629 - 5,8883$$

$$\ln(H + Al) = 2,1746 \Rightarrow H + Al = e^{2,1746}$$

$$H + Al \approx 8,8Cmol_c/dm^3$$

*Agora podemos calcular o valor de $T$ e depos de $V_1$*

$$T = H + Al + Ca + Mg + K = 8,8 + 0,55 + 0,14 + 0,13 = 9,62$$

*Para Calcularmos o valor de $V_1$ usamos a fórmula:*

$$V_1 = \frac{SB \cdot 100}{T}$$

*Temos que: $SB = Ca + Mg + K = 0,55 + 0,14 + 0,13 = 0,82$ substituindo os valores, temos:*

$$V_1 = \frac{0,82 \cdot 100}{9,62} = 8,52$$

*A saturação de bases atual do solo é de $8,52\%$ que é muito baixa, substituindo todos os valores na Equação 2.6, temos:*

$$NC = \frac{T(V_2 - V_1)}{PRNT}$$

$$NC = \frac{9,62(60 - 8,52)}{100}$$

$$NC = \frac{9,62 \cdot 51,48}{100} \Rightarrow NC \approx 4,95t/ha$$

### 2.4.3 Viveiros de Peixes

De acordo com Durigon et al. (2017) na calagem em viveiros de aquicultura ao invés de estarmos fornecendo nutrientes para as plantas, estamos fornecendo para o fitoplâncton que produz oxigênio pela fotossíntese para os peixes, e além de aumentar a população de fitoplâncton, aumenta também a de zooplâncton e ambos servem como alimento para os peixes.

Além disso a calagem em viveiros de aquicultura ajuda também a corrigir o ph da água, pois segundo Queiroz e Boeira (2006) em viveiros com pH ácido os cedimentos no fundo também serão ácidos assim absorvendo quase todo o fósforo que é adicionado através de fertilizantes, assim uma boa calagem aumenta a efetividade de uma futura aplicação de fertilizente no viveiro.

Além do mais segundo Durigon et al. (2017) a calagem em viveiros ajuda a diminuir a quantidade de material argiloso em suspensão na água, bem como sua turbidez, neutraliza os efeitos tóxicos dos elementos Fe (ferro), Mn (manganês) e Al (alumínio), aumenta a reserva de carbonatos e bicarbonatos melhorando a capacidade tampão da água, além de disponibilizar cálcio para os organismos.

O método para calcular a Necessidade de Calagem (NC) em viveiros de aquicultura foi desenvolvido por Boyd (1984) e consiste em: Pesar 20 gramas de lama seca ao ar que passe em uma peneira de 0,85 mm, logo após colocar em um béquer de 100 ml e adicionar 40 ml da solução tampão, cuja fórmula proposta por Boyd (1984, p. 95) é “dissolver 20 g de p-nitrofenol, 15 g de ácido bórico, 74 g de cloreto de potássio e 10,5 g de hidróxido de potássio em água destilada e diluir para 2,000 ml com água destilada”.

Ainda segundo Boyd (1984) deve-se misturar a lama seca junto com a solução tampão de forma intermitente por uma hora e medir o pH da mistura até ficar o mais próximo com uma margem de 0,01 do pH de equilibrio, se o pH de equilíbrio da mistura for menor que 6,8, o processo deve ser repetido, mas agora com metade da quantidade de lama seca ao ar usada, assim, com a amostra de 20g a equação para calcular a necessidade de calagem é:

$$NC = (8,00 - pH) \times 5600 \tag{2.7}$$

Onde $NC$ é dado em $Kg/ha$ (quilos por hectare)

**Exemplo 2.8.**

*Em um açude na cidade de Espera Feliz foi feito a retirada de amostra de um açude para se fazer o cálculo da calagem, no resultado da amostra foi obeservado que a concentração de íons de Hidrogênio no açude foi de $10^{-6} mol/L$. Sabendo disso, qual é a quantidade de calcário em $Kg/ha$ necessária para a calagem desse açude?*

*Como vimos na subseção 2.3.6 a fórmula para se cálcular o pH de uma solução é:*

$$pH = -\log(H^{+})$$

*Substituindo:*

$$pH = -\log(10^{-6})$$

$$pH = -(-6) \cdot \log(10)$$

$$pH = 6 \cdot 1$$

$$pH = 6$$

*Usando agora a Equação 2.7:*

$$NC = (8,00 - 6) \times 5600$$

$$NC = 2 \times 5600$$

$$NC = 11200$$

*Assim a quantidade de calcário a ser usada é* $11200\,kg/ha$.

# Capítulo 3

# Aspectos Metodológicos

Buscando uma forma de potencializar o interesse dos alunos para o aprendizado dos logaritmos, foi elaborado uma proposta de trabalho que pretende aproximar a Matemática do cotidiano dos alunos. Já que normalmente ela é trabalhada de forma muito sistemática, com foco em definições, teoremas e demonstrações, e as aplicações práticas apresentadas a eles durante as aulas geralmente são distantes da realidade dos estudantes.

Como a proposta desse trabalho é mostrar para os alunos das escolas do campo que a matemática está presente em seu cotidiano através da aplicação dos logaritmos no processo de específico de calagem, ela se enquadra como uma pesquisa qualitativa baseada em estudo de caso, pois segundo Neves (1996) "Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados", e de acordo com Lüdke e André (1986) o estudo de caso é bem delimitado definindo de forma clara os seus contornos durante o desenvolvimento do estudo.

Os instrumentos de coleta de dados utilizados para essa pesquisa foram as respostas de 4 atividades, sendo a primeira delas uma pesquisa sobre á história e propriedades dos logaritmos, as outras três atividades foram listas de questões (Apêndice B) e um questionário (Apêndice E), as atividades foram elaboradas para analisar se houve uma melhora no desempenho dos alunos, principalmente no quesito de interesse, e um questionário com o intuíto de saber qual a visão dos alunos sobre a proposta e se ela contribuiu de forma positiva no aprendizado deles.

## 3.1 O Contexto da Pesquisa

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual Fazendo Paraíso, na zona rural da cidade de Espera Feliz no estado de Minas Gerais, uma região forte na produção de café. É uma escola do campo, o que faz ela ter um desafio ainda maior em relação ao interesse dos alunos em aprender, pois raramente um conteúdo é vinculado com a vida que eles levam na zona rural, então perguntas como “onde vou usar esse aprendizado em minha vida?” são mais frequentes, além do fato de que grande parte dos alunos já trabalham na roça ajudando suas famílias, e já tendo emprego e vendo que o conteúdo que estudam na escola não vai ajudar em seu trabalho, gera como consequência o aumento do desinteresse, e em alguns casos o abandono da escola.

A escola vendo esse problema vem pensando em formas de fazer com que ela se torne mais “próxima” dos alunos, assim desde o final de julho de 2019 a escola vem começando a trabalhar com a metodologia de trabalho por projetos, que segundo (ARAÚJO, 2008) busca sobretudo tornar os alunos protagonistas no seu processo de aprendizagem e também busca trazer os conteúdos para as várias situações que esses alunos vivem em seu dia-a-dia. Essa pesquisa não foi elaborada em cima da metodologia de trabalho por projetos, mas busca analisar os resultados de quando se traz um conteúdo para situações do cotidiano dos alunos.

## 3.2 Características dos Pesquisados

A turma escolhida para ser realizada a aplicação da proposta foi a turma do segundo ano do ensino médio matutino de 2019 da Escola Estadual Fazenda Paraíso, uma turma composta por 20 alunos, sendo 9 do sexo masculino e 11 do sexo feminino. Em 2020 a turma já no terceiro ano do ensino médio possui 15 alunos, sendo destes 5 do sexo masculino e 10 do sexo feminino.

Escolhida no ínicio de 2019, quando o pesquisador começou a lecionar na turma, onde foi notada que a turma era no geral participativa, mas a conversa paralela durante as aulas e a falta de interesse, principalmente pela Matemática eram fatores prejudiciais presentes. Além do que os alunos dessa turma não haviam estudado logaritmos no primeiro ano do ensino médio, dessa forma a aplicação da sequência didática também serve como forma de recuperar esse conteúdo.

## 3.3 Desenvolvimento da Sequência Didática

No início da propossta foi pensado uma forma de tentar trazer os logaritmos para o cotidiano dos alunos das escolas do campo. Um processo muito comum na zona rural é o processo de calagem, que se constituí principalmente na aplicação de calcário no solo para diminuir a acidez do mesmo e fornecer nutrientes para as plantas, e como a escala de acidez (pH) é uma escala logarítmica, essa foi a ideia ínicial da proposta: encontrar uma forma de que junto com a aprendizagem dos logaritmos os alunos consigam conhecer melhor como é feito os cálculos do processo de calagem, trazendo assim o conteúdo para a realidade deles.

Na seção 2.4 foi citado os 2 métodos mais comuns para se calcular a calagem, o “Método de neutralização da acidez trocável e da elevação dos teores de Ca e de Mg trocáveis” e o “Método da Saturação de Bases”, durante os estudos o pesquisador viu que o “Método de neutralização da acidez trocável e da elevação dos teores de Ca e de Mg trocáveis” tinha um cálculo mais complexo, o que poderia atrapalhar no processo de aprendizagem, assim foi escolhido o “Método da Saturação de Bases”, pois tem um processo de cálculo mais simples, porém com mais etapas. Logo foi desenvolvida as atividades sobre calagem, com o intuito de fazer com que os alunos em posse de um resultado de análise do solo, conseguissem calcular por conta própria a necessidade de calagem, potencializando o entendimento dos cálculos por trás desse processo que é muito comum em plantações.

Após definido a turma a ser trabalhada, e o tema a ser desenvolvido, foi elaborado a sequência didática que segundo Zabala (1998) é constituída de um conjunto de atividades estruturadas, ordenadas e articuladas que busca alcançar objetivos educacionais, onde no processo existe um ínicio e um fim bem definido.

A Proposta foi desenvolvida de acordo com o projeto político pedagógico (PPP) da escola, e de acordo com o as habilidades do BNCC Brasil (2017) “(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros”.

Para a sequência didática foram elaboradas 4 atividades onde a primeira se trata de uma pesquisa ínicial que os alunos vão elaborar sobre os logaritmos, a segunda atividade sendo uma lista de questões elaborada para ser respondida de forma individual, e as duas ultimas atividades para serem trabalhadas em grupos de dois ou três alunos dependendo da quantidade de alunos na turma.

Entre cada aplicação das atividades houve aulas expositivas sobre o conteúdo, sendo toda a sequência didática aplicada dentro de 16 aulas. Nas subseções seguintes vamos abordar de forma mais detalhada cada atividade, e o tempo para ser desenvolvida cada etapa da sequência didática.

### 3.3.1 Atividade 1: Pesquisa Para Introdução aos Logaritmos

A Atividade 1 constituí em uma pesquisa abordadando aspectos dos logaritmos, como sua história e propriedades, que pode ser feita usando computadores ou usando os livros da biblioteca da escola, essa atividade possui os seguintes objetivos:

- Introduzir os alunos ao conteúdo estudado
- Trabalhar a escrita matemática dos alunos, através de propriedades.

- Desenvolver a habilidade de pesquisa dos alunos, para que comecem a identificar boas fontes de pesquisa.
- Potencializar o aprendizado do conteúdo pesquisado através de futuras complementações a pesquisa.

Como se trata de uma pesquisa básica com intuito apenas de introduzir os alunos ao conteúdo, não foi pedido uma pesquisa muito rigorosa.

Dessa forma as pesquisas dos alunos são completadas com as aulas expositivas que ocorreram entre as aplicações das atividades, para que possam usar como material de estudo para as atividades seguintes, o que vai fazer com que os alunos tenham que ter maior atenção nas aulas para poder analisar se sua pesquisa precisa ser complementada.

Assim foram utilizadas duas aulas (50 min cada aula) para abordar toda a história dos logaritmos, as duas aulas são necessárias para poder mostrar para os alunos de forma clara a história dos logaritmos e algumas relações, como a relação entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, que pode ter servido como ideia para a criação dos logaritmos.

Após essas duas aulas, foram trabalhadas nas próximas duas aulas (50 min cada) as propriedades operatórias dos logaritmos, com duas aulas se consegue trabalhar as propriedades dos logaritmos e também alguns exemplos de como usar essas propriedades.

Essas aulas vão ter como base os trabalhos: (EVES, 2004; MAOR, 2008; BIANCHINI; PACCOLA, 1997; IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), e através delas complementar a pesquisa que fizeram para poder usar como material de estudo.

### 3.3.2 Atividade 2: Questões Históricas Sobre os Logaritmos

A Atividade 2 (Apêndice B) foi uma lista de questões que vai abordar a história dos logaritmos, sua definição e propriedades, os alunos vão usar a pesquisa que fizeram na subseção 3.3.1 como material auxiliar para resolver essa atividade.

A atividade 2 tem os seguintes objetivos:

- Identificar o contexto histórico que a humanidade passava na época que levou a criação dos logaritmos.
- Determinar a importância que os logaritmos tiveram como ferramenta de cálculo.
- Descrever como a relação entre uma P.G e uma P.A e também as *regras prostafaréticas* podem ter contribuído para a concepção dos logaritmos.
- Identificar as propriedades dos logaritmos como ferramenta de cálculo.

