



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# A Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos: Um Olhar Algébrico<sup>†</sup>

por

**Antonio Marcos da Silva Souto**

sob orientação do

**Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013  
João Pessoa - PB

---

<sup>†</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

S728r

Souto, Antonio Marcos da Silva.

A reta de Euler e a circunferência dos nove pontos: um olhar algébrico / Antonio Marcos da Silva Souto.-- João Pessoa, 2013.

72f.

Orientador: Pedro Antonio Gómez Venegas

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Geometria. 2. Álgebra Linear. 3. Geogebra. 4. Pontos notáveis do triângulo. 5. Reta de Euler. 6. Circunferência dos nove pontos.

UFPB/BC

CDU: 514(043)

# A Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos: Um Olhar Algébrico

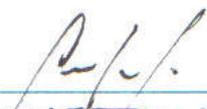
por

**Antonio Marcos da Silva Souto**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pedro Antonio Gomez Venegas -UFPB (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - UFPB

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada - UFPE

Agosto/2013

# Agradecimentos

Ao meu Senhor Jesus Cristo, pela força suprida nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Martinho Souto de Almeida e Verônica Maria da Silva Souto, por me educarem com amor e humildade, suas vidas são meus exemplos.

À minha querida esposa Rosângela Kátia e meus amados filhos Aninha, André e Alícia, por suportarem com paciência a minha ausência durante as viagens e nos momentos de reclusão forçada pelas rigorosas atividades do curso.

Ao meu orientador Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas, por me guiar nessa difícil e árdua tarefa em um prazo de tempo tão curto e em um período tão doloroso da sua vida.

Aos professores Dra. Jacqueline Rojas e Dr. Ramón Mendoza, por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos meus amigos/colegas de turma que transformaram os momentos de tensão em saborosas experiências de união e amizade, já estou com saudade.

Aos coordenadores Dr. João Marcos e Dr. Bruno Henrique, por aceitarem assumir o pioneiro desafio de iniciar e prosseguir o PROFMAT na UFPB.

Aos meus Tios/padrinhos Dr. Antônio Souto Coutinho e Lizete de Farias Coutinho, que sempre me apoiaram nesta e em outras jornadas, por me acolherem e me hospedarem durante os intermináveis fins de semana com muito carinho;

Ao meu amigo, colega, ex-professor e companheiro de viagem, José Edmar Bezerra Júnior, que me encorajou a prosseguir consigo até o fim, por não me deixar só nos 1000 quilômetros semanais de jornada;

À SBM, ao IMPA e ao MEC por disponibilizar ao docente do Ensino Básica a oportunidade de realizar o quase utópico sonho da formação em nível de mestrado;

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - IFPE, em particular à direção do campus Pesqueira, por compreender as ausências e me incentivar até o final, principalmente com o Dr. Glauco Reinaldo e MSc. Olavo Otávio.

# Dedicatória

*A todos os meus colegas professores da rede municipal e estadual de Ensino que desejam obter esta titulação mas, com suas jornadas sobrehumanas e baixos salários, abdicam de seus sonhos para honrarem com muita dignidade a nossa profissão.*

# Resumo

Este trabalho é o resultado de uma pesquisa sobre a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos. Foi utilizado o software geogebra para ilustrar as construções geométricas e apresentar algumas atividades práticas para o estudo dos pontos notáveis do triângulo, da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos aos estudantes do Ensino Médio. Todavia, o trabalho se baseou nas demonstrações, com o uso da Álgebra Moderna e da Álgebra Linear, da existência e das propriedades do objeto desta pesquisa, sobretudo da propriedade universal dos pontos no plano, fundamental nestas demonstrações.

Palavras-chave: Geometria, Álgebra Linear, Geogebra, Pontos Notáveis no Triângulo, Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos.

# Abstract

This work is the result of a research on the Euler line and the circumference of the nine points. The software geogebra was used to illustrate geometric constructions and present some practical activities for the study of notable points of the triangle, the Euler line and the circumference of the nine points to high school students. However, the work was based on the proof, with the use of Modern Algebra and Linear Algebra, the existence and properties of the object of this research, especially the universal property of points in the plane, critical in these demonstrations.

Keywords: Geometry, Linear Algebra, Geogebra, Notable Points of a Triangle, Euler Line, Nine-points Circle.

# Sumário

<b>1</b>	<b>A Geometria Dinâmica na Construção dos Elementos da Circunferência dos Nove Pontos</b>	<b>1</b>
1.1	Recortes Históricos das Descobertas Geométricas do Século XIX . . . .	1
1.1.1	As "pré-descobertas" de Euler no final do século XVIII . . . . .	1
1.1.2	Século XIX: A re-descoberta da geometria . . . . .	2
1.1.3	Um belo desfecho para um século brilhante . . . . .	3
1.2	Construção da Circunferência dos Nove Pontos no Geogebra . . . . .	4
1.2.1	Os pontos notáveis do triângulo . . . . .	5
1.2.2	A construção da reta de Euler . . . . .	10
1.2.3	A construção da circunferência dos nove pontos . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Definições Algébricas</b>	<b>17</b>
2.1	Espaço Afim e Espaço Vetorial . . . . .	17
2.1.1	Espaço vetorial real . . . . .	18
2.1.2	Espaço afim . . . . .	20
2.1.3	Observações importantes . . . . .	22
2.2	Retas, Planos e Triângulos . . . . .	24
2.2.1	Retas . . . . .	25
2.2.2	Planos . . . . .	28
2.2.3	Triângulos . . . . .	30
2.3	Propriedade Universal de Pontos num Plano $\mathcal{P}$ . . . . .	31
2.3.1	Propriedade Universal de pontos em um plano . . . . .	31
2.3.2	Propriedade Universal de pontos num plano $\mathcal{P}$ . . . . .	32
2.3.3	Ponto médio entre dois pontos . . . . .	34
2.4	Ortogonalidade . . . . .	34
2.4.1	Definição de produto interno . . . . .	34
2.4.2	Distância entre dois pontos do espaço afim . . . . .	36
2.4.3	Projeção ortogonal vetorial . . . . .	37
2.4.4	Projeção ortogonal afim . . . . .	38
2.4.5	Relação entre as projeções vetorial e afim . . . . .	39
2.4.6	Algumas implicações . . . . .	40

---

<b>3</b>	<b>Os Elementos e a construção da Circunferência dos Nove Pontos</b>	<b>45</b>
3.1	O Baricentro . . . . .	45
3.2	O Incentro . . . . .	47
3.3	O Circuncentro . . . . .	49
3.4	O Ortocentro . . . . .	50
3.5	A Reta de Euler . . . . .	51
3.6	A Circunferência dos Nove Pontos . . . . .	53
3.6.1	Os Pontos de Euler . . . . .	53
3.6.2	Circunferência . . . . .	53
3.6.3	A circunferência dos nove pontos . . . . .	54
3.6.4	Considerações Finais . . . . .	59
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Introdução

Como o próprio nome sugere, a Geometria, do grego *Geo*(terra), *metria*(medida), apresenta-se como ramo da Matemática útil para resolver questões do cotidiano como medir porções de terras entre infinitas outras aplicações. Uma intervenção pedagógica que apresentasse ao estudante de forma prática a Geometria que fascinou e até divertiu nossos precursores da Grécia antiga foi o que nos motivou a escolher a *Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos* como o tema desse trabalho, apesar de não ter algum conhecimento prévio, o que nos forçou a pesquisar muito. Neste período pudemos valorizar uma ferramenta pedagógica muito útil que foi nos apresentada quando cursávamos a disciplina MA36 - Recursos Computacionais no Ensino de Matemática - a Geometria Dinâmica. Nesta, conhecemos de forma mais profunda, o *software* livre *Geogebra* que nos ajudou na visualização geométrica de tudo que íamos conhecendo.

Após algumas construções da *Reta de Euler* com auxílio do *software*, passamos a desenvolver a Circunferência dos Nove Pontos e algumas de suas propriedades. Posteriormente, diante de um artigo que apresentava a Cônica dos nove pontos, as construções dinâmicas nos atraíam mais ainda e surgiu uma pergunta, por que a Matemática do Ensino Básico priva seus estudantes de conhecer estas maravilhas oferecendo uma Geometria burocrática e superficial, limitando-se a apresentar o conhecimento dos pontos Notáveis do Triângulo, o baricentro, o circuncentro, o incentro e o ortocentro, que, na nossa prática, não servia para nada, já que se sabe a importância do baricentro na determinação do ponto de centro de massa do triângulo, do circuncentro que é o ponto central da circunferência que circunscribe o triângulo e do incentro, que é o centro da circunferência inscrita no triângulo e não havia, até então, uma utilização para o ortocentro, quando descobrimos que este é de grande importância no encontro do ponto central da Circunferência dos Nove Pontos.

Todavia, ao conhecer o artigo *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos*, dos autores Rojas e Mendoza, veja [20], pude ter um novo olhar que, até então, não havia experimentado, a utilização da álgebra e seus conceitos para determinar e provar a existência de cada ponto notável do triângulo, a colinearidade do baricentro, circuncentro e ortocentro, que definem uma reta, a reta de Euler e a

---

circunferência dos nove Pontos, sendo essa obra a base do nosso trabalho. Por outro lado, utilizamos os conceitos apresentados nesse artigo junto ao de outros autores para ilustrarmos a ideia de *Vetor*, tão esquecida na educação básica e tão torturante para aqueles estudantes a quem são apresentados os conceitos iniciais da Mecânica Clássica tão bruscamente no início do primeiro ano do Ensino Médio.

Dedicamos o capítulo 2 para apresentação das definições, teoremas e proposições que serão úteis no objetivo desse trabalho, que é, demonstrar as propriedades e existências dos pontos notáveis, reta de Euler e circunferência dos nove pontos, sobre a ótica da álgebra, que serão apresentadas no capítulo 3.

No capítulo inicial, faremos um breve recorte histórico das descobertas estudadas nesse trabalho e com o auxílio da Geometria Dinâmica como ferramenta didático-pedagógica, apresentaremos alguns conceitos e construções geométricas que pretendem ilustrar e facilitar o processo Ensino-aprendizagem, sobretudo do estudante do Ensino Médio, de elementos da geometria plana e Analítica.

# Capítulo 1

## A Geometria Dinâmica na Construção dos Elementos da Circunferência dos Nove Pontos

Apresentaremos, inicialmente, os elementos geométricos de grande importância na construção de duas maravilhosas descobertas da geometria: a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essas descobertas, seus descobridores e o fértil momento que viveu a comunidade matemática, sobretudo os geométricos, no século XIX.

### 1.1 Recortes Históricos das Descobertas Geométricas do Século XIX

#### 1.1.1 As "pré-descobertas" de Euler no final do século XVIII

Um dos mais fascinantes elementos da geometria Euclidiana é, sem dúvida, o triângulo. Essa figura geométrica que é tão útil para enrijecer as construções, definir regiões planas, oferecer relações trigonométricas, entre inúmeras outras aplicações práticas no cotidiano pós-moderno como no funcionamento do GPS<sup>1</sup>, por exemplo, é conhecido bem antes dos *Elementos de Euclides*<sup>2</sup>. Seus pontos notáveis<sup>3</sup> também são conhecidos há alguns séculos antes da nossa era, porém, de acordo com o

---

<sup>1</sup>O *Global Positioning System*, em português, Sistema de posicionamento global.

<sup>2</sup>coletânea de 13 volumes escrita pelo matemático Euclides de Alexandria (360a.c.- 295 a.c.) que se tornou a base para a chamada geometria euclidiana por volta de 300 anos antes da era vigente.

<sup>3</sup>Pontos de intersecção de cevianas (segmentos de reta notáveis do triângulo). Os mais utilizados são o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro (mais detalhes na subseção 1.2.1, página 5).

autor [13] até o século XVII, não encontramos algum registro de novas descobertas relevantes e estudos sobre a geometria do triângulo até o teorema de Ceva<sup>4</sup> em 1678.

O estudo das cevianas e dos pontos notáveis pela intersecção delas definidas, são apresentados aos estudantes ainda na educação básica de forma mecânica e em muitos casos como mera curiosidade, fazendo com que o educando não sinta a menor atração nem simpatia por esse assunto. Em seus momentos raríssimos de prática pedagógica, alguns educadores recorrem à construção geométrica com régua e compasso para ilustrar esses belíssimos elementos que trazem para alguns discípulos alguma alegria quando vêem a exatidão dessa construção.

Esse método geométrico de construir os pontos notáveis do triângulo despertou em Euler<sup>5</sup> algumas curiosidades como a brilhante observação de que os pontos baricentro, circuncentro e ortocentro são colineares, independentemente do triângulo. Denominamos esta reta que contém esses pontos notáveis, em sua homenagem, de *Reta de Euler*. De acordo, novamente, com o autor [13], a demonstração desse teorema foi analítica, o que nos leva a crer que deve ter construído uma grande quantidade de triângulos diferentes até encontrar a lei.

Essas descobertas só ratificam quão brilhante era a mente desse verdadeiro gênio da Matemática, pois, chegou à conclusão de inúmeros trabalhos sem uma ferramenta tecnológica imprescindível nos estudos atuais como, por exemplo, um computador munido com um programa de Geometria Dinâmica.

### 1.1.2 Século XIX: A re-descoberta da geometria

Não há dúvidas que os trabalhos geométricos de Euler impulsionaram sobremaneira os estudos mais aprofundados no início do século XIX. A primeira demonstração sintética das descobertas de Euler só veio em 1803 com Carnot<sup>6</sup>, que inaugurou assim uma verdadeira corrida aos novos conhecimentos da geometria do triângulo,

---

<sup>4</sup>Proposto pelo matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734), conforme o autor [11], na página 32, este teorema afirma que as cevianas (segmentos de reta que ligam os vértices de um triângulo a um ponto do lado oposto a ele, que tem o seu nome em homenagem ao próprio Giovanni Ceva) geradas pelos vértices de um triângulo  $A, B, C$  e pelos pontos dos lados opostos  $D, E, F$ , respectivamente, são concorrentes se  $BD \cdot CE \cdot AF = FB \cdot DC \cdot EA$ .

<sup>5</sup>O matemático Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Suíça, na Basileia e segundo o autor [9], foi talvez o homem que mais calculou e escreveu em toda a história da humanidade. É o responsável por inúmeras contribuições na Álgebra, Aritmética, Geometria e Física que até hoje são ferramentas poderosas nesses ramos do conhecimento.

<sup>6</sup>Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), matemático e físico, demonstrou a existência da reta de Euler no seu trabalho *Geometria de Position*.

que até então, pareciam concluídos pelos gregos.

Segundo [6], mais um ponto pertencente a *reta de Euler* foi encontrado por Poncelet<sup>7</sup> e Brianchon<sup>8</sup> em um artigo publicado em conjunto, intitulado *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère*, nos *Annales* de Gergonne de 1820-1821 (veja [7]). Trata-se do centro de uma circunferência a qual pertencem os três pontos médios dos lados, os três pontos chamados de pé de altura<sup>9</sup> de um triângulo e seus três pontos<sup>10</sup> de Euler. Esse teorema é mais conhecido como teorema da circunferência dos nove pontos mas também recebe o nome de alguns dos seus idealizadores como círculo de Euler<sup>11</sup>, círculo de Poncelet, círculo de Brianchon ou círculo de Feuerbach<sup>12</sup>, entre esses, é mais comum encontrarmos os créditos dados, equivocadamente, ao último. Segundo o autor [6], novamente, isso se deve ao fato de ter produzido uma pequena monografia independente dos estudos de Poncelet e Brianchon no ano de 1822, com uma demonstração da circunferência dos nove pontos.

Feuerbach, nesse mesmo trabalho, apresentou também importantes descobertas sobre a circunferência dos nove pontos, entre as quais, destaca-se a demonstração de que esta é tangente às três circunferências ex-inscritas<sup>13</sup> do mesmo triângulo. Este teorema é, para muitos, um dos mais belos teoremas da geometria pós-Euclides.

### 1.1.3 Um belo desfecho para um século brilhante

Na segunda metade do século XIX, uma grande quantidade de trabalhos foram publicados, impulsionados por essas descobertas que abriram novamente o campo da pesquisa na geometria. Na sua última década, segundo o autor [11], alguns textos<sup>14</sup>

---

<sup>7</sup>Jean Victor Poncelet (1788-1867) foi um matemático francês que se destacou principalmente no estudo da Geometria Projetiva.

<sup>8</sup>Charles-Julien Brianchon (1783-1864) foi um matemático francês contemporâneo de Poncelet.

<sup>9</sup>Ponto de menor distância entre o vértice de um triângulo e o seu lado oposto. Ver seção 3.4, página 50.

<sup>10</sup>Ponto médio do segmento definido por um vértice de um triângulo e o ortocentro desse triângulo. Ver a subseção 3.6.1, na página 53.

<sup>11</sup>Como Euler havia descoberto que a circunferência passava pelos pontos médios e os pés das alturas, restava apenas descobrir que passava também pelos pontos médios entre o ortocentro e o vértice de um triângulo, por isso, em sua homenagem, são dados a ele os nomes desses pontos e até da circunferência dos nove pontos.

<sup>12</sup>Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), matemático alemão que contribuiu bastante com a geometria, mesmo com seu breve tempo de vida.

<sup>13</sup>Circunferência cujo centro é a intersecção das bissetrizes dos ângulos externos do triângulo e é tangente ao mesmo.

<sup>14</sup>Sua afirmação se baseou nos escritos de Jonh Wellesley Russel, no seu livro *Pure Geometry*, [26].

de Geometria projetiva apresentaram uma descoberta fascinante: a cônica dos nove pontos, que, a exemplo da circunferência dos nove pontos, contém os pontos médios do triângulo, porém, em lugar dos pés de altura e dos pontos de Euler, são utilizados outros pontos que são gerados por um ponto qualquer pertencente a reta de Euler que, com um dos vértices, define o ponto médio entre eles e o ponto de intersecção entre o lado oposto e a reta que contém esse ponto e um dos vértice, completando, assim, os nove pontos.

