UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO

COORDENAÇÃO ACADÊMICA DO PROFMAT

EDÉSIO LOBATO DE SOUZA JÚNIOR

O USO DO VICMETRO NO ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

MACAPÁ

2021

EDÉSIO LOBATO DE SOUZA JUNIOR

O USO DO VICMETRO NO ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP.

Orientador:
Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ

2021

EDÉSIO LOBATO DE SOUZA JUNIOR

O USO DO VICMETRO NO ENSINO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP.

Banca Examinadora

Prof. Dr. GUZMÁN EULALIO ISLA CHAMILCO

____

Orientador

Prof. Dr. JOSÉ WALTER CÁRDENAS SOTIL

____

Avaliador Interno

Prof. Dr. ÍTALO BRUNO MENDES DUARTE

____

Avaliador Externo

Macapá-AP, 28 de janeiro de 2021.

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais Edésio Lobato de Souza (in memoriam) e Maria Eunice Viana de Souza, com eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Edésio (*in memoriam*) e Eunice, que me incentivaram nos momentos difíceis e sempre acreditaram na minha capacidade.

As minhas irmãs, Edenice, Edilene, Élida e Elcianne, por tudo o que fizeram por mim ao longo deste tempo e da minha vida.

Aos meus sobrinhos queridos Diego Tardelly, Rodrigo e Andreza, Lorena e Felipe, Danilo e Raísa, David, Annanda e Roberto, Danielle, Giovanne, Pedro Eduardo, Anna Sofia, Dante e José Eduardo. Vocês são o motivo do meu empenho e dedicação.

Ao Doutor Guzman Chamilco, pela orientação.

Aos amigos mestrandos, que muito me encorajaram e apoiaram, fazendo com que esta fosse uma das melhores fases da minha vida.

A todas as pessoas que de uma alguma forma me ajudaram nesta caminhada, deixo um agradecimento eterno, porque sem elas não teria sido possível.

Meu coração tem catedrais imensas,
Templos de priscas e longínquas datas,
Onde um nume de amor, em serenatas,
Canta a aleluia virginal das crenças.

Na ogiva fúlgida e nas colunatas
Vertem lustrais irradiações intensas
Cintilações de lâmpadas suspensas
E as ametistas e os florões e as pratas.

Como os velhos Templários medievais
Entrei um dia nessas catedrais
E nesses templos claros e risonhos …

E erguendo os gládios e bradindo as hastas,
No desespero dos iconoclastas
Quebrei a imagem dos meus próprios sonhos!!!

Augusto dos Anjos

RESUMO

Esta pesquisa tem por escopo analisar o desempenho de alunos do primeiro ano do Ensino Médio em atividades sobre a Trigonometria no triângulo retângulo realizadas com auxílio de um instrumento didático manipulável denominado Vicmetro. Para tanto, os alunos deveriam determinar o valor de lados e ângulos de triângulos retângulos através das razões trigonométricas fundamentais e confirmar o resultado encontrado com o Vicmetro. Espera-se que o conhecimento adquirido pelos estudantes, com o auxílio do Vicmetro os aproximem da prática cotidiana, despertando neles o interesse pela aprendizagem da Trigonometria.
Palavras-chave: Trigonometria. Triângulo Retângulo. Razões Trigonométricas. Vicmetro.

ABSTRACT

This research aims to analyze the performance of students of the first year of high school in activities on Trigonometry in the right triangle carried out with the aid of a manipulable didactic instrument called Vicmetro. Therefore, students should determine the value of sides and angles of right triangles using the fundamental trigonometric ratios and confirm the result found with Vicmetro. It is expected that the knowledge acquired by students, with the help of Vicmetro, will bring them closer to everyday practice, arousing in them an interest in learning Trigonometry.
Keywords: Trigonometry. Right Triangle. Trigonometric ratios, Vicmetro.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

São variados os instrumentos e as estratégias utilizadas por alguns professores para dar suporte às suas aulas práticas de Matemática. Para muitos profissionais da Educação Matemática, uma grande quantidade desses materiais contribui no processo de ensino e aprendizagem, conectando o conhecimento matemático abstrato ao usual e prático e, consequentemente, relacionando aquilo que é ensinado na escola com o que acontece fora dela.

Com o intuito de mostrar situações matemáticas mais reais, são válidas as criações de subsídios e de ferramentas de ensino capazes de transformar conceitos abstratos em concretos que aproximem o estudante da educação profissional. Quando esta transformação não acontece, a aprendizagem acaba sendo direcionada ao tecnicismo mecanicista, repleta de regras, técnicas e algoritmos repetitivos, sem preocupação de justificar ou mostrar o funcionamento de importantes conteúdos para os discentes.

Percebe-se também que algumas das metodologias utilizadas nas salas de aulas estão distantes da prática do cotidiano escolar, havendo então uma baixa conexão entre os conteúdos da Matemática e as aplicações práticas do dia a dia, que inibem a agilidade e a capacidade de organização do pensamento do aluno.

Nesse sentido, poder-se-ia fomentar o processo de aquisição do conhecimento na perspectiva de se ligar o que o aluno traz de fora da escola para usar dentro da sala de aula, trabalhar o contexto social, usando seu “modus operandi” para o seu próprio desenvolvimento. Busca-se, assim, a resposta para o seguinte questionamento: o uso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, durante o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos essenciais, propicia uma abordagem mais clara e sucinta do conteúdo abordado, tornando o ensino da Matemática prazeroso e dinâmico?

Este estudo detalha uma atividade de Matemática sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo aplicada em uma turma de 1ª Série do Ensino Médio e tem por objetivo analisar como o uso de um material manipulável, o Vicmetro, criado para o ensino de Matemática, pode auxiliar os alunos na resolução de questões relacionadas as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

É consenso que a Matemática representa dificuldades na aprendizagem para grande parte dos alunos do ensino fundamental e médio, onde o baixo rendimento é facilmente observado ao final do ano letivo, nos relatórios finais das escolas. Temos constatado, ao acompanhar alguns estudantes, seja da educação básica, ensino médio e até acadêmicos, através de aulas particulares, nos últimos quinze, vinte anos, que o ensino e a aprendizagem da Matemática proposto segue uma abordagem tradicional, tecnicista, centrada nos conteúdos curriculares. A grande maioria dos docentes apresenta limitações pedagógicas sérias e ao se restringir apenas ao emprego do quadro negro e giz, de forma contínua, não consegue prender atenção do aluno e nem estimular seu aprendizado.

A exigência atual da educação matemática propõe seu ensino e aprendizagem para além de conceitos, operações básicas e resoluções de problemas. Contempla números e operações, relações com o espaço e as formas, registros e uso de medidas estratégicas de produção. Na verdade, é um processo de compreensão do mundo.

Estas situações mencionadas anteriormente justificam a escolha do tema “O uso do Vicmetro no ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo”, principalmente porque demonstram explicitamente a necessidade da adoção de metodologias alternativas para concretizar as situações de aprendizagem, dando oportunidade a todos os alunos de aprenderem a partir de experiências concretas.

No capítulo primeiro, serão apresentados os preâmbulos históricos relacionados ao avanço da Trigonometria e das Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo com o desiderato de mostrar algumas considerações acerca da temática a ser estudada e que contribuem sobremaneira para um entendimento mais profícuo deste conteúdo.

No segundo capítulo, apresenta-se o Vicmetro, material didático manipulável criado para trabalhar atividades envolvendo, especificamente, o conteúdo trigonométrico. No estudo do Vicmetro, enquanto ferramenta didática para aprendizagem e utilização prática, o instrumento foi apresentado aos alunos participantes da pesquisa, os quais foram orientados e instruídos acerca de seu manuseio e aplicação na Primeira Intervenção, Roteiro Didático II. Ainda neste segundo capítulo, serão apresentadas algumas considerações presentes nos Parâmetros Curricular Nacionais – PCN acerca do uso de novas ferramentas e metodologias relacionadas ao ensino da Matemática.

No terceiro capítulo aborda-se a metodologia aplicada, o lócus da pesquisa, a população analisada, etapas da pesquisa e o detalhamento do instrumento utilizado para coletar os dados utilizados neste estudo.

No quarto capítulo tem-se a análise e a discussão dos resultados, onde serão apresentados os procedimentos realizados pelos alunos para solucionar as atividades propostas, sejam com o uso direto das relações trigonométricas ou experimentalmente com o auxílio do Vicmetro.

E, no quinto capítulo, apresentam-se as considerações finais sobre o trabalho.

.

1 A TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Trigonometria é um vocábulo de origem grega que remete à medida de três ângulos. Em um momento inicial, a Trigonometria envolveu o estudo de algumas relações e propriedades dos triângulos retângulos para posteriormente efetuar a relação entre as medidas dos lados dos triângulos com as medidas dos ângulos.

Essas relações e propriedades foram estendidas para triângulos quaisquer por intermédio de teoremas conhecidos como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. A posteriori, alguns desses resultados são verificados em triângulos cujos lados são segmentos notáveis de um círculo denominado “círculo trigonométrico”, que é uma circunferência orientada de raio 1.

Antes da Trigonometria, somente era possível considerar cálculos e propriedades que abrangessem exclusivamente os lados de um triângulo ou exclusivamente os ângulos de um triângulo ou relações fundamentais entre esses elementos. O surgimento da Trigonometria permitiu relacionar diretamente as medidas dos lados de um triângulo com a medida de um de seus ângulos. Destaca-se que as relações envolvendo lados e segmentos notáveis dentro de um triângulo também compõem a Trigonometria.

A Trigonometria atua diretamente ou de forma indireta em diversos segmentos da Matemática que demandam medidas de precisão e possui inúmeras aplicações na Topografia, na Astronomia, na análise de imagens digitais, em sistemas de navegação por satélite e, de modo mais genérico, no cálculo de distâncias e ângulos considerados inacessíveis.

1.2 A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Há cerca de 3.000 anos, os povos egípcios e babilônicos iniciaram o desenvolvimento da Trigonometria, que nasceu, primordialmente, em decorrência de problemas relacionados com Agrimensura, Astronomia, Construção e Navegação. Medições na agrimensura, rigor na determinação de medidas exatas imprescindíveis para a construção de pirâmides, avaliação de trajetórias e posicionamento dos corpos celestes, progressos na determinação das rotas de navegação e no cálculo do tempo foram cenários intrínsecas nos quais foram observados os primeiros indícios rudimentares da Trigonometria.

De acordo com Milone *et al* (2018), o interesse de egípcios e babilônios concentravam-se especialmente na Astronomia, pelo vínculo entre o calendário e os períodos de plantio e colheita, e do mesmo modo, por questões religiosas. Destarte, o uso de triângulos era crucial para o estudo dos pontos cardeais, das fases lunares e das estações do ano. A astronomia babilônica foi de grande influência para as gerações subsequentes. No reinado de Sargon, os babilônios elaboraram calendários astrológicos e tábuas de eclipses lunares. Estes calendários e tábuas chegaram até os nossos dias.

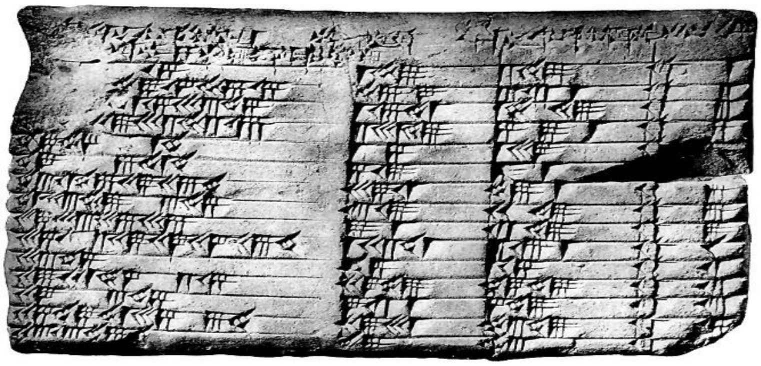
O papiro Rhind, por exemplo, é um documento egípcio de cerca de 1650 a. C., onde um escriba chamado Amósis detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, divisões proporcionais, regras de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. Estes problemas são, na sua maioria, problemas ligados ao cotidiano da época e que procuravam apresentar métodos e fórmulas que permitissem resolver assuntos que surgiam diariamente, tais como o preço do pão, a armazenagem de grãos de trigo, a alimentação do gado, etc.