Essa atividade foi desenvolvida pelo pesquisador para ser aplicada em duas aulas (50 min cada aula) e de forma individual, para que assim cada aluno consulte sua pesquisa para poder resolver as questões. A atividade é composta por algumas questões de múltipla escolha fazendo com que duas aulas sejam suficientes para que os alunos consigam realizar a atividade.

No Apêndice B temos a Atividade 2, onde a primeira questão tem o objetivo de reforçar o conhecimento do aluno sobre os assuntos de interesse de John Napier que ele estudava além da matemática.

A segunda questão foi elaborada com a proposta de mostrar para os alunos quais foram as duas possíveis ideiais que levaram John Napier a conceber a ideia dos logaritmos, e também com intuito de mostrar que todo conteúdo matemático tem sua origem.

As questões três e quatro foram elaboradas para trabalhar com os alunos qual foi a definição inicial dos logaritmos, sua repercursão na época e o desenvolvimento de sua definição com o tempo.

John Napier fez outras contribuições para a matemática e na quinta questão busca trabalhar com os alunos esse aspecto da história de John Napier, vendo quais foram as outras contribuições que ele deu a matemática.

A proposta da sexta questão foi trabalhar com os alunos um pouco da história de Joost Bürgi um relojoeiro suíço que também criou uma tabela de logaritmos mas não herdou o título de criador dos logaritmos por ter publicado seu trabalho depois de Napier, para que os alunos tenham uma noção como funciona esses assuntos no mundo acadêmico.

A sétima questão trabalha com os alunos quais foram as invenções que tornaram obsoleto o uso dos logaritmos como instrumento facilitador de cálculo.

A oitava e última questão é uma aplicação prática do uso dos logaritmos como instrumento de cálculo que é resolvida usando várias das propriedades dos logaritmos, desenvolvendo nos alunos o entendimento de suas propriedades operatórias.

### 3.3.3 Atividade 3: Aplicações Gerais dos Logaritmos

A Atividade 3 (Apêndice C) é composta por uma lista de questões que envolvem aplicações dos logaritmos em várias áreas do conhecimento. Como preparação para a Atividade 3 foram elaboradas duas aulas de 50 min cada para ser ministrada aos alunos onde será explicado de forma resumida as aplicações dos logaritmos em várias áreas como matemática financeira, abalos sísmicos, acústica e etc.

Com as duas aulas se consegue trabalhar a parte teórica das aplicações com os alunos, explicando como a aplicação dos logaritmos é feita, essas aulas foram pautadas nos trabalhos que foram usados como base para a construção do seção 2.3

A Atividade 3 tem os seguintes objetivos:

- Identificar o logaritmo como função em suas aplicações.
- Descrever as propriedades operatórias dos logaritmos para resolver os diversos problemas de aplicação que estão envolvidos.
- Identificar a importância que os logaritmos tem nos dias de hoje, principalmente na forma de função.

A Atividade 3 foi desenvolvida para ser aplicada durante 2 aulas (50 min cada) em duplas ou trios de alunos, dependendo da quantidade de alunos da turma, contém 10 questões retiradas dos trabalhos citados no seção 2.3 e algumas elaboradas pelo autor.

Embora grande parte das questões sejam de múltipla escolha, elas precisam dos cálculos para serem resolvidas, dessa forma o trabalho em dupla ou trio pode incentivar o trabalho em equipe para resolver as questões e estimular a convivência entre alunos, por ser em dupla ou trio, duas aulas são suficientes para resolver toda a Atividade 3.

A primeira e segunda questões (DANTE, 2013) são sobre abalos sísmicos e desenvolve nos alunos o entendimento da função exponencial como inverso da logarítmica.

A terceira questão (PEREIRA, 2016) aborda a aplicação dos logaritmos na acústica e reforça com os alunos a resolução de questões onde não se tem o valor de todas as incógnitas da equação, em questões deste tipo os alunos geralmente encontram maiores dificuldades.

A quarta questão (DANTE, 2013) aborda aplicação dos logaritmos em crescimento populacional e foi escolhida pois exige que os alunos tenham conhecimento sobre a propriedade 2.3 para sua resolução.

A quinta questão (PEREIRA, 2016) trabalha a aplicação dos logaritmos no decaimento radioativo, essa questão foi selecionada, pois para se resolver é preciso que o aluno entenda a definição dos logaritmos (2.1), reforçando esse conhecimento.

A sexta questão (DANTE, 2013) aborda a aplicação dos logaritmos no potêncial hidrogeniônico, a questão foi escolhida pois trabalha com os estudantes a propriedade 2.3, assim como na quarta questão, e ela é importante para já introduzir os alunos nos conceitos abordados na Atividade 4.

As questões sete e oito criadas pelo pesquisador abordam uma aplicação que não é muito abordada dos logaritmos, que é na psicologia, e assim como na quinta questão elas servem para potencializar o entendimento sobre a definição dos logaritmos.

A nona questão (PEREIRA, 2016) contempla a aplicação dos logaritmos na matemática financeira, é uma questão interessante pois na sua resolução envolve várias das propriedades operatórias dos logaritmos, trabalhando esse conhecimento com os alunos e também habtua os alunos a resolverem questões onde se da no enunciado alguns valores de logaritmos que serão usados na resolução.

A décima questão, elaborada pelo pesquisador é sobre uma aplicação que aborda a teoria da informação, apresenta uma aplicação que geralmente não é apresentada para os alunos, e também pois na sua resolução é trabalhado um poudo de análise combinatória, fazendo essa “interdisciplinaridade” dentro dos conteúdos da própria matemática.

### 3.3.4 Atividade 4: Aplicações dos Logaritmos no Processo de Calagem

A Atividade 4 (Apêndice D) é composta por oito questões que abordam o processo de calagem no solo e em lagoas. Como forma de preparar os alunos para a resolução dessa atividade será ministrada três aulas de 50 min cada aula, essas aulas são baseadas nos trabalhos: (MESQUITA et al., 2016; WIETHÖLTER, 2000; RIBEIRO; GUIMARãES; ALVAREZ, 1999; SOUZA; MIRANDA; LOBATO, 1997; TEIXEIRA et al., 2017; CORRÊA; LOPES; CARVALHO, 1985; DURIGON et al., 2017; QUEIROZ; BOEIRA, 2006; BOYD, 1984).

Nessas três aulas foram abordadas o conceito de calagem, que muitos alunos, mesmo sendo do campo não sabem que esse é o nome do processo de se adicionar calcário ao solo ou açudes. As 3 aulas são necessárias para poder ser trabalhada com calma todo o conteúdo, apresentando para eles os métodos de se retirar a amostras, tanto do solo como de açudes e lagoas, bem como apresentar para eles como é feita a retirada das folhas do cafeeiro para a análise foliar, e por fim utilizar esses conceitos, junto com uma análise de solo fictícia para mostrar para os alunos como os cálculos no processo de calagem são feitos através de exemplos.

Após as três aulas expositivas foi aplicada a Atividade 4 que tem os seguintes objetivos:

- Desenvolver com os alunos um olhar mais técnico sobre o processo de calagem.
- Determinar que o processo de calagem também é essencial em viveiros de peixes.
- Deduzir com os alunos que um bom cálculo da Necessidade de Calagem (NC) é essencial para um bom resultado da colheita.
- Estimular o interesse do aluno em aprender ao trazer a matemática para o seu cotidiano.
- Ilustrar para os alunos que a matemática não é algo distante da realidade como eles costumam pensar, e sim algo que está presente no dia-a-dia de cada um.

A Atividade 4 foi elaborada para ser aplicada em 2 aulas sendo 50 min cada aula, de modo que os alunos formem duplas ou trios, a escolha entre formar duplas ou trios é feita pelo professor, e vai depender da quantidade de alunos na turma.

As questões que compõem a Atividade 4 com exceção da primeira questão foram elaboradas pelo pesquisador e exigem que seja feita os cálculos para serem resolvidas, mesmo algumas sendo de múltipla escolha, como vão ser resolvidas por duplas ou trios de alunos, as duas aulas são suficientes para que eles consigam resolver todas as questões, assim também aperfeiçoando nos alunos a cooperação e gerando um ambiente favorável para a aprendizagem.

No Apêndice D temos a Atividade 4 na qual é abordada questões sobre o processo de calagem. O cálculo da Necessidade de Calagem (NC) no solo pelo "Método da Saturação de Bases" possui várias etapas, conforme visto no seção 2.4, desta forma, cada questão começando pela 4 vai abordar uma etapa desse cálculo, de forma com que o aluno ao resolver as questões vai de forma natural passando por todas as etapas do cálculo o que auxilia na aprendizagem de todo o processo.

A primeira questão (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977) serve como forma de relembrar o cálculo do pH pela fórmula $pH = -\log_{10}(H^{+})$ e vai servir como um pré requisito para as questões 2 e 3.

A segunda e terceira questões trabalham o processo de calagem em lagoas e açudes que foi desenvolvido por Boyd (1984) utilizando a Equação 2.7 onde na segunda questão se da a quantidade de concentração de íons de hidrogênio e se pede o valor da Necessidade de Calagem, já na terceira questão se da a Necessidade de Calagem e se pede para calcular qual a concentração de íons de hidrogênio no açude onde foi feita a análise.

A quarta questão é onde se começa a trabalhar na prática com os alunos o processo de cálculo da Necessidade de Calagem no solo, aborda a primeira etapa do processo, onde se da o valor do pH SMP e se pede para calcular a acidez potencial usando a Equação 2.2.

Já a quinta questão traz o processo inverso da questão 4, é dado na questão o valor da acidez potencial e se procura o valor do pH SMP, desenvolvendo com o aluno todos os aspectos da Equação 2.2

Na sexta questão é tratada o conceito da capacidade de troca de cátions a pH 7,0 $(CTC)$ onde se é dado na questão valores fictícios de uma análise do solo para se calcular esse valor, dessa forma, no cálculo da $CTC$ se usa no ínicio o processo trabalhado nas questões 4 e 5 e depois a Equação 2.5 para encontrar o seu valor.

A sétima questão aborda dois valores importantes para o processo de calagem, a soma das bases $(SB)$ e a saturação de bases atual do solo $(V_1)$ onde se usa a Equação 2.4 para se calcular a soma das bases e a Equação 2.3 para encontrar o valor de $V_1$, nessas questões também é usado os conceitos abordados nas questões 4,5 e 6

A última questão usa todos os conceitos trabalhados nas questões 4, 5, 6 e 7 mais a Equação 2.6 para se calcular a Necessidade de Calagem de um solo, resolvendo essa questão os alunos vão ter passado por todas as etapas do cálculo da calagem no solo pelo “Método da Saturação de Bases”, dessa forma eles podem calcular a Necessidade de Calagem de suas plantações tendo um resultado da análise do solo em mãos.

### 3.3.5 Questionário

Terminada a aplicação da Atividade 4 os alunos responderam um questionário, com duração de uma hora-aula (50 min). De acordo Oliveira et al. (2016) o questionário é uma ferramenta para a coleta de dados, formado por uma série de perguntas de forma ordenada, que devem ser respondidas sem a presença do pesquisador e de forma escrita. Dessa forma foi criado o Questionário (Apêndice E) com os seguintes objetivos:

- Analisar quais alunos já tinham um conhecimento prévio sobre os logaritmos.
- Avaliar se a forma como foi trabalhada os logaritmos influênciou no aumento do interesse.
- Analisar a opnião dos alunos sobre as atividades aplicadas e aulas ministradas.
- Analisar a opnião dos alunos sobre aplicações da matemática voltadas a situações do seu cotidiano.

Desta forma o questionário foi desenvolvido como uma forma de se obter a opnião dos alunos, como saber se a visão que tinha do conteúdo no início da proposta mudou com o decorrer dela, se trabalhar as origens de um conteúdo e sua aplicação prática no cotidiano são importantes para o aumento do interesse e contribuem no processo de aprendizagem, e se a matemática se tornaria uma disciplina mais interessante se fosse trabalhada dessa forma.

# Capítulo 4

# Resultados da Aplicação da Sequência Didática

Vamos abordar neste capítulo os resultados das aplicações da sequência didática e comentar algumas observações feitas pelo pesquisador ná hora das aplicações que foram importantes.

As aplicações começaram no dia 5 de novembro de 2019 com data prevista para término no dia 5 de dezembro de 2019. A Primeira atividade foi realizada pelos alunos dentro do tempo estipulado, mas por conta da “Semana de Educação Para a Vida” que ocorreu do dia 18 ao dia 22 de novembro de 2019 onde foi uma semana dedicada para trabalhos específicos com os estudantes da escola, acarretou no atrasou a aplicação das atividades 2 e 3 e com isso não foi possível aplicar a Atividade 4 no ano de 2019, fazendo dessa forma com que ela fosse aplicada em 2020.

A turma em 2019 era composta por 20 alunos, sendo 9 do sexo masculino e 11 do sexo feminino, já em 2020 a turma no terceiro ano do ensino médio possui 15 alunos, sendo destes 5 do sexo masculino e 10 do sexo feminino. Como não houve alunos novos na turma em 2020 vamos adotar o seguinte método para se referir aos alunos de forma a preservar seus nomes: em ordem alfabética nomeamos os alunos do sexo masculino, sendo o primeiro M1, o segundo M2 e assim por diante. Para os alunos do sexo feminino adotamos F1 para a primeira aluna, F2 para a segunda e assim por diante.