A variação desse ponto na reta de Euler apresenta várias formas de cônicas como hipérbolas, elipses e até parábolas, que nos faz deduzir que se esse ponto flutua, pode coincidir com o ortocentro e, como sabemos, construiremos, assim, a circunferência dos nove pontos, que nada mais é que uma forma especial de Cônica dos Nove Pontos.

Todavia, a beleza plástica dessa descoberta, que, segundo esse autor, até meados do século XX foi material obrigatório nas seleções para o doutoramento em Matemática de Universidades como Oxford e Cambridge, foi esquecida e negligenciada pelas Instituições de Ensino Superior a ponto de, em 2002, esse autor descobrir de forma analítica, a Cônica dos Nove Pontos e só depois de uma busca intensa, perceber que essa descoberta já havia sido publicada há mais de um século.

## 1.2 Construção da Circunferência dos Nove Pontos no Geogebra

No ensino dos pontos notáveis do triângulo<sup>15</sup>, é comum encontrarmos nos livros didáticos e na prática docente de parte dos professores, uma apresentação mecânica desses pontos. É certo que, enriquecido com uma grande quantidade de ilustrações, para àqueles estudantes que já despertaram o desejo pela descoberta na matemática, a teoria da construção desses pontos, as cevianas, as curiosidades e suas utilizações são absorvidas, contudo, o aluno não constrói seus próprios conhecimentos. Mesmo quando os educadores recorrem à construção geométrica com régua e compasso, não dá para trabalhar "dinamicamente" com essas construções pois, torna-se inviável a reprodução de inúmeras situações diferentes com essas ferramentas.

No nosso trabalho, escolhemos um dos muitos programas gratuitos, ou *software livres*, o Geogebra, cuja plataforma ilustra as figuras desse trabalho. Segundo sua página virtual<sup>16</sup>, é um software de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos,

---

<sup>15</sup>Conteúdo geralmente trabalhado no Ensino Fundamental e aprofundado no Ensino Médio.

<sup>16</sup>Pode ser baixado gratuitamente no endereço eletrônico [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

estatística e cálculo em um único sistema.

## 1.2.1 Os pontos notáveis do triângulo

### A construção do baricentro

Também conhecida como centróide, é talvez, o ponto mais utilizado de forma prática no nosso cotidiano, sobre tudo na construção civil, já que este ponto é o centro de massa do triângulo. Neste trabalho, representaremos o baricentro por  $G$ <sup>17</sup>. Esse ponto é encontrado traçando-se as medianas<sup>18</sup> correspondentes a cada vértice e encontrando o seu ponto de intersecção que é  $G$ .

Na utilização do Geogebra, o professor pode, inicialmente, levantar questionamentos sobre como encontrar esse ponto médio. É claro que o programa traz consigo essa ferramenta que, bastando escolher os dois pontos, apresenta o seu ponto médio. Porém, a sugestão de problemas que requisitem o raciocínio geométrico ao aluno, solidificará esses conhecimentos trazendo segurança e satisfação.

A reprodução dos passos da construção com régua e compasso é uma boa atividade, ilustrada na figura 1.1, que, nesse caso reproduz a construção do ponto médio de um dos lados do triângulo.

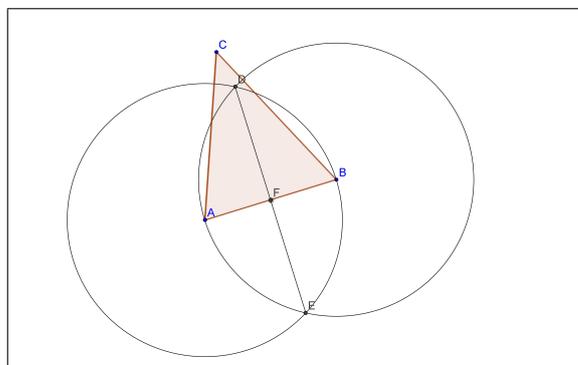


Figura 1.1: Ilustração da construção do ponto médio de um dos lados do triângulo  $ABC$ .

Um fato curioso que também pode ser levantado é que, ao contrário de alguns

<sup>17</sup> $G$  de centro gravitacional, já que em caso de gravidade constante e um corpo homogêneo, o centro de massa se confundi com o centro gravitacional.

<sup>18</sup>Retas que passam por um vértice de um triângulo e pelo ponto médio do seu lado oposto.

polígonos não-convexos<sup>19</sup>, o baricentro do triângulo é interno. Essa informação pode ser verificado no programa. Outra propriedade que pode ser verificada, é que  $G$  divide qualquer uma das medianas em duas partes proporcionais tais que o segmento entre  $G$  e o vértice é o dobro da outra parte, como ilustra a figura 1.2.

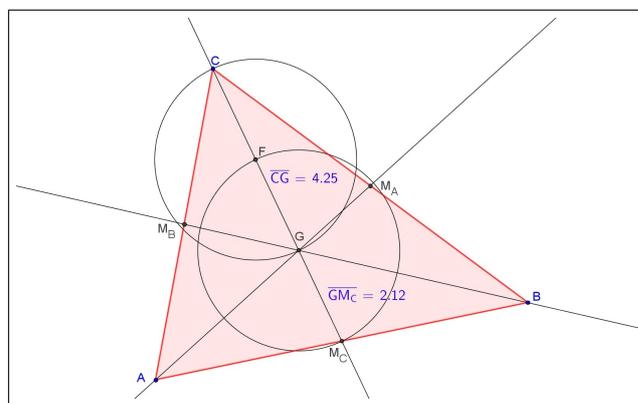


Figura 1.2: Segmento  $\overline{CG} = 2\overline{GM}_C$ .

### A construção do incentro

O incentro é o ponto equidistante aos seus lados de um triângulo, ou seja, é o centro da circunferência que inscreve esse triângulo. A construção que nos faz encontrar esse ponto é bastante interessante pois podemos trabalhar vários conceitos como lugar geométrico, bissetriz<sup>20</sup> e distância entre uma reta a um ponto.

Sabe-se que a bissetriz, além de ser a que divide um ângulo em dois ângulos congruentes, também é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a duas retas. Inicialmente, o conceito de distância entre um ponto e uma reta pode ser apresentado e trabalhado com os estudantes, que dará segurança para os mesmos utilizarem a ferramenta "reta perpendicular". Para reproduzir o lugar geométrico dos pontos supracitados, como sugestão, faremos essa demonstração da construção de forma intuitiva e dinâmica. Apresentaremos, excepcionalmente, neste exemplo, os passos abaixo que estão ilustradas na figura 1.3:

1. Acione a ferramenta "controle deslizante" e fixe seus limites entre 0 e 10;

<sup>19</sup> Chamamos de não-convexo o polígono que apresenta vértices nos dois semi-planos definidos pela reta que contém algum dos lados.

<sup>20</sup> É a reta que passa por um vértice do triângulo dividindo o ângulo interno gerado pelos lados adjacentes a esse vértice em dois ângulos iguais. Podemos dizer também que, dadas duas retas concorrentes, a bissetriz é o lugar geométrico equidistante a essas retas.

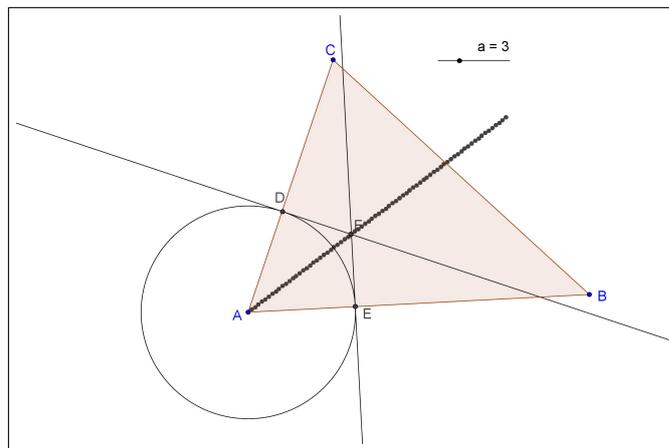


Figura 1.3: Lugar geométrico dos pontos equidistantes aos lados  $AB$  e  $AC$  representados pela ferramenta "rastros"ativada no Geogebra.

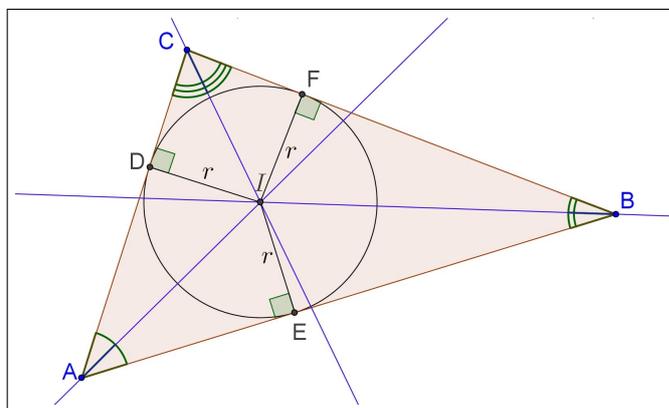


Figura 1.4: Construção da circunferência inscrita no triângulo  $ABC$  no Geogebra.

2. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", trace a circunferência com centro em  $A$  (ou  $B$ , ou  $C$ ) e fixe o raio =  $a$  (valor do controle deslizante), logo após, marque os pontos  $D$  e  $E$ , intersecções da circunferência com os lados  $AC$  e  $AB$  do triângulo;
3. Com a ferramenta "reta perpendicular"ativada, trace as retas perpendiculares aos lados que passem pelo ponto  $D$  e  $E$  e marque o ponto  $F$ , intersecção entre as retas perpendiculares;
4. Posicione o controle deslizante na posição 0, ative a ferramenta "rastros", acione-o no ponto  $F$  e ligue a "Animação"do controle deslizante.

A figura 1.4, ilustra a construção da circunferência inscrita no triângulo. As mesmas atividades realizadas na seção anterior com o baricentro poderão ser repro-

duzidas com o incentro. Além de orientar os alunos para averiguar se  $I$  é realmente interno e se é o único ponto de intersecção das três bissetrizes com a manipulação dos vértices do triângulo é uma boa oportunidade de construir o conhecimento dessas propriedades.

A demonstração algébrica dessas propriedades serão apresentadas no capítulo 3, seção 3.2, página 47.

### A construção do circuncentro

O circuncentro é o ponto  $O$  equidistante dos vértices de um triângulo, logo é o centro da circunferência que o circunscreve. Para encontrar este ponto, é necessário traçar as mediatrizes<sup>21</sup> dos lados do triângulo e obter o único ponto de intersecção entre elas.

A figura 1.5, ilustra a construção desse ponto que, pela sua simplicidade, deixamos como exercício aos leitores que podem ainda construir outras atividades interativas com o software. As demonstrações algébricas estão apresentadas na seção 3.3, página 49.

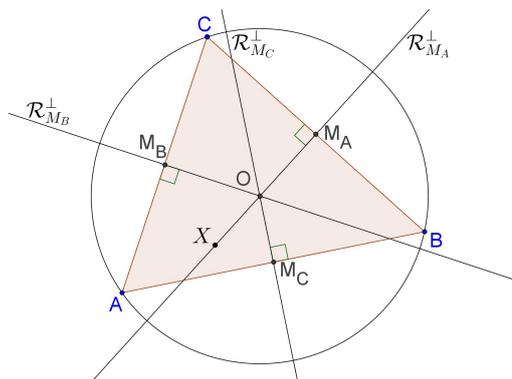


Figura 1.5: Triângulo ABC com o circuncentro  $O$ .

<sup>21</sup>Retas perpendiculares aos lados de um triângulo que cruzam esses lados no seu ponto médio. Podemos também definir mediatriz como o lugar geométrico equidistante das extremidades de um segmento de acordo com [12].

## A construção do ortocentro

O ortocentro é o único ponto de intersecção das alturas<sup>22</sup> de um triângulo. Pela etimologia da palavra, que é uma composição de orto (do grego *orthos*, que, na geometria, significa reto) e centro, por razões óbvias, percebe-se facilmente que se trata de um ponto que é encontrado pelo cruzamento de segmentos ortogonais, que, no seu caso, passa pelos vértices opostos.

Para traçarmos essas alturas no Geogebra, de forma simples, construímos a reta perpendicular a um dos lados que passa pelo vértice oposto a esse lado, inclusive, no caso do triângulo obtusângulo<sup>23</sup>, que, nos lados que compõe tal ângulo, não apresenta ponto de intersecção, pois, nesse caso, a perpendicular não concorre com esse lado do triângulo. Para observarmos o pé da altura em qualquer tipo de triângulo, é necessário que o estudante trace a reta que contém o lado que compõe o ângulo obtuso e marque a intersecção dessa reta com a sua perpendicular que passa pelo vértice oposto.

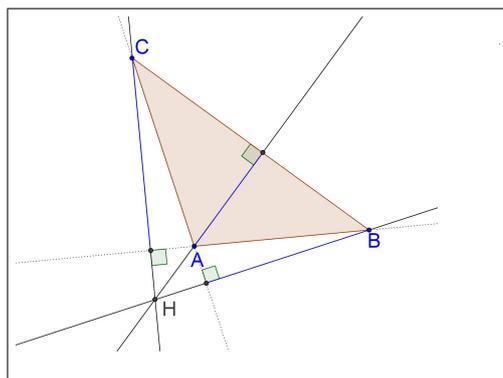


Figura 1.6: Construção do ortocentro  $H$  exterior ao triângulo  $ABC$  no Geogebra.

Na figura 1.6, vemos um caso do ortocentro  $H$  do triângulo obtusângulo  $ABC$ . Essa construção permite aos educandos, manipular os vértices até coincidi-los com  $H$ . A ferramenta "Ângulo" dará a informação óbvia que esse ângulo é de  $90^\circ$ . As demonstrações algébricas foram apresentadas na seção 3.4, página 50.

---

<sup>22</sup>A altura de um triângulo em relação a um vértice é o segmento de reta definida por esse vértice e um ponto pertencente à reta a qual contém seu lado oposto, de menor comprimento, ou seja, é o segmento perpendicular à reta que contém um dos lados que passa pelo vértice oposto a esse lado.

<sup>23</sup>Triângulo que apresenta um de seus ângulos com valor maior que  $90^\circ$ , nesse caso, em um dos lados que formam esse ângulo obtuso, o pé da altura (extremidade da altura oposta ao vértice) está localizado no prolongamento desse lado.

Nos livros de Matemática da Educação Básica, não encontramos alguma "utilidade" especial para esse ponto. Para o educador que tem como base a educação construtiva (ou construtivista), é bastante complicado apresentar um conceito, propriedade ou ente geométrico sem uma aplicação prática. Essa "carência" poderia ser abrandada se fossem incluídas no currículo deste nível educacional, conteúdos mais aprofundados da geometria plana que trariam mais beleza e curiosidade, como por exemplo, a reta de Euler, que veremos a seguir.

### 1.2.2 A construção da reta de Euler

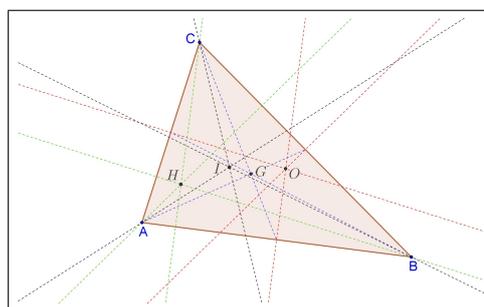


Figura 1.7: Construção dos quatro pontos notáveis  $O, G, H$  e  $I$  do triângulo  $ABC$  no Geogebra.

Para construir a reta de Euler no Geogebra, é importante, primeiramente, encontrar os 4 pontos notáveis do triângulo. Essa construção, aparentemente causará uma certa poluição visual que poderá ser amenizada com a padronização de cores diferentes para cada grupo de retas, como ilustramos na figura 1.7. O estudante perceberá que, ao manipular os vértices do triângulo, os pontos se aproximam ou se afastam, um dos outros. Cabe ao educador, levantar um questionamento: será que existe um tipo de triângulo cujos pontos notáveis coincidem? essa atividade instigará o aluno a buscar, com o máximo de tentativas possível, unir esses pontos.

Atividades como essa, levantarão a possibilidade de trabalhar alguns outros conceitos como as propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros. Uma alternativa para encontrar, rapidamente, posições convenientes para os vértices tais que resolva esse problema é acionar o botão "ângulo" nos três vértices e, a medida que a diferença entre os ângulos forem diminuindo, esses pontos se aproximam, até quando se tornam o mesmo ponto, o que acontece quando os ângulos são congruentes entre si, ou seja, de  $60^\circ$ . Para tanto, o aluno terá que levantar, preliminarmente, a conjectura de que esse caso ocorrerá com o triângulo equilátero.

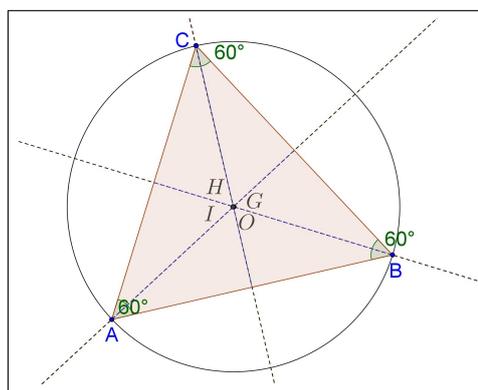


Figura 1.8: Triângulo equilátero com os quatro pontos notáveis  $O, G, H$  e  $I$  do triângulo  $ABC$  coincidentes representados no Geogebra.