Figura 1 - Uma parte do papiro Rhind depositado no Museu Britânico, Londres.

Fonte: www.http://clubes.obmep.org.br/ (2020).

A tábua Plimpton 322, que acredita-se ter sido elaborada no século XVIII a. C., possui uma tabela de quatro colunas e quinze linhas de números em escrita cuneiforme do período. Pesquisadores australianos, em 2017, concluíram que as quatro colunas e as quinze fileiras de cuneiformes representam a tabela de trabalho trigonométrico mais antiga e mais precisa do mundo, uma ferramenta de trabalho que poderia ter sido usada na topografia e no cálculo de templos, palácios e pirâmides.

Figura 2 - Plimpton 322 – Columbia University.



Fonte: www.http://clubes.obmep.org.br/ (2020).

O desenvolvimento da Trigonometria caminhou lado a lado com o desenvolvimento da Geometria. Neste contexto, a Grécia desponta como berço de grandes filósofos e sábios, entre os quais Tales (625 - 546 a. C.), que através de seus estudos acerca de semelhança de triângulos que deu suporte ao desenvolvimento da Trigonometria. Presume-se que Pitágoras (570 a. C. - 495 a.C.), seu discípulo mais brilhante, realizou a primeira demonstração do teorema que o homenageia: "Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos". É consensual entre os grandes matemáticos que a relação fundamental da Trigonometria é derivada do Teorema de Pitágoras.

A introdução da Trigonometria nos estudos científicos se deve ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (190 a. C. – 120 a. C) que, utilizando interpolação linear construiu provavelmente a primeira tabela trigonométrica com comprimentos de cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°, com a qual relacionava naturalmente lados e ângulos de qualquer triângulo do plano.

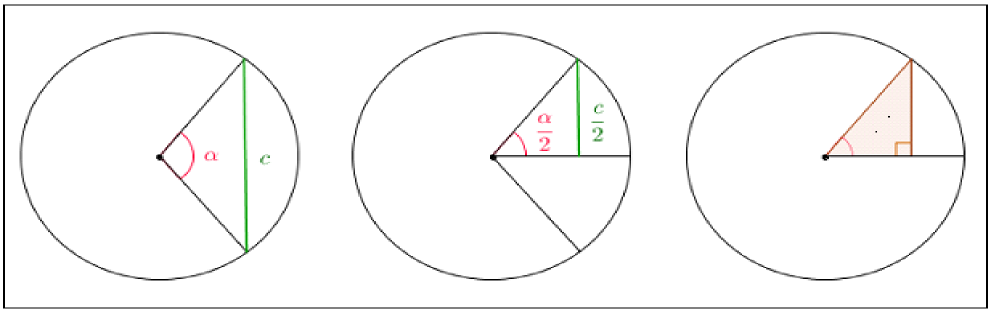
Com forte inspiração na matemática babilônica, Hiparco sustentava veementemente que base 60 era a mais adequada base numérica para contagem e introduziu em solo grego a divisão da circunferência em 360 partes iguais, denominando "arco de 1 grau" para cada fração em que a circunferência ficou dividida e, posteriormente, dividiu cada "arco de 1 grau" em 60 partes, obtendo o "arco de 1 minuto". Lamentavelmente, os livros e escritos que explicavam a Trigonometria desenvolvida por Hiparco, bem como o restante de sua obra se esvaiu com o tempo.

O vasto conhecimento elaborado por Hiparco foi mantido e estendido de forma brilhante por Cláudio Ptolomeu (90 a. C. – 168 a. C.). Extraordinário astrônomo, matemático, físico e geógrafo da Universidade de Alexandria, Ptolomeu estudou os corpos celestes com o auxílio da Trigonometria, sendo autor do mais prestigiada e expressiva súmula astronômica da Antiguidade: *Syntaxis Mathematica,* que ficou popularmente conhecida como *O Almagesto,* uma relevante fonte de pesquisa para os astrônomos até o século VIII, quando a humanidade começa a conhecer a matemática hindu.

No século IV, com as invasões bárbaras e germânicas, o Império Romano e a Europa entraram em declínio, provocando o deslocamento da produção cultural em direção a Índia, que transformou a Trigonometria com a introdução das razões trigonométricas e o aperfeiçoamento dos métodos para se obter tabelas trigonométricas. Dessa maneira, na realidade, os hindus revolucionaram a Trigonometria por meio de uma coletânea de textos intitulados *Siddhantas*, traduzidos como Sistemas de Astronomia.

Apesar da inexistência de explicações e provas, o *Siddhantas* percorre uma trajetória diferente da percorrida por O *Almagesto* de Ptolomeu e relega a relação entre “as cordas de um círculo e os ângulos centrais correspondentes” pela relação entre “a metade das cordas de um círculo e a metade dos ângulos centrais correspondentes”, relação esta denominada pelos hindus de *jiva*. Surgia, destarte, a “Trigonometria no triângulo retângulo”.

Figura 3 - O Surgimento de Jiva.



Fonte: www.http://clubes.obmep.org.br/ (2020).

Ao considerarem a relação funcional entre a metade da corda e a metade do ângulo central, os hindus aperfeiçoaram de maneira excepcional os conhecimentos de Trigonometria e a partir dessa relação, construíram uma tabela para servir de base para os cálculos da Trigonometria esférica.

> Assim, aparentemente nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos de seno de um ângulo, e a introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos Sidhantas à história da matemática (BOYER, 1996, p. 143).

A evolução da Trigonometria também contou com a participação dos matemáticos árabes, com marcante influência na inauguração da Escola de Bagdad, cujo maior expoente foi o Príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al-Battani (850 d. C - a 929 d.C.). Inclusive, o conflito entre a Trigonometria presente em O Almagesto e a Trigonometria hindu se encerrou quando *Al-Battani* adota a Trigonometria hindu, introduzindo uma inovação preciosa para a matemática: o círculo de raio unitário, comprovando assim que que a razão *jiva* pode ser aplicada em qualquer triângulo retângulo, qualquer que seja o valor da medida da hipotenusa.

Da Arábia, a Trigonometria volta ao território europeu e se separa definitivamente da Astronomia, tornando-se um conteúdo autônomo da Matemática. Ao enveredar por esse caminho, a Trigonometria recebe um tratamento analítico elaborado pelo matemático francês François Viète (1540-1603), que também desenvolveu uma metodologia para determinação de triângulos planos e esféricos. No início do século XVII, o matemático escocês John Napier (1550-1617) também contribuiu incisivamente com a Trigonometria esférica.

No século XVIII, a Trigonometria foi objeto de relevantes estudos desenvolvido principalmente pelo matemático inglês Isaac Newton (1643-1727) e pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Singularmente, Euler criou a Trigonometria moderna, introduzindo a notação contemporânea das funções trigonométricas e estabelecendo a relação da função exponencial com as funções trigonométricas, permitindo inseri-las no domínio dos números complexos. Por intermédio de Euler, a Trigonometria assume a sua forma atual.

A aplicabilidade da Trigonometria nas variadas áreas das Ciências Exatas e Naturais é um fato irrefutável. Conhecer essa verdade é importância extrema para os alunos do Ensino Médio, cabendo ao professor de Matemática o dever de transmitir o conteúdo da melhor maneira possível, estabelecendo uma conexão necessária em relação às futuras escolhas profissionais. Hodiernamente, a Trigonometria não encontra-se limitada apenas ao estudo de triângulos:

> A aplicação da Trigonometria se estende a outros campos da Matemática, como Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil, etc (PAIVA, 2003 p. 113).

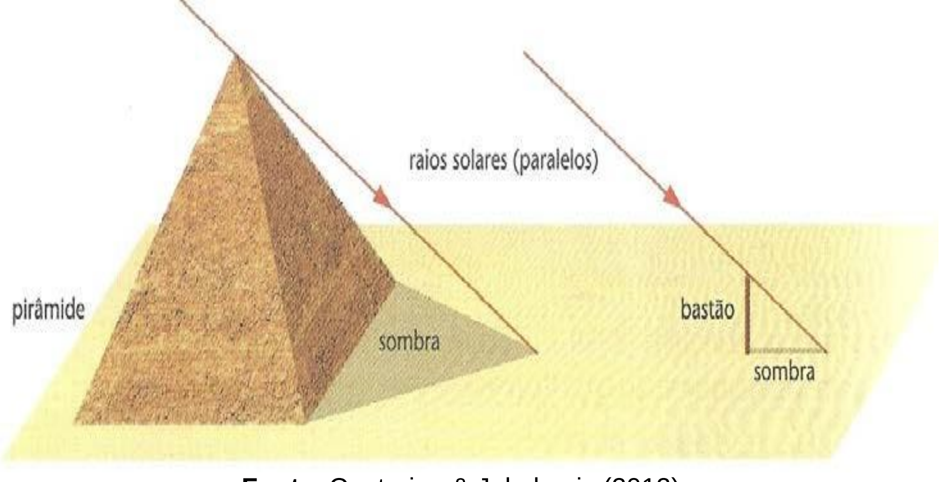
1.3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1.3.1 O Teorema de Tales

O Teorema de Tales foi desenvolvido pelo filósofo, astrônomo e matemático grego Tales de Mileto (624 - 558 a.C.) e, por isso, recebe esse nome.

O experimento de Tales foi realizado através da observação da sombra de uma pirâmide. A partir disso, ele conseguiu calcular a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, com base na sombra que ela projetava no solo.

Figura 4 – Cálculo da altura da pirâmide por meio de sua sombra.



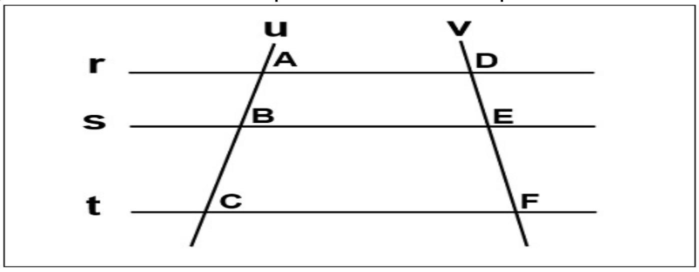
Fonte: Centurion & Jakubovic (2012).

O Teorema de Tales é uma teoria aplicada na Geometria e expressa pelo enunciado:

> A intersecção de um feixe de retas paralelas por duas retas transversais forma segmentos proporcionais (GOUVEIA, 2016, p. 1).

De acordo com a Figura 5, as retas transversais u e v interceptam as retas paralelas r, s e t. Os pontos A, B e C pertencem a reta u e na reta v encontram-se marcados os pontos: D, E F.

Figura 5 – Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte: Gouveia (2016).