Dessa forma as atividades 1, 2 e 3 foram análisadas com a quantidades de alunos que pertenciam a turma em 2019 (20 alunos) e a atividade 4 junto com o questionário foi análisado com a quantidade de alunos que fazem parte da turma em 2020 (15 alunos), o que ajuda a dar um panorama sobre como as reprovações e desistências afetaram a turma.

## 4.1 Aplicação e Análise dos resultados da Atividade 1

A Atividade 1 foi proposta no dia 5 de novembro de 2019 com a presença de todos os alunos, e por ser uma pesquisa houve relatos como o da aluna F8 que diz: "É estranho uma pesquisa em matemática". A Atividade 1 foi pedida para ser entregue no dia 12 de novembro de 2019, dando assim uma semana para que os alunos pudessem realizar a pesquisa, o pesquisador sugeriu tópicos para que os alunos pudessem se guiar na hora da pesquisa, e são eles:

- Aspectos históricos dos logaritmos, como quem o criou e sua recepção na época
- Definição dos logaritmos e suas propriedades operatórias.

Como essa pesquisa tem o objetivo de introduzir os alunos ao conteúdo que vão estudar, o pesquisador propôs que a pesquisa fosse bem simples, só para cumprir o objetivo de introduzi-los aos logaritmos.

No dia 12 de novembro de 2019 os alunos apresentaram a pesquisa que fizeram ao pesquisador, e dos 20 alunos, 17 realizaram a pesquisa, o que representa 85% dos alunos da turma, as pesquisas no geral foram boas na parte histórica dos logaritmos, pois no geral os alunos conseguiram resumir bem o conteúdo abordando aspectos importantes sobre a criação dos logaritmos e John Napier, embora em alguns casos os textos foram um pouco confusos como mostra a Figura 6, já na parte de definição e propriedades dos logaritmos as pesquisas não foram muito boas no aspecto da escrita matemática, onde os alunos encontraram dificuldades, mas, embora tenham ocorridos erros na escrita matemática, os alunos no geral citaram todas as propriedades operatórias e ainda corrigiram os erros na escrita matemática, como mostrado na Figura 7.

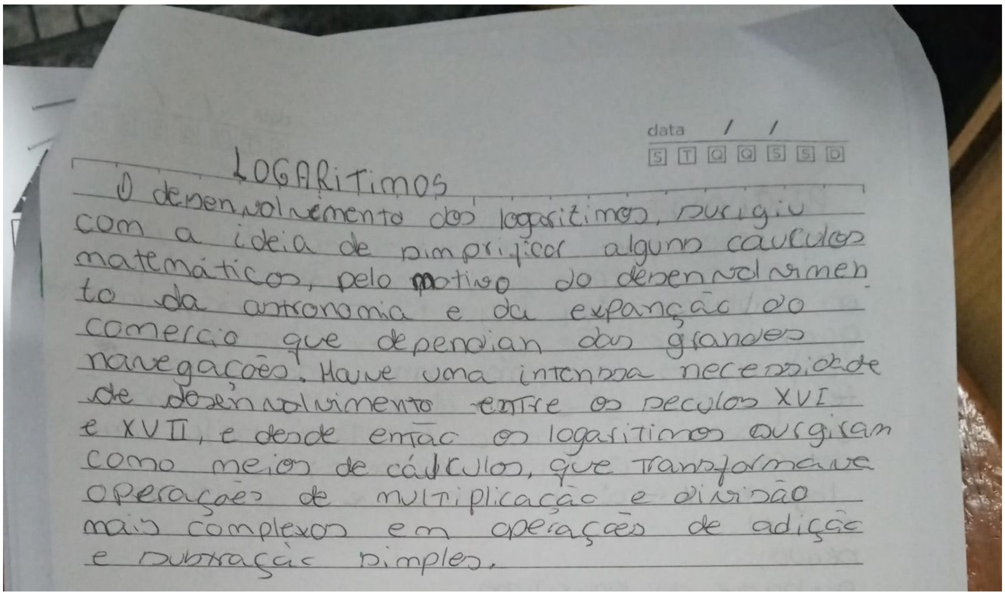
No geral, as pesquisas resumiram bem a ídeia, ocorrendo mais erros na notação dos logaritmos, e quando ministrada as aulas sobre os conteúdos da pesquisa houve comentários como o feito pela aluna F3 "eu vi isso na hora da pesquisa", associando a pesquisa que fizeram com as aulas, mostrando que essa aplicação gerou resultados positivos para a aprendizagem deles.

No mesmo dia da entrega da pesquisa, começou a abordagem dos logaritmos com os alunos, sendo ministradas 2 aulas de 50 min cada com o foco na história dos logaritmos, apresentando para eles todos os aspectos presente na seção 2.1, houve conversa paralela por parte dos alunos, mas não tanto como a habitual já que eles tinham que participar da aula para poder complementar a pesquisa que fizeram.

Nos dias 13 e 14 de novembro de 2019 foram ministradas as aulas sobre a definição e propriedades dos logaritmos (sendo uma aula de 50 min em cada dia), assim como na aula anterior houve conversa paralela, mas com uma intensidade menor em comparação com as aulas anteriores sobre a história dos logaritmos.

Como conclusão dessa primeira atividade temos que os resultados dos alunos foram bons no geral, tornando os alunos mais familiarizados com o conteúdo, esse resultado vai de acordo com o que diz Mattos e Castanha (2008) onde afirma que a pesquisa em sala de aula é um grande aliado no processo de ensino e aprendizagem, pois auxilia no desenvolvimento do espírito investigativo, capacidade de argumentação, tornando a aula mais atrativa.

Figura 6 – Trecho da pesquisa feita pela aluna F10 abordando parte da história dos logaritmos

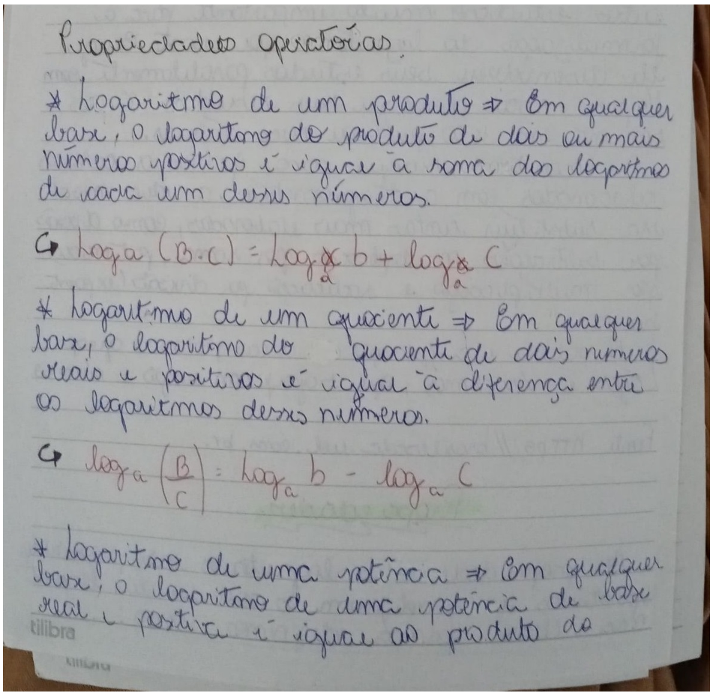


LOGARITIMOS

O desenvolvimento dos logaritimos, surgiu com a ideia de simplificar alguns cauculos matemáticos, pelo motivo do desenvolvimento da astronomia e da expanção do comercio que dependiam das grandes navegações. Houve uma intensa necessidade de desenvolvimento entre os seculos XVI e XVII, e desde então os logaritimos surgiram como meios de cálculos, que transformava operações de multiplicação e divisão mais complexas em operações de adição e subtração simples.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7 – Trecho da pesquisa feita pela aluna F6 sobre algumas propriedades dos logaritmos


Propriedades operatórias.

* Logaritmo de um produto ⇒ Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual a soma dos logaritmos de cada um desses números.

↳ $\log_a (B \cdot C) = \log_a b + \log_a C$

* Logaritmo de um quociente ⇒ Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

↳ $\log_a \left(\frac{B}{C}\right) = \log_a b - \log_a C$

* Logaritmo de uma potência ⇒ Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do

Fonte: Dados da pesquisa

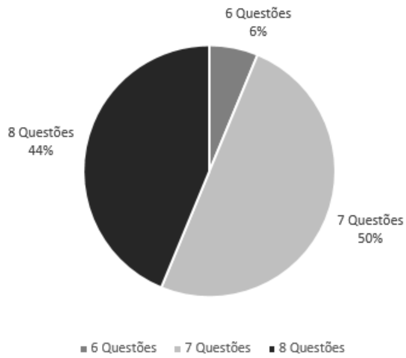
## 4.2 Aplicação e Análise dos resultados da Atividade 2

A segunda atividade foi aplicada no dia 26 de novembro de 2020 e ocorreu durante 2 aulas de 50 min, após toda a aplicação apresentada na seção 4.1. Dos 20 alunos da turma, 16 estavam presentes no dia e realizaram a Atividade 2, o que corresponde a 80% dos alunos da turma, a Atividade 2 foi aplicada de forma individual, e cada aluno recebeu uma folha impressa com a atividade (Apêndice B), o Gráfico 1 mostra o desempenho dos alunos nessa atividade.

A quantidade maior de acertos foi em cima das 7 primeiras questões que são sobre a história dos logaritmos. A maior quantidade de dúvidas surgiu na questão 8, que é a questão que trabalha as propriedades dos logaritmos como um facilitador no cálculo, que busca mostrar na prática a utilidade que os logaritmos tinham quando foi concebido, isso mostra que os alunos ainda apresentavam dificuldades com o uso das propriedades dos logaritmos.

Foi observado que houve um interesse maior na resolução da Atividade 2, pois é uma atividade diferente da habitual na disciplina de matemática não havendo "cálculo" (exceto pela questão 8). Foi usada a pesquisa que fizeram na Atividade 1 como forma de auxílio, e como mostra o Gráfico 1.

Gráfico 1 – Porcentagem de questões acertadas da Atividade 2

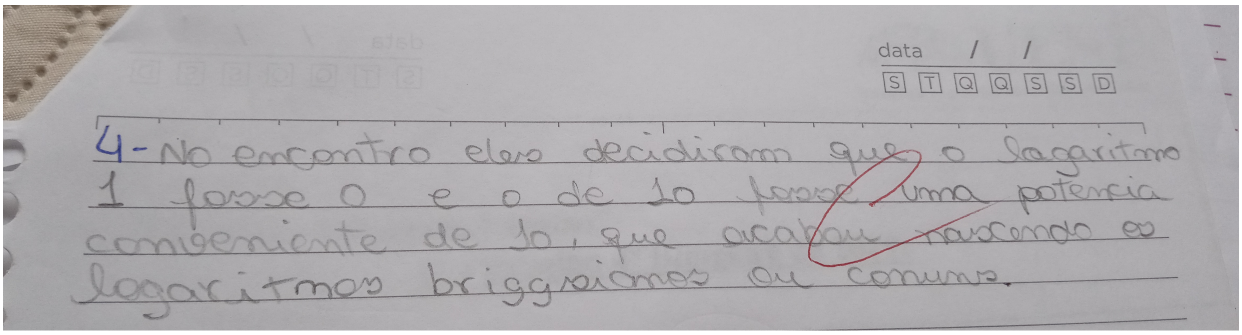



Fonte: Dados da pesquisa

A Atividade 2 junto com a Atividade 1 tiveram bons resultados, isso se deu devido a boa receptividade dos alunos, que tiveram maior interesse, essa receptividade se deu pois segundo Fossa (2008), Miguel et al. (2009) ao trabalhar a história da matemática, a disciplina se torna mais humanizada mudando as percepções que os alunos tem em relação a matemática. Na Figura 10 temos uma imagem dos alunos respondendo as questões no dia da aplicação.

Temos na Figura 8 a resposta de uma aluna a questão 4 que aborda sobre a visita que Henry Briggs fez a John Napier onde Briggs sugeriu mudanças nas tabelas criadas por Napier, a aluna respondeu de forma bem resumida relatando os principais pontos.

Figura 8 – Resposta da Questão 4 feita pela aluna F1

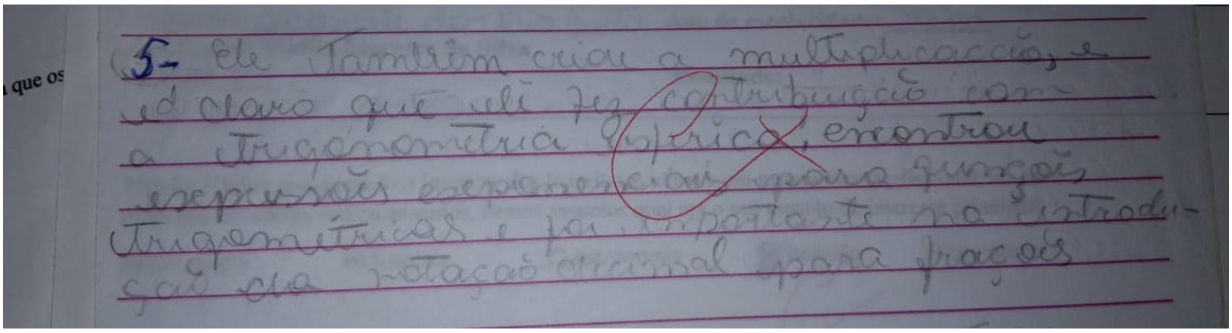



Fonte: Dados da pesquisa

Temos na Figura 9 a resposta de uma aluna a questão 5 que trata sobre as outras contribuições que John Napier deu para a matemática, a resposta não está um pouco confusa e com alguns erros, mas no geral sintetiza de uma forma razoável as contribuições.

