Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

UMA EXPERIÊNCIA DE ABORDAGEM NO ENSINO DE PORCENTAGEM NO 8º ANO COM O AUXÍLIO DO MODELO DE BARRAS

Raquel Medina Amaral de Oliveira

2020

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Uma experiência de abordagem no ensino de porcentagem no 8º ano com o auxílio do modelo de barras

Raquel Medina Amaral de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 20/11/2020

Flávia Landim

Prof.ª Dra. Flávia Maria Pinto Ferreira Landim (IM/UFRJ)

Prof.ª Dra. Letícia Guimarães Rangel (CAP/UFRJ)

Bruna Moustapha Corrêa

Prof.ª Dra. Bruna Moustapha Corrêa (UNIRIO)

MLeal

Prof.ª Dra. Mariza Beatriz Bezerra Leal (IM/UFRJ)

Walcy Santos

Prof.ª Dra. Walcy Santos (IM/UFRJ)

Rio de Janeiro – novembro de 2020

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL.

NOVEMBRO DE 2020

OLIVEIRA, RAQUEL MEDINA AMARAL DE

UMA EXPERIÊNCIA DE ABORDAGEM NO ENSINO DE PORCENTAGEM NO 8º ANO COM O AUXÍLIO DO MODELO DE BARRAS

(Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática)

Trabalho de conclusão de curso – IM/UFRJ

1. Educação Matemática
2. Ensino Fundamental
3. Porcentagem
4. Representação Pictórica
5. Modelo de Barras
6. Resolução de problemas

DEDICATÓRIA

Aos meus educandos, por quem me dedico constantemente a aperfeiçoar minha aprendizagem, para que encontrem satisfação em estudar e compreender a matemática em minhas aulas.

"Pedi e se vos dará. Buscai e achareis. Batei e vos será aberto. Porque todo aquele que pede, recebe. Quem busca, acha. A quem bate, se abrirá." (Mateus7, 7-8)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, que me reservou a oportunidade de cursar o Mestrado Profissional, por guiar meus passos, sustentar meu ânimo e me chamar ao serviço dos irmãos.

Agradeço à minha orientadora Flávia Landim, por tudo que me ensinou enquanto minha professora no PROFMAT.

Agradeço à minha coorientadora Leticia Rangel, por ter me conduzido na área de pesquisa, estando sempre disponível, me orientando de maneira dedicada.

Agradeço à minha mãe, por me amar, me gerar, me ensinar a ser quem sou e pedir junto com Nossa Senhora a Jesus por minha proteção todos os dias, principalmente nos mais difíceis.

Agradeço ao meu esposo Sandro, por me ajudar a estudar para cursar as disciplinas do PROFMAT, e por me motivar a seguir em direção à conclusão do curso.

Agradeço à minha filha Samara, a quem eu amo tanto mais que a mim, que me apoia dizendo que quer ser minha aluna e que me declara que me ama até a Lua, ida e volta.

Agradeço aos meus sogros que foram presença de amor e estímulo para eu completar as atividades do Curso, me dando apoio constante e orando por mim nas provas.

Agradeço à minha cunhada e sua família por me compreenderem quando não pude estar presente, devido aos compromissos com estudo, e por orarem por mim.

Agradeço aos meus alunos, por colaborarem com meu trabalho ao resolverem as atividades propostas, acreditando na boa qualidade do ensino desenvolvido.

Agradeço aos meus professores e colegas do Curso de Mestrado Profissional PROFMAT, por colaborarem com o meu amadurecimento e sucesso profissional.

Agradeço à coordenação e à direção da Escola Municipal Cardeal Arcoverde, por apoiarem minha iniciativa de pesquisa e a aplicação das atividades pertinentes.

Agradeço à professora Giselle Esteves por colaborar com meu trabalho de pesquisa aplicando as atividades comigo nas nossas turmas do 8º ano da Escola Municipal Cardeal Arcoverde, e por zelar por este trabalho, intercedendo em oração.

Resumo do Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) apresentado ao IM/UFRJ como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UMA EXPERIÊNCIA DE ABORDAGEM NO ENSINO DE PORCENTAGEM NO 8º ANO COM O AUXÍLIO DO MODELO DE BARRAS

Raquel Medina Amaral de Oliveira

Novembro de 2020

Orientadora: Profa. Dra. Flávia Maria Pinto Ferreira Landim

Coorientadora: Profa. Dra. Leticia Guimarães Rangel

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar e discutir, no ensino de porcentagem no contexto da resolução de problemas, a aplicação do Modelo de Barras – estratégia de representação visual que usa retângulos de diferentes comprimentos para representar a magnitude e a relação entre as quantidades em um problema proposto em palavras e que está associado ao ensino de matemática de Singapura. Para tal relata-se e discute-se a aplicação do Modelo de Barras no ensino de porcentagem para turmas do 8º ano da Escola Municipal Cardeal Arcoverde, situada na capital do Rio de Janeiro.

Como parte do trabalho, propõe-se uma breve apresentação do Modelo de Barras e uma coletânea de atividades direcionadas à aplicação em sala de aula. Algumas dessas atividades foram selecionadas com base no estudo de enunciados de questões do PISA e do SAEB, além de referências que orientam o próprio ensino de matemática em Singapura.

Palavras-chave: Educação matemática; Ensino Fundamental; porcentagem; representação pictórica; Modelo de Barras; resolução de problemas.

Abstract

In percentage teaching in the context of problem solving, the present work aims to present and discuss the application of the Bar Model - visual representation strategy in percentage teaching in the context of problem solving. This particular strategy uses rectangles of different lengths to represent the magnitude and the relationship between the quantities in a problem. These visual representations are proposed in words and are associated with the instruction of Mathematics in Singapore. For such pourpose, the application of the Bar Model is discussed in eight grade percentage instruction from Municipal School Cardeal Arcoverde, located in the capital of Rio de Janeiro.

In addition to my research, a brief presentation of Bar Model class application is included. Some of these activities were selected based on the study of PISA and SAEB questions, as well as references that guide to teaching mathematics in Singapore.

Keywords: Mathematical education; Elementary Education; percentage; pictorial representation; bar model; problem solving.

Sumário

1 Apresentação

Com o presente trabalho, pretendo discutir o potencial da representação visual que marca o ensino de matemática de Singapura – o Modelo de Barras - para o ensino de porcentagem no contexto da resolução de problemas. Para tal foram selecionadas atividades desenvolvidas com base no estudo de enunciados de questões adequadas aos anos finais do Ensino Fundamental. Será explorada a resolução de problemas com o auxílio do Modelo de Barras visando favorecer a aprendizagem do conceito.

Minha motivação para explorar a aplicação do Modelo de Barras como estratégia de ensino teve início com a minha participação no Projeto Fundão. Mais especificamente, a intenção de observar a aplicação do Modelo de Barras no ensino de porcentagem surgiu no início do ano letivo de 2020, quando constatei que muitos de meus alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, nas aulas de Matemática e de Educação Financeira, da Escola Municipal Cardeal Arcoverde, no Rio de Janeiro/RJ, sabiam realizar isoladamente os cálculos pertinentes à obtenção da porcentagem de um valor, mas não aplicavam o conhecimento como etapa para a resolução de um problema.

Discutirei o uso do Modelo de Barras como ferramenta para amparar a aprendizagem a partir da resolução de problemas. Meu primeiro contato com o modelo pictórico se deu no Projeto Fundão Matemática, participando do grupo que investigava o tema sob a coordenação da professora Leticia Rangel. Tal recurso se baseia na representação pictórica para modelar problemas apresentados em palavras. O Modelo de Barras é adotado como parte do método de ensino de matemática em Singapura e, por essa razão, muitas vezes confundido com ele.

O Projeto Fundão, fundado pela professora emérita Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, se caracteriza como um importante espaço de formação de professores de matemática no Instituto de Matemática da UFRJ. Há 37 anos, o Projeto Fundão desenvolve ações de ensino, pesquisa e extensão, tendo como princípio metodológico a colaboração. Os grupos investigativos que o compõem envolvem licenciandos, professores da Educação Básica e professores que atuam na formação de professores. As atividades presenciais de seus grupos de pesquisa acontecem tradicionalmente todas as segundas-feiras à tarde no

Instituto de Matemática. O endereço eletrônico do Projeto é http://www.matematica.projetofundao .ufrj.br/.

Sobre o Modelo de Barras, também conhecido como "The Singapore Modeling Metodh", ou simplesmente SMM, destaca-se o entendimento de Clement, que investigou a influência do Método de Singapura na formação de professores do Ensino Fundamental:

> "Às vezes chamado de diagramas de fita (Murata, 2008), diagramas de tira (Beckmann, 2004) ou modelos de barras (Hoven & Garelick, 2007), o SMM usa retângulos de diferentes comprimentos para representar a magnitude e a relação entre as quantidades em um problema proposto em palavras. Como equações algébricas, esses diagramas não têm como objetivo ajudar os alunos a realizar as operações, mas ampará-los a decidir quais operações usar e a entender por que essas operações são conceitualmente corretas (Beckmann, 2004). Também se descobriu que esse método é "especialmente útil para problemas que envolvem comparações, cálculos de parte inteira, razões, proporções e taxas de mudança" (Hoven & Garelick, 2007, p. 28), os quais são criticamente fundamentais em resolução de problemas algébricos. Um aspecto do poder desse método é a versatilidade e outro é a simplicidade visual. O método do modelo é constituído por "uma série de geradores na forma de retângulos nos quais são representadas quantidades matemáticas (conhecidas e desconhecidas) e seus relacionamentos dados em um problema (Kho, 1987)" (Ho & Lowrie, 2014, p. 89). A utilidade do método é encontrada como sendo um "análogo visual que captura todas as informações fornecidas em um problema de palavras - fornecendo, portanto, uma visão global de todo o problema" (Ng & Lee, 2005, p. 62). Essa clareza visual ajuda os alunos a se moverem propositadamente em direção à tomada de decisão correta em vários contextos de resolução de problemas de matemática." (CLEMENT, 2017, p. 103-104, Tradução nossa.)

De acordo com Vygotsky, "mediação em termos genéricos é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento" (OLIVEIRA, 2002, p.26). Acreditamos que a aplicação do Modelo de Barras promove a mediação do aprendizado entre o concreto e o abstrato.

No decorrer do trabalho, abordarei mais especificamente a contribuição de tal representação pictórica para a resolução de problemas envolvendo porcentagem. Nesse processo serão usados um diagrama de formato retangular, em que são registradas quantidades específicas, e uma escala percentual associada, distinguindo assim os valores absoluto e relativo (porcentual).

O objetivo deste trabalho, baseado em uma sequência didática realizada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Educação do Rio de Janeiro, é investigar e discutir o potencial do Modelo de Barras para auxiliar a aprendizagem do estudante na resolução de problemas sobre porcentagem.

Apresentarei, com base na aplicação do Modelo de Barras, as resoluções de problemas presentes em avaliações externas e em livros didáticos, desenvolvidas em sala de aula com os alunos das minhas duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, bem como o relato de uma aula realizada em parceria com a professora de inglês das turmas. No entanto, não pretendo comparar tal abordagem com outra estratégia metodológica. O objetivo não é estabelecer análise comparativa nem juízo de valor, mas explorar a aplicação do Modelo de Barras como estratégia de mediação no processo de ensino e aprendizagem de porcentagem.

Ainda na perspectiva do processo de aprendizagem, ao longo deste trabalho apontarei as habilidades presentes na Base Nacional comum Curricular nos anos finais do Ensino fundamental, referentes ao objeto de conhecimento porcentagem. Comentarei as articulações entre essas habilidades, que favorecem a utilização do Modelo de Barras na resolução de problemas, para produzir conhecimentos sobre porcentagem.

Finalmente, mencionarei o impacto da interrupção das aulas, devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (covid-19) neste trabalho – certamente, um aprendizado pessoal. Disponibilizarei ainda uma coletânea de questões, para ajudar o professor que desejar utilizar a abordagem do Modelo de Barras em suas aulas de porcentagem.

2 Referencial Teórico e Planejamento da Sequência Didática

Nesta seção, serão apresentados de maneira articulada as referências teóricas que sustentaram o planejamento da sequência didática e o planejamento em si. Essa decisão se justifica pelo fato de que a pesquisa se desenvolveu desde o momento em que a ideia da sequência didática surgiu. A elaboração do plano de ação didática motivou o estudo, a investigação e a pesquisa, que, por sua vez, sustentaram o planejamento da sequência didática.

2.1 Um novo componente na matriz curricular no 8º ano: Educação Financeira

O componente curricular Educação Financeira foi incorporado oficialmente ao currículo do 8º e do 9º ano das Escolas Municipais do Rio de Janeiro no presente ano letivo, que até então não se configurava uma disciplina. Educação financeira envolve o conteúdo de porcentagem. Ministrar tal disciplina ofereceu a oportunidade de desenvolver a investigação sobre a aplicação do Modelo de Barras em contextos de porcentagem.

A circular E/SUBE n.º 08 de 10 de Janeiro de 2020, enviada às Escolas Municipais do Rio de Janeiro pela Secretaria Municipal de Educação, com as diretrizes pedagógicas dos componentes da matriz curricular 2020, apresentava uma proposta de formação para os professores que ministrariam a Educação Financeira, prevista para o ano letivo:

> Ressaltamos que ao longo do semestre, a E/SUBE promoverá formações, disponibilizará links com vídeos, referências bibliográficas e sugestões metodológicas para o trabalho com esses novos componentes. (RIO DE JANEIRO (Cidade), 2020, p. 1)

O início das aulas de Educação Financeira foi marcado por um diálogo com os estudantes sobre suas expectativas a respeito dos conteúdos do novo componente curricular. Por exemplo, os estudantes falaram sobre o orçamento familiar e a importância do planejamento financeiro para a aquisição de artigos de necessidade (como itens para manutenção da casa) ou de interesse deles (como roupas e celulares). Parte dos educandos tinha alguma ideia do que significava o “valor do dinheiro” - Por exemplo, reconheciam que antes do reajuste de preços conseguiam comprar 5 pães por 2 reais e, após o reajuste, apenas 3 pães. Além disso, estavam muito interessados em comentar o que viram em placas nas ruas de Madureira, que estavam indicando percentuais, e que gostariam de entender seu significado. Outros, ainda, questionavam a diferença entre compras à vista e a prazo, muito propagandeadas no bairro, nas lojas próximas à escola.

Foi possível inferir a importância da contribuição que a Educação Financeira traria para o dia a dia dos educandos, e dos seus familiares, no sentido de levá-los a compreender e a aplicar conceitos matemáticos com mais confiança em seus atos e suas tomadas de decisões.

O documento já mencionado da E/SUBE, versa sobre as orientações do componente curricular Educação Financeira, para os professores que a lecionam no 8º e 9º anos da rede. O mesmo dita como objetivo geral o seguinte "Desenvolver alternativas metodológicas alinhadas às necessidades e interesses do educando, visando ao seu crescimento como cidadão autônomo e protagonista de suas ações, tornando-se capaz de fazer suas escolhas com qualidade." (RIO DE JANEIRO, 2020, p. 16).

Podemos compreender que cabe ao docente encontrar meios de atrair os estudantes para o estudo de conceitos e procedimentos matemáticos, que possam ser aplicados por eles com autonomia, em situações problema relativas à sua vida pessoal e familiar sob o contexto da economia, minimizando a distância entre a teoria ensinada na escola e a prática.

Dentre os objetivos específicos apontados no documento, destacaremos aqui dois:

- "Inserir a educação financeira no cotidiano do aluno, buscando mudança comportamental;
- Apresentar ao aluno informações do mundo financeiro para que o mesmo tenha possibilidade de agir com independência em suas decisões."

O primeiro desses objetivos nos faz refletir que a participação dos educandos na administração do dinheiro, em seu ambiente familiar, poderá se modificar, na medida em que aplicarem os conceitos aprendidos nas aulas de educação financeira.

Tendo em consideração essa suposição, julgamos que, associadas à experiência individual do educando, as experiências em grupo realizadas em sala de aula ampliariam o seu senso crítico com relação às finanças da família.

Imaginamos que temas como valor e preço, os gastos de um indivíduo e a colaboração do educando na economia de gastos de sua família, poderiam ser trabalhados em discussões produtivas na sala de aula, a partir de tarefas que direcionassem essa reflexão, levando ao entendimento mútuo, culminando para a mudança comportamental desejada.

Acreditamos que, no ambiente escolar, a intervenção pedagógica colabora para que o sujeito percorra caminhos de desenvolvimento à medida que passa por experiências de aprendizagem. Assim sendo, não bastaria conhecer as experiências com finanças trazidas pelos estudantes, mas seria preciso também oferecer-lhes atividades desafiadoras de resolução de problemas, para ampliar o desenvolvimento da sua aprendizagem.

A respeito da dinâmica relação entre aprendizado e desenvolvimento, Vygotsky define a zona de desenvolvimento proximal:

> "Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes." (VYGOSTSKY, 1991, p.58.)

Entendemos que a resolução de problemas sobre porcentagem contribuiria para a ampliação da zona de desenvolvimento proximal, à medida que favoreceria a reflexão, a formulação de hipóteses e a troca de conhecimentos sobre aumentos e descontos, juros, inflação e outros temas pertinentes à Educação Financeira.

O segundo objetivo específico citado nos remete à teoria de aprendizagem significativa: "... o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; descubra isso e ensine-o de acordo." (AUSUBEL, 1968, apud MOREIRA, 1999, p.163)

Ao levantar aquilo que os educandos já sabem sobre o mundo financeiro, nas conversas do professor com a turma, são descobertos alguns de seus conhecimentos prévios. Estes conhecimentos seriam uma ponte para revelar aos estudantes fundamentos matemáticos, que poderiam aplicar em seus julgamentos e tomadas de decisões.

Não desconsiderando a relevância de ações de formação continuada para professores, entendemos que iniciativas pessoais e autorais de professores podem e devem ser realizadas.

O professor poderia elaborar um material atrativo, tal que os estudantes fossem motivados a relacionar o conteúdo ensinado aos conceitos já adquiridos, para encadear os novos conhecimentos à sua realidade cultural, uma vez que já trazem consigo ideias, informações e interesse sobre educação financeira.

Conforme assinala Terra:

> “Partindo do pressuposto que o aluno já possui um conhecimento prévio em lidar com as questões financeiras, mesmo que superficialmente, conclui-se que esse conhecimento servirá como “ancoradouro provisório”, ou seja, como recurso didático facilitador para a nova aprendizagem significativa, visto que esta ocorre quando novos conceitos, ideias, proposições, presentes na Matemática Financeira, interagem com outros conceitos, ideias e proposições já existentes em sua estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados e contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade.” (TERRA, 2009, p.5)

Compreendemos que a aprendizagem significativa colaboraria para a formação do educando como cidadão protagonista. Ela iria ao encontro do objetivo geral do componente da matriz curricular, na medida em que os problemas relativos à Educação Financeira contivessem situações de negociação, que provocassem o estudante a testar hipóteses e desenvolver o pensamento crítico para atuar na sociedade.

Porcentagem é certamente um assunto inerente ao ensino de matemática financeira. Assim surgia a possibilidade de investigação sobre o ensino de porcentagem, ainda que não fosse um assunto específico dos anos escolares em questão. A proposta é investigar o ensino de porcentagem a partir do Modelo de Barras.

2.2 Porcentagem no contexto da Educação Básica

Na Educação Básica, o conceito de porcentagem tradicionalmente costuma estar relacionado à ideia de proporcionalidade e, portanto, aos conceitos de razão e de proporção.

Uma razão expressa uma relação entre duas quantidades de uma mesma grandeza e medidas a partir de uma mesma unidade: diz-se que duas quantidades não nulas de mesma grandeza x e y, medidas a partir de uma mesma unidade, estão na razão x para y, denotada por x:y, se para cada x unidades da primeira quantidade correspondem y unidades da segunda.

A razão entre duas quantidades não é em si um número, mas uma relação. No entanto, é possível, considerando condições adequadas, associar a razão $x{:}y$ à fração $\frac{x}{y}$. Nesse caso, x e y devem ser quantidades inteiras e a fração $\frac{x}{y}$ indica que uma unidade da primeira quantidade corresponde a $\frac{x}{y}$ unidades da segunda quantidade. Wu (2011) estende tal ideia definindo a razão entre duas quantidades (racionais) não nulas M e N (de uma mesma grandeza e medidas em termos da mesma unidade) como o quociente entre essas quantidades, que é corresponde à uma fração (complexa) $\frac{a}{b}$ tais que a e b são não nulos. Assim, $\frac{M}{N} = \frac{a}{b}$. Wu entende por fração complexa o quociente entre duas frações.

O conceito de razão é elementar para a ideia de proporção. Uma proporção é a igualdade entre duas razões. De maneira geral, tem-se que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$.

A relação percentual entre duas quantidades está associada a determinação de uma razão específica entre elas, aquela que relaciona uma quantidade da primeira a uma centena da segunda.

Nasser (2010), em seu livro Matemática Financeira para a Escola Básica: uma abordagem prática e visual, define porcentagem como toda razão $\frac{x}{y}$, na qual $y = 100$. A razão $\frac{x}{100}$ é também indicada por $x\%$, sendo o símbolo % uma abreviação da expressão “por cento”. Cabe observar que na definição apresentada por Nasser x é entendido como número racional.

Consideremos o exemplo a seguir, que ilustra uma abordagem introdutória da porcentagem no Ensino fundamental:

Na casa de João há sessenta balas
Todas elas bem docinhas
Doze são dele, trinta são de Maria
E as outras dezoito são da Ritinha.

Note que João possui 12 das 60 balas, ou seja, $\frac{12}{60}$. Tal razão é igual à razão 20/100, ou seja, 20%.

$$\frac{12}{60} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 12\,.\,100 = 20\,.\,60 \quad \text{ou} \quad \frac{12^{:6}}{60_{:6}} = \frac{2^{\times 10}}{10_{\times 10}} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Dessa forma, a quantidade de balas de João pode ser expressa como 20% do total.

De maneira análoga, a quantidade de balas de Maria, ou seja, 30 de 60 pode ser expressa percentualmente como 50%. Já a de Ritinha, 18 de 60, corresponde a 30%.

$$\frac{30}{60} = \frac{50}{100} \Leftrightarrow 30\,.\,100 = 50\,.\,60 \quad \text{ou} \quad \frac{30^{:6}}{60_{:6}} = \frac{5^{\times 10}}{10_{\times 10}} = \frac{50}{100} = 50\%\ ,$$

$$\frac{18}{60} = \frac{50}{100} \Leftrightarrow 18\,.\,100 = 30\,.\,60 \quad \text{ou} \quad \frac{18^{:6}}{60_{:6}} = \frac{3^{\times 10}}{10_{\times 10}} = \frac{30}{100} = 30\%$$

O exemplo anterior reflete um caso particular em que as quantidades envolvidas são números inteiros. Nem sempre é assim. Consideremos o seguinte problema, apresentado em NASSER (2010):

> *Amauri anunciou sua bicicleta por R$800,00, Como estava precisando de dinheiro, aceitou vender sua bicicleta a um amigo com um desconto de R$100,00 sobre o preço pedido. Qual foi a taxa percentual do desconto concedido?*

Nesse caso, a taxa percentual correspondente ao desconto é obtida pela razão

$$\frac{100}{800} = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\ \%.$$

Wu (2011) acredita que é dito aos estudantes, sem maior explicação, que “N% de algo” pode ser interpretado como o total de N partes quando esse algo é dividido em 100 partes iguais. O autor defende que tal fato é consequência lógica da definição e ilustra sua afirmação a partir de um exemplo. Wu considera que, por definição, a afirmação: “7 1/2% de 512 dólares” significa a totalidade de 7 ½ das partes obtidas com a divisão de 512 dólares em 100 partes iguais. Segundo o autor, 7 ½ % é igual a fração complexa $\frac{7\frac{1}{2}}{100}$. Assim,

$$\frac{7\frac{1}{2}}{100} \text{ de } 512 =$$

$$\frac{7\frac{1}{2}}{100} \times 512 = 7\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{100} \times 512\right) =$$

“7 ½ das partes obtidas com a divisão de 512 dólares em 100 partes iguais”

Lima e seus colaboradores (LIMA et al, 2006) destacam, a partir de apenas a apresentação de soluções para um exemplo três métodos usados para resolver problemas de proporcionalidade, que é o caso de porcentagem: (i) método direto, (ii) redução à unidade e (iii) proporção.

O método direto, segundo os autores, cabe apenas “quando os dados são pequenos ou fáceis” (LIMA et al, p. 1, aspas como no original). Entendemos que Lima e seus colaboradores associam tal método à possibilidade de executar cálculos pertinentes mentalmente. Para esses autores, redução à unidade corresponde a um “esquema” que organiza e relaciona a partir de linhas e colunas quantidades percentuais e absolutas. Nesse caso, pode-se determinar a quantidade absoluta correspondente a 1% e posteriormente a quantidade pretendida. No terceiro método, os dados e suas relações são representados por razões e aplica-se a propriedade fundamental das proporções. Entendemos que não cabe estabelecer hierarquia de valor entre os métodos distinguidos por Lima e seus colaboradores nem que possam ser percebidos como disjuntos.

Consideraremos o exemplo a seguir e os três tipos de soluções distinguidas por esses autores.

Há 500 pessoas em um concerto e 30% delas são crianças.
Quantas crianças há no concerto?

Solução pelo método direto: Como 30% equivale a $\frac{3}{10}$ = e como $\frac{1}{10}$ de 500 são 50, há 150 crianças no concerto.

Solução pela redução à unidade: A relação proporcional entre porcentagem e quantidade de pessoas fica estabelecida esquematicamente como a seguir. Nas linhas são identificadas as correspondências entre porcentagem e quantidades absolutas e nas colunas a variação por expressão numérica:

	%		Pessoas	
	100%	——	500	
$\div$ 100				$\div$ 100
	1%	——	5	
$\times$ 30				$\times$ 30
	30%	——	150	

Solução por proporção: Neste caso, a quantidade a ser determinada é identificada pela incógnita x.

$$\frac{100}{30} = \frac{500}{x} \Leftrightarrow 100 \cdot x = 30 \cdot 500 \Leftrightarrow x = 150$$

Portanto, há 150 crianças no concerto.

No contexto brasileiro o cálculo de porcentagem é frequentemente associado ao procedimento conhecido por “regra de três”, que pode ser entendido como uma composição da tabela que ampara a solução por redução à unidade e a solução por proporção, propostas por Lima e seus colaboradores.