O Teorema de Tales indica que quando um feixe de retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, formam segmentos proporcionais. Então, comparando os segmentos de uma mesma reta transversal, podemos escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF};$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF};$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}.$$

Outra maneira de realizar essa comparação, é montar a razão proporcional entre o segmento de uma reta transversal sob o segmento equivalente**.** Ou seja:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF};$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF};$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

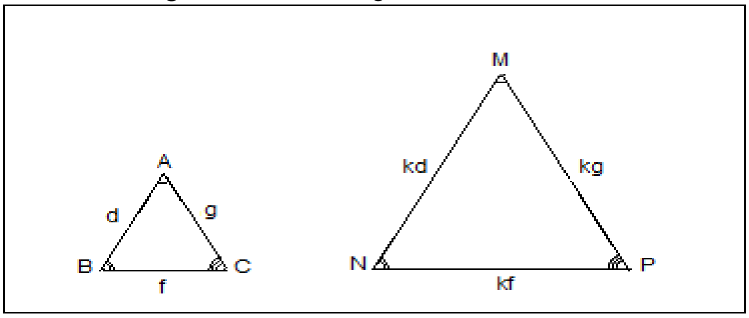
Independentemente do modo de como as proporções são montadas, Oliveira (2021) esclarece que é possível encontrar o valor desses segmentos a partir do Princípio Fundamental das Proporções.

Bongiovanni (2007), explica que o Teorema de Tales ocupa posição central na relação entre o numérico e o geométrico e se originou a partir da resolução de problemas práticos que envolviam proporcionalidade e paralelismo; além disso, é extremamente importante na teoria da semelhança e, consequentemente, na semelhança entre triângulos.

1.3.2 Semelhança de Triângulos

De acordo com Pesco & Arnaut (2009), dois triângulos são chamados triângulos semelhantes se existir uma proporcionalidade entre os lados homólogos e se os três ângulos são ordenadamente congruentes.

Figura 6: Dois triângulos semelhantes



Fonte: Pesco & Arnaut (2009, adaptado pelo autor).

Na Figura 6 temos que os triângulos ΔABC e ΔMNP são semelhantes, denotando-se por $\Delta ABC \sim \Delta MNP,$ pois apresentam as seguintes correspondências: $\hat{A}$ = $\widehat{M}$ e os lados f e kf são homólogos, $\hat{B}$ = $\hat{N}$ e os lados g e kg são homólogos e $\hat{C}$ = $\hat{P}$ então os lados d e kd são homólogos e, além disso, existe um número real positivo k denominado de razão de semelhança, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = k.$$

Dois triângulos semelhantes são chamados de triângulos congruentes se a razão de semelhança é k = 1.

1.3.3 Casos de Semelhança de Triângulos

Primeiro Caso: AA (Ângulo – Ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes, isto é, nos triângulos ΔABC e ΔMNP representados na Figura 6, se $\hat{A}$ = $\widehat{M}$ e $\hat{B}$ = $\widehat{N}$, então os triângulos ΔABC e ΔMNP são semelhantes.

Segundo Caso: LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes, isto é, nos triângulos ΔABC e ΔMNP representados na Figura 6, se os ângulos $\hat{A} = \widehat{M}$ e se $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}}$, então os triângulos ΔABC e ΔMNP são semelhantes.

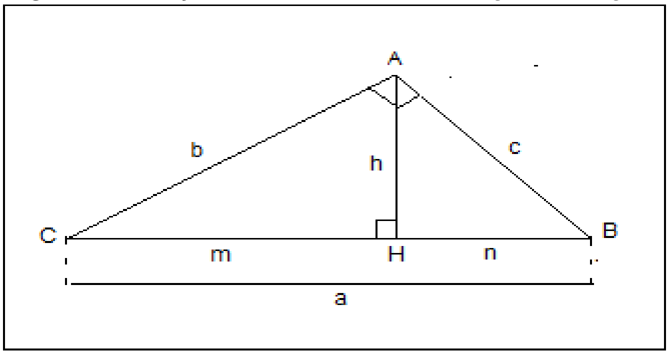
Terceiro Caso: LLL (Lado – Lado – Lado)

Se dois triângulos possuem os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes, ou seja, nos triângulos ΔABC e ΔMNP representados na Figura 6, se tivermos $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}$, então os triângulos ΔABC e ΔMNP são semelhantes.

1.3.4 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Consideremos um triângulo ΔABC retângulo em A, com catetos AB = c, AC = b e hipotenusa BC = a, conforme representado na Figura 7:

Figura 7: Relações métricas em um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, CH = m, BH = n e AH = h, temos que:

(i) $ah = bc$.

(ii) $am = b^2$ e $an = c^2$.

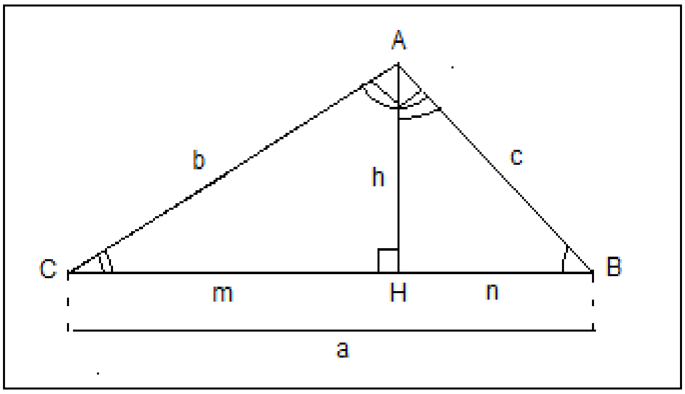
(iii) $h^2 = mn$.

(iv) $a^2 = b^2 + c^2$.

1.3.5 Demonstrações das Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Para demonstrar as afirmações (i), (ii), (iii) e (iv), consideram-se três triângulos retângulos presentes na Figura 8, a saber, ΔABC, ΔHBA e ΔHCA:

Figura 8: Demonstração das relações métricas em um triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Uma vez que A$\widehat{H}$B = B$\hat{A}$C e A$\hat{B}$H = A$\hat{B}$C, têm-se que $\Delta ABC \sim \Delta HBA$ pelo caso AA. Então, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}},$$

ou, da seguinte forma:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}.$$

Da primeira igualdade da proporção, segue que

$$c^2 = an$$

e da segunda igualdade, temos:

$$ah = bc.$$

Analogamente, obtém-se a relação $b^2 = am$. Resta-se, portanto, demonstradas as afirmações (i) e (ii).

Para demonstrar a afirmação (iii), multiplica-se membro a membro as relações da afirmação (ii), obtendo-se:

$$a^2mn = (bc)^2$$

$$mn = \left(\frac{bc}{a}\right)^2.$$

De acordo com a afirmação (i), h = $\frac{bc}{a}$**.** Logo, tem-se que

$$h^2 = mn.$$

Para demonstrar a afirmação (iv), Teorema de Pitágoras, soma-se membro a membro as relações constantes na afirmação (ii):

$$am + an = b^2 + c^2$$

$$a(m + n) = b^2 + c^2.$$

Da Figura 8, verifica-se que m + n = a. Logo

$$a.a = b^2 + c^2$$

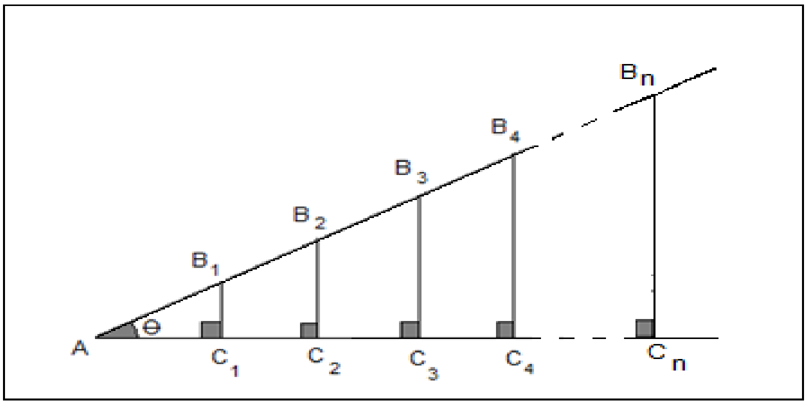
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

1.3.6 Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Apresenta-se, agora, as principais razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, e também serão definidas suas relações inversas cossecante, secante e cotangente, respectivamente.

Seja uma família de triângulos retângulos ΔAC_1B_1, ΔAC_2B_2, ΔAC_3B_3, ..., ΔAC_nB_n, ..., de tal forma que cada um dos triângulo AC_iB_i possua um dos ângulos com medida θ, onde 0° < θ < 90°.

Figura 9 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo.



Fonte: www.http://clubes.obmep.org.br/ (2020, adaptado pelo autor).

Da Figura 9 depreende-se que os triângulos ΔAC_1B_1, ΔAC_2B_2, ΔAC_3B_3, ..., ΔAC_nB_n, ..., são todos semelhantes, pelo caso AA. Uma vez que $\Delta AC_1B_1 \sim \Delta AC_2B_2$, pode-se escrever

$$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{B_1\,C_1}{B_2\,C_2} = \frac{AB_1}{AB_2}.$$

Analogamente, pode-se escrever em relação aos triângulos $\Delta AC_1B_1\ e\ \Delta AC_3B_3$:

$$\frac{AC_1}{AC_3} = \frac{B_1\,C_1}{B_3\,C_3} = \frac{AB_1}{AB_3}.$$

Então, levando em consideração as igualdades proporcionais $\frac{B_1\,C_1}{B_2\,C_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$ e $\frac{B_1\,C_1}{B_3\,C_3} = \frac{AB_1}{AB_3}$, temos que:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3}.$$

De modo geral, podemos escrever

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \ldots = \frac{B_nC_n}{AB_n} = \ldots = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}.$$

É importante destacar que, uma vez determinado um ângulo agudo com medida θ, em graus, para todo triângulo retângulo que tenha um de seus ângulos agudos com medida θ, a razão $\frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}$ será sempre a mesma, pois independe das medidas comprimentos dos lados dos triângulos retângulos considerados e são definidas pelo ângulo de medida θ desses triângulos.

Assim, a constante determinada pelas razões entre os comprimentos dos catetos opostos ao ângulo θ e os comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos semelhantes será denominada “seno do ângulo θ” e denotada por senθ, ou seja

$$\text{sen}\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}.$$

Similarmente ao executado para determinação da razão seno, temos:

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \ldots = \frac{AC_n}{AB_n} = \ldots = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta}{medida\ da\ hipotenusa}.$$

Considera-se o cateto adjacente como o lado do triângulo retângulo mais próximo ao ângulo considerado e ao ângulo reto. A constante definida pelas razões entre os comprimentos dos catetos adjacentes e os comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos semelhantes será denominada “cosseno do ângulo θ” e denotada por cos θ:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}.$$

A partir da mesma semelhança segue-se que:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots = \frac{B_nC_n}{AC_n} = \ldots = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \theta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \theta}.$$

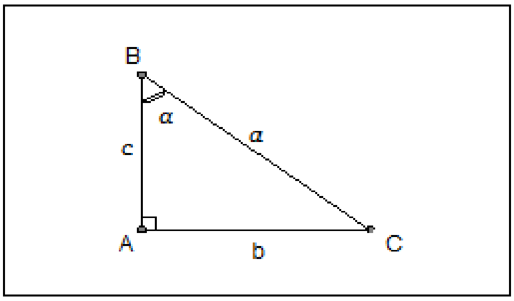
A constante definida pelas razões entre os comprimentos dos catetos opostos e dos comprimentos dos catetos adjacentes dos triângulos retângulos semelhantes será denominada “tangente do ângulo θ” e denotada por tgθ:

$$\text{tg}\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}.$$

Deve-se atentar para o fato de que as razões trigonométricas não são independentes, o que pode ser verificado pela Equação Fundamental da Trigonometria $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ e na equação que representa a razão tangente definida por $tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$.

Seja, então, um triângulo retângulo ΔABC reto em A, onde $A\hat{B}C = \alpha$, AB = c, AC = b e BC = a, conforme mostrado na Figura 10:

Figura 10 – Demonstração da Equação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: Andrade (2019).

