



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Curiosidades da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan: investigações inusitadas

Veronil Fernandes de Souza dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá/MT

Fevereiro/2021

Curiosidades da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan: investigações inusitadas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Veronil Fernandes de Souza dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 25 de fevereiro de 2021.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237c Santos, Veronil Fernandes de Souza dos.
Curiosidades da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan: investigações inusitadas / Veronil Fernandes de Souza dos Santos. -- 2021
xii, 65 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Recorrências. 2. Geometria. 3. Espiral. 4. Novidades. 5. Áreas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: Curiosidades da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan: investigações inusitadas

Autor: mestrando Veronil Fernandes de Souza dos Santos

Dissertação defendida e aprovada em 25 de fevereiro de 2021.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Aldi Nestor de Souza** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutor Reinaldo de Marchi** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares** (Membro Externo)

Instituição: Unemat - campus Barra do Bugres

Cuiabá, 25/02/2021.



Documento assinado eletronicamente por **ALDI NESTOR DE SOUZA, Usuário Externo**, em 25/02/2021, às 14:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Reinaldo de Marchi, Usuário Externo**, em 25/02/2021, às 14:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Junior Cesar Alves Soares, Usuário Externo**, em 25/02/2021, às 14:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3277040** e o código CRC **46968D80**.

*Aos meus pais e ao meu companheiro
de longa data, Fabio Sagin.*

Agradecimentos

Não é difícil se lembrar das pessoas as quais fizeram tudo na minha vida valer a pena. Um agradecimento é pouco perante a todo apoio e boas energias que recebi durante o curso desta etapa. Algumas pessoas chegaram, fizeram a diferença e se foram. Outras já estavam e seguraram minhas mãos até o fim. Agradeço a todos que foram peças fundamentais durante este percurso. Sou grato aos professores do Profmat da UFMT de Cuiabá e à coordenação do programa pela paciência e atenção dedicada. Agradeço ao meu professor e orientador Dr. Aldi Nestor de Souza e em especial os professores Dr. Reinaldo de Marchi e Dr. Hector Flores que foram peças fundamentais na construção das ideias e na troca de conhecimentos que enriqueceram ainda mais este trabalho.

Aos colegas de turma meu muito obrigado pelas trocas de ideias e pelas contribuições no decorrer desta caminhada, compartilhando seus prazeres e suas dores de ser professor. Agradeço aos amigos pessoais aos quais me deram forças e amparo quando precisei desabafar e refletir. Quando precisei estudar, seja para alguma prova, algum seminário e até mesmo para a qualificação, tive que contar com a compreensão dos amigos em não me ter por perto nas suas rodas de conversas tomando algo, rindo e se divertindo.

Ao meu companheiro Fabio Castanho Sagin, minha gratidão não se resume em algumas linhas ou parágrafos. Talvez eu precisaria de uma dissertação para poder agradecer-lo por todos os minutos, horas, dias, meses e anos de apoio, compreensão, paciência e empatia. Cursar o Profmat sendo ou estando professor na educação básica não é uma tarefa fácil, temos que ir além, mas tudo ficou menos doloroso porque tive apoio de pessoas maravilhosas na minha vida. Muito obrigado a todos.

“A percepção do desconhecido é a mais fascinante das experiências. O homem que não tem os olhos abertos para o misterioso passará pela vida sem ver nada.”

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho serão apresentados fatos curiosos envolvendo as sequências numéricas de Fibonacci e de Padovan, as quais são definidas recursivamente. Inicia-se com uma definição de sequência já fazendo um resgate histórico das sequências numéricas de Fibonacci e Padovan e apresentando algumas de suas aplicações e curiosidades, sem deixar de fazer uma contextualização histórica da vida dos criadores destas sequências. Além disso, serão definidas algumas propriedades de recorrências lineares de 1ª, 2ª, 3ª e de qualquer ordem. Serão afirmadas e discutidas duas descobertas algébricas; uma primeira envolvendo as áreas de um quarto de círculos presentes na espiral formada pela sequência de Fibonacci e a outra será envolvendo as áreas dos triângulos equiláteros que compõem a espiral da sequência de Padovan. Serão abordados os direcionamentos para a educação básica envolvendo sequências numéricas recursivas ou não recursivas por etapas e também será comentado sobre como é feita a abordagem destas sequências na educação básica.

Palavras-chave: Recorrências, geometria, espiral, novidades, áreas.

Abstract

In this master's thesis will be presented curious facts about numeric sequences of Fibonacci and Padovan, which are recursively. Starts with an sequence definition's making a historical rescue of Fibonacci number's and Padovan number's presenting many of yours applications and curiosities, also doing an historical contextualization of creators life's of this sequences. Also, will be defined some proprieties of linear recurrences by 1st, 2nd, 3rd and any order. Will be affirmed and discussed two algebraic discoveries; first involving of areas a quarter of a circle found in the spiral created by Fibonacci numbers and a another about a equilateral triangles areas found in a spiral created by Padovan numbers. Will be approach which are directions for basic education about recursive numbers sequences or no recursives and there will be comment about how it is approached in the basic education.

Keywords: Recurrences, geometry, spiral, news, areas.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xi
Lista de tabelas	xii
Introdução	1
1 Um breve histórico sobre as sequências numéricas de Fibonacci e de Padovan	4
1.1 Sequências numéricas	4
1.2 Sequência de Fibonacci e suas aplicações	5
1.3 Sequência de Padovan e suas aplicações	12
1.4 Leonardo Fibonacci	15
1.5 Richard Padovan	19
2 As relações de recorrência	22
2.1 Introdução	22
2.2 Recorrências lineares	24
2.3 Recorrências lineares de 1ª ordem	24
2.4 Recorrências lineares de 2ª ordem	26
2.5 Recorrências lineares de 3ª ordem	28
2.6 Recorrências lineares de qualquer ordem	30

3	A geometria da sequência de Fibonacci	32
3.1	A relação de recorrência da sequência de Fibonacci	33
3.2	A espiral da sequência de Fibonacci e os quartos de círculos	34
3.3	Uma relação de recorrência formada pelas áreas de um quarto de círculos .	35
3.4	Determinação da solução da recorrência formada pelas áreas de um quarto de círculos	38
4	A geometria da sequência de Padovan	41
4.1	A relação de recorrência da sequência de Padovan	41
4.2	A espiral da sequência de Padovan e os triângulos equiláteros	43
4.3	Uma relação de recorrência formada pelas áreas dos triângulos equiláteros .	47
5	As relações de recorrência no ensino básico	52
5.1	Sequências numéricas no Ensino Fundamental	53
5.2	Sequências numéricas no Ensino Médio	56
5.3	Sequências de Fibonacci e de Padovan na educação básica	58
5.3.1	Atividade 1: Construindo a espiral da sequência de Fibonacci . . .	59
5.3.2	Atividade 2: Construindo a espiral de Padovan	60
	Considerações finais	61
	Referências bibliográficas	65

Lista de Figuras

1.1	Flores e Fibonacci.	7
1.2	Folhas de um galho (Fibonacci).	7
1.3	Projeções e retrações de Fibonacci.	9
1.4	Fibonacci e as teclas de um piano.	10
1.5	Gravura de Phideas.	11
1.6	A Razão áurea na estética do sorriso.	11
1.7	Dez primeiros intervalos de Padovan construídos no dó central.	12
1.8	Interior da basílica cristã de abadia.	13
1.9	Tipos de tamanhos dentro de uma ordem de tamanho.	14
1.10	Leonardo Fibonacci.	15
1.11	Capítulos de <i>Liber Abaci</i>	16
1.12	Estátua de Fibonacci.	18
1.13	Richard Padovan - Dom Hans van der Laan: Modern Primitive - 1994.	19
1.14	Proportion: Science, Philosophy, Architecture.	20
1.15	Towards Universality: Le Corbusier, Mies e De Stijl (2002).	20
3.1	Espiral da sequência de Fibonacci - Número de ouro.	32
3.2	Espiral da sequência de Fibonacci.	34
3.3	Um quarto de círculos presentes na espiral da sequência de Fibonacci.	35
4.1	Construção da espiral da sequência de Padovan.	43
4.2	Espiral da sequência de Padovan.	44
4.3	Triângulos equiláteros na espiral da sequência de Padovan.	47
4.4	Triângulos equiláteros.	48

Lista de Tabelas

1.1	Crescimento da população de coelhos.	6
1.2	Sequência de percentuais - Fibonacci.	8
1.3	Relação de convergência entre os vizinhos da sequência de Fibonacci. . . .	10
4.1	Relação de convergência entre os vizinhos da sequência de Padovan.	44

Introdução

“Se eu consegui ver mais longe, foi apenas porque eu estava sobre ombros de gigantes.”

(Sir Isaac Newton (1643-1727))

A beleza e a relevância da matemática no cotidiano nos surpreendem sempre quando são evidenciadas. Desde os primórdios, podemos ver o quanto alguns processos e métodos dependem dessa ciência e ficamos mais convencidos de sua importância, toda vez que são apresentadas tais demonstrações. É perceptível que o ser humano precisa de bases sólidas para sua autocompreensão e principalmente para sua evolução. Existem diversas aplicações interessantes de elementos matemáticos no dia-a-dia. Neste trabalho, usaremos a sequência de Fibonacci e a sequência de Padovan para comentarmos algumas de suas aplicações e curiosidades.

Destinamos este trabalho, em especial, aos acadêmicos do curso de matemática, os quais estão voltados para o estudo e investigação científica, bem como à compreensão das normativas educacionais com o objetivo de sempre melhorar a prática docente em sala de aula. É fato que no ensino da matemática é necessário, cada vez mais, fazer a ligação entre a teoria e a prática, e mais importante ainda, é que o futuro profissional da educação esteja a par das normas e diretrizes que visam melhorar seus processos.

Um dos diversos assuntos relevantes dentro da matemática, são as sequências numéricas, as quais possuem aplicações em diversos fenômenos e na vida. As sequências numéricas que possuem regularidades serão comentadas neste trabalho, principalmente as recursivas, ou seja, aquelas em que os termos sucessores dependem dos termos anteriores, além de serem pré-definidos alguns elementos iniciais. Durante o curso Profmat a sequência de Fibonacci foi muito estudada e a encontramos em diversas seções dos livros do programa. As disciplinas Matemática Discreta e Aritmética, por exemplo, abordaram diversas vezes essa sequência dentro das relações de recorrência.

E quando se fala em relação de recorrência a sequência de Fibonacci sempre é uma referência nesse quesito. Há trabalhos interessantes sobre esta sequência como o de Almeida (2016), Melo (2017), Silva (2019b), entre diversos outros. Já a sequência de Padovan, esta não citada nas aulas do Profmat, e pouco comentada e conhecida, possui uma semelhança muito interessante com a sequência de Fibonacci. Poucos trabalhos se referem à esta sequência, mas alguns muito incitantes, como por exemplo os trabalhos de Aquino (2019), Marohnić e Strmečki (2012) e Vieira (2019).

As sequências de Fibonacci e de Padovan possuem características em comum que vão além da recursividade, outros elementos importantes trazem notoriedade às suas similaridades, como por exemplo, as espirais formadas por elas. Sabemos que reconhecer o formato espiral em diversos elementos da natureza sempre foi um fascínio, a encontramos por exemplo, numa concha do mar, no formato de algumas flores e até na formação de um furacão. A sequência de Padovan tem uma representação geométrica muito similar à espiral da sequência de Fibonacci. Uma espiral muito bela, formada por arcos que circunscrevem triângulos equiláteros, sendo estes com lados medindo os números da sequência de Padovan. E os números desta sequência são definidos por uma interessante relação de recorrência, também similar à relação recursiva de Fibonacci. Por outro lado, tanto a sequência de Padovan quanto a sequência de Fibonacci, possuem suas constantes reais, sendo φ e ψ respectivamente, e de acordo com Aquino (2019), “ambos são os únicos números que satisfazem certas propriedades interessantes, os quais levam a serem definidos como números mórficos¹”.

É fato que essas duas sequências numéricas definidas por relação de recorrência em que ambas tem uma representação geométrica muito parecida, deva ter muito mais coisas em comum. Basta observar alguns detalhes destas sequências que fica fácil ver as características em comum. De acordo com Aquino (2019), as sequências numéricas são objetos de estudo da matemática desde antiguidade. A aparição constante de padrões numéricos na natureza, na arte e na arquitetura sempre encantou grandes estudiosos e os motivou a descobrir propriedades que os relacionasse ainda mais com o cotidiano. Fatos curiosos podem surgir da sequência de Fibonacci, apesar de tão conhecida e explorada, acreditamos que é possível existir muitos mistérios a serem desvendados. Em Koshy (2018), podemos encontrar um estudo aprofundado sobre a sequência de Fibonacci em que

¹Quando existem números naturais b e c tais que: $a + 1 = a^b$ e $a - 1 = a^{-c}$, então o número real $a > 1$ é chamado número mórfico.

são apresentadas diversas aplicações além de um importante resgate histórico detalhado desta sequências e suas influências.

Apresentaremos um trabalho voltado a evidenciar estas sequências numéricas (Fibonacci e Padovan), e algumas curiosidades e investigações serão enunciadas no decorrer dos capítulos. No Capítulo 1 faremos um resgate histórico sobre essas sequências, bem como algumas particularidades. Neste mesmo capítulo, ainda apresentamos um detalhamento histórico da vida e obra de Leonardo Fibonacci e de Richard Padovan, ambos criadores das tais sequências.

No Capítulo 2 elencaremos as definições de relações de recorrência as quais são definidas as recorrências lineares de 1^a , 2^a , 3^a e de qualquer ordem, em que enunciaremos as principais definições e teoremas com alguns exemplos resolvidos, baseados em Morgado e Pinto (2015), Pereira (2014) e Domingues e Motta Jr (2005).

No Capítulo 3, investigaremos um pouco da geometria envolvida na sequência de Fibonacci, ou seja, mostraremos que uma sequência numérica real surge ao se calcular as áreas dos infinitos um quarto de círculos presentes na espiral criada com essa sequência e definiremos uma fórmula geral para esta sequência.

No Capítulo 4 exploraremos um pouco da sequência de Padovan e sua representação geométrica, em que será apresentada uma outra curiosidade, na qual essa é baseada nas as áreas dos triângulos equiláteros que compõem a espiral da sequência, e mostraremos que é possível extrair uma relação recursiva envolvendo tais áreas.

Por fim, no Capítulo 5 comentaremos sobre o ensino de sequências numéricas na educação básica e como funciona a organização curricular de acordo com Brasil - MEC (2018), com vistas a atender uma certa carência na formação do professor no tocante às diretrizes nacionais, e com isso, entender a importância de dedicar este capítulo a falar da BNCC e as suas manifestações relativas ao tema sequências e recorrências, como um suporte para os professores que estão dando aula ou virão a dar aula em breve. Além disso, comentaremos como as sequências de Fibonacci e de Padovan são e podem ser trabalhadas na educação básica e sugerimos algumas atividades relativas a estas sequências.

Capítulo 1

Um breve histórico sobre as sequências numéricas de Fibonacci e de Padovan

Este capítulo destinamos a fazer um breve comentário sobre as sequências numéricas de Fibonacci e de Padovan, mostrando também algumas de suas aplicações. Além disso faremos uma breve apresentação histórica da vida e obra de Leonardo Fibonacci e Richard Padovan, criadores destas duas sequências.

1.1 Sequências numéricas

Desde muito tempo, as sequências numéricas tem sido objeto de estudo por diversos pesquisadores pelo mundo todo. Além disso, as sequências (padrões e regularidades) são bastante úteis para o estudante na sua vida, no seu cotidiano e para prosseguimento de seus estudos. Os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da matemática. Em nosso dia-a-dia é frequente encontrarmos conjuntos cujos elementos estão dispostos numa certa ordem, segundo (Silva, 2019a).

Definição 1 *Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. O valor $a(n)$ é denominado n -ésimo termo da sequência. E a notação usada para definir uma sequência, geralmente é dada por $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ou ainda, $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$.*

De acordo com Martins (2013), em uma sequência, o primeiro elemento pode ser indicado por a_1 , o segundo elemento por a_2 e assim sucessivamente. Conseqüentemente,

o n -ésimo elemento da sequência, que é o seu termo geral, é indicado por a_n . Uma sequência é representada dispondo todos os seus elementos entre parênteses e separando-os com vírgula ou ponto-e-vírgula. Comumente, se denota uma sequência por (a_n) , o que facilita sua representação. E ainda, uma sequência pode ser classificada em relação à sua quantidade de termos. Dizemos que uma sequência é finita se ela possui uma quantidade finita de termos e assim, para algum n natural, a sequência tem a forma (a_1, a_2, \dots, a_n) ; e dizemos que a sequência é infinita se ela possui uma quantidade indefinida de termos e então a mesma assume a forma $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Existem diversas sequências numéricas, e as sequências numéricas em que seus termos obedecem a um padrão característico, são sequências de muito interesse na matemática, especificamente, as sequências formadas recursivamente, que serão tratadas neste trabalho. Para Aquino (2019), “as sequências estão presentes na natureza e ligadas ao nosso cotidiano de diferentes formas”. Nas seções a seguir serão apresentadas as sequências de Fibonacci e de Padovan e suas respectivas aplicações.