Porém, convém salientar que encontrar esse posicionamento dos vértices, requisa uma perícia mas afinada por parte dos aprendizes, e pode durar um tempo maior, principalmente se o arredondamento do ângulo estiver em 2 casas decimais, nesse caso, podemos permitir que haja um arredondamento para 1 ou até nenhuma casa decimal.

Se o professor não quiser levantar de imediato essa conjectura, pode também sugerir que se trace uma circunferência de centro em qualquer um dos pontos notáveis, exceto o circuncentro, como ilustramos na figura 1.8, que passe por qualquer um dos vértices. Nesse caso, o estudante deve mover os vértices até que todos estejam incluídos na circunferência, quando ele concluir, observará que os pontos notáveis estarão coincidindo. Essa atividade pode ser repetida variando o ponto notável e o vértice que determinarão a circunferência. Após essa etapa, o professor pode, então, sugerir a medida dos ângulos ou dos lados do triângulo para que os estudantes tirem suas conclusões.

Após manipular muito essa última construção, o professor pode sugerir aos educandos que observem o posicionamento de  $H, I, G$  e  $O$  e procure algum alinhamento entre eles. Ora, sabemos que sempre haverá alinhamento entre dois deles, por isso, é importante procurar esse alinhamento em, no mínimo três deles. Uma boa sugestão é traçar uma reta determinada por dois dos quatro pontos e observar se existe tal alinhamento. Após algumas tentativas, eles perceberão que terão dificuldades para traçar uma reta que contenha  $I$  e outros dois pontos. Podemos então inserir o conceito da reta de Euler.

Vimos na seção 1.1.1, página 1, que Euler descobriu com um método muito semelhante, todavia, sem o computador, nada prático, que os pontos  $O, G$  e  $H$

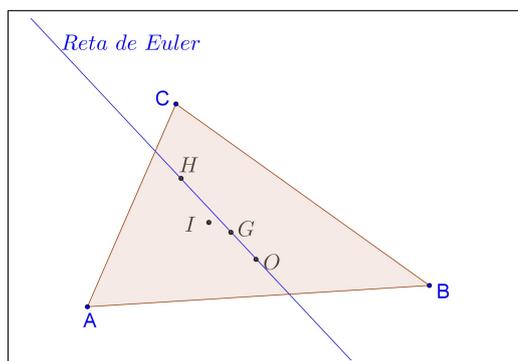


Figura 1.9: Triângulo  $ABC$  com os quatro pontos notáveis  $O, G, H$  e  $I$  e a reta de Euler no Geogebra.

pertencem a uma reta que recebeu o nome de *Reta de Euler*. Todavia, é necessário a demonstração algébrica dessa descoberta, que apresentaremos na seção 3.5, página 51.

### O incentro e a reta de Euler

A figura 1.9, ilustra a reta de Euler e os pontos notáveis do triângulo e essa construção instiga um questionamento que pode ser levantado para o estudante: será que  $I$  pode pertencer à reta de Euler?

Diante desse problema, espera-se que o estudante desperte a curiosidade de encontrar essa situação especial e, após seguidas tentativas poderá encontrar o único caso em que observamos os quatro pontos alinhados. Com auxílio da ilustração na figura 1.10, medindo os ângulos desse triângulo, concluiremos que esse é isósceles.

É importante a demonstração dessa conjectura criada pelos educandos nessa etapa, muito elementar por sinal, já que, no caso do triângulo isósceles, sabemos das suas propriedades, que a altura, a mediana, a mediatriz e a bissetriz em relação ao vértice cujo ângulo é oposto à base são todos coincidentes. Como  $I$  pertence à bissetriz, logo pertence a todas as outras retas, donde concluímos que também pertence à reta de Euler a qual coincide com essas retas, conforme vimos na última figura mencionada.

É importante salientarmos que, se esse triângulo também for equilátero, então não teremos a reta de Euler, pois, como vimos no início desta subseção, os quatro pontos coincidem, não havendo, assim, dois pontos distintos para determinar a reta.

Essas informações, demonstrações e comentários serão apresentados na seção 3.5,

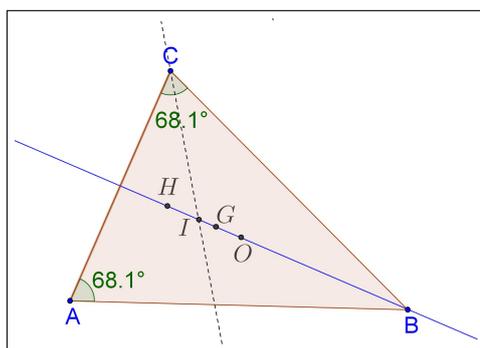


Figura 1.10: Triângulo isósceles com os quatro pontos notáveis  $O, G, H$  e  $I$  na reta de Euler representados no Geogebra.

51.

### 1.2.3 A construção da circunferência dos nove pontos

A circunferência dos nove pontos, conforme apresentado na seção 1.1, página 1, contém nove pontos especiais, seis dos quais já apresentados: Os três pontos médios dos lados e os três pés de altura. Os outros três pontos são os *Pontos de Euler*.

#### A construção dos pontos de Euler

Esses pontos dividem o segmento cujas extremidades é o ortocentro e um dos vértices em dois segmentos congruentes. No Geogebra, com a ferramenta "Ponto Médio" ativada, é suficiente marcar essas extremidades, como ilustramos na figura 1.11, para que os Pontos de Euler  $E_A, E_B$  e  $E_C$ , em relação aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente, sejam definidos.

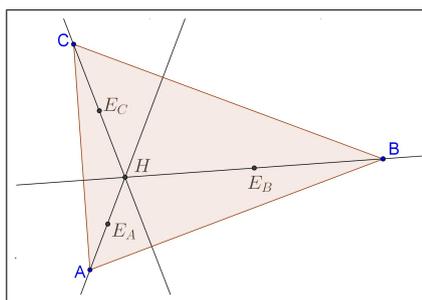


Figura 1.11: Pontos de Euler do triângulo  $ABC$  representados no Geogebra.

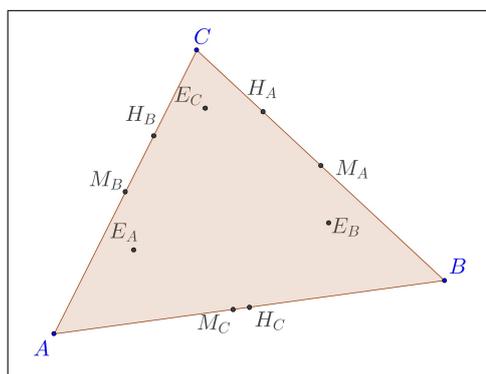


Figura 1.12: Os nove pontos do triângulo  $ABC$  que pertencem a circunferência dos nove pontos representados no Geogebra.

### Construção intuitiva da circunferência dos nove pontos

Para construirmos a circunferência dos nove pontos, intuitivamente, podemos usar as ferramentas do Geogebra e partir da conjectura que esses nove pontos pertencem a uma única circunferência. Essa estratégia levará o aluno, após marcar no triângulo  $ABC$  os pontos médios  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$ , os pés de altura  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$  e os pontos de Euler  $E_A$ ,  $E_B$  e  $E_C$ , a tentar encontrar uma forma de construir uma circunferência, sem dispor do centro da mesma.

Essa conjectura pode ser levantada, se observarmos os nove pontos, representados na figura 1.12, distribuídos no triângulo  $ABC$ , que realmente dá a impressão de se tratar de pontos de uma circunferência. Possivelmente, quando Euler descobriu, intuitivamente os seis pontos, o matemático observou em seus desenhos essa possibilidade e tirou suas conclusões. A reprodução dessas descobertas que revolucionaram a geometria, pode ser uma prática que leve os estudantes a gostar mais da Matemática e de suas curiosidades. A circunferência pode ser encontrada com a ferramenta "Círculo Definido Por Três Pontos", ou seja, marcando três pontos quaisquer, O programa traçará a única circunferência que os contém.

Um fato importante é que, através de outras tentativas com permutações entre os nove pontos, o aluno perceberá que, mesmo marcando os três pontos médios ou os três pés de altura, sempre será traçada a mesma circunferência.

Outra estratégia interessante, é propor ao aluno a impossibilidade de usar a ferramenta sugerida na atividade anterior. Nesse caso ele terá que, com os nove pontos marcados, com outras ferramentas, traçar essa circunferência. Sugerimos, então, que usemos o circuncentro do triângulo definido por qualquer dos grupos de três pontos para encontrar o centro  $N$  dessa circunferência, ilustrada na figura 1.13.

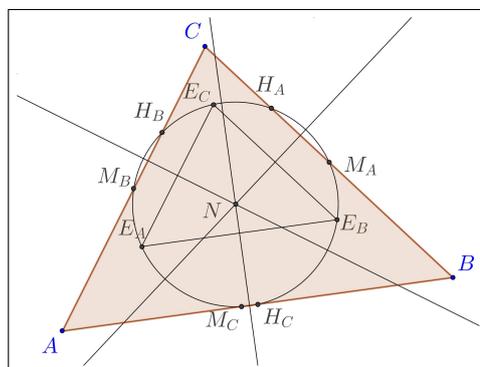


Figura 1.13: Circunferência dos nove pontos do triângulo  $ABC$  traçada com centro no circuncentro do triângulo  $E_A E_B E_C$  no Geogebra.

Ainda podemos levantar outra questão: Onde está esse ponto  $N$ ? O professor pode indagar, por exemplo, qual a relação entre a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos, sugerindo que sejam construídas, em um mesmo desenho, ambos elementos. Nesse caso, o estudante, notará que  $N$  pertence a reta de Euler.

Se  $N$  pertence a reta de Euler, qual a relação com os pontos  $O$ ,  $G$  e  $H$ ? O estudante pode usar as ferramentas de medições de segmentos para conjecturar possíveis relações. Se o mesmo fizer uma tabela entre os segmentos possíveis, perceberá que em todos os casos, a relação entre  $HN$  e  $NO$  é de congruência. Podemos utilizar uma ferramenta simples para provar essa hipótese. Conforme ilustra a figura 1.14, basta traçar uma circunferência de centro em  $N$  e marcar o ponto  $H$  ou  $O$ . Repetir a mesma sequência com o outro ponto escolhido e comparar as circunferências que serão as mesmas.

Essa importante descoberta nos permite encontrar uma utilidade para o ponto  $H$ , que, como já relatamos, de acordo com os programas de Geometria da Educação Básica, não teria nenhuma serventia. Nesse caso, o ponto  $H$ , junto com o ponto  $O$ , definem o centro  $N$  da circunferência dos nove pontos que é o ponto médio entre eles.

As demonstrações algébricas de todas as construções apresentadas sobre a circunferência dos nove pontos e da reta de Euler e suas relações estão nas seções 3.5 e 3.6, páginas 51 e 53, respectivamente.

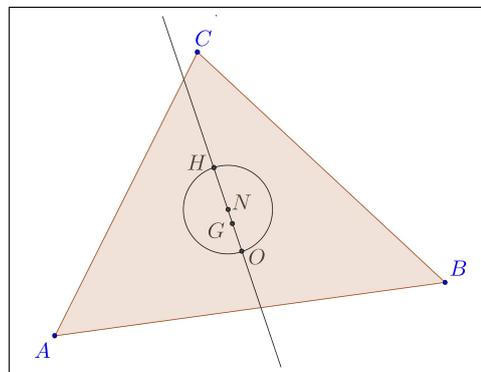


Figura 1.14: Reta de Euler com os pontos  $O$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$  e a relação  $HN = NO$  no Geogebra.

# Capítulo 2

## Definições Algébricas

Durante nossa experiência docente em uma escola de Ensino Médio da rede Estadual de Pernambuco, na componente curricular Física, constatamos uma enorme dificuldade dos estudantes, sobretudo no primeiro ano quando é trabalhado o conteúdo Mecânica, na construção do conhecimento dos conceitos de vetores e sua utilização prática na disciplina. Este fato é compreensível, pois, os conceitos básicos dessa ferramenta matemática são apresentados aos educandos apenas no terceiro ano. Todavia, podemos, preliminarmente, introduzir o conceito informal já nos anos finais do Ensino Fundamental, já que, de acordo com [23], A palavra vetor vem de um radical latino que significa *carregar*. Um vetor é formado quando um ponto é deslocado - ou *carregado* - por uma certa distância em uma certa direção. Visto de outro modo, um vetor *carrega* duas peças de informação: seu comprimento e sua direção. A ideia informal de carregar algo de uma certa posição, uma certa distância, em uma certa direção e encontrar a sua posição final é uma boa estratégia e utilizaremos uma visão algébrica sobre esse ente geométrico.

Nesse capítulo apresentaremos as definições algébricas que auxiliarão a construção dos pontos notáveis do triângulo, da Reta de Euler e da circunferência dos nove pontos, segundo o Artigo de Rojas & Mendonza, ver [20] e o autor [15] mescladas com conceitos básicos de Geometria Plana e Analítica.

Apresentaremos a seguir, as definições que julgamos necessárias para prosseguirmos.

### 2.1 Espaço Afim e Espaço Vetorial

Quando observamos a frase "*carregar algo de uma posição, uma certa distância, em uma certa direção*" podemos ver facilmente a distinção de duas informações: "*uma posição*" e "*uma certa distância, em uma certa direção*", a primeira apresenta uma ideia estática já a segunda dinâmica, como no caso da ilustração: estava em

Afogados da Ingazeira e viajei à João Pessoa, onde Afogados da Ingazeira e João Pessoa são posições estáticas enquanto viajei denota movimento. A mesma viagem feita nesta ilustração poderia ser realizada entre outras duas cidades diferentes das utilizadas, porém, com mesma distância e mesma direção entre elas.

Podemos admitir que Afogados da Ingazeira, João Pessoa, Recife ou Caruaru, fazem parte de um conjunto de cidades, que podem ser representados por pontos e as infinitas possibilidades de diferentes viagens fazem parte do seu conjunto, que, como vimos antes, podem ser representados por vetores, logo se faz necessário distinguirmos estes dois "espaços". Informalmente, admitamos que Espaço Afim é o conjunto dos pontos e Espaço Vetorial o espaço que contém todos os vetores. Todavia, faz-se necessário formalizarmos os conceitos com os quais trabalharemos neste capítulo.

### 2.1.1 Espaço vetorial real

Inicialmente, recorreremos a definição de [1] para definirmos um espaço vetorial:

**Definição 1** *Seja  $\mathbb{V}$  um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números reais). Por adição entendemos uma regra que associa a cada par de objetos  $u$  e  $v$  um objeto  $u+v$ , chamado a soma de  $u$  com  $v$ ; por multiplicação por escalar entendemos uma regra que associa a cada escalar  $k$  e cada objeto  $v$  em  $\mathbb{V}$  um objeto  $kv$ , chamado o múltiplo de  $v$  por  $k$ . Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos  $u$ ,  $v$  e  $w$  em  $\mathbb{V}$  e quaisquer escalares  $k$  e  $l$ , então dizemos que  $\mathbb{V}$  é um espaço vetorial e os objetos de  $\mathbb{V}$  serão chamados de vetores.*

- (a) *Se  $u$  e  $v$  são objetos em  $\mathbb{V}$  então  $u + v$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ ;*
- (b)  *$u + v = v + u$ ;*
- (c)  *$u + (v + w) = (u + v) + w$ ;*
- (d) *Existe um objeto  $\vec{0}$  em  $\mathbb{V}$ , chamado vetor nulo ou vetor zero de  $\mathbb{V}$ , tal que  $\vec{0} + u = u + \vec{0} = u$  para cada  $u$  em  $\mathbb{V}$ ;*
- (e) *Para cada  $u$  em  $\mathbb{V}$ , existe um objeto  $-u$ , chamado um negativo de  $u$ , ou simétrico de  $u$ , tal que  $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$ ;*
- (f) *Se  $k$  é qualquer escalar e  $v$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ , então  $kv$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ ;*
- (g)  *$l(u + v) = lu + lv$ ;*
- (h)  *$(k + l)v = kv + lv$ ;*
- (i)  *$k(lu) = (kl)u$ ;*
- (j)  *$1u = u$*

Dentro de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , existem subconjuntos  $\mathbb{S}$  tais que eles são um espaço vetorial. Tais conjuntos serão chamados subespaço de  $\mathbb{V}$ . Este conceito será de grande importância para definirmos projeções ortogonais vetoriais.

**Definição 2** *Sejam  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial e  $\mathbb{S}$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{V}$ . O subconjunto  $\mathbb{S}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$  se  $\mathbb{S}$  é um espaço vetorial em relação à adição e a multiplicação por escalar definidas em  $\mathbb{V}$ , ou seja, se estiverem satisfeitas as condições:*

**I** *Para quaisquer  $u, v \in \mathbb{S}$ , tem-se:*

$$u + v \in \mathbb{S}$$

**II** *Para quaisquer  $k \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}$ , tem-se:*

$$ku \in \mathbb{S}$$

Da definição de subespaço, podemos realizar as seguintes observações:

- Todo espaço vetorial admite no mínimo dois subespaços: o conjunto  $\{0\}$ , chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial  $\mathbb{V}$ . Esses dois são os subespaços *triviais* de  $\mathbb{V}$ . Os demais subespaços são denominados *subespaços próprios* de  $\mathbb{V}$ .
- Todo subespaço  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{V}$  contém o vetor nulo.

Para prosseguirmos, vejamos algumas das principais propriedades dos subespaços.