Assim, segue que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Em relação a tgα, temos que

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\alpha.$$

Acrescentando, existem ainda razões derivadas das três razões definidas anteriormente, chamadas de razões inversas: a razão secante que é inversa da razão cosseno, a razão cossecante que é inversa da razão seno e a razão cotangente que é inversa da razão tangente, denotadas por secα, cossecα e cotgα, respectivamente. Assim, podemos escrever:

$$\text{sec}\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{1}{\frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}} = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$\text{cossec}\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \alpha} = \frac{1}{\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}} = \frac{1}{sen\alpha}$$

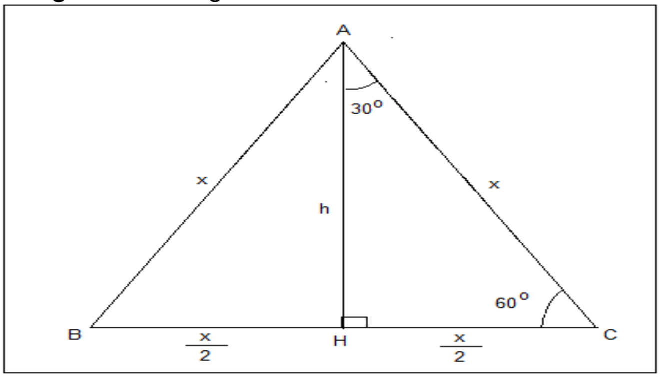
$$\text{cotg}\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{cateto\ oposto\ a\ \ \alpha} = \frac{1}{\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}} = \frac{1}{tg\alpha}$$

1.3.7 Ângulos Notáveis na Trigonometria

De acordo com os ensinamentos de Silva (2021), o estudo da Trigonometria fundamenta-se nas relações existentes entre ângulos e medidas. Relativamente ao triângulo retângulo, essas relações são trabalhadas continuamente, e existem alguns ângulos que são usados com maior frequência, denominados de ângulos notáveis e seus valores correspondem a 30º, 45º e 60º.

Seja o triângulo equilátero (o qual possui todos os ângulos internos iguais a 60º) ΔABC, com lado de medida igual a x, conforme mostrado na Figura 11:

Figura 11 – Ângulos notáveis de 30° e 60°.



Fonte: Silva (2021, adaptado pelo autor).

Traçar a altura do triângulo ΔABC é o mesmo que traçar a bissetriz do ângulo Â e a mediatriz da base BC. Portanto, para calcular a sua altura, aplica-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔAHC:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{x^2}{4} + h^2$$

$$4h^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$$

$$h^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Pelas definições das relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos que:

$$\text{sen}30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\cos30° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}30° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E para o ângulo notável de 60°, temos:

$$\text{sen}60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

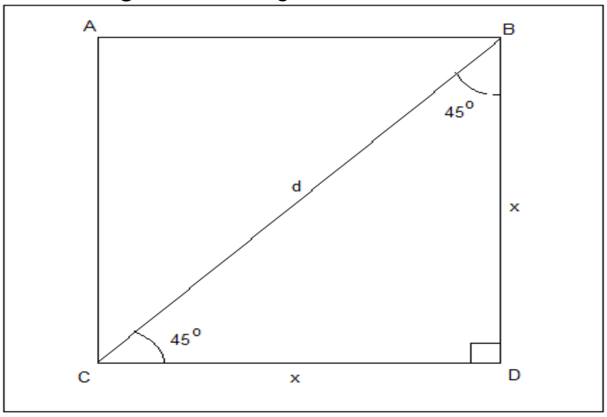
$$\cos60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{x} = \sqrt{3}$$

Uma vez que o triângulo equilátero não possui ângulo de 45°, torna-se necessário traçar a diagonal de um quadrado para formar dois triângulos retângulos, pois a diagonal é uma bissetriz, isto é, divide o ângulo de 90° em dois ângulos de 45°.

Neste sentido, seja o quadrado ABCD de lado x e diagonal d, conforme apresentado na Figura 12:

Figura 12 – Ângulo notável de 45°.



Fonte: Silva (2021, adaptado pelo autor).

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔBDC, determina-se a medida da diagonal (d) em função do lado x. Então

$$d^2 = x^2 + x^2$$

$$d^2 = 2x^2$$

$$d = x\sqrt{2}$$

Conhecida a medida da diagonal, é possível calcular o valor das relações trigonométricas do triângulo retângulo ΔBDC com o ângulo de 45°:

$$\text{sen}45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}45° = \frac{x}{x} = 1$$

Portanto, verifica-se as razões trigonométricas englobam somente os ângulos agudos e tem origem na semelhança de triângulos retângulos, com o propósito de solucionar problemas de difícil medição direta.

2 NOVOS INSTRUMENTOS DIDÁTICOS NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: O VICMETRO

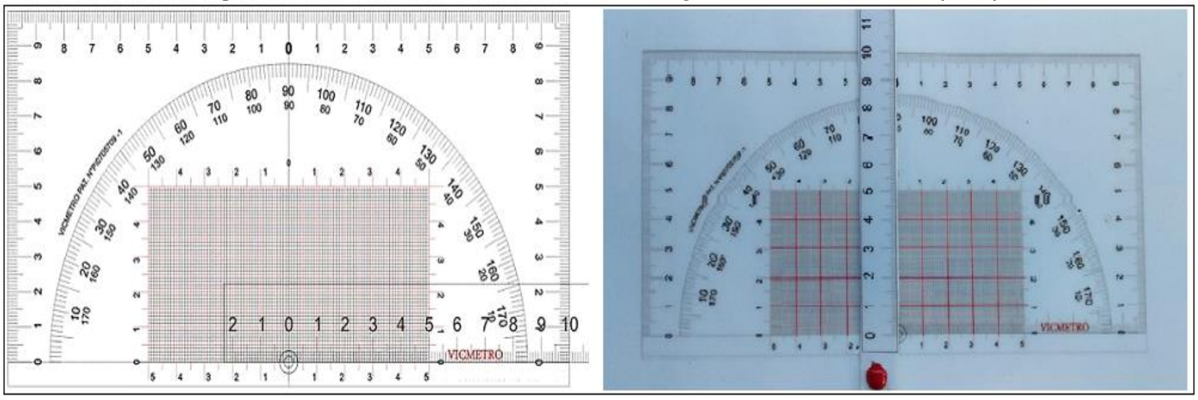
2.1 DEFINIÇÃO, MANUSEIO E APLICABILIDADE DO VICMETRO

2.1.1 Definição

O Vicmetro, criado por Vicente Parra Filho, é uma ferramenta tecnológica elaborada com o propósito de unir a parte teórica e a parte prática do estudo da Trigonometria, possibilitando medir e aferir ângulos, catetos, hipotenusas, cálculos e a leitura direta dos elementos matemáticos citados anteriormente, facilitando a obtenção de respostas imediatas das atividades propostas sem utilização de máquinas de calcular e tabelas trigonométricas.

Para realização desta oficina, em face da escola não dispor do instrumento Vicmetro, conseguiu-se dois Vicmetros de acrílico emprestados e a partir destes, foram construídos mais 6 (seis) instrumentos semelhantes ao Vicmetro mostrado na parte direita da Figura 13. Os detalhes sobre a construção deste Vicmetro estão relatados na Intervenção Preliminar, dentro das Etapas da Pesquisa, nos Caminhos Metodológicos.

Figura 13 – Modelo dos Vicmetros analógicos utilizados nesta pesquisa.

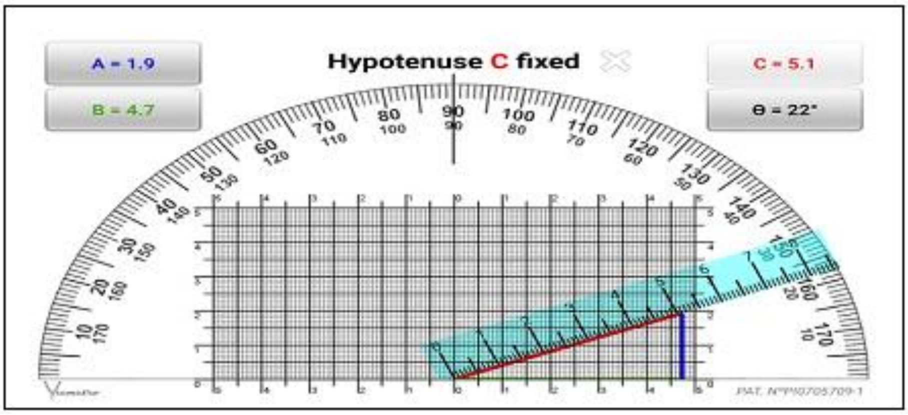


Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Além do instrumento manual, existe na internet o Aplicativo do Vicmetro, batizado de Vicmetro Transferidor & Régua, de fácil utilização e manipulação através do celular. O aplicativo foi baseado no instrumento analógico real idealizado e fabricado no Brasil por seu inventor Vicente Parra e pode ser baixado diretamente do PlayStore para qualquer celular que possua androide.

Da mesma forma que o instrumento manual, o aplicativo oferece respostas imediatas de ângulos, catetos, hipotenusas e cálculos trigonométricos sem o uso de calculadoras, réguas, transferidores, tabelas de seno, cosseno, tangente e cotangente.

Figura 14 – Aplicativo Vicmetro Transferidor & Régua for Android.



Fonte: Google (2021)

Mantendo a experiência analógica de réguas e transferidores, o aplicativo proporciona não só a rápida leitura das grandezas trigonométricas, como também facilita o entendimento das relações matemáticas envolvidas de forma prática e fácil.

Por apresentar maior consonância com resultados esperados, nesta pesquisa será utilizado apenas o Vicmetro analógico.

2.1.2 Manuseio

O Vicmetro é um dispositivo de manuseio relativamente fácil para os estudantes e é composto por uma régua graduada em centímetros fixada em um placa retangular de acrílico e que pode ser rotacionada em sentido horário e em sentido anti-horário. Seu funcionamento consiste em se trabalhar com ambas as peças supracitadas em busca dos elementos desconhecidos (catetos, oposto e adjacente, hipotenusa e ângulo) nas atividades propostas. O usuário deve estar atento que em muitas situações, a medida desconhecida a ser determinada pode estar graduada em uma unidade de comprimento diferente do centímetro, devendo ser realizado um ajuste de escala entre a medida real e a medida a ser lida no Vicmetro.

Parra (2010), criador do instrumento, ressalva que nas medidas de catetos e hipotenusas obtidos com o Vicmetro, podem haver pequenas diferenças em relação aos resultados obtidos algebricamente com a aplicação das relações trigonométricas no triângulo retângulo e que, na maioria das vezes, os alunos não percebam essa mínima diferença, mas isso não significa que a medida apresentada pelo Vicmetro esteja incorreta. Para a utilização do Vicmetro, é necessário que sejam conhecidos pelo menos dois elementos, da seguinte forma:

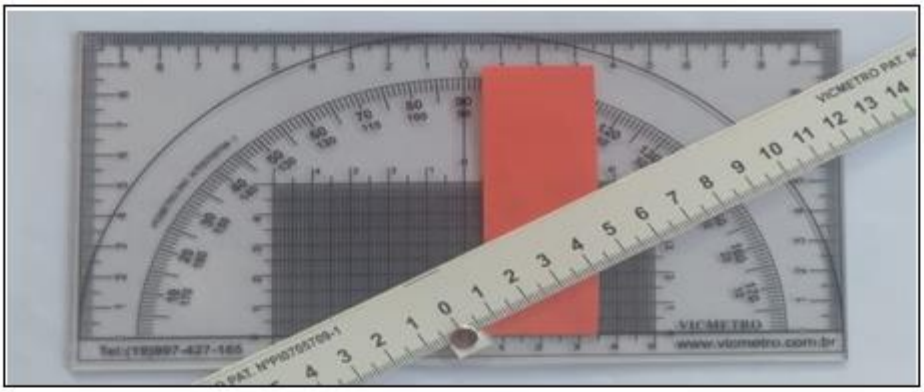
1ª Situação - Seja um triângulo retângulo com um ângulo de 30° e cateto adjacente a este ângulo com medida de 3,5 cm. Qual a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo dado e da hipotenusa?