%		pessoas
100%	——	500
30%	——	x

$$\frac{100}{30} = \frac{500}{x} \Leftrightarrow 100 \cdot x = 30 \cdot 500$$

$$x = 150$$

Cabe observar que a regra de três é ensinada no contexto de proporcionalidade, exigindo, em sua aplicação, a análise quanto às grandezas serem direta ou inversamente proporcionais. Os contextos de porcentagem estão associados a proporcionalidade direta.

Tinoco (1996) faz uso da regra de três na abordagem de problemas que envolvem proporcionalidade em vários contextos. Ainda que o tópico porcentagem não seja detalhado especificamente no texto, a autora destaca que “a resolução de problemas conhecidos como de “regra de três” pode e deve ser feita sem regra pré-estabelecida e é uma aplicação direta dos conceitos de proporcionalidade direta e inversa. Esse nome é dispensável e mesmo questionável".

Wu (2011) ilustra por meio de exemplos dados pelo depoimento de uma professora três situações em que porcentagem é abordada na educação básica:

> Eu tive muita dificuldade em ensinar os três tipos de problemas envolvendo porcentagem:
>
> 15% de 20 como fazer a conta?
> Que % de 20 é 3?
> 3 é 15% de qual número?
>
> No início de minha carreira de professor, ensinava meus alunos a resolver esses problemas da mesma maneira que os havia aprendido. No primeiro tipo, os alunos foram ensinados a representar a porcentagem como decimal movendo o ponto decimal duas casas para a esquerda e multiplicando os dois números juntos. No segundo e terceiro tipos, os alunos foram ensinados a dividir os dois números. . . . Este ano eu decidi ensinar porcentagem através de proporções. . . . Quanto é 20 por cento de 3? Mais uma vez, meus alunos usaram grades para ajudá-los a escrever e resolver proporções. . . . Ensinei os alunos a resolver a proporção relacionada usando a multiplicação cruzada: $\frac{x}{100} = \frac{3}{20}$, em que x representa 15% de 20... (Wu, 2011, p.320)

Podemos distinguir as abordagens destacadas no depoimento da professora a partir da observação de estratégias tradicionais de solução. Por exemplo, o primeiro caso, cálculo de 15% de 20, pode ser efetuado observando 15% como um operador multiplicativo. Assim,

$$15\%\ de\ 20 = \frac{15}{100} \times 20 = 3$$

O segundo e o terceiro casos, observando a classificação de Lima e seus colaboradores, podem ser resolvidos, por exemplo, por proporção ou por redução a unidade. Também podem ser resolvidos por regra de três. Nesses casos, não cabe aplicar diretamente a proporção como operador multiplicativo.

O segundo caso, que corresponde a determinar que percentual 3 é de 20, poderia ser resolvido, por exemplo, da seguinte forma:

%		Quantidade absoluta
100%	—	20
10%	—	2
5%	—	1
15%	—	3

Já o terceiro caso, determinar uma quantidade conhecido que 15% dessa quantidade é 3, poderia ser resolvido pela aplicação direta da propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{15}{100} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow 15\,x = 300 \Leftrightarrow x = 20\,.$$

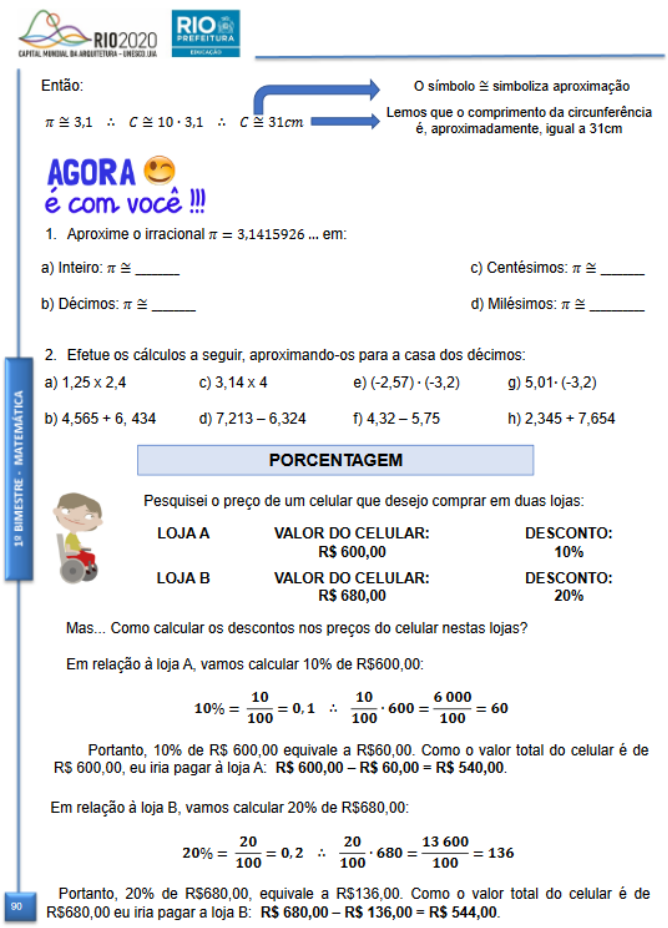
Essas são as estratégias tradicionalmente exploradas em sala de aula. O depoimento dessa professora certamente poderia ser o de muitos professores de matemática (inclusive o meu). No entanto, entendemos que devemos ir além dos recursos perpetuados (que são os que usei enquanto aluna), transpondo barreiras, experimentando novos modelos, ampliando e explorando recursos. Aqui pretendemos fazer isso com a abordagem a partir do Modelo de Barras.

2.3 A abordagem da porcentagem no Material Didático Carioca 2020 do 8º ano

Tendo em vista a possibilidade de as aulas de matemática darem suporte ao andamento das aulas de Educação Financeira, que tem apenas um tempo de aula semanal, o Material Didático Carioca do 1º semestre de 2020 para o 8º ano (RIO DE JANEIRO, 2020), disponível para todos os alunos, ganhou especial atenção. Destaca-se a observação da proposta de abordagem de porcentagem, que segundo o sumário concentrava-se nas páginas 90 e 91 do referido material.

Na página 90, encontra-se um problema que informa os preços de um celular em duas lojas e o desconto percentual a ser aplicado na venda por cada loja (FIGURA 1). Tanto os preços como os descontos são diferentes, há a discussão sobre como calcular os descontos nos preços e em qual das lojas o preço final ficaria menor. A porcentagem é tratada como operador multiplicativo. Assim,

$$10\%\ de\ 600 = \frac{10}{100} \times 600$$



RIO2020 CAPITAL MUNDIAL DA ARQUITETURA - UNESCO UIA

RIO PREFEITURA EDUCAÇÃO

Então:

$\pi \cong 3{,}1 \quad \therefore \quad C \cong 10 \cdot 3{,}1 \quad \therefore \quad C \cong 31cm$

O símbolo ≅ simboliza aproximação

Lemos que o comprimento da circunferência é, aproximadamente, igual a 31cm

AGORA é com você !!!

1. Aproxime o irracional $\pi = 3{,}1415926 \ldots$ em:

a) Inteiro: $\pi \cong$ _____

b) Décimos: $\pi \cong$ _____

c) Centésimos: $\pi \cong$ _____

d) Milésimos: $\pi \cong$ ______

2. Efetue os cálculos a seguir, aproximando-os para a casa dos décimos:

a) 1,25 x 2,4

b) 4,565 + 6, 434

c) 3,14 x 4

d) 7,213 – 6,324

e) (-2,57) · (-3,2)

f) 4,32 – 5,75

g) 5,01· (-3,2)

h) 2,345 + 7,654

PORCENTAGEM

Pesquisei o preço de um celular que desejo comprar em duas lojas:

LOJA A	**VALOR DO CELULAR: R$ 600,00**	**DESCONTO: 10%**
LOJA B	**VALOR DO CELULAR: R$ 680,00**	**DESCONTO: 20%**

Mas... Como calcular os descontos nos preços do celular nestas lojas?

Em relação à loja A, vamos calcular 10% de R$600,00:

$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1 \quad \therefore \quad \frac{10}{100} \cdot 600 = \frac{6\,000}{100} = 60$$

Portanto, 10% de R$ 600,00 equivale a R$60,00. Como o valor total do celular é de R$ 600,00, eu iria pagar à loja A: **R$ 600,00 – R$ 60,00 = R$ 540,00**.

Em relação à loja B, vamos calcular 20% de R$680,00:

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2 \quad \therefore \quad \frac{20}{100} \cdot 680 = \frac{13\,600}{100} = 136$$

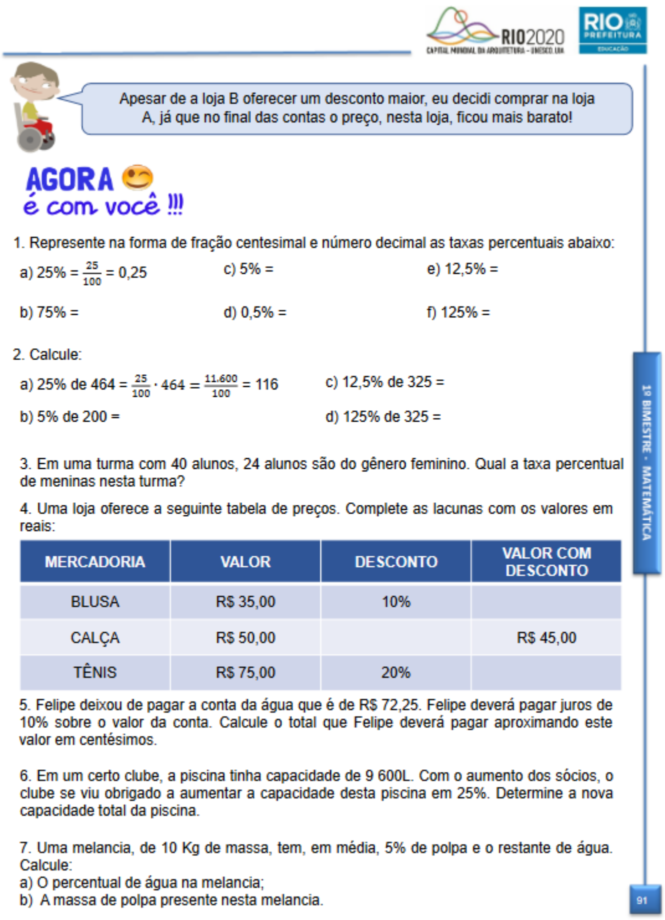
Portanto, 20% de R$680,00, equivale a R$136,00. Como o valor total do celular é de R$680,00 eu iria pagar a loja B: **R$ 680,00 – R$ 136,00 = R$ 544,00**.

1º BIMESTRE - MATEMÁTICA

90

Figura 1 – Reprodução da página 90 do Material Didático Carioca 8º ano 2020 (RIO DE JANEIRO, 2020)

Na página 91 (Figura 2), há uma relação de sete exercícios, intitulados por “Agora é com você”, sendo o primeiro para o educando representar as taxas percentuais na forma de fração centesimal e número decimal, o segundo para o treinamento do cálculo da porcentagem de um número, e os cinco demais são problemas sobre determinação de taxa percentual relativa a uma mudança de valor e sobre o cálculo do valor absoluto de um item, após a aplicação de taxa percentual.



RIO2020 CAPITAL MUNDIAL DA ARQUITETURA - UNESCO UIA

RIO PREFEITURA EDUCAÇÃO

Apesar de a loja B oferecer um desconto maior, eu decidi comprar na loja A, já que no final das contas o preço, nesta loja, ficou mais barato!

AGORA é com você !!!

1. Represente na forma de fração centesimal e número decimal as taxas percentuais abaixo:

a) 25% = $\frac{25}{100}$ = 0,25 c) 5% = e) 12,5% =

b) 75% = d) 0,5% = f) 125% =

2. Calcule:

a) 25% de 464 = $\frac{25}{100} \cdot 464 = \frac{11.600}{100} = 116$ c) 12,5% de 325 =

b) 5% de 200 = d) 125% de 325 =

3. Em uma turma com 40 alunos, 24 alunos são do gênero feminino. Qual a taxa percentual de meninas nesta turma?

4. Uma loja oferece a seguinte tabela de preços. Complete as lacunas com os valores em reais:

MERCADORIA	VALOR	DESCONTO	VALOR COM DESCONTO
BLUSA	R$ 35,00	10%	
CALÇA	R$ 50,00		R$ 45,00
TÊNIS	R$ 75,00	20%	

5. Felipe deixou de pagar a conta da água que é de R$ 72,25. Felipe deverá pagar juros de 10% sobre o valor da conta. Calcule o total que Felipe deverá pagar aproximando este valor em centésimos.

6. Em um certo clube, a piscina tinha capacidade de 9 600L. Com o aumento dos sócios, o clube se viu obrigado a aumentar a capacidade desta piscina em 25%. Determine a nova capacidade total da piscina.

7. Uma melancia, de 10 Kg de massa, tem, em média, 5% de polpa e o restante de água. Calcule:
a) O percentual de água na melancia;
b) A massa de polpa presente nesta melancia.

1º BIMESTRE - MATEMÁTICA

91

Figura 2 – Reprodução da página 91 do Material Didático Carioca 8º ano 2020 (RIO DE JANEIRO, 2020)

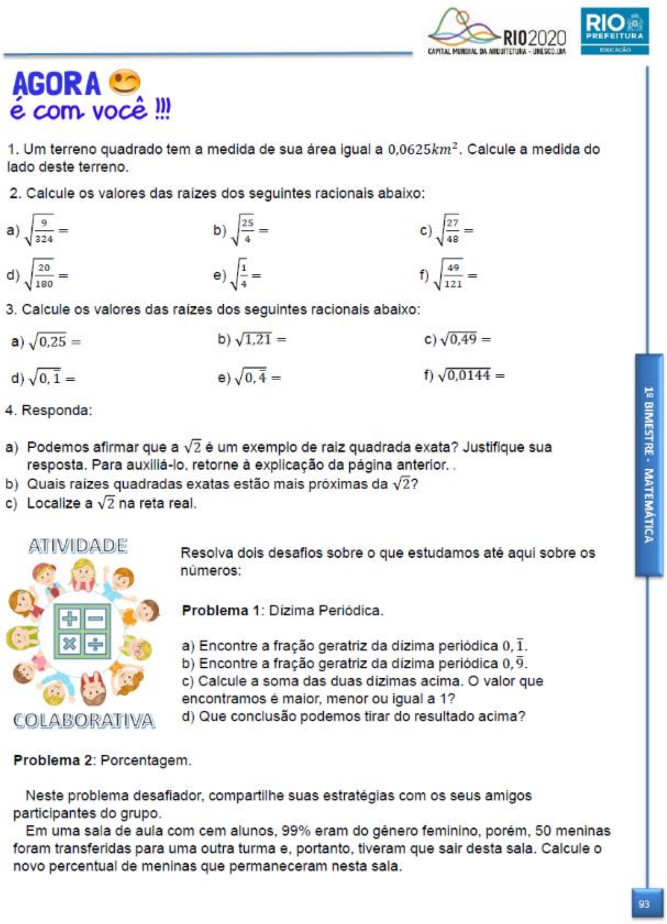
Observamos que o material adotado na Rede não oferece nas páginas mencionadas recursos visuais para mediar o ensino e a aprendizagem do assunto porcentagem. Na exposição do tema, há apenas texto e cálculos aritméticos.

Nos dois primeiros exercícios propostos na página 91 (Figura 2), o estudante encontra somente a comunicação textual, somada a um item resolvido por cálculos, que funciona como um exemplo. Novamente a solução trata a porcentagem como um operador:

$$25\% \; de \; 464 = \frac{25}{100} \times 464$$

No quarto exercício, o estudante deve completar três lacunas de uma tabela sobre o valor de uma mercadoria com desconto, dados o valor inicial e a taxa percentual de desconto a ser aplicada, ou sobre o desconto concedido, dados os valores inicial e final da mercadoria, sendo solicitado que as respostas estejam em reais. Nos demais exercícios, há problemas produzidos textualmente, cujos temas são: a separação de alunos por gênero feminino e masculino; o valor aproximado a ser pago em atraso por uma conta de água; o aumento da capacidade de água de uma piscina e a massa de polpa e o percentual de água, presentes em uma melancia. Não são apresentadas soluções, no entanto, todos os problemas propostos podem ser resolvidos diretamente pela aplicação de porcentagem como operador. Em todos se deve calcular “x% de um valor dado”.

Consideramos a hipótese de a abordagem de porcentagem ter sido retomada em páginas seguintes à 91, mesmo não havendo referência no sumário. Investigando as demais páginas, encontramos: (i) na página 93, em um box denominado atividade colaborativa, um problema envolvendo valor absoluto e valor relativo, ilustrado na Figura 3.


RIO2020
CAPITAL MUNDIAL DA ARQUITETURA - UNESCO.UIA
RIO PREFEITURA
EDUCAÇÃO

AGORA
é com você !!!

1. Um terreno quadrado tem a medida de sua área igual a $0{,}0625km^2$. Calcule a medida do lado deste terreno.

2. Calcule os valores das raízes dos seguintes racionais abaixo:

a) $\sqrt{\frac{9}{324}} =$ b) $\sqrt{\frac{25}{4}} =$ c) $\sqrt{\frac{27}{48}} =$

d) $\sqrt{\frac{20}{180}} =$ e) $\sqrt{\frac{1}{4}} =$ f) $\sqrt{\frac{49}{121}} =$

3. Calcule os valores das raízes dos seguintes racionais abaixo:

a) $\sqrt{0{,}25} =$ b) $\sqrt{1{,}21} =$ c) $\sqrt{0{,}49} =$

d) $\sqrt{0,\overline{1}} =$ e) $\sqrt{0,\overline{4}} =$ f) $\sqrt{0{,}0144} =$

4. Responda:

a) Podemos afirmar que a $\sqrt{2}$ é um exemplo de raiz quadrada exata? Justifique sua resposta. Para auxiliá-lo, retorne à explicação da página anterior. .
b) Quais raízes quadradas exatas estão mais próximas da $\sqrt{2}$?
c) Localize a $\sqrt{2}$ na reta real.

ATIVIDADE COLABORATIVA

Resolva dois desafios sobre o que estudamos até aqui sobre os números:

Problema 1: Dízima Periódica.

a) Encontre a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{1}$.
b) Encontre a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{9}$.
c) Calcule a soma das duas dízimas acima. O valor que encontramos é maior, menor ou igual a 1?
d) Que conclusão podemos tirar do resultado acima?

Problema 2: Porcentagem.

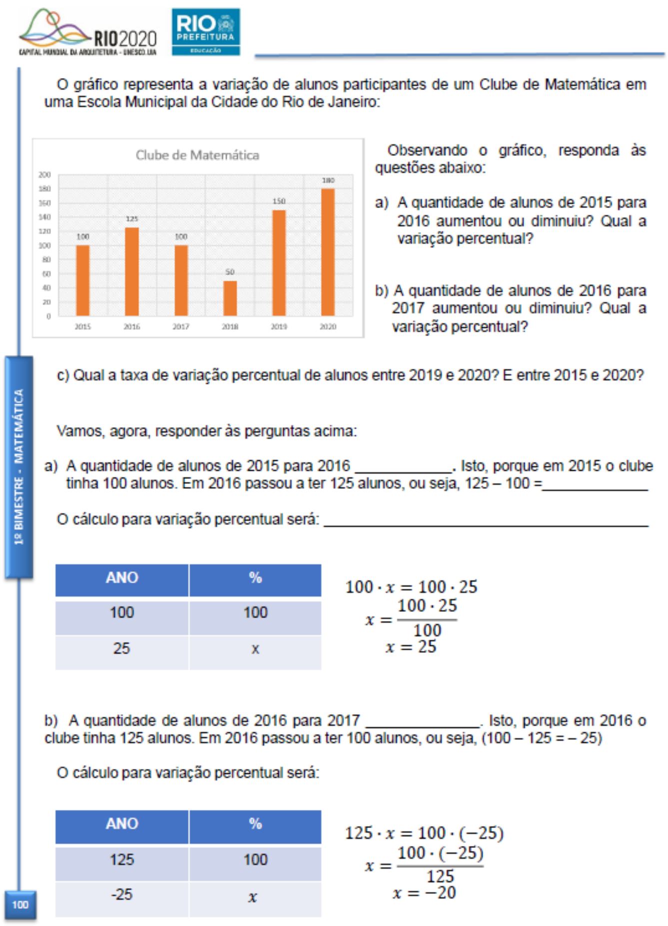
Neste problema desafiador, compartilhe suas estratégias com os seus amigos participantes do grupo.
Em uma sala de aula com cem alunos, 99% eram do gênero feminino, porém, 50 meninas foram transferidas para uma outra turma e, portanto, tiveram que sair desta sala. Calcule o novo percentual de meninas que permaneceram nesta sala.

1º BIMESTRE - MATEMÁTICA

93

Figura 3 – Reprodução da página 93 do Material Didático Carioca 8º ano 2020 (RIO DE JANEIRO, 2020)

Neste caso, não caberia a aplicação direta de porcentagem como operador multiplicativo. A forma de solucionar não é discutida; (ii) na seção de Estatística e Probabilidade, que vai das páginas 98 a 103 e 107 a 109, o ensino do cálculo da variação percentual é tratado a partir da observação de um modelo e por meio da regra de três (simples), como ilustrado na Figura 4.



O gráfico representa a variação de alunos participantes de um Clube de Matemática em uma Escola Municipal da Cidade do Rio de Janeiro:

Observando o gráfico, responda às questões abaixo:

a) A quantidade de alunos de 2015 para 2016 aumentou ou diminuiu? Qual a variação percentual?

b) A quantidade de alunos de 2016 para 2017 aumentou ou diminuiu? Qual a variação percentual?

c) Qual a taxa de variação percentual de alunos entre 2019 e 2020? E entre 2015 e 2020?

Vamos, agora, responder às perguntas acima:

a) A quantidade de alunos de 2015 para 2016 ____________. Isto, porque em 2015 o clube tinha 100 alunos. Em 2016 passou a ter 125 alunos, ou seja, 125 – 100 =____________

O cálculo para variação percentual será: ____________________________

ANO	%
100	100
25	x

$$100 \cdot x = 100 \cdot 25$$
$$x = \frac{100 \cdot 25}{100}$$
$$x = 25$$

b) A quantidade de alunos de 2016 para 2017 ____________. Isto, porque em 2016 o clube tinha 125 alunos. Em 2016 passou a ter 100 alunos, ou seja, (100 – 125 = – 25)

O cálculo para variação percentual será:

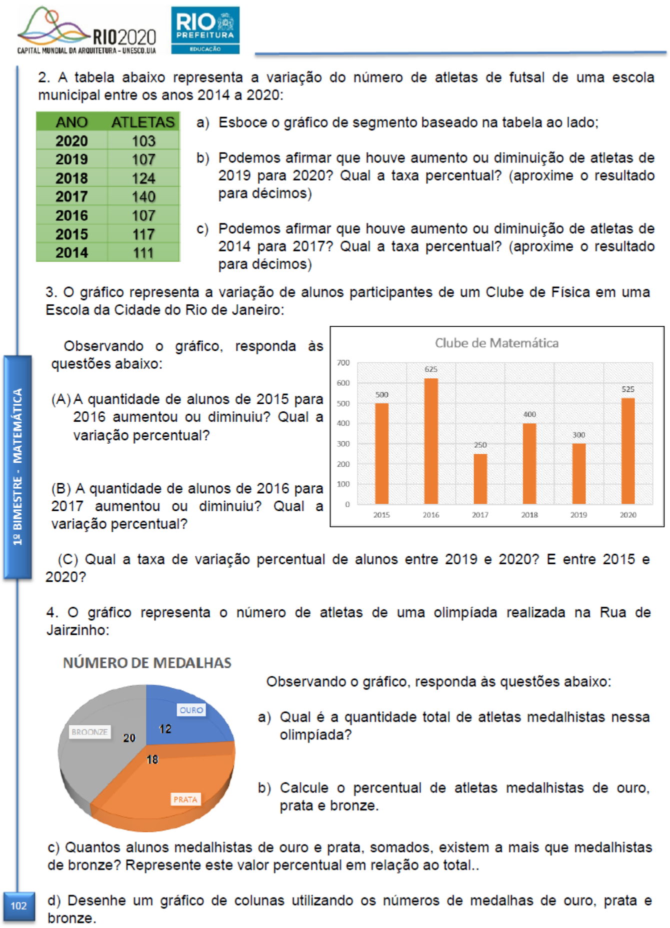
ANO	%
125	100
-25	x

$$125 \cdot x = 100 \cdot (-25)$$
$$x = \frac{100 \cdot (-25)}{125}$$
$$x = -20$$

Figura 4 – Reprodução da página 100 do Material Didático Carioca 8º ano 2020 (RIO DE JANEIRO, 2020)

De fato, o assunto porcentagem seria retomado ao longo do primeiro bimestre no Material Didático Carioca do 8º ano, porém sob a abordagem de procedimentos algébricos ou aritméticos, sem qualquer destaque para abordagens baseadas em representação pictórica.

Alguns problemas apresentam tabelas ou gráficos de setores, de segmentos ou de barras, solicitando que o estudante faça leituras diretas de informações ou que determine a variação percentual, como ilustrado na Figura 5.


RIO2020 CAPITAL MUNDIAL DA ARQUITETURA - UNESCO.UIA
RIO PREFEITURA EDUCAÇÃO

1º BIMESTRE - MATEMÁTICA

2. A tabela abaixo representa a variação do número de atletas de futsal de uma escola municipal entre os anos 2014 a 2020:

ANO	ATLETAS
2020	103
2019	107
2018	124
2017	140
2016	107
2015	117
2014	111

a) Esboce o gráfico de segmento baseado na tabela ao lado;

b) Podemos afirmar que houve aumento ou diminuição de atletas de 2019 para 2020? Qual a taxa percentual? (aproxime o resultado para décimos)

c) Podemos afirmar que houve aumento ou diminuição de atletas de 2014 para 2017? Qual a taxa percentual? (aproxime o resultado para décimos)

3. O gráfico representa a variação de alunos participantes de um Clube de Física em uma Escola da Cidade do Rio de Janeiro:

Observando o gráfico, responda às questões abaixo:

(A) A quantidade de alunos de 2015 para 2016 aumentou ou diminuiu? Qual a variação percentual?

(B) A quantidade de alunos de 2016 para 2017 aumentou ou diminuiu? Qual a variação percentual?

Clube de Matemática

2015	2016	2017	2018	2019	2020
500	625	250	400	300	525

(C) Qual a taxa de variação percentual de alunos entre 2019 e 2020? E entre 2015 e 2020?