Com a Atividade 2 foi possível fazer um paralelo entre as essa atividade e a Atividade

Figura 9 – Resposta da questão 5 feita pela aluna F4



5- Ele também criou a multiplicação, e é claro que ele fez contribuição com a Trigonometria Esférica, encontrou expressões exponenciais para funções trigonométricas e foi importante na introdução da notação decimal para frações

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 10 – Alunos resolvendo a Atividade 2

Fonte: Dados da pesquisa

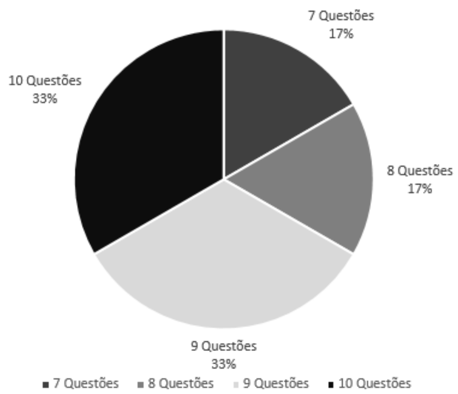
1, os alunos que fizeram uma pesquisa mais resumida, responderam as questões da Atividade 2 de forma mais resumida, já os alunos que fizeram a pesquisa mais extensa, o mesmo se deu com as respostas da Atividade 2, esse paralelo foi observado também com os erros que não foram corrigidos, eles passaram da pesquisa para as respostas da Atividade 2. Mostrando assim que uma bos pesquisa feita, resultou em bons resultados na Atividade 2.

## 4.3 Aplicação e Análise dos Resultados da Atividade 3

Como preparação para a Atividade 3 foi ministradas para os alunos duas aulas expositivas de 50 min abordando as aplicações gerais dos logarítmos e também exemplos de atividades, essas aulas ocorreram no dias 27 e 28 de novembro de 2019, e durante as aulas foi notada conversa paralela maior do que as que ocorreram durante a aplicação das atividades 1 e 2, os alunos demonstraram um maior interesse na aula do dia 28, nesta aula foi apresentada a aplicação dos logaritmos na psicologia através da lei de Hick-Hyman e da lei de Fitts.

No dia 3 de dezembro de 2019 foi aplicada a terceira atividade que é focada em aplicações gerais dos logaritmos, que segundo Lima et al. (1997) abordar aplicações com os alunos justifica o esforço em aprender e despertam o interesse. No dia havia 18 alunos presentes o que corresponde 90% da turma, de forma que foi montado trios de alunos para a resolução da atividade, e cada trio recebeu uma folha impressa com a atividade. O Gráfico 2 mostra o desempenho dos alunos nessa segunda lista.

Gráfico 2 – Porcentagem de questões acertadas da Atividade 3



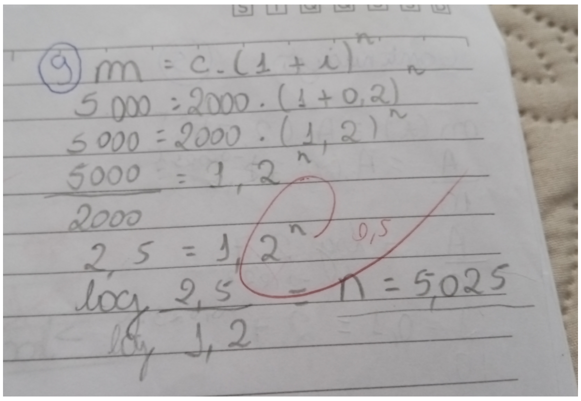

Fonte: Dados da pesquisa

Foi observado que das 10 questões, as que mais chamaram a atenção dos alunos, foram as questões 1 e 2 que abordam sobre abalos sísmicos, e as questões 7 e 8 que trabalham a aplicação dos logaritmos na psicologia, o pesquisador fez perguntas aos alunos que responderam que não conheciam aplicações matemáticas nessas áreas, e esse foi o motivo deles terem um maior interesse nessas questões.

A maior parte das dúvidas surgiu em torno das questões que não continham tantos dados disponíveis para se fazer a resolução, que são as questões 3,5 e 9, nessas questões os alunos não mostraram tanto interesse em resolver, e foi onde se obteve mais erros, a quantidade menor de acertos nessas questões reflete o fato de que os alunos que não acertaram essa questão ainda encontram dificuldades em compreender e aplicar as propriedades dos logaritmos em uma situação-problema.

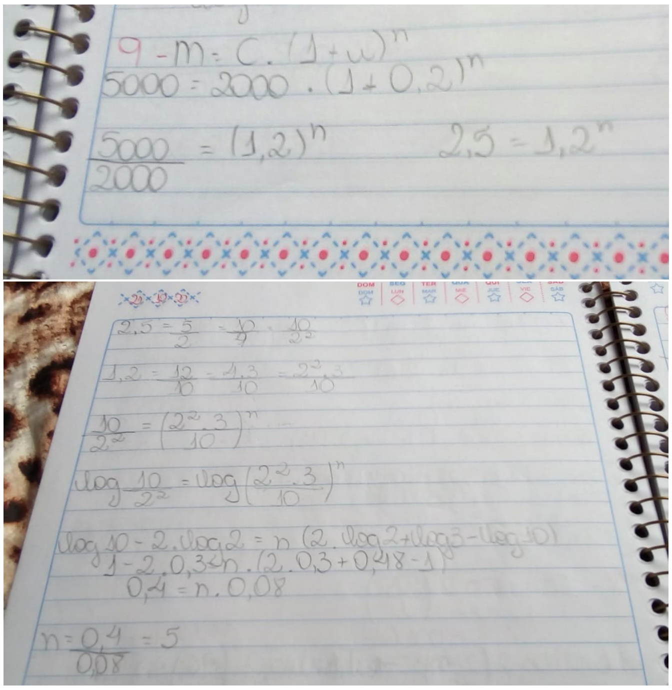
Podemos observar que na Figura 11 temos a resolução da questão 9 feita pela propriedade da mudança de base, enquanto na Figura 12 temos a resolução da questão 9 feita usando os dados do problema, a diferença no tamanho das resoluções é considerável, monstrando que o trio de alunos M6, F3 e F7 de certa forma compreendeu melhor o conteúdo, pois conseguiram visualizar uma forma mais rápida e direta de resolver o problema.

Figura 11 – Resolução da questão 9 feita pelo trio de alunos: M6, F3 e F7




Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12 – Resolução da questão 9 feita pelo trio de alunos: F5, F8 e F9




Fonte: Dados da pesquisa

## 4.4 Aplicação e Análise dos Resultados da Atividade 4

A abordagem sobre calagem e a Atividade 4 foram aplicadas em 2020, com a turma agora tendo 15 alunos sendo 10 do sexo feminino e 5 do sexo masculino. Em 2020 as aulas começaram na escola no dia 17 de fevereiro, e devido as fortes chuvas que ocorreram no inicio do ano, onde a cidade de Espera Feliz foi uma das afetadas pelas enchentes, os alunos ficaram sem transporte escolar até o início de março, só apartir do dia 2 de março foi quando a turma começou a frequentar as aulas com a quantidade total de alunos, e durante esse tempo, com a sala tendo um número reduzido de alunos, foi feita uma revisão sobre a definição e propriedade dos logaritmos.

Na primeira semana de março foi aplicada as avaliações diagnósticas que ocorrem todo início de ano no estado de Minas Gerais, assim a aplicação da sequência didática começou na segunda semana de março, onde foi abordado todo o aspecto teórico sobre o processo de calagem, e no dia 17 de março as aulas foram suspensas devido a pandemia do COVID-19, com as aulas voltando de forma remota no final de maio.

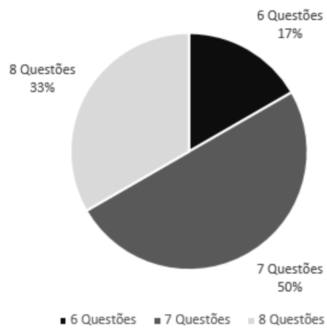
Durante a segunda semana de março, quando começou a ser apresentado para os alunos o processo de calagem e a aplicação dos logaritmos nesse processo, foi notório o aumento no interesse por parte dos alunos, pois é um processo muito comum em plantações e muitos alunos não sabiam que recebia o nome de calagem, e muitos nem sabiam que esse processo também é feito em lagoas e açudes, havendo comentários como o feito pelo aluno M6: “agora sei onde usar a matemática”, já que a maior parte dos alunos dessa turma ajuda sua família na roça, ajudando inclusive no processo de calagem, jogando o calcário nas lavouras. Foi observado também uma redução na conversa paralela durante essas aulas.

O pesquisador acreditando que as aulas voltariam até final de agosto e início de setembro, não voltou com a aplicação. Como as aulas permaneceram de forma remota, no dia 8 de setembro de 2020 o pesquisador começou a aplicação da Atividade 4 de forma remota como questões extras em relação aos planos de estudos tutorados (PET) que estão sendo usados no estado de Minas Gerais. foi primeiramente feita uma recapitulação sobre toda a parte teórica do processo de calagem e seu cálculo com o intuido de resgatar esse conhecimento nos alunos por meio de áudios explicativos e da disponibilização para todos os alunos da seção 2.4 no formato pdf, e logo após foi enviado para todos os alunos a Atividade 4 que se encontra no Apêndice D através do WhatsApp no formato pdf. Da forma como foi aplicada a Atividade 4, ela ainda atendeu aos requisítos da sequência didática como coloca Zabala (1998). O pesquisador atendeu as dúvidas dos alunos atráves de mensagens de texto, áudios e documentos no formato, word e pdf, os alunos fizeram a Atividade 4 durante o mês de setembro até o dia 13 de outubro de 2020.

A Atividade 4 foi aplicada de forma remota e como são alunos do campo, muitos tem dificuldades em acessar a internet, alguns só conseguindo utilizar através de dados móveis da operadora do seu celular, além de muitos também não morarem perto uns dos outros, dessa forma a Atividade 4 que no ínício havia sido pensada para ser aplicado em duplas ou trios de alunos, foi aplicada de forma individual, mas ainda assim houve grande participação deles na Atividade 4, onde durante o tempo de realização da atividade os alunos mandaram muitas dúvidas e pediram muitas explicações, demonstrando interesse pelo conteúdo, o que corrobora com o trabalho de Malheiros (2004) ao abordar aplicações relacionadas ao cotidiano, os alunos passam a descobrir e entender fatos da realidade em que vivem.

Dos 15 alunos da turma, 12 realizaram essa atividade o que representa 80% do total de alunos, e de acordo com o que foram terminando, os alunos foram mandando as atividades para o pesquisador através de fotos do caderno e enviadas via WhatsApp. O Gráfico 3 mostra o desempenho dos alunos na Atividade 4

Gráfico 3 – Porcentagem de questões acertadas da Atividade 4



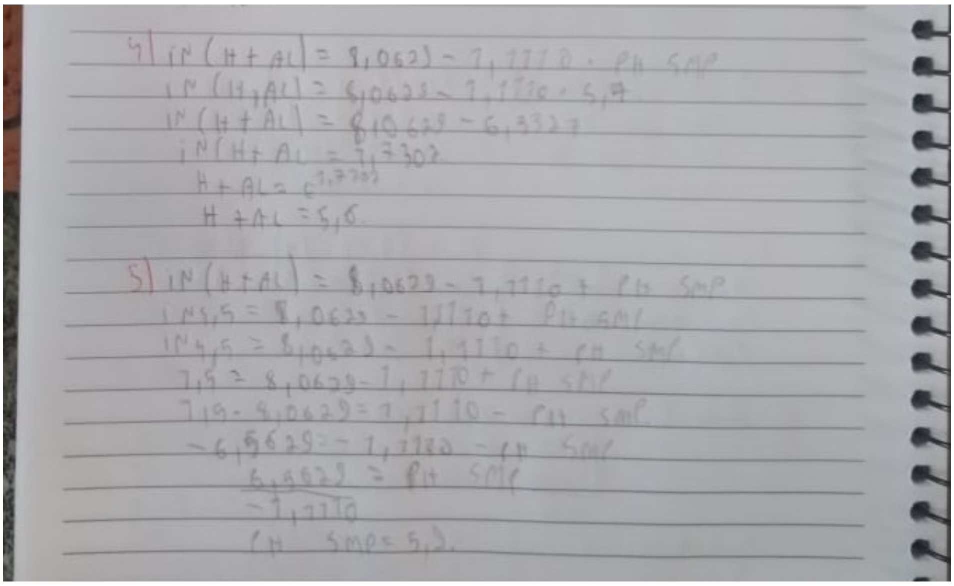

Fonte: Dados da pesquisa

As maiores dúvidas dos alunos se encontraram nas questões 4 e 7, sendo a questão 4 surgindo dúvidas sobre o conceito de acidez potencial $(H + Al)$, e a questão 7 havendo confusão entre a soma das bases $(SB)$ e a capacidade de troca catiônica $(CTC)$ pois a fórmula para o cálculo dessas quantidades é semelhante, mostrando que se mais questões trabalhando tanto a soma das bases ($SB$) quanto a capacidade de troca catiônica $(CTC)$ poderiam ter sido aplicadas para sanar essas dúvidas nas fórmulas.