1.2 Sequência de Fibonacci e suas aplicações

Uma importante sequência numérica é a sequência de Fibonacci. Essa sequência que recebeu o nome do matemático italiano Leonardo Fibonacci, surgiu de um problema sobre o crescimento da população de coelhos em 1202. Essa sequência numérica, ainda que muito simples, é considerada uma das sequências mais famosas da Matemática e “foi apropriadamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891)” (Lívio, 2009).

A sequência de números $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ que era a solução do problema que envolvia o crescimento da população de coelhos, tornou-se amplamente conhecida no mundo nos anos de 1200. No livro publicado em 1202, intitulado *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), explicava as principais contribuições para a álgebra tornando-se pioneiro na época. Neste livro continha muitos problemas elementares, incluindo o famoso problema de reprodução de coelhos, citado anteriormente, que dizia:

Suponha que haja dois coelhos recém-nascidos, um macho e outra fêmea. Encontre o número de coelhos produzidos em um ano se, cada par leva um mês para amadurecer, cada par produz um par misto todos os meses começando com o segundo mês e considerando que os coelhos são imortais (Koshy, 2018, ver pg. 5).

E a solução deste problema, desencadeou uma série de elementos curiosos. Primeiro que para esse problema, suponha, por conveniência que o par de coelhos original tenha nascido em 1^o de janeiro. Eles levam um mês para amadurecer, então ainda há apenas um par em 1^o de fevereiro. Em 1^o de março, eles têm dois meses de idade e produzem um novo par misto, um total de dois pares. Continuando assim, haverá três pares em 1^o de abril, cinco pares em 1^o de maio e assim por diante, como está esquematizado na Tabela 1.1:

Tabela 1.1: Crescimento da população de coelhos.

N ^o de pares	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago
Adultos	0	1	1	2	3	5	8	13
Filhotes	1	0	1	1	2	3	5	8
Total	1	1	2	3	5	8	13	21

Fonte: Koshy (2018).

Os números na última linha são chamados de números de Fibonacci e daí surgiu a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Essa sequência, apesar de parecer simples, possui diversas aplicações e é encontrada em muitos fenômenos naturais. Como por exemplo, a quantidade de pétalas em algumas flores, geralmente é um número de Fibonacci. O número de pétalas na flor dímara são duas, íris e trílio três, rosa selvagem cinco e cosmos oito, conforme mostra a Figura 1.1, além disso, a maioria das margaridas tem 13, 21 ou 34 pétalas, e há até margaridas com 55 e 89 pétalas (Koshy, 2018).

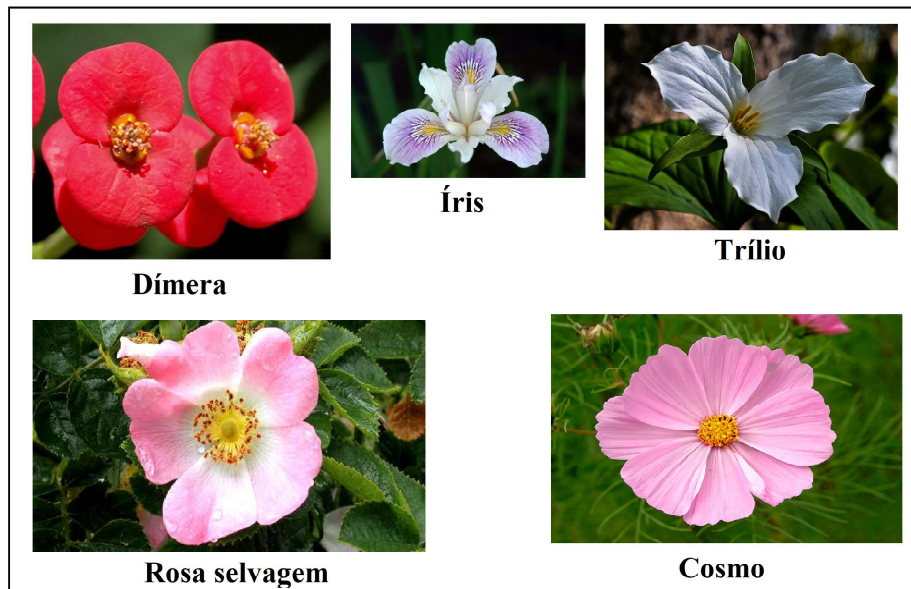


Figura 1.1: Flores e Fibonacci.

De acordo com Koshy (2018), “os fabulosos números de Fibonacci ocorrem na natureza em lugares bastante inesperados. Como exemplo, os números de Fibonacci são encontrados em alguns arranjos de folhas em galhos de plantas e árvores”. Contando as folhas de qualquer galho de cima para baixo, o número de folhas é frequentemente um número de Fibonacci, como mostra a Figura 1.2.



Figura 1.2: Folhas de um galho (Fibonacci).
Fonte: Campos (2021).

A sequência de Fibonacci também é utilizada em diversas áreas como na ciência da computação, na teoria dos jogos, no design de móveis, em fotografias, etc., como mostram os trabalhos de Azevedo (2013); Almeida (2016) e Melo (2017). Mas uma outra

curiosa aplicação desta sequência é no mercado financeiro, mais precisamente na análise técnica de investimentos, em que é utilizada para prever tendências de mercado para traçar tendências de expansão e retração, auxiliando os investidores, na tomada de decisões.

De acordo com o Modalmais (2021), é importante aplicar a sequência de Fibonacci, porém, que seja acompanhada de outras ferramentas e indicadores da análise técnica. Isto porque Fibonacci é uma ordem numérica que serve como referência na identificação de possíveis oportunidades, mas o conjunto de análises é o que vai confirmar se elas de fato se concretizam ou existem. A intenção é que o investidor tome uma ação (de comprar ou vender) quando o ativo está em uma retração de tendência, em alta ou em baixa, dependendo da estratégia. A aplicação nesse caso baseia-se em que a razão entre os números de Fibonacci fornecem os percentuais utilizados nesta análise. Veja a Tabela 1.2 que ilustra bem como são calculados esses percentuais.

Tabela 1.2: Sequência de percentuais - Fibonacci.

0	+ 1	= 1	-	-	-
1	+ 1	= 2	1/2	= 0,500	50%
1	+ 2	= 3	2/3	= 0,666	66,6%
2	+ 3	= 5	3/5	= 0,600	60%
3	+ 5	= 8	5/8	= 0,625	62,5%
5	+ 8	= 13	8/13	= 0,615	61,5%
8	+ 13	= 21	13/21	= 0,619	61,9%
13	+ 21	= 34	21/34	= 0,617	61,7%
21	+ 34	= 55	34/55	= 0,618	61,8%
34	+ 55	= 89	55/89	= 0,617	61,7%
55	+ 89	= 144	89/144	= 0,618	61,8%
89	+ 144	= 233	144/233	= 0,618	61,8%
144	+ 233	= 377	233/377	= 0,618	61,8%
233	+ 377	= 610	377/610	= 0,618	61,8%

Fonte: Modalmais (2021).

Para os investidores, os percentuais 38,2% e 61,8% são de extrema importância, pois nestes percentuais as linhas de suporte (Figura 1.3), indicam que o preço da ação tende a passar por um período de correção, mas outros níveis percentuais costumam aparecer como 100%, 50%, 23,6% e 0% e esses percentuais, incluindo 38,2% e 61,8%, sugerem os níveis de preço que uma ação pode chegar, após uma movimentação ou retração iniciais.

Antes de mais nada, é importante entender as diferenças entre projeção (conhecida também como expansão) e retração de Fibonacci. Na projeção, te auxiliarão a dimensionar até onde o preço do ativo irá, a favor da tendência. Além disso, a projeção determina o fim da terceira onda, logo, se baseia em duas ondas de tendência. Já a retração, é o que alerta sobre potenciais reversões na tendência, resistências ou suportes. (Modalmais, 2021, ver Projeções e retrações de Fibonacci)



Figura 1.3: Projeções e retrações de Fibonacci.
Fonte: Modalmais (2021).

Outro fato curioso é que ao se dividir números pulando um (por exemplo, 21/55), temos um segundo nível de percentual, o número 38,2% que, somado ao percentual do número de ouro, soma 100% (Modalmais, 2021). É possível encontrar uma abordagem completa sobre as aplicações dos padrões de Fibonacci no mercado de ações no trabalho de (Guimarães, 2020).

Na música, os números de Fibonacci estão presentes na teoria musical, nas composições e até na fabricação de instrumentos musicais. Um instrumento ao qual seu funcionamento e composição está diretamente ligado aos números da sequência de Fibonacci, é o piano por exemplo. Segundo Oliveira (2019), “é possível ver os números de Fibonacci na organização de um teclado do piano”(Figura 1.4). No piano, de **dó** a **dó**, uma oitava tem 13 teclas no total, 8 teclas brancas, 5 teclas pretas que estão dispostas em dois grupos, um com 2 teclas e outro com 3 teclas. Veja, 2, 3, 5, 8 e 13: números de Fibonacci.

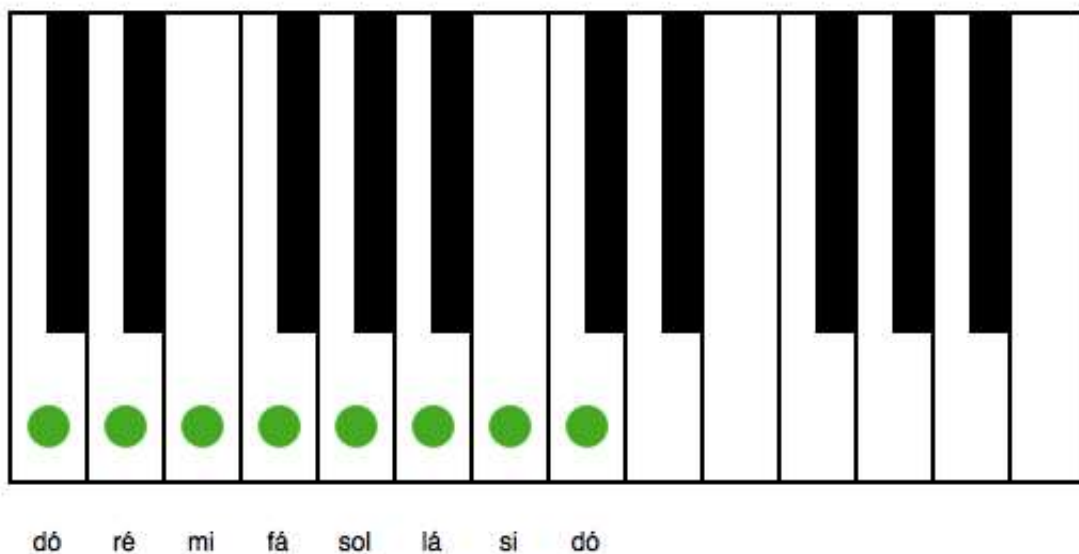


Figura 1.4: Fibonacci e as teclas de um piano.
 Fonte: <https://aprendateclado.com/entendendo-as-oitavas/>

Um estudo aprofundado das aplicações da sequência de Fibonacci na música encontra-se no trabalho de Oliveira (2019), que além de abordar a composição musical através de Fibonacci é trabalhada a utilização da música como forma lúdica de aprendizagem matemática. Desde a publicação do livro *Liber Abaci*, o qual trouxe ao conhecimento do público a sequência de Fibonacci, muitas investigações e correlações foram feitas acerca desta sequência, e uma conjectura notável foi feita em 1608 por Johannes Kepler (1571-1630) que descreveu que “a razão entre termos consecutivos desta sequência tendem para uma constante $\varphi = 1,61803399\dots$ à medida que estes se tornam cada vez maiores”, conforme mostra a Tabela 1.3.

Tabela 1.3: Relação de convergência entre os vizinhos da sequência de Fibonacci.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
1	2	1,5	1,667	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,618	1,618	1,618	1,618...

Existem diversas maneiras para obter uma aproximação numérica para essa constante que é chamada número de ouro. De acordo com Stewart (2009), as primeiras cinquenta casas decimais de φ são:

$$\varphi = 1,61803398874989484820458683436563811772030917980576\dots$$

Tal constante real algébrica irracional (φ) também é conhecida como razão áurea

do latim (*ratio*: significa quociente entre dois números a e b - áurea: significa coberto por ouro, de cor dourada, feito de ouro), e a escolha desta letra grega como representação deu-se em homenagem a Phideas (Figura 1.5), antigo arquiteto grego que concebeu o Parthenon.

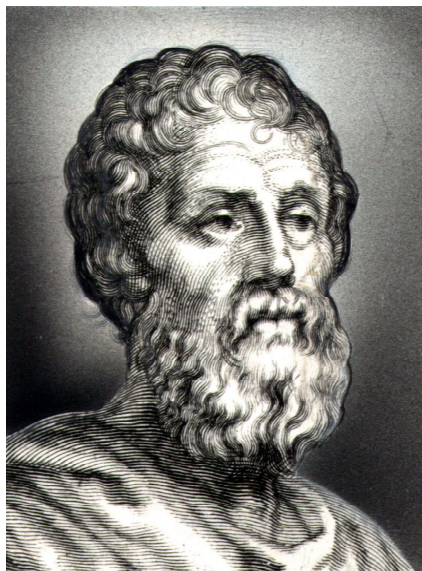


Figura 1.5: Gravura de Phideas.

Fonte: UIG via Getty Images/Editorial Image Provider (2021).

Existem inúmeras aplicações da razão áurea. De acordo com Azevedo (2013), um exemplo curioso, é na estética dentro da odontologia. A razão áurea é utilizada como base para dentes esteticamente perfeitos, como mostra a Figura 1.6.

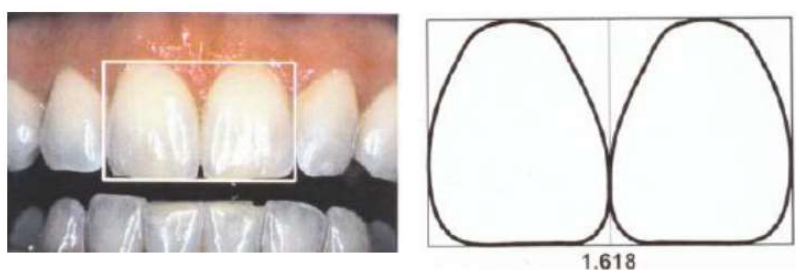


Figura 1.6: A Razão áurea na estética do sorriso.

Fonte: Azevedo (2013).

É notável que algumas aplicações da sequência de Fibonacci são no mínimo curiosas. Há diversas outras aplicações desta sequência, o que a torna cada vez mais interessante e bela. A sequência de Fibonacci é tão importante e bonita que a Fibonacci Association, uma organização de matemáticos, foi formada para o estudo de Fibonacci e sequências inteiras relacionadas, de acordo com Koshy (2018).

1.3 Sequência de Padovan e suas aplicações

Outra importante sequência numérica, porém, não tão conhecida como a de Fibonacci, é a sequência de Padovan. A sequência de Padovan recebeu este nome em homenagem ao seu descobridor, Richard Padovan (1935-?). Padovan descobriu uma sequência numérica com muitas propriedades interessantes e atribuiu a sua descoberta ao arquiteto holandês e monge beneditino Hans van Der Laan (1904-1991), sendo mais tarde estudada por um matemático chamado Gérard Cordonnier (1907-1977) que contribuiu muito para a sequência de Padovan, de acordo com Padovan (2002a) e Voet e Schoonjans (2012).

A sequência de Padovan bem como a de Fibonacci, é do tipo linear recursiva, ou seja, necessita-se conhecer os termos anteriores para que seja calculado o próximo. Essa sequência é composta pelos números (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ...) em que o termo sucessor é igual à soma dos dois antecessores pulando o antecessor imediato. Segundo Alsina e Nelsen (2015), “essa sequência é uma espécie de ‘primo’, da sequência descoberta por Fibonacci”.

Existem algumas aplicações interessantes envolvendo a sequência de Padovan. De acordo com Marohnić e Strmečki (2012), “existe uma conexão entre os números de Padovan e o sistema de música ocidental padrão de 12 tons (escala cromática), que definem intervalos abrangendo uma oitava, como objetos matemáticos”. No trabalho de Marohnić e Strmečki (2012), é mostrado que existem intervalos formados a partir de subsequências de Padovan que geram possíveis combinações musicais. O intervalo que se estende por P_n semitons é chamado de intervalo de Padovan e é denotado simplesmente por $P_n = (2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, \dots)$ e os dez primeiros estão representados na Figura 1.7.