4. O gráfico representa o número de atletas de uma olimpíada realizada na Rua de Jairzinho:

NÚMERO DE MEDALHAS

OURO 12, PRATA 18, BRONZE 20

Observando o gráfico, responda às questões abaixo:

a) Qual é a quantidade total de atletas medalhistas nessa olimpíada?

b) Calcule o percentual de atletas medalhistas de ouro, prata e bronze.

c) Quantos alunos medalhistas de ouro e prata, somados, existem a mais que medalhistas de bronze? Represente este valor percentual em relação ao total..

d) Desenhe um gráfico de colunas utilizando os números de medalhas de ouro, prata e bronze.

102

Figura 5 – Reprodução da página 102 do Material Didático Carioca 8º ano 2020 (RIO DE JANEIRO, 2020)

Acreditamos na relevância de acrescentar ao material de ensino da porcentagem o uso de recursos visuais, em particular, o Modelo de Barras, a fim de agregar elementos para mediar a aprendizagem dos educandos.

A modelagem por barras está associada à interpretação do problema e a elaboração de estratégias adequadas para resolvê-lo. Segundo Dotti (2016):

> “para que o aluno modele corretamente um problema, é necessária primeiramente uma interpretação correta dos dados, sabendo identificar o

todo (ou 100%) da situação, e saber como representar matematicamente o significado de receber um desconto ou ter um acréscimo no valor, e a partir disso fazer a modelagem correta dos dados. Com a modelagem feita, o aluno consegue identificar a melhor estratégia para resolver o problema e então executar as operações corretas para encontrar a resposta do mesmo.” (Dotti, 2016, p.78)

Em particular, Clement (2017) destaca, a partir do depoimento de alunos, o potencial da abordagem de problemas de porcentagem por meio do uso do Modelo de Barras. Para a aluna Maria, a aplicação do Modelo de Barras permite um entendimento mais claro do problema (Figura 6).

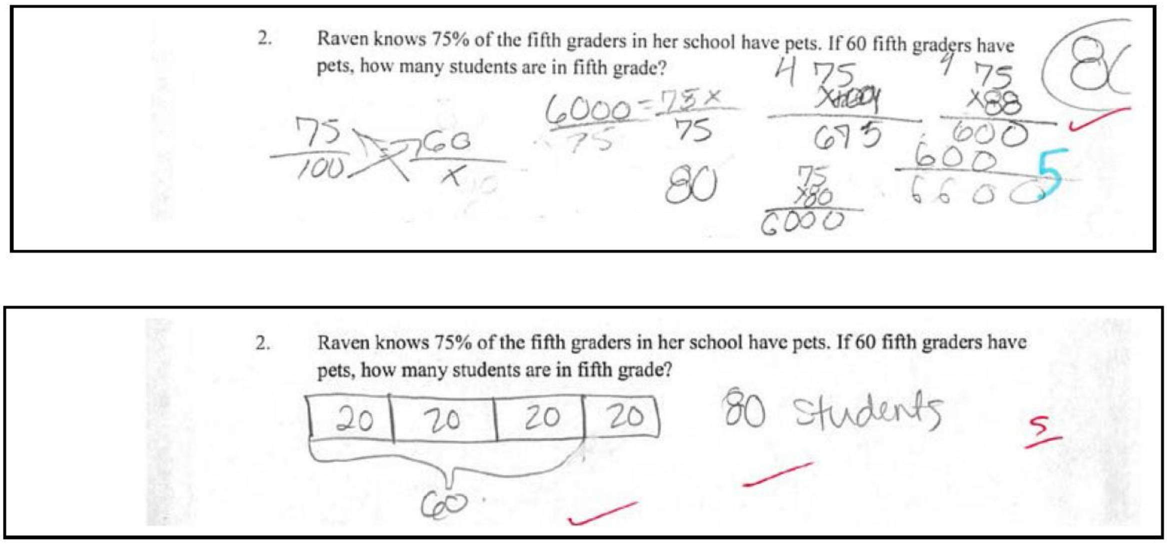


Figura 6 – Soluções da Maria para um problema de porcentagem sem e com a aplicação do Modelo de Barras (CLEMENT, 2017, p.168 e 169)

Na Figura 6, o problema propõe: Raven sabe que 75% dos alunos do quinto ano da escola têm animais de estimação. Se 60 estudantes do quinto ano têm animais de estimação, quantos estudantes estão no quinto ano?

Notamos que, na resolução sem o uso do modelo de barras, a aluna Maria escreveu a proporção correspondente à situação problema, relacionando que 75 está para 100 porcento assim como 60 está para x, sendo x o número total de estudantes. Em seguida, aplicou a propriedade fundamental das proporções e obteve uma equação do 1º grau. Depois, aplicou o princípio multiplicativo para resolver a equação e executou multiplicações por tentativas para determinar que número multiplicado por 75 resulta em 6000, aproximando-se da quantidade 80 por estimativas. Finalmente, anotou a resposta 80 solta no espaço reservado, sem fazer referência à igualdade com a incógnita x, a qual não voltou a ser registrada, nem ao enunciado, pois não utiliza palavra estudante ou outra de mesmo significado.

Na resolução pelo modelo de barras, primeiramente a aluna Maria desenhou uma barra correspondente ao total de estudantes (100%), em seguida ela a dividiu em 4 partes para expressar em cada parte 25% dos estudantes. Depois, conforme o enunciado, ela separou 3 dessas partes, que são 75% dos estudantes, e atribuiu às mesmas o valor absoluto correspondente, ou seja, 60. Além disso, ela repartiu os 60 estudantes igualmente entre as 3 partes, determinando que a cada uma corresponderiam 20 estudantes. Finalmente, ela atribuiu essa quantidade também à parte que estava vazia na barra, por serem todas estas partes equivalentes, concluindo que na barra completa havia o total de 80 estudantes, o que pode ser inferido por sua resposta: “80 estudantes”.

Na primeira resolução predominou o modelo algébrico, enquanto na segunda predominou o modelo de barras. Na primeira fica evidente o desafio de organizar a escrita algébrica e realizar os cálculos envolvidos na obtenção da quantidade procurada, já na segunda resolução a aluna explicitou a organização em etapas do raciocínio com base no enunciado e a habilidade na execução da sequência de operações matemáticas envolvidas nessas etapas, bem como a clareza no registro da solução. Segundo Clemente, em entrevista realizada, a própria aluna Maria reconhece vantagens no uso do Modelo de Barras:

> Durante a entrevista, Maria mencionou o quão impressionada está com a clareza visual do SMM. Ela também destacou sua flexibilidade ao comentar: "É uma imagem para você. Você pode alterá-la. Você pode manipulá-la como quiser ..." (CLEMENT, 2017, p.169, tradução nossa)

A conclusão sobre a carência de elementos visuais no ensino de porcentagem no material didático ofertado pela SME/RJ e a possibilidade de investigar o uso do Modelo de Barras convergiram. Emergia assim a confirmação da intenção da investigação pretendida. Para nortear o trabalho, seria necessário buscar documentos que dispusessem sobre as habilidades da matemática relativas ao 8º ano, a fim de que os estudantes se engajassem tanto nas aulas de matemática como de Educação Financeira em questões que exigissem a consideração de situações reais envolvendo porcentagem.

2.4 O ensino de porcentagem e as orientações curriculares brasileiras – PCN e BNCC

"Cálculo de porcentagem por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"" (BRASIL, 2018, p.300) é objeto de conhecimento do sexto ano do ensino Fundamental na BNCC. Espera-se que o aluno seja capaz de

> Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p.301)

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam não antecipar o uso de representações algébricas mesmo no 4º ciclo:

> É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo; em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se até afirmar que os procedimentos não-algébricos (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária. Desse modo, é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções aritméticas tanto quanto as algébricas. (BRASIL, 1998, p. 83)

As orientações desses documentos, valorizando estratégias pessoais na resolução de problemas, ainda que não defendam explicitamente o uso de representações visuais, abrem espaço para a aplicação do Modelo de Barras no ensino de porcentagem.

Destacamos a seguir as habilidades da BNCC que tratam de porcentagem ao longo do Ensino Fundamental anos finais, foco do nosso estudo. O texto normativo recomenda que a leitura da grade curricular seja feita de forma vertical, a fim de que se conheça como foram articuladas as habilidades e como sua progressão foi estabelecida nas diversas unidades temáticas. Observamos que o tema porcentagem aparece explicitamente na BNCC apenas em objetos de conhecimento e habilidades vinculadas à unidade temática Números. O Quadro 1, apresentado a seguir, exibe informações extraídas da BNCC, obedecendo a ordem decrescente dos anos finais do Ensino Fundamental:

QUADRO 1 – A porcentagem nos anos finais do ensino fundamental

Ano	**Unidade temática**	**Objeto de conhecimento**	**Habilidade**
9º	Números	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
8º	Números	Porcentagens	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
7º	Números	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
6º	Números	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BRASIL,2018. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR.

A resolução e elaboração de problemas envolvendo porcentagem fazem parte das habilidades citadas em todos os anos finais do Ensino Fundamental. Progressivamente, o assunto abordado passa do conhecimento do cálculo de porcentagem ao cálculo de acréscimos e decréscimos, até chegar aos percentuais sucessivos, aplicados na educação financeira.

Na BNCC, resolução de problemas é entendida como uma competência necessária para o desenvolvimento do letramento matemático:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p.266).

A relevância da resolução de problemas para os objetivos do documento curricular se destaca ainda na sexta competência específica para a área de matemática:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). BRASIL, 2018, p.267).

Entendemos que a resolução de problemas envolvendo porcentagem pode ser uma ferramenta para despertar e estimular o aprendizado autônomo dos alunos, por viabilizar a produção de conhecimentos, a elaboração, o compartilhamento e a aplicação de estratégias pelos estudantes em situações significativas, desafiadoras, oriundas, por exemplo, no cenário financeiro.

Destacamos ainda a habilidade EF08MA04 – Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais. Acreditamos que o exercício da elaboração de problemas é uma oportunidade de estimular a criatividade dos educandos, direcionando-os a um assunto significativo para os mesmos.

O texto da BNCC diz o seguinte sobre a elaboração de problemas:

> “...é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.” (BRASIL, 2018, p.299)

Os PCN, também recomendam a resolução de problemas como estratégia pedagógica importante:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.
> (BRASIL, 1998, p.39.)

A orientação para o trabalho direcionado à resolução de problemas é um desafio a ser vencido, considerando que muitas vezes os alunos são rápidos nos procedimentos de cálculo, mas não têm oportunidade de aprender a interpretar e não encontram sentido para explicar suas respostas.

A Base recomenda o uso de tecnologias digitais no ensino da porcentagem, porém foge ao foco deste trabalho o levantamento sobre quais recursos estão disponíveis e a discussão sobre qual deles seria mais adequado à educação. De acordo com a realidade da Escola Municipal onde este trabalho foi desenvolvido, os recursos disponíveis foram: as calculadoras dos alunos, o computador e o projetor de vídeo da sala de aula.

2.5 O Método de Singapura e o Modelo de Barras.

Sobre o potencial da representação pictórica na resolução de problemas por meio do Modelo de Barras, que tem papel central no ensino de Matemática em Singapura, orientações do Ministério da Educação (SINGAPORE, 2009) explicam que o modelo de Barras (ou The Singapore Modeling Metodh – SMM) é uma estratégia pedagógica desenvolvida pela equipe de especialistas em currículo do Ministério da Educação de Singapura no início da década de 1980. O texto de caráter orientador sobre o método (SINGAPORE, 2009) esclarece que o Método de Barras

> “propõe que os alunos desenhem um modelo pictórico para representar quantidades matemáticas (conhecidas e desconhecidas) e suas relações (parte-todo e de comparação) dadas em um problema, para ajudá-los a visualizar e resolver o problema. Os principais conceitos dessa abordagem, os modelos de parte-todo e comparação, também são usados para ilustrar os conceitos de fração, razão e porcentagem.” (SINGAPORE, 2009, p.2- tradução nossa)

A representação pictórica auxilia o estudante a superar obstáculos de aprendizagem, e o ensino passa a ser motivado pela abordagem da resolução de problemas. Como estratégia para resolução de problemas, Singapura explora o Modelo de Barras. Conforme GINSBURG (2005)

> “Muitos estudantes que têm dificuldade em compreender conceitos matemáticos abstratos, se beneficiariam com representações visuais de ideias matemáticas. Como parte desta abordagem, as ilustrações de Singapura demonstram como se decompor, representar e resolver graficamente problemas complicados que têm múltiplos passos.” (GINSBURG et al, 2005, p.23)

Singapura tem se destacado no Programa Internacional de Avaliação dos Alunos (PISA), cujo resultado no ano de 2018 foi o 2º lugar do ranking, nas áreas de matemática, ciências e leitura. O seu currículo de matemática é orientado ao desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas e é guiado pelo Quadro de Matemática (Figura 7), apresentado a seguir:

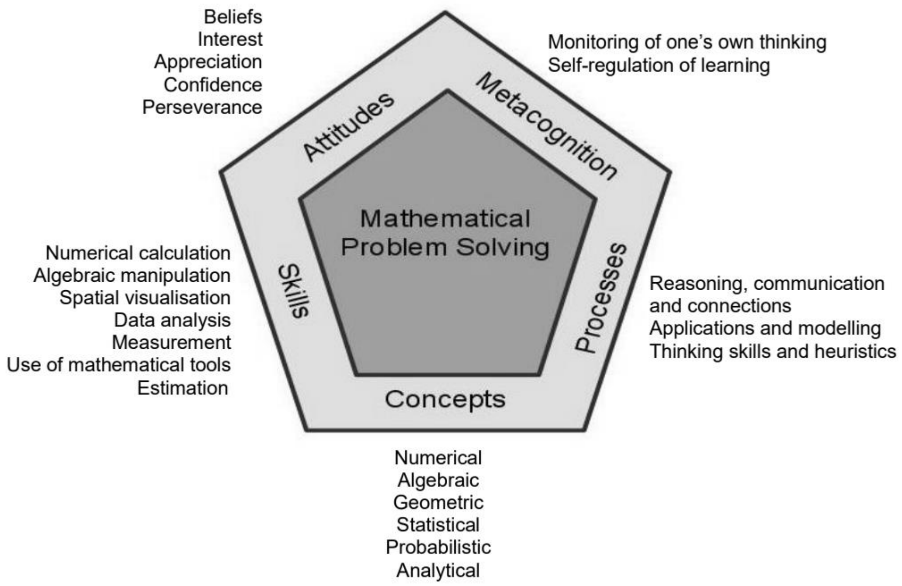


Figura 7 - Mathematics framework from the Singapore mathematics curriculum (SINGAPORE, 2006, p.2)

Os componentes do Quadro de Matemática são destinados a todos os níveis de ensino, do primário ao avançado. Entre eles, destacam-se: a metacognição, que se refere à seleção e o uso de estratégias de solução de problemas, e os processos, que se referem às habilidades de conhecimento, como as habilidades de pensamento e a heurística, por exemplo.

No mesmo documento que apresenta o Quadro de Matemática, *The Singapore Model Method for Learning Mathematics* (2009), encontram-se estratégias para enriquecer a experiência metacognitiva, entre as quais se destaca:

- Incentive os alunos a pensar em voz alta as estratégias e métodos que eles usam para resolver problemas específicos.
- Proporcione aos alunos problemas que exijam planejamento (antes da resolução) e avaliação (após a resolução);
- Incentive os alunos a procurar maneiras alternativas de resolver o mesmo problema e verificar a adequação e a razoabilidade das respostas.

Das estratégias destacadas do documento, depreende-se que o aluno está no centro do processo de aprendizagem e que o professor pode estimular ações como: a interação orientada à troca de conhecimentos, a resolução de problemas desafiadores e a investigação de maneiras diversas para validar os problemas.

Quanto às habilidades de pensamento no ensino da porcentagem, estas são aplicadas no processo de comparar e analisar partes e todo. Já a heurística, é aplicada ao abordar o conteúdo utilizando a representação pictórica, para auxiliar a compreensão de conceitos abstratos.

Uma característica singular do currículo de matemática de Singapura é a abordagem metódica *Concreto-Pictórico-Abstrato* (CPA), que remete aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner (1966) nos estágios de desenvolvimento cognitivo.

Segundo Astorga (2019):

> "Em Towards a Theory of Instruction, Bruner utiliza os termos enactive-iconicsymbolic, mas, como explica Hoong (2015), estes significam precisamente o que, no Mathematics Syllabus Primary de Singapura, se encontra sob o nome Concrete-Pictorial-Abstract. A abordagem CPA dá redobrada importância a percorrer-se exaustivamente os passos concreto e pictórico antes de condensar-se o conteúdo de maneira abstrata (como em notações algébricas)." (ASTORGA, 2019, p. 19)

Segundo *The Singapore Model Method for Learning Mathematics* (2009), para amparar a transição do concreto ao abstrato, foi introduzido o Modelo de Barras, na década de 1980, por uma equipe de estudiosos liderada por Kho Tek Hong.

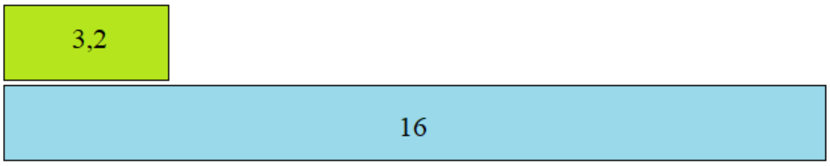
FIGURA 8 - Transição do concreto ao abstrato

Sobre a apresentação do conteúdo de matemática nos livros didáticos de Singapura, GINSBURG (2005) conclui:

> "As ilustrações concretas e pictóricas nos textos de Singapura usam explicações visuais para ajudar os alunos a entender conceitos matemáticos abstratos, e esses recursos visuais fornecem aos alunos as ferramentas para formular, representar e raciocinar por meio de diferentes tipos de problemas complexos." (GINSBURG et al, 2005, p.61, tradução nossa)

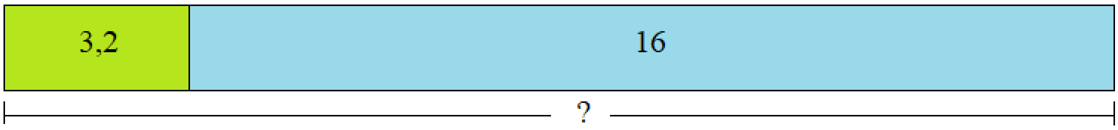
O Modelo de Barras é entendido como a representação visual pictórica das quantidades e suas relações presentes em um problema por meio de retângulos que auxiliam a compreensão dos dados e dos significados das operações e o desenvolvimento de estratégias para a resolução do mesmo.

O tamanho dos retângulos, nomeados barra nesse modelo, está associado às quantidades envolvidas no problema. Por exemplo, a seguir, a barra menor representa 3,2 e a barra maior, 16 unidades.

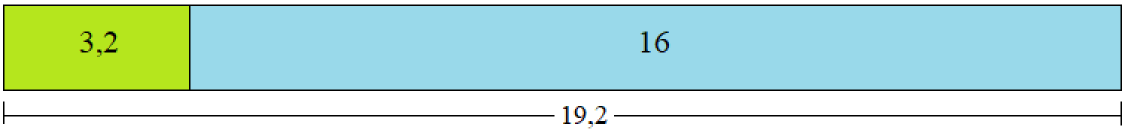


O desenho do modelo nos ajuda a entender o problema e estabelecer uma representação visual para as operações que precisam ser realizadas para resolvê-lo.

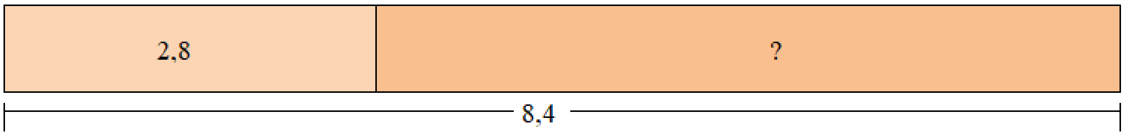
A adição é representada pela justaposição das barras que representam as quantidades. Por exemplo, apresentamos a seguir o modelo da adição de 3,2 e 16.



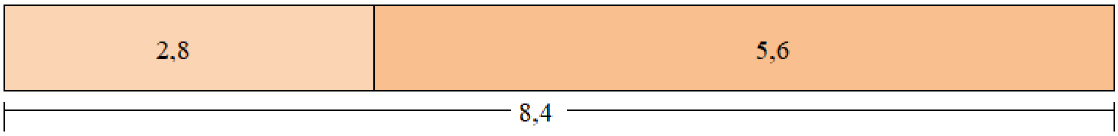
A soma das quantidades é igual a 19,2, representada abaixo.



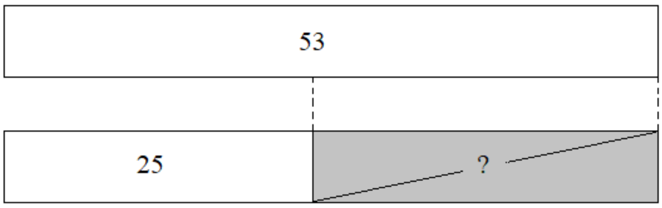
Podemos observar também por barras justapostas a diferença entre duas quantidades. Iniciamos com a barra que representa o total e, sobre ela, destacamos uma das partes que a compõem (aquela que é conhecida) com o objetivo de encontrar a outra parte (indicada por “?”). Nesse modelo, as barras justapostas são o subtraendo e a diferença. Por exemplo, veja a representação de 8,4-2,8 a seguir:



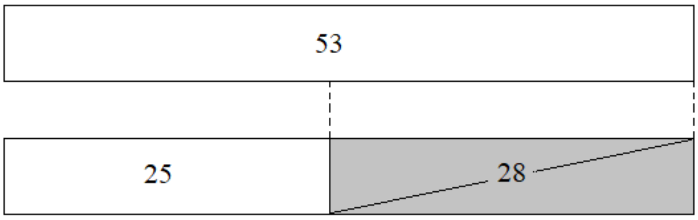
Note que o modelo auxilia a compreensão de que as partes da barra são complementares. Nesse exemplo, o complemento de 2,8 é 5,6, ilustrado a seguir:



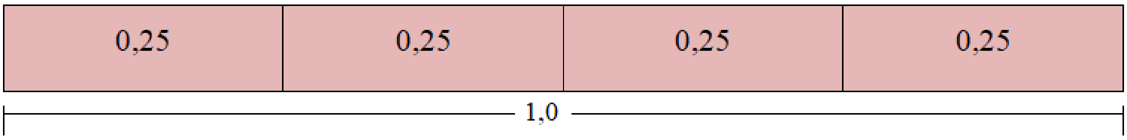
Ainda no contexto da subtração, podemos aplicar a estratégia de traçar duas barras alinhadas, de mesmas dimensões, e indicar, no interior daquela que contém a menor quantidade, a diferença entre elas. Por exemplo, veja a seguir a representação de 53 menos 25.



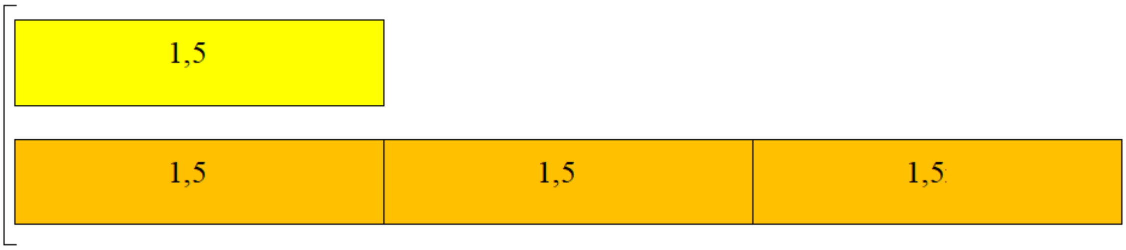
A parte sombreada serve para expressar a comparação entre as duas quantidades, ou seja, o quanto uma é maior que a outra. Explicitamos no modelo a seguir que 53 são 28 unidades a mais que 25.



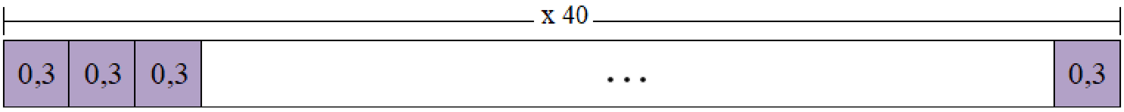
A multiplicação pode ser representada por um modelo onde há justaposição de barras que indicam quantidades iguais. Por exemplo, para representarmos 0,25x4, desenhamos a barra correspondente à adição de 4 parcelas de 0,25. Veja a seguir:



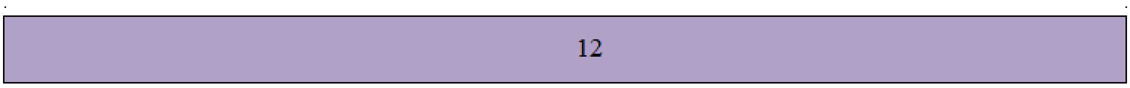
Em um contexto no qual uma quantidade for referida como múltipla de outra, podemos recorrer a um modelo de comparação. Representamos por duas barras as quantidades, tal que uma seja a unidade de medida com a qual a outra vai ser construída, justapondo-se tantas unidades quantas forem necessárias. Por exemplo, podemos representar uma quantidade (1,5) e o seu triplo (4,5) usando duas barras do seguinte modo:



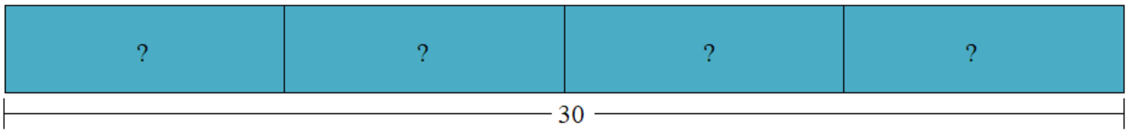
Ainda em relação à multiplicação, havendo uma quantidade expressiva de parcelas iguais, tal que seja dificultoso registrar essa quantidade na barra, utilizamos reticências para indicar a repetição e registramos o total de parcelas fora da barra. Por exemplo, veja a representação da multiplicação de 0,3 por 40, que equivale à adição de 40 parcelas iguais a 0,3:



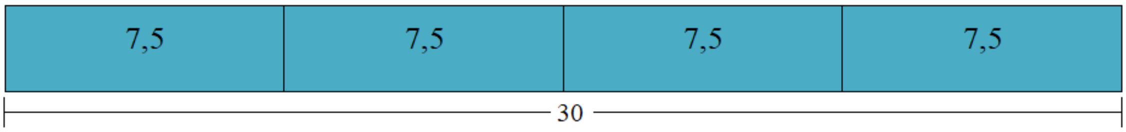
O produto é equivalente à seguinte barra:



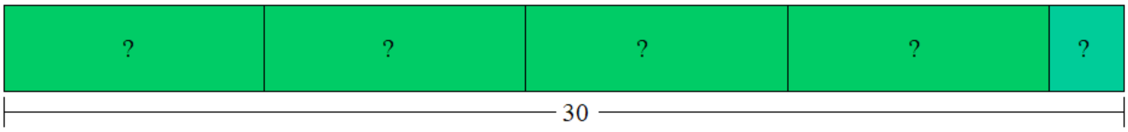
Já na representação da divisão como equipartição, em vez de procedermos à justaposição, desenhamos inicialmente uma barra completa, que representa o total a ser particionado. Se soubermos o total e o número de grupos, então buscaremos a quantidade correspondente a cada grupo. Ilustraremos a seguir 30:4, no universo dos números racionais.