Na Figura 13 temos as resoluções das questões 4 e 5 que trabalham a mesma fórmula mas a questão 4 temos que encontrar o valor da acidez potencial $(H + Al)$ e na questão 5 temos que encontrar o valor do $PHSMP$ dessa forma, o aluno trabalha todos os aspectos da Equação 2.2.

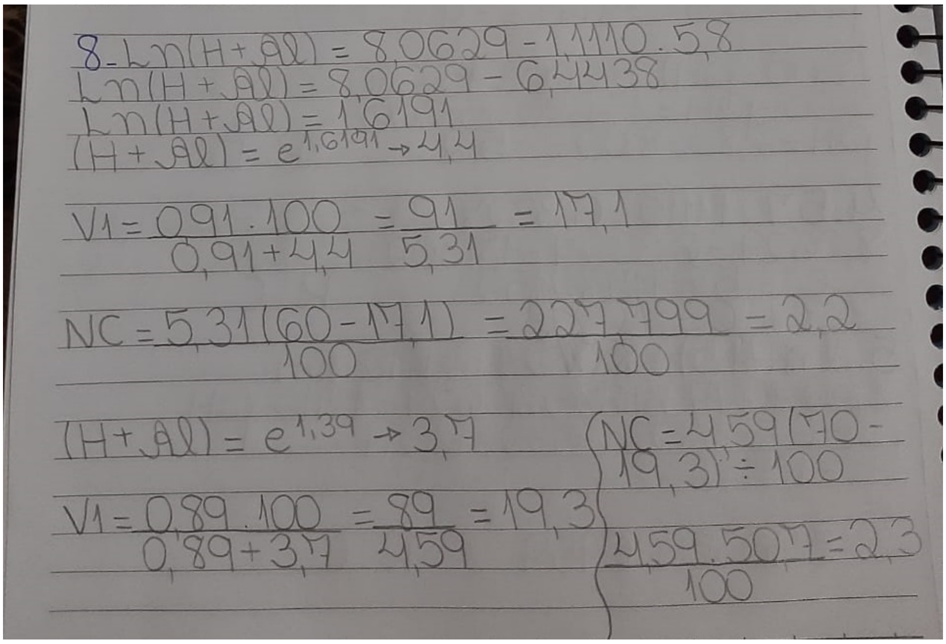
Temos na Figura 14 a resolução da questão 8 que é a mais complexa,pois aplica todas as etapas do presentes no cálculo da calagem, e foi também a questão que mais despertou interesse por parte dos alunos, que foi observado através de comentários feitos por eles, sinalizando que a forma construtiva como foi elaborada a Atividade 4, somada com o aumento do interesse dos alunos promoveu um resultado significativo na aprendizagem. Na resolução da questão 8 mostrada na Figura 14 a aluna F11 usou dados das questões anteriores para resolver o que auxiliou para uma simplificação em partes do cálculo, embora a aluna não tenha colocado a unidade de medida da Necessidade de Calagem $(t/ha)$ nas respostas.

Figura 13 – Resoluções das questões 4 e 5 feitas pelo aluno M5



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 14 – Resolução da questão 8 feita pela aluna F11




Fonte: Dados da pesquisa

## 4.5 Análise do Questionário

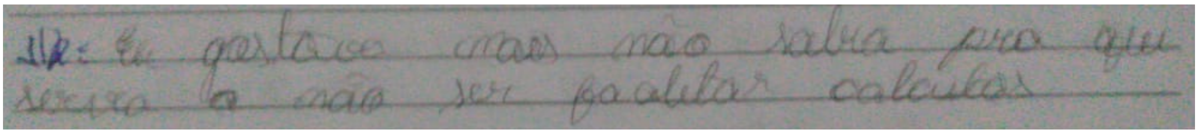
Ao final da Atividade 4, foi proposto um questionário para que os alunos respondessem, buscando saber qual foi a opinião que tiveram a respeito dessa abordagem e sobre a aplicação no processo de calagem.

Esse questionário foi respondido pelos alunos no periódo de suspensão das aulas devido a pandemia da COVID-19 assim o questionário foi enviado para eles no formato pdf ou word, por meio do grupo da disciplina e de forma individual pelo aplicativo whatsapp, eles reponderam no caderno e enviaram as fotos das respostas. Abaixo segue as perguntas com as respostas de alguns alunos, no Apêndice E temos o questionário que foi mandado para eles.

1) Você conhecia os logaritmos antes de ter estudado o conteúdo e realizado as atividades? se sim o que conhecia sobre?

Essa pergunta procura saber se os pesquisados já tinham um conhecimento prévio sobre os logaritmos, na Figura 15 temos a responde do aluno M1.

Figura 15 – Resposta do aluno M1


1R: Eu gostava mas não sabia pra que servia a não ser facilitar calculos

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo o aluno M1 ele já conhecia e gostava do conteúdo, mas não conhecia nenhuma aplicação, sinalizando que ele já devia ter estudado os logaritmos antes, mas somente suas propriedades.

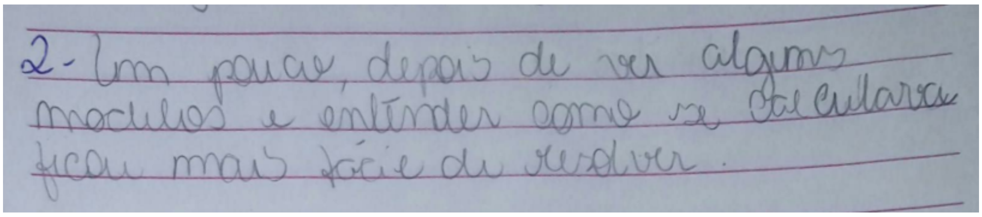
2) Após estudar e resolver as atividades envolvendo logaritmos sua visão sobre esse conteúdo mudou?

Com essa pergunta se procurou saber de forma geral se com o estudo e a realização das atividades mudou o olhar dos pesquisados sobre o conteúdo em relação ao que eles já sabiam antes do começo da aplicação da proposta, na Figura 16 temos a resposta da aluna F6.

Segundo a aluna F6, as aulas expositivas e as atividades da sequência didática contribuiram para que ela conseguisse ter um melhor entendimento do conteúdo, o que o tornou "mais fácil" em suas palavras, notando que dessa forma as atividades tiveram um impacto positivo em seu desenvolvimento.

3) Ter estudado sobre a história dos logaritmos contribuiu para ampliar o interesse

Figura 16 – Resposta da aluna F6

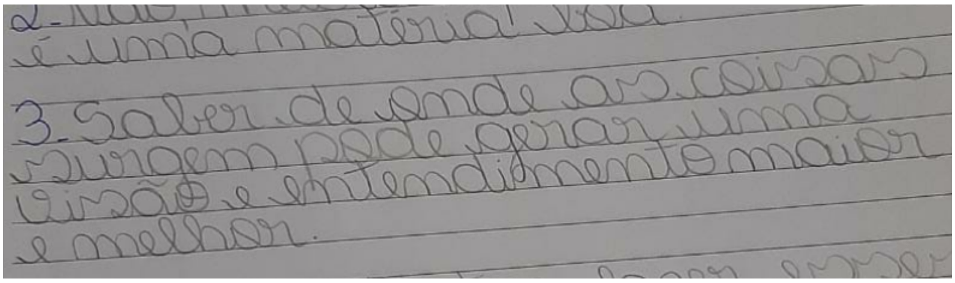

2- Um pouco, depois de ver alguns modelos e entender como se calculava ficou mais fácil de resolver.

Fonte: Dados da pesquisa

pelo conteúdo e seu entendimento? De que forma?

Essa questão buscou de forma específica saber se ter estudado a parte histórica dos logaritmos como parte da introdução do conteúdo serviu para aumentar o interesse dos alunos pelo mesmo. Na Figura 17 temos uma resposta da aluna F11.

Figura 17 – Resposta da aluna F11


é uma matéria boa.
3. Saber de onde as coisas surgem pode gerar uma visão e entendimento maior e melhor.

Fonte: Dados da pesquisa

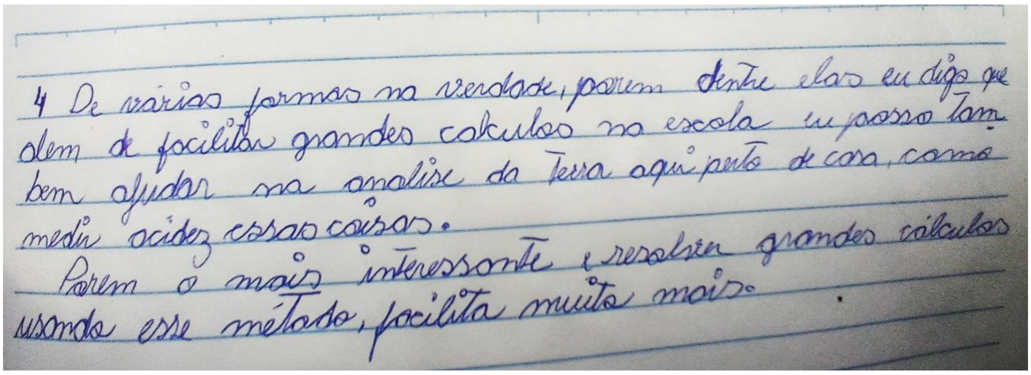
Segundo a aluna F11 ter estudado a história dos logaritmos ajudou a aluna a ter um melhor entendimento do mesmo, logo foi um contribuição positiva abordar os aspectos históricos dos logaritmos.

4) De que forma contribuiu ter estudado as aplicações dos logaritmos em situações que você já vivenciou? Aumentou o interesse pelo aprendizado do conteúdo?

Essa questão assim como a anterior buscou saber de forma específica se estudar as aplicações dos logaritmos em situações do cotidiano contribuiu para intensificar o interesse dos alunos em aprender. Na Figura 18 temos a resposta do aluno M6.

O aluno M6 relatou que ter estudado aplicações dos logaritmos voltadas ao seu cotidiano, contribuiu de forma positiva, pois segundo as palavras do mesmo “[...] posso também ajudar na análise da terra aqui perto de casa [...]”, o que fez o conteúdo ser mais atrativo para o aluno.

Figura 18 – Resposta do aluno M6

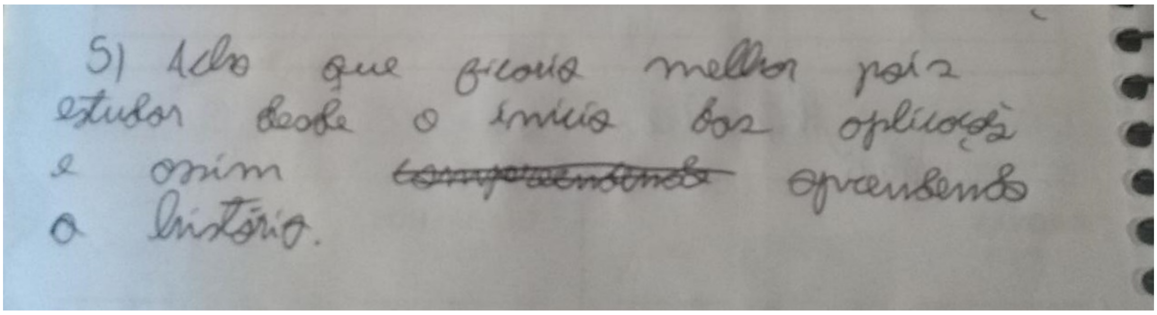

4 De várias formas na verdade, porem dentre elas eu digo que alem de facilitar grandes calculos na escola eu posso tam bem ajudar na analise da Terra aqui perto de casa, como medir acidez essas coisas.
Porem o mais interessante e resolver grandes cálculos usando esse método, facilita muito mais.

Fonte: Dados da pesquisa

5) Qual o seu ponto de vista se todos os conteúdos de matemática fossem trabalhados dessa forma, apresentando sua história e mostrando aplicações voltadas a realidade dos alunos, iria potencializar o processo de aprendizagem?

A ultima questão buscou saber a opinião dos pesquisados a certa dessa forma de aproximar a matemática da vida deles, através das histórias e aplicações, saber se os pesquisados acharam melhor essa forma de abordagem e também saber a opinião deles sobre expandir esse método para outros conteúdos da matemática. Na Figura 19 temos a resposta do aluno M2.

Figura 19 – Resposta do aluno M2


5) Acho que ficaria melhor pois estudar desde o inicio das aplicações e assim ~~compreendendo~~ aprendendo a história.

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo a resposta do aluno M2 se os demais conteúdos da Matemática fossem trabalhados da mesma forma, o aprendizado seria melhor, o que reflete o interesse deles em ter os conteúdos sendo aplicados em sua realidade.

As respostas do questionário sinalizaram que foi possível observar que a proposta do trabalho deu resultados positivos, no início os pesquisados acharam “estranho” elaborar a pesquisa, mas quando apresentado para eles o conteúdo nas aulas, houve resultados positivos, desde aqueles que já sabiam atráves da pesquisa, ou aqueles que complementaram sua pesquisa e assim entenderam o conteúdo de uma forma melhor, na Atividade 2 foi notado um menor engajamento por parte dos alunos visto que as questões são em um formato que eles já estão “acostumados” a ver na matemática.