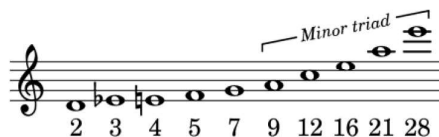


Figura 1.7: Dez primeiros intervalos de Padovan construídos no dó central.
Fonte: Marohnić e Strmečki (2012).

Assim como os termos vizinhos dos números de Fibonacci convergem para o número φ que é chamado de razão áurea, a sequência de Padovan também possui uma relação deste tipo, a qual é conhecida como “número plástico” ou “constante plástica”.

Foi encontrada essa constante fazendo uma relação de convergência entre os termos subsequentes de sua sequência em que seu valor aproximado é $\psi = 1,324718\dots$ e as formas de calcular esse valor são apresentadas nos trabalhos de Marohnić e Strmečki (2018) e Iliopoulos (2018).

Baseado nos trabalhos da sequência de Fibonacci, Cereceda (2010), Miller (1971) e Hare et al. (2014), em que propuseram uma extensão da sequência de Fibonacci ao considerar que esse número de elementos será obtido a partir da soma de dois, três ou quatro elementos anteriores, é possível estender os números de Padovan considerando um número maior de termos para estimar o próximo. De acordo com Vieira e Alves (2019), a sequência de Padovan é uma sequência de ordem 3, uma vez que sua fórmula de recorrência é dada pela soma dos dois termos anteriores contados a partir de um salto. Ao considerar que o próximo termo da sequência será calculado como a soma dos três predecessores após o salto, pode-se chamá-la de sequência de “tridovan” e de ordem 4. Da mesma forma, temos os números “tetradovan” (ordem 5), sequências estas apresentadas em Vieira e Alves (2019). Mas, neste trabalho abordaremos apenas a sequência de Padovan e veremos que a aplicação desta sequência em outras áreas, exceto a matemática, tem grande utilidade. Padovan participou do estudo no qual Stewart (2000), afirma a utilização desses números em esculturas e formas geométricas.

O arquiteto Hans Van Der Laan conduziu o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delft, e durante este período utilizou a basílica cristã de abadia, Sint Benedictusberg em Vaals, Holanda, como exemplo para capacitar arquitetos na reconstrução de igrejas após a Segunda Guerra Mundial. Essa basílica (Figura 1.8), foi construída seguindo os princípios arquiteturais de Dom Van der Laan baseados no número plástico (ψ), obtido da sequência de Padovan.

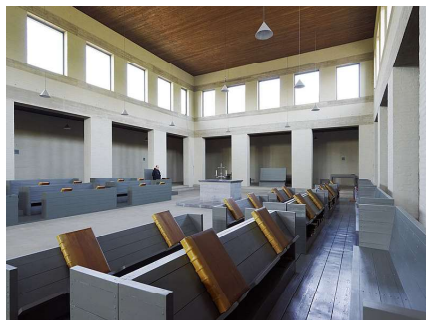


Figura 1.8: Interior da basílica cristã de abadia.
Fonte: Rijksdienst voor het Cultureel Erfgoed (2010).

Neste processo, Laan buscava padrões para a arquitetura afim de descobrir novos padrões de medidas pautados no número plástico (ψ), que era ideal para se trabalhar em escala geométrica com retângulos, trapézios, etc. Laan deu o nome número de plástico (holandês: het plastische getal) a este número em 1928, daí o nome. De acordo com Padovan (2002b) este número foi originalmente estudado em 1924 por Gérard Cordonnier (1907-1977). No entanto, Hans van der Laan foi o primeiro a explicar como relaciona-se com a percepção humana das diferenças de tamanho entre objetos tridimensionais e demonstrou sua descoberta em design (arquitetônico). Sua premissa principal era que o a proporção do número de plástico é “verdadeiramente estética no sentido grego original, ou seja, que sua preocupação não é ‘beleza’, mas na clareza da percepção”.

O sistema de proporções construído a partir do número de plástico é ilustrado na Figura 1.9. Os comprimentos das barras mostradas na figura aumentam em Progressão Geométrica, de acordo com o número de plástico (ψ), de 1 a $\psi^7 = 7,1591... \approx 7$. Portanto, elas representam todos os oito tipos de tamanhos dentro de uma ordem de tamanho (Marohnić e Strmečki, 2012).

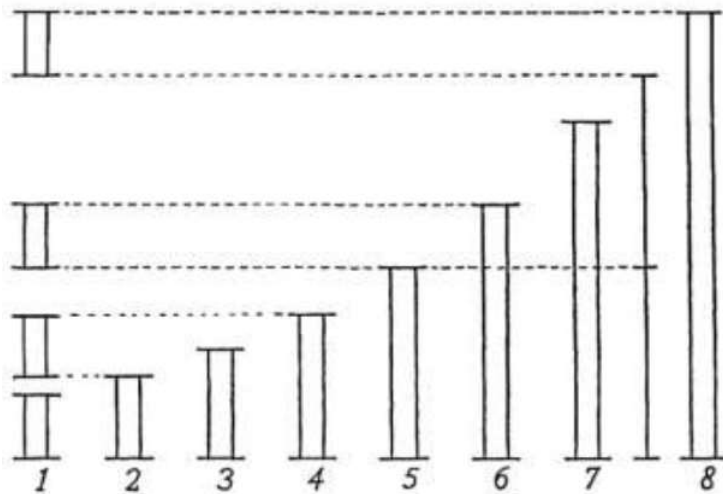


Figura 1.9: Tipos de tamanhos dentro de uma ordem de tamanho.
Fonte: Padovan (2002b).

Na matemática, o número de plástico (ψ) (também conhecido como a constante de plástico, ou rácio de plástico, ou número mínimo Pisot, ou número de platina, Siegel number's ou, em Francês, le nombre radiante) é uma constante matemática que é a única solução real da equação cúbica $x^3 = x + 1$, conforme Harriss (2019). No Capítulo 4 falaremos mais dessa equação e sobre a obtenção de suas raízes.

1.4 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci Bigollo, também conhecido como Leonardo Pisano ou Leonard de Pisa, foi o matemático mais destacado da Idade Média na Europa. Exceto por alguns dos fatos que apresentou em seus trabalhos de matemática, pouco se sabe sobre sua vida. Fibonacci nasceu na família Bonacci de Pisa, o próspero centro comercial, por volta de 1170 (Fibonacci é a abreviatura de Filius Bonacci para o filho de Bonacci).

Seu pai Guglielmo (William) era um empresário de sucesso e ele queria que seu filho seguisse seu ofício. Por volta de 1190, quando Guglielmo foi nomeado coletor de alfândega na cidade argelina de Bugia (hoje conhecida como Bougie), ele levou Leonardo para estudar computação. Em Bougie, Fibonacci recebeu sua educação inicial de um professor muçulmano, que o apresentou ao sistema de numeração indiano e à tecnologia de computação indiana. Ele também apresentou a Fibonacci um livro sobre álgebra, escrito pelo matemático persa Al-Khwarizmi (c. 825). (A palavra álgebra é derivada do título do livro.)

Quando adulto, Fibonacci (Figura 1.10) viajou frequentemente para o Egito, Síria, Grécia, França e Constantinopla, onde estudou vários sistemas aritméticos usados posteriormente e trocou opiniões com estudiosos locais. Ele também viveu por um tempo na corte do imperador romano Frederico II (1194-1250) e participou de debates científicos com o imperador e seus filósofos.



Figura 1.10: Leonardo Fibonacci.
Fonte: Stefano Bianchetti (2021).

Por volta de 1200, aos 30 anos, Fibonacci voltou a Pisa. Ele estava convencido de que o sistema de numeração indiano tinha uma vantagem prática e elegante sobre o sistema romano usado na Itália na época. Em 1202, Fibonacci publicou seu trabalho pioneiro, *Liber Abaci* (O Livro do Ábaco), citado na seção anterior (a palavra *Abaci* aqui não se refere à calculadora manual chamada ábaco, mas ao cálculo em geral). *Liber Abaci* era dedicado à álgebra e aritmética elementar e introduziu o sistema de numeração indiano e algoritmos aritméticos para a Europa. De fato, Fibonacci demonstrou em seu livro o poder do sistema de numeração indiano mais vigorosamente do que em qualquer trabalho matemático até aquele momento, segundo Koshy (2018). *Liber Abaci* nos seus 15 capítulos (Figura 1.11), explica as principais contribuições para a álgebra de al-Khowarizmi e Abu Kamil (cerca de 900), outro matemático persa.

Liber Abaci		
(Manuscrito de 1202)		
Cap. 1	<i>De cognitione novem figurarum indorum et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci</i>	Leitura e escrita dos números no sistema indo-árabe
Cap. 2	<i>De multiplicatione integrorum numerorum</i>	Multiplicação de números inteiros
Cap. 3	<i>De additione ipsorum</i>	Adição de números inteiros
Cap. 4	<i>De extractione minorum numerum ex maioribus</i>	Extracção do menor número pelo maior (subtracção).
Cap. 5	<i>De divisione integrarum numerorum per integros</i>	Divisão de números inteiros
Cap. 6	<i>De multiplicatione integrarum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis</i>	Multiplicação de números inteiros por fracções
Cap. 7	<i>De additione ac extractione et divisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partis reductione</i>	Adição, subtracção e divisão de fracções
Cap. 8	<i>De emptione et venditione rerum venalium et similium</i>	Aquisição e venda de mercadorias e similares
Cap. 9	<i>De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie et quibusdam regulis similibus</i>	Comércio
Cap. 10	<i>De societatis factis inter consocios</i>	Regra das companhias
Cap. 11	<i>De consolamine monetarum atque eorum regulis que ad consolamen pertinent</i>	Liga de moedas
Cap. 12	<i>De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus</i>	A solução de problemas diversos
Cap. 13	<i>De regula elcatayam qualiter per ipsam fere omnes erraticas questiones solvantur</i>	A regra da falsa posição.
Cap. 14	<i>De reperiendi radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum</i>	Raízes quadradas e raízes cúbicas
Cap. 15	<i>De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et amulchabale</i>	A regra da proporção geométrica e questões de álgebra e almucabala

Figura 1.11: Capítulos de *Liber Abaci*.

Fonte: Sigler (2020).

Um tempo depois, mais precisamente seis anos, Fibonacci revisou *Liber Abaci* e dedicou a segunda edição a Michael Scott, o mais famoso filósofo e astrólogo na corte de

Frederico II. Depois de *Liber Abaci*, Fibonacci escreveu três outros livros influentes, *Practica Geometriae* (Practice of Geometry), publicada em 1220, é dividida em oito capítulos e é dedicado ao Mestre Domonique, sobre quem pouco se sabe. Esse livro apresenta habilmente geometria e trigonometria com rigor euclidiano e alguma originalidade. “Fibonacci emprega álgebra para resolver problemas geométricos e geometria para resolver problemas algébricos, uma abordagem radical para a Europa da época dele”, segundo Possebon (2016).

Os próximos dois livros, o *Flos* (Blossom or Flower) e o *Liber Quadratorum* (O Livro dos Números Quadrados) foram publicados em 1225. Embora ambos tratem teoria dos números, *Liber Quadratorum* ganhou a Fibonacci sua reputação moderna de um importante “teórico dos números”, classificado com o matemático grego Diofanto (cerca de 250 d.C.) e o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665). *Flos* e *Liber Quadratorum* representam o brilho de Fibonacci e originalidade do pensamento, que ofusca as habilidades da maioria dos estudiosos de seu tempo.

Em 1225, Frederico II queria testar o talento de Fibonacci, então convidou Fibonacci para sua corte para participar de uma competição de matemática. A competição consistia em três perguntas, elaboradas por Johannes de Palumbo da equipe do Imperador, de acordo com Koshy (2018):

- (I) Encontrar um número racional x tal que ambos $x^2 - 5$ e $x^2 + 5$ sejam quadrados de números racionais;
- (II) Encontrar uma solução para a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$;
- (III) Resolver o seguinte:

Três pessoas compartilham $1/2$, $1/3$ e $1/6$ de uma pilha de dinheiro. Cada um leva algum dinheiro da pilha até que nada sobrar. A primeira pessoa então retorna metade do que ele levou, o segundo um terço e o terceiro um sexto. Quando o total assim retornado é dividido entre eles igualmente, cada um possui sua parte correta. Quanto dinheiro estava na pilha original? Quanto cada pessoa tirou da pilha?

Para o primeiro problema (I), Fibonacci deu a resposta correta $\frac{41}{12}$, pois:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \text{ e } \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

No segundo problema (II), Fibonacci mostrou geometricamente que não possui soluções da forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, mas deu uma solução aproximada, 1,3688081075, que é

correta para nove casas decimais. Esta resposta aparece no livro *Flos* sem nenhuma explicação. E o terceiro problema (III), também registrado no livro *Flos*, Fibonacci estabeleceu que o problema é indeterminado e deu 47 como o menor resposta.

De acordo com Koshy (2018), “nenhum dos concorrentes de Fibonacci no concurso poderia resolver qualquer um dos problemas. O Imperador reconheceu as contribuições de Fibonacci a cidade de Pisa, tanto como professor e cidadão”. Atualmente, em sua homenagem, uma estátua de Fibonacci (Figura 1.12) fica em Camposanto Monumental na Piazza dei Miracoli, perto da Catedral e da Torre Inclinada de Pisa. Até 1990, ele estava em um jardim do outro lado do rio Arno por alguns anos.



Figura 1.12: Estátua de Fibonacci.

Fonte: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Leonardo_Fibonacci.JPG.

Ainda conforme Koshy (2018), “logo após a morte de Fibonacci em 1240, os comerciantes italianos começaram a apreciar a beleza e o poder do sistema de numeração indiano e gradualmente o utilizaram para transações comerciais”. No final do século XVI, a maioria da Europa aceitou. *Liber Abaci* permaneceu o padrão europeu por mais de dois séculos e desempenhou um papel significativo no deslocamento do sistema de numeração romana, espalhando assim o sistema de numeração indiana como o mais eficiente sistema para o resto do mundo.

1.5 Richard Padovan

Pouco se sabe da vida de Richard Padovan, mas suas contribuições foram notórias no campo da arquitetura e também da matemática. Nascido em 8 de junho de 1935 na cidade de Pádua (Stewart, 2000), um vilarejo um pouco distante da mesma cidade natal de Fibonacci (Alsina e Nelsen, 2015). Richard Padovan foi um arquiteto, autor, tradutor, professor e conferencista e estudou arquitetura na Architectural Association School of Architecture¹ de Londres (1952-1957). Além disso trabalhou com arquitetura em vários países europeus, e também lecionou na University of Bath² e no Buckinghamshire College of Higher Education³.

Desde então, ele combinou a prática com o ensino e a escrita sobre arquitetura. Ele acreditava, no entanto, que sua verdadeira educação arquitetônica começou quando encontrou a obra e o pensamento do arquiteto beneditino holandês Dom Hans van der Laan em 1974. Sua tradução do tratado de Van der Laan *Architectonic Space* apareceu em 1983, seguida por uma monografia, *Dom Hans van der Laan, Modern Primitive*, em 1994 (Figura 1.13).

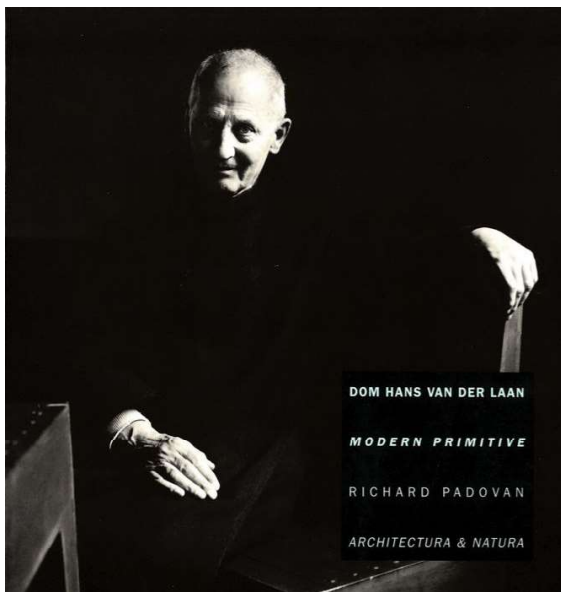


Figura 1.13: Richard Padovan - Dom Hans van der Laan: Modern Primitive - 1994.
Fonte: Catawiki (2020).