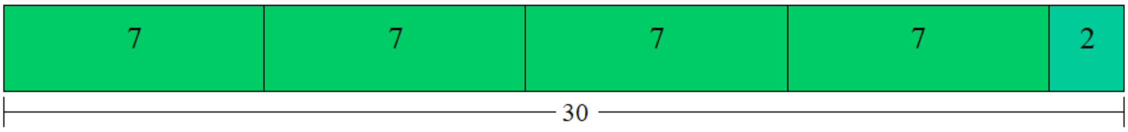
Seria o caso, por exemplo, de dividir igualmente R$ 30 entre quatro amigos. A representação pelo Modelo de Barras ajuda, inclusive, a perceber como a divisão e a multiplicação estão relacionadas. No exemplo apresentado, é possível inferir que 4 vezes 7,5 é igual a 30, ou seja, que 7,5 cabe 4 vezes em 30.



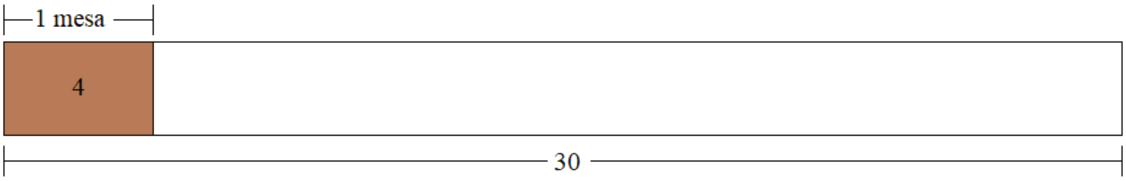
Considerando o universo dos naturais, podendo haver resto na divisão (Divisão Euclidiana), o resto poderá ser indicado na porção localizada na extremidade da barra Ilustraremos a seguir 30:4, no universo dos números naturais. Seria o caso de, por exemplo, 30 canetas divididas igualmente entre 4 amigos, conforme ilustraremos a seguir:



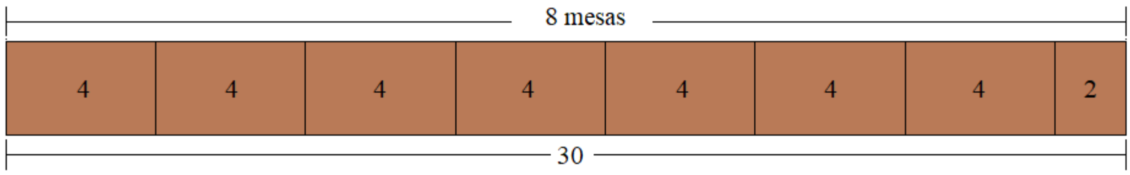
Como 30=4x7+2, a cada amigo é entregue uma caneta, até que cada um fica com 7 canetas, e sobram 2 canetas.



Considerando a divisão como medida, ou seja, quando são informados o número total de objetos e o número de objetos em cada grupo e é desconhecido o número de grupos, a construção do modelo corresponde à representação de subtrações sucessivas. Por exemplo, há 30 alunos em um refeitório para serem acomodados em mesas com 4 lugares e deseja-se saber quantas mesas, no mínimo, eles ocuparão. A representação no Modelo de Barras seria a seguinte:



O cálculo mental correspondente seria o seguinte: 30-4=26; 26-4=22; 22-4=18; 18-4=14; 14-4=10; 10-4=6; 6-4=2. Haveria sete mesas completamente ocupadas e uma mesa parcialmente ocupada, totalizando oito mesas.



Entendemos que o uso do Modelo de Barras para a compreensão das quatro operações básicas é o aporte necessário para explorar aplicações diversas do modelo visual em contextos variados. Por exemplo, CLEMENT (2017) em um estudo que explora o potencial do conhecimento do Modelo de Barras (The Singapore Modeling Metodh – SMM) na formação de professores de matemática dos anos iniciais, destaca:

> O SMM é um método pictórico usado para resolver uma ampla variedade de tipos de problemas aritméticos e algébricos. apresentados em palavras. Esse modelo de barras retangulares funciona bem para situações de comparação de partes inteiras ou aditivas. [...] Também pode ser usado para resolver problemas envolvendo comparações multiplicativas, multiplicação ou divisão. As quantidades no problema podem ser números inteiros, decimais, frações e porcentagens. O SMM também serve como uma boa ponte do pensamento aritmético para o algébrico, à medida que os alunos fazem a transição das imagens para uma equação aritmética ou algébrica, o que os ajuda a resolver o problema (Leinwand & Ginsburg, 2007). (CLEMENT, 2017, p.25, tradução nossa).

QUEIROZ (2014) discute o potencial do Modelo de Barras como ferramenta para amparar a transição da aritmética para a álgebra que se dá ao longo do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Queiroz aplica o modelo visual visando a interferir nas dificuldades dos alunos e ampara sua investigação na resolução de problemas. Em seu trabalho esse autor discute a aplicação do modelo em contextos diversos.

> "O modelo de barras é uma metodologia que possui uma estrutura lógica e muito coerente, totalmente adaptável ao nosso currículo, pois com ela o professor pode focar as habilidades necessárias e essenciais para o sucesso no aprendizado da álgebra. Além de desenvolver o pensamento algébrico, ela proporciona um esquema para que os alunos possam desenvolver um domínio técnico, aliando à compreensão do problema, e respondendo dúvidas

> frequentes, como: “porque o número muda de lado e troca a operação?”.
> Outra vantagem do Modelo de Barras na resolução de problemas é que o registro da resolução é realizado e mantido, desde a identificação dos dados, interpretação das hipóteses do problema, o desenrolar da estratégia, assim como a resposta final, permitindo investigar cada etapa da resolução de problemas e a compreensão das ações realizadas para se chegar ao resultado. (QUEIROZ, 2014, p.42-43)

DOTTI (2016) investiga uma sequência de atividades/problemas utilizada em diversas escolas de Singapura que é baseada no Modelo de Barras. O objetivo dessa autora é observar como essas atividades contribuem para o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

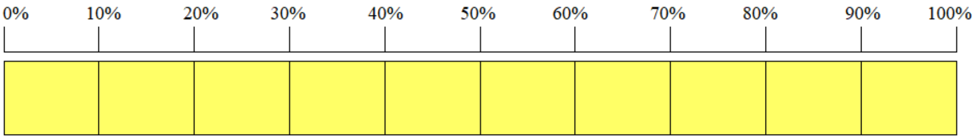
> Analisamos que o modelo de barras realiza um papel de “visualizador” dos “registros operatórios com as frações, em “linguagem matemática”. Temos uma metodologia que facilita a abstração da linguagem matemática. O modelo de barras prepara o pensamento algébrico ao longo do ensino fundamental, para que nos ciclos mais avançados ele não seja mais necessário, havendo uma ponte entre a representação de uma quantidade na forma pictórica e a representação literal. Observamos que, antes de introduzir “letras” nas expressões algébricas e equações, a interpretação abstrata de “quantidades” representadas numericamente é etapa crucial da pré-álgebra. Nessa etapa, em caso de dúvidas, o aluno poderá sempre se apoiar no Modelo de Barras, que lhe é familiar. (DOTTI, 2016, p.69)

Como nosso objetivo é explorar a aplicação do Modelo de Barras no ensino e na aprendizagem de porcentagem, passamos agora a discutir tal aplicação.

A seguir, são apresentados dois exemplos de representação pelo Modelo de Barras, na resolução de problemas envolvendo porcentagem. Estes problemas foram extraídos e traduzidos do livro *The Singapore Model Method for Learning Mathematics* (SINGAPORE, 2009), páginas 36, 37 e 39. O desenvolvimento das resoluções será exposto como abordado no livro e com base nas experiências do grupo de pesquisa do Projeto Fundão (PF).

O primeiro exemplo ilustrará a aplicação do Modelo de Barras em uma situação identificada no livro (SINGAPORE, 2009) como parte-todo. Ele relaciona uma *parte*, a ser determinada, sombreada na barra, com a barra completa, que corresponde ao *todo*.

Há uma escala posicionada acima da barra, que indica a divisão da mesma em 100 partes iguais. Nessa escala fica registrado o valor percentual correspondente ao destacado na barra. No caso, cada subdivisão da escala representa 10/100 da barra, ou seja, 10% do todo.



Exemplo 1: Há 500 pessoas em um concerto e 30% delas são crianças. Quantas crianças há no concerto?

Solução 1 – Como no texto original

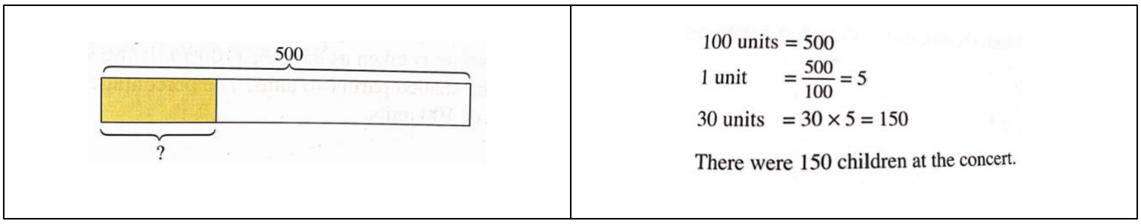
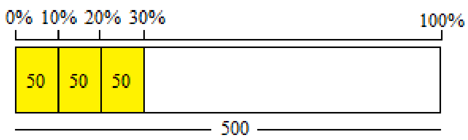


Figura 9 – Exemplo 1 (SINGAPORE, 2009, p.36)

Solução 2 – Como proposta pelo grupo do PF



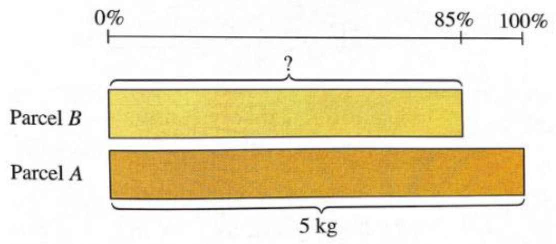
Porcentagem	Crianças
100%	500
10%	500 : 10 = 50
30%	3 x 50 = 150

Há 150 crianças no concerto

O segundo exemplo ilustrará a aplicação do Modelo de Barras em uma situação identificada como comparação. Ele relaciona duas *partes*, do mesmo todo ou não, que serão comparadas, relacionadas por porcentagem. Nesse caso, são utilizadas uma barra para indicar cada *parte* e a escala de 0% a 100% para estabelecer a comparação percentual. Uma das porções será tomada como referência para a unidade (100%) e a outra porção será uma porcentagem da unidade.

Exemplo 2: O pacote A pesa 5 kg. O pacote B é 15% mais leve que o pacote A. Calcule a massa do pacote B.

Solução 1 – Como no texto original



100 units = 5 kg

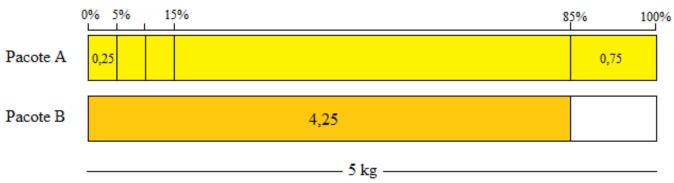
1 unit $= \frac{5}{100} = 0.05$ kg

85 units $= 85 \times 0.05 = 4.25$ kg

The mass of parcel *B* is 4.25 kg.

Figura 10 – Exemplo 2 (SINGAPORE, 2009, p.39)

Solução 2 – Como proposta pelo grupo do PF



Porcentagem	Massa (kg)
100%	5
5%	5 : 20 = 0,25
15%	3 x 0,25 = 0,75
85%	5 - 0,75 = 4,25

O pacote B pesa 4,25 Kg.

No Modelo de Barras as quantidades absoluta e relativa (percentual) são relacionadas a partir da barra e de uma escala percentual traçada paralela à barra. Na barra são representadas, registradas e indicadas as quantidades absolutas e na escala os valores percentuais correspondentes.

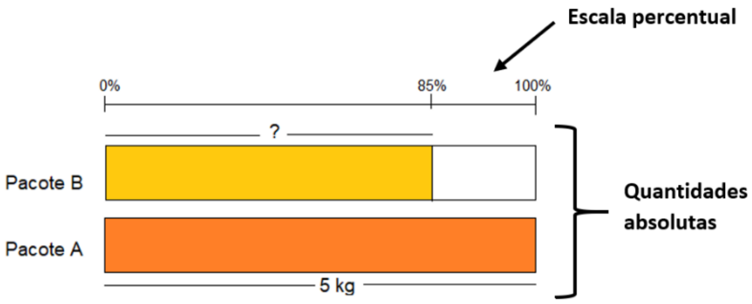
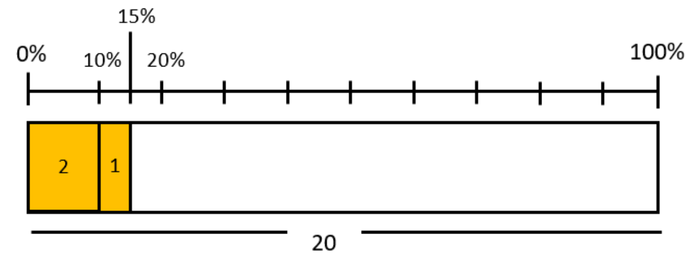


Figura 11 –Modelo de Barras aplicado em problemas sobre porcentagem

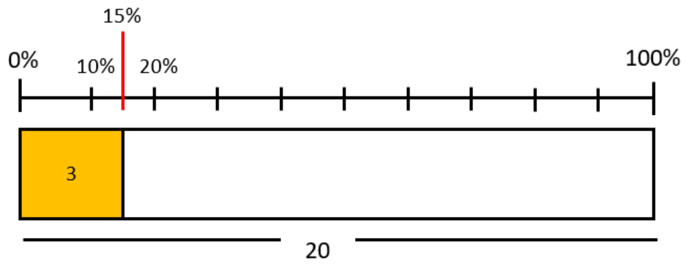
O modelo pode ser aplicado nas três situações trazidas por Wu (2011), apontadas anteriormente, em que a porcentagem é abordada na educação básica. Podendo ser acompanhado e complementado com registro algébrico ou aritmético dos cálculos realizados, como ilustrados a seguir:

15% de 20:



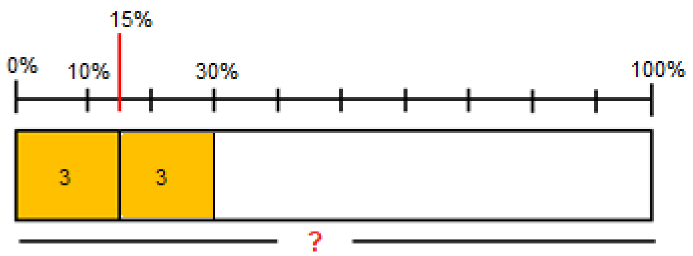
Quantidade Percentual	Quantidade absoluta
100 %	20
10 %	2
5%	1
15%	**3**

Que % de 20 é 3?



Quantidade Percentual	Quantidade absoluta
100	20
10 %	2
5%	1
15%	3

3 é 15% de qual número?



Quantidade Percentual	Quantidade absoluta
15%	3
30%	6
10%	2
100%	**20**

Cabe observar que as representações podem variar, bem como os registros. Elas devem refletir o plano de solução, o raciocínio realizado pelo aluno. Entendemos que a representação pictórica é um poderoso recurso para o reconhecimento do todo, das partes, bem como da escala percentual relativa ao valor presente ou ao ausente. A tabela, apresentada ao lado do modelo registra também as etapas do cálculo (mental ou não), que levam ao preenchimento dos valores na barra e à solução do problema.

Nos exemplos apresentados, cumpriu-se um plano durante o processo de resolução, para projetar os dados do problema no Modelo de Barras. Acreditamos que a maneira como ocorreu o registro dos dados, permite visualizar todas as informações relevantes e favorece a reelaboração do problema, à medida que bastaria alterar alguma dessas informações.

2.6 A resolução de problemas e a mentalidade matemática de crescimento

Diante da proposta da Base Nacional Comum Curricular para o ensino de porcentagem no 8º ano, como o professor poderia estimular os educandos que ainda não se familiarizaram com a exploração dos problemas a resolvê-los e a reescrevê-los?

Segundo a autora Jo Boaler (2018), em seu livro Mentalidades Matemáticas, lidar com números e problemas exige flexibilidade de pensamento, que passa por representações visuais. No capítulo 5, em que trata de atividades matemáticas produtivas, ela afirma:

> "...a maioria das pessoas que conheço, mesmo usuários de matemática de alto nível, jamais imaginou que os números pudessem ser tão abertos e que os problemas numéricos pudessem ser resolvidos de tantas maneiras. Quando essa percepção se combina com as ideias visuais sobre as maneiras matemáticas de se trabalhar, o engajamento se intensifica." (BOALER, 2018, p.53)

Para Boaler (2018), os professores podem criar na turma o entusiasmo pela matemática ouvindo dos educandos a sua multiplicidade de ideias e os encorajando a discutir os diversos modos de ver os problemas.

Reconhecemos que os estudantes costumam colaborar mais quando lhes permitimos fazer comentários sobre o que se está ensinando durante a aula e também demonstram satisfação e capricho quando propomos tarefas individuais ou em grupo, que envolvam exposição visual, como cartazes, por exemplo.

No capítulo 5, Boaler (2018) também comunica que, para os estudantes se perceberem como agentes no processo de aprendizagem, sem medo de trabalhar em tarefas desafiadoras, é necessário passar a eles mensagens de mentalidade de crescimento, ou seja, dar aos educandos a autoconfiança que eles necessitam para acreditar que podem aprender alguma coisa.

Os educadores devem valorizar a persistência e o pensamento árduo oferecendo problemas de "piso baixo e teto alto" -uma tarefa desafiadora, mas acessível- conforme explica a autora:

> "Uma maneira de "rebaixar o piso" é sempre perguntar aos alunos como eles veem o problema. Uma grande estratégia para "elevar o teto" de uma tarefa é pedir aos alunos que terminaram uma questão que formulem uma nova questão semelhante, porém mais difícil." (BOALER, 2018, p.73)

Relacionando sua teoria de "teto alto" com a habilidade de elaborar problemas, citada na Base Nacional Comum, compreendemos que os alunos podem trocar entre si os problemas que eles formularem para que uns resolvam as questões elaboradas pelos outros.

Ela acrescenta que ainda que os estudantes estejam trabalhando para encontrar uma solução complexa, eles farão isso com confiança ao construírem uma representação visual como auxílio. Sobre o poder da visualização, comenta que: "quando não pedimos aos alunos que pensem visualmente, perdemos uma incrível oportunidade de aumentar sua compreensão." (BOALER, 2018, p.56).

Essa afirmação nos remeteu à ausência de recursos visuais no ensino de porcentagem como uma limitação do Material Didático Carioca 2020, páginas 90 e 91.

No capítulo 9, em que trata do ensino de matemática de forma criativa e visual, Boaler relata:

> "A arte e as representações visuais não desempenham apenas um papel terapêutico e criativo, embora ambos sejam importantes. Elas também exercem um papel fundamental ao abrir acesso à compreensão para todos os alunos. Quando peço aos alunos que visualizem e desenhem ideias sempre encontro maiores níveis de envolvimento e oportunidades para compreender as ideias matemáticas que não ficam evidentes sem o recurso visual. Alguns

estudantes têm mais dificuldade com ideias visuais do que outros, mas esses são os alunos que serão mais beneficiados com a utilização desse método.” (BOALER, 2018, p.160)

Para Boaler, oferecer modos de ver, entender e ampliar ideias matemáticas tem sido subdesenvolvido ou ignorado nos currículos, que em grande medida continuam apresentando a matemática como uma matéria escolar quase que exclusivamente numérica e abstrata. Para essa autora, quando os alunos aprendem por meio de abordagens visuais, eles passam a ter acesso a compreensões novas e profundas. Com isso, a disciplina muda para eles. (BOALER *et al*, 2018)

Por exemplo, o cálculo da soma dos infinitos termos da progressão geométrica de razão e primeiro termo ½ pode ser mais bem compreendido com o apoio de uma imagem (Figura 12):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots=1$$

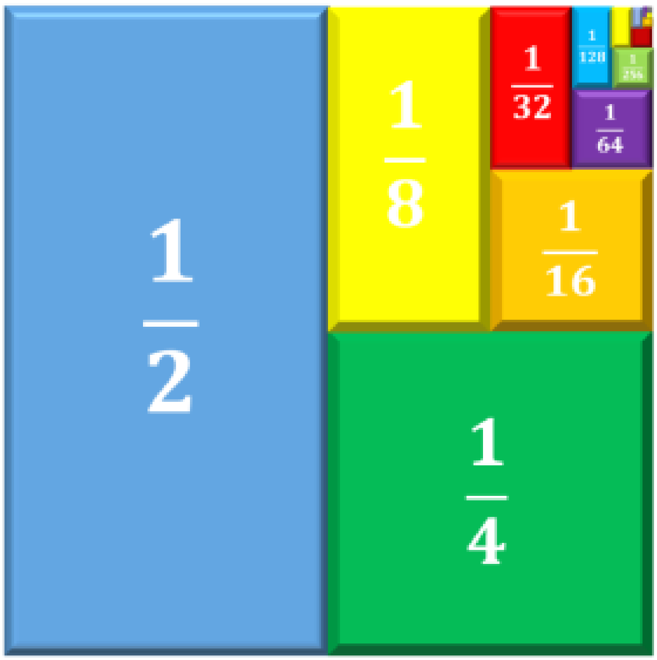


Figura 12: Soma dos infinitos termos de uma P.G de razão e primeiro termo ½(Fonte: a autora)

Concordamos com a autora que a representação visual promove a abertura do acesso à compreensão no processo ensino aprendizagem e mais ainda, é uma tecnologia, mesmo que utilizemos papel e lápis O modelo de Barras é justamente um apoio visual para a resolução de problemas propostos em palavras.

2.7 Investigando problemas para o ensino de porcentagem

O modelo de avaliação da aprendizagem do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), contempla questões de matemática e de letramento financeiro, e proporciona análises de resultados que lançam projeções para o aperfeiçoamento do ensino global. Selecionamos uma questão de prova do PISA para utilizar como instrumento de ensino de porcentagem, cuja aplicação será comentada neste trabalho mais adiante.

Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), órgão responsável pelo planejamento e a operacionalização do PISA no Brasil:

> "Os resultados do Pisa permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades dos seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares, bem como formule suas políticas e programas educacionais, visando melhorias na qualidade e na equidade dos resultados de aprendizagem." (BRASIL, Portal INEP)

O INEP é também responsável pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que ocorre a cada 2 anos desde 1993 e foi realizado recentemente em 2019. A avaliação tem como objetivo diagnosticar a educação básica do país e tem por alvo as instituições públicas de ensino localizadas em zonas urbanas que possuam 10 (dez) ou mais estudantes matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental. Selecionamos algumas questões de simulados da Prova Brasil, que faz parte do SAEB, que envolviam porcentagem, cuja aplicação nas turmas será relatada neste trabalho mais à frente.

Segundo as matrizes de referências do SAEB, que norteiam os testes de aprendizagem em matemática nas turmas de 9º ano – Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - Anresc (Prova Brasil) – desde 2005, o foco está na resolução de problemas:

> "Assim, a partir dos itens do Saeb e da Prova Brasil, é possível afirmar que um aluno desenvolveu uma certa habilidade, quando ele é capaz de resolver um problema a partir da utilização/aplicação de um conceito por ele já construído. Por isso, o teste busca

> apresentar, prioritariamente, situações em que a resolução de problemas seja significativa para o aluno e mobilize seus recursos cognitivos." (BRASIL, 2011 - PDE)

Diante da constatação de que as turmas recebem aulas de inglês semanalmente e de que os alunos têm grande interesse pelo aprendizado em língua inglesa, vislumbramos a possibilidade de levar para a sala de aula problemas matemáticos escritos originalmente em inglês, a fim de oferecer aos alunos a oportunidade de lidarem com a interpretação do conteúdo matemático em situações em que as palavras precisam ser interpretadas em seu sentido, interferindo em vícios típicos do ensino de matemática. Por exemplo, o de associar a expressão "quanto falta" à subtração. Seria também uma oportunidade de trazer para a sala de aula problemas originais do método de Singapura. Mais adiante, apresentaremos dois exercícios que levamos às turmas, em parceria com a professora de inglês do oitavo ano, Giselle Esteves, bem como os comentários sobre sua aplicação.

A esta altura, o material que estava sendo elaborado continha elementos do cotidiano dos educandos, tanto para a transmissão como para a produção de conhecimento. A contextualização proporcionaria a oportunidade de gerar na turma perguntas criativas e interessantes, a representação visual atuaria como elemento mediador na compreensão dos conceitos, envolvidos na leitura e na resolução do problema, e a experiência do ensino das questões de Singapura na língua inglesa seria um indicativo para os alunos do empoderamento que poderiam adquirir através do aprendizado.

3 A sequência Didática

Para investigar a aplicação e o potencial da representação pictórica na abordagem de porcentagem no 8º ano, elaboramos um Plano Didático, ou seja, o planejamento de ação organizado em etapas, para alcançar o objetivo de aprendizagem de porcentagem a partir da resolução de problemas. Para tal, pesquisamos atividades a serem aplicadas nas aulas de matemática e de Educação Financeira.