O destaque ficou para a Atividade 4, o aumento no interesse através da curiosidade foi notado, mostrando que trazer o ensino para a realidade dos estudantes pode ser crucial para o processo de aprendizagem. Segue agora um relato transcrito que o aluno M6 enviou por áudio via Whatsapp assim que ele terminou a Atividade 4 (Apêndice D): “mas o vei não é zoar não cara, eu acho que a questão que eu mais gostei em si mesmo foi a 8 cara, apesar de ser grande, tipo assim foi a questão que eu mais identifiquei, ela deu os detalhes tudo direitinho e tal, ficou muito maneiro ela cara.” a questão 8 da Atividade 4 é a que aborda o processo inteiro de calagem, através de uma análise do solo usando as fórmulas mostradas no seção 2.4 se consegue chegar a quantidade de calcário necessária para se aplicar no solo.

# Capítulo 5

# Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvida uma sequência didática com o objetivo de mostrar para os alunos das escolas do campo que a matemática está presente em seu cotidiano através da aplicação dos logaritmos no processo de calagem, processo esse muito comum em plantações ou lagoas, pois consiste na aplicação do calcário para diminuir os efeitos nocivos da acidez e disponibilizar nutrientes para as plantas e fitoplâncton.

Como visto no Capítulo 4 a maioria dos alunos participou das atividades, com destaque para a Atividade 1, onde os alunos através da pesquisa atuaram como protagonistas do seu processo de aprendizagem, não houve grandes cobranças na pesquisa justamente por conta dos alunos ainda não terem estudado o conteúdo, mas atráves dela se percebeu um rendimento muito maior na hora das aulas ministradas, pois todos os alunos que realizaram a Atividade 1 tinham agora um conhecimento do assunto, mesmo que pequeno, dessa forma as aulas serviram para consolidar o conteúdo.

Os resultados da Atividade 1 se refletiram na Atividade 2, que foi uma lista de questões baseadas na história e propriedades dos logáritmos. Vimos no Gráfico 1 a porcentagem de acerto dos alunos, que foi satisfatória, mostrando que a pesquisa que fizeram foi essencial para o bom desempenho da Atividade 2.

Na Atividade 3 foi observado um interesse menor dos alunos em relação as atividades anteriores, mesmo com o pesquisador tentando abordar aplicações dos logaritmos não tão comuns de serem vistas em salas de aula, como na psicologia e na teoria da informação, no Gráfico 2 foi apresentado a porcentagem de acerto dos alunos, que foi satisfatória também, embora algumas questões dessa atividade despertaram o interesse dos alunos, no geral a Atividade 2 como um todo não despertou tanto o interesse e a vontade dos alunos em resolver as questões.

Outro destaque foi para a Atividade 4, que mesmo sua aplicação ter ocorrido de forma remota, houve grande participação dos alunos, que demonstraram interesse e curiosidade pelas questões da Atividade 4, isso se da devido ao conteúdo ter sido abordado em uma aplicação que faz parte do cotidiano desses alunos, que é o processo de calagem, assim comparando as atividade 3 e 4 foi possível observar que na Atividade 4 o engajamento dos alunos em resolver as questões foi maior, mostrando que quando o conteúdo foi trazido para a realidade dos alunos, houve um ganho no seu processo de ensino e aprendizagem.

Como um todo a participação da turma foi relativamente melhor do que nas aulas “normais” exceto pela Atividade 3 onde os alunos demonstraram menos interesse, mas ainda participaram. Dessa forma conseguimos observar que quando trabalhamos as origens de um conteúdo e como esse conteúdo atualmente é aplicado em situações do cotidiano dos alunos, temos um resultado muito melhor no processo de ensino.

Após todo desenvolvimento, aplicação da sequência didática e com os resultados discutidos acima vimos que trabalhar a aplicação dos logaritmos voltada a situações presentes no cotidiano dos alunos serviu como resposta para a pergunta inicial que é: “de que forma podemos trabalhar os logaritmos com os alunos do campo de forma a tornar esse conteúdo mais interessante para eles?”. Através dessa aplicação se gerou um interesse e um engajamento maior por parte dos alunos em aprender, dessa forma apresentar para os alunos que a matemática está sim presente no seu dia-a-dia pode ser um fator crucial para despertar o seu interesse em aprender.

O pesquisador espera que essa sequência didática possa ser útil para outras escolas do campo, e como projeto futuro trazer outros conteúdos da matemática para o cotidiano dos estudantes, principalmente aos alunos de escolas do campo, pois são os que menos tem conteúdos aplicados em sua realidade.

# Referências

ALVES, Nielsen Alves. Evasão escolar no meio rural: Estudo de caso na escola família agrícola de chapadinha. *Revista Eixo*, v. 6, n. 2, jul. 2017. ISSN 2238-5630. Citado na página 16.

ANGELIN, Eduardo Miranda. *Logaritmos: História, Teoria e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus - BA, mar. 2015. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 28.

ARAÚJO, Ulisses Ferreira de. Pedagogia de projetos e direitos humanos: caminhos para uma educação em valores. *Pro-Posições*, v. 19, n. 2, p. 193–204, maio 2008. Citado na página 46.

ATKINS, Peter; JONES, Loretta. *Princípios de Química - Questionando a Vida Moderna e o Meio Ambiente*. 5. ed. Porto Alegre - RS: Bookman, 2012. ISBN 9788540700543. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Curso de Matemática*. 11. ed. [S.l.]: Moderna, 1997. ISBN 88516009440. Citado 5 vezes nas páginas 24, 27, 48, 79 e 81.

BOYD, Claude E. *Water Quality Management in Aquaculture*. Auburn, Alabama: Centre of Advanced Studies in Mariculture, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 43, 51 e 52.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília: SEC, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasil, 2017. Citado na página 47.

CARDOSO, Eliezer De Moura. *Radioatividade*. Botafogo - RJ, 200–. Disponível em: <www.cnen.gov.br>. Acesso em: 19 de janeiro de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

CONCEIÇÃO, Dalva Batista da; MENDES, Andréia Almeida; BORGES, Lidiane Hott de Fúcio. Análise dos fatores que desmotivam/desinteressam os alunos com relação à matemática. *I Seminário Científico da FACIG*, out. 2015. Citado na página 16.

CORRÊA, João Batista; LOPES, Alfredo Scheid; CARVALHO, Janice Guedes de. Avaliação de H + Al pelo método do SMP. *Congresso Brasileiro de Pesquisas Cafeeiras*, n. 12, p. 111–112, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 51.

DANTE, Luiz Roberto. *matemática: Contexto & aplicações*. 2. ed. São Paulo: ática, 2013. v. 1. ISBN 9788508162994. Citado 8 vezes nas páginas 24, 28, 50, 77, 78, 80, 81 e 82.

DONOSO, José Pedro. *Som e Acústica*. [S.l.], 2005. Citado na página 29.

DURIGON, Emerson Giuliani et al. Importância da calagem na piscicultura. *SB Rural*, p. 1, dez. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 51.

EICHLER, Marcelo; CALVETE, Marcos Henrique Hahn; SALGADO, Tânia Moskinis. *Módulos para o ensino de radioatividade*. Porto Alegre, 1997. Http://www.iq.ufrgs.br/aeq/html/publicacoes/matdid/livros/pdf/radio.pdf. Acesso em: 19 de janeiro de 2020. Citado na página 31.

EVES, Howard. *introdução à histária da matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004. ISBN 8526806572. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 23 e 48.

FERREIRA, Ronize Lampert. Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática. *UNIFRA - Centro Universitário franciscano*, 2006. Citado na página 17.

FITTS JR, Paul Morris. The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of moviment. *Journal of Experimental Psychology*, v. 47, n. 6, p. 381–391, jun. 1954. Citado na página 33.

FOSSA, John Andrew. Matemática, história e compreensão. *Revista Cocar*, v. 2, n. 4, p. 7–16, 2008. Citado na página 58.

HICK, William Edmund. On the rate of gain of information. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, v. 4, n. 1, p. 11–26, mar. 1952. Citado na página 32.

HYMAN, Ray. Stimulus information as a determinant of reaction time. *Journal of Experimental Psychology*, p. 188–196, 1953. Citado na página 32.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 24, 48, 52 e 82.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. v. 1. ISBN 8585818107. Citado na página 60.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: pedagógica e universitária LTDA, 1986. Citado na página 45.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem. 2004. Citado na página 63.

MAOR, Eli. *e: A História de um Número*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008. ISBN 9788501058478. Citado 6 vezes nas páginas 20, 21, 22, 23, 48 e 97.

MATTOS, Elenir Maria Andreolla; CASTANHA, André Paulo. A importância da pesquisa escolar para a construção do conhecimento do aluno no ensino fundamental. v. 25, 2008. Citado na página 56.

MESQUITA, Carlos Magno de et al. *Manual do Café: Manejo de Cafezais Em Produção*. Belo Horizonte, MG, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 18, 36, 37, 38, 40 e 51.

MIGUEL, Antonio et al. *História da Matemática em atividades didáticas*. [S.l.]: Editora Livraria da Fisica, 2009. Citado na página 58.

MOURA, Francisco Edson Sousa de. *A Natureza dos Logaritmos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, fev. 2018. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 28.

NEVES, José Luis. pesquisa qualitativa - características, usos e possibilidades. *Caderno de pesquisas em administração*, v. 1, n. 3, 1996. Citado na página 45.

OELKE, Simone Adriana; RAITER, Gerson. El tiempo de movimiento en función del índice de dificultad en la tarea de fitts en universitarios. *Revista Digital - Buenos Aires*, n. 140, p. 114, jan. 2010. Citado na página 33.

OLIVEIRA, Antonio Leonilde de et al. O questionário, o formulário e a intrevista como instrumentos de coleta de dados: Vantagens e desvantagens do seu uso na pesquisa de campos em ciências humanas. *III Conedu: Congresso Nacional de Educação*, 2016. Citado na página 53.

OLIVEIRA, Marcos Borges de. *Abordagens históricas sobre logaritmos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá - MT, mar. 2014. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 28.

PEREIRA, Mariana Costa. *Logaritmos: Uma Abordagem Interdisciplinar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminensa Darcy Ribeiro - UENF, Campos dos Goytacazes, maio 2016. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 50.

PORFIRIO, Geovani Leonardo. evasão escolar do campo: Uma revião bibliográfica. *Universidade Federal do Paraná*, 2018. Citado na página 16.

QUEIROZ, Julio Ferraz de; BOEIRA, Rita Carla. Calagem e controle da acidez dos viveiros de aquicültura. *Circular Técnica*, n. 14, dez. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 51.

REZA, Fazlollah M. *An Introduction to Information Theory*. New Delhi: TATA McGRAW-HILL, 1961. Citado na página 34.

RIBEIRO, Antonio Carlos; GUIMARãES, Paulo Tácito G.; ALVAREZ, Victor Hugo. Recomendações para o uso de corretivos e fertilizantes em minas gerais. *Comissão de fertilidade do solo do Estado de Minas Gerais -CFSMG*, viçosa, 1999. 359p. Citado 3 vezes nas páginas 37, 40 e 51.

RIBEIRO, Luiz Guilherme Silva. *Logaritmos e Exponenciais: Da Teoria á Pratica Pedagógica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, 2017. Citado na página 28.

ROCCHA, Fernando José Martins da. *Logaritmos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, Campos dos Goytacazes, ago. 2013. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 28.

SILVA, Jesse James Leite da. *Aplicação dos Logaritmos na Matemática e Demais Ciências*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, set. 2016. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 28.

SOARES, Evanildo Costa. Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula. *Universidade Federal do Rio Grande do Norte*, 2011. Citado na página 17.

SOUZA, Djalma Martinhão Gomes de; MIRANDA, Leo Nobre de; LOBATO, Edson. Avaliação dos métodos de determinação da necessidade de calcário em solos de cerrado. *Circular técnica*, n. 27, p. 1–14, out. 1997. ISSN 0102-010. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 51.

TAVONI, Robinson; OLIVEIRA, Renata Zotin G. de. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 2, n. 2, p. 86–99, dez. 2013. Citado na página 29.

TEIXEIRA, Paulo César et al. *Manual de Métodos de Análise de Solo*. 3. ed. Brasília, DF, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 51.

THIENGO, Vladimir. *Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Niterói, mar. 2013. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 28.

WIETHÖLTER, Sírio. Calagem no brasil. *Ministério da Agricultura e do Abastecimento*, dez. 2000. ISSN 1516-5582. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 51.

ZABALA, Antoni. *A Prática Educativa: Como ensinar*. Porto Alegre: ARTMED, 1998. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 62.

# Apêndices

# APÊNDICE A

# Exemplos Resolvidos de Aplicações que Podem ser Usadas em Sala de Aula

## A.1 Exemplos Matemática Financeira

1. (DANTE, 2013) A expressão $M = C \cdot (1+i)^n$ nos permite calcular o montante $M$, resultante da aplicação do capital $C$ a juros compostos, à taxa anual $i$, ao completar um período de $n$ anos. Nessas comdições, se o capital de $R\$\,800\,000,00$ for aplicado a juros compostos e à taxa anual de $12\%$, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de $R\$\,700\,000,00$?

   Temos as seguintes informações do problema:

   - $C = R\$\,800\,000,00$.
   - $i = 12\% = 0,12$.
   - $M = R\$\,1\,500\,000,00$ já que $M = C + J$ e $J = R\$\,700\,000,00$.
   - $n$ é quanto tempo o capital ficou aplicado.