Inicialmente, determina-se no transferidor o ângulo de 30° e posiciona-se a régua giratória para que sua borda inferior coincida com a extremidade deste arco;

- insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de papel, de modo que a lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada inferior horizontal do Vicmetro e a extremidade inferior direita do *card* coincida com o posição de abscissa 2,5.

O triângulo retângulo proposto na 1ª situação surge limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*. Assim, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que a medida do cateto oposto é 2,1 cm e a medida da hipotenusa é 4,1 cm, aproximadamente, conforme mostrado na Figura 15, abaixo:

Figura 15 – Representação no Vicmetro do Triângulo proposto na 1ª situação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

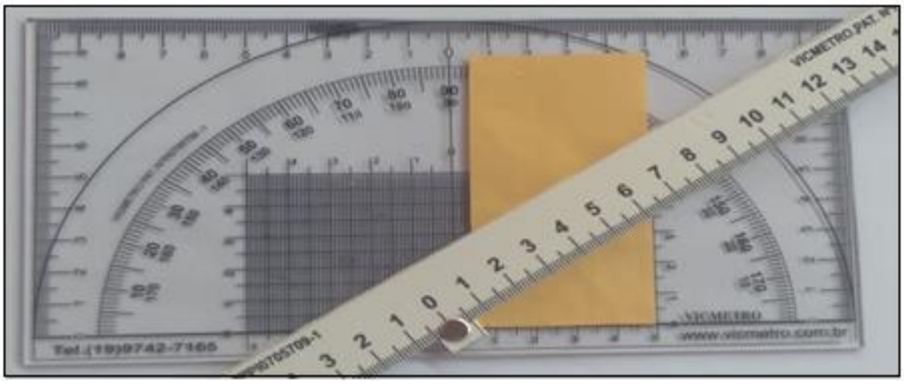
2ª Situação - Seja um triângulo retângulo com um ângulo de 35° e cateto oposto a este ângulo com medida de 3,5 cm. Qual a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo dado e da hipotenusa?

- Inicialmente, determina-se no transferidor o ângulo de 35° e posiciona-se a régua giratória para que sua borda inferior coincida com a extremidade deste arco;

- insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de papel de modo que a lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada horizontal do Vicmetro até que o ponto em que a lateral direita do *card* coincida com o ponto de ordenada 3,5 que é a medida do cateto oposto ao ângulo de 35°.

O triângulo retângulo proposto na 2ª situação surge limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*. Assim, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que a medida do cateto adjacente ao ângulo de 35° é 5 cm e a medida da hipotenusa é 6,2 cm, aproximadamente, conforme mostrado na Figura 16, a seguir:

Figura 16 – Representação no+ Vicmetro do Triângulo proposto na 2ª situação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

3ª Situação - Seja um triângulo retângulo com um ângulo de 50° e hipotenusa com medida de 4cm. Qual a medida do comprimento dos catetos adjacente e oposto ao ângulo dado?

Inicialmente, determina-se no transferidor o ângulo de 50° e posiciona-se a régua giratória para que sua borda inferior coincida com a extremidade deste arco;

- insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de papel de modo que a lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada horizontal do Vicmetro até que o ponto em que a lateral direita do *card* coincida com medida de 4 cm na régua graduada, que corresponde a medida da hipotenusa do triângulo retângulo proposto.

O triângulo retângulo nesta situação encontra-se limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*. Assim, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que os comprimentos dos catetos adjacente e oposto ao ângulo de 50° são 2,6 cm e 3,2 cm, respectivamente, conforme mostrado na Figura 17, abaixo:

Figura 17 – Representação no Vicmetro do Triângulo proposto na 3ª situação.

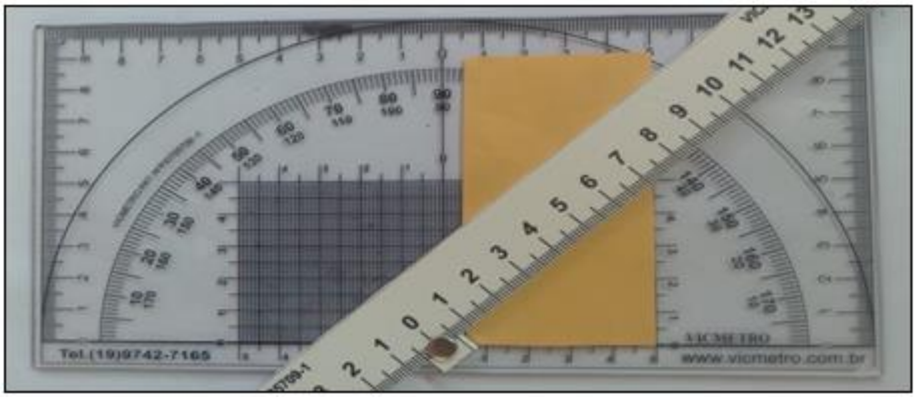
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

4ª Situação - Em um triângulo retângulo, a medida do cateto adjacente é 5 cm e a hipotenusa mede 7 cm. Qual a medida do comprimento do cateto oposto e a medida do ângulo formado entre o cateto adjacente e a hipotenusa?

Inicialmente, insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada horizontal do Vicmetro até que o ponto em que a lateral direita do *card* coincida com medida de 7 cm na régua graduada, que corresponde a medida da hipotenusa do triângulo retângulo proposto e a extremidade lateral inferior direita do *card* coincida com a posição de abscissa 5. O triângulo retângulo se mostra limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*.

Assim, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que o comprimento do cateto oposto é 5 cm e o ângulo agudo formado entre o cateto adjacente e a hipotenusa é de 45°, aproximadamente, conforme mostrado na Figura 18, abaixo:

Figura 18 – Representação no Vicmetro do Triângulo proposto na 4ª situação.



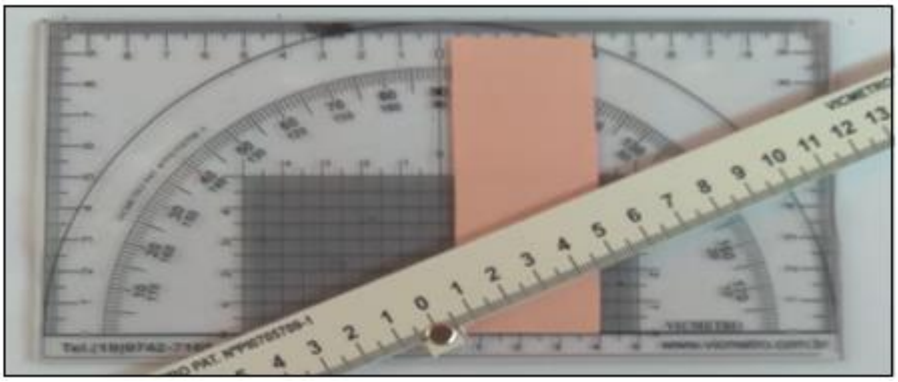
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

5ª Situação – Em um triângulo retângulo, a medida do cateto oposto é 2 cm e a hipotenusa mede 4,5 cm. Qual a medida do comprimento do cateto adjacente e a medida do ângulo agudo determinado pelo cateto adjacente e a hipotenusa?

Inicialmente, insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de modo que a lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada horizontal do Vicmetro até que o ponto em que a lateral direita do *card* coincida com o ponto em que a marcação na régua giratória seja 4,5 cm, que é a medida da hipotenusa, intersecte o ponto de ordenada 2 do Vicmetro, que corresponde ao cateto oposto do ângulo que se deseja determinar.

O triângulo retângulo se mostra limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*. Assim, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que o comprimento do cateto adjacente é 4 cm e o ângulo agudo formado entre o cateto adjacente e a hipotenusa é de 27°, aproximadamente, conforme mostrado na Figura 19, abaixo:

Figura 19 – Representação no Vicmetro do Triângulo proposto na 5ª situação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

6ª Situação - Em um triângulo retângulo, para um determinado ângulo, a medida do cateto oposto é 4 cm e o cateto adjacente mede 3 cm. Qual a medida do comprimento da hipotenusa e a medida do ângulo agudo determinado pelo cateto adjacente e a hipotenusa?

- Inicialmente, insere-se entre a base retangular do Vicmetro e a régua giratória um *card* de modo que a lateral inferior do *card* esteja alinhada com a régua graduada horizontal do Vicmetro até que o ponto de abscissa 3 e ordenada 4, que correspondem, respectivamente, as medidas do cateto adjacente e do cateto oposto.

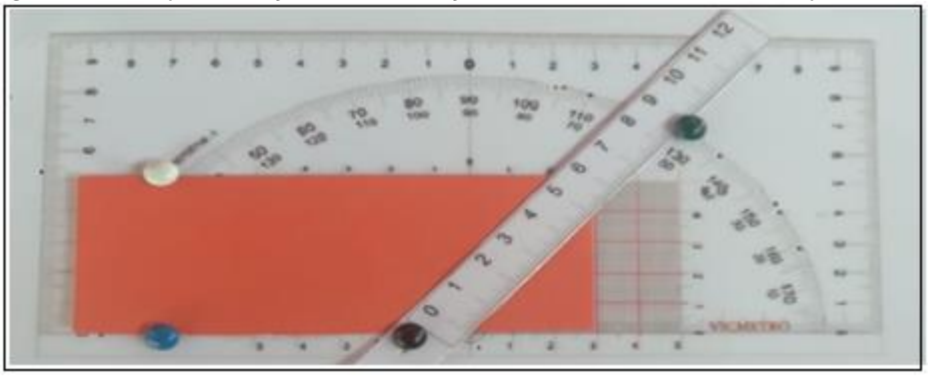
O triângulo retângulo se mostra limitado pela a borda inferior da régua giratória e pelas bordas inferior e lateral direita do *card*. Finalmente, considerando exclusivamente as medidas fornecidas pelo Vicmetro, temos que o comprimento da hipotenusa é 5 cm e o ângulo agudo formado entre o cateto adjacente e a hipotenusa é de 53°, aproximadamente, conforme mostrado na Figura 20, abaixo:

Figura 20 – Representação no Vicmetro do Triângulo proposto na 6ª situação.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Para esta 6ª situação, mostra-se simultaneamente o triângulo resultante utilizando o Vicmetro produzido pelo pesquisador exclusivamente para aplicação na Oficina que serve de base para esta pesquisa e o resultado encontra-se demonstrado na Figura 21, abaixo:

Figura 21 – Representação da 6ª situação usando o Vicmetro criado para a Oficina.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

2.1.3 Aplicabilidade

Propomos a utilização deste instrumento inovador nas áreas didático-pedagógica, técnico-tecnológica, engenharia, construção civil e projetos arquitetônicos.

Tais áreas são demandantes de cálculos trigonométricos fazendo a utilização de réguas, calculadoras, transferidores e tabelas de cálculos de senos, cossenos, tangentes e cotangentes, dentre outros.

É nesse contexto que acreditamos que o projeto deva ser aplicado, uma vez que se trata de um ferramental analógico de fácil leitura, leve, preciso, versátil e de simples manuseio, indispensável nas escolas, indústrias e construção civil.

Nas escolas, em especial na área trigonométrica, sua utilização dará um teor mais prático ao aprendizado além de poder ser utilizado como forma de consulta às respostas.

Exemplo de Aplicação Cotidiana do Vicmetro

– Calcular o ângulo de inclinação x do telhado de um casa residencial com as dimensões especificadas na Figura 12 abaixo:

Figura 22 – Casa residencial referente ao exemplo de aplicação cotidiana do Vicmetro.