No planejamento dessas atividades, consultamos primeiramente os educandos das duas turmas, em seguida o material didático carioca do 8º ano, as provas de avaliações externas nacionais, o PISA e a bibliografia de Singapura. O plano didático previu 3 etapas:

(i) ETAPA I – Diagnóstica

A primeira etapa, realizada em uma aula, se estruturou a partir da aplicação de exercícios do material didático carioca, com o objetivo de observar o conhecimento dos educandos sobre cálculo percentual.

(ii) ETAPA II – Intervenção com o Modelo de Barras

A segunda etapa foi marcada por uma intervenção com problemas extraídos de avaliações externas, selecionados a partir das dificuldades observadas na primeira etapa. Esses problemas foram resolvidos utilizando o Modelo de Barras. Seu período de duração foi de 4 aulas.

(iii) ETAPA III – Ação interdisciplinar

A terceira etapa determinou uma intervenção interdisciplinar em parceria com a professora de inglês em que os problemas propostos foram extraídos de uma bibliografia de Singapura, *Model Drawing for challenging word problems – finding solutions the Singapore way* (WALKER,2010, p.80-82), e apesentados como no original, em língua inglesa, para despertar o entusiasmo e a participação dos educandos na resolução de problemas, bem como para avaliar o aprendizado já adquirido sobre o Modelo de Barras. Seu período de duração foi de 1 aula.

3.1 Relato da aplicação do Plano Didático

Etapa I – Diagnóstica

A primeira etapa, aplicada em 27 de fevereiro, teve objetivo diagnóstico. O trabalho foi desenvolvido na aula de matemática com os exercícios da página 91 do Material Didático Carioca (FIGURA 2), cuja abordagem os educandos já estavam habituados. Acreditamos que a realização dessas atividades revelaria o que recordavam sobre cálculos referentes à taxa percentual. Os exercícios foram aplicados como tarefa a ser realizada presencialmente e em dupla, de modo que os 30 educandos que compunham a turma pudessem discutir as resoluções entre si, e as entregar em uma folha por dupla.

No total, foram propostos 7 exercícios e solicitado que fossem respondidos respeitando a ordem de disposição no texto. Foram reservados 50 minutos para a tarefa. Nas duas turmas, os estudantes foram atendidos na mesa do professor à medida que solicitavam auxílio para tirar dúvidas e também foi verificado constantemente se todos estavam fazendo as atividades. Foi permitido que as duplas trocassem ideias sobre as questões.

Para exemplificar o desenvolvimento dessa primeira etapa e os resultados observados, a seguir apresentamos uma análise do exercício 7 da página 91 do Material Didático Carioca (FIGURA 2):

"Uma melancia, de 10 kg de massa, tem, em média, 5% de polpa e o restante de água. Calcule:

a) O percentual de água na melancia;

b) A massa de polpa presente nesta melancia."

A reação dos estudantes a esse problema foi primeiramente criticar a pouca relevância do tema e depois resolver o exercício com foco nos cálculos aritméticos.

Para exemplificar a dificuldade de compreensão da maioria dos educandos, transcrevemos a seguir a resolução de uma dupla da turma 1802, apresentada durante o atendimento para tirar dúvidas.

a) O percentual de água é 10 – 5% = 5%.

b) A massa de polpa é 10 – 5% = 5 kg.

Das respostas apresentadas, inferimos que grande parte dos estudantes cometeu erros como o ilustrado: realizar operações sem distinguir valores absolutos de valores percentuais. No item A, muitos subtraíram da massa da melancia a porcentagem de polpa para encontrar o percentual de água. Já no item B, subtraíram da massa da melancia o percentual de água encontrado no item anterior para determinar a massa de polpa.

Destaca-se que a atividade exemplificada era a última da sequência proposta. Os erros observados revelam que os alunos não detinham, a essa altura, a necessária compreensão da diferença entre os valores absolutos e percentuais, ainda que os exercícios anteriores tratassem do tema.

Para a intervenção na próxima etapa, decidimos buscar questões inéditas para os alunos. Encontramos um exemplo de item da Prova Brasil, que remete às dificuldades verificadas na aplicação das atividades da Etapa 1. Ao pesquisar sobre o descritor 28 – Resolver problema que envolva porcentagem - na matriz de referência do SAEB 2011, nos deparamos com o item apresentado como exemplo (Figura 13):

Descritor 28 – Resolver problema que envolva porcentagem

Com este descritor, o que se pretende avaliar?

A habilidade de o aluno resolver problemas contextualizados (descontos ou reajustes em compras, taxas, porcentagem de uma amostra em uma população etc.) que envolvam porcentagens.

Exemplo de item:

Em uma cidade em que as passagens de ônibus custam R$ 1,20, saiu em um jornal a seguinte manchete:

"NOVO PREFEITO REAJUSTA O PREÇO DAS PASSAGENS DE ÔNIBUS EM 25% NO PRÓXIMO MÊS"

Qual será o novo valor das passagens?

(A) R$ 1,23 (B) R$ 1,25 (C) R$ 1,45 ➡ (D) R$ 1,50

Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
5%	16%	50%	26%

UNIDADE 5 Matemática

184

Figura13 – Reprodução da página 184 do PDE/Prova Brasil (Brasília, 2011)

O documento aponta que 50% dos alunos responderam alternativa C e 26% responderam alternativa D. A incidência de respostas revela que metade dos alunos soma o número decimal, que indica o percentual, ao valor absoluto, e apenas aproximadamente um quarto dos alunos domina a habilidade indicada pelo descritor.

A estratégia de abordagem da próxima etapa seria mudar a perspectiva para a representação visual, com a finalidade de minimizar as dificuldades observadas na resolução dos problemas.

Etapa II – Intervenção com o Modelo de Barras

Reconhecidas as dificuldades de compreensão de valor absoluto e valor relativo percentual, foi preparada a segunda etapa, que contava com 5 problemas extraídos de avaliações externas nacionais e do PISA. Ela foi aplicada nos dias 4 e 5 de março; por turma, foram ministrados 3 tempos na aula de matemática e 1 tempo na aula de Educação Financeira, cada tempo com duração de 50 minutos. A intenção era promover a familiaridade com o Modelo de Barras, para o desenvolvimento das seguintes habilidades:

(i) Identificar os indícios essenciais presentes no enunciado (separar os elementos centrais e os laterais);

(ii) Distinguir e relacionar quantidades absoluta e relativas percentuais no problema;

(iii) Representar os dados e a interpretação do problema utilizando o Modelo de Barras;

(iv) Escrever os cálculos pertinentes;

(v) Efetuar os cálculos para solucionar o problema.

Os instrumentos utilizados foram: a lista de exercícios, o quadro branco, canetas, lápis e os cadernos dos estudantes.

Para cada atividade dessa etapa foram realizadas com as turmas ações comuns:

1º) copiar o exercício no quadro para os educandos transcreverem no caderno;

2º) solicitar que algum deles voluntariamente lesse o que copiou para a turma;

3º) perguntar o que a turma entendeu do enunciado;

4º) abordar o problema utilizando o Modelo de Barras.

A ordenação dos problemas foi estabelecida conforme o grau de dificuldade. Veja a seguir no Quadro 2:

Quadro 2 - Resumo dos problemas da etapa 2

Problema	Origem	Descrição	Modelo de Resolução
1	Caderno de Atividades	Apresenta dois valores absolutos e solicita o valor percentual de um em relação ao outro.	Parte-todo
2	Caderno de Atividades	Apresenta o valor absoluto total e um dos valores relativos parcial, e solicita o outro valor absoluto parcial.	Parte-todo
3	Simulado 2011 do INEP modelo teste Prova Brasil	Exemplifica que independente do valor absoluto, o valor relativo seria o mesmo.	Parte-todo
4	Item PM00EQ02 –019 do PISA 2012	Aborda a comparação entre dois valores relativos a valores absolutos distintos.	Comparação
5	Caderno de Atividades	Apresenta dois valores absolutos e em vez de pedir o relativo, pede a comparação deste com a inflação, o que diz respeito à matemática financeira.	Comparação

O Caderno de Atividades mencionado foi elaborado pelo Governo do Paraná, para os alunos dos anos finais do ensino Fundamental, com base na Matriz de Referência de Matemática da Prova Brasil.

Os problemas referidos serão agora exibidos, com as respectivas resoluções construídas em sala, utilizando sempre o Modelo de Barras para favorecer a visualização da resolução, e relatando os diálogos entre professor e turma, professor e aluno, bem como aluno e aluno, ao longo de todas as atividades desta etapa.

- **Problema 1**

Em um concurso estão inscritos 275 candidatos dos quais 176 são homens. A taxa percentual de mulheres é de:

(A) 36 (B) 56 (C) 64 (D) 99

Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do problema1:

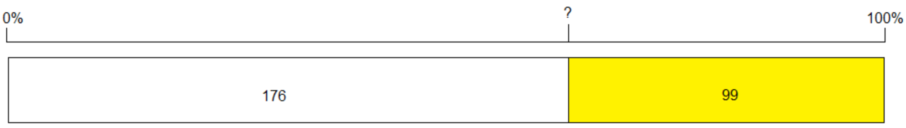
Realizei a leitura do problema com os estudantes, em seguida perguntei em quantos grupos os candidatos seriam separados, ao que me responderam dois. Perguntei quais seriam esses grupos e identificaram como grupo dos homens e grupo das mulheres.

Desenhei uma barra retangular para representar o total de candidatos, cujas partes representam os valores absolutos de homens e mulheres inscritos no concurso. A representação desta forma ressalta que juntas as partes representam o total, ou seja, está atrelada à operação de adição.

Nesse caso, claro que não precisaríamos escrever o número de mulheres, mas fiz a indicação aqui para facilitar a compreensão visual para os estudantes, de que ao justapor as partes estamos configurando o total.

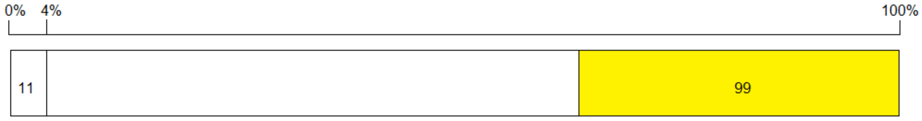
O problema pede a taxa percentual de mulheres inscritas. Expliquei que significa que precisamos comparar a quantidade de mulheres ao número de candidatos e expressar esse valor relativo em porcentagem.

Para indicar os valores relativos (percentuais) correspondentes aos valores absolutos será usado um segmento acima da barra um segmento graduado com os percentuais, no caso, de 0% a 100%.

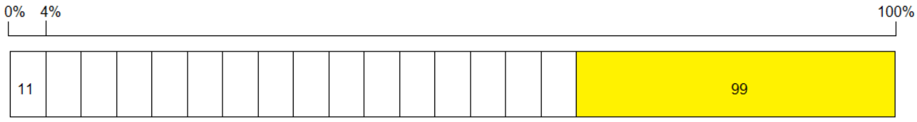


Expliquei que faríamos a divisão do inteiro, ou seja, 275 candidatos, em 100 partes. O objetivo era determinar 1 das 100 partes, ou seja, 1%. Os estudantes calcularam mentalmente que cada 1% do segmento equivale a 2,75 candidatos. Fiz o seguinte rascunho no quadro: $275 \div 100 = 2{,}75\ \rightarrow 1\%\ dos\ candidatos.$

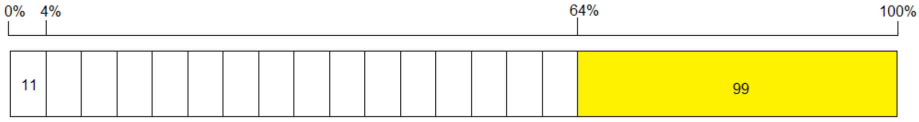
Alguns estudantes ficaram com dúvida sobre o número não inteiro de candidatos, então um deles sugeriu que multiplicássemos por 4 os valores absoluto e relativo. Passei a seguinte informação para o rascunho: $2{,}75 \times 4 = 11\ \rightarrow 4\%\ dos\ candidatos.$ Assim, eles revelaram reconhecer que 11 pessoas correspondiam a 4% dos candidatos. O que, no modelo de Barras, corresponde a:



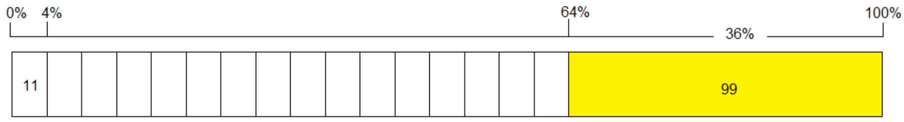
Perguntei quantos grupos de 11 pessoas formariam 176 pessoas. Um deles disse: “mais de dez, professora”. E em seguida outro falou: “então tem mais de 40% de homens”. E outro comentou: “sim, porque a barra dos homens é maior que a metade do total, então é mais do que 50%”. Os alunos concluíram que 11 cabem 16 vezes em 176. Em seguida, registrei o raciocínio na barra:



Perguntei que cálculo deveria ser feito para determinar o valor relativo, ao que um estudante respondeu: “você deve repetir os 4% por 16 vezes, igual fez com os 11 homens”. Dessa reflexão, concluímos que 176 homens correspondem a 64% dos candidatos. Registrei na barra:



Parecendo impressionado, um estudante falou: “ah, então é por isso que a gente diz que quando um aumenta o outro aumenta?”. Os próprios colegas responderam que sim. E se entreolharam, como se algo estivesse começando a fazer sentido para eles. Então perguntei o que poderíamos fazer para determinar o valor relativo às mulheres, ao que me responderam: “faz o total menos os homens”. Calculamos assim, mentalmente, e encontramos a solução, que foi registrada na barra, como apresentado a seguir.



Resposta: A.

Mostrei aos estudantes como o recurso visual sintetizou a resolução e forneceu todas as informações para se chegar à solução, de maneira simples e organizada, com o apoio do cálculo mental.

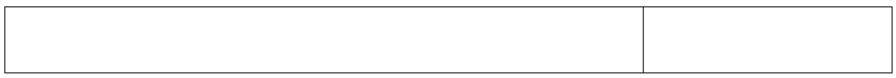
- **Problema 2**

Marcos participou de uma olimpíada de matemática da escola. Ele acertou 72% das 150 questões. O número de questões que ele errou foi de:

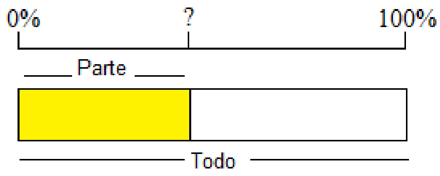
(A)28 (B)42 (C)78 (D)108

Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do problema 2:

Começamos pela leitura do problema em conjunto, sublinhando no texto as palavras contrárias que nos chamaram atenção: acertou e errou. Em seguida, perguntei aos estudantes se o problema era sobre valor absoluto ou relativo e um deles identificou como valor absoluto, justificando que “agora o problema pede o número em vez da porcentagem”. E outro estudante falou, ansioso: “faz a barra das 150 questões, professora”. Entendido isso, desenhei uma barra e perguntei como ela deveria ser dividida. Um estudante falou: “em duas partes, mas a do acerto deve ser maior que a erro”. Todos concordaram. Fiz a divisão. Segue a representação:

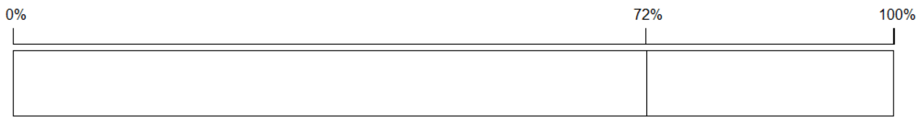


Pedi que os estudantes copiassem a barra e colocassem as informações do problema na mesma. Após algum tempo tentando, um deles falou: “sem a linha que fica em cima da barra não dá, onde vou botar a porcentagem?”. Intervim mostrando que assim como no primeiro problema, quando precisamos comparar as quantidades que compõem o valor absoluto, utilizamos um modelo que relaciona a porção ao total, denominado modelo parte-todo. Escrevi o seguinte no quadro, como exemplo:



Um aluno concordou, fazendo movimento com a cabeça, e falou: “eu tentei colocar os 72 na parte maior, mas 72 é menos que a metade de 150, então ficaria na parte menor e isso não faz sentido, porque eu acho que ele acertou mais do que errou”. Outro aluno contou: “gente, não deve ser só fazer 150-72 e marcar a resposta. Ficaria muito fácil”. E mais um comentou: “não faz sentido tirar a porcentagem do número de questões”.

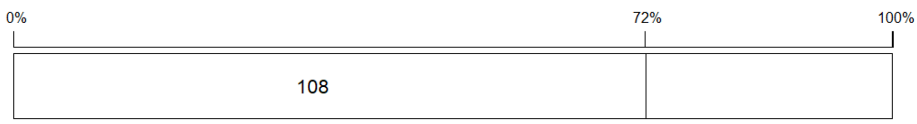
Inferi que alguns dos estudantes já conseguiam distinguir valor absoluto e relativo. Então avancei com a explicação, mostrando que além da barra dos valores absolutos precisaríamos novamente do segmento para indicar os valores relativos. Desenhei a escala percentual sobre a barra e registrei a porcentagem, como será representado a seguir.



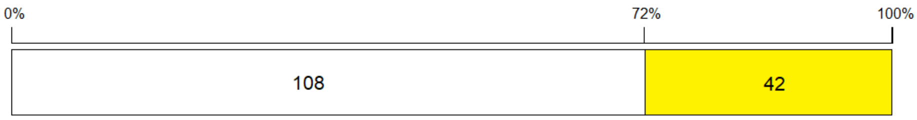
Após ter completado o desenho, ouvi: “professora, dá um tempo para a gente tentar agora”. Depois de uns 5 minutos aguardando por eles, um educando veio à minha mesa e me mostrou que havia encontrado as questões que o aluno acertou, mas faltavam as que ele errou. Segue o registro do aluno:

$$150 \div 100 = 1{,}5$$

$$72 \times 1{,}5 = 108\ questões$$



Depois, olhando pra barra comentou: “*caramba, como eu não vi isso! A resposta é o que falta pra fechar 150 ?!*” Então, por cálculo mental, esse aluno concluiu que a diferença entre 150 e 108 são 42. Completou o exercício ainda apoiado em minha mesa e voltou ao seu lugar todo feliz. Passados mais alguns minutos, pedi para ele ir ao quadro e explicar a resolução, que ficou registrada com a seguinte representação:



Resposta: B.

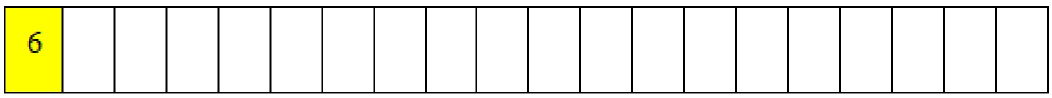
- **Problema 3**

Distribuímos 120 cadernos entre as 20 crianças da 1ª série de uma escola. O número de cadernos que cada criança recebeu corresponde a que porcentagem do total de cadernos?

(A)5%   (B)10%   (C)15%   (D)20%

Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do problema 3:

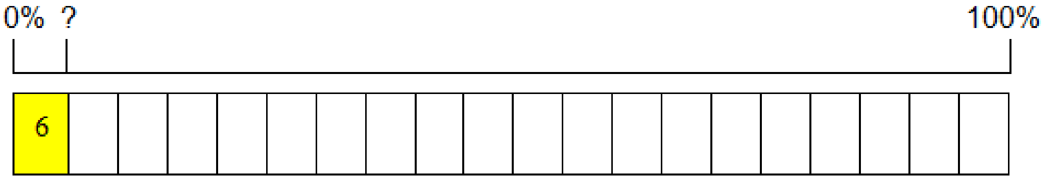
Iniciamos com a leitura conjunta do problema e a investigação das palavras mais importantes a serem destacadas. Então uma aluna perguntou: “será a mesma quantidade de cadernos para cada criança?” e, antes da minha resposta, continuou: “então são 6 cadernos por criança.” Registrei seu pensamento da seguinte forma:



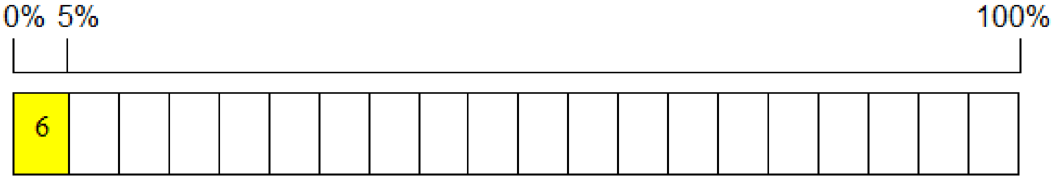
Comentei que gostaria de manter fixo o número de cadernos e mudar o número de crianças. Então, um aluno disse: “mudando o número de crianças, podem sobrar ou faltar cadernos”. Inferi que ele entendeu que entregar 6 cadernos a cada criança era uma regra, em vez de uma conclusão, da situação problema. Faltava a compreensão de a palavra distribuir significar repartir igualmente.

Expliquei que a ideia era entregar a cada criança a mesma quantidade de cadernos, podendo ser mais de 6 se houvesse menos crianças, por exemplo. Se houvesse mais crianças, cada uma receberia menos de 6 cadernos.

A turma concordou e em seguida marcamos o dado “20 crianças” como importante no enunciado do problema. Logo após, um estudante falou: “marca também porcentagem do total de cadernos”. E eu marquei no enunciado do problema. Em seguida, apontei a barra e afirmei que ela representaria para o problema o total de cadernos. Desenhei a escala percentual sobre a barra. Comuniquei aos estudantes que se referia à porcentagem de cadernos que havíamos acabado de marcar no texto. O registro foi o seguinte:



Em seguida, pedi que eles tentassem resolver a questão e aguardei. As soluções apresentadas pelos educandos revelaram que haviam compreendido a questão e se apropriado da representação pictórica. Escolhi uma resolução correta para ampliar a discussão sobre o problema com a turma e levei ao quadro, conforme apresento a seguir:



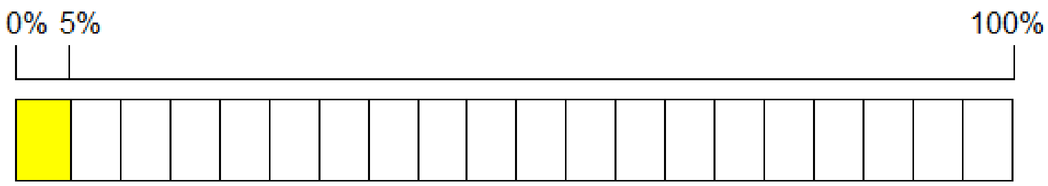
Havia uma barra representando o total de cadernos, dividida em 20 partes que correspondiam ao número de crianças, bem como o número de cadernos que coube a cada criança e acima da barra havia o segmento indicando o valor relativo em porcentagem.

Resposta: A.

Logo após, lancei o questionamento: e se a quantidade total de cadernos fosse outra, o percentual mudaria? Por exemplo, se fossem 160 cadernos e a mesma quantidade de crianças?

O objetivo do questionamento era levar os alunos a perceberem que qualquer que fosse a quantidade de cadernos, ao repartir igualmente entre 20 alunos, cada um receberia 5% do total (ou seja, que 1/20 = 5%). Precisei ser mais diretiva: vocês acham que o valor percentual muda quando alteramos a quantidade de cadernos?

Apaguei no quadro o número 6, que indicava a quantidade de cadernos distribuída a cada aluno, conforme mostrado na barra a seguir.



Um estudante disse: “não muda porque continua 100 dividido por 20”. O outro disse: “eu não enxergaria isso sem a barra”. E uma menina falou: “agora entendi porque não depende do número de cadernos”.

Refleti que pela primeira vez havíamos feito uma resolução acompanhada de elaboração de problema como cita a Base Nacional Comum Curricular, pois ao trocar as condições do problema original elaboramos outro, gerando uma nova reflexão.

- **Problema 4**

APARELHOS DEFEITUOSOS

A empresa Eletrix fabrica dois tipos de aparelhos eletrônicos: tocadores de áudio e tocadores de vídeo. Ao final da produção diária, os tocadores são testados e aqueles que apresentam defeito são retirados e enviados para conserto. O quadro abaixo indica o número médio de tocadores de cada tipo, que são fabricados por dia, assim como a porcentagem média de tocadores defeituosos por dia.

Tipo de tocador	Número médio de tocadores fabricados por dia	Porcentagem média de tocadores defeituosos por dia
Tocador de vídeo	2 000	5%
Tocador de áudio	6 000	3%

Um dos técnicos de testes afirma que: “Em média, há mais tocadores de vídeo enviados para conserto por dia, se comparado ao número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia.” Decida se a afirmação do técnico é correta. Use um argumento matemático para justificar sua resposta.

Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do problema 4:

Esse problema, por possuir um texto maior, demandou mais tempo de aula do que os demais. Os estudantes reclamaram muito da cópia do quadro e esse fato os desanimou um pouco. Expliquei às turmas que, mesmo tendo previsto que isso aconteceria, naquela semana estávamos sem poder usar o recurso da copiadora na escola, e esperava contar com a colaboração deles.

Motivei as turmas com diferentes propostas: a 1803 formaria grupos de até cinco alunos e me apresentaria a resolução do problema, em seus cadernos, após o recreio. E a 1802, onde ministrei o último tempo de aula, me entregaria a resolução no dia seguinte.

Em um dos grupos da turma 1803, os estudantes estavam tão envolvidos com a questão, que, em vez de se sentarem, ficaram de pé gesticulando e argumentando. Um dos integrantes estava com dúvida e os demais se dedicaram a explicar o que haviam entendido. Esse grupo foi para o pátio na hora do recreio, discutindo o problema, e resolveu retornar à sala antes, onde eu havia permanecido, para escrever a resolução. Observei que utilizaram a fala, a representação pictórica e os cálculos para se entenderem e solucionar o problema.

Pedi aos grupos da 1803 que trocassem as resoluções entre si, não para fazerem anotações nas mesmas, mas para que, enquanto eu fizesse a correção da questão no quadro, eles observassem o raciocínio que os colegas desenvolveram.

Já na turma 1802, constatei no dia seguinte que nenhum estudante havia realizado o trabalho de casa. Alguns disseram que não tiveram tempo e outros que não encontraram auxílio. Acredito que, ao solicitar o trabalho de casa, tenha criado uma barreira aos estudantes que mais precisavam da minha ajuda.