   Assim substituindo na fórmula, vamos ter:

   $$1\,500\,000,00 = 800\,000,00 \cdot (1+0,12)^n$$

   $$\frac{1\,500\,000,00}{800\,000,00} = (1,12)^n$$

   $$1,875 = (1,12)^n \Rightarrow n = \log_{1,12} 1,875$$

   Resolvendo o logaritmo usando uma calculadora científica temos que $n \approx 5$ anos e meio.

2. (DANTE, 2013) Um cartão de crédito cobra juros de $9\%$ a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de $R\$\,505,00$. Em quanto tempo essa dívida chegará a $R\$\,600,00$ se não for paga?(dados: $\log 2 = 0,3; \log 3 = 0,48; \log 1,01 = 0,004; \log 1,09 = 0,038$)

   Fazendo as substituições na fórmula do juros compostos temos:

   $$600,00 = 505,00 \cdot (1+0,09)^n$$

   $$\frac{600,00}{505,00} = (1,09)^n$$

   Simplificando o primeiro lado da igualdade

   $$\frac{120}{101} \Rightarrow \frac{1,2}{1,01} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^2}{10 \cdot 1,01} = (1,09)^n$$

   Aplicando logaritmo, temos:

$$\log \frac{3 \cdot 2^2}{10 \cdot 1,01} = \log 1,09^n$$

Aplicando as propriedade que vimos na seção 2.2 temos:

$$\log 3 + 2 \cdot \log 2 - \log 10 - \log 1,01 = n \cdot \log 1,09$$

Usando os valores do problema:

$$0,48 + 2 \cdot 0,3 - 1 - 0,004 = 0,038 \cdot n$$

Resolvendo temos que $n = 2$ meses

## A.2 Exemplos Abalos Sísmicos

1. (DANTE, 2013) Imagine que uma residência simples tenha o consumo médio mensal de energia elétrica de 100 kWh. Se fosse possível captar toda a energia liberada em um terremoto de intensidade 8 na escala Richter, qual seria o número de residências do tipo descrito que poderiam ser abastecidas com energia elétrica durante um mês?

   Pela fórmula usada para calcular a intensidade do terremoto na escala Richter temos:

   $$8 = \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 12 = \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

   Passando para notação de potência

   $$10^{12} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^9$$

   Agora dividimos o valor de $E$ por $100$ kWh para saber quantas residências essa energia daria para abastecer:

   $$\frac{7 \cdot 10^9}{10^2} = 7 \cdot 10^7$$

   Assim daria para abastecer $7 \cdot 10^7$ residências.

2. (DANTE, 2013)Dois tremores de terra foram sentidos pela população de Montes Claros (MG) em 19 de maio de 2012. O mais forte deles alcançou uma intensidade aproximada de $4,5$ pontos na escala Richter, tendo sido detectado pelos equipamentos de sismologia da Universidade dde Brasília (UnB). Qual foi a energia liberada por ele?

   Usando a fórmula, temos:

   $$4,5 = \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 6,75 = \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

   $$10^{6,75} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{3,75}$$

   Assim a energia liberada por esse tremor foi de $7 \cdot 10^{3,75}$ kWh

## A.3 Exemplos Acústica

1. (BIANCHINI; PACCOLA, 1997) Numa danceteria Existem dois aparelhos de som exatamente iguais. quando o aparelho **A** foi ligado no máximo, mediu-se o $NIS$ (Nível de Intensidade Sonora), dado por 80dB (decibel). Determinar o número de decibels que se obtém no caso de o aparelho **B** também ser ligado no máximo, sabendo que o $NIS$ é dado em decibels por:

$$NIS = 10 \cdot \log\left(\frac{IS}{IR}\right)$$

, Em que $IS$ é a intensidade sonora e $IR$ é o índice unitário (em watt por $cm^2$).

Tomando $a = \frac{IS}{IR}$ e $NIS_1$ o nível de intensidade sonora em decibels quando somente o aparelho **A** estiver ligado, temos:

$$NIS_1 = 10 \cdot \log a = 80$$

Ao ligar o aparelho **B** dobramos a intensidade sonora, assim vamos ter:

$$NIS = 10 \cdot \log(2 \cdot a) \Rightarrow 10 \cdot (\log 2 + \log a) \Rightarrow 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log a$$

Fazendo $\log 2 = 0,30103$ e substituindo o valor de $10 \cdot \log a$ temos:

$$NIS = 10 \cdot 0,30103 + 80 \Rightarrow 3,0103 + 80 = 83,0103$$

Assim dobrando a intensidade sonora, o valor do $NIS$ aumentou em aproximadamente 3 decibels.

2. (BIANCHINI; PACCOLA, 1997) Se um aparelho de som ligado no máximo produz 60 db, quantos decibels serão produzidos se ligarmos, no mesmo ambiente, mais dois aparelhos de som exatamente iguais ao primeiro?

Assim como no problema anterior vamos tomar $a = \frac{IS}{IR}$ e $NIS_1$ o nível de intensidade sonora do primeiro aparelho ligado, tendo assim:

$$NIS_1 = 10 \cdot \log a = 60$$

Ligando os outros 2 aparelhos:

$$NIS = 10 \cdot \log(3 \cdot a) \Rightarrow 10 \cdot (\log 3 + \log a) \Rightarrow 10 \cdot \log 3 + 10 \cdot \log a$$

Temos que $\log 3 \approx 0,48$ e substituindo o valor de $a$ temos:

$$NIS = 10 \cdot 0,48 + 60 \Rightarrow 4,8 + 60 = 64,8$$

Assim, com os três aparelhos iguais ligados, vai ser produzido 64,8 decibeis

## A.4 Exemplos Crescimento Populacional

1. (DANTE, 2013) Sabemos que o número de bactérias em uma cultura, depois de um tempo $t$ é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que $N_0$ é o número inicial (quando $t = 0$) e $r$ a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de $5\%$ ao minuto?

   Como queremos o tempo necessário para que o número de bactéricas dobre, vamos considerar $N = 2 \cdot N_0$, assim aplicando a fórmula, temos:

   $$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{0,05t} \Rightarrow 2 = e^{0,05t}$$

   Aplicando o logaritmos de base $e$ em ambos os lados da igualdade, temos:

   $$\ln 2 = \ln e^{0,05t} \Rightarrow \ln 2 = 0,05t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05}$$

   temos que o valor de $\ln 2 = 0,6931$, assim:

   $$t = \frac{0,6931}{0,05} \approx 13,8min$$

   fazendo a conversão da casa decimal $60 \times 0,8 = 48$ temos que o tempo necessário é 13min e 48 segundos

2. (DANTE, 2013) Em um laboratório, uma pessoa verifica que a taxa de crescimento relativo contínuo de bactérias em uma cultura é de $2,5\%$ por minuto. Nessas condições, em quantos minutos o número de bactérias passará de 4 000 para 6 000?

   Substituindo os valores na fórmula que caracteriza o crecimento populacional, temos:

   $$6\,000 = 4\,000 \cdot e^{0,025t} \Rightarrow \frac{6\,000}{4\,000} = e^{0,025t} \Rightarrow 1,5 = e^{0,025t}$$

   Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, temos:

   $$\ln 1,5 = \ln e^{0,025t} \Rightarrow \ln 1,5 = 0,025t$$

   O valor de $\ln 1,5 = 0,4054$, assim:

   $$0,4054 = 0,25t \Rightarrow t = \frac{0,4054}{0,025} \Rightarrow t \approx 16,21$$

   Convertendo a casa decimal $60 \times 0,21 \approx 12$ o que levará aproximadamente 16 minutos e 12 segundos para o número de bactérias passar de 4 000 para 6 000

## A.5 Exemplos Decaimento Radioativo

1. (BIANCHINI; PACCOLA, 1997) Num processo de decaimento radioativo, a quantidade residual $Q$ de uma substância varia conforme a seguinte lei:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0{,}0003 \cdot t}$$

Em que $t$ é o número de anos.

a) Ache $Q(800)$, para $Q_0 = 680$ gramas.
Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$Q(800) = 680 \cdot e^{-0{,}0003 \cdot 800}$$

Sabemos que $e \approx 2,7182$, dessa forma temos:

$$Q(800) = 680 \cdot 2,7182^{-0{,}0003 \cdot 800} = 680 \cdot 2,7182^{-0{,}24} = 680 \cdot 0,7866 \approx 535g$$

dessa maneira, após 800 anos, a quantidade residual será de 535 gramas.

b) Se para $t = 500$ tivermos $Q(t) = 379$, determine $Q_0$
Aplicando a fórmula:

$$379 = Q_0 \cdot e^{-0{,}0003 \cdot 500} = Q_0 \cdot e^{-0{,}15} = Q_0 \cdot 2,7182^{-0{,}15}$$

$$379 = Q_0 \cdot 0,86 \Rightarrow Q_0 = \frac{379}{0,86} \approx 440,7$$

Assim a quantidade residual da substância inicialmente era de 440,7 gramas

2. (DANTE, 2013) Calcule a meia-vida de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de $4\%$ ao ano.(Lembre-se: meia-vida é o tempo que deve decorrer para que, em certo momento, metade dos átomos de uma substância radioativa se desintegre.)

Pela Formula para o decaimento radioativo temos:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$$

Como queremos saber o tempo de meia vida, logo fazemos $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$ dai vem:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0{,}04 \cdot t}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,04t \cdot \ln e \Rightarrow -0,6931 = -0,04t \Rightarrow t = \frac{-0,6931}{-0,04} \approx 17,3$$

Convertendo a parte decimal dos anos em meses temos $13 \times 0,3 = 3,6$ e convertendo a parte decimal dos meses em dias temos $30 \times 0,6 = 18$. Assim a meia-vida da substância é de 17 anos, 3 meses e 18 dias.

## A.6 Exemplos Potencial Hidrogeniônico

1. (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977)**[CESGRANRIO-76]**(editado) O pH de uma solução é definido por

$$pH = \log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right)$$

onde $H^+$ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. O pH de uma solução tal que $H^+ = 1,0 \times 10^{-8}$ é?

Fazendo a substituição na fórmula, temos:

$$pH = \log_{10}\left(\frac{1}{1,0 \times 10^{-8}}\right) = \log_{10}\left(1,0 \times 10^{8}\right) = 8 \cdot \log_{10} 10 = 8$$

Logo o pH da solução em análise é 8

2. (DANTE, 2013) O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de $H_3O^+$. Qual é o pH de uma solução cuja concentração de $H_3O^+$ é $4,5 \cdot 10^{-5}$ mol/l?

Pelos dados do problema, temos:

$$pH = \log_{10}\left(\frac{1}{4,5 \cdot 10^{-5}}\right) = \log_{10}\left(4,5^{-1} \cdot 10^{5}\right)$$

$$pH = \log_{10} 4,5^{-1} + 5 \cdot \log_{10} 10 = -\log_{10} 4,5 + 5$$

Calculando $\log_{10} 4,5 = 0,6532$, assim substituindo:

$$-0,6535 + 5 = 4,3465$$

logo o pH da solução é 4,3465

# APÊNDICE B

# Atividade 2

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

**E.E. “Fazenda Paraíso”**

## Atividade 2 – Questões Históricas Sobre os Logaritmos:

**Disciplina: Matemática**

**Aluno(a):______________________________**
**Professor: Wellix Moreira da Silva**

**1)** John Napier considerado o inventor dos logaritmos não era um matemático profissional, ele tinha interesse em vários outros assuntos, desses assuntos qual era o seu assunto de interesse principal?

**A)** Geografia **B)** História **C)** Astronomia **D)** Religião **E)** Literatura

**2)** Qual foram as 2 possíveis ideias que colocaram John Napier no caminho certo para a criação dos logaritmos?

**A)** Funções e a relação entre progressão geométrica e aritmética

**B)** Trigonometria e progressão geométrica

**C)** Trigonometria e progressão aritmética

**D)** Funções e trigonometria

**E)** Trigonometria e a relação entre progressão geométrica e aritmética

**3)** Na criação dos logaritmos, Napier propôs uma taxa comum (“proporção” em suas palavras) para a construção de sua tabela de logaritmos, qual foi essa “taxa”?

**A)** $1-10^{-7}$ **B)** $1-10^{-4}$ **C)** $1-10^{-9}$ **D)** $1-10$ **E)** $1-10^{-2}$

**4)** Henry Briggs que era professor de geometria do Colégio Gresham em Londres, em um encontro com John Napier propôs duas modificações nas tabelas de Napier que as tornariam mais convenientes, Napier concordou prontamente. Quais foram essas duas modificações?

**5)** Quais foram as outras contribuições a matemáticas feitas por Napier?

**6)** Uma outra pessoa na época reclamou o título de inventor dos logaritmos, criando uma tabela de logaritmos usando o mesmo esquema geral de Napier, mas com uma diferença significativa, quem foi essa pessoa e qual era a diferença entre sua tabela e a tabela de Napier?

**7)** A tabela de logaritmos, utilizada para facilitar os cálculos usando logaritmos foi companheira fiel dos cientistas e engenheiros até o início da década de 1970, onde perdeu espaço para outro equipamento que auxiliava nos cálculos de forma mais eficiente, qual era esse equipamento?