¹Também conhecida pela sigla AA, é a mais antiga escola de arquitetura independente do Reino Unido e uma das mais prestigiadas e competitivas do mundo.

²É uma universidade pública de pesquisa localizada em Bath, Somerset, Reino Unido. Recebeu sua carta patente real em 1966, junto com uma série de outras instituições após o Relatório Robbins.

³É uma universidade pública do Reino Unido, situada em High Wycombe, condado de Buckinghamshire, sudeste de Inglaterra. Embora sucessora da escola de Ciências e Artes fundada em 1893 em High Wycombe, a instituição só tem o status de universidade desde 2007.

Em 1999, publicou o livro *Proportion* (Figura 1.14) que em português chama-se *Proporção: Ciência, Filosofia, Arquitetura*, e nesse livro a proporção e o cosmos eram relacionados notavelmente. Segundo Gomes (2012), “Richard Padovan desenvolve um capítulo intitulado *The house as a model of the universe*, no qual a investigação cosmológica ganha pertinência quando observamos o ponto de partida para o desenvolvimento de diversos sistemas proporcionais ao longo do tempo”.

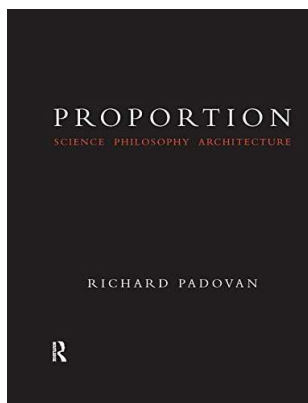


Figura 1.14: *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*.
Fonte: <https://www.amazon.com.br/Proportion-Philosophy-Architecture-Richard-Padovan/dp/1138133175>.

Seu último livro, *Towards Universality: Le Corbusier, Mies e De Stijl* (2002) (Figura 1.15), contrasta os grandiosos ideais filosóficos do modernismo europeu com o fracasso em realizar esses objetivos, particularmente na construção de cidades.

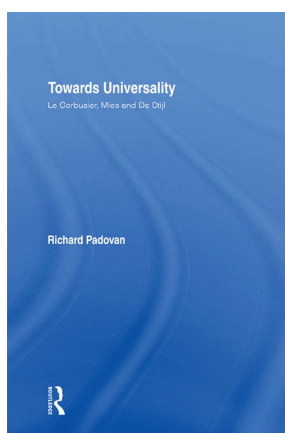


Figura 1.15: *Towards Universality: Le Corbusier, Mies e De Stijl* (2002).
Fonte: <https://www.amazon.com.br/Towards-Universality-Corbusier-Mies-Stijl/dp/0419240306>.

Hoje existem poucos registros de Richard Padovan, inclusive a data de sua morte ainda segue desconhecida. Além disso, a nacionalidade de Padovan segue incerta, pois há

autores que afirmam que Padovan é italiano, como citado no início dessa seção, enquanto outros afirmam ser britânico, como por exemplo no trabalho de Ferreira (2015), mas independente de qual seja sua nacionalidade, sua genialidade e contribuições permanecem até hoje.

Capítulo 2

As relações de recorrência

2.1 Introdução

Diversas sequências numéricas podem ser definidas recursivamente, isto é, por recorrência, em que os termos seguintes dependem dos termos anteriores. Para isso é dada uma lei de recorrência e alguns termos são previamente determinados. Fazer uso de relações de recorrência em sequências numéricas contribui para o raciocínio e para o pensamento algébrico.

Um dos benefícios em fazer uso das recorrências e do pensamento recursivo é que, além de desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de abstração, é uma grande ferramenta para as generalizações das soluções nos problemas, tornando assim suas resoluções mais práticas, inteligentes e completas, segundo Silva (2019a).

Para Pacheco (2013), “o raciocínio recursivo (ou recursão) possibilita a identificação de padrões e, conseqüentemente, favorece a solução de diversos problemas”. Esta forma de raciocínio é organizada em fases, de modo que a ação seguinte é caracterizada pela repetição completa do raciocínio empregado na etapa anterior.

Definição 2 *Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função dos termos anteriores.*

Problema 1 *Seja a sequência infinita definida por*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} - 1, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Vamos encontrar os quatro próximos termos desta sequência. Note que o 1º termo da sucessão foi dado ($a_1 = 1$) e a igualdade $a_n = 3a_{n-1} - 1$ é uma lei de recorrência. Ela nos permite obter cada termo a_n , a partir do segundo, recorrendo ao termo anterior a_{n-1} , assim:

$$n = 2 \rightarrow a_2 = 3a_1 - 1 = 3.1 - 1 = 2$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = 3a_2 - 1 = 3.2 - 1 = 5$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = 3a_3 - 1 = 3.5 - 1 = 14$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = 3a_4 - 1 = 3.14 - 1 = 41$$

...

Problema 2 *Encontrar os cinco próximos termos da sequência definida por*

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = (a_{n-1})^2 - 1, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Utilizando o 1º termo da sucessão e a sua lei de recorrência temos:

$$n = 2 \rightarrow a_2 = (a_1)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = (a_2)^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = (a_3)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = (a_4)^2 - 1 = 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$n = 6 \rightarrow a_6 = (a_5)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$$

...

Problema 3 *A sucessão numérica infinita definida pela lei de recorrência a seguir é conhecida como sequência de Fibonacci:*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n > 2. \end{cases}$$

Note que a lei de recorrência diz que o termo sucessor é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores, sendo assim, escrevendo seus termos até o décimo, temos (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...).

2.2 Recorrências lineares

Como já foi visto nos exemplos da seção anterior, a regra que define o valor de um termo de uma sequência em função de um ou mais termos anteriores é chamada lei de recorrência e é expressa como uma relação ou equação de recorrência.

Definição 3 *Uma relação de recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear (função do primeiro grau).*

Uma relação de recorrência em que cada termo sucessor depende exclusivamente dos anteriores é chamada de “homogênea”. Caso, além dos termos anteriores, cada termo da sequência esteja também em função de um termo independente da sequência, a relação de recorrência é chamada de “não homogênea”.

2.3 Recorrências lineares de 1ª ordem

Na seção anterior vimos que uma relação de recorrência é linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear também, ou seja, uma função de primeiro grau. Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 4 *Uma relação de recorrência linear é de 1ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele, em outras palavras, quando a_n está em função de a_{n-1} .*

A seguir temos duas definições importantes (Definição 5 e Definição 6) com exemplos segundo Pereira (2014).

Definição 5 *Uma recorrência linear homogênea de 1ª ordem é do tipo: $a_{n+1} = g(n)a_n$, sendo $g(n)$ e a_n não-nulos. Podemos então escrever:*

$$a_2 = g(1)a_1$$

$$a_3 = g(2)a_2$$

$$a_4 = g(3)a_3$$

...

$$a_{n+1} = g(n)a_n$$

E substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \dots \cdot g(n), \text{ ou seja: } a_{n+1} = a_1 \prod_{i=1}^n g(i).$$

Problema 4 Resolver a recorrência $a_{n+1} = c \cdot a_n$, sendo c constante e diferente de zero.

Neste caso, $g(n) = c, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim temos:

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{i=1}^n c \rightarrow a_{n+1} = a_1 c^n, \text{ ou seja: } a_n = a_1 c^{n-1}.$$

Essa recorrência define as chamadas progressões geométricas.

Definição 6 Uma recorrência linear não-homogênea de 1ª ordem é do tipo: $a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$, sendo $g(n)$ e $f(n)$ funções não-nulas. Analisando o caso particular em que $g(n) = 1$, a equação assume a forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$, logo pode-se escrever então:

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3)$$

...

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando as igualdades e cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n), \text{ ou seja: } a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^n f(i).$$

Problema 5 Resolver a recorrência $a_{n+1} = a_n + c$.

Neste caso, $f(n) = c, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim temos:

$$a_{n+1} = a_1 \sum_{i=1}^n c \rightarrow a_{n+1} = a_1 + nc, \text{ ou seja: } a_n = a_1 + (n-1)c.$$

Essa recorrência define as chamadas progressões aritméticas.

O teorema a seguir mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de 1ª ordem pode ser transformada em uma da forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$.

Teorema 1 Se a_n é uma solução não nula da recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n$, então a substituição $a_n = x_n y_n$ transforma a recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot x_n]^{-1}$.

Demonstração: 1 A substituição $a_n = x_n y_n$ transforma $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ em $x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$. Mas, $x_{n+1} = g(n)x_n$, pois x_n é solução de $a_{n+1} = g(n)a_n$. Portanto, a equação se transforma em $g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n).x_n]^{-1}$ ou ainda $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n).x_n}$. ■

2.4 Recorrências lineares de 2ª ordem

Na seção anterior vimos as definições de quando uma recorrência linear é de 1ª ordem, além disso conhecemos os casos em que ela pode ser homogênea, não-homogênea e também quando precisamos transformar uma recorrência não-homogênea de 1ª ordem na forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$. A seguir vamos ver as definições para as recorrências lineares de 2ª ordem.

Definição 7 Uma relação de recorrência linear é dita de 2ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir dos dois termos imediatamente anteriores a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1} e a_{n-2} .

Definição 8 Uma recorrência linear de 2ª ordem é do tipo: $a_n = h(n)a_{n-1} + g(n)a_{n-2} + f(n)$, tal que $g(n)$ é uma função não nula, pois caso contrário a recorrência será de 1ª ordem. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não-homogênea.

Para as recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes, consideremos as que possuem a forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ em que $q \neq 0$. E para estas recorrências, pode-se associá-las a uma equação do 2º grau $r^2 + pr + q = 0$ a qual chamamos de “equação característica”. O fato de $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

A seguir, temos um teorema que mostra que se as raízes da equação característica são por exemplo, r_1 e r_2 , então qualquer sequência que tiver a forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é “solução da recorrência” para quaisquer que sejam os valores de C_1 e C_2 .

Resolver uma relação ou equação de recorrência, significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência, de acordo com Pereira (2014).

Teorema 2 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração: 2 *Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,*

$$\begin{aligned} C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0 \end{aligned}$$

.

■

Já o teorema a seguir nos mostra que, quando $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 2.

Teorema 3 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: 3 *Seja y_n uma solução qualquer de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. Determinamos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações:*

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

isto é, $C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$ e $C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$. Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$. Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n . Temos:

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$; os dois

últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos

$z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n . ■

2.5 Recorrências lineares de 3ª ordem

Nesta seção apresentamos as definições para recorrências lineares de 3ª ordem. Com o objetivo de caracterizar o espaço-solução deste tipo de relação e ainda, estaremos lidando apenas com relações lineares sem termos independentes, ditas relações homogêneas. Tais definições, serão aplicadas no Capítulo 3, as quais serão utilizadas na demonstração da Proposição 7.

Definição 9 *Uma relação de recorrência linear é dita de 3ª ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir dos três termos imediatamente anteriores a ele, ou seja, quando a_n está em função de a_{n-1} , a_{n-2} e a_{n-3} . E ela é dita homogênea quando ela é da forma:*

$$a_{n+3} = y_0 \cdot a_{n+2} + y_1 \cdot a_{n+1} + y_2 \cdot a_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

sendo $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ com $y_0 \neq 0$.

Uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ou simplesmente $a(n)$ é uma solução para (2.1) se ela satisfizer a equação para todo $n \in \mathbb{N}$, como definido na seção 1.1, na Definição 1. Além disso, denotamos: $a(n) = a_n$.

Teorema 4 *Dispondo da equação da recorrência e dados números reais y_0, y_1 , e y_2 , é possível encontrar uma sequência que satisfaça (2.1).*

Problema 6 *Seja $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n$. Pela definição anterior, temos que esta é uma relação de recorrência homogênea de 3ª ordem. Se forem dados $a_0 = 1, a_1 = 2$ e $a_2 = 3$, então a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 2, 3, 7, 14, 33, 73, \dots)$ é uma solução da relação definida.*

Para obter uma caracterização das soluções de (2.1), vamos supor que (2.1) admita uma solução exponencial da forma $a_n = \lambda^n, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dessa forma, temos, necessariamente:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+3} &= y_0 \cdot \lambda^{n+2} + y_1 \cdot \lambda^{n+1} + y_2 \cdot \lambda^n \\ \lambda^n \cdot (\lambda^3 - y_0 \cdot \lambda^2 - y_1 \cdot \lambda - y_2) &= 0 \\ \lambda^3 - y_0 \cdot \lambda^2 - y_1 \cdot \lambda - y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Logo, λ existe e é solução de (2.2), pois existem raízes deste polinômio em λ . A equação (2.2) é chamada equação característica associada a (2.1), ou polinômio característico associado a (2.1).

Sabemos que as raízes de (2.2) apresentam uma única configuração dentre as duas a seguir:

a) Todas elas são reais (podendo ser todas distintas, duas iguais e uma distinta, ou uma única raiz de multiplicidade 3).

b) Uma delas é real e as outras duas são complexas conjugadas.

Considerando solução da recorrência r_1, r_2 e r_3 raízes da equação característica, temos abaixo o Teorema que define a solução da recorrência.

Teorema 5 *Seja a_n a solução que satisfaz a equação de recorrência e r_1, r_2 e r_3 raízes de (2.2). Então se $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ ($r_i \in \mathbb{R}$), então $\beta = r_1^n, r_2^n, r_3^n$ é o conjunto das sequências numéricas que satisfazem (2.2) e, neste caso, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a_n = a.r_1^n + b.r_2^n + c.r_3^n, n \in \mathbb{R}$;*

Demonstração: 4 *Seja $a_i(n) = r_i^n, i = 1, 2, 3$ (ou seja, estamos supondo que (2.1) admite solução exponencial da forma indicada) e $s(r) = r^3 - y_0.r^2 - y_1.r - y_2 = 0$. Se r_1, r_2 e r_3 são as raízes distintas de $s(r)$, temos:*

$$\begin{aligned} r_i^3 - y_0.r_i^2 - y_1.r_i^1 - y_2.r_i^0 &= r_i^3 - y_0.r_i^2 - y_1.r_i - y_2 \\ &= r_i^n.(r_i^3 - y_0.r_i^2 - y_1.r_i - y_2) \\ &= r_i^{n+3} - y_0.r_i^{n+2} - y_1.r_i^{n+1} - y_2.r_i^n \\ &= a_i.(n+3) - y_0.a_i(n+2) - y_1.a_i(n+1) - y_2.a_i(n) \\ &= 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Logo temos que, se $a_i(n) = r_i^n$, então r_1^n, r_2^n e r_3^n são soluções de (2.1). Portanto, existem a, b, c reais tais que $a_n = a.r_1^n + b.r_2^n + c.r_3^n$. Logo r_1^n, r_2^n, r_3^n constitui o conjunto das sequências numéricas que satisfazem a equação da recorrência. ■

Para os outros casos possíveis envolvendo as raízes r_1, r_2 e r_3 , temos as seguintes definições:

i) Se $r_1 = r_2 \neq r_3$ ($r_i \in \mathbb{R}$), então $\beta = r_1^n, nr_2^n, r_3^n$ é o conjunto das sequências numéricas que satisfazem (2.2) e, neste caso, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a_n = a.r_1^n + b.n.r_2^n + c.r_3^n, n \in \mathbb{R}$;

- ii) Se $r_1 = r_2 = r_3$ ($r_i \in \mathbb{R}$), então $\beta = r_1^n, nr_2^n, n^2r_3^n$ é o conjunto das seqüências numéricas que satisfazem (2.2) e, neste caso, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a_n = a.r_1^n + b.n.r_2^n + c.n^2.r_3^n, n \in \mathbb{R}$;
- iii) Se $r_1 \in \mathbb{R}$ e $r_2 = z, r_3 = \bar{z}(\in \mathbb{C})$, então $\beta = r_1^n, r^n \cos(\theta n), r^n \text{sen}(\theta n)$ é o conjunto das seqüências numéricas que satisfazem (2.2) e, neste caso, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a_n = a.r_1^n + b.r^n .\cos(\theta n) + c.r^n .\text{sen}(\theta n), n \in \mathbb{R}$ e $r = |r_2|$.

As demonstrações das definições acima, podem ser encontradas no trabalho Relações de Recorrência de 3ª Ordem (ver Domingues e Motta Jr, 2005, pg. 104).

2.6 Recorrências lineares de qualquer ordem

Nesta seção generalizaremos o que foi feito nas seções anteriores e definiremos relações de recorrências lineares de ordem qualquer, faremos isso apenas para completude do trabalho pois não utilizaremos nas etapas seguintes. Baseado em Pereira (2014), segue abaixo as definições para as recorrências de ordem maior que três.