Fonte: www.brasilit.com.br (adaptado pelo autor, 2020).

A finalidade do exemplo é determinar o ângulo de inclinação do telhado usando o Vicmetro, devendo-se transportar para o instrumento as medidas do cateto oposto de 4,0 m e do cateto adjacente de 2,5 m que compõem o triângulo retângulo apresentado no Exemplo 1.

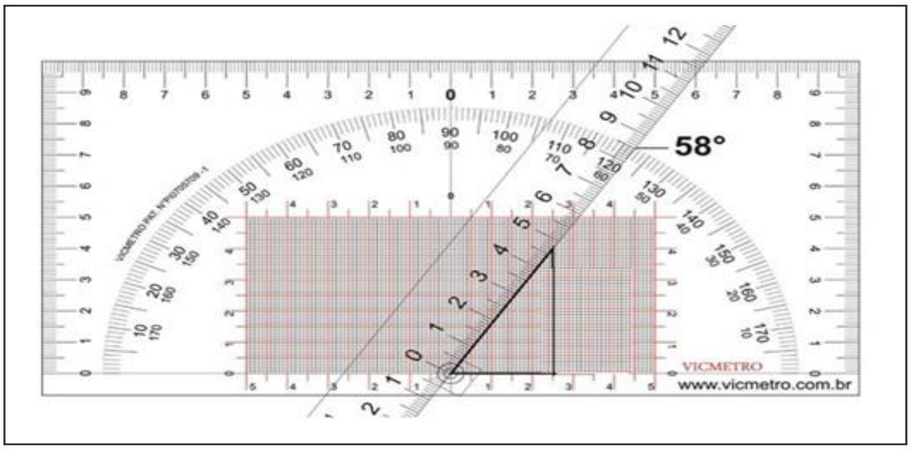
Para determinação algébrica do ângulo desejado, deve-se identificar a razão trigonométrica que envolva os elementos conhecidos, no caso, as medidas dos comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente. Assim, a relação trigonométrica a ser aplicada é a tangente e podemos escrever:

$$\tan x = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{cateto\ adjacente\ a\ x} = \frac{4{,}0}{2{,}5} \cong 1{,}6.$$

Com o auxílio da tabela trigonométrica, verifica-se que o ângulo de inclinação x que possui tangente igual a 1,6 é um ângulo de aproximadamente 58°.

Aplicando os elementos conhecidos no Vicmetro, ratifica-se que a medida do ângulo procurado é de 58°, conforme disposto na Figura 23:

Figura 23 – Resposta do exemplo com uso do Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa.

2.2 OS PCN'S E O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Conforme disposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), a sociedade contemporânea vive um momento de grandes e aceleradas transformações e um dos principais vetores desta constante mutação repousa nas novas descobertas e tecnologias. Assim, acrescenta-se mais um obstáculo para as instituições escolares: a incorporação dessas novíssimas formas de comunicação e difusão do conhecimento ao sistema tradicional trabalho praticado nesses educandários.

A utilização rotineira das ferramentas didáticas manipuláveis, tais como, blocos algébricos, tangran, geoplano no processo educativo proporciona variadas contribuições para o ensino e a aprendizagem da Matemática à proporção que reavalia a importância do cálculo mecânico e da mera manipulação simbólica. É de fácil percepção que por intermédio desses instrumentos didáticos, muitos cálculos podem ser executados de maneira mais rápida e eficiente, mostrando aos alunos a dimensão da função da linguagem gráfica e das novas formas de representação, possibilitando a adoção de novas estratégias de abordagem de diversos problemas.

A utilização dos manipuláveis pode auxiliar de maneira bastante positiva no desenvolvimento cognitivo dos alunos. A utilização destes materiais em aulas pode ser um fator positivo na interação professor - aluno, trazendo uma maior proximidade entres estes, reforçando a preparação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, 1998).

No ponto de vista de Cunha (2001), o uso de instrumentos didáticos, como por exemplo, a régua trigonométrica e o Vicmetro facilitam de forma considerável o ensino da Trigonometria, uma vez que, na ausência desses materiais, o estudo da Trigonometria era restrito a revistas, livros, dispositivos de transparências, daí a dificuldade da maioria dos alunos na aprendizagem dos conteúdos relacionados a área da Trigonometria.

Neste mesmo contexto, Silva (2007) assevera sobre a relevância de certos instrumentos para o Ensino das Relações Trigonométricas, por atribuir um caráter mais dinâmico à disciplina, gerando vantagens na aprendizagem e possibilitando simulações e estimativas de situações que não poderiam ser exploradas apenas com o uso de lápis e papel.

Complementando, Silva (2007) enfatiza que a investigação é componente primordial na formação do professor, objetivando a aquisição e construção de novos saberes e conhecimentos, bem como para o progresso e o domínio de habilidades e competências, conhecimento de práticas pedagógicas inovadoras e o uso correto das tecnologias.

Além disso, Silva (2007) finaliza destacando que a utilização de novos recursos didáticos na sala de aula só auxiliará o desenvolvimento de uma educação transformadora se for baseada em um conhecimento que permita ao professor interpretar, refletir e dominar criticamente a tecnologia.

Pereira (2007) alerta que vários profissionais de Matemática encontram-se defasados, despreparados ou desmotivados para o uso dos novos recursos existentes. Ainda assim, defende o autor que cumpre à escola o papel primordial de produzir e distribuir os instrumentos oriundos do progresso científico e tecnológico.

Costa e Souza (2011) afirma que, com o passar e exclusivamente em relação a Matemática, os projetos educacionais se modificaram, entretanto, o ensino da Matemática permanece inalterado, principalmente em virtude de a realidade escolar continuar a mesma: o modelo de ensino da maneira tradicional e de pouca motivação para os alunos. Neste contexto, um fator modificador desta realidade é o emprego de novas ferramentas didáticas e tecnológicas no ensino da Matemática.

Pires (2016) assevera que o ensino da Trigonometria pode se transformar em um tormento aos olhos dos alunos quando se emprega apenas o conhecimento teórico sem uso das situações problemas.

O avanço meteórico da tecnologia proporciona inúmeras facilidades e benefícios para a maioria da população: os aplicativos para celulares com acesso que permitem realizar operações bancárias, verificar horários e itinerários de transportes coletivos, escala de chegadas e partidas de voos em aeroportos e em termos educativos, vários software direcionados ao ensino da Matemática, como o iMathematics, o MathyYou, o Geogebra, o Vicmetro e muitos outros, que ajudam de maneira positiva no Ensino da Matemática.

3 CAMINHOS METODOLÓGICOS

3.1 TIPO DE PESQUISA

Este trabalho caracteriza-se por um caráter qualitativo, considerando que os dados foram coletados no próprio ambiente dos sujeitos pesquisados e fundamentado por uma pesquisa bibliográfica.

Na abordagem qualitativa, o pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo e os dados coletados nesse tipo de pesquisa são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada.

Segundo Gil (2008), as pesquisas qualitativas têm como principal propósito descrever características de uma população específica ou fenômeno ou o estabelecer relações entre variáveis analisadas. Existem inúmeros estudos que podem receber esta classificação e uma de suas particularidades mais significativas repousa na aplicação de técnicas padronizadas para coletar dados.

Segundo Marconi & Lakatos (2003), a pesquisa bibliográfica é o levantamento de toda a bibliografia já publicada, em formas de livros, revistas, publicações avulsas e imprensa escrita. Pode-se, aí, incluir, também, a pesquisa realizada por meios eletrônicos, como, por exemplo, a internet. A sua finalidade é fazer com que o pesquisador entre em contato com contado direto com todo o material escrito sobre um determinado assunto, auxiliando-o na análise de suas pesquisas ou na manipulação de suas informações. Ela pode ser considerada como o primeiro passo de toda a pesquisa científica.

3.2 LÓCUS DA PESQUISA

A pesquisa foi aplicada na Escola Estadual Rivanda de Nazaré Guimarães, localizada na Av Cícero Marques de Souza, 2166, no bairro Novo Horizonte, nesta cidade de Macapá.

A escola oferece Ensino Fundamental II, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos – EJA, disponibilizando toda a estrutura necessária para o conforto e desenvolvimento educacional de seus alunos.

Em relação às instalações físicas, a escola é composta de 17 salas de aula, Diretoria, Secretaria, Sala dos Professores, Sala de Recursos Multifuncionais para Atendimento Educacional Especializado, Biblioteca, Sala de Leitura, Auditório, Laboratório de Informática, Banheiros, Banheiro adequado para alunos com deficiência ou mobilidade reduzida, Cozinha, Despensa, Refeitório, Pátio Coberto, Pátio Descoberto e Quadra Esportiva Coberta. Oferece também acesso à Internet e Banda Larga para sua comunidade estudantil.

Figura 24 – Entrada Principal da Escola Rivanda de Nazaré.

Fonte: Google (2021)

3.3 SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com alunos de duas turmas do Primeiro Ano do Ensino Médio, turno matutino, contando as duas turmas juntas com 38 alunos matriculados e frequentando às aulas de maneira regular.

A oficina foi realizada nos dias 24 e 25 de outubro de 2019, no período vespertino e as atividades realizadas tiveram 3 horas duração em cada dia (14:00 hrs às 17:00 hrs, com 15 minutos de intervalo), com participação efetiva de 11 alunos no primeiro dia e de 10 alunos no segundo dia. Para preservação da identidade dos alunos analisados, os participantes receberam identificação numérica, de 1 a 10.

3.4 ETAPAS DA PESQUISA

Intervenção Preliminar: Obtenção e confecção dos Vicmetros.

Esta etapa aconteceu antes de a oficina ser realizada, pois como a escola não dispunha dos instrumentos manipuláveis, conseguiu-se dois Vicmetros de acrílico emprestados e a partir destes, foram construídos mais 6 (seis) instrumentos, utilizando como matéria prima básica o papel cartão, por apresentar mais resistência a manipulação manual.

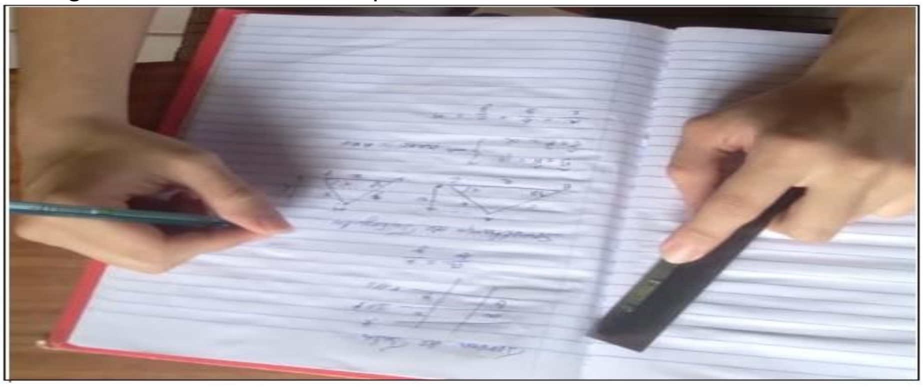
Para a construção do instrumento, o passo inicial foi imprimir a figura do Vicmetro e da régua giratória no papel cartão, que posteriormente foram devidamente plastificados, recortados e acoplados por meio de pins coloridos e o resultado final encontra-se mostrado na Figura 13.

Primeira Intervenção: Aula para exposição e reforço do conteúdo teórico relacionado aos objetivos da Oficina e apresentação do Vicmetro.

Esta etapa se desenvolveu no primeiro encontro entre os alunos participantes e o pesquisador. Inicialmente, foi explicado alunos participantes quais os objetivos pretendidos com a realização desta oficina e posteriormente, foi realizada a intervenção pedagógica com a aplicação dos seguintes roteiros didáticos:

Roteiro Didático I – revisão teórica dos seguintes conteúdos: Teorema de Tales, Semelhança de Triângulos, Relações Métricas e Razões Trigonométricas no triângulo retângulo; além dos conteúdos voltados diretamente à Trigonometria, também foi revisto o conteúdo sobre Teoria das Proporções, Escalas e Medidas de Comprimento.