A respeito das relações entre deveres de casa e equidade, Jo Boaler (2018) afirma:

> "É fácil ver por que o dever de casa aumenta a iniquidade: estudantes de lares menos privilegiados raramente possuem um lugar tranquilo para estudar; eles com frequência têm que fazer as tarefas a noite, em casa, enquanto os pais estão trabalhando, ou então em seus próprios locais de trabalho; e eles são menos propensos a contar com recursos como livros e acesso à internet em casa." (BOALER, 2018, p.93)

Optei por dar oportunidade aos estudantes da 1802 para que realizassem a atividade em sala, solicitando que se organizassem em grupos e encorajando-os, dizendo que eram capazes de resolver o problema e que seria uma questão de esforço coletivo.

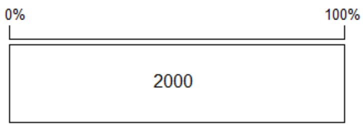
Iniciamos a correção conversando sobre o que seriam tocadores de vídeo e de áudio. Para os estudantes, o tocador de vídeo seria um leitor de vídeos em formato MP4 e o tocador de áudio seria um aparelho de reprodução de músicas em formato MP3. Eles comentaram que os aparelhos celulares, os tábletes e os computadores poderiam assumir essas funções. Demonstraram muito interesse pelo tema e pediram oportunidade para falar, chegando a opinar sobre a tecnologia dos jogos digitais que estão fazendo sucesso.

Voltando ao problema, destacamos a frase: “Em média, há mais tocadores de vídeo enviados para conserto por dia, se comparado ao número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia”. Em seguida, recorremos à tabela para identificar as quantidades mencionadas na frase.

Investigando primeiramente a quantidade de tocadores de vídeo defeituosos, perguntei aos estudantes: o que deveríamos registrar na barra?

Alguém respondeu: “os 2000 tocadores de vídeo”. Outro observou: “mas tem que fazer a linha da porcentagem também”.

Constatei que os estudantes já tinham noção de como desenhar o modelo. Registrei a barra dos tocadores de vídeo e a escala percentual no quadro, como mostrado a seguir:



Logo após, pedi sugestões sobre como encontrar a quantidade de tocadores de vídeo defeituosos e recebi dos grupos diferentes ideias. Assinalarei algumas:

1ª) Dividir 2000 por 100, para calcular 1%, que são 20 tocadores, e multiplicar por 5, determinando os 5% como 100 tocadores;

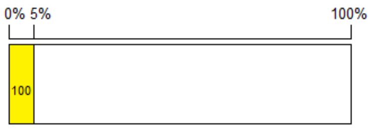
2º) Dividir a barra ao meio para obter 50% e depois dividir a metade por 10 para achar 5%;

3º) Dividir a barra em 10 partes para achar 10% dos tocadores e depois dividir a décima parte ao meio para determinar os 5%;

4º) Dividir a barra em 20 partes, pois 5% é igual a 100% divididos por 20.

Verifiquei que os estudantes estavam revelando compreender a distinção entre valor absoluto e valor relativo percentual. Além disso, com o registro no quadro dos comentários sobre as estratégias adotadas, mostrei aos grupos que o problema possuía diferentes rotas de solução possíveis.

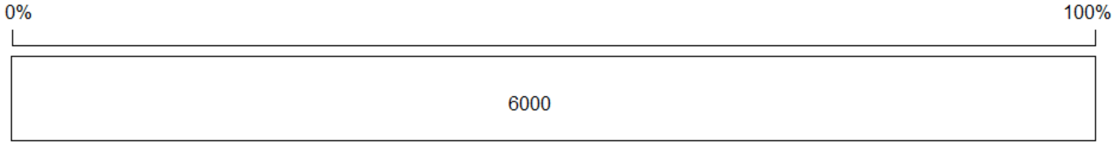
Anotei a representação mais geral, do percentual e do valor absoluto, dos tocadores de vídeo enviados para conserto por dia, no desenho que estava no quadro, como apresentado a seguir.



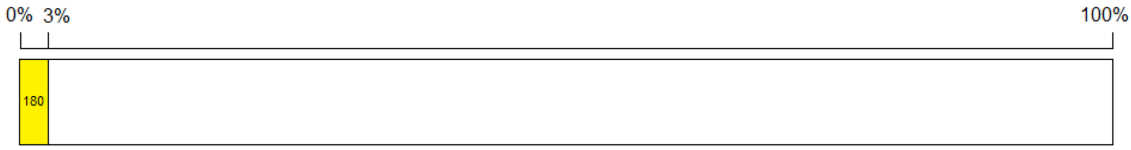
Observei aos estudantes que a representação em modelos de barras muitas vezes, como no caso, pode não respeitar as dimensões em escala. O importante é que sejam "razoáveis". Por exemplo, não caberia registrar 5% com uma subdivisão próxima a um quarto do segmento.

Voltando ao enunciado do problema, li novamente a frase destacada e sublinhei: número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia. Perguntei como iríamos representar o que foi sublinhado, ao que me responderam que deveria desenhar outra barra, sendo maior que a primeira. Inferi que, intuitivamente, os estudantes estavam elaborando o modelo de comparação. É importante observar, que neste caso são necessárias duas barras: uma para o registro das quantidades correspondentes aos tocadores de vídeo e outra para os tocadores de áudio. Tocadores de vídeo e tocadores de áudio não compõem juntos um todo.

Alguns estudantes pediram para desenhar a nova barra igual a três vezes a primeira. Perguntei por que três vezes. Eles justificaram que 6000 é o triplo de 2000. Verifiquei que os estudantes haviam compreendido a razão entre o número médio de tocadores de áudio e de vídeo fabricados por dia. Desenhei a barra conforme as suas instruções:



Enquanto isso, os estudantes comentaram que o valor relativo ficaria muito próximo do início do segmento. Acolhi o comentário e indiquei o percentual conforme eles mencionaram, lembrando-lhes que a representação estava fora de escala. Acreditei que os estudantes haviam compreendido a utilização da escala no problema.



Coloquei a anotação do cálculo no rascunho:

$$6000 \div 100 = 60, logo\ 1\%\ de\ 6000\ corresponde\ a\ 60.$$

$$60 \cdot 3 = 180, ou\ seja, 3\%\ de\ 6000\ tocadores\ de\ \acute{a}udio.$$

Retomando o enunciado, questionei: a afirmação do técnico é correta?

Algumas das respostas dadas pelos grupos foram:

i) Não, porque como 100 é menor que180, então o número de tocadores de áudio é maior.

ii) Não, porque mesmo a porcentagem sendo menor o número de tocadores de áudio é maior.

iii) Não, porque os tocadores de áudio são o triplo dos tocadores de vídeo.

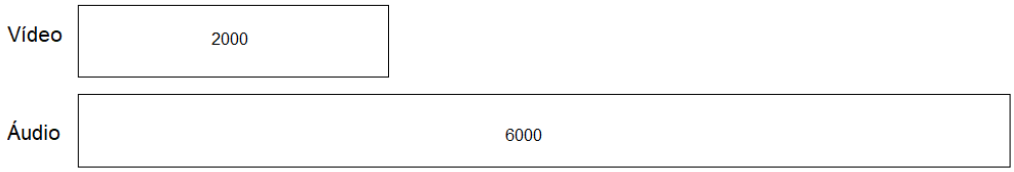
iv) Não, porque 3% de 6000 é maior que 5% de 2000.

v) Não, porque quanto maior o número, maior é a porcentagem tirada dele.

Como síntese, escrevi no quadro uma resposta ao enunciado do problema para os estudantes: a afirmação é incorreta, pois são enviados em média 180 tocadores de áudio por dia, enquanto o número médio de tocadores de vídeo enviados é 100.

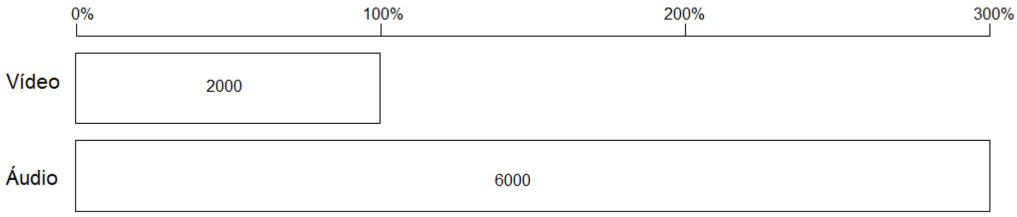
Em seguida, aproveitei a oportunidade para exemplificar o Modelo de Barras de comparação, conforme relatarei a seguir.

Desenhei inicialmente duas barras próximas, assinalando seus valores absolutos e as identifiquei de acordo com os dados do problema.

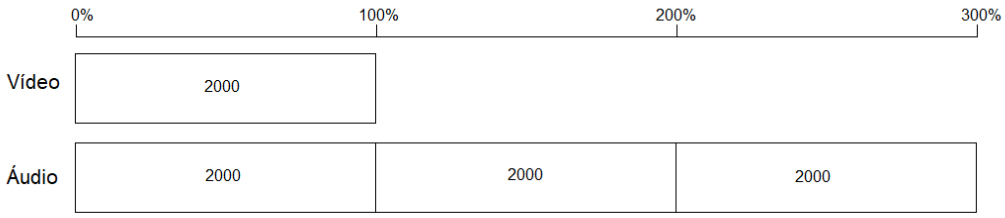


Comentei que esse modelo pode ser usado para comparar duas quantidades em porcentagem, se uma barra for tomada como referencial.

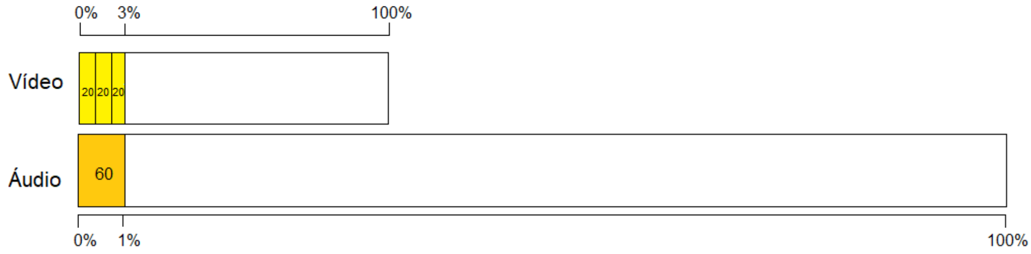
Disse que, por exemplo, a barra de vídeo será tomada como base (100%) e a barra de áudio será tomada em relação à barra de vídeo. Então a barra de áudio é 300% da barra de vídeo. A porcentagem 300% significa 300 unidades de 100 unidades. Representei a escala percentual, como se vê no seguinte desenho:



Comentei que em particular, neste problema, a barra do áudio corresponde a 3 barras de vídeo justapostas, explicitando a comparação dos valores absolutos, na razão 3 para 1. Consecutivamente, mostrei da seguinte forma no desenho:



Expliquei ainda a utilização da representação visual para auxiliar a compreensão de que 1% de 6000 corresponde a 3% de 2000. Lembrando que nos esquemas não foi meu objetivo seguir rigorosamente a escala, uma vez que ficaria dificultoso enxergar os valores relativos. Apresentei esse raciocínio por meio de imagem semelhante à seguinte:



Alguns dos estudantes, observando a proporção na barra, concluíram que os 3% dos tocadores de áudio correspondem a 9% dos tocadores de vídeo. Consequentemente, os 3% dos tocadores de áudio superam os 5% dos tocadores de vídeo, mencionados no enunciado do problema.

- **Problema 5**

Se o salário de Antônio passou de R$ 700,00 para R$ 850,00 num período em que a inflação mensal foi de 4%, então, o reajuste foi:

(A) Abaixo da inflação.

(B) Acima da inflação.

(C) Igual à inflação.

(D) Não é possível de se calcular.

Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do problema 5:

Ao realizarmos a leitura do problema, destacamos a palavra inflação. O que seria inflação?

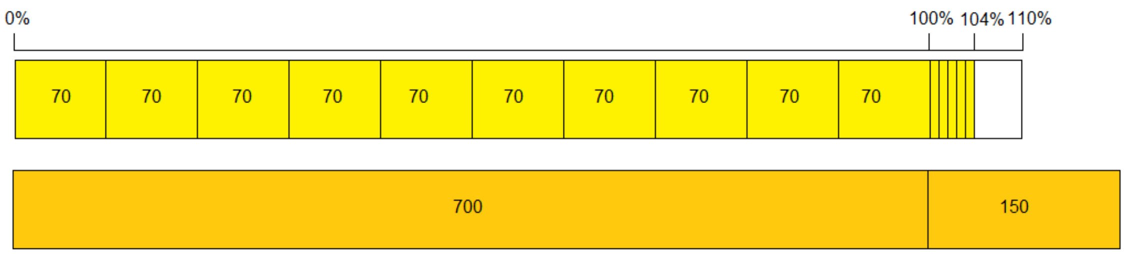
Alguns alunos relataram ter ouvido em casa os pais reclamando da inflação, outros comentaram que já ouviram essa palavra assistindo o noticiário na televisão, mas nenhum sabia explicar o significado. Em seguida, fizemos uma pesquisa sobre inflação na internet, via celular, e encontramos:

> “A inflação é um conceito econômico que representa o aumento persistente e generalizado do preço de uma cesta de produtos em um país ou região durante um período definido de tempo. Se, por exemplo, uma cesta de produtos custa R$ 100 reais em julho e passa a ser vendida por R$ 150 reais em agosto, verifica-se uma inflação de 50% no mês. Ela também representa a queda do poder aquisitivo do nosso dinheiro em relação a elevação dos preços de

> bens e serviços. Quando a inflação está em um nível muito baixo, ocorre a estabilização dos preços, e assim, o valor dos produtos não aumenta.” (O Economista, 2009)

Destaquei a expressão poder aquisitivo, e expliquei que é a capacidade de um indivíduo adquirir com uma quantidade de dinheiro mercadorias, serviços e bens. Por exemplo, conseguimos saber se o poder aquisitivo diminuiu quando uma mesma quantidade de dinheiro compra menos de um produto e esse poder é determinado pela inflação.

Logo após a minha intervenção sobre o vocabulário, os grupos trabalharam na resolução do problema. O raciocínio de alguns deles foi por estimativa. Eles tomaram 10% do salário, que são 70 reais, e compararam ao reajuste, 150 reais, concluindo que o reajuste foi maior que 10%. E como 10% é maior que a inflação de 4%, concluíram que o reajuste superou a inflação. O modelo elaborado por eles foi o seguinte:



Houve grupos fazendo tentativas de calcular o percentual do salário com reajuste em relação ao salário inicial, para fazer comparação entre o reajuste e a inflação. Sua estratégia foi utilizar a regra de três e a calculadora. Sentiram dificuldade em expressar o percentual encontrado. Sugeri que fizessem o arredondamento.

Destaco o registro de um dos grupos após minha intervenção:

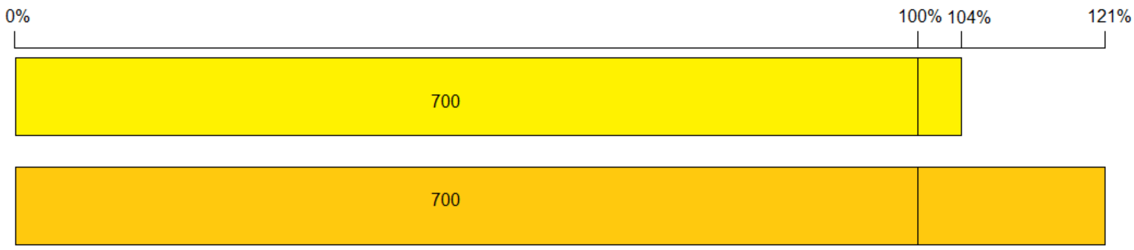
R$	%
700	100
850	x

$$\frac{700}{850} = \frac{100}{x} \rightarrow 700x = 85000 \rightarrow x = \frac{85000}{700} \rightarrow$$

$$x = 121{,}4285714286\ldots$$

O reajuste aproximado foi de 121% - 100% = 21%, que é maior do que 4%.

A investigação do grupo resultou na seguinte representação pictórica:



Houve também grupos que se detiveram em calcular o valor absoluto da inflação e do reajuste, e os compararam. Para exemplificar, destaco a seguir um dos registros que verifiquei:

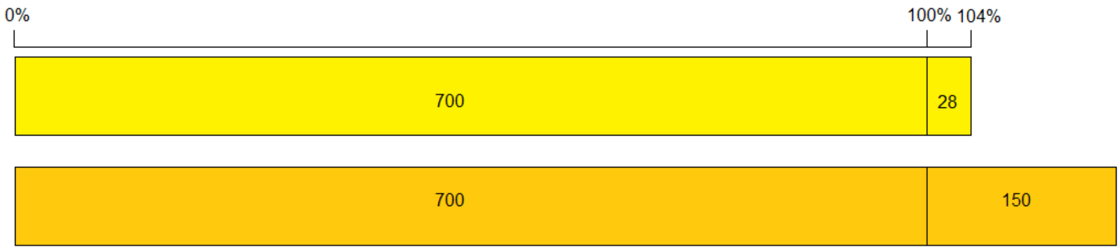
$$700: 100 = 7 \text{ (} 1\% \; são \; 7 \; reais)$$

$$7 \times 4 = 28 \; (inflação)$$

$$850 - 700 = 150 \; (reajuste)$$

$$Como \; 150 \text{ é } maior \; que \; 28, então \; o \; reajuste \; foi \; acima \; da \; inflação.$$

Exemplifico o modelo elaborado por um desses grupos a seguir:



Ao final da aplicação das atividades que compuseram a Etapa II, ouvi dos estudantes que os problemas pareceram desafiadores, em contrapartida o processo de resolução fazia mais sentido. Após ter levado ao quadro as diferentes representações visuais, ouvi ainda o comentário: “é mais rápido ler a barra do que as contas, pois aqui só de olhar eu vejo todas as informações que a gente precisa”.

A participação dos estudantes nas atividades da Etapa II evidenciou a compreensão da diferença entre os valores absolutos e valores relativos percentuais, o despertar do seu interesse pela resolução de problemas, o seu entusiasmo ao conhecer e utilizar o Modelo de Barras, a ampliação do desenvolvimento de sua aprendizagem nas atividades em grupo, a multiplicidade de estratégias para abordar um problema e a viabilidade de elaborar um novo problema.

Após empreender o ensino de porcentagem, familiarizando os estudantes com o modelo parte-todo e o modelo de comparação, passei à terceira etapa.

Etapa III – Ação interdisciplinar

Tendo sido atingido o desenvolvimento das habilidades listadas na Etapa II, ousamos ministrar na semana seguinte uma aula em parceria com a professora de inglês. Escolhemos o dia 13 de março para ministrar nas turmas uma aula, contendo problemas de porcentagem com enunciados em inglês. A propósito, curiosamente esse dia escolhido era véspera do Dia do Pi, que cairia em um sábado.

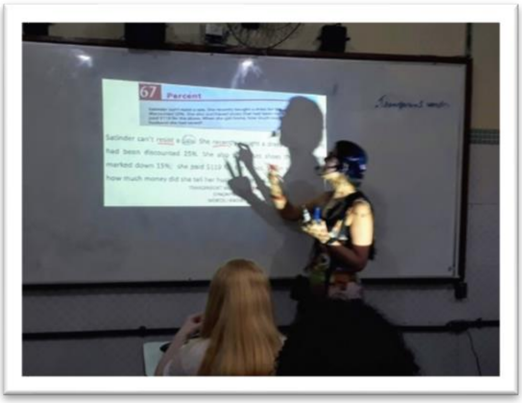
A proposta, inédita na Escola Municipal Cardeal Arcoverde, consistiu de realizar simultaneamente uma aula de matemática e inglês com duração de 50 minutos por turma. Nessa primeira experiência, pretendemos que o estudante fizesse uma "tradução dupla", ou seja, interpretasse as palavras e números do problema, no contexto matemático proposto, e que registrassem sua interpretação em um modelo visual, o Modelo de Barras.

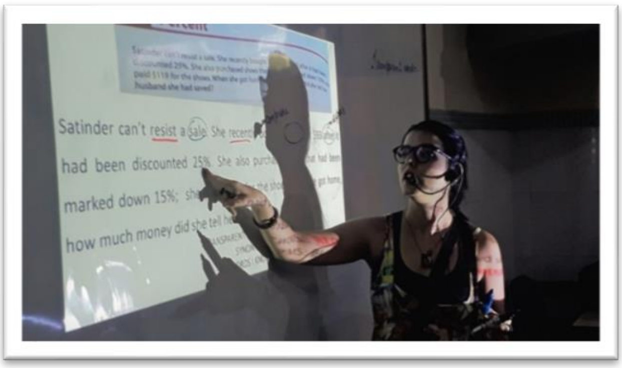
A professora de inglês, também protagonista desse projeto, se chama Giselle Aparecida Toledo Esteves. Ela possui graduação em Letras Português/Inglês e Mestrado e Doutorado em Letras Vernáculas (Língua Portuguesa), todos pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Os problemas selecionados foram extraídos do livro: *Model Drawing for challenging word problems – finding solutions the Singapore way* (WALKER,2010, p.80-82). A adoção dessa bibliografia teve a intenção de ajudar os estudantes a lidar com problemas de palavras em inglês e ao mesmo tempo ampliar sua compreensão matemática, utilizando o Modelo de Barras.

No início da aula de inglês, os estudantes foram surpreendidos com a entrada das professoras de inglês e de matemática juntas. Falou-se que o Dia do Pi é comemorado em 14 de março e explicou-se que a notação norte-americana 3/14 (mês/dia) — equivalente a 3,14 — se refere à aproximação mais conhecida de π. Em seguida, a professora Giselle contou-lhes que ambas as professoras permaneceriam em sala, pois ao longo daquela aula a matemática estaria unida ao inglês. Depois, foram distribuídos aos estudantes dois problemas impressos em papel, para serem colados no caderno de inglês. Ao longo da aula, os mesmos foram projetados no quadro, conforme será relatado a seguir.

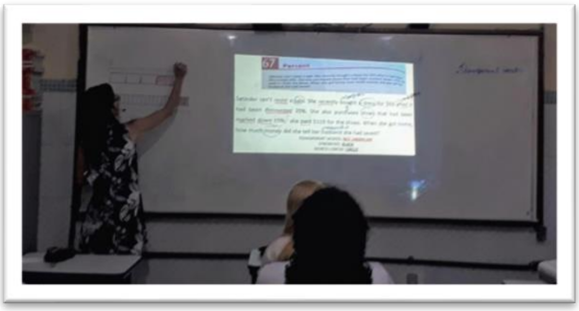
A dinâmica da atividade foi a seguinte: a cada problema iniciou-se a abordagem com a professora de inglês, pela técnica de leitura em inglês orientada à interpretação (IMAGENS 1). Entre as estratégias de leitura que utilizou para acessar o conhecimento linguístico dos estudantes, a professora adotou a localização de palavras cognatas com radicais iguais ou semelhantes no Português como, por exemplo, resist/recent, e também conduziu os estudantes a fazerem inferências sobre o sentido de vocábulos que já fazem parte do seu material didático como, por exemplo, sale e after. Nesse processo, ela tornou notória a importância da representação visual, ao circular e sublinhar vocábulos, dando destaque a cada um por cores diferentes, de acordo com a sua intencionalidade no ensino.

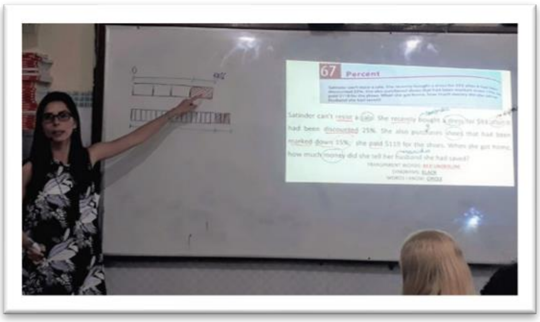




IMAGENS 1 – Professora Giselle – Leitura orientada dos problemas

Em seguida os estudantes elaboraram em seus cadernos o Modelo de Barras para encontrar a solução dos problemas e, logo após, aconteceu a intervenção da professora de matemática com apresentação da resolução comentada dos problemas no quadro e a discussão das eventuais dúvidas dos estudantes (IMAGENS 2).





IMAGENS 2 – Professora Raquel – Discussão da resolução pelo Método de Barras

Primeiro problema proposto:

O primeiro problema trabalhado foi o de número 67 da bibliografia *Model Drawing for challenging word problems – finding solutions the Singapore way* (WALKER,2010, p.80).

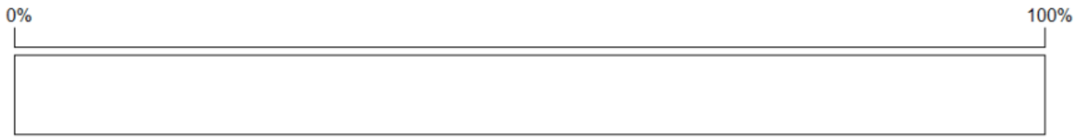
> *Satinder can’t resist a sale. She recently bought a dress for $93 after it had been discounted 25%. She also purchased shoes that had been marked down 15%; she paid $119 for the shoes. When she got home, how much money did she tell her husband she had saved?*

Cuja nossa tradução para língua portuguesa foi:

Satinder não pode resistir a uma promoção. Recentemente, ela comprou um vestido por 93 dólares depois de ter sido dado um desconto de 25%. Ela também comprou sapatos com redução de 15% no preço; ela pagou 119 dólares pelos sapatos. Quando ela chegou em casa, quanto dinheiro disse ao marido que havia economizado?

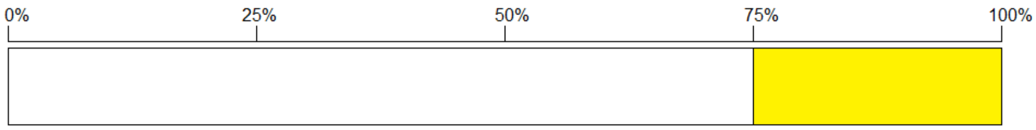
Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do primeiro problema:

Inicialmente, li com os estudantes o problema. Destacamos os produtos comprados por Satinder: o vestido e os sapatos. Começamos refletindo sobre a compra do vestido. Representei o preço do vestido por uma barra. Acima desta, posicionei a escala de 0% a 100%.