**8)** Calcule a expressão $x = \sqrt[3]{(493{,}8 \times 23{,}67^2/5{,}104)}$utilizando as propriedades dos logaritmos, sabendo que: $\log 493{,}8 = 2.6935$; $\log 23{,}67 = 1.3741$; $\log 5{,}104 = 0{,}7079$

# APÊNDICE C

# Atividade 3

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

**E.E. "Fazenda Paraíso"**

## <u>Atividade 3 – Aplicações Gerais dos Logaritmos:</u>

**Disciplina: Matemática**

**Aluno(a):______________________________**
**Professor: Wellix Moreira da Silva**

**1)** (Enem) A escala de Magnitude de momento (abreviada como MMS e denotada como $M_w$), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a escala Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. $M_w$ e $M_0$ se relacionam pela fórmula:

$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$,

onde $M_0$ é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimentos da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é $dina \cdot cm$. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico $M_0$ do terremoto de Kobe (em $dina \cdot cm$)?

A) $10^{-5{,}10}$ B) $10^{0{,}73}$ C) $10^{12{,}00}$ D) $10^{21{,}65}$ E) $10^{27{,}00}$

**2)** (UEG-GO) A intensidade $I$ de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que $E$ é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$kWh. Aumentando em uma unidade a intensidade do terremoto, a energia liberada fica multiplicada por um número:

a) no intervalo de 30 a 40

b) maior que 40

c) no intervalo de 20 a 30

d) menor que 20

**3)** [Cesgranrio-RJ] O nível de intensidade sonora (*NIS*) é expresso em decibéis (dB) por:

$$NIS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

onde: $I$ = intensidade sonora fornecida pela caixa de som; $I_0$ = intensidade padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual $N = 0$). Para o nível de intensidade $N$ = 120 dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

a) $10^{13} \cdot I_0$  b) $10^{12} \cdot I_0$  c) $1200 \cdot I_0$  d) $120 \cdot I_0$  e) $12 \cdot I_0$

**4)** (UFRR) Em pesquisa recente realizada por cientistas brasileiros de uma universidade federal comprovaram que a ariranha e o mico-leão-dourado são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, aproximadamente, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas? (Use $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 1{,}047 = 0{,}019$.)

a) 25 anos  b) 20 anos  c) 30 anos  d) 15 anos
e) 10 anos

**5)** [ENEM-2013] Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após $t$ anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde $A$ é a massa inicial e $k$ uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para log 2. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27  b) 36  c) 50  d) 54  e)100

**6)** (UFU-MG) A acidez de uma solução liquida é medida pela concentração de íons de hidrogênio $H^+$ na solução. A medida de acidez usada é o pH, definido por $pH = -\log_{10}[H^+]$, em que $[H^+]$ é a concentração de íons de hidrogênio. Se uma cerveja apresentou pH de 4,0 e um suco de laranja. Um pH de 3,0, então, relativamente a essas soluções, é correto afirmar que a razão (concentração de íons de hidrogênio na cerveja), quociente (concentração de íons de hidrogênio no suco), é igual a:

a) 0,001  b) 0,01

c) 0,1  d) 0,0001

**7)** Lei de HICK Relaciona o tempo que leva para uma pessoa tomar uma decisão com o número de possíveis escolhas que ela possui (Hick, 1952; Hyman, 1953).

Quando todas as opções possuem a mesma probabilidade a formula é:

$$T = k \times \log_2(n + 1)$$

T = tempo médio para escolher entre N opções

k~150 ms (milissegundos)

**Pergunta:**

Calcule o tempo médio necessário para achar um livro em uma página de catálogo que contém 25,50 e 100 livros. Assuma que os itens estão em ordem alfabética.

**8)** A lei de Fitts, definida pela fórmula:

$$ID = \log_2\left(\frac{2D}{L}\right),$$

Onde prediz a dificuldade para se atingir um alvo é uma função da distância do alvo e de seu tamanho, onde ***ID*** é o índice de dificuldade (quanto maior, mais difícil de se acertar o alvo), ***L*** é o tamanho do alvo e ***D*** é a distância entre o objeto e o alvo a ser acertado, esse modelo é muito usado pelos designers para a criação de interfaces digitais, Qual é o ***ID*** de um ícone em uma página que tem o tamanho de 12pixels e o cursor do mouse está a uma distância de 48pixels do ícone?

**9)** [PUC-SP] UM capital C, aplicado a juros compostos a uma taxa $i$ por período, produz, ao final de $n$ períodos, o montante $M$, dado por $M = C.(1 + i)^n$. Nessas condições, utilizando-se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, o capital de

2.000 reais, aplicado a juro composto à taxa de 20% ao ano, produzirá o montante de 5 000 reais, ao final de um período de?

A) 2 anos b) 3,5 anos c) 4 anos d) 8,5 anos

**10)** Um evento com probabilidade P fornece uma informação $I$ dada pela expressão:

$$I = \log_2 \frac{1}{P},$$

Como o logaritmo é em base 2 a informação é medida em bits

**A)** Qual é a informação associada ao resultado “Cara” no lançamento de uma moeda?

**B)** No lançamento de um dado temos que o resultado obtido foi um número primo maios do que 2, qual é a informação em bits associado a esse resultado?

# APÊNDICE D

# Atividade 4

E.E. “Fazenda Paraíso”

# Atividade 4 – Aplicações dos Logaritmos no Processo de Calagem:

**Disciplina: Matemática**

**Aluno(a):_____________________________**
**Professor: Wellix Moreira da Silva**

**01)** (CESGRANRIO-76) O pH de uma solução é definido por:

$$\boldsymbol{pH = \log_{10}\left(\frac{1}{H^+}\right)}$$

Onde $H^+$ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. O pH de uma solução tal que $H^+ = 1{,}0 \times 10^{-8}$ é:

a) 7 b) $10^{-8}$ c) 1,0 d) 8
e) 0

**02)** Foram coletadas 2 amostras de diferentes açudes em Vargem Alegre na cidade de Espera Feliz para o cálculo de sua necessidade de calagem, no resultado da análise tivemos os seguintes valores para a concentração de íons de hidrogênio:

1º amostra $10^{-5}$ mol/L

2º amostra $10^{-6,3}$ mol/L

Sabendo que a fórmula utilizada para se calcular a necessidade de calagem em lagos é: $\boldsymbol{NC = (8{,}00 - pH) \cdot 5.600}$. Assinale a alternativa referente a quantidade de calcário em kg/ha necessária para a calagem desses açudes:

A) 16.900 kg/ha e 9.520 kg/ha B) 16.800 kg/ha e 9.600 kg/ha

C) 16.800 kg/ha e 9.520 kg/ha D) 17.800 kg/ha e 9.550 kg/ha

**03)** Foi feito o processo de calagem em 2 açudes na cidade de Caina, onde a quantidade de calcário em Kg/ha foi, para a primeiro açude: 19.600 Kg/há e para o segundo açude: 15.680 Kg/ha. Assinale a alternativa que contém a concentração de íons de Hidrogênio presente nessas 2 lagoas antes de se ter feito a calagem.

A) $10^{-4,5}$ mol/L e $10^{-5}$ mol/L B) $10^{-4}$ mol/L e $10^{-5,2}$ mol/L

C) $10^{-5,5}$ mol/L e $10^{-4,2}$ mol/L D) $10^{-4,5}$ mol/L e $10^{-5,2}$ mol/L

**04)** Um laboratório ficou encarregado de descobrir a acidez potencial (H+Al) de um determinado solo na cidade de Espera Feliz, para depois se fazer a calagem de forma correta, eles descobriram o pH SMP desse solo que foi de 5,7, sabendo-se que a fórmula para se calcular a acidez potencial pelo pH SMP é:

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{H+Al}) = \mathbf{8,0629 - 1,1110} \cdot \boldsymbol{pH\ SMP}$$

Qual das Alternativas abaixo representa o valor da acidez potencial desse solo de forma mais aproximada?

A) 5,9 $Cmol_c/dm^3$ B) 4,5 $Cmol_c/dm^3$

C) 5,6 $Cmol_c/dm^3$ D) 6,2 $Cmol_c/dm^3$

**05)** Um laboratório recebeu uma amostra de solo da cidade de Espera Feliz para se fazer uma análise da necessidade de calagem, não se conseguiu calcular o pH SMP, então foi usado acetato de cálcio e se calculou a acidez potencial (H+Al), que foi igual a 4,5 $Cmol_c/dm^3$. Usando a fórmula: $\mathbf{ln}(\boldsymbol{H+Al}) = \mathbf{8,0629 - 1,1110} \cdot \boldsymbol{pH\ SMP}$, qual das alternativas abaixo representa o valor do pH SMP dessa amostra?

A) 4,5 pH SMP B) 5,5 pH SMP C) 5,9 pH SMP D) 6,1 pH SMP

**06)** A capacidade de troca de cátions a pH 7,0 (CTC) é a capacidade que o solo tem em "assimilar" as bases adicionadas na calagem para a trocas na solução do solo e fornecendo para as plantas. A fórmula para se calcular a CTC é: $\boldsymbol{CTC = Ca + Mg + K + (H + Al)}$, onde $Ca, Mg, K$, são respectivamente as concentrações de Cálcio, Magnésio e Potássio respectivamente, e $H + Al$ é a acidez potencial do solo. Qual é o valor da CTC em um solo onde temos as respectivas concentrações: $Ca = 0,62\ Cmol_c/dm^3$, $Mg = 0,17\ Cmol_c/dm^3$, $K = 0,13\ Cmol_c/dm^3$, e pH SMP igual a 6?

A) $CTC = 4,5\ Cmol_c/dm^3$ B) $CTC = 4,96\ Cmol_c/dm^3$

C) $CTC = 4,85\ Cmol_c/dm^3$ D) $CTC = 5,15\ Cmol_c/dm^3$

**07)** No processo de Calagem do solo denominamos como $V_1$ a saturação de bases atual do solo, que é a razão do teor das bases Ca, Mg e K em relação percentual com a CTC, encontrada no solo em análise. A fórmula de $V_1$ é dada por:

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{SB \cdot 100}{CTC}}$$

Onde SB é a soma das concentrações: $\boldsymbol{SB = Ca + Mg + K}$.

A saturação das bases ($\boldsymbol{V_1}$) é fundamental no processo de calagem para saber a quantidade de calcário usada no solo para determinada plantação. Calcule a saturação das bases de um solo com as concentrações: $Ca = 0{,}60\ Cmol_c/dm^3$, $Mg = 0{,}15\ Cmol_c/dm^3$, $K = 0{,}10\ Cmol_c/dm^3$, e pH SMP igual a 6,2:

A) 23,4%   B) 20,8%   C) 26,25%   D) 28,3%

**08)** Leandro quer plantar café e milho em seus dois sítios, para isso ele precisa fazer a calagem do solo de seus sítios, para diminuir a acidez e potencializar o desenvolvimento de sua plantação, assim ele recolheu 2 amostras de seus sítios para se fazer uma análise e obteve os seguintes resultados:

1º Resultado (Sítio 1):

| pH SMP | Ca | Mg | K |
|---|---|---|---|
| 5,8 | 0,63 $Cmol_c/dm^3$ | 0,16 $Cmol_c/dm^3$ | 0,12 $Cmol_c/dm^3$ |

2º resultado (Sítio 2):

| pH SMP | Ca | Mg | K |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,59 $Cmol_c/dm^3$ | 0,19 $Cmol_c/dm^3$ | 0,11 $Cmol_c/dm^3$ |

Leandro pretende ter a plantação de café no sítio referente ao primeiro resultado, e a plantação de milho no sítio referente ao segundo resultado. A análise irá determinar a necessidade de calagem ($\boldsymbol{NC}$) de calcário em toneladas por hectare, a fórmula para se calcular essa necessidade de calagem é dada pela fórmula:

$$\boldsymbol{NC = \frac{CTC(V_2 - V_1)}{PRNT}}$$

Onde $V_2$ é a saturação por bases desejada do solo (para café $V_2 = 60\%$, e para milho $V_2 = 70\%$) e $PRNT$ é o poder relativo de neutralização total do calcário que será utilizado (use $PRNT = 100$).

Calcule a quantidade de calcário a ser usada em cada sítio.

# APÊNDICE E

# Questionário

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

**E.E. “Fazenda Paraíso”**

## Questionário:

**Disciplina: Matemática**

**Professor: Wellix Moreira da Silva**

1) Você conhecia os logaritmos antes de ter estudado o conteúdo e realizado atividades? se sim o que conhecia sobre?

2) Após estudar e resolver as atividades envolvendo logaritmos sua visão sobre esse conteúdo mudou?

3) Ter estudado sobre a história dos logaritmos contribuiu para ampliar o interesse pelo conteúdo e seu entendimento? De que forma?

4) De que forma contribuiu ter estudado as aplicações dos logaritmos em situações que você já vivenciou? Aumentou o interesse pelo aprendizado do conteúdo?

5) Qual o seu ponto de vista se todos os conteúdos de matemática fossem trabalhados dessa forma, apresentando sua história e mostrando aplicações voltadas a realidade dos alunos, iria potencializar o processo de aprendizagem?

# Anexos

# ANEXO A

# Tabela de logaritmo

Tabelas retiradas de (MAOR, 2008)

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Partes Proporcionais 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Logaritmos com quatro casas decimais

| | | | | | | | | | | | Partes Proporcionais | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| .51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| .53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| .55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| .56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| .60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| .61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| .66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| .67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| .70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| .71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| .72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| .73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| .74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| .76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| .77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| .78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| .79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| .80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| .81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| .82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| .83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| .84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| .85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| .87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| .88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| .89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| .90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| .92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| .93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| .95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| .96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| .97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| .98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| .99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Logaritmos com quatro casas decimais