Figura 25 – Aluno A7 acompanhando a revisão teórica dos conteúdos.

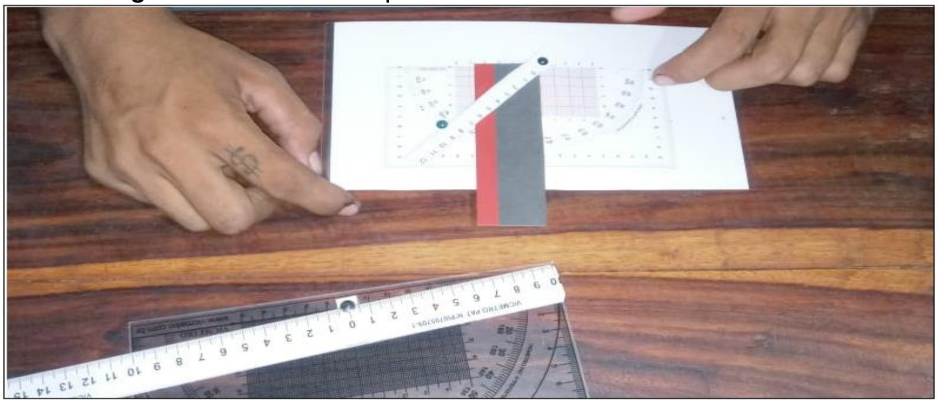


Fonte: Autor (2021).

Em tempo, chamou-se de revisão dos conteúdos considerando que os temas abordados são componentes curriculares dos anos finais do Ensino Fundamental e, uma vez que a Oficina foi aplicada para alunos do 1° ano do Ensino Médio, partiu-se do pressuposto que os alunos participantes tinham algum conhecimento acerca do conteúdo que seria apresentado.

Roteiro Didático II - apresentação do instrumento manipulável Vicmetro aos alunos participantes, com explanação sobre o correto manuseio do mesmo e sua aplicação nas atividades que necessitavam do uso das razões trigonométricas.

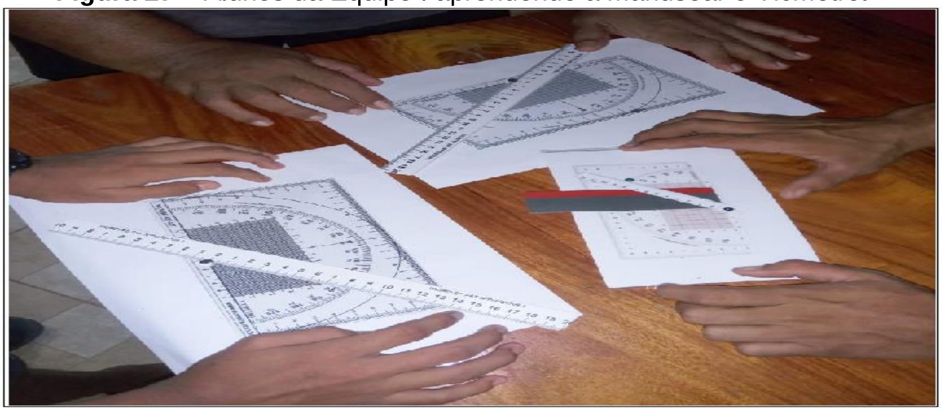
Figura 26 – Aluno A1 aprendendo a manusear o Vicmetro.



Fonte: Autor (2021).

Para facilitar o acesso ao manuseio do material didático, pois só haviam dois instrumentos de acrílico, os participantes foram divididos em dois grupos compostos por 5 e 6 alunos, respectivamente. Para cada um dos grupos, foi disponibilizado um Vicmetro produzido de maneira industrial e três Vicmetros produzidos artesanalmente.

Figura 27 – Alunos da Equipe I aprendendo a manusear o Vicmetro.



Fonte: Autor (2021).

Segunda Intervenção: Aplicação da lista de atividades.

Esta etapa aconteceu no segundo dia de oficina e teve por objetivo verificar o aprendizado dos alunos participantes em relação aos conteúdos explanados anteriormente e a utilização do Vicmetro na confirmação experimental dos resultados obtidos de forma algébrica.

Assim, foi aplicada uma lista de atividades composta de 10 questões, que os alunos deveriam resolver individualmente, assim divididas: duas questões envolvendo o conteúdo Teorema de Tales; duas questões sobre o conteúdo Semelhança de Triângulos; cinco questões que exploravam os conteúdos Relações Métricas e Razões Trigonométricas no triângulo retângulo e em quatro delas, os alunos precisavam ratificar experimentalmente os resultados encontrados de modo algébrico e uma pergunta final aberta, quando os alunos eram estimulados a falar sobre a importância do uso do Vicmetro na aprendizagem do conteúdo.

Figura 28 – Aluno A9 resolvendo a Lista de Atividades.

Fonte: Autor (2021).

Para a resolução da lista de atividades, foi disponibilizado aos alunos um tempo total de 3 horas.

Terceira Intervenção: Análise das respostas apresentadas pelos alunos participantes

Esta etapa ocorreu após a participação dos alunos analisados e consistiu em uma análise dos resultados alcançados durante a aplicação.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

De acordo com Gerdes (1981), a aprendizagem se desenvolve a partir da problematização de situações contextualizadas, sempre considerando a visão de mundo do aluno. A confecção e o preparo de uma aula ou atividade demanda tempo, esforço e pesquisa para que fique muito bem planejada e, muitas vezes, são ocorrências que tornam as aulas mais tradicionais, e em diversas ocasiões, distantes do entendimento do aluno.

Assim, após a Primeira Etapa e seus roteiros didáticos, foi proposto aos alunos a resolução de uma lista de atividades contendo 8 questões objetivando verificar o grau de aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos apresentados.

A seguir, as questões e os respostas apresentadas pelos alunos serão analisadas e discutidas.

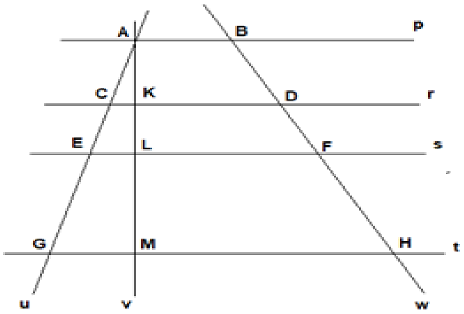
Primeira Questão

A primeira questão apresenta segmentos proporcionais em um feixe de quatro retas paralelas cortado por três retas transversais e foi solicitado aos alunos que identificassem dentre as alternativas apresentadas quais estavam certas e quais alternativas estavam erradas.

Nesta questão inicial, o aluno não precisava conhecer a fundo a aplicação do Teorema de Tales, tampouco havia a necessidade de efetuar cálculos matemáticos, bastando uma minuciosa observação da figura apresentada para a correta resolução da atividade.

Figura 29 – Primeira questão.

1 - Com base na figura apresentada abaixo e aplicando os conhecimentos acerca do Teorema de Tales, julgue os itens a seguir em Certo (C) ou Errado (E):



a) $\frac{AC}{BD} = \frac{EG}{DF}$ (C) (E)

b) $\frac{EG}{FH} = \frac{CE}{DF}$ (C) (E)

c) $\frac{AG}{CE} = \frac{BH}{DF}$ (C) (E)

d) $\frac{AK}{KM} = \frac{BD}{DH}$ (C) (E)

e) $\frac{AL}{LM} = \frac{BD}{FH}$ (C) (E)

f) $\frac{CE}{KL} = \frac{AE}{AM}$ (C) (E)

g) $\frac{KL}{CE} = \frac{AM}{AG}$ (C) (E)

h) $\frac{BF}{DH} = \frac{AE}{EG}$ (C) (E)

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O resultado alcançado na primeira questão deixou evidente, de modo bastante claro, uma grande dificuldade dos alunos quanto à identificação de segmentos proporcionais em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais.

O desempenho individual dos alunos participantes está mostrada na Tabela 1, a seguir:

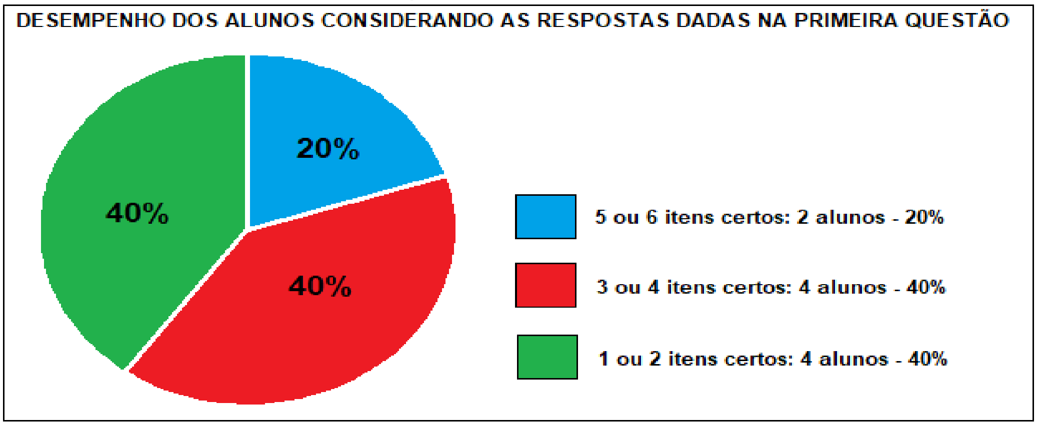
Tabela 1 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 1

ALUNOS	ACERTOS
A1	2
A2	2
A3	1
A4	2
A5	5
A6	4
A7	6
A8	4
A9	3
A10	3

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Assim, com base no resultado mostrado na Tabela 1 elaborou-se o gráfico percentual para avaliação do desempenho coletivo dos alunos relativamente a primeira questão:

Gráfico 1 – Desempenho dos alunos na Primeira Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

De acordo com o exposto na Tabela 1 e corroborado pelo Gráfico 1, somente 4 alunos obtiveram um desempenho maior do que ou igual a 50% de acertos das proporções apresentadas, o que reforça o entendimento do pesquisador acerca das dificuldades apresentadas pelos alunos para relacionar e identificar segmentos proporcionais no modo em que a atividade foi proposta aos alunos.

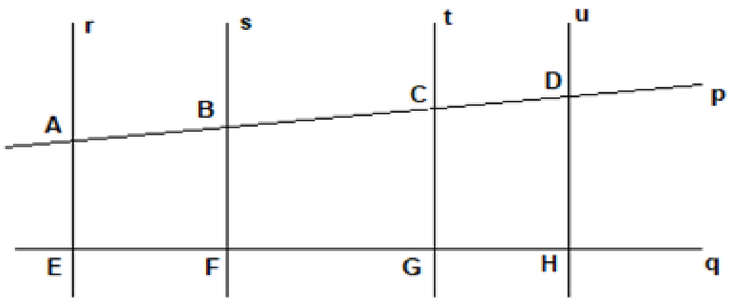
Segunda Questão

Baseada em questão aplicada na prova de Matemática do Concurso da Epcar/2018, a segunda questão apresenta um feixe de 4 retas paralelas cortadas por 2 retas transversais e tinha por objetivo avaliar a aplicação do Teorema de Tales pelos alunos, com o diferencial que as medidas de alguns segmentos apresentavam valores numéricos e haviam dois segmentos de medida desconhecida, conforme mostrado na Figura 31, a seguir:

Figura 30 – Segunda questão.