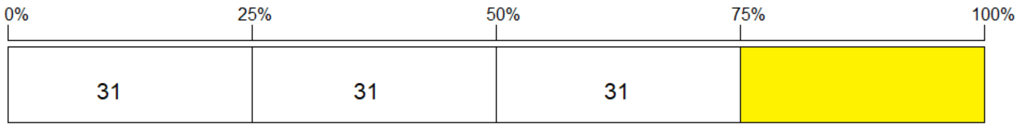
Falei à turma: de acordo com o enunciado, houve desconto de 25% no preço do vestido. Quantas partes de 25% formam 100%?

Alguns estudantes responderam 4 partes. Outros comentaram que haviam dividido a barra em 20 partes, cada uma correspondendo a 5%, para chegar aos 25%. Optei por registrar a divisão em 4 partes, guardando a outra estratégia para abordar o desconto seguinte contido no enunciado. Anotei os percentuais múltiplos de 25% no segmento acima da barra. Destaquei a quarta parte da barra mais à direita, para representar o desconto.



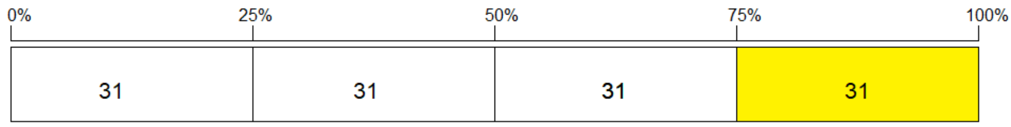
Logo após, perguntei aos estudantes que valor corresponderia à parte não pintada da barra. Alguns responderam 93, reconhecendo aquela parte como o preço do vestido com desconto. Houve um estudante de uma das turmas que respondeu 31, o que me surpreendeu, inclusive porque disse que havia escutado que eu queria a parte pintada.

Aproveitando a explicação dos alunos, mostrei à turma que o preço com desconto estava representado por três partes na escala percentual e fiz as divisões correspondentes na barra. Logo calcularam mentalmente que uma parte correspondia a 31 unidades. Registrei também no modelo:

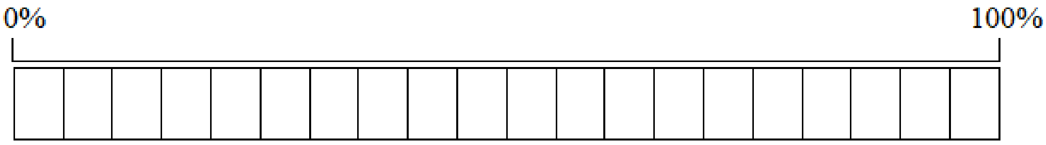


A seguir, apontei a parte pintada e perguntei: que valor foi economizado por Satinder no vestido?

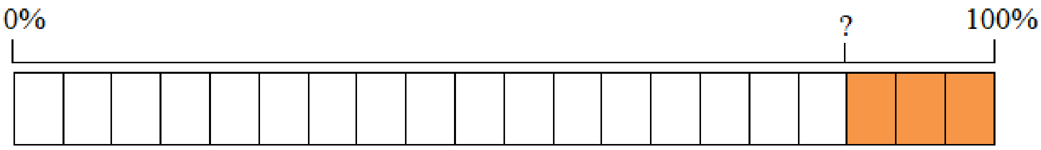
Os estudantes, empolgados, responderam: “31 dólares, porque as partes são iguais!”. Entendi que a turma havia alcançado a compreensão que teve o aluno que antecipadamente me havia anunciado esse valor. Então o modelo relativo ao preço do vestido foi completado, como ilustra a figura a seguir:



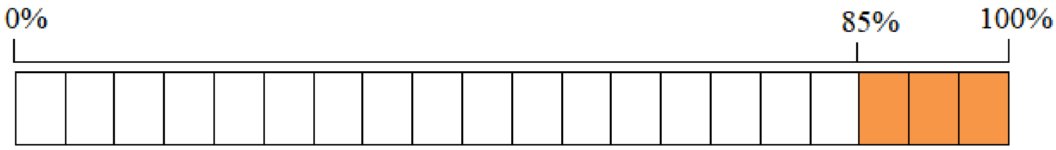
Voltando ao enunciado, passamos à representação visual do desconto no valor dos sapatos. Diante do desafio de representar 15% de desconto no segmento, relembramos a estratégia dos estudantes, recentemente comentada, que foi dividir a barra em 20 partes, cada uma correspondendo a 5%.



Facilmente os estudantes reconheceram que precisariam de 3 dessas partes para representar o desconto. Destaquei as partes na extremidade à direita da barra e assinalei o valor relativo com uma interrogação.

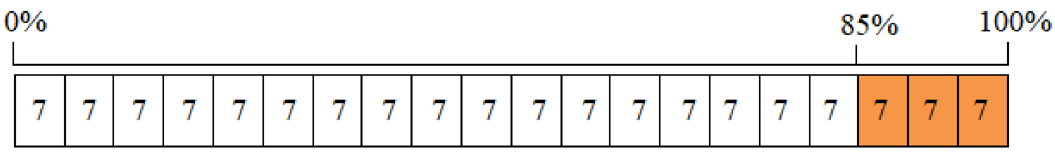


Apontei a parte pintada da barra e comentei que ali estava o desconto. Em seguida, confirmei se haviam entendido, perguntando de quanto era o desconto, ao que me responderam: “de 15%”. Logo após, apontei a parte não pintada e comentei que ali estava o valor pago por Satinder. Depois perguntei que percentual do valor inicial dos sapatos Satinder pagou por eles e os estudantes responderam: “85%”. Então registrei no modelo o percentual, como mostrado a seguir.



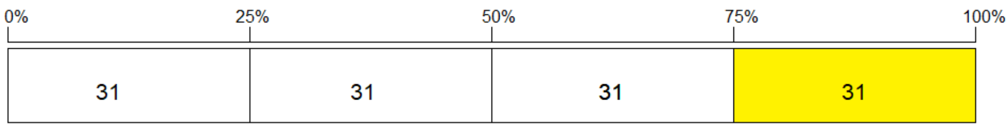
Convidei alguns alunos para explicar como calcularam esse percentual. Alguns disseram ter partido dos 100% e tirado 5% por 3 partes pintadas, outros disseram ter partido de 0% e somado 5% até completar a parte não pintada. Constatei que, nesses casos, todos estavam validando a resposta pelo segmento e pela barra.

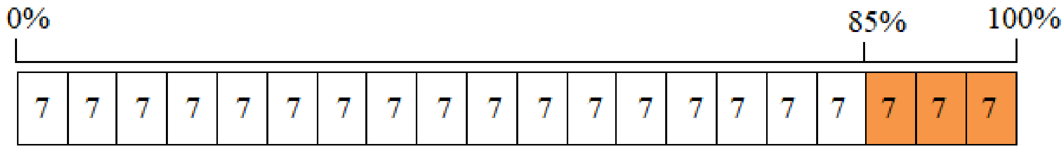
Para completarmos nossa investigação sobre o preço dos sapatos, procuramos o valor absoluto do desconto. Iniciei perguntando quantas partes correspondentes a 5% haviam sobrado após o desconto e os alunos disseram: “17”. Tornamos à leitura do enunciado, que dizia: “ela pagou US $ 119 pelos sapatos”. Depois falei aos estudantes: para completar a barra, precisamos saber a quanto corresponde cada parte. Então alguns alunos fizeram comentários, como: “divide o 119 pelas partes que sobraram, professora”. Concordei e pedi que calculassem mentalmente 119:17, e encontraram o quociente 7. Registrei na barra o valor encontrado.



Em seguida, apontei o modelo e perguntei aos estudantes qual foi a economia de Satinder na compra dos sapatos. Alguns responderam: “a parte pintada”. Outros disseram: “21 dólares”. Considerei satisfatória a resposta e passei ao fechamento do problema, voltada à pergunta do mesmo: “quando chegou em casa, quanto dinheiro Satinder disse ao marido que havia economizado?”.

A esta altura, os estudantes visualizavam no quadro os seguintes registros:





Olhando as duas barras construídas no quadro, cientes de que os descontos correspondiam às partes pintadas, os estudantes concluíram, por meio do cálculo mental de 31+21, que Satinder disse ao marido que havia economizado 52 dólares.

Segundo problema proposto:

O segundo problema trabalhado foi o de número 68 da bibliografia *Model Drawing for challenging word problems – finding solutions the Singapore way* (WALKER,2010, p.81-82), transcrito a seguir.

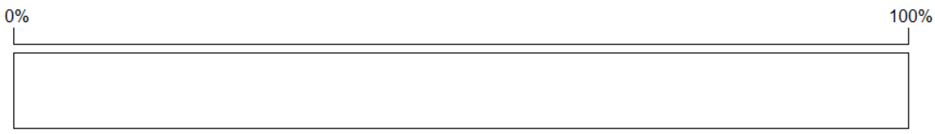
Lydia saved 20% of her income each week. After she received a 10% raise, she was saving an additional of $3 each week. What was her original weekly pay?

Cuja nossa tradução para língua portuguesa foi:

Lydia economizava 20% de sua renda a cada semana. Depois de receber um aumento de 10%, passou a economizar 3 dólares a mais por semana. Qual era o seu salário semanal original?

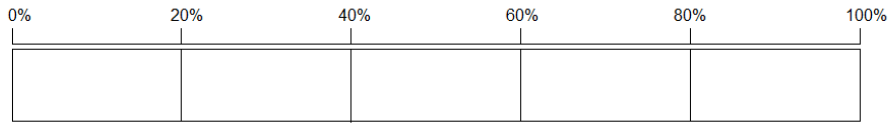
Relato e comentários sobre a aplicação e resolução do segundo problema:

Lendo novamente com os estudantes o enunciado, começamos a explorar o problema. Nosso primeiro passo de resolução foi a representação do salário semanal original, como mostrado a seguir.

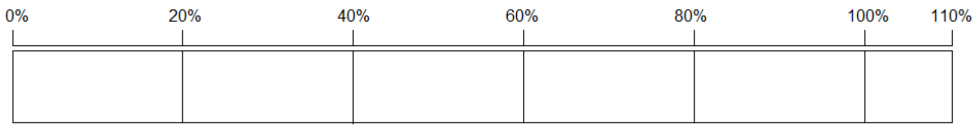


Fixada a barra do salário semanal original, trabalhamos sobre a mesma de acordo com o trecho: “Lydia economizava 20% de sua renda a cada semana”. Nesse momento, os estudantes comentaram que como Lydia economizava 20%, então poderia gastar 80% do salário a cada semana. Considero que esta reflexão foi um aprendizado da atividade anterior desta terceira etapa. Ouvi também comentários dos estudantes sobre 20% caber 5 vezes em 100%. Considero esta outra reflexão como uma transferência de conhecimento das atividades da segunda etapa.

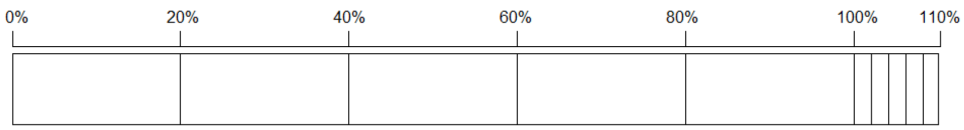
O próximo passo foi construir a representação da economia inicial de Lydia, onde o percentual economizado semanalmente recebeu destaque, pois os estudantes entenderam o salário semanal original como múltiplo desse valor economizado. Veja a seguir:



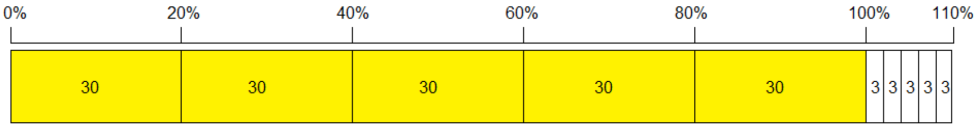
Retomando a leitura do enunciado, realcei o trecho “receber um aumento de 10%”. Sobre o aumento, alguns dos estudantes propuseram modificar a barra e o segmento. Pedi que me explicassem como fariam. Após conversarem entre si, falaram que aumentariam a barra e o segmento no tamanho da metade de uma daquelas partes de 20%. De acordo com sua sugestão, obtivemos a seguinte representação visual do novo salário de Lydia:



Levantei a questão sobre como representaríamos o que Lydia economizava após o aumento, entretanto nenhum estudante respondeu. Presumi que não tinha ficado claro para eles que Lydia continuava economizando 20% do que recebia e não a mesma quantia. Em seguida, apontei a região do acréscimo e expliquei que Lydia guardaria também uma parte desse aumento, da mesma forma que guardava do salário inicial, ou seja, 20% do salário reajustado. Então deduziram que era preciso dividir a região do acréscimo também em 5 partes e destacar uma delas. Esse raciocínio foi expresso da seguinte forma:



De volta ao enunciado do problema, lemos o trecho que dizia “economizava US $ 3 adicionais por semana” e os estudantes revelaram, por suas falas, que compreenderam que cada parte em que a região do acréscimo ficou dividida correspondia a 3 dólares. Além disso, eles calcularam mentalmente o reajuste do salário, obtendo como solução 15 dólares, e analisaram que se 15 dólares correspondiam a 10%, então a 20% corresponderiam 30 dólares. Em síntese, a representação final no quadro ficou da seguinte forma:



Por meio da representação visual e do cálculo mental, concluímos que o valor do salário semanal original de Lydia era 150 dólares.

Finalizei assim, a aplicação da última atividade proposta.

A seguir, será apresentado o relato da professora Giselle sobre a aula ministrada em parceria nesta terceira etapa do plano didático:

> A princípio, minha motivação foi colaborar para a pesquisa de minha colega de trabalho Raquel Medina e, ao entender mais a proposta, fiquei, realmente, interessada na possibilidade de unir os conhecimentos sobre estratégias de leitura em língua estrangeira e o ensino de matemática, matéria em que sempre tive tanta dificuldade.
> Eu nunca havia dado aula com alguém, nem com outro professor de Inglês. Então, eu me senti desafiada, apesar da insegurança em não saber qual seria o resultado e temendo até prejudicar minha colega Raquel. Entretanto, por se tratar de uma pesquisa científica, reconheci a importância de ministrar esse tipo de aula, independentemente do resultado. Afinal, em pesquisa, todo resultado nos diz algo, estando de acordo com nossas hipóteses ou não. Confesso que fiquei um pouco tensa na primeira aula, mas, ao perceber que os alunos estavam participando, o foco voltou-se a eles e o desfecho foi muito profícuo para mim e acredito que para os alunos também. Infelizmente, fomos interrompidas pela quarentena, mas eu gostaria de fazer esse tipo de aula mais vezes!
> O objetivo fundamental da aula de língua inglesa era fazer com que os discentes se interessassem por compreender o comando dos problemas matemáticos pela aplicação de algumas estratégias de leitura, tais como “scanning” (busca por informações específicas), detecção de palavras cognatas e de “falsos” cognatos, inferências, ativação consciente dos conhecimentos de mundo, linguístico e textual. Esse objetivo foi alcançado, uma vez que os alunos participavam respondendo adequadamente a várias perguntas referentes aos procedimentos de leitura. Buscamos projetar, por um aparelho de data show, a imagem de cada problema em sua forma original e, na parte inferior, a proposta foi digitada para que fosse possível colocar o texto em letras maiores para

> todos os alunos conseguirem enxergar, já que nossas turmas são cheias. A partir da leitura dos textos, eu começava a fazer perguntas que direcionavam à aplicação de estratégias, gerando uma compreensão do problema matemático cujo desenvolvimento foi explicado pela professora Raquel em seguida. Observo que aos alunos foi entregue uma folha com os problemas escritos em inglês para que eles pudessem fazer anotações durante as explicações (marcar, sublinhar).
> No início, já foi possível perceber a atenção deles em uma aula diferente, com duas professoras. Alguns que souberam da prática em outras turmas, mostraram-se ansiosos, perguntando quando teriam essa oportunidade. Durante as explanações de ambas, eles mostraram-se atentos e participativos.

Conforme relatou a professora Giselle, a conclusão da Etapa 3 levou à avaliação do interesse e a participação dos estudantes como satisfatórios e estes disseram que gostariam de experimentar mais aulas interdisciplinares, com investigação, resolução de problemas e a presença de mais de um professor na sala.

Diante da aceitação e do interesse dos estudantes, planejamos oferecer às turmas pelo menos mais uma aula como esta na semana seguinte, para abordar o modelo de comparação, porém foi anunciada a suspensão imediata das aulas após a aplicação da terceira etapa, devido à pandemia pelo COVID-19.

4 Coletâneas de atividades

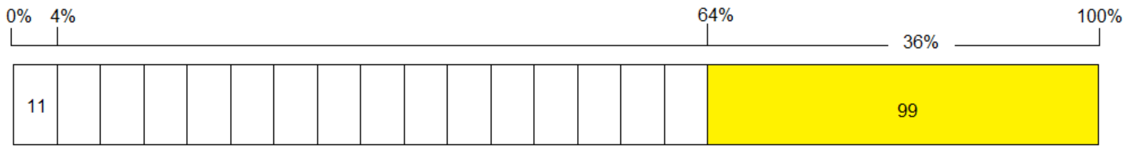
Encontram-se reunidos em uma coletânea apresentada a seguir os problemas que compuseram a segunda e a terceira etapas do plano didático, além de outros seis problemas complementares, todos acompanhados de sua resolução pelo Modelo de Barras, para o professor que tiver interesse em aplicá-los.

4.1 Coletânea de problemas da Etapa II

- Problema 1

Em um concurso estão inscritos 275 candidatos dos quais 176 são homens. A taxa percentual de mulheres é de:

(A) 36 (B) 56 (C) 64 (D) 99

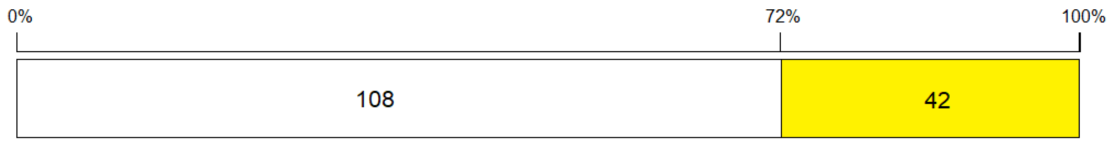


Resposta: A.

- Problema 2

Marcos participou de uma olimpíada de matemática da escola. Ele acertou 72% das 150 questões. O número de questões que ele errou foi de:

(A)28 (B)42 (C)78 (D)108

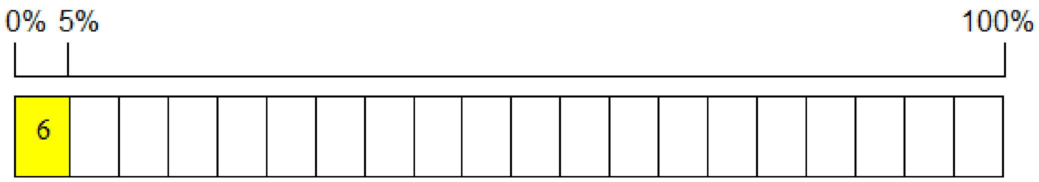


Resposta: B.

- Problema 3

Distribuímos 120 cadernos entre as 20 crianças da 1ª série de uma escola. O número de cadernos que cada criança recebeu corresponde a que porcentagem do total de cadernos?

(A)5%　　(B)10%　　(C)15%　　(D)20%



Resposta: A.

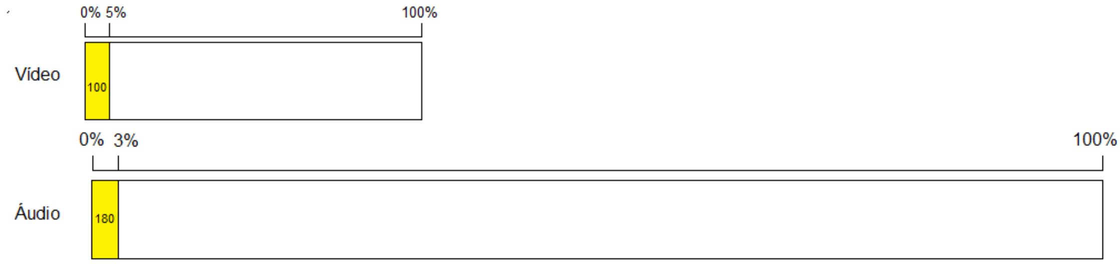
- Problema 4

APARELHOS DEFEITUOSOS

A empresa Eletrix fabrica dois tipos de aparelhos eletrônicos: tocadores de áudio e tocadores de vídeo. Ao final da produção diária, os tocadores são testados e aqueles que apresentam defeito são retirados e enviados para conserto. O quadro abaixo indica o número médio de tocadores de cada tipo, que são fabricados por dia, assim como a porcentagem média de tocadores defeituosos por dia.

Tipo de tocador	**Número médio de tocadores fabricados por dia**	**Porcentagem média de tocadores defeituosos por dia**
Tocador de vídeo	2 000	5%
Tocador de áudio	6 000	3%

Um dos técnicos de testes afirma que: “Em média, há mais tocadores de vídeo enviados para conserto por dia, se comparado ao número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia.” Decida se a afirmação do técnico é correta. Use um argumento matemático para justificar sua resposta.



Resposta: A afirmação do técnico não está correta. Como 5% dos tocadores de vídeo correspondem a 100 aparelhos e os 3% de tocadores de áudio correspondem a 180 aparelhos, então o número de tocadores de áudio enviados para conserto por dia supera o de tocadores de vídeo.

- Problema 5

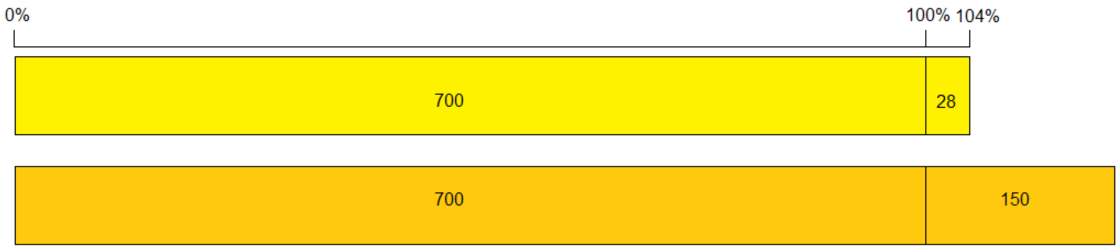
Se o salário de Antônio passou de R$ 700,00 para R$ 850,00 num período em que a inflação mensal foi de 4%, então, o reajuste foi:

(A) Abaixo da inflação.

(B) Acima da inflação.

(C) Igual à inflação.

(D) Não é possível de se calcular.



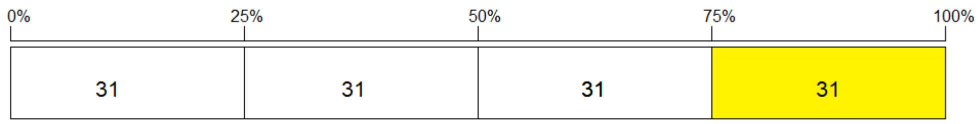
$$Como\ 150\ \text{é}\ maior\ que\ 28, então\ o\ reajuste\ foi\ acima\ da\ inflação.$$

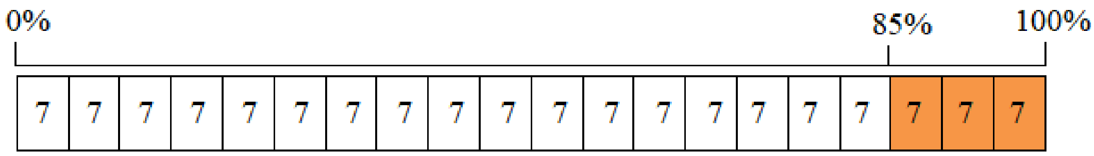
Resposta: B.

4.2 Coletânea de problemas da Etapa III

- Primeiro problema

Satinder não pode resistir a uma promoção. Recentemente, ela comprou um vestido por 93 dólares depois de ter sido dado um desconto de 25%. Ela também comprou sapatos com redução de 15% no preço; ela pagou 119 dólares pelos sapatos. Quando ela chegou em casa, quanto dinheiro disse ao marido que havia economizado?

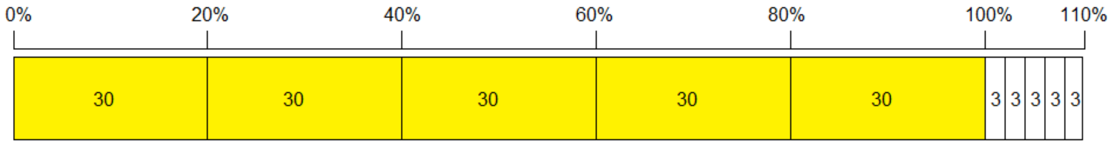




Resposta: Satinder disse ao marido que havia economizado 52 dólares.

- Segundo Problema

Lydia economizava 20% de sua renda a cada semana. Depois de receber um aumento de 10%, economizava 3 dólares adicionais por semana. Qual era o seu salário semanal original?

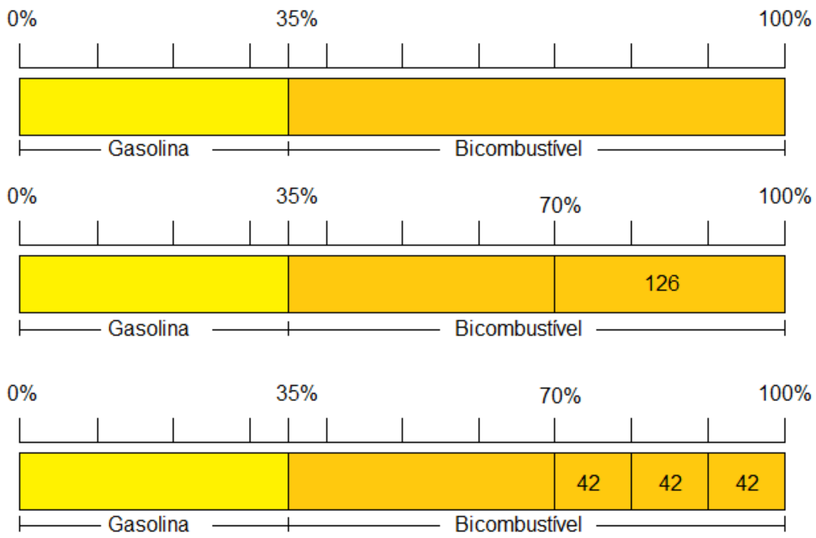


Resposta: O valor do salário semanal original de Lydia era 150 dólares.

4.3 Coletânea de problemas complementares

- Problema complementar 1

Em uma locadora de veículos, 35% dos automóveis disponíveis eram apenas à gasolina e havia 126 automóveis bicombustíveis a mais do que os apenas à gasolina. Quantos automóveis ao todo havia na locadora?