- A intersecção de dois subespaços  $\mathbb{S}_1$  e  $\mathbb{S}_2$ ,  $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$  é um subespaço de  $\mathbb{V}$ .
- O conjunto  $\mathbb{S}$  formado por todos os vetores de  $\mathbb{V}$  que forem a soma de vetores de  $\mathbb{S}_1$  com vetores de  $\mathbb{S}_2$ , que denotaremos por  $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$  é um subespaço de  $\mathbb{V}$ . Veja [27], página 35.

**Definição 3** *Sejam  $\mathbb{S}_1$  e  $\mathbb{S}_2$  dois subespaços vetoriais de  $\mathbb{V}$ . Diz-se que  $\mathbb{V}$  é a soma direta de  $\mathbb{S}_1$  e  $\mathbb{S}_2$ , e se representa por  $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$ , se  $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$  e  $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0\}$*

Das observações anteriores podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 4** *Se  $\mathbb{V}$  é a soma direta de  $\mathbb{S}_1$  e  $\mathbb{S}_2$ , todo vetor  $v \in \mathbb{V}$  se escreve, de modo único, na forma:*

$$v = u + w$$

onde  $u \in \mathbb{S}_1$  e  $w \in \mathbb{S}_2$ .

**Demonstração:** De  $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$ , vem, para qualquer  $v \in \mathbb{V}$ :

$$v = u + w \quad (2.1)$$

onde  $u \in \mathbb{S}_1$  e  $w \in \mathbb{S}_2$ .

Suponhamos que  $v$  pudesse exprimir-se também pela forma

$$v = u' + w' \quad (2.2)$$

onde  $u' \in \mathbb{S}_1$  e  $w' \in \mathbb{S}_2$ . As igualdades (2.1) e (2.2) permitem escrever

$$u + w = u' + w' \Rightarrow u - u' = w' - w$$

onde  $u - u' \in \mathbb{S}_1$  e  $w - w' \in \mathbb{S}_2$ . Tendo em vista que, de acordo com a Definição 3,  $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0\}$ , temos

$$u - u' = w' - w = 0$$

isto é,

$$u = u' \text{ e } w' = w$$

■

### 2.1.2 Espaço afim

Agora, utilizaremos integralmente a definição de espaço afim em [20] (ver página 77), a saber:

**Definição 5** *Sejam  $\mathbb{E}$  um conjunto,  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real e  $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  uma função que associa a cada par  $(P, v) \in \mathbb{E} \times \mathbb{V}$  um ponto em  $\mathbb{E}$ , que denotaremos por  $P \oplus v$ , satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *para cada  $P \in \mathbb{E}$ , a função de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{E}$  dada por  $v \mapsto P \oplus v$  é uma bijeção;*
- (ii)  *$(P \oplus u) \oplus v = P \oplus (u + v)$ , para quaisquer  $P \in \mathbb{E}$  e  $u, v \in \mathbb{V}$ .*

Os autores, a partir dessa definição, denominam de *espaço afim* sobre  $\mathbb{V}$  um par  $(\mathbb{E}, \oplus)$  que satisfaz as condições acima e de *ação transitiva sem pontos fixos* a função  $\oplus$ , nomenclaturas estas que também adotaremos nesse trabalho.

Apresentaremos alguns exemplos de Espaço Afim, encontrados no artigo de Rojas e Mendoza (ver [20], página 77), os quais demonstraremos.

**Exemplo 1** *Sejam  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E}$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$  e  $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  a adição de vetores em  $\mathbb{V}$ , ou seja,  $P \oplus v = P + v$ . Então*

$$(\mathbb{E}, \oplus) \text{ é espaço afim} \Leftrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{E}$$

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ )

Como  $(\mathbb{E}, \oplus)$  é um espaço afim sobre  $\mathbb{V}$ , para cada  $P \in \mathbb{E}$  a função

$$\begin{aligned} \phi_P : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{E} \\ v &\mapsto \phi_P(v) = P + v \end{aligned}$$

é bijetiva.

Como  $\mathbb{E}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$ ,  $0 \in \mathbb{E}$ . Logo,

$$\phi_0(v) = 0 + v = v \in \mathbb{E}.$$

Assim, temos que  $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ . Por outro lado, como  $\mathbb{E} \subset \mathbb{V}$ , segue-se  $\mathbb{V} = \mathbb{E}$ .

( $\Leftarrow$ ) Para demonstrar que  $(\mathbb{E}, \oplus)$  é espaço afim é suficiente provar que ela cumpri os itens (i) e (ii) da definição 5. Se  $\mathbb{V} = \mathbb{E}$ , então para cada  $P \in \mathbb{V}$ , seja  $\phi_P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  determinado por  $\phi(v) = P + v$ .

(i) •  $\phi$  é injetiva

$$\phi(u) = \phi(v) \Rightarrow P + u = P + v \Rightarrow u = v.$$

•  $\phi$  é sobrejetiva

Dado  $Q \in \mathbb{V}$ , seja  $v = Q - P \in \mathbb{V}$ , então podemos escrever

$$\phi_P(v) = P + Q - P = Q.$$

(ii) Dados  $P \in \mathbb{E}$ ,  $u$  e  $v \in \mathbb{V}$ ,

$$(P \oplus v) \oplus u = (P + v) \oplus u = (P + v) + u = P + (v + u) = P \oplus (v + u).$$

■

**Exemplo 2** Seja  $\mathbb{V}$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{W}$  e  $\mathbb{E} = Q + \mathbb{V}$ , para algum  $Q \in \mathbb{W}$ . Tome  $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  a adição de vetores em  $\mathbb{W}$  (isto é,  $P \oplus v = P + v$ ). Ou seja, a translação de um subespaço vetorial  $\mathbb{V}$  é um espaço afim sobre  $\mathbb{V}$ .

**Demonstração:** Para cada  $P \in \mathbb{E}$ , seja  $\phi_P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  definido por  $\phi_P(v) = P + v$

(i) •  $\phi$  é injetiva

já foi provado na demonstração (i) do exemplo 1.

- $\phi$  é sobrejetiva

Dados  $L \in \mathbb{E}$  e  $u \in \mathbb{W}$ , tome  $L = Q + v$  e  $\phi_P(u) = L$

$$\begin{aligned}\phi_P(u) &= L \\ P + u &= Q + v \\ u &= (Q - P) + v\end{aligned}$$

logo,  $\phi_P(u) = P + u = P + Q - P + v = Q + v$

(ii) Verifica-se facilmente. ■

**Exemplo 3** *Sejam  $T : V \rightarrow W$  uma aplicação linear não nula e  $w$  um vetor não nulo na imagem de  $T$ . Sejam  $\mathbb{V} = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$  (o núcleo de  $T$ ),  $\mathbb{E} = \{v \in V \mid T(v) = w\}$  (a imagem inversa de  $w$  por  $T$ ) e  $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  dada pela adição de vetores em  $V$ . Observe que  $\mathbb{E}$  não é um espaço vetorial e o par  $(\mathbb{E}, \oplus)$  é um espaço afim sobre  $\mathbb{V}$ .*

**Demonstração:**

- Como  $T : V \rightarrow W$  é linear, tem-se que  $T(0) = 0$ . Observe que  $\mathbb{E} \neq \emptyset$  e não é subespaço de  $\mathbb{V}$ , pois  $0 \notin \mathbb{E}$ , logo  $\mathbb{E}$  não é um espaço vetorial.
- $\phi_P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  é claro que é uma bijeção e  $\oplus$  satisfaz (ii). ■

### 2.1.3 Observações importantes

Após as definições apresentadas, podemos fazer as seguintes observações:

- A bijeção exigida na definição 5 em (i), garante que: dados  $P, Q, \in \mathbb{E}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  denotará o único vetor em  $\mathbb{V}$  tal que

$$P \oplus \overrightarrow{PQ} = Q. \tag{2.3}$$

- $P \oplus \vec{0} = P$  para todo  $P \in \mathbb{E}$ .

De fato, essa observação faz sentido pois a mesma bijeção exigida em (i) também garante que há um só vetor  $v \in \mathbb{V}$  tal que  $P \oplus v = P$ , da definição 1,

item (g) temos que  $\vec{0} = v + (-v)$  e da mesma definição, item (b), temos que  $(P \oplus (v + (-v))) = (P \oplus v) \oplus (-v)$ , mas  $P \oplus (v + (-v)) = P \oplus \vec{0}$ , logo

$$(P \oplus (v + (-v))) = (P \oplus v) \oplus (-v) \Leftrightarrow P \oplus \vec{0} = P \oplus (-v) \Leftrightarrow \vec{0} = -v.$$

ainda de (e),  $v + (-v) = \vec{0} \Leftrightarrow v + \vec{0} = \vec{0}$ , que segundo (d) é  $v = \vec{0}$ .

- Sejam  $P, P' \in \mathbb{E}$  dados, verifica-se que  $\overrightarrow{PP'} = \vec{0} \Leftrightarrow P = P'$ .

De fato,  $\overrightarrow{PP'} = \vec{0} \Rightarrow P \oplus \vec{0} = P' \Rightarrow P = P'$ . A recíproca:

$$P = P' \Rightarrow P \oplus \vec{0} = P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{0}.$$

- Dados  $P, Q$  e  $R$  em  $\mathbb{E}$  temos que:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

De fato, utilizando a definição 5, item (ii), temos

$$P \oplus (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P \oplus \overrightarrow{PQ}) \oplus \overrightarrow{QR}$$

e a identidade (2.3) garante que

$$P \oplus \overrightarrow{PQ} = Q,$$

logo

$$(P \oplus \overrightarrow{PQ}) \oplus \overrightarrow{QR} = Q \oplus \overrightarrow{QR} = R.$$

Ora, mas se

$$P \oplus (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = R = P \oplus \overrightarrow{PR},$$

então

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}. \quad (2.4)$$

- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ .

De fato, sabemos agora que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}, \quad (2.5)$$

mas já demonstramos que

$$\overrightarrow{QP} + (-\overrightarrow{QP}) = \vec{0}, \quad (2.6)$$

logo, igualando (2.5) e (2.6), temos

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + (-\overrightarrow{QP})$$

somando  $-\overrightarrow{QP}$  em ambos os membros, concluimos que

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

- A cada par de pontos  $(P, Q) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  associamos uma seta com ponto inicial em  $P$  e extremo final em  $Q$ .

Intuitivamente podemos concluir a veracidade da informação pois, se  $P, Q \in \mathbb{E}$ ,  $v \in \mathbb{V}$  e, segundo a definição 5, item(i),  $P \oplus v = Q$  é bijetora, logo só há um vetor  $v = \overrightarrow{PQ}$  tal que  $P$  seja a origem e  $Q$  o extremo final.

Após observarmos os detalhes acima, podemos ver o motivo pelo qual não utilizamos, nesse trabalho, a linguagem convencional da Geometria Analítica a qual diz que  $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ}$ , pois em ambientes de "objetos" de naturezas distintas, não faz muito sentido um ponto adicionado a um vetor, mas, concordando com [20], um ponto  $P$  ser "carregado" por um vetor  $v$  até atingir o ponto  $Q$ , nos parece mais elegante.

## 2.2 Retas, Planos e Triângulos

Para trabalharmos com retas e planos, a dimensão do espaço Vetorial  $\mathbb{V}$  deve ser adequadamente definida. Adotaremos  $\dim \mathbb{V} \geq 2$ .

Convém ainda adotarmos algumas definições de combinações lineares entre vetores. Utilizaremos a definição de [24] a seguir.

### Definição 6

- (i) O vetor  $v$  é múltiplo do vetor  $u$  se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \lambda u$ .
- (ii) O vetor  $v$  é combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  quando existem números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , tais que  $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ .

Após as definições acima, cabem ainda algumas observações relevantes:

- Na definição 6, item (i), também podemos dizer que  $v$  e  $u$  são linearmente dependentes(LD). Neste caso, se não houver  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \lambda u$ , dizemos que  $v$  e  $u$  são Linearmente Independentes(LI);
- vetor nulo  $\vec{0}$  é múltiplo de qualquer vetor  $u$ , uma vez que  $\vec{0} = 0.u$ ;
- Se  $v \neq \vec{0}$  é múltiplo de  $u$ , então  $u$  é também múltiplo de  $v$ . De fato, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  é tal que  $v = \lambda u \neq \vec{0}$ , temos  $\lambda \neq 0$  e  $u \neq \vec{0}$ . Logo,  $u = \frac{1}{\lambda}v$ .

### 2.2.1 Retas

Seja  $(\mathbb{E}, \oplus)$  um espaço afim sobre  $\mathbb{V}$ , fixados  $P \in \mathbb{E}$  e  $v \in \mathbb{V}$  definimos o seguinte subconjunto de  $\mathbb{E}$ , que chamaremos de reta,

$$\mathcal{R}(P, v) = \{P \oplus tv \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

$v$  é chamado vetor diretor ( $v \neq 0$ ).

Observemos que, como  $P \oplus 0 = P$ , então  $P \in \mathcal{R}(P, v)$ . Se  $Q \in \mathcal{R}(P, v)$ , então  $\overrightarrow{PQ} = tv$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Com efeito

$$Q = P \oplus tv \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = tv.$$

Evidentemente, se  $A, B \in \mathbb{E}$ ,  $A \neq B$ , esses dois pontos pertencem à reta  $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$ , que passa por  $A$  e  $B$ , já que

- $B = A \oplus 1\overrightarrow{AB}$  e
- $A = A \oplus 0\overrightarrow{AB}$ .

Essa definição de reta é similar à que conhecemos da geometria analítica

$$Q = P + t\vec{v} \text{ se } P, Q \in \mathbb{V}.$$

Observamos que  $\mathcal{R}(P, u) = \mathcal{R}(P, v)$  se e somente se  $u = \lambda v$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em geral temos a seguinte proposição:

**Proposição 1** *Dados dois pontos  $P, Q \in \mathbb{E}$  e dois vetores  $u, v \in \mathbb{V}$ , as retas  $\mathcal{R}(P, u)$  e  $\mathcal{R}(Q, v)$  serão iguais se, e somente se,  $\overrightarrow{PQ}$  e  $u$  forem múltiplos de  $v$ <sup>1</sup>, ou seja,*

$$\mathcal{R}(P, u) = \mathcal{R}(Q, v) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \lambda v, u = \delta v,$$

para algum  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>ou, sem perda de generalidade, se  $\overrightarrow{PQ}$  e  $v$  forem múltiplos de  $u$

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ )

Partindo da igualdade

$$\mathcal{R}(P, u) = \mathcal{R}(Q, v)$$

vemos que  $P$  e  $Q$  pertencem a ambas retas, logo, a afirmação  $P \in \mathcal{R}(Q, v)$  garante

$$P = Q \oplus tv$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$ , que implica

$$\overrightarrow{PQ} = (-t)v.$$

Fazendo  $-t = \lambda$ , então

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda v. \tag{2.7}$$

Agora, como  $Q \in \mathcal{R}(P, u)$ , podemos escrever

$$Q = P \oplus \theta u,$$

para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , que é

$$\overrightarrow{PQ} = \theta u. \tag{2.8}$$

Como  $P \neq Q$ , isto é,  $\lambda \neq 0$ , das equações (2.7) e (2.8), vem que

$$\theta u = \lambda v \Rightarrow u = \frac{\theta}{\lambda} v.$$

Faça  $\frac{\theta}{\lambda} = \delta \in \mathbb{R}$  e teremos

$$u = \delta v.$$

( $\Leftarrow$ )

Partindo agora da suposição que  $u = \delta v$ , então para qualquer que seja  $X \in \mathcal{R}(P, u)$  vale a expressão

$$X = P \oplus \alpha u,$$

para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como  $u = \delta v$ , temos

$$X = P \oplus \alpha(\delta v) \Rightarrow X = P \oplus (\alpha\delta)v$$

que implica

$$X \in \mathcal{R}(P, v). \tag{2.9}$$

Das observações da subseção 2.1.3, página 22, temos que

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

logo, a expressão

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda v$$

pode ser escrita como

$$\overrightarrow{QP} = (-\lambda)v,$$

de onde concluímos que

$$P = Q \oplus (-\lambda)v.$$

Agora substituindo  $P$  em (2.9), temos

$$X = (Q \oplus +(-\lambda)v) \oplus (\alpha\delta)v.$$

Nas mesmas observações em 2.1.3, vemos que essa última igualdade equivale a

$$X = Q \oplus ((\alpha\delta)v + (-\lambda)v) \Rightarrow X = Q \oplus (\alpha\delta - \lambda)v.$$

Ou seja,  $X \in \mathcal{R}(Q, v)$ , que nos garante afirmar que

$$\mathcal{R}(P, u) \subseteq \mathcal{R}(Q, v).$$

Agora, seja  $X \in \mathcal{R}(P, v)$ , temos que  $X = Q \oplus tv$ . Como

$$\frac{1}{\delta}u = v$$

e

$$P \oplus \lambda v = Q.$$

Então

$$X = (P \oplus \lambda v) \oplus tv = P \oplus (\lambda + t)v,$$

substituindo  $v$  por  $\frac{1}{\delta}u$  temos

$$X = P \oplus \frac{(\lambda + t)}{\delta}u \Rightarrow X \in \mathcal{R}(P, u).$$

Assim,

$$\mathcal{R}(Q, v) \subseteq \mathcal{R}(P, u)$$

que nos garante

$$\mathcal{R}(P, u) = \mathcal{R}(Q, v)$$

■

Para facilitar a apresentação, utilizaremos a denotação  $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{A,B}$  para representar a reta  $\mathcal{R}$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , ou seja, a reta  $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB}) = \mathcal{R}(B, \overrightarrow{BA})$ .