Definição 10 *Chama-se relação de recorrência linear de ordem k a seqüência na qual cada termo é obtido a partir dos k termos imediatamente anteriores a ele. Uma recorrência linear de ordem k é do tipo:*

$$a_n = g_1(n)a_{n-1} + g_2(n)a_{n-2} + g_3(n)a_{n-3} + \dots + g_k(n)a_{n-k} + f(n) \quad (2.3)$$

em que $g_k(n)$ é uma função não nula. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não-homogênea. Quando $g_1(n), g_2(n), \dots, g_k(n)$ são constantes e $f(n) = 0$, a relação de recorrência (2.3) assume a forma:

$$a_n = y_1a_{n-1} + y_2a_{n-2} + y_3a_{n-3} + \dots + y_ka_{n-k} \quad (2.4)$$

e a cada relação de recorrência linear de ordem k podemos associar uma equação de grau k, $\lambda^k - y_1\lambda^{k-1} - y_2\lambda^{k-2} - \dots - y_{k-1}\lambda - y_k = 0$, chamada equação característica.

Teorema 6 *Se $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k$ são raízes da equação $\lambda^k - y_1\lambda^{k-1} - \dots - y_{k-1}\lambda - y_k = 0$, então $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n + C_3r_3^n + \dots + C_kr_k^n$ é solução da recorrência para quaisquer valores de $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$.*

Demonstração: 5 Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n + \dots + C_k r_k^n$ na relação de recorrência $a_n - y_1 a_{n-1} - y_2 a_{n-2} - y_3 a_{n-3} - \dots - y_k a_{n-k}$, obtida de (2.4), e agrupando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & C_1 r_1^{n-k} (r_1^k - y_1 r_1^{k-1} - \dots - y_k) + C_2 r_2^{n-k} (r_2^k - y_1 r_2^{k-1} - \dots - y_k) + \dots \\
 & \quad + C_k r_k^{n-k} (r_k^k - y_1 r_k^{k-1} - \dots - y_k) \\
 & = C_1 r_1^{n-k} \cdot 0 + C_2 r_2^{n-k} \cdot 0 + \dots + C_k r_k^{n-k} \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

A geometria da sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma das sequências numéricas mais fascinantes e curiosas e isto continua oferecendo amplas oportunidades para matemáticos profissionais e amadores a fazer conjecturas e expandir seu horizonte matemático. Embora essa sequência já tenha sido conhecida e discutida na antiguidade, os números desta sequência e sua representação geométrica despertaram curiosidade de muitos estudiosos no passado, e continua despertando no presente.

Além disso, a representação geométrica da sequência de Fibonacci é uma espiral (Figura 3.1), que é formada utilizando os números da sequência de Fibonacci como sendo os lados de quadrados justapostos que se conectam com um arco de um quarto de círculo contido nestes quadrados.

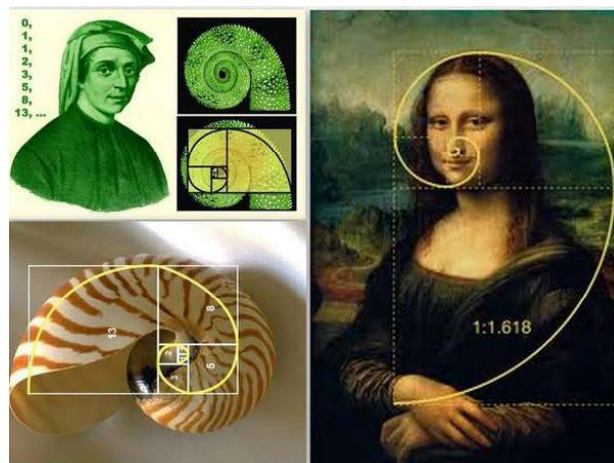


Figura 3.1: Espiral da sequência de Fibonacci - Número de ouro.
Fonte: Saber Matemática (2020).

Mas na verdade, a espiral da sequência de Fibonacci é conhecida como proporção áurea cuja proporção surge o número áureo que está presente na fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, conforme foi detalhado no Capítulo 1.

Neste capítulo apresentamos uma curiosa descoberta feita na espiral da sequência de Fibonacci, também conhecida como a espiral de Arquimedes. Trata-se de uma curiosidade encontrada que envolve as áreas de um quarto de círculos presentes nesta espiral. Formaremos uma sequência numérica com as áreas e encontraremos uma fórmula geral para calcular a área de qualquer um desses um quarto de círculo mediante apenas da sua n -ésima posição.

3.1 A relação de recorrência da sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci tem uma propriedade fascinante: todo número de Fibonacci, exceto os dois primeiros, é a soma dos dois números imediatamente anteriores.

Definição 11 *A sequência de Fibonacci F_n é definida como:*

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Escrevendo por exemplo, os dezesseis primeiros termos dessa sequência, é fácil ver essa relação (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...).

Mas a forma apresentada na Definição 11 é apenas uma das representações em termos de recorrência, pois o número de Fibonacci F_n pode ser definido também, como por exemplo: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = F_2 = 1$ e $n \geq 1$. De acordo com Possebon (2016), “os números de Fibonacci satisfazem inúmeras identidades que foram descobertas ao longo dos séculos”. Em Possebon (2016) encontramos um estudo aprofundado das outras sequências de Fibonacci, como a sequência de Lucas por exemplo. Ou ainda, pode-se utilizar a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, (que é encontrada utilizando as raízes da equação característica $r^2 = r + 1$ proveniente da lei de recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), na qual é definida pela fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3.2 A espiral da sequência de Fibonacci e os quartos de círculos

Segundo Ávila (1999), “a espiral da sequência de Fibonacci aparece quando construímos uma série de quadrados cujos lados são os números da sequência de Fibonacci”. Com isso temos que cada quadrado abaixo possui um número indicando quanto vale a medida do seu lado que coincide com a sequência de Fibonacci.

De fato, podemos organizar uma série de quadrados $F_n \times F_n$, em que em cada um desses quadrados contenha um arco de um quarto de círculo com raio igual ao lado deste quadrado, que interligando-os obtemos uma espiral infinita como na Figura 3.2.

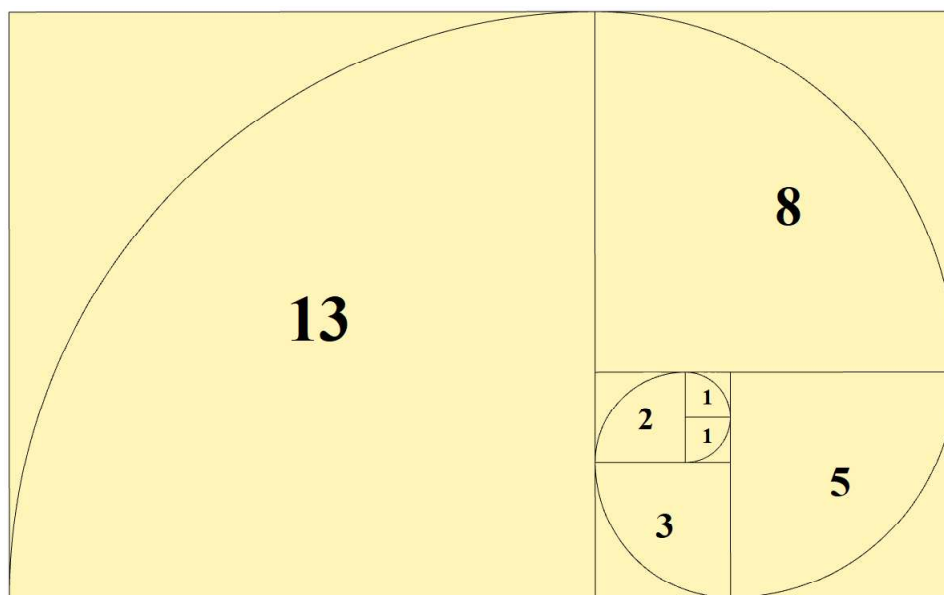


Figura 3.2: Espiral da sequência de Fibonacci.

Além disso, seus centros parecem estar em duas linhas e as duas linhas aparecem perpendiculares. Note que há infinitos quadrados que compõem essa espiral. E dentro de cada um desses quadrados destacamos um quarto de círculo de raio igual à medida do lado do quadrado, em que estes são os números F_n da sequência de Fibonacci. Veja na Figura 3.3 a representação desses um quartos de círculos destacados como recortes em tons diferentes.

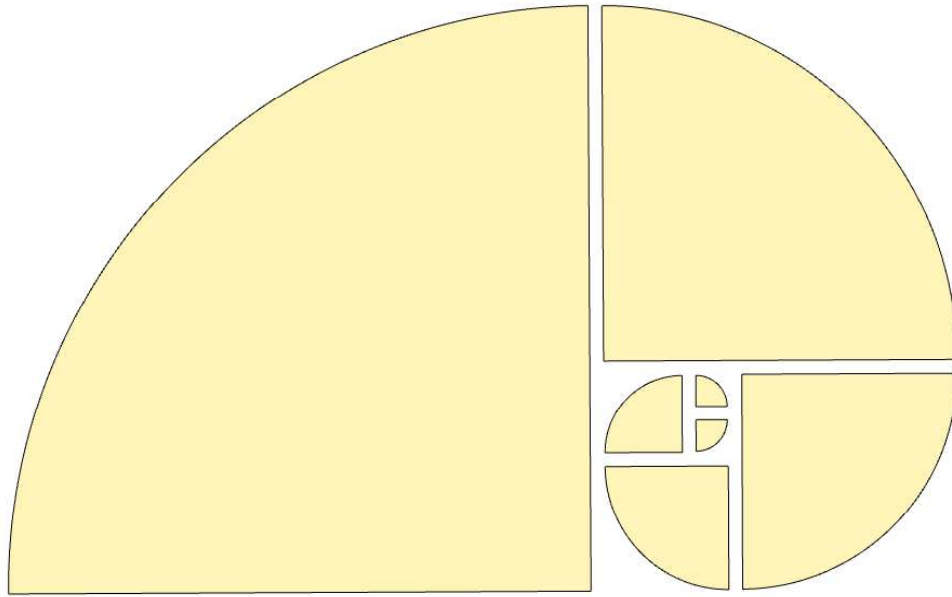


Figura 3.3: Um quarto de círculos presentes na espiral da sequência de Fibonacci.

Sabemos que a área de um círculo completo é calculada por $A = \pi \cdot (\text{raio})^2$, já a área de um semicírculo por $A = \frac{\pi \cdot (\text{raio})^2}{2}$, logo a área de um quarto de círculo é $A = \frac{\pi \cdot (\text{raio})^2}{4}$. Calculando a área de cada um quarto de círculo desta espiral temos a sequência:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{9\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, 16\pi, \frac{169\pi}{4}, \frac{441\pi}{4}, 289\pi, \frac{3025\pi}{4}, \frac{7921\pi}{4}, 5184\pi, \frac{54289\pi}{4}, \dots \right)$$

3.3 Uma relação de recorrência formada pelas áreas de um quarto de círculos

Proposição 7 *Seja $A(n)$ a área formada por cada quarto de círculo que há na espiral que representa a sequência de Fibonacci, tal que $A(n) = \frac{\pi \cdot (r_n)^2}{4}$, em que r_n é a medida do raio de cada um destes quarto de círculos e que são os números de Fibonacci, e a expressão dada para $A(n)$ é a fórmula utilizada para calcular a área de um quarto de círculo. Se partirmos do princípio de que podemos iniciar este desenho com um ponto, e sabendo que o ponto é adimensional, fazemos uma convenção para termos a área $A(0) = 0$. Já a área do primeiro quarto de círculo com raio igual a 1 nos dá uma área $A(1) = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$, e a área do segundo quarto de círculo, também com raio igual a 1 nos dá a mesma área, logo $A(1) = A(2) = \frac{\pi}{4}$. E a partir da terceira área, ou seja, para $n \geq 3$, podemos obter as*

áreas dos quarto de círculos subsequentes da seguinte maneira:

$$A(3) = [A(1) + A(2)].2 - A(0) = \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right].2 - 0 = \pi$$

$$A(4) = [A(2) + A(3)].2 - A(1) = \left[\frac{\pi}{4} + \pi \right].2 - \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

...

$$A(n) = [A(n-2) + A(n-1)].2 - A(n-3), \text{ para } n \geq 3.$$

Sendo assim, podemos formalizar uma lei de recorrência para essa sequência formada pelas áreas desses quarto de círculo:

$$\begin{cases} A(0) = 0 \\ A(1) = A(2) = \frac{\pi}{4} \\ A(n) = [A(n-2) + A(n-1)].2 - A(n-3), \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Demonstração: 6 Seja $A(n)$ a área de cada quarto de círculo presente na espiral da sequência de Fibonacci, temos que $A(n) = \frac{\pi \cdot (\text{raio})^2}{4}$. Por questões didáticas, denotaremos $A(n) = A_n$, assim $A_n = \frac{\pi \cdot (\text{raio})^2}{4}$. Note que para calcular cada área A_n , serão considerados os raios destes quarto de círculo os quais são os números presentes na sequência de Fibonacci, logo raio = F_n . Temos que F_n possui várias identidades, e uma delas e a mais comumente utilizada, é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ conforme a Definição 11. Assim:

$$A_n = \frac{\pi \cdot F_n^2}{4}$$

$$A_n = \frac{\pi \cdot (F_{n-1} + F_{n-2})^2}{4}$$

$$A_n = \frac{\pi \cdot (F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-2}^2)}{4}$$

$$A_n = \frac{\pi \cdot F_{n-1}^2 + 2 \cdot \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + \pi \cdot F_{n-2}^2}{4}$$

$$A_n = \frac{\pi \cdot F_{n-1}^2}{4} + \frac{2 \cdot \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{4} + \frac{\pi \cdot F_{n-2}^2}{4}$$

Note que $A_{n-1} = \frac{\pi \cdot F_{n-1}^2}{4}$ e que $A_{n-2} = \frac{\pi \cdot F_{n-2}^2}{4}$, assim:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{\pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{2} + A_{n-2}$$

$$A_n - \frac{\pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{2} = A_{n-1} + A_{n-2}$$

$$\frac{2 \cdot A_n - \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{2} = A_{n-1} + A_{n-2}$$

$$2 \cdot A_n - \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2$$

Note que $2 \cdot A_n = A_n + A_n$, assim:

$$A_n + A_n - \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2$$

Isolando A_n no membro esquerdo, temos:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - (A_n - \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2})$$

Como $A_n = \frac{\pi \cdot F_n^2}{4}$, no segundo membro consideramo-lo, assim:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left(\frac{\pi \cdot F_n^2}{4} - \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \right)$$

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left(\frac{\pi \cdot F_n^2 - 4 \cdot \pi \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{4} \right)$$

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left[\frac{\pi \cdot (F_n^2 - 4 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2})}{4} \right]$$

Mas $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, logo:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \frac{\pi \cdot [(F_{n-1} + F_{n-2})^2 - 4 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}]}{4}$$

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left[\frac{\pi \cdot (F_{n-1}^2 + 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-2}^2 - 4 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2})}{4} \right]$$

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left[\frac{\pi \cdot (F_{n-1}^2 - 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-2}^2)}{4} \right]$$

Mas observe que $F_{n-1}^2 - 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + F_{n-2}^2 = (F_{n-1} - F_{n-2})^2$ pelo conceito de quadrado da diferença em produtos notáveis, assim:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left[\frac{\pi \cdot (F_{n-1} - F_{n-2})^2}{4} \right]$$

Mas em Fibonacci, note que é válida a identidade $F_{n-3} = F_{n-1} - F_{n-2}$, logo:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - \left[\frac{\pi \cdot F_{n-3}^2}{4} \right]$$

E como $A_{n-3} = \frac{\pi \cdot F_{n-3}^2}{4}$, segue que:

$$A_n = (A_{n-1} + A_{n-2}) \cdot 2 - A_{n-3} \tag{3.1}$$

Que é a recorrência que queríamos provar, válida para $n \geq 3$. ■

Agora faremos uma importante observação: note que a relação de recorrência (3.1) provada anteriormente, pode ser reescrita equivalentemente como:

$$A_{n+3} = (A_{n+2} + A_{n+1}) \cdot 2 - A_n \tag{3.2}$$

mas para $n \geq 0$ com $A_0 = 0$ e $A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}$. Note que essa recorrência (3.2) sugere ser do tipo recorrência de 3ª ordem, como visto no Capítulo 2. Utilizando alguns conceitos das relações de recorrência de 3ª ordem de acordo com Domingues e Motta Jr (2005), nas próximas seções vamos chegar a uma forma geral para todas as soluções desta recorrência.