Resposta: Havia 420 veículos ao todo na locadora.

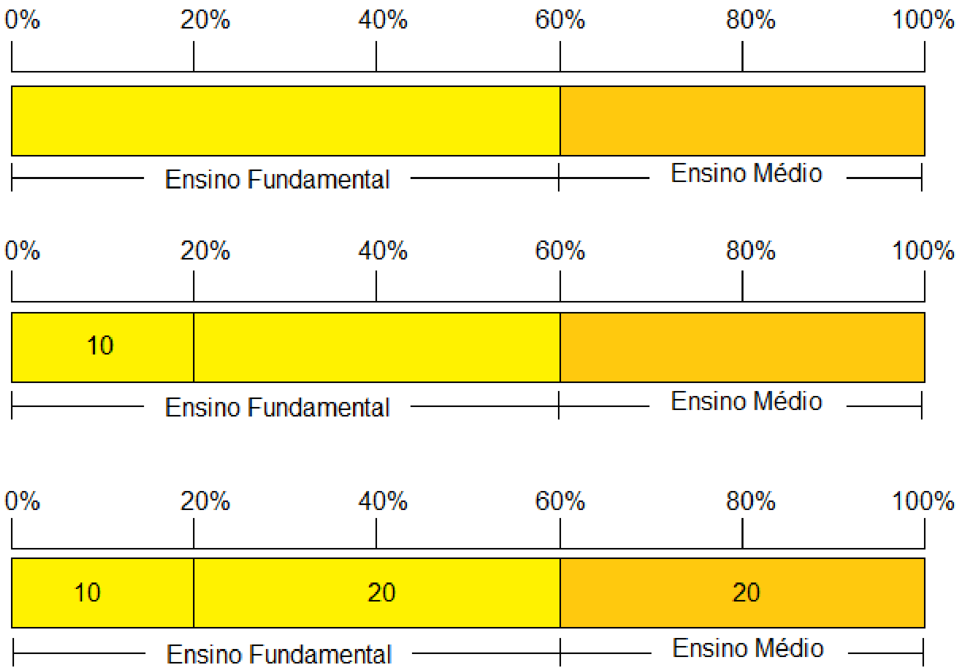
Exemplos de soluções obtidas algebricamente:

Solução 1			Solução 2			Solução 3	
Quantidade	Percentual		Quantidade	Percentual		Quantidade	Percentual
x	35%		x	35%		x	35%
x+126	65%		2x+126	100%		2x	70%
0,65 x = 0,35 (x+126)			x = 0,35 (2x+126)			126	30%
0,30 x = 44,1			0,30 x = 44,1			42	10%
x = 147			x = 147			420	100%

Observamos que frequentemente são abordadas as duas primeiras soluções, que envolvem habilidade com operações com números decimais e pouco estimulam o cálculo mental. A terceira estratégia se aproxima da solução por barras e pode ser mais facilmente resolvida por cálculo mental.

- Problema complementar 2

Numa escola houve um campeonato, no qual inicialmente 60% dos participantes eram alunos do Ensino Fundamental e 40% eram do Ensino Médio. Uma equipe formada por 10 alunos do Ensino Fundamental se destacou em primeiro lugar. Os outros participantes permaneceram na disputa pelas demais colocações, sendo que agora metade deles era do Ensino Fundamental. Determine quantos alunos de cada segmento participaram da gincana.



Resposta: Participaram da gincana 30 alunos do Ensino Fundamental e 20 do Ensino Médio.

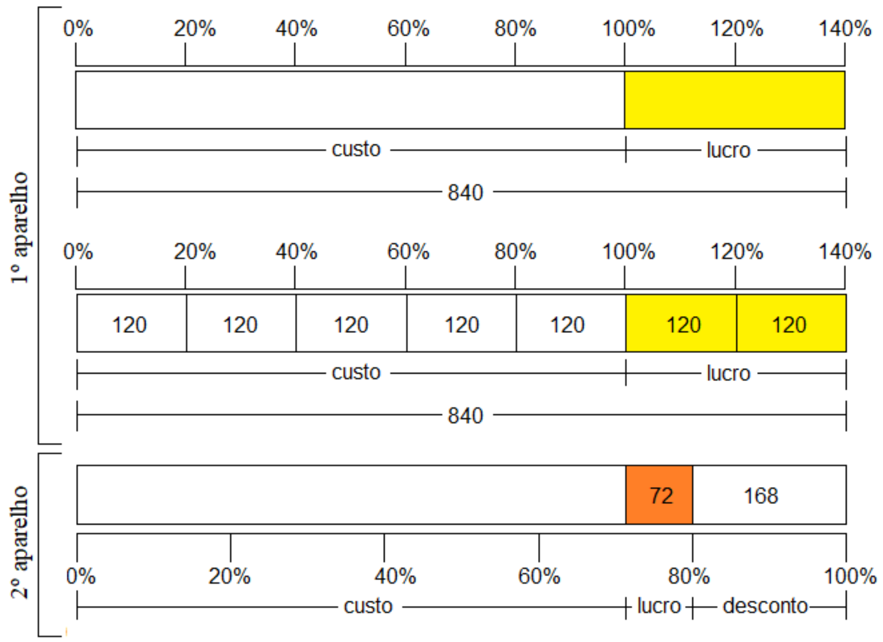
Algebricamente:

x: quantidade de alunos	EF: 0,6 x EM: 0,4 x
0,6x – 10 = 0,4x 0,2x = 10 x=50	

Considerando a solução algébrica, este problema poderia ser proposto apenas para alunos do ensino médio ou dos dois últimos anos do ensino fundamental. No entanto, pelo modelo de barras ele pode ser apresentado para alunos desde a introdução do conceito de porcentagem.

- Problema complementar 3

Na loja do Sr. Marcos, havia dois celulares à venda por R$ 840,00 cada. Ele vendeu um deles por esse preço e lucrou 40% do valor que lhe custou o produto. Mais tarde, ele vendeu o outro celular com um desconto de 20%. Se os dois celulares tiveram o mesmo custo unitário, qual foi o lucro total do Sr. Marcos na venda dos dois aparelhos?



Resposta: O lucro total do Sr. Marcos foi de R$312,00.

Solução algébrica:

x: valor de custo de cada aparelho

0,4 x: lucro na venda do primeiro aparelho

Assim, x + 0,4 x = 840

1,4 x = 840

x = 600.

Portanto, na venda do aparelho sem desconto o lucro é de R$ 240,00.

Desconto na venda do segundo aparelho: 0,2 . 840 = 168,00.

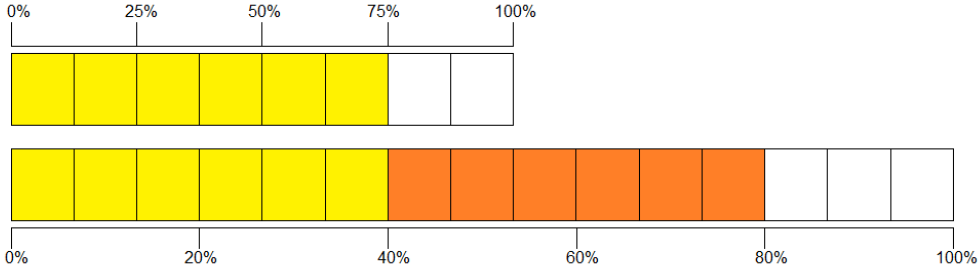
Portanto, o lucro na venda do segundo aparelho foi de R$ 72,00 (240 - 168 = 72)

Assim, o lucro total é de R$ 312,00.

Observamos que a solução algébrica do problema envolve várias equações que devem relacionar valores de custo, lucro e desconto. A abordagem algébrica não é recomendada antes do 8º ou 9º ano do ensino fundamental. No entanto, a abordagem pelo modelo de barras permite que os alunos enfrentem o problema em uma etapa anterior e certamente com mais autonomia. Observamos que a modelagem por barras ilustra as etapas determinadas pela solução algébrica.

- Problema complementar 4

Eric está avaliando seus conhecimentos, participando de um quiz, em que todas as perguntas têm o mesmo valor. Ele acertou 75% das 8 primeiras perguntas. Após responder mais sete perguntas, seu índice de acertos atingiu 80%. Quantas dessas sete últimas perguntas ele acertou?



Resposta: Ele acertou seis das sete últimas perguntas.

Observamos que o problema envolve a subtração, com a ideia de comparar. Comparação da quantidade de perguntas que Eric acertou ao responder as primeiras questões com a quantidade que ele acertou após ter respondido todas as questões.

Exemplo de solução algébrica:

x: quantidade de questões que Eric acertou nas sete últimas perguntas.

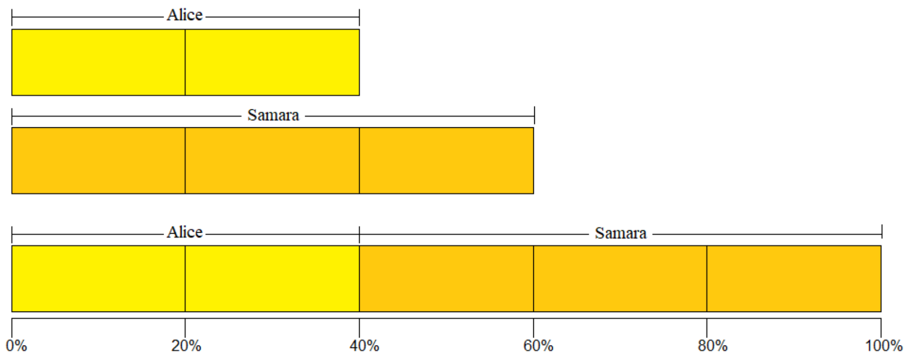
$$0{,}75 \cdot 8 + x = 0{,}80 \cdot 15$$

$$6 + x = 12$$

$$x = 6$$

- Problema complementar 5

Alice prepara dois brigadeiros enquanto Samara consegue preparar três. Mantendo essa relação, as duas amigas trabalharam por um mesmo período de tempo. Samara produziu mais brigadeiros do que Alice. Que percentual do total de brigadeiros Samara preparou a mais do que Alice?



Resposta: Samara prepara 20% do total de brigadeiros a mais do que Alice.

Este problema envolve razão. Fica como “convite” para explorar mais o potencial do Modelo de Barras como estratégia de abordagem na Educação Básica.

A solução algébrica não envolve valores explícitos de quantidades. Sendo x a quantidade de brigadeiros produzidos por Samara e y a quantidade produzida por Alice, tem-se que:

$x/3 = y/2 = k$

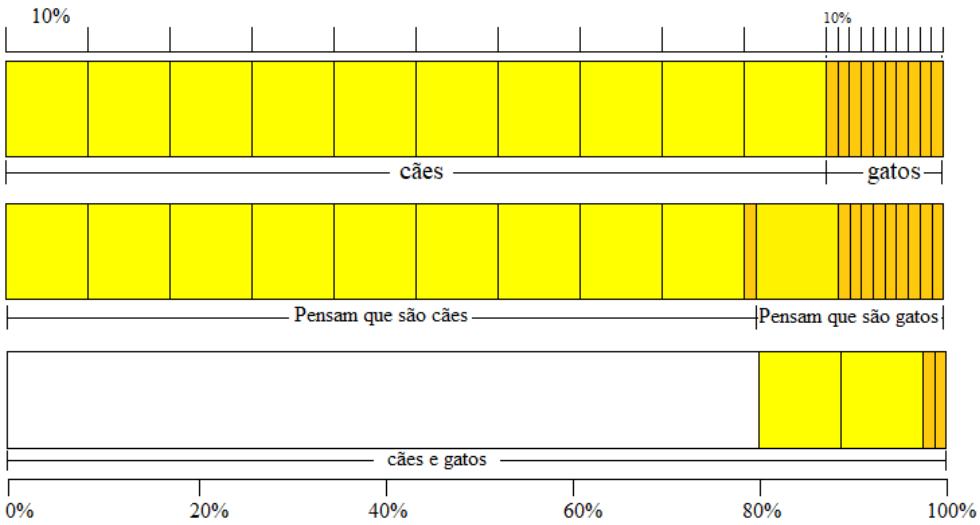
Logo, $x = 3k$, $y = 2k$ e $x - y = k$.

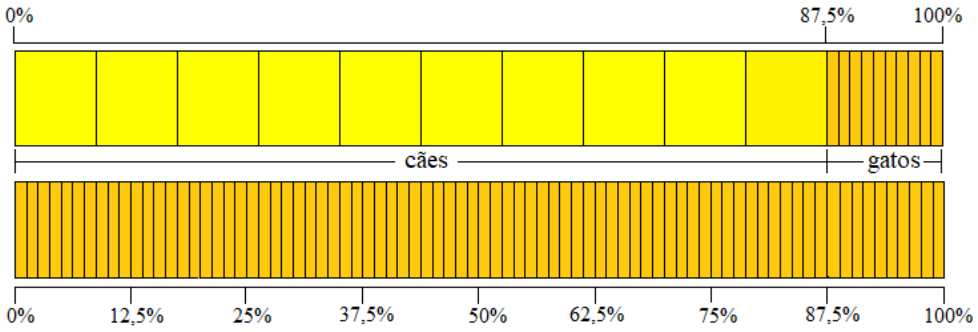
Portanto, Samara produz a mais do que Alice $k/5k = 20\%$ do total de brigadeiros.

- Problema complementar 6

Na cidade de Pulgacicaba alguns animais são realmente esquisitos. Dez por cento dos cães pensam que são gatos e dez por cento dos gatos pensam que são cães. Todos os outros animais são perfeitamente normais. Certo dia todos os cães e gatos de Pulgacicaba foram testados por um psicólogo, verificando-se então que 20% deles pensavam que eram gatos. Que porcentagem dos animais eram realmente cães?

(Problema disponível em http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-feito-caes-e-gatos/. Acesso em 24 jul.20020)





Resposta: Dentre os animais, 87,5% eram realmente cães.

Exemplo de solução obtida algebricamente:

x: cães da cidade

y: gatos da cidade

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0{,}1x + 0{,}9y = 0{,}2(x + y) \end{cases}$$

Da 2ª equação, temos que:

$0{,}1x + 0{,}9y = 0{,}2x + 0{,}2y \rightarrow 0{,}7y = 0{,}1x \rightarrow 7y = x.$

Substituindo x na 1ª equação,

$7y + y = 1 \rightarrow 8y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{8} = 0{,}125.$

Substituindo y na 1ª equação, obtemos $x = 0{,}875 = 87{,}5\%.$

Concluímos que 87,5% dos animais são cães.

5 Considerações Finais

O desafio que impulsionou este trabalho de pesquisa foi a produção de material de ensino de porcentagem para duas turmas de oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública municipal na zona norte do Rio de Janeiro, alinhado aos objetivos do componente Educação Financeira, da matriz curricular 2020, da Rede Municipal de Educação do Rio de Janeiro.

O objetivo deste trabalho foi investigar e discutir o potencial do Modelo de Barras para auxiliar a aprendizagem do estudante na resolução de problemas sobre porcentagem. O percurso de idealização do material de ensino contou com a investigação dos conhecimentos prévios dos estudantes assistidos; o levantamento das habilidades para o objeto de conhecimento porcentagem, apontadas pela Base Nacional Comum Curricular e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, e a reflexão sobre estratégias para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas.

O desenvolvimento das resoluções dos problemas foi fruto das experiências acumuladas participando das pesquisas sobre o Modelo de Barras, realizadas pelo grupo de tecnologia do Projeto Fundão, na Universidade Federal do Rio de Janeiro. O engajamento no Projeto Fundão resultou, sobretudo, em meu aperfeiçoamento profissional. Conheci equipes de professores interessados em minimizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, que me acolheram e colaboraram para que eu pudesse ampliar e partilhar meus conhecimentos sobre estratégias de ensino e avaliação da aprendizagem.

Mais especificamente, neste trabalho, pretendemos verificar em que medida o Modelo de Barras poderia auxiliar a aprendizagem do aluno na resolução de problemas sobre porcentagem. Nesse sentido, desenvolvemos e aplicamos um plano didático para a aprendizagem de porcentagem, cuja abordagem é a resolução de problemas com a utilização do Modelo de Barras, que é um recurso pictórico, próprio do Método de aprendizagem adotado em Singapura.

O plano didático foi composto por três etapas. A primeira foi um diagnóstico do conhecimento dos estudantes sobre cálculo percentual; a segunda, uma intervenção com uma coletânea de 5 problemas, itens de avaliações externas, que favoreceram a aprendizagem, pelo Modelo de Barras, da distinção entre valor absoluto e valor relativo percentual; a terceira, uma ação interdisciplinar, realizada em parceria com a professora de inglês, com a aplicação de dois problemas, redigidos na língua inglesa, que serviram de instrumento de verificação do aprendizado e motivação para a continuação do estudo da Matemática e da Educação Financeira.

Ao longo da segunda e da terceira etapas desenvolvidas em sala, foram atingidos os seguintes objetivos com a utilização do Modelo de Barras: distinguir valor absoluto e valor relativo percentual; estimular a representação visual de ideias; promover debates sobre a adequação das respostas; aplicar estratégias de identificação e representação das informações essenciais nos problemas; criar novos problemas a partir da modificação de algum dado do modelo original; motivar os estudantes a agirem com autonomia na resolução de problemas e encorajar as suas tomadas de decisões no contexto financeiro.

Após a aplicação da terceira etapa, as atividades escolares presenciais foram interrompidas, com a suspensão das aulas na Rede Pública Municipal, pela prefeitura do Rio, a partir do dia 16/03/2020, como uma das medidas para conter o contágio do novo coronavírus. As instituições de ensino permanecem fechadas desde então, devido à pandemia de COVID-19, para poupar vidas e evitar o colapso no sistema de saúde.

Apesar de terem sido tomadas iniciativas por parte da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro na direção do ensino remoto, as estratégias adotadas esbarraram na exclusão digital dos alunos, por razões econômicas. Ainda não contamos com uma rede de internet gratuita na cidade do Rio de Janeiro que viabilize o acesso dos estudantes, de maneira geral, às aulas remotas.

Como o desenvolvimento do plano didático foi paralisado diante do impedimento temporário de avançar presencialmente, a exploração dos temas relativos à Educação Financeira ficou restrita à porcentagem. Na seção 4 deste trabalho, disponibilizamos para o professor interessado em ministrar suas aulas de porcentagem, com a utilização do Modelo de Barras, uma coletânea de exercícios com suas respectivas resoluções.

Esperamos oportunamente, no retorno às aulas presenciais, dar prosseguimento ao projeto de ensino relatado neste trabalho. A retomada da pesquisa poderia se dar, por exemplo, com a exploração de resoluções de problemas sobre juros, pelo Modelo de Barras.

6 Referências Bibliográficas

ASTORGA, L. A. d.O. **A pedagogia de Sócrates e a autonomia do aluno no processo do aprendizado**. 2019. 25 folhas. (Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Pedagogia) - Claretiano Centro Universitário de Batatais, Rio de Janeiro, 2019.

BECKMANN, S. **Solving algebra and other story problems with simple diagrams**: A method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. *The Mathematics Educator (Vol 14, N°*.1, 42- 46), 2004. Disponível em: https://pennance.us/home/downloads/ 3041/beckmann.pdf. Acesso em: 5 jun 2020.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação : Prova Brasil: ensino fundamental : matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf. Acesso em: 30 jun. 2020.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2018**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/ BNCC_EI_ EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 2 jun. 2020.

BRASIL, PORTAL INEP. **PISA 2012 - Matemática**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2012/pisa_2012_matematica_ itens_liberados.pdf . Acesso em: 28 fev. 2020.

BRASIL, PORTAL INEP. **Simulado Prova Brasil - SAEB 2011**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/downloads/simulado/2011/ prova_modelo_9ano.pdf. Acesso em: 28 fev. 2020.

BRASIL, PORTAL INEP. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)**. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/pisa. Acesso em: 28 fev. 2020.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 set 2020.

BRUNER, J. S. **Toward a Theory of Instruction**. Cambridge: Belknap Press, 1966.

BOALER, Jo *et al*. **A importância da matemática visual para o cérebro e o aprendizado**. Disponível em: https://desafiosdaeducacao.grupoa.com.br/ matematica-visual-para-aprendizado/. Acesso em: 6 ago. 2020.

CLEMENT, Geoff F., "**Exploring the Influence of the Singapore Modeling Method on Prospective Elementary Teachers in a University. Mathematics Course**." Dissertation, Georgia State University, 2017. Disponível em: https://scholarworks.gsu.edu/ece_diss/34. Acesso em 06 mai.2020.

CRUZ, Leandro Lazarino da. **Porcentagem e algumas aplicações**. Universidade Federal de Viçosa, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94889. Acesso em: 18 ago. 2020.

DOTTI, T. G. P. **Um estudo do Modelo de Barras nos livros didáticos da Matemática de Singapura**: Fundamentação da Álgebra no Ensino Fundamental I Ciclo. Universidade Federal de São Carlos, 2016. . Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/2304. Acesso em: 3 fev.2020.

GINSBURG *et al*. **What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System (and what Singapore can learn from the United States): An Exploratory Study**. America Institute for Research, Washington, DC, 2005. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED491632.pdf Acesso em: 21 jul. 2020.

HO, S. Y., & Lowrie, T. **The model method: Students' performance and its effectiveness**. *Journal of Mathematical Behavior (35*, 87-100), 2014.

HONG, K. T. *et al*. **The Singapore model method for learning mathematics**: Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education, Singapore. 1. ed. Singapore: Marshall Cavendish Education, 2009.

HOONG, Y. L.; KIN, W. H.; CHENG L. P. **Concrete - Pictorial - Abstract: Surveying its origins and charting its future.** The Mathematics Educator, v.16, n.1, p. 1-19, 2015. Disponível em: https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/18889/1/TME-16-1-1.pdf. Acesso em: 21 jul. 2020.

HOVEN, J., & Garelick, B. **Singapore math: Simple or complex?** *Educational Leadership (65*, 28-31), 2007.

KHO, T. H. **Mathematical models for solving arithmetic problems.** Paper presented at the *Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS). Mathematical Education in the 1990s* (Vol. 4, 345-351). Singapore: Institute of Education, 1987.

LIMA, D. C. **Ensino Aprendizagem de língua inglesa: conversas com especialistas**. In Aquisição de leitura em língua inglesa. Parábola Editorial: São Paulo (195 – 196), 2009

LIMA *et al*. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MIKULECHY, B. **A short course in teaching reading skills**. Reading, MA: Addison-Wesley (16-25), 1990.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de aprendizagem**. 1. ed. São Paulo: EPU, 1999.

MURATA, A. **Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams**. *Mathematical Thinking and Learning (10*, 374-406), 2008.

NASSER, Lilian. **Matemática financeira para a escola básica**: uma abordagem prática e visual. 1.ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2010.

NG, S. F., & Lee, K.. **How primary five pupils use the model method to solve word problems**. *The Mathematics Educator (9*(1), 60-83), 2005.

NG, S. F., & Lee, K.. **The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems**. *Journal for Research in Mathematics Education (40*(3), 282-313), 2009.

O ECONOMISTA. **Conceito de Inflação: O que é e como se forma?**. Em 13 jul.2009. Disponível em: https://www.oeconomista.com.br/inflacao-o-que-e-e-como-se-forma/. Acesso em: 5 mar. 2020.

OLIVEIRA, M. K. D. **Desenvolvimento e aprendizado: In: Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 2002.

PARANÁ. PORTAL DO GOVERNO DO PARANÁ - DIA A DIA EDUCAÇÃO. **Caderno de Atividades - Matemática - Anos Finais do Ensino Fundamental**. 2009. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/cadernos_pedagogicos/ativ_mat2.pdf. Acesso em: 28 fev. 2020.

PORTAL INEP. **Simulado Prova Brasil - SAEB 2011** . Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/downloads/simulado/2011/prova_modelo_9ano.pdf . Acesso em: 28 fev. 2020.

PREFEITURA DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO. **Coronavírus: Prefeitura anuncia medidas de prevenção na cidade contra a doença.** . Disponível em: : https://prefeitura.rio/cidade/coronavirus-prefeitura-anuncia-medidas-de-prevencao-na-cidade-contra-a-doenca/. Acesso em: 13 mar. 2020.

QUEIROZ, J. M. D. S. **Resolução de problemas da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras**. Universidade Federal de São Carlos, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4473/6507.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 3 fev.2020.

RIO DE JANEIRO. PORTAL MULTIRIO. **Material didático carioca 8º ano (1º semestre/2020) – livro do aluno**. Disponível em: http://www.multirio.rj.gov.br/media/PDF/pdf_4879.pdf. Acesso em: 18 jun. 2020.

RIO DE JANEIRO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. **Circular E/SUBE n.º 08** - **Assunto: diretrizes pedagógicas dos componentes curriculares da matriz 2020** - 10 de janeiro de 2020.

ROSA, Pedro Augusto Lopes. **O ensino de porcentagem a partir da opinião docente**. Universidade Federal do Pará, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1245 . Acesso em: 21 ago.2020.

SANTORUM, K; SCHERER, L. **O papel do ensino de estratégias para o desenvolvimento da leitura em segunda língua (L2)**. Revel (V 6, 100 – 200), 2008. ISSN 1678-8931. Disponível em: www.revel.inf.br. Acesso em: 11 mar. 2020

TERRA, Jonas. **Educação a distância de matemática financeira para o cotidiano: um estudo para fixação de conceitos básicos e desenvolvimento de atividades.** Instituto Federal Fluminense Campus Cabo Frio, 2009. Disponível em: http://www.abed.org.br/congresso2009/CD/trabalhos/1552009233703.pdf. Acesso em: 3 jun. 2020.

TINOCO, Lúcia. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Ed.UFRJ, 1996.

VYGOTSKI, L.S. **A formação social da mente**. 4. ed. São Paulo, SP: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1991.

WALKER, Lorraine. **Model Drawing for Challenging Word Problems**: **Finding Solutions the Singapore Way**. 1. ed. Singapore: Crystal Springs Books (80-82), 2010.

WILHELM, K. & Li, H. **Exploring pedagogical reasoning: Reading strategy instruction from two teachers' perspectives**. The Reading Matrix (8 (1) 96-110), 2008. Disponível em: http://www.readingmatrix.com/articles/li_wilhelm/article.pdf. Acesso em: 6 out. 2020.

WU, Hung-Hsi. **Understanding Numbers in Elementary School Mathematics**. Providence, RI: American Mathematical Society - AMS. 2011.