## 2.2.2 Planos

Seja  $(\mathbb{E}, \oplus)$  um espaço afim sobre  $\mathbb{V}$  e  $P \in \mathbb{R}$ ,  $u, v$  vetores sobre  $\mathbb{V}$ , linearmente independentes, denotaremos por  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P, u, v)$  o plano que passa por  $P$  e contém os vetores diretores  $u$  e  $v$  por

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \{P \oplus (\lambda u + \delta v) \mid \lambda, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposição 2** *Sejam  $u_1$  e  $v_1$  vetores L.I. em  $\mathbb{V}$ , os planos  $\mathcal{P}(P, u, v)$  e  $\mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$  são iguais se e somente se os vetores  $\overrightarrow{PQ}, u, v$  são combinação linear de  $u_1$  e  $v_1$ , ou seja*

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}(Q, u_1, v_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}, u, v \in [u_1, v_1].$$

**Demonstração:**

( $\Rightarrow$ ) Como  $\mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ , em particular  $P \in \mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ , isto é, existem  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$  tais que

$$P = Q \oplus (\lambda u_1 + \delta v_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = \lambda u_1 + \delta v_1.$$

Podemos escrever essa última expressão como

$$\overrightarrow{PQ} = (-\lambda)u_1 + (-\delta)v_1.$$

Escrevendo  $t = -\lambda$  e  $s = -\delta$  temos

$$\overrightarrow{PQ} = tu_1 + sv_1.$$

Assim  $\overrightarrow{PQ} \in [u_1, v_1]$ .

Como  $P \oplus u \in \mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ , isto é

$$P \oplus u = Q \oplus (\lambda_1 u_1 + \delta_1 v_1), \text{ para algum, } \lambda_1, \delta_1 \in \mathbb{R}.$$

Como

$$P = Q \oplus (\lambda u_1 + \delta v_1),$$

ao substituírmos na igualdade acima temos

$$Q \oplus (\lambda u_1 + \delta v_1) \oplus u = Q \oplus (\lambda_1 u_1 + \delta_1 v_1)$$

que implica

$$Q \oplus [(\lambda u_1 + \delta v_1) + u] = Q \oplus (\lambda_1 u_1 + \delta_1 v_1)$$

então

$$(\lambda u_1 + \delta v_1) + u = \lambda_1 u_1 + \delta_1 v_1 \Rightarrow u = (-\lambda)u_1 + (-\delta)v_1 + \lambda_1 u_1 + \delta_1 v_1.$$

Pondo em evidência os vetores  $u_1$  e  $v_1$ , chegamos a

$$u = (\lambda_1 - \lambda)u_1 + (\delta_1 - \delta)v_1.$$

Escrevendo  $t' = \lambda_1 - \lambda$  e  $s' = \delta_1 - \delta$ , chegaremos a

$$u = t'u_1 + s'v_1,$$

assim concluímos que  $u \in [u_1, v_1]$ .

Usando o mesmo argumento para  $P \oplus v \in \mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ , temos que

$$v = t''u_1 + s''v_1,$$

que é o que nos restava demonstrar.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $X \in \mathcal{P}(P, u, v)$ , então

$$X = P \oplus (\lambda u + \delta v). \quad (2.10)$$

Como  $u = t'u_1 + s'v_1$  e  $v = t''u_1 + s''v_1$ , escrevendo  $\lambda' = t' + t''$  e  $\delta' = s' + s''$  temos que

$$X = P \oplus (\lambda'u_1 + \delta'v_1).$$

Por outro lado,  $\overrightarrow{PQ} = tu_1 + sv_1$ , que implica

$$P = Q \oplus ((-t)u_1 + (-s)v_1).$$

Assim, substituindo  $P$  em (2.10), temos

$$\begin{aligned} X &= Q \oplus ((-t)u_1 + (-s)v_1) \oplus (\lambda'u_1 + \delta'v_1) \\ X &= Q \oplus [((-t)u_1 + (-s)v_1) + (\lambda'u_1 + \delta'v_1)] \\ X &= Q \oplus ((\lambda' - t)u_1 + (\delta' - s)v_1). \end{aligned}$$

Então  $X \in \mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ , isto é,

$$\mathcal{P}(P, u, v) \subseteq \mathcal{P}(Q, u_1, v_1).$$

Observe que a condição  $u = t'u_1 + s'v_1$  e  $v = t''u_1 + s''v_1$  e o fato que são L.I. implicam que os subespaços  $[u, v]$  e  $[u_1, v_1]$  são iguais, então de maneira análoga temos que

$$\mathcal{P}(Q, u_1, v_1) \subseteq \mathcal{P}(P, u, v).$$

Portanto

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}(Q, u_1, v_1). \quad \blacksquare$$

### 2.2.3 Triângulos

Por ser o objeto principal da nossa pesquisa, necessitamos de algumas definições básicas e essenciais a respeito do triângulo para darmos prosseguimento.

**Definição 7** *Três pontos  $A, B, C \in \mathbb{E}$ , determinam o triângulo  $ABC$  no espaço afim  $\mathbb{E}$  se, e somente se os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  forem linearmente independentes em  $\mathbb{V}$ .*

Observação:

Sabemos que, pela equação (2.4), página 23,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

Em particular, se  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  são L.I., então  $A \neq B$  e  $A \neq C$ .

Por outro lado, como  $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , então  $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ , caso contrário, teríamos  $\vec{0} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , absurdo por que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são L.I., então  $B \neq C$ .

- (i) Assim, se  $A, B$  e  $C$  determinam um triângulo, então os pontos  $A, B$  e  $C$  são dois a dois distintos.
- (ii) Os pontos  $A, B$  e  $C$  não são colineares.

De fato, se os pontos  $A, B$  e  $C$  são colineares, então o ponto  $C \in \mathcal{R} = \mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$  que implica  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , contradizendo a definição do triângulo, donde concluímos que  $A, B$  e  $C$  não podem ser colineares.

**Proposição 3** *Se os pontos  $A, B$  e  $C$  determinam um triângulo em  $\mathbb{E}$ , então existe um único plano passando por  $A, B$  e  $C$  que denotaremos por  $\mathcal{P}_{A,B,C}$ .*

**Demonstração:** Como  $A, B$  e  $C$  determinam um triângulo, então podemos definir o seguinte plano:

$$\mathcal{P}_{A,B,C} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Que contém os pontos  $A, B$  e  $C$ , de fato:

- $A = A \oplus (0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}) \in \mathcal{P}$ ;
- $B = A \oplus (\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}) \in \mathcal{P}$ ;
- $C = A \oplus (0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \in \mathcal{P}$ .

Isto Prova a existência.

Para provar a unicidade, considere  $\mathcal{P}(P, u, v)$  um plano que contém  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Então devemos provar que

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}_{A,B,C},$$

ou, equivalentemente, pela proposição 2, devemos provar que  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  e  $\overrightarrow{PC}$  são combinação linear de  $u$  e  $v$ .

Como  $\mathcal{P}(P, u, v)$  contém  $A$ ,  $B$  e  $C$ , então

$$\begin{cases} A = P \oplus (\lambda u + \delta v) \\ B = P \oplus (\lambda' u + \delta' v) \\ C = P \oplus (\lambda'' u + \delta'' v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PA} = \lambda u + \delta v \\ \overrightarrow{PB} = \lambda' u + \delta' v \\ \overrightarrow{PC} = \lambda'' u + \delta'' v \end{cases}$$

isto é,  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  e  $\overrightarrow{PC}$  pertencem ao subespaço gerado por  $u$  e  $v$ .

Por outro lado,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}$  implica que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  também são combinação linear de  $u$  e  $v$ . Logo os planos

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \mathcal{P}_{A,B,C}.$$

■

## 2.3 Propriedade Universal de Pontos num Plano $\mathcal{P}$

Esta propriedade é de grande importância para prosseguirmos no nosso trabalho e encontrar os pontos notáveis do triângulo, a reta de Euler e o Círculo de nove pontos. A propriedade universal que apresentamos a seguir aparece em alguns trabalhos como o artigo [18] e o material do Profmat em [24], porém, utilizaremos a demonstração de [20] na maior parte desta subseção.

### 2.3.1 Propriedade Universal de pontos em um plano

Partiremos de um plano  $\mathcal{P}_{A,B,C}$  tal que  $A, B, C \in \mathbb{E}$ . Recorrendo mais uma vez a equação do plano, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A,B,C} &= \mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \{A \oplus (\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Seja  $P$  um ponto qualquer de  $\mathcal{P}_{A,B,C}$ , então,  $P$  se escreve como

$$P = A \oplus (\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}),$$

Onde  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  que implica

$$\overrightarrow{AP} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}.$$

Utilizaremos agora um outro ponto qualquer  $O \in \mathbb{E}$ , temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}, \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}, \end{cases}$$

logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} &= \beta(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \\ \overrightarrow{OP} &= -\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{AO} + \gamma\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Colocando  $\overrightarrow{AO}$  em evidência temos

$$\overrightarrow{OP} = (-1 + \beta + \gamma)\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

sabemos também que  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ , logo, podemos escrever

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \beta - \gamma)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

admitindo  $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ , chegamos então a equação

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

independente da escolha do ponto  $O$ .

### 2.3.2 Propriedade Universal de pontos num plano $\mathcal{P}$

A propriedade universal que enunciaremos a seguir nos garante que a representação de  $P \in \mathbb{E}$  na forma

$$P = O \oplus (\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC})$$

com  $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ , ( $\beta, \gamma$  fixos), independente da escolha do ponto  $O \in \mathbb{E}$ .

**Proposição 4** *Seja  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{A,B,C}$  plano em  $\mathbb{E}$  e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  números reais tais que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , então existe um único ponto  $P \in \mathcal{P}$  tal que*

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$$

para todo  $O \in \mathbb{E}$ .

**Demonstração:** Seja  $O \in \mathbb{E}$  um ponto qualquer, podemos definir o vetor

$$v = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}.$$

Considere o ponto  $O \oplus v \in \mathbb{E}$  que chamaremos  $P = O \oplus v$ , então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = v &= (1 - \beta - \gamma) \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OA} + \beta(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

logo

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC},$$

isto mostra que  $P \in \mathcal{P}$ .

Para mostrar a unicidade, considere  $O_1, P_1 \in \mathbb{E}$  e  $v_1 = \alpha \overrightarrow{O_1A} + \beta \overrightarrow{O_1B} + \gamma \overrightarrow{O_1C}$  tais que  $v_1 = \overrightarrow{O_1P_1}$ .

Note que

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA}) + \beta(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \alpha \overrightarrow{O_1O} + \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{O_1O} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{O_1O} + \gamma \overrightarrow{OC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{O_1O} + \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{O_1O} + v = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P}. \end{aligned}$$

Entretanto,  $v_1 = \overrightarrow{O_1P_1}$ , de onde concluímos que  $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1P_1}$ , que implica

$$\vec{0} = \overrightarrow{O_1P} - \overrightarrow{O_1P_1} = \overrightarrow{P_1O_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{P_1P}$$

Portanto  $P_1 = P$  ■

Essa propriedade será de grande importância, pois, com ela, iremos caracterizar alguns dos pontos notáveis do triângulo. Por hora, iremos fazê-lo apenas com o ponto médio entre dois pontos.

### 2.3.3 Ponto médio entre dois pontos

Usando a propriedade universal em  $\mathcal{P}$ , sabemos que, em particular, se  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  e  $\gamma = 0$ , com  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , existe um único ponto  $P \in \mathcal{P}$ , que chamaremos de ponto médio entre  $A$  e  $B$  e denotaremos por:  $M_{AB}$

ou ainda,

$$M_{AB} = O \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Como também é arbitrária a escolha de  $O$ , podemos fazer  $O = A$  e assim

$$M_{AB} = A \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}).$$

Que é a equação do ponto médio. É bastante razoável se pensarmos que se *carregarmos* o ponto  $A$  até a metade do vetor  $\overrightarrow{AB}$ , chegaremos ao único ponto médio  $M_{AB}$ .

## 2.4 Ortogonalidade

Geralmente, no estudo da geometria analítica, definimos produto interno com auxílio das coordenadas cartesianas dos pontos que determinam os vetores envolvidos<sup>2</sup>, no entanto, não convém utilizarmos essa linguagem no contexto em que estamos abordando. Faremos uso da definição para um espaço vetorial geral com o auxílio dos autores [27], ver páginas 106 e 107, e [5], ver páginas 221 e 222.

### 2.4.1 Definição de produto interno

**Definição 8** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real e  $u, v$  e  $w \in \mathbb{V}$ . Diremos que um produto interno sobre  $\mathbb{V}$  é uma função que a cada par de vetores  $u$  e  $v$ , associa um número real, denotado  $\langle u, v \rangle$ , tal que os seguintes axiomas sejam verificados:*

- i**  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;
- ii**  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
- iii**  $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ ;
- iv**  $\langle u, u \rangle \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Observações:

---

<sup>2</sup>Por exemplo, o produto interno ou produto escalar usual entre os vetores  $u = (x_u, y_u)$  e  $v = (x_v, y_v)$  em  $\mathbb{R}^2$ , de acordo com a geometria analítica, é o número real  $\langle u, v \rangle = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$ .

- O número real  $\langle u, v \rangle$  é chamado produto interno de  $u$  e  $v$ ;
- Dos quatro axiomas da definição acima decorrem as propriedades:

**I**  $\langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$ , para todo  $u \in \mathbb{V}$ ;

**II**  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ;

**III**  $\langle u, kv \rangle = k\langle u, v \rangle$ ;

**IV**  $\langle u, v_1 + v_2 + \dots + v_n \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle + \dots + \langle u, v_n \rangle$ .

**Demonstração:**

**I** Basta fazer

$$\begin{aligned} \langle u, 0 \rangle &= \langle 0, u \rangle \rightarrow (i) \\ &= \langle 0.v, u \rangle \\ &= 0\langle v, u \rangle \rightarrow (iii) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**II** De fato,

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle w, u + v \rangle \rightarrow (i) \\ &= \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle \rightarrow (ii) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \rightarrow (i). \end{aligned}$$

**III** É fácil ver que

$$\begin{aligned} \langle u, kv \rangle &= \langle kv, u \rangle \rightarrow (i) \\ &= k\langle v, u \rangle \rightarrow (iii) \\ &= k\langle u, v \rangle \rightarrow (i). \end{aligned}$$

**IV** Para provar essa propriedade separaremos a primeira parcela da soma dos vetores das demais, ou seja

$$\begin{aligned}
\langle u, v_1 + v_2 + \dots + v_n \rangle &= \langle u, v_1 + (v_2 + v_3 + \dots + v_n) \rangle \\
&= \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 + v_3 + \dots + v_n \rangle \\
&= \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 + (v_3 + v_4 \dots + v_n) \rangle \\
&= \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle + \langle u, v_3 + v_4 \dots + v_n \rangle.
\end{aligned}$$

Repetindo a operação seguidamente, chegaremos a

$$\langle u, v_1 + v_2 + \dots + v_n \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle + \dots + \langle u, v_n \rangle.$$

■ Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , diz-se que dois vetores  $v$  e  $w$  são ortogonais se  $\langle v, w \rangle = 0$  e escrevemos  $v \perp w$ .

Se  $\mathbb{V}$  é um espaço vetorial com produto interno, definimos a norma (o comprimento) de um vetor  $v$  em relação ao produto interno por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se  $\|v\| = 1$ , isto é,  $\langle v, v \rangle = 1$ ,  $v$  é chamado vetor unitário. Em geral, se  $v$  é um vetor qualquer não nulo, podemos definir o vetor

$$u = \frac{v}{\|v\|}$$

que resulta unitário.

## 2.4.2 Distância entre dois pontos do espaço afim

Normalmente, é comum no estudo da geometria analítica, falarmos de comprimento, norma ou módulo<sup>3</sup> do vetor, porém, com o tratamento que estamos dando neste trabalho, não faz sentido usarmos este conceito, pois, no início, comparamos um vetor a algo que transporta um ponto até outro ponto, ou seja, temos a direção e a distância entre estes pontos para mensurar. Então definiremos a distancia entre dois pontos a seguir.

---

<sup>3</sup>O módulo é também conhecido como norma ou comprimento do vetor. Na geometria analítica, este comprimento é encontrado utilizando Pitágoras, ou seja, admitindo que as coordenadas no plano cartesiano dos pontos  $A$  e  $B$  são respectivamente  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  e o vetor  $v$  tal que  $v = \overrightarrow{AB}$ , chamaremos de módulo ou norma de  $v$  o número Real  $\|v\|$  de forma que  $\|v\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

**Definição 9** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{E}$ , dizemos que a distância entre  $A$  e  $B$ , que denotaremos de  $d(A, B)$ , é o número real não negativo cujo quadrado equivale ao produto interno entre o vetor por eles definidos e ele mesmo, ou seja

$$\left(d(A, B)\right)^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle$$

ou ainda

$$d(A, B) = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}.$$

### Algumas consequências

Dados os Pontos  $A, B, C, D \in \mathbb{E}$ ,

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow d(A, B) = d(C, D)$ .

De fato temos  $d(A, B) = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \sqrt{\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} \rangle} = d(C, D)$ .

- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

De fato temos  $d(A, B) = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

### 2.4.3 Projeção ortogonal vetorial

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $v$  um vetor em  $\mathbb{V}$  não nulo. Denotaremos por  $[v] = \{\alpha v | \alpha \in \mathbb{R}\}$  o subespaço de  $\mathbb{V}$  gerado pelo vetor  $v$  e por  $[v]^\perp = \{w \in \mathbb{V} | \langle w, v \rangle = 0\}$  o subespaço de  $\mathbb{V}$  formado pelos vetores ortogonais ao vetor  $v$ , então verifica-se que  $\mathbb{V}$  é soma direta dos subespaços  $[v]$  e  $[v]^\perp$ , isto é

$$\mathbb{V} = [v] \oplus [v]^\perp.$$

Em particular, isto mostra que qualquer vetor  $u \in \mathbb{V}$  decompõe-se de maneira única como a soma de um elemento de  $[v]$  e um de  $[v]^\perp$ , isto é,  $u = v_1 + v_2$  com  $v_1 \in [v]$  e  $v_2 \in [v]^\perp$ . Escrevendo  $v_1 = p(u)$ , então,  $p(u) = u - v_2$ .