3.4 Determinação da solução da recorrência formada pelas áreas de um quarto de círculos

Baseado então no Teorema 5 do Capítulo 2, temos então que podemos representar a solução geral da recorrência de 3ª ordem por $a_n = a \cdot r_1^n + b \cdot r_2^n + c \cdot r_3^n$, $n \in \mathbb{R}$, que no nosso caso fica como $A_n = a \cdot r_1^n + b \cdot r_2^n + c \cdot r_3^n$. Assim, para a recorrência (3.2), temos a

seguinte equação característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - (-1) = 0$ que é equivalente a:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (3.3)$$

Calculando suas raízes de (3.3) temos $r_1 = -1, r_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ as quais podemos observar que $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ (*caso a) do Teorema 5*) e logo substituindo r_1, r_2 e r_3 na solução geral da recorrência de 3ª ordem temos:

$$A_n = a.(-1)^n + b. \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c. \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.4)$$

Lembrando que nossa sequência formada pelas áreas de um quarto de círculos presentes na espiral da sequência de Fibonacci é:

$$\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{9\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, 16\pi, \frac{169\pi}{4}, \frac{441\pi}{4}, 289\pi, \frac{3025\pi}{4}, \frac{7921\pi}{4}, 5184\pi, \frac{54289\pi}{4}, \dots \right)$$

Temos então que $A_0 = 0$ e $A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}$, e, assim, podemos montar o seguinte sistema considerando $n = 0, n = 1$ e $n = 2$, respectivamente, em (3.4):

$$\begin{cases} A_0 = a.(-1)^0 + b. \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c. \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \\ A_1 = a.(-1)^1 + b. \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c. \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ A_2 = a.(-1)^2 + b. \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c. \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).b + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right).c = \frac{\pi}{4} \\ a + \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \right).b + \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \right).c = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior utilizando recursos computacionais encontramos,

$a = \frac{-\pi}{10}$, $b = \frac{\pi}{20}$ e $c = \frac{\pi}{20}$. E, portanto, a solução geral para a recorrência será:

$$A_n = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^n + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.5)$$

válida para $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 0$, ou simplesmente válida $\forall n \in \mathbb{N} \cup 0$.

É fácil ver que (3.5) é válida, fazendo $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, veja:

$$A_0 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^0 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0$$

$$A_1 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^1 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$A_2 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^2 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$A_3 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^3 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^3 = \pi$$

$$A_4 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^4 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^4 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^4 = \frac{9\pi}{4}$$

$$A_5 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^5 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^5 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^5 = \frac{25\pi}{4}$$

$$A_6 = \frac{-\pi}{10} \cdot (-1)^6 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^6 + \frac{\pi}{20} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^6 = 16\pi$$

...

No próximo capítulo veremos outra curiosidade envolvendo a geometria de uma sequência, neste caso, na espiral da sequência de Padovan.

Capítulo 4

A geometria da sequência de Padovan

Neste capítulo apresentamos uma curiosa investigação feita na espiral da sequência de Padovan. Trata-se de uma curiosidade encontrada que envolve as áreas dos triângulos equiláteros presentes nesta espiral. Formaremos uma sequência numérica com essas áreas e formularemos uma relação de recorrência para calcular a área de qualquer um desses triângulos, formando então uma nova sequência numérica.

Diferente do Capítulo 3, não será possível encontrar uma solução geral para essa relação de recorrência, uma vez que o polinômio característico da relação de recorrência de Padovan é de 3º grau e possui uma raiz real e duas complexas. Mas há estudos que conseguiram encontrar uma fórmula geral, utilizando a equação característica e as suas raízes, foi construída fórmula de Binet, que foi descoberta por Abraham de Moivre (1667-1764). Este procedimento mostra que é possível encontrar o termo geral de uma sequência sem recursividade, porém tal investigação é complexa e exige suporte de recursos computacionais. A fórmula leva esse nome em homenagem a Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856).

4.1 A relação de recorrência da sequência de Padovan

Como visto no Capítulo 1, a sequência de Padovan é do tipo recursiva, ou seja, necessita-se saber alguns elementos anteriores para descobrir os sucessores. Além disso, é uma sequência de números inteiros e de terceira ordem representada por P_n com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 12 A sequência de Padovan P_n é definida como:

$$\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Sendo os vinte primeiros termos desta sequência os seguintes:

$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, \dots)$$

Além disso, como em qualquer sequência definida por uma relação de recorrência, podemos obter outras representações para a lei de recorrência, conforme a definição a seguir.

Definição 13 Os números de Padovan P_m para $m < 0$ podem ser definidos reescrevendo a relação de recorrência P_n como:

$$P_m = P_{m+3} - P_{m+1} \text{ com } m < 0$$

Demonstração: 7 Em $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ fazendo $+3$ nos índices temos:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

$$P_{n+3} = P_{n-2+3} + P_{n-3+3}$$

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_{n-0}$$

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$$

$$P_{n+3} - P_{n+1} = P_n$$

$$P_n = P_{n+3} - P_{n+1}$$

E fazendo $n = m$ como um novo parâmetro sendo $m < 0$ temos $P_m = P_{m+3} - P_{m+1}$

■

Da Definição 13, podemos observar que é possível obter infinitos números de Padovan com parâmetros negativos, $(\dots, P_{-5}, P_{-4}, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots)$ em que, por exemplo, novos números surgem até o parâmetro P_{-5} , logo temos a sequência de Padovan como $(\dots, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, \dots)$. Para Aquino (2019), “ocasionalmente, pode-se utilizar a segunda definição para a sequência de Padovan com extensão para índices inteiros”.

Definição 14 A sequência de Padovan P_n pode ser definida como:

$$\begin{cases} P_{-5} = 1 \\ P_{-4} = 0 \\ P_{-3} = 0 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

4.2 A espiral da sequência de Padovan e os triângulos equiláteros

A sequência de Padovan para $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ em que $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $n \geq 3$ será $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \dots)$ como visto na seção anterior. Essa sequência de números nos proporciona uma admirável representação geométrica formada pela justaposição de triângulos equiláteros adjacentes contornados por uma espiral que se assemelha muito à espiral da sequência de Fibonacci, vista no Capítulo 3. Considerando inicialmente três triângulos equiláteros e adjacentes com lado 1, o próximo será um triângulo equilátero com lado 2 sendo este a soma dos lados do penúltimo e do antepenúltimo triângulo, como mostra a Figura 4.1.

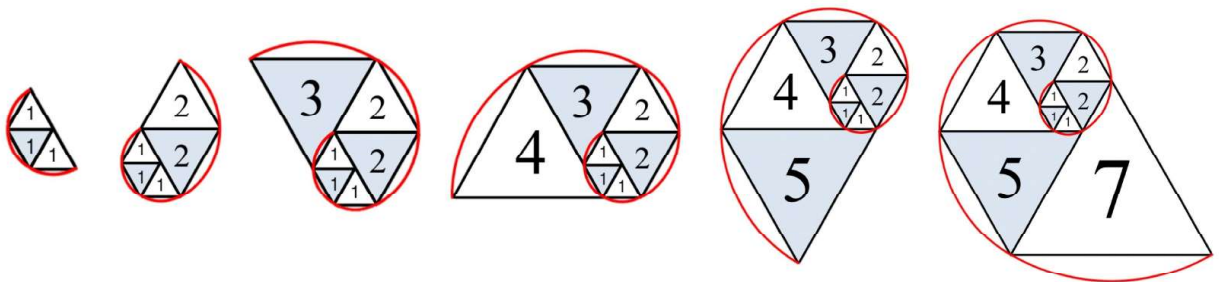


Figura 4.1: Construção da espiral da sequência de Padovan.
Fonte: Aquino (2019).

Similar a sequência de Fibonacci, na de Padovan a razão entre um termo sucessor pelo seu anterior, converge para aproximadamente $1,324718, \dots$ que é o número plástico (ψ), citado no Capítulo 1. Na Tabela 4.1 podemos observar a aproximação dessa constante $\psi = 1,324718, \dots$

Tabela 4.1: Relação de convergência entre os vizinhos da sequência de Padovan.

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
1	1	2	1	1,5	1,33	1,25	1,4	1,28	1,33	1,33	1,31	1,33	1,32	...

A formação da espiral se dá pelas adições de triângulos equiláteros respeitando essa regra, formando assim a espiral da sequência de Padovan, conforme mostra a Figura 4.2.

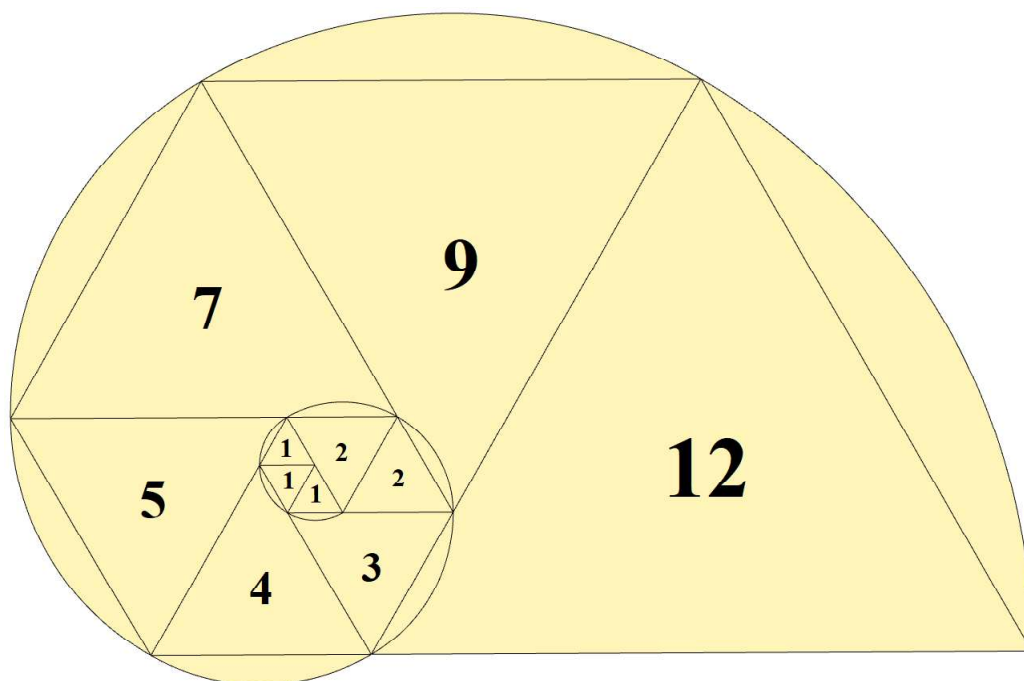


Figura 4.2: Espiral da sequência de Padovan.

Definição 15 Seja P_n a sequência de Padovan e ψ a constante plástica definida por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi \approx 1,32$$

Essa constante constitui uma das soluções da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ a qual é considerada como a equação característica ou polinômio característico da relação de recorrência da sequência de Padovan.

Teorema 8 Seja P_n a sequência de Padovan a qual é $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, em que a mesma pode ser reescrita como $P_m = P_{m+3} - P_{m+1}$ conforme apresentou a Definição 13 ou ainda $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$, sua equação característica é $x^3 = x + 1$.

Demonstração: 8 *Seja a relação de recorrência da sequência de Padovan definida por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, com $n \geq 3$, dividindo ambos membros por P_{n-2} temos:*

$$\frac{P_n}{P_{n-2}} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-2}} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}} \implies \frac{P_n}{P_{n-2}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$$

Como $\frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} = 1$, multiplicando esse termo em ambos membros temos:

$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-2}} = \left(1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}\right) \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} \implies \frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-2}} = \left(1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}\right) \cdot 1$$

Reorganizando o primeiro membro seguindo a ideia da divisão do termo sucessor pelo anterior, e organizando o segundo membro temos:

$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$$

Mas note que $\frac{P_{n-3}}{P_{n-2}} = \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$, assim:

$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$$

Admitindo que o limite exista, de acordo com Vieira (2019), tem-se que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi$ para $n \geq 1$, aplicando limite nos dois membros temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}} \right) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}} \right) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\psi_{n-2}} \right) \\ \implies \psi \cdot \psi &= 1 + \frac{1}{\psi} \\ \implies \psi^2 &= 1 + \frac{1}{\psi} \\ \implies \psi^2 - 1 &= \frac{1}{\psi} \end{aligned}$$

$$\implies \psi \cdot (\psi^2 - 1) = 1$$

$$\implies \psi^3 - \psi = 1$$

$$\implies \psi^3 - \psi - 1 = 0$$

Sendo então a equação polinomial da sequência de Padovan, $x^3 - x - 1 = 0$. ■

Segundo Vieira (2019), “a constante plástica $\psi \approx 1,32$ constitui uma das soluções da equação cúbica $x^3 - x - 1$ e que esta equação representa uma das equações cúbicas que pertence à família dos trinômios descritos do tipo $x^n - x - 1 = 0$ para $n = 2, 3, \dots$ ”.

Lema 9 *O número plástico é uma única solução real da equação cúbica característica da sequência da Padovan, conhecida por $x^3 - x - 1 = 0$, cujas as suas raízes são conhecidas como família dos números plásticos.*

Demonstração: 9 *Esse resultado pode ser demonstrado através da fórmula de Cardano, que de acordo com a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ é possível obter as raízes através de:*

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Logo, para fins de resolução da equação cúbica mencionada acima, temos $p = q = -1$.

Substituindo na fórmula das raízes, encontramos:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} \\ & \implies \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-1}{27}}} \end{aligned}$$

Assim temos:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = 1,3247179572447460259609085\dots$$

■

4.3 Uma relação de recorrência formada pelas áreas dos triângulos equiláteros

Como comentado na seção anterior, a sequência de Padovan nos proporciona uma representação geométrica muito interessante. Considerando triângulos equiláteros cujos lados têm medidas iguais à sequência de Padovan $(1, 1, 1, 2, 2, 3, \dots)$, podemos organizá-los em forma de espiral.

E essa representação em espiral construída pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica, chama atenção pela semelhança a espiral da sequência de Fibonacci, vista no Capítulo 3. A Figura 4.3 destaca os triângulos equiláteros presentes nesta espiral.

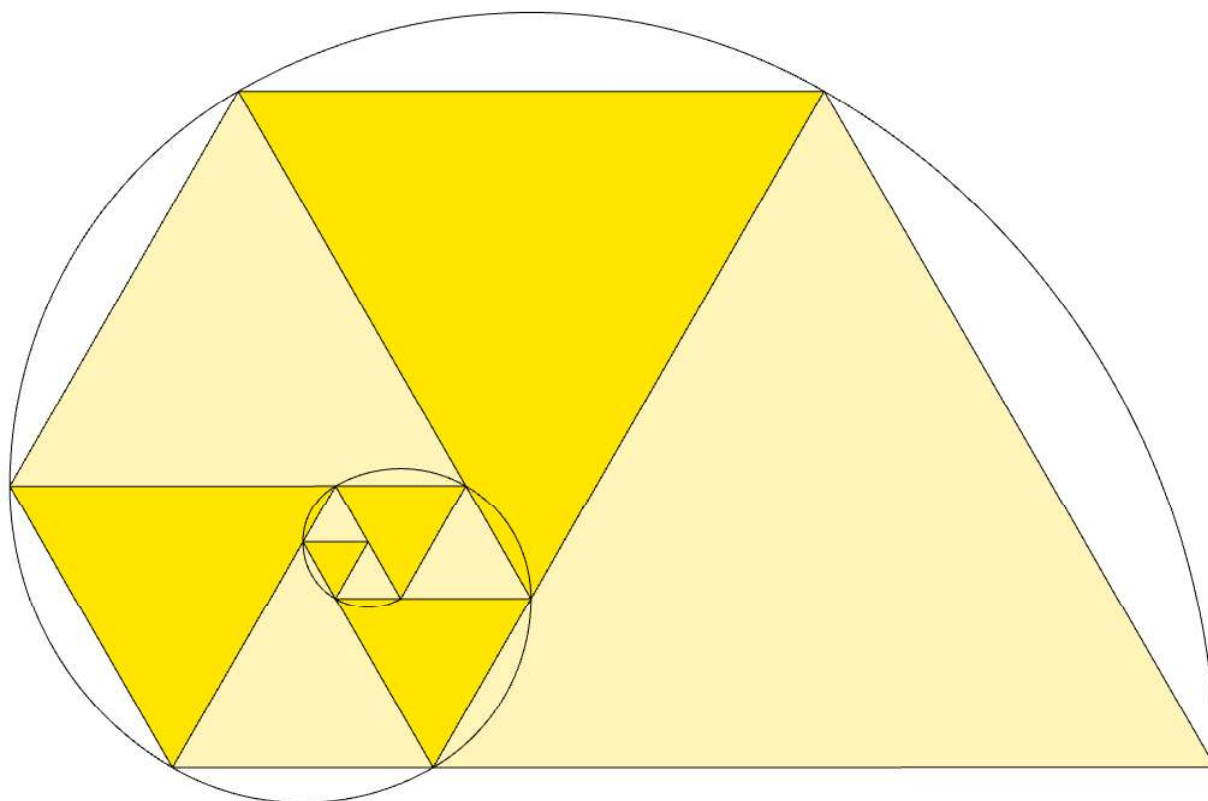


Figura 4.3: Triângulos equiláteros na espiral da sequência de Padovan.