Por outro lado, observemos que  $p(u) \in [v]$ , isto é,  $p(u) = \gamma v$ , para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ , então,

$$\langle p(u), v \rangle = \gamma \langle v, v \rangle = \langle u - v_2, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

e assim

$$\gamma = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

logo

$$p(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

### 2.4.4 Projeção ortogonal afim

Para definir uma projeção sobre o espaço afim, devemos fazer algo análogo ao caso vetorial, para isto, tomaremos em lugar do subspaço  $[v]$  de  $\mathbb{V}$  a reta  $\mathcal{R}(P, v)$  em  $\mathbb{E}$  e será a ação  $\oplus$  de  $\mathbb{V}$  sobre  $\mathbb{E}$ , que nos permitirá representar de maneira única o ponto  $X \in \mathbb{E}$  por

$$X = \pi(X) \oplus w$$

com  $\pi(X) \in \mathcal{R}$  e  $w \in [v]^\perp$ .

**Definição 10** Fixe uma Reta  $\mathcal{R}(P, v)$  em  $\mathbb{E}$  e seja  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  a função que associa a cada  $X \in \mathbb{E}$  o único ponto  $\pi(X) \in \mathcal{R}$ , satisfazendo as seguintes condições:

(i)  $\pi(X) \in \mathcal{R}$  e

(ii)  $\overrightarrow{\pi(X)X} \perp v$ .

$\pi(X)$  será denominado projeção ortogonal afim de  $X$  sobre a reta  $\mathcal{R}$ .

Observemos que as condições (i) e (ii) determinam de maneira única  $\pi(X)$ . De fato se  $\pi(X) \in \mathcal{R}$  então, podemos fazer  $\pi(X) = P \oplus tv$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ , ou ainda,  $\overrightarrow{P\pi(X)} = tv$ . Também podemos observar que se  $\overrightarrow{\pi(X)X}$  for ortogonal a  $v$ , então temos  $\langle \overrightarrow{\pi(X)X}, v \rangle = 0$ . Que nos permite concluir que existe um único valor para  $t \in \mathbb{R}$ . De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{\pi(X)X}, v \rangle \\ &= \langle (\overrightarrow{P\pi(X)} + \overrightarrow{P\pi(X)X}), v \rangle \\ &= \langle (-tv + \overrightarrow{P\pi(X)X}), v \rangle \\ &= -t\langle v, v \rangle + \langle \overrightarrow{P\pi(X)X}, v \rangle \end{aligned}$$

então

$$t\langle v, v \rangle = \langle \overrightarrow{P\pi(X)X}, v \rangle \Rightarrow t = \frac{\langle \overrightarrow{P\pi(X)X}, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

portanto, substituindo o valor de  $t$

$$\begin{aligned} \pi(X) &= P \oplus tv \\ &= P \oplus \frac{\langle \overrightarrow{P\pi(X)X}, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\ &= P \oplus p(\overrightarrow{P\pi(X)X}). \end{aligned}$$

Sendo  $\pi(X)$  a projeção ortogonal afim do ponto  $X \in \mathbb{E}$  e  $p(\overrightarrow{P\pi(X)X})$  a projeção ortogonal vetorial do vetor  $\overrightarrow{P\pi(X)X}$ , observe que há uma relação entre essas duas projeções.

### 2.4.5 Relação entre as projeções vetorial e afim

Fixada a reta  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$ , sejam  $X$  um ponto em  $\mathbb{E}$  e  $u$  um vetor em  $\mathbb{V}$ . A seguir determinaremos a projeção ortogonal afim do ponto  $X \oplus u$ , isto é,  $\pi(X \oplus u)$  ou equivalentemente, descobriremos  $Y \in \mathcal{R}$  e o vetor  $w \in \mathbb{V}$ , ortogonal ao vetor  $v$  tal que  $X \oplus u = Y \oplus w$

- O ponto  $\pi(X) \oplus p(u)$  pertence a reta  $\mathcal{R}$ .

Sabemos que  $\pi(X) = P \oplus p(\overrightarrow{PX})$  e  $p(\overrightarrow{PX}) \in [v]$ . Logo

$$\begin{aligned} \pi(X) \oplus p(u) &= \left( P \oplus p(\overrightarrow{PX}) \right) \oplus p(u) \\ &= P \oplus \left( p(\overrightarrow{PX}) + p(u) \right) \\ &= P \oplus \theta v, \text{ para algum } \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pois  $p(u)$  também pertence a  $[v]$ .

- Os vetores  $\overrightarrow{\pi(X)X}$  e  $u - p(u)$  são ortogonais ao vetor  $v$  (portanto sua soma também).

De fato, pela definição 10, item (ii), uma das condições necessárias é  $\overrightarrow{\pi(X)X} \perp v$  e na seção 2.4.3, vemos que  $p(u) = u - v_2$ , com  $p(u) \in [v]$  e  $v_2 \in [v]^\perp$ , ou seja,

$$v_2 = u - p(u) \in [v]^\perp \Rightarrow u - p(u) \perp v.$$

Para provar que  $(\overrightarrow{\pi(X)X} + u - p(u)) \perp v$ , basta ver que  $\overrightarrow{\pi(X)X} \perp v$  (i.e.  $\langle \overrightarrow{\pi(X)X}, v \rangle = 0$ ) e  $(u - p(u)) \perp v$  (i.e.  $\langle u - p(u), v \rangle = 0$ ), logo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{\pi(X)X}, v \rangle + \langle u - p(u), v \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{\pi(X)X} + u - p(u), v \rangle \end{aligned}$$

que implica, como pretendíamos,

$$(\overrightarrow{\pi(X)X} + u - p(u)) \perp v$$

- O ponto  $(\pi(X) \oplus p(u)) \oplus (\overrightarrow{\pi(X)X} + u - p(u)) = X \oplus u$

De fato, as propriedades de associatividade da ação  $\oplus$  e comutatividade da soma de vetores nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}
& (\pi(X) \oplus p(u)) \oplus (\overrightarrow{\pi(X)X} + (u - p(u))) = \\
& = \pi(X) \oplus (p(u) + \overrightarrow{\pi(X)X} + (u - p(u))) = \\
& = \pi(X) \oplus ((p(u) + \overrightarrow{\pi(X)X}) + (u - p(u))) = \\
& = [\pi(X) \oplus (\overrightarrow{\pi(X)X} + p(u))] \oplus (u - p(u)) = \\
& = [(\pi(X) \oplus \overrightarrow{\pi(X)X}) \oplus p(u)] \oplus (u - p(u)) = \\
& = [X \oplus p(u)] \oplus (u - p(u)) = \\
& = X \oplus u.
\end{aligned}$$

Esta última igualdade nos garante que os pontos  $\pi(X) \oplus p(u)$  e  $X \oplus u$  definem um vetor  $\overrightarrow{(\pi(X) \oplus p(u))(X \oplus u)} \perp v$ . Portanto, o ponto  $\pi(X) \oplus p(u)$  é a projeção ortogonal de  $X \oplus u$  em  $\mathcal{R}$ , ou seja, da definição 2.4.3, da projeção ortogonal afim, temos

$$\pi(X \oplus u) = \pi(X) \oplus p(u).$$

Se chamarmos de  $Y = X \oplus u$ , teremos  $u = \overrightarrow{XY}$  e conseqüentemente, a sua projeção será dado por

$$p(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{\pi(X)\pi(Y)}.$$

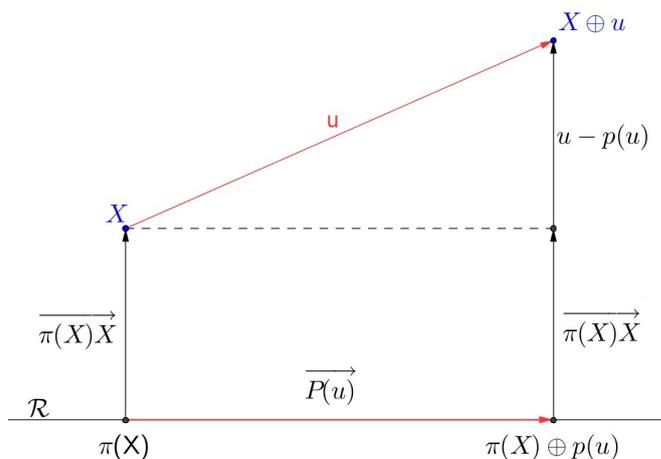


Figura 2.1: Relação da projeção ortogonal vetorial com a projeção ortogonal afim. Baseado na figura 2 do artigo [20].

### 2.4.6 Algumas implicações

Veremos a seguir algumas implicações destas igualdades acima demonstradas.

**Projeção ortogonal e pontos médios**

**Proposição 5** *Dados os pontos  $A$  e  $B \in \mathbb{E}$  e  $M_{AB}$  seu ponto médio. Então  $\pi(M_{AB})$  é o ponto médio entre  $\pi(A)$  e  $\pi(B)$ , ou seja*

$$\overrightarrow{AM_{AB}} = \overrightarrow{M_{AB}B} \Rightarrow \overrightarrow{\pi(A)\pi(M_{AB})} = \overrightarrow{\pi(M_{AB})\pi(B)}.$$

De fato, se  $\overrightarrow{AM_{AB}} = \overrightarrow{M_{AB}B}$ , então  $M_{AB} = A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \pi(M_{AB}) &= \pi\left(A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \pi(A) \oplus p\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \pi(A) \oplus \frac{1}{2}p(\overrightarrow{AB}) \\ &= \pi(A) \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{\pi(A)\pi(B)} \end{aligned}$$

Que é garantia de que  $\pi(M_{AB})$  é ponto médio entre  $\pi(A)$  e  $\pi(B)$ .

**Projeção ortogonal e mediatriz**

Dado um ponto  $P \in \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ , há uma única reta  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $P$  e é ortogonal a  $\mathcal{R}$ , ou seja, os vetores de  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{L}$  são ortogonais.

**Existência:** Seja a reta  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$  e o plano  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P, u_1, v_1)$ , então em particular temos que  $P \oplus v = P \oplus (\lambda u_1 + \delta v_1)$  para algum  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ , isto é,  $v = \lambda u_1 + \delta v_1$ . Assumindo sem perda de generalidade que os vetores  $u_1$  e  $v_1$  são unitários, então temos que o vetor  $u = -\delta u_1 + \lambda v_1$  pertence ao subespaço gerado por  $u_1$  e  $v_1$  e ademais é ortogonal ao vetor  $v$  ( $\langle u, v \rangle = -\lambda\delta + \lambda\delta = 0$ ). Tome então a reta  $\mathcal{L} = \mathcal{R}(P, u)$ .

**Unicidade:** Vem do fato que a dimensão do subespaço  $W = [u_1, v_1]$  é dois e a dimensão do subespaço ortogonal  $[v]^\perp$  com respeito de  $W$  é 1.

**Proposição 6** *Suponha que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$  e  $\mathcal{L} = \mathcal{R}(P, u)$ , com  $u \perp v$ , e, seja  $X$  um ponto do plano  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P, u, v)$ . Então são equivalentes:*

- (a)  $X \in \mathcal{L}$
- (b)  $\pi(X) = P$  (Projeção afim com respeito a reta  $\mathcal{R}$ )

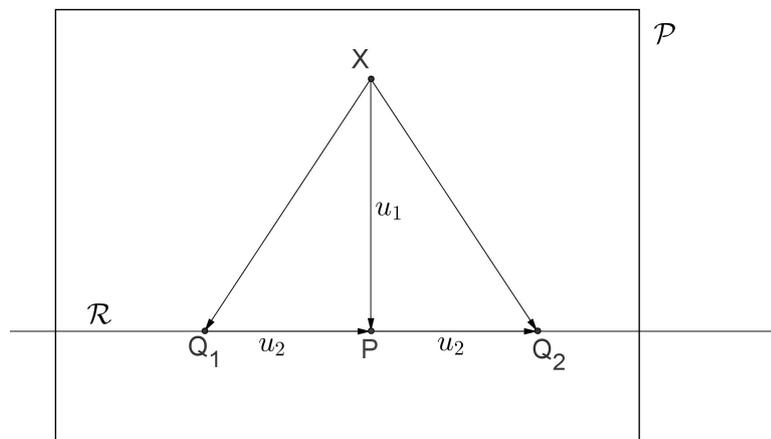


Figura 2.2: Relação entre ortogonal e mediatriz. Baseado na figura 3 do artigo [20].

(c)  $d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$ , para quaisquer  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}$  tais que  $P$  é o ponto médio entre  $Q_1$  e  $Q_2$ .

**Demonstração:** (a)  $\Rightarrow$  (b) Se  $X \in \mathcal{L}$ , então, pela definição da equação da reta,  $X = P \oplus tu$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . logo

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \pi(P \oplus tu) \\ &= \pi(P) \oplus tp(u) \\ &= P \oplus t\vec{0} \\ &= P \oplus \vec{0} = P \end{aligned}$$

pois  $\pi(P) = P$  e  $p(u) = \vec{0}$  ( $P \in \mathcal{R}$  e  $u \perp v$ ).

(b)  $\Rightarrow$  (c) temos  $X \in \mathcal{P}$  tal que  $\pi(X) = P$  é a projeção ortogonal afim de  $X$  em  $\mathcal{R}$ . Fazendo  $\overrightarrow{XP} = u_1$  e tomando  $Q_1$  e  $Q_2 \in \mathcal{R}$  tais que  $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PQ_2}$ , com  $\overrightarrow{Q_1P} = \overrightarrow{PQ_2} = u_2$ , observamos que  $u_1$  é ortogonal à reta  $\mathcal{R}$  e  $u_2$  é um vetor diretor de  $\mathcal{R}$ , logo temos  $u_1 \perp u_2$  (pois  $\pi(P) = X \Rightarrow \overrightarrow{XP} = \overrightarrow{X\pi(X)} \perp v$ ).

Podemos observar na figura 2.2, que  $\overrightarrow{XQ_1} = u_1 - u_2$ , logo para encontrarmos a  $d(X, Q_1)$ , utilizaremos a definição 9, página 9, da distância entre os pontos em

relação ao produto interno. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
 d(X, Q_1)^2 &= \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1 - u_2, u_1 \rangle - \langle u_1 - u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle - \langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle - 2\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Observe que o termo  $-2\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ , pois  $u_1 \perp u_2$ . Pela mesma figura, temos  $\overrightarrow{XQ_2} = u_1 + u_2$ , que, seguindo o mesmo raciocínio, apresenta o mesmo resultado, ou seja

$$\begin{aligned}
 d(X, Q_2)^2 &= \langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1 + u_2, u_1 \rangle + \langle u_1 + u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle + 2\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \\
 &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle
 \end{aligned}$$

que garante  $d(X, Q_1)^2 = d(X, Q_2)^2 \Rightarrow d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$ .

(c) $\Rightarrow$ (a) Admitindo que  $d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$ , para quaisquer  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}$  tais que  $P$  é o ponto médio entre  $Q_1$  e  $Q_2$  e  $X \in \mathcal{P}$ , observe que  $(\overrightarrow{XQ_1} + \overrightarrow{XQ_2}) \perp \overrightarrow{Q_1Q_2}$ , já que

$$\begin{aligned}
 \langle \overrightarrow{XQ_1} + \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2} \rangle &= \langle \overrightarrow{XQ_1} + \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{Q_1X} + \overrightarrow{XQ_2} \rangle \\
 &= \langle \overrightarrow{XQ_1} + \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{XQ_2} - \overrightarrow{XQ_1} \rangle \\
 &= \langle \overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_2} \rangle - \langle \overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_1} \rangle \\
 &= \langle \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{XQ_2} \rangle + \langle \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_2} \rangle - \langle \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{XQ_1} \rangle - \langle \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_1} \rangle \\
 &= \langle \overrightarrow{XQ_2}, \overrightarrow{XQ_2} \rangle - \langle \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_1} \rangle \\
 &= d(X, Q_2) - d(X, Q_1) = 0.
 \end{aligned}$$

Utilizando a equação do ponto médio entre dois pontos, já que  $P$  é ponto médio de  $Q_1$  e  $Q_2$ , escolhendo  $O = X$ , concluímos que:

$$\overrightarrow{XP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}).$$

Mas como os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencem a reta  $\mathcal{R}(P, v)$ , então  $\overrightarrow{Q_1Q_2}$  é múltiplo de  $v$ , ou seja,  $\overrightarrow{Q_1Q_2} = tv$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ , logo, podemos concluir que  $\overrightarrow{XP} \perp v$ .

Agora, como  $u \perp v$  e  $\overrightarrow{XP} \perp v$ , e  $u$  e  $\overrightarrow{XP}$  são coplanares, então esses dois vetores são linearmente dependentes, ou seja,  $\overrightarrow{XP} = su$  para algum  $s \in \mathbb{R}$ , ou ainda,

$$\overrightarrow{PX} = (-s)u \Rightarrow X = P \oplus (-s)u.$$

Como  $\mathcal{L} = \mathcal{R}(P, u)$ , concluímos que  $X \in \mathcal{L}$ . ■

Com as definições apresentadas, seguiremos, no próximo capítulo, com os pontos notáveis do triângulo e o objetivo maior desse trabalho que é a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos.

# Capítulo 3

## Os Elementos e a construção da Circunferência dos Nove Pontos

Vimos no primeiro capítulo as construções geométricas. Neste capítulo utilizaremos as definições apresentadas no capítulo anterior para verificarmos a existência e a construção dos pontos notáveis do triângulo, da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos com um outro olhar algébrico, diferente do apresentado no Ensino de Educação Básico e, até mesmo, na graduação, com ilustrações de construções geométricas com auxílio do software Geogebra<sup>1</sup> para ilustrar os conceitos apresentados.

### 3.1 O Baricentro

**Teorema 11** *As três medianas de qualquer triângulo se interceptam em um único ponto  $G$ , denominado baricentro, que as divide em duas partes tais que o segmento cujas extremidades são o vértice e o baricentro é o dobro do outro segmento.*

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$  e os pontos médios de cada lado do triângulo, opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente,  $M_A, M_B$  e  $M_C \in \mathbb{E}$ , as medianas de  $ABC$  serão representadas pelas retas  $\mathcal{R}_{A,M_A}$ ,  $\mathcal{R}_{B,M_B}$  e  $\mathcal{R}_{C,M_C}$  que passam pelos pontos  $A$  e  $M_A$ ,  $B$  e  $M_B$ ,  $C$  e  $M_C$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 3.1.

Iniciaremos provando a primeira parte do teorema, ou seja, que o baricentro é o único ponto de intersecção das medianas com ajuda de [24] e utilizando a propriedade universal dos pontos em  $\mathcal{P}$ , veja a proposição 4, na página 33, ou seja, dado um ponto  $O$  qualquer no plano, então, há um único ponto  $G$  tal que

---

<sup>1</sup>vide seção 1.2, página 4.

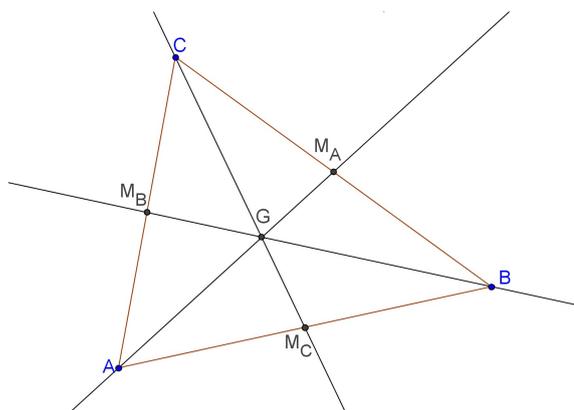


Figura 3.1: Triângulo ABC com o Baricentro G

$$\vec{OG} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}, \text{ com } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Tomemos  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$  e teremos

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC}$$

ou ainda,

$$G = O \oplus \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Com a certeza que  $G$  é único, basta, agora, mostrar que o ponto  $G$  pertence às retas que contém as medianas do triângulo  $ABC$ , ou seja, que  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ . Podemos tomar  $O = A$  e teremos a identidade

$$\begin{aligned} G &= A \oplus \frac{1}{3} (\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= A \oplus \frac{1}{3} (0 + \vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= A \oplus \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= A \oplus \frac{1}{3} (2\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= A \oplus \frac{1}{3} (2\vec{AB} + 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{BC}) \\ &= A \oplus \frac{2}{3} (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}) \\ &= A \oplus \frac{2}{3} (\vec{AB} + \vec{BM}_A) \\ &= A \oplus \frac{2}{3} (\vec{AM}_A). \end{aligned}$$

Que garante que  $G \in \mathcal{R}_{A,M_A}$ . De forma análoga, podemos fazer também  $G = B \oplus \frac{2}{3}(\overrightarrow{BM_B})$  e  $G = C \oplus \frac{2}{3}(\overrightarrow{CM_C})$ , basta fazermos  $O = B$  e depois  $O = C$ .

Esta mesma equação também nos garante a segunda parte do teorema, ou seja, que  $G$  divide o segmento de reta formado por um vértice e o ponto médio do lado oposto a esse vértice em duas partes, sendo o segmento com suas extremidades definidas pelo vértice e pelo ponto  $G$  o dobro do segmento definido por  $G$  e o ponto médio do lado oposto.

De fato, tomemos sem perda de generalidade, o caso demonstrado de

$$G = A \oplus \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM_A}) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM_A})$$

logo,  $\overrightarrow{GM_A} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A} + \overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM_A})$ , donde concluímos que

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}.$$

■

## 3.2 O Incentro

**Teorema 12** *As bissetrizes internas de um triângulo se interceptam em um só ponto  $I$ , denominado incentro, que é equidistante aos lados desse triângulo.*

**Demonstração:** Considere o triângulo  $ABC$  em  $\mathbb{E}$ . Denotemos por  $a, b$  e  $c$  o comprimento do lado  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente. Seja  $p = a + b + c$  o perímetro do triângulo  $ABC$ . Por simplicidade consideremos os vetores unitários

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a}, \quad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{CA}}{b}, \quad \vec{c} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c}.$$

Observe que  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$  implica

$$a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c} = \vec{0}.$$

A seguir considere as retas

$$\begin{aligned} l_A &= \{A \oplus t(\vec{c} - \vec{b}) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ l_B &= \{B \oplus t(\vec{a} - \vec{c}) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ l_C &= \{C \oplus t(\vec{b} - \vec{a}) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Observe que as retas  $l_A, l_B$  e  $l_C$  são bissetrizes do triângulo  $ABC$  pelo vértice  $A, B$  e  $C$ , respectivamente.

A seguir vamos determinar o ponto de interseção das retas  $l_A$  e  $l_B$ . Seja  $P \in l_A \cap l_B$ , então

$$P = A \oplus t(\vec{c} - \vec{b}) = B \oplus s(\vec{a} - \vec{c})$$

para algum  $t, s \in \mathbb{R}$ . Estas igualdades nos garantem

$$\overrightarrow{AP} = t(\vec{c} - \vec{b}), \overrightarrow{BP} = s(\vec{a} - \vec{c})$$

de onde concluimos que

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BA} = -c\vec{c} = s(\vec{a} - \vec{c}) - t(\vec{c} - \vec{b}) = s\vec{a} + t\vec{b} - (s+t)\vec{c}.$$

como  $-c\vec{c} = a\vec{a} + b\vec{b}$ , podemos escrever

$$s\vec{a} + t\vec{b} = -c\vec{c} + (s+t)\vec{c} = -\left(1 - \frac{(s+t)}{c}\right)c\vec{c} = \left(1 - \frac{(s+t)}{c}\right)(a\vec{a} + b\vec{b}).$$

Tendo em consideração que os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são L.I. concluimos que:

$$(i) \ s = \left(1 - \frac{(s+t)}{c}\right)a \text{ e } (ii) \ t = \left(1 - \frac{(s+t)}{c}\right)b.$$

De (i) e (ii) segue-se que  $\frac{s}{a} = \frac{t}{b}$  que implica em  $t = \frac{bs}{a}$ . Após substituirmos a igualdade  $t = \frac{bs}{a}$  em (i) obteremos que

$$s = \frac{ac}{p} \text{ e } t = \frac{bc}{p}.$$

Assim  $P = A \oplus \left(\frac{bc}{p}\vec{c} - \frac{bc}{p}\vec{b}\right)$ . Por outro lado, pela propriedade universal dos pontos em  $\mathcal{P}$ , sabemos que existe um único ponto  $I \in \mathbb{E}$  tal que

$$I = O \oplus \left(\frac{a}{p}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{p}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{p}\cdot\overrightarrow{OC}\right)$$

para todo  $O \in \mathbb{E}$ , já que  $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = 1$ . Em particular escolhendo  $O = A$ , concluimos que

$$I = A \oplus \left(\frac{b}{p}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{c}{p}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = A \oplus \left(\frac{b}{p}\cdot c\vec{c} - \frac{c}{p}\cdot b\vec{b}\right) = P$$

que é o ponto de interseção de  $l_A$  e  $l_B$ .

De maneira análoga, podemos fazer o mesmo para  $l_A$  e  $l_C$  e encontraremos  $I = l_A \cap l_B \cap l_C$  que é o incentro do triângulo  $ABC$ .

Quanto a última parte do teorema, como a bissetriz é o conjunto dos pontos equidistantes de dois lados do triângulo e  $I \in l_A, l_B, l_C$ , então  $I$  é equidistante aos lados do triângulo. ■

### 3.3 O Circuncentro

**Teorema 13** *As mediatrizes de um triângulo se interceptam em um único ponto  $O$ , denominado Circuncentro, que é equidistante aos vértices desse triângulo.*

**Demonstração:**

Sejam os pontos  $A, B$  e  $C \in \mathcal{P}_{ABC}$  os vértices do triângulo  $ABC$ , os pontos  $M_A, M_B$  e  $M_C$ , respectivamente, os pontos médios dos lados  $BC, AC$  e  $AB$ , denotaremos por  $\mathcal{R}_{M_A}^\perp, \mathcal{R}_{M_B}^\perp$  e  $\mathcal{R}_{M_C}^\perp$  as mediatrizes dos lados  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente, ilustrados na figura 1.5, página 8.

Tomando as Mediatrizes  $\mathcal{R}_{M_C}^\perp$  e  $\mathcal{R}_{M_A}^\perp$ , que, evidentemente são concorrentes, observamos que há um ponto  $X$  tal que  $\mathcal{R}_{M_C}^\perp \cap \mathcal{R}_{M_A}^\perp = \{X\}$ .

Se utilizarmos a proposição 6, da página 41, então podemos tomar no lado  $BC$ , o ponto médio  $M_A$  entre  $A$  e  $B$  e a mediatriz, em relação a  $AB$ ,  $\mathcal{R}_{M_A}^\perp$ . Como  $X \in \mathcal{R}_{M_A}^\perp$ , então

$$X \in \mathcal{R}_{M_A}^\perp \Leftrightarrow \pi(X) = M_A \Leftrightarrow d(X, B) = d(X, C).$$

Podemos concluir, analogamente por permutação de  $A, B$  e  $C$ , que

$$d(X, A) = d(X, B), d(X, A) = d(X, C),$$

ou seja,

$$d(X, A) = d(X, B) = d(X, C).$$

Se  $X$  também pertence a  $\mathcal{R}_{M_B}^\perp$  e  $\mathcal{R}_{M_C}^\perp$ , logo, fazendo  $X = O$ , concluímos que  $O$  é o único ponto de interseção das três mediatrizes de  $ABC$ . ■

### 3.4 O Ortocentro

**Teorema 14** *As alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto  $H$ , denominado Ortocentro.*

**Demonstração:** Sejam  $O \in \mathbb{E}$  o circuncentro do triângulo  $ABC$ , defina o ponto  $H$  por

$$H = O \oplus (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Sejam  $H_A = \pi(A)$ ,  $H_B = \pi(B)$  e  $H_C = \pi(C)$  as projeções ortogonais de  $A$ ,  $B$  e  $C$  sobre  $\mathcal{R}_{BC}$ <sup>2</sup>,  $\mathcal{R}_{AC}$  e  $\mathcal{R}_{AB}$ , respectivamente. Observe que, como ilustra a figura 3.2, os pontos  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$  são os pés das alturas do triângulo  $ABC$ .

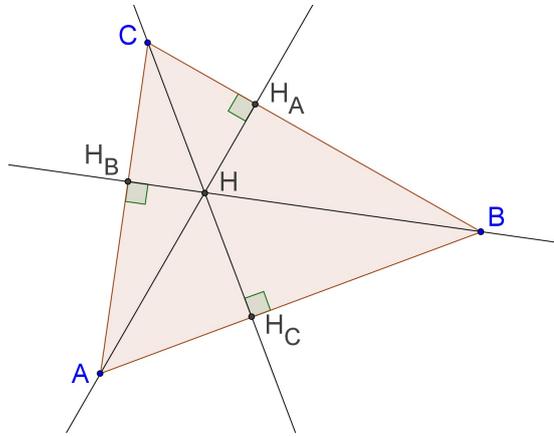


Figura 3.2: Triângulo  $ABC$  com o ortocentro  $H$ .

Tomemos, sem perda de generalidade, o pé de altura  $H_A$  e o vetor que é definido por esse ponto e  $H$ , ou seja  $\overrightarrow{H_A H}$  que pode ser escrito como

$$\overrightarrow{H_A H} = \overrightarrow{H_A A} + \overrightarrow{AH}.$$

Por outro lado, se  $H_A = \pi(A)$ , então  $\overrightarrow{H_A H}$  é ortogonal ao vetor  $\overrightarrow{BC}$ . Se provarmos que  $\overrightarrow{AH}$  também é ortogonal a  $\overrightarrow{BC}$  então  $\overrightarrow{H_A A}$ , que é a diferença entre esses dois vetores, será ortogonal a  $\overrightarrow{BC}$  e, por passar pelo vértice  $A$ , será a altura em relação ao lado  $BC$ .

Partindo da equação

$$H = O \oplus (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

<sup>2</sup>Reta que passa pelos pontos  $B$  e  $C$ .

que também pode ser escrita como

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

logo, podemos fazer

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Agora, para termos  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ , usaremos o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \rangle &= \langle \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} \rangle + \langle \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BO} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} \rangle + \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= -\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \rangle - \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \rangle + \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= -\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \rangle + \langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= -d^2(O, B) + d^2(O, C) = 0. \end{aligned}$$

Como  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ , podemos concluir que o vetor  $\overrightarrow{H_A H}$  também é ortogonal ao vetor  $\overrightarrow{BC}$ , logo

$$\pi(H) = H_A.$$

Se permutarmos os vertices do triângulo  $ABC$ , concluiremos que  $\pi(H) = H_B$  e  $\pi(H) = H_C$ , ou seja,  $H$  pertence as três alturas do triângulo  $ABC$ . ■

### 3.5 A Reta de Euler

**Teorema 15** *O baricentro  $G$ , o Circuncentro  $O$  e o Ortocentro  $H$ , de um triângulo são colineares.*

**Demonstração:** deixando o caso trivial de  $G = O$ , de lado, já que nesse caso,  $G = O$  é colinear com  $H$ , admita  $G \neq O$ , logo  $\overrightarrow{OG}$  é um vetor não nulo em  $\mathbb{V}$ .

Partindo da equação do baricentro, temos

$$G = O \oplus \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

ou, equivalentemente,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

mas, utilizando a equação

$$H = O \oplus (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

que também pode ser escrita como

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

logo, podemos reescrever a equação anterior como

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$$

que implica

$$\vec{OH} = 3\vec{OG}.$$

Agora, com muita simplicidade, podemos provar que  $O$ ,  $G$  e  $H$  são colineares:

- $O = O \oplus 0\vec{OG}$
- $G = O \oplus \vec{OG}$
- $H = O \oplus \vec{OH} = O \oplus 3\vec{OG}$

Podemos concluir então que o vetor  $\vec{OG}$  transporta o ponto  $O$  para os pontos  $O$ ,  $G$  e  $H$ , ou seja, todos esses pontos notáveis pertencem à reta  $\mathcal{R}_{O,\vec{OG}}$  conforme ilustramos na figura 3.3. ■

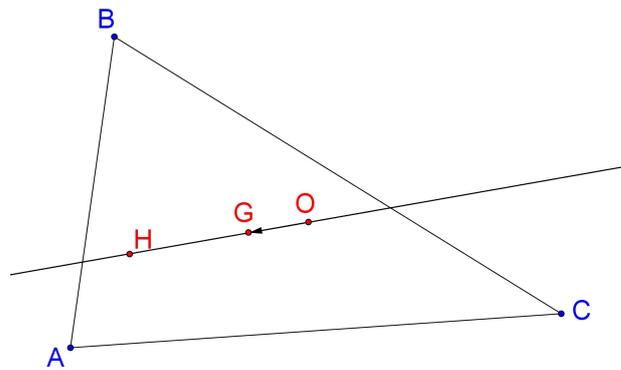


Figura 3.3: Triângulo  $ABC$  com os pontos  $O$ ,  $G$  e  $H$  e a reta de Euler

## 3.6 A Circunferência dos Nove Pontos

Para definir a circunferência dos nove pontos, primeiramente, iremos definir os três pontos de Euler a seguir.

### 3.6.1 Os Pontos de Euler

Os pontos chamados *Pontos de Euler* são os pontos médios entre o ortocentro  $H$  e cada vértice do triângulo  $ABC$ . Denotaremos por  $E_A$  o ponto de Euler referente ao vértice  $A$  e por raciocínio análogo, os outros dois pontos  $E_B$  e  $E_C$ , conforme a figura 3.4.

Utilizando a equação do ponto médio entre dois pontos, podemos definir uma equação do ponto de Euler  $E_A$ , que é o ponto médio entre o ortocentro  $H$  e o vértice  $A$  do triângulo  $ABC$ , como sendo

$$E_A = A \oplus \frac{1}{2} \overrightarrow{AH}.$$

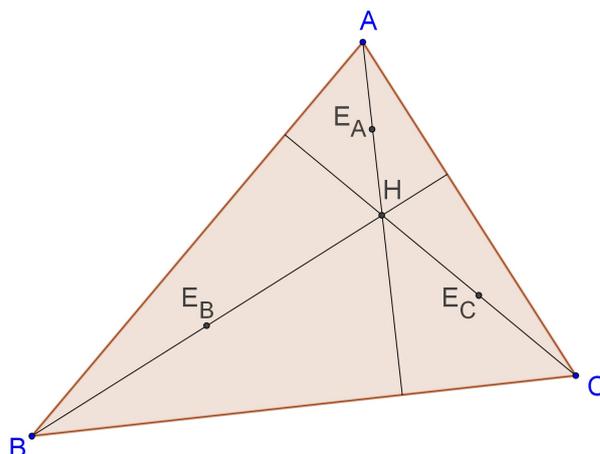


Figura 3.4: Triângulo  $ABC$  com os pontos  $E_A, E_B$ , e  $E_C$ , denominados pontos de Euler.

### 3.6.2 Circunferência

Até aqui, já definimos a reta, o plano e um triângulo. A seguir, definiremos uma circunferência em  $\mathbb{E}$ .