A ideia aqui, é olhar para cada um dos triângulos equiláteros presentes na espiral de Padovan (Figura 4.4). Geometricamente se observa que existe uma progressão no tamanho desses triângulos, os quais seguem os números da sequência de Padovan.

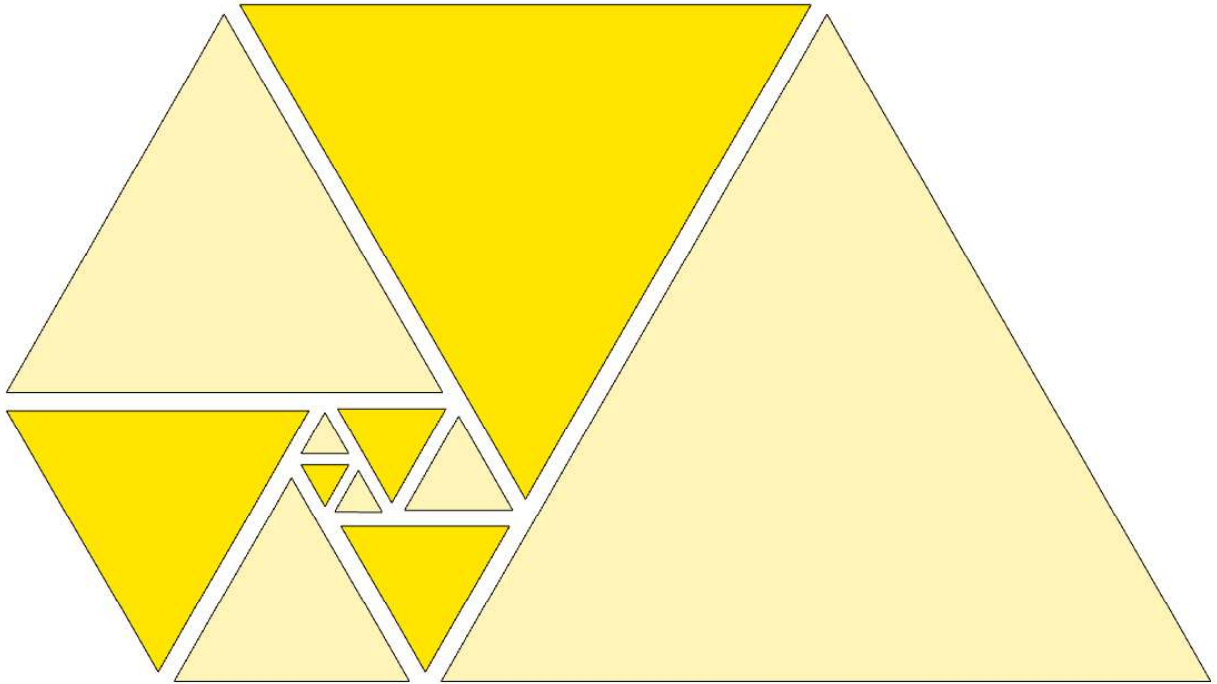


Figura 4.4: Triângulos equiláteros.

Proposição 10 *Seja $A(n)$ a área formada por cada um dos triângulos equiláteros presentes na espiral de Padovan, tal que $A(n) = \frac{(l_n)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, em que l_n é a medida do lado do respectivo triângulo, uma vez que essa é a fórmula utilizada para calcular a área de um triângulo equilátero. Considerando os três primeiros triângulos equiláteros desta espiral, todos com lado medindo 1 e numerando essas áreas como $A(0)$, $A(1)$ e $A(2)$, respectivamente, temos $A(0) = A(1) = A(2) = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Já a partir da 4^a área, considerando $n \geq 3$ temos as seguintes áreas para os triângulos equiláteros subsequentes:*

$$\begin{aligned}
 A(3) &= \left(\sqrt{A(1)} + \sqrt{A(0)} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \right)^2 = \sqrt{3} \\
 A(4) &= \left(\sqrt{A(2)} + \sqrt{A(1)} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \right)^2 = \sqrt{3} \\
 A(5) &= \left(\sqrt{A(3)} + \sqrt{A(2)} \right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}} \right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \\
 A(6) &= \left(\sqrt{A(4)} + \sqrt{A(3)} \right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}} \right)^2 = 4\sqrt{3} \\
 A(7) &= \left(\sqrt{A(5)} + \sqrt{A(4)} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(8) &= \left(\sqrt{A(6)} + \sqrt{A(5)} \right)^2 = \left(\sqrt{4\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}} \right)^2 = \frac{49\sqrt{3}}{4} \\
A(9) &= \left(\sqrt{A(7)} + \sqrt{A(6)} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{4\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{81\sqrt{3}}{4} \\
A(10) &= \left(\sqrt{A(8)} + \sqrt{A(7)} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{49\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{4}} \right)^2 = 36\sqrt{3}
\end{aligned}$$

...

$$A(n) = \left(\sqrt{A(n-2)} + \sqrt{A(n-3)} \right)^2 \text{ para } n \geq 3.$$

Sendo assim, podemos formalizar uma lei de recorrência para essa sequência formada pelas áreas desses triângulos equiláteros:

$$\begin{cases} A(0) = A(1) = A(2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ A(n) = \left(\sqrt{A(n-2)} + \sqrt{A(n-3)} \right)^2, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Mas note que:

$$\begin{aligned}
A(n) &= \left(\sqrt{A(n-2)} + \sqrt{A(n-3)} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{A(n-2)} \right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{A(n-2)} \right) \cdot \left(\sqrt{A(n-3)} \right) + \left(\sqrt{A(n-3)} \right)^2 \\
&= A(n-2) + 2 \cdot \left(\sqrt{A(n-2)} \right) \cdot \left(\sqrt{A(n-3)} \right) + A(n-3)
\end{aligned}$$

Por questões didáticas vamos considerar $A(n) = A_n$, assim concluímos que:

$$A_n = \left(\sqrt{A_{n-2}} + \sqrt{A_{n-3}} \right)^2 \Leftrightarrow A_n = A_{n-2} + 2 \cdot \sqrt{A_{n-2}} \cdot \sqrt{A_{n-3}} + A_{n-3} \quad (4.1)$$

Demonstração: 10 *Seja A_n a área de cada triângulo equilátero presente na espiral de Padovan, temos que $A_n = \frac{(\text{lado})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Note que para calcular cada área A_n , serão considerados os lados destes triângulos que por sua vez esses valores são os números da sequência de Padovan, daí podemos afirmar que lado = P_n . Temos que P_n possui algumas*

formas variadas, mas a mais comum e mais conhecida é $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$. Assim:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{P_n^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{(P_{n-2} + P_{n-3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{(P_{n-2}^2 + 2 \cdot P_{n-2} \cdot P_{n-3} + P_{n-3}^2) \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot P_{n-2} \cdot P_{n-3} \cdot \sqrt{3} + P_{n-3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

Observe que se $A_n = \frac{P_n^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, então $A_{n-2} = \frac{P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ e $A_{n-3} = \frac{P_{n-3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, logo:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{2 \cdot P_{n-2} \cdot P_{n-3} \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{P_{n-3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 &\implies \\
 A_n &= A_{n-2} + \frac{2 \cdot P_{n-2} \cdot P_{n-3} \cdot \sqrt{3}}{4} + A_{n-3}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $A_{n-2} = \frac{P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 A_{n-2} &= \frac{P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\
 \Leftrightarrow 4 \cdot A_{n-2} &= P_{n-2}^2 \cdot \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot A_{n-2}}{\sqrt{3}} &= P_{n-2}^2 \\
 \Leftrightarrow P_{n-2}^2 &= \frac{4 \cdot A_{n-2}}{\sqrt{3}} \\
 \Leftrightarrow P_{n-2} &= \sqrt{\frac{4 \cdot A_{n-2}}{\sqrt{3}}} \\
 \Leftrightarrow P_{n-2} &= \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{A_{n-2}}}{3} \\
 \implies
 \end{aligned}$$

$$P_{n-2} = 2 \cdot 3^{\frac{-1}{4}} \cdot \sqrt{A_{n-2}} \tag{4.3}$$

De forma análoga, como $A_{n-3} = \frac{P_{n-3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, segue que:

$$P_{n-3} = 2 \cdot 3^{\frac{-1}{4}} \cdot \sqrt{A_{n-3}} \tag{4.4}$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.2) temos:

$$A_n = A_{n-2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^{\frac{-1}{4}} \cdot \sqrt{A_{n-2}} \cdot 2 \cdot 3^{\frac{-1}{4}} \cdot \sqrt{A_{n-3}} \cdot \sqrt{3}}{4} + A_{n-3}$$

Considerando $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ e fazendo as simplificações das potências de base 2 e de base 3, chegamos a:

$$A_n = A_{n-2} + 2 \cdot \sqrt{A_{n-2}} \cdot \sqrt{A_{n-3}} + A_{n-3}$$

Ou simplesmente:

$$A_n = \left(\sqrt{A_{n-2}} + \sqrt{A_{n-3}} \right)^2$$

Que é a recorrência (4.1) que queríamos provar, válida para $n \geq 3$.

■

Capítulo 5

As relações de recorrência no ensino básico

Desde muito tempo, sabemos que o emprego do estudo de sequências numéricas na educação básica, contribui muito para melhoria da compreensão algébrica e da aprendizagem matemática como um todo. Saber lidar com números, operações e problemas no cotidiano depende de como o ensino destas habilidades são trabalhadas durante a vida escolar. De acordo com Brasil - MEC (2018):

No Ensino Fundamental - Anos Iniciais, deve-se retomar as vivências cotidianas das crianças com números, formas e espaço, e também as experiências desenvolvidas na Educação Infantil, para iniciar uma sistematização dessas noções. Nessa fase, as habilidades matemáticas que os alunos devem desenvolver não podem ficar restritas à aprendizagem dos algoritmos das chamadas “quatro operações”, apesar de sua importância. No que diz respeito ao cálculo, é necessário acrescentar, à realização dos algoritmos das operações, a habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo (Brasil - MEC, 2018, ver pg. 276).

Aprofundar os estudos das operações básicas, efetuar cálculos mentalmente e desenvolver a linguagem matemática (isso incluindo a escrita matemática), são alguns dos principais desafios dentro do ensino da matemática. Um dos conteúdos que apresenta uma base diversificada de aplicações são as sequências numéricas. E de fato, no que se refere ao estudo de sequências, encontramos tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio, e este objeto de conhecimento faz parte da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Encontramos o estudo de sequências recursivas nas diretrizes para o

Ensino Fundamental como veremos na próxima seção.

5.1 Sequências numéricas no Ensino Fundamental

Sequências numéricas permeiam diversas áreas da matemática e na etapa Ensino Fundamental, deve-se fundamentar bem os conceitos básicos de sequências numéricas recursivas ou não. Para Iezzi (2010), “a importância em reconhecer padrões, levantar e validar conjecturas e generalizações deixam claro para os estudantes que sequências numéricas são exemplos de funções de domínio natural”.

O ensino de sequências recursivas no Ensino Fundamental ganha protagonismo dentro da álgebra, e torna-se um dos mais importantes assuntos a serem abordados em sala de aula. Para Almeida (2019):

[...] podemos observar que o ensino das sequências recursivas contribui para o desenvolvimento do pensamento dedutivo dos estudantes, aprimorando o domínio das competências matemáticas estabelecidas nos currículos dos diversos sistemas de ensino (Almeida, 2019).

É possível encontrar objetos de conhecimento e habilidades envolvendo sequências em alguns anos do Ensino Fundamental - anos iniciais. De acordo com a Brasil - MEC (2018), “em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano”.

Abaixo temos, de acordo com Brasil - MEC (2018), a descrição detalhada de como pode-se trabalhar *Sequências* em alguns anos deste segmento.

No 1^o ano, dentro da área temática Álgebra temos:

Objetos de conhecimento:

- Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.
- Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).

Habilidades:

- (EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
- (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 278–279)

No 2^o ano, também dentro da área temática Álgebra temos:

Objetos de conhecimento:

- Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.
- Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.

Habilidades:

- (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
- (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
- (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 282–283)

No 3^o ano, também dentro da área temática Álgebra temos:

Objetos de conhecimento:

- Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.

Habilidades:

- (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 286–287)

No 4^o ano, ainda dentro da área temática Álgebra temos:

Objetos de conhecimento:

- Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.
- Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.

Habilidades:

- (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
- (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 290–291)

Já no 5^o ano, dentro da unidade temática Álgebra não há objetos de conhecimento e habilidades voltadas ao estudo de sequências. Dentro desta unidade neste ano, trabalha-se propriedades da igualdade, equivalências e grandezas.

Agora vamos para a etapa Ensino Fundamental - Anos Finais, em que da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em matemática também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos, em que se devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas.

Além disso, de acordo com a Brasil - MEC (2018):

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental - Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (Brasil - MEC, 2018, ver pg. 298).

No 6^o ano não há direcionamentos para o estudo de sequências, pois neste ano de acordo com a Brasil - MEC (2018), os objetos de conhecimento e habilidades são mais voltados à aplicação das ferramentas matemáticas e em Álgebra é dada a continuidade do

que se trabalhou no 5^o ano, propriedades da igualdade, equivalências e grandezas.

No 7^o ano é sugerido retomar os estudos em sequências de acordo com os objetos de conhecimento e habilidades a seguir:

Objetos de conhecimento:

- Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.

Habilidades:

- (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 306–307)

No 8^o ano, é dada a continuidade de sequências sendo como um dos principais conteúdos de Álgebra. Nesta etapa é proposto um estudo mais aplicado de sequências recursivas e um novo fator é inserido, as sequências não recursivas, veja:

Objetos de conhecimento:

- Sequências recursivas e não recursivas.

Habilidades:

- (EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
- (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 312–313)

E para concluir esta etapa, no 9^o ano, de acordo com a Brasil - MEC (2018), não é proposto estudos de sequências numéricas. A Álgebra fica mais voltada para funções, razões e grandezas, proporcionalidade e fatoração de equações do 2^o grau.

5.2 Sequências numéricas no Ensino Médio

Na etapa Ensino Médio, a matemática é trabalhada como “Matemática e suas tecnologias”, em que sua organização curricular faz uma complementação mais aprofun-

dada do que foi proposto para se trabalhar durante a etapa anterior. De acordo com a Brasil - MEC (2018):

[...] a área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (Brasil - MEC, 2018, ver pg. 527).

No que se refere às sequências numéricas, no Ensino Médio, elas não são propostas como objeto de estudo da forma com a qual é proposta durante o Ensino Fundamental. Considerando-se que o conteúdo sequências numéricas foi bem fundamentado na etapa anterior, no Ensino Médio as sequências numéricas aparecem associadas às funções, progressões, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Toda organização curricular na etapa do Ensino Médio em Matemática e suas tecnologias está organizada de forma articulada com as competências gerais da Educação Básica e com a Matemática do Ensino Fundamental, garantindo aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas e as habilidades a serem alcançadas.

Existem cinco competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio de acordo com (Brasil - MEC, 2018). Dentro da competência 5, em números e álgebra, temos as duas habilidades relacionadas com sequências numéricas, mais especificamente com progressões aritméticas e progressões geométricas. De acordo com a Brasil - MEC (2018), “o desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas [...]”.

Como vimos no Capítulo 2 na Seção 2.3, progressões aritméticas e progressões geométricas são casos particulares de recorrências lineares. Uma progressão aritmética ou simplesmente (P.A.) é uma recorrência linear não-homogênea de 1^a ordem e uma progressão geométrica ou simplesmente (P.G.) é uma recorrência linear homogênea de 1^a ordem. E no Ensino Médio, é feita uma correlação de (P.A.) e de (P.G.) com funções, de acordo com as habilidades a seguir:

Habilidades:

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(Brasil - MEC, 2018, ver pg. 541)

Segundo Pereira (2018), “o estudo de sequências e séries é parte do programa de matemática do Ensino Médio, que normalmente é apresentado ao aluno de forma teórica e breve e, geralmente, apenas os casos particulares que são as progressões aritméticas e geométricas, limitando a exploração do tema, que é de suma importância na matemática e em outras áreas do conhecimento”. Embora sejam discutidas diversas temáticas educacionais, dentre elas o aprofundamento ou não de determinado conteúdo, o aprimoramento da aprendizagem em sala de aula é de extrema relevância.

Para Martins (2013), “os estudantes do ensino médio geralmente gostam destes dois assuntos: progressões aritméticas e geométricas”, e de fato percebe-se essa facilidade em sala de aula e, ainda “via de regra, não estão entre os assuntos mais temidos de matemática” (Martins, 2013).

5.3 Sequências de Fibonacci e de Padovan na educação básica

As sequências de Fibonacci e de Padovan podem ser trabalhadas na educação básica em diversos momentos e etapas. A sequência de Fibonacci geralmente é utilizada como um exemplo característico de uma relação de recorrência, pois ilustra bem a noção intuitiva de recursividade, além disso, propor o problema que envolvia a reprodução de coelhos criada por Leonardo Fibonacci torna de forma lúdica a aplicação da sequência de Fibonacci.

Na etapa Ensino Fundamental, tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais, apresentar as aplicações e elucidar problemas ganha um papel importante no ensino da matemática. Já na etapa do Ensino Médio, faz-se necessário a interdisciplinariedade com

outras áreas, como por exemplo a relação entre progressão geométrica e a reprodução genética, vista em Ciências da natureza e suas tecnologias¹.

A sequência de Padovan pode ser utilizada assim como a de Fibonacci, porém sua elucidação quanto à aplicação em uma situação real ainda não foi criada. Mas pode ser utilizada como um bom exemplo de relações recursivas na qual os termos sucessores não dependem imediatamente do termo anterior, e sim de outros (antes do anterior), ou seja, pode ser abordada como uma outra situação-problema que também caracteriza uma sequência recursiva.

No trabalho de Aquino (2019), é possível encontrar uma sugestão de atividade que envolve a sequência de Padovan, uma atividade dinâmica dividida e organizada em três etapas. Para Aquino (2019):

O objetivo desta atividade é levar a sequência de Padovan para a sala de aula com a finalidade dos alunos a conhecerem. Tal sequência se tornou negligenciada pelos livros didáticos, uma vez que poderia ser trabalhada como um complemento do estudo da sequência de Fibonacci, já que a convergência de (P_n) para (ψ) é uma resposta tridimensional à proporção áurea (Aquino, 2019, ver pg. 50).

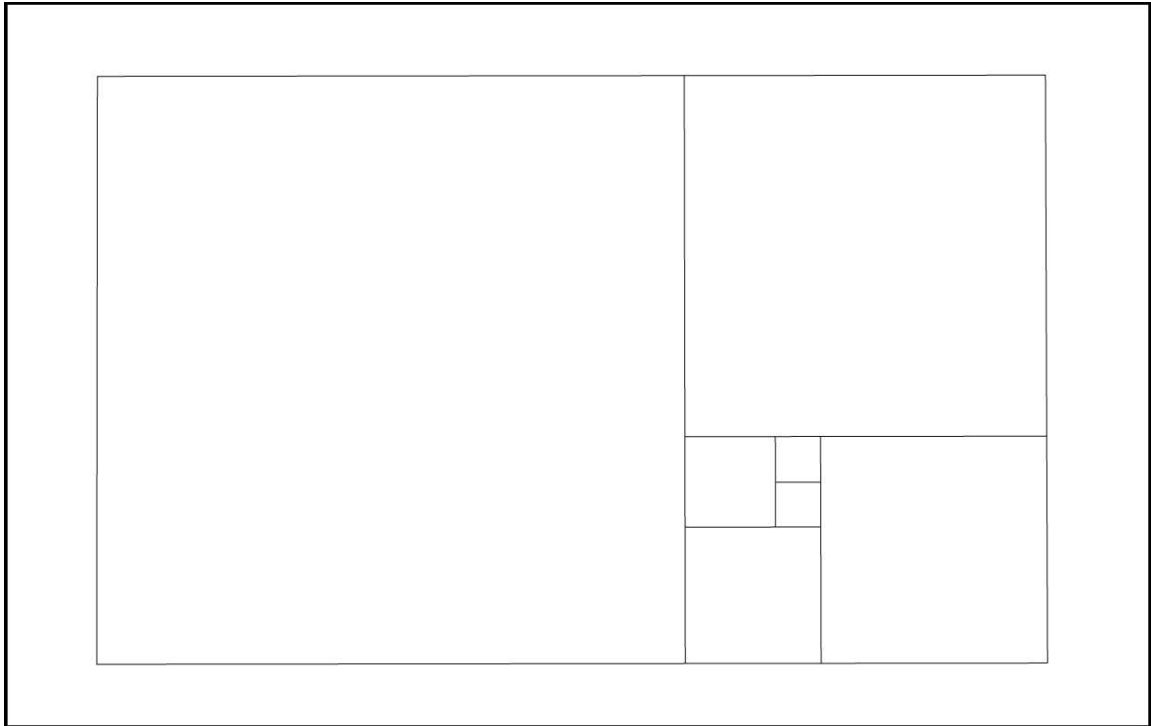
A seguir, seguem duas propostas de atividades, afim de reconhecer a aplicação dos números das sequências de Fibonacci e de Padovan em suas respectivas representações geométricas e também como construir as espirais destas sequências. Estas propostas podem facilmente ser aplicadas à qualquer etapa do Ensino Básico.

O objetivo destas atividades é reconhecer os métodos para se construir as espirais das sequências de Fibonacci e de Padovan utilizando arcos construídos com compasso, além disso, entender como estão aplicados os números destas sequências nas suas representações geométricas.

5.3.1 Atividade 1: Construindo a espiral da sequência de Fibonacci

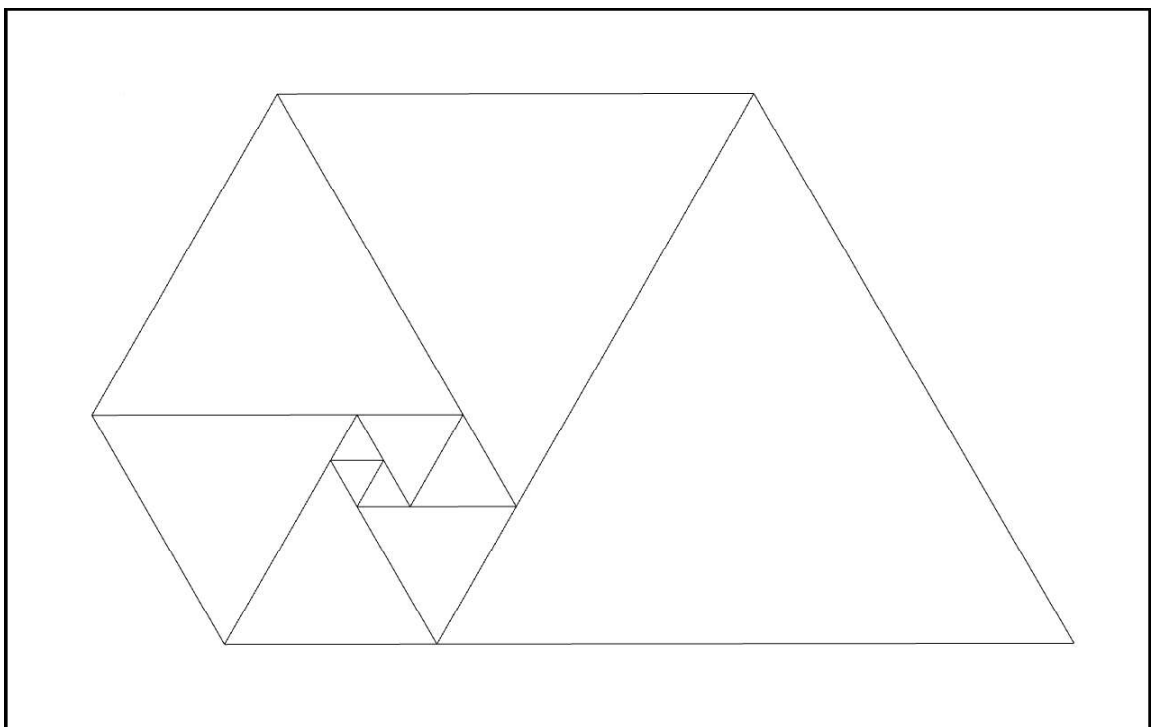
Utilizando lápis, borracha e compasso, construir a espiral da sequência de Fibonacci iniciando pelo centro e seguindo corretamente os números dessa sequência. Escrever os números de Fibonacci como sendo os lados de cada quadrado iniciando pelo centro.

¹As ciências da natureza correspondem às áreas da ciência natural que estudam aspectos da natureza, englobando as disciplinas Biologia, Física e Química. Essa área do estudo ainda pode abarcar a geologia e a astronomia.



5.3.2 Atividade 2: Construindo a espiral de Padovan

Utilizando lápis, borracha e compasso, construir a espiral da sequência de Padovan iniciando pelo centro seguindo corretamente os números dessa sequência. Escrever os números de Padovan como sendo os lados de cada triângulo equilátero iniciando pelo centro.



Considerações finais

O fascínio do ser humano pelos números levou a humanidade à patamares talvez jamais imaginados. O aprimoramento dos processos e de elementos aos quais a vida na Terra depende, em grande parte, se deve à utilização de sequências numéricas. Neste trabalho abordamos as sequências numéricas, recursivas ou não, em diversos campos e vimos que algumas novas investigações e conjecturas podem ser feitas.

É vasto o campo das sequências recursivas e sua compreensão vai de simples aplicações, até às mais importantes. A sequência de Fibonacci pode ser encontrada em diversos elementos naturais ou feitos pelo ser humano. A beleza da espiral que surge da sequência de Fibonacci não se baseia só em sua forma, mas principalmente como é possível reconhecê-la, seja num caracol do mar, seja em uma pintura ou até mesmo em um enquadramento de uma fotografia.

E na representação geométrica da sequência de Fibonacci, vimos que é possível surgir curiosidades jamais imaginadas. Talvez essas curiosidades tenham aplicação em algum fator do dia a dia, e fica ainda o desafio de descobrir qual seria. Além disso, com esse trabalho, buscamos evidenciar a sequência de Padovan, esta desconhecida por grande parte dos estudantes e profissionais da matemática. Não só evidenciá-la mas investigá-la, pois vimos que na representação geométrica desta sequência conjecturas curiosas podem ser feitas.

Trabalhar com sequências numéricas pode ser uma ferramenta poderosa para compreender ordenamento, conjuntos, padrões e pode também ser um elemento crucial para compreensão de alguns fenômenos naturais, como a reprodução genética, a progressão de crescimento de um valor investido, compreensão de teoria musical, entre outros.

Contudo, esperamos que esse trabalho desenvolva o interesse investigativo e científico em estudantes de graduação em Matemática e também de profissionais já atuam na educação matemática.

Referências Bibliográficas

- Almeida, D. V. (2016). Propriedades e aplicações dos Números de Fibonacci. Dissertação de Mestrado, Proformat–UFPR, Curitiba/PR.
- Almeida, U. B. (2019). O Ensino de Sequências Recursivas no Ensino Fundamental a Luz do Currículo de Pernambuco. Dissertação de Mestrado, IM–UFAL, Maceió/AL.
- Alsina, C. e Nelsen, R. B. (2015). A mathematical space odyssey: solid geometry in the 21th century. In *Dolciani Mathematical Expositions*, volume 10. AMS, Washington.
- Aquino, A. M. F. (2019). Uma abordagem sobre a sequência de Padovan e o ensino de proporções. Dissertação de Mestrado, CCT–UFCA, Juazeiro do Norte/CE.
- Ávila, G. (1999). *Introdução a Análise Matemática*. Blucher, S.Paulo.
- Azevedo, N. C. (2013). O Número de Ouro e construções geométricas. Dissertação de Mestrado, IME–UFG, Goiânia/GO.
- Brasil - MEC (2018). Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasil.
- Cereceda, J. L. (2010). Binet’s formula for generalized tribonacci numbers. In *Notas em Matemática Aplicada*, volume 50, página 119p.
- Domingues, G. F. M. e Motta Jr, W. (2005). Relações de Recorrência de 3ª Ordem. <http://www.pet.famat.ufu.br/sites/pet.famat.ufu.br/files/Gustavo%203.pdf> Acesso em 08/01/2021.
- Ferreira, R. C. (2015). Números Mórficos. Dissertação de Mestrado, CCEN–UUFPB, J.Pessoa/PB.

- Gomes, V. M. V. S. (2011-2012). Sistemas Proporcionais como metodologia de sistematização projectual. Dissertação de Mestrado, FA–Universidade do Porto, Porto/Portugal.
- Guimarães, L. B. A. (2020). Aplicações dos padrões Fibonacci no mercado de ações: uma proposta para o ensino de educação financeira no ensino médio. Dissertação de Mestrado, CCN–UFPI, Teresina/PI.
- Hare, K., Prodinger, H., e Shallit, J. (2014). Three series for the generalized golden mean. <https://arxiv.org/pdf/1401.6200.pdf> Acesso em: 29/04/2019.
- Harriss, E. (2019). The plastic ratio. <https://www.numberphile.com/videos/the-plastic-ratio> Acesso em: 15/03/2019.
- Iezzi, G. (2010). *Matemática: Ciência e Aplicação*. Saraiva, S.Paulo.
- Iliopoulos, V. (2018). The Plastic Number and its generalized polynomial. <https://doi.org/10.1080/23311835.2015.1023123> Acesso em: 20/06/2018.
- Koshy, T. (2018). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. In *Pure and Applied Mathematics*, volume 1, página ?p. John Wiley & Sons, N.York, 2 edição.
- Lívio, M. (2009). *Razão Áurea: a história de Φ , um número surpreendente*. Record, R.Janeiro, 4 edição.
- Marohnić, L. e Strmečki, T. (2012). Plastic number: Construction and applications. In *Advanced Research in Scientific Areas – Virtual Conference 2012*, volume 10, páginas 1523–1528, Bratislava. Natural science.
- Marohnić, L. e Strmečki, T. (2018). Plastic Number: Construction and Applications. *Advanced Research in Scientific Areas*. <https://bib.irb.hr/datoteka/628836.PlasticNumberConstruct.pdf> Acesso em: 23/05/2018.
- Martins, D. P. (2013). Sequências, Progressões e Séries: Uma Abordagem para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado, IM–UFBA, Salvador/BA.
- Melo, M. I. A. (2017). Razão áurea e números de Fibonacci : da teoria a prática através da fotografia. Dissertação de Mestrado, DM–PU/RJ, R.Janeiro.

- Miller, M. D. (1971). On generalized Fibonacci numbers. *The American Mathematical Monthly*, 78(10):1108–1109.
- Modalmais, B. (2021). Aprenda a usar Fibonacci na análise de tendência. <https://www.modalmais.com.br/blog/fibonacci> Acesso em: 08/01/2021.
- Morgado, A. C. e Pinto, P. C. (2015). *Matemática Discreta*. SBM, R.Janeiro.
- Oliveira, C. A. R. (2019). Composição musical e Fibonacci: a utilização da música como forma lúdica de aprendizagem. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFSJ, S. J. del-Rei/MG.
- Pacheco, A. M. (2013). Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência. Dissertação de Mestrado, ICET–UFMT, Cuiabá/MT.
- Padovan, R. (2002a). Dom Hans van der Laan and the Plastic Number. In *Nexus Network Journal*, volume 4, páginas 181–193p.
- Padovan, R. (2002b). *Dom Hans van der Laan and the Plastic Number*, páginas 181–193. Kim Williams Books, Florence.
- Pereira, J. R. V. (2018). Sequências e Séries Numéricas - Elementos Iniciais para Abordagem no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado, FCET–Unemat, Sinop/MT.
- Pereira, M. V. (2014). Recorrências - problemas e aplicações. Dissertação de mestrado, IE–UnB, Brasília/DF.
- Possebon, J. E. (2016). Fibonacci e a Razão Áurea: uma abordagem para o Ensino Básico. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFTO, Palmas/TO.
- Silva, C. S. (2019a). Recorrências para ensino médio: um passeio entre a matemática básica e a OBMEP. Dissertação de Mestrado, IM–UFAL, Maceió/AL.
- Silva, M. R. O. (2019b). Uma análise crítica às afirmações associadas a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci. Dissertação de Mestrado, CCE–UEM, Maringá/PR.
- Stewart, I. (2000). *L'univers des nombres*. Pour la Science, Paris.
- Stewart, I. (2009). *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Record, R.Janeiro.

- Vieira, R. P. M. (2019). A sequência de Padovan e o Número Plástico: uma análise prévia e a priori. Dissertação de Mestrado, IFCE, Fortaleza/CE.
- Vieira, R. P. M. e Alves, F. R. V. (2019). Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 15:24–40.
- Voet, C. e Schoonjans, Y. (2012). Benedictine thought as a catalyst for 20th century liturgical space: the motivation behind Dom Hans van der Laan's aesthetic church architecture. In *Proceeding of the 2nd International Conference of the Europa Architectural History of Network*, páginas 255–261, Germany. -.