**Definição 16** *Dados um ponto  $P_0 \in \mathbb{E}$  e  $r$  um número real positivo, a circunferência em  $\mathbb{E}$  de centro em  $P_0$  e raio  $r$ , denotada por  $\mathcal{C}(P_0, r)$  é definida por*

$$\mathcal{C}(P_0, r) = \{Q \in \mathbb{E} \mid d(Q, P_0) = r\}.$$

### 3.6.3 A circunferência dos nove pontos

Seja  $N \in \mathbb{E}$  ponto médio entre o circuncentro  $O$  e o ortocentro  $H$ , ou seja, pela equação do ponto médio podemos fazer

$$N = O \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

e  $r$  a metade da distância entre  $O$  e cada vértice do triângulo  $ABC$  em  $\mathbb{E}$ , ou seja

$$r = \frac{1}{2}d(O, A) = \frac{1}{2}d(O, B) = \frac{1}{2}d(O, C).$$

A representação do ponto  $N$  na reta de Euler está ilustrados na figura 3.5.

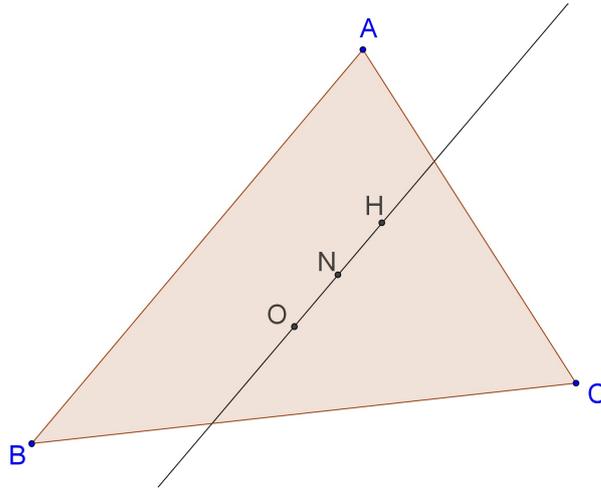


Figura 3.5: Reta de Euler com Ortocentro  $H$ , Circuncentro  $O$  e o ponto médio  $N$  entre os pontos  $O$  e  $H$ .

**Teorema 17** *Seja o triângulo  $ABC \in \mathbb{E}$ , os pontos  $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, E_A, E_B$  e  $E_C$  pertencem à circunferência  $\mathcal{C}(N, r)$  de centro em  $P_0$  e raio  $r$ , denominada circunferência de Nove pontos.*

Demonstraremos esse teorema dividindo os nove pontos em três grupos de três pontos:

- O grupo dos pontos médios  $M_A, M_B, M_C$ , dos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente;
- O grupo dos pontos de Euler  $E_A, E_B, E_C$ , ponto médio do segmento determinado pelo ortocentro  $H$  e pelos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente;
- O grupo dos pés da altura  $H_A, H_B, H_C$ , respectivamente, pelos vértices  $A, B$  e  $C$ ;

Para mostrar que os pontos dos dois primeiros grupos pertencem à circunferência dos nove pontos utilizaremos a propriedade universal dos pontos em  $\mathcal{P}$  (Proposição 4), na página 33. Para mostrar que os pontos do último grupo pertencem à  $\mathcal{C}(N, r)$ , utilizaremos, basicamente, a noção de projeção ortogonal afim, sobretudo a equação do ponto médio, na subseção 2.3.3, página 34 e a proposição 6, página 41.

### Os pontos médios do triângulo $ABC$ pertencem à circunferência de nove pontos

De acordo com a equação

$$N = O \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OH},$$

e temos a equação

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Assim podemos escrever

$$N = O \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Da equação do ponto médio, vem que

$$M_A = O \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

logo,

$$\begin{aligned} N &= O \oplus \frac{1}{2}[\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})] \\ &= [O \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})] \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\ &= M_A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

Ou equivalentemente,

$$\overrightarrow{M_A N} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O A}$$

que implica

$$d(M_A, N) = \frac{1}{2} d(O, A) = r.$$

donde concluímos que  $M_A \in \mathcal{C}(N, r)$ .

Se usarmos raciocínio análogo, permutando os pontos  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$ , chegaremos à conclusão que essa demonstração também serve para mostrar que  $M_B$  e  $M_C$  pertencem à circunferência dos nove pontos como ilustra a figura 3.6.

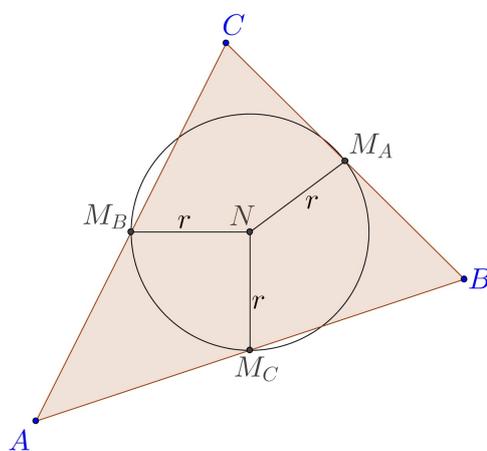


Figura 3.6: Pontos médios  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$  do triângulo  $ABC$  pertencentes à circunferência  $\mathcal{C}(N, r)$ .

### Os pontos de Euler pertencem à circunferência dos nove pontos

Voltando a usar a equação do ponto médio, já que  $N$  divide o segmento  $OH$  em segmentos congruentes, logo a equação

$$N = O \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OH}),$$

Em que  $O$  é um ponto qualquer de  $\mathbb{E}$ . Em particular, tomando  $O = A$  temos

$$N = A \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AH}),$$

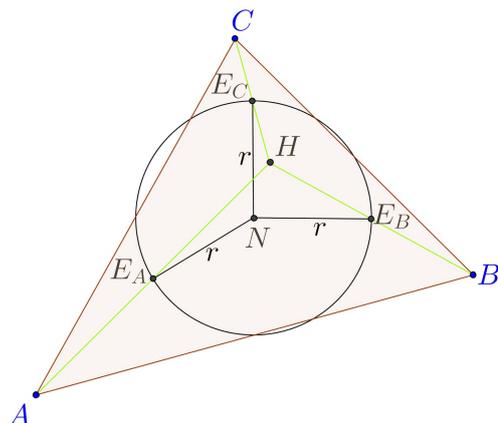


Figura 3.7: Pontos de Euler  $E_A$ ,  $E_B$  e  $E_C$  do triângulo  $ABC$  pertencentes à circunferência  $\mathcal{C}(N, r)$ .

que também pode ser escrita como

$$N = A \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AO}) \Leftrightarrow N = (A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}) \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}.$$

Observe que, segundo a equação dos pontos de Euler,

$$E_A = A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$

que pode ser substituída na equação anterior, chegando à expressão

$$\begin{aligned} N &= E_A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \\ \Rightarrow \overrightarrow{E_A N} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \\ \Rightarrow d(E_A, N) &= \frac{1}{2}d(A, O) = r \end{aligned}$$

donde concluímos que  $E_A \in \mathcal{C}(N, r)$ . Da mesma forma que fizemos com os pontos médios, podemos também, com raciocínio análogo por permutação dos pontos de Euler  $E_A, E_B$  e  $E_C$ , concluirmos que  $E_B$  e  $E_C$  também pertencem à circunferência dos nove pontos conforme ilustra a figura 3.7.

### Os pés das alturas de um triângulo pertencem à circunferência dos nove pontos

Chamaremos de  $\pi$  a função que associa um ponto  $P \in \mathbb{E}$  à sua projeção ortogonal afim  $\pi(P) \in \mathbb{E}$  no lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ .

Da definição de ortocentro na seção 3.4, página 51, vem que as projeções ortogonais afins do ponto  $H$  nas retas  $\mathcal{R}_{B,C}$ ,  $\mathcal{R}_{A,C}$  e  $\mathcal{R}_{A,B}$  são, respectivamente  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$ , ou seja

$$\pi(H) = H_A.$$

da mesma forma, da definição de circuncentro na seção 3.3, página 49, também podemos observar que a projeção ortogonal afim do ponto  $O$  nas retas  $\mathcal{R}_{B,C}$ ,  $\mathcal{R}_{A,C}$  e  $\mathcal{R}_{A,B}$  são, respectivamente  $M_A$ ,  $M_B$  e  $M_C$ , ou seja,

$$\pi(O) = M_A.$$

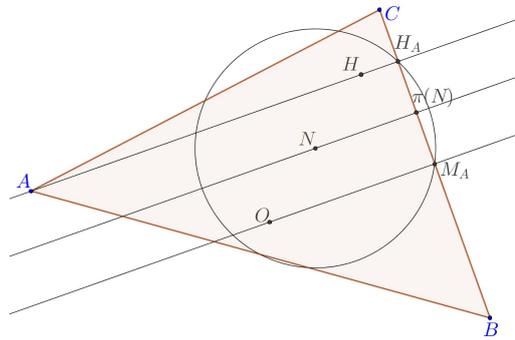


Figura 3.8: projeções ortogonais afins dos pontos  $H$ ,  $N$  e  $O$  na reta  $\mathcal{R}_{B,C}$ .

Na figura 3.8 ilustramos as projeções  $\pi(H)$ ,  $\pi(N)$  e  $\pi(O)$  onde deduzimos que as retas  $\mathcal{R}_{H,H_A}$ ,  $\mathcal{R}_{N,\pi(N)}$  e  $\mathcal{R}_{O,M_A}$  são paralelas. Logo, da equação do ponto médio vem que, se  $N$  é ponto médio entre  $H$  e  $O$ , então  $\pi(N)$  é ponto médio entre  $\pi(H) = H_A$  e  $\pi(O) = M_A$ .

Agora, da proposição 6, vem que, fazendo  $P = \pi(N)$ ,  $Q_1 = H_A$  e  $Q_2 = M_A$ , concluímos que

$$N \in \mathcal{R}_{N,\pi(N)} \Leftrightarrow \pi(N) = H_A \oplus \frac{1}{2} \overrightarrow{H_A M_A} \Leftrightarrow d(N, H_A) = d(N, M_A) = r$$

provando que  $H_A \in \mathcal{C}(N, r)$ .

É óbvio que, como fizemos com os pontos médio e os pés das alturas, se usarmos um raciocínio análogo permutando os pontos  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$ , chegaremos à conclusão que  $H_B$  e  $H_C$  também pertencem à circunferência dos nove pontos.

### 3.6.4 Considerações Finais

A circunferência dos nove pontos está representada graficamente na figura 3.10. A seguir, faremos algumas considerações que julgamos importantes:

1. Os pontos  $M_A$ ,  $E_A$  e  $N$  são colineares.

De fato, das equações

- $\overrightarrow{M_A N} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O A}$ ,
- $\overrightarrow{E_A N} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A O}$ ,

já demonstradas, podemos fazer

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_A N} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{O A} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{A O} \\ &= -\overrightarrow{E_A N} \end{aligned}$$

e concluímos que  $\overrightarrow{M_A N}$  e  $\overrightarrow{E_A N}$  são linearmente dependentes, logo,  $M_A$ ,  $E_A$  e  $N$  pertencem à mesma reta que pode ser escrita como  $\mathcal{P}(N, \overrightarrow{A O})$ , como ilustra a figura 3.9.

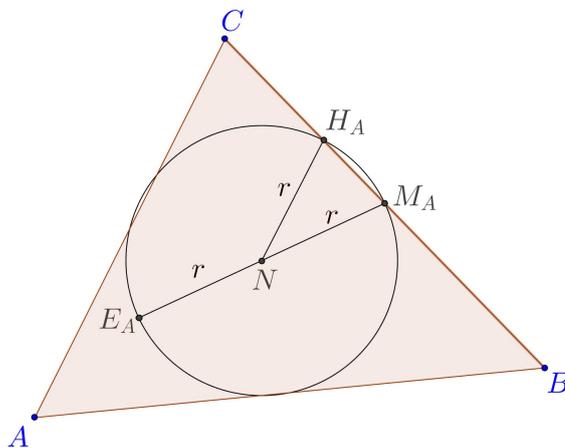


Figura 3.9: Alinhamento de  $E_A$ ,  $N$  e  $M_A$ .

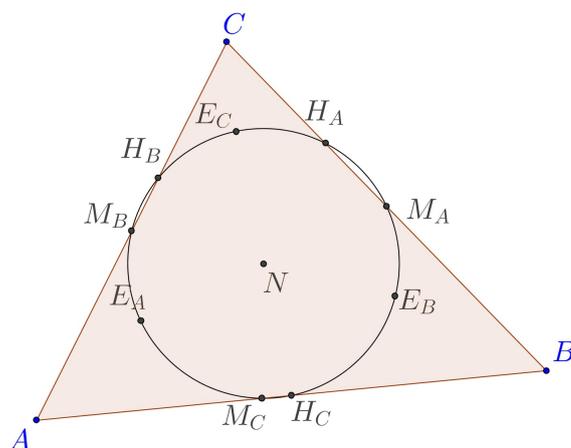


Figura 3.10: Circunferência dos nove pontos

2. A distância entre os pontos  $M_A$  e  $E_A$  equivalem ao diâmetro da circunferência dos nove pontos.

De fato, considerando que

- $d(M_A, N) = d(N, E_A) = r$ ;
- $N$  é um ponto entre  $M_A$  e  $E_A$ <sup>3</sup>
- O diâmetro  $D$  é o segmento que mede  $2r$ .

Podemos concluir, em especial, que  $d(M_A, E_A)$  é o diâmetro da circunferência de centro em  $N$  e raio  $r$ .

3. Várias outras propriedades dos pontos notáveis do triângulo podem ser demonstradas pelos mesmos métodos algébricos apresentados nesse trabalho, como, por exemplo,  $G$  divide  $OH$  na proporção  $GH = 2OG$ .
4. Ao concluirmos o trabalho, sugerimos que essa pesquisa possa prosseguir na procura de demonstrações de outros elementos da geometria, sobretudo a cônica dos nove pontos que nos pareceu belíssima e um ótimo objeto de estudo.

---

<sup>3</sup> $N$  está entre  $M_A$  e  $E_A$ , pois,  $M_A \in BC$  e  $E_A$  está entre  $H$  e  $A$ , vértice oposto ao lado  $BC$ ;

# Referências Bibliográficas

- [1] Anton. H., *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre: Bookmam, (2001).
- [2] Baumgart, J. K., *Tópicos da História da Matemática Para Uso em Sala de Aula*. São Paulo: Atual, (1992).
- [3] Berlinghoff, W. P., *A Matemática Através dos Tempos: Um Guia Fácil e Prático Para Professores e Entusiastas*, 2ed. São Paulo: Blucher, (2010).
- [4] Bernardino, L. M. F., *Temas Escolhidos de Geometria do triângulo*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, Faro, Pt, (2008).
- [5] Boldrini, J. L., *Álgebra Linear*, 3 ed., São paulo: Harper & Row do Brasil, pp.219-252, (1980)
- [6] Boyer, C. B. *História da Matemática*. 2ed. São Paulo: Blucher, (1996).
- [7] Brianchon, C., Poncelet, J. *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données*. Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 pp.205 - 220, (1820-1821).
- [8] Carneiro, E., Girão, F., *Centro de Massa e Aplicações à Geometria Eureka*, São Paulo: SBM, 21, pp 29-37, (2005).
- [9] Contador, P. R. M., *Matemática: Uma Breve História*, São Paulo: Editora Livraria da Física, (2006).
- [10] Dalcín, M., Hellmeister, A. C., *A vingança do Incentro*, Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, 46, pp 6-12, (2001).
- [11] De Villiers, M., *A generalization of the Nine-point circle and Euler line*, Pythagoras, 62, pp. 31-35, (2005).
- [12] Dolce, O. *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria.*, Vol. 09, São Paulo: Atual, pp. 90, (1997).

- [13] Eves, H., *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues - Campinas, SP: Editora da Unicamp, (2004).
- [14] Geolge, Z.L. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática v.3, pp 33, (1983).
- [15] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, (2003)
- [16] Hogben, L., *Maravilhas da Matemática, Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos*, 2ed., Porto Alegre, RG: Editora Globo, pp. 45-52 (1958)
- [17] Maxwell E. A., *Some Properties of the Nine-Points Circle*. The Mathematical Gazette, 31 No 297, pp. 266-269, (1947).
- [18] Morgado, A. C., *Coordenadas para os centros do triângulo*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, 43, pp 26-30, (2000).
- [19] Ramaswami Aiyar, M. A. V., *A General Theorem on the Nine-Points Circle*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 15, pp 74-75, (1896).
- [20] Rojas, J., Mendoza, R., *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos*, Matemática Universitária, 48 e 49, pp 76-85, (2010).
- [21] Pinheiro, P. R., *O Círculo dos Nove Pontos*, Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, 14, pp 49 - 52, (1989).
- [22] Pitombeira, J. B., Roque, T., *Tópicos de História da Matemática*, Coleção Profmat, Rio De Janeiro: SBM, (2012).
- [23] Poole, D., *Álgebra Linear*, São Paulo: Cengage Learning, pp 03, (2011)
- [24] Profmat, *Geometria Analítica*, Apostila do curso Profmat, São Paulo: SBM, cap.2, pp 08 - 12, (2012).
- [25] Profmat, *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*, Apostila do curso Profmat, São Paulo: SBM, cap.2, pp 67 - 125, (2012).
- [26] Russell, J. W., *Pure Geometry*, Oxford: Oxford University Press, pp. 210-214, (1893).
- [27] Steinbruch, A., Winterle, P., *Álgebra Linear*, 2 ed., São Paulo: Pearson Makron Books, pp. 106-150, (1987)
- [28] Winterle, P., *Vetores e Geometria Analítica*, São Paulo: Pearson, cap.2, pp 52, (2000).