2 - Na figura abaixo, as retas r, s, t e u são pararalelas e são interceptadas pelas retas transversais p e q. As medidas dos segmentos formados são:

$\overline{AB} = 3$: $\overline{BC} = x$; $\overline{CD} = 8$; $\overline{EF} = 12$; $\overline{FG} = 20$ e $\overline{GH} = y$.



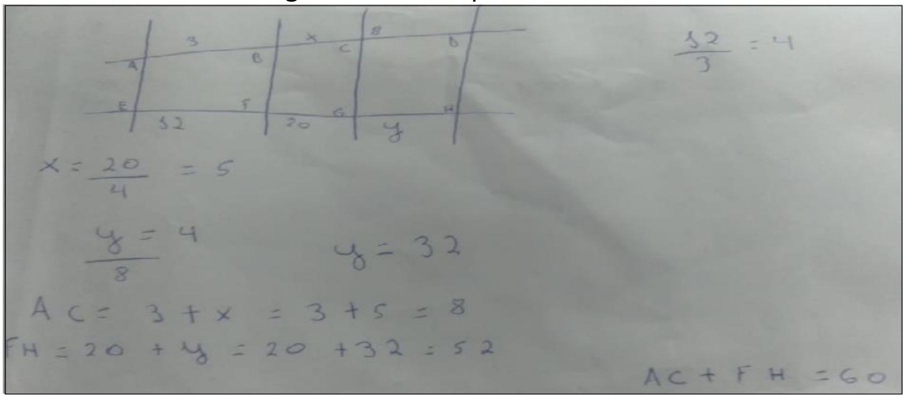
Nestas condições, determine o valor de $\overline{AC} + \overline{FH}$

Fonte: Concurso Epcar 2018 (adaptado pelo autor, 2021).

Assim, para solucionar corretamente a questão, o aluno deveria identificar por intermédio da imagem mostrada na Figura 31 que AC + FH = AB + BC + FG + GH. Uma vez que os comprimentos dos segmentos BC e GH eram desconhecidos, os alunos deveriam encontrá-los aplicando proporções e os conceitos do Teorema de Tales.

O aluno A9 acertou a questão encontrando a razão de semelhança e a partir desta razão determinou os comprimentos dos dois segmentos desconhecidos, efetuando corretamente os cálculos para encontrar a resposta esperada, conforme exposto na Figura 31, a seguir:

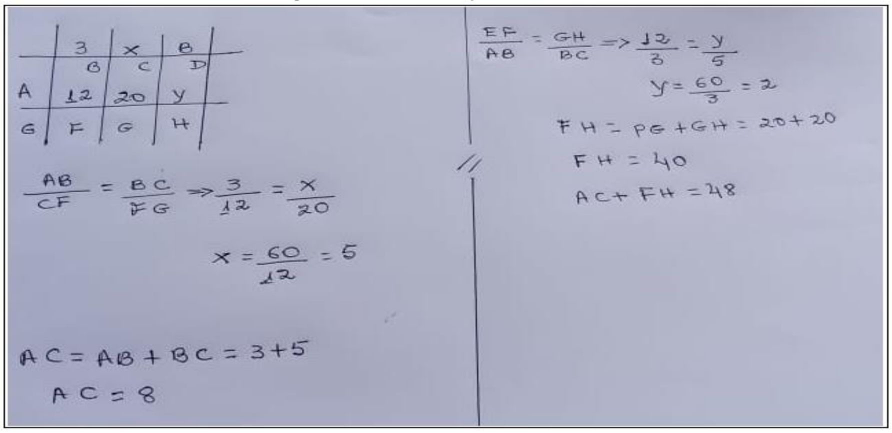
Figura 31 – Resposta do aluno A9.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A8 encontrou corretamente o valor do segmento desconhecido BC e desta forma determinou que o comprimento do segmento AC era 8. Entretanto, se equivocou com as proporções para a determinação do comprimento do segmento GH, errando portanto o comprimento de FH. Esta situação está mostrada na Figura 32 , abaixo:

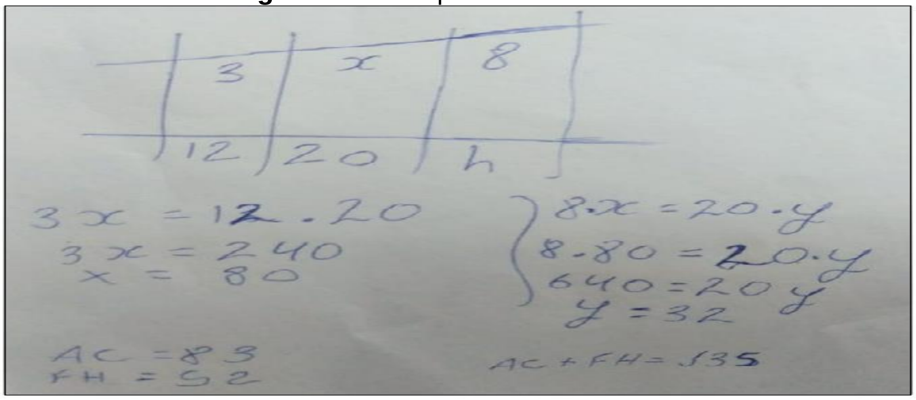
Figura 32 – Resposta do Aluno A8.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A10 resolveu a questão aplicando de maneira incorreta o Teorema de Tales, pois efetuou a multiplicação de segmentos proporcionais situados na mesma transversal e encontrou um valor diferente do esperado para a medida do comprimento AC. Em seguida, repetiu o erro na determinação da medida do segmento GH e mesmo equivocadamente encontrou o valor correto do segmento FH. Assim, não acertou o resultado final da questão, conforme mostrado na Figura 33, abaixo:

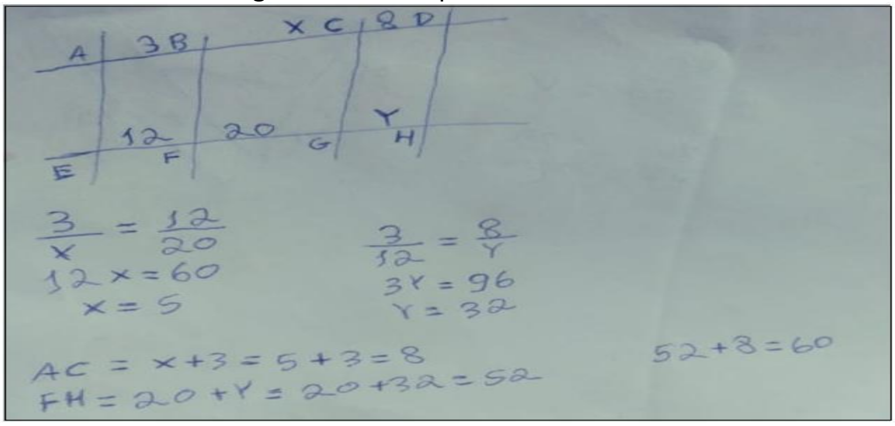
Figura 33 – Resposta do aluno A10.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A2 acertou integralmente a questão, usando corretamente o Teorema de Tales e identificando os segmentos proporcionais. A resposta dada pelo aluno A2 está mostrada na Figura 34, abaixo:

Figura 34 – Resposta do aluno A2.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a segunda questão está mostrado na Tabela 2:

Tabela 2 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 2.

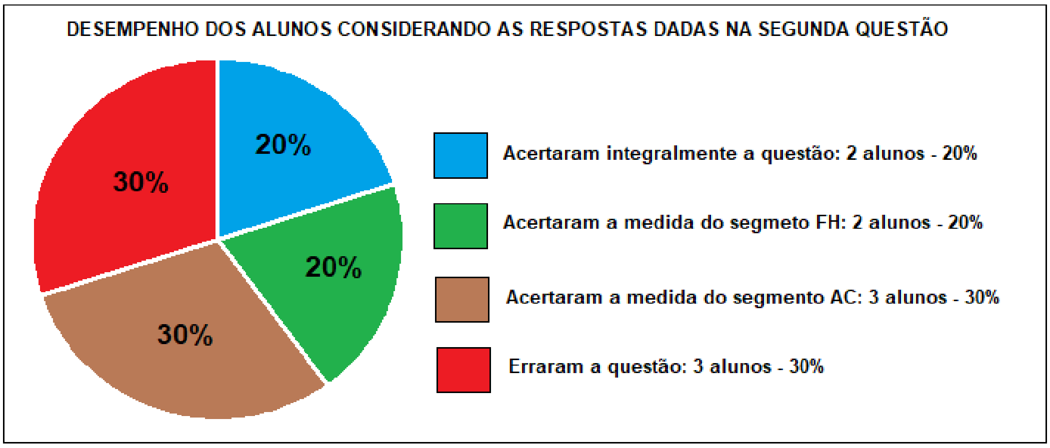
ALUNOS	RESULTADOS
A1	Acertou a medida do segmento AC
A2	Acertou integralmente a questão
A3	Errou a questão
A4	Errou a questão
A5	Acertou a medida do segmento FH
A6	Acertou a medida do segmento FH
A7	Acertou a medida do segmento AC

ALUNOS	ACERTOS
A8	Acertou a medida do segmento AC
A9	Acertou integralmente a questão
A10	Errou a questão

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a segunda questão encontra-se apresentado no Gráfico 2, a seguir:

Gráfico 2 – Desempenho dos alunos na Segunda Questão.



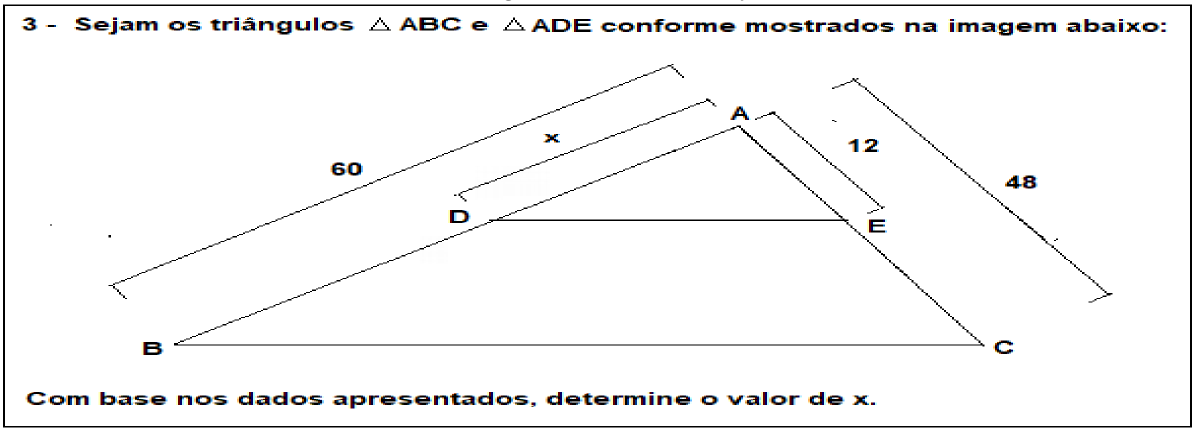
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Uma vez que o Teorema de Tales é conteúdo integrande do 9° ano do Ensino Fundamental e que possui diversas aplicações no cotidiano, o desempenho apresentado foi muito preocupante, pois os alunos que realizaram a atividade já estão cursando o Ensino Médio e de acordo com o resultado apresentado no Gráfico 2, aproximadamente 80% dos alunos não conseguiram resolver integralmente a questão proposta.

Terceira Questão

A terceira atividade é composta por um triângulo *ABC* e um segundo triângulo ADE sobreposto ao triângulo ABC, de modo que o vértice A é um vértice comum aos dois triângulos e além disso, o segmento DE é paralelo ao segmento BC, conforme mostra a Figura 35, abaixo:

Figura 35 – Terceira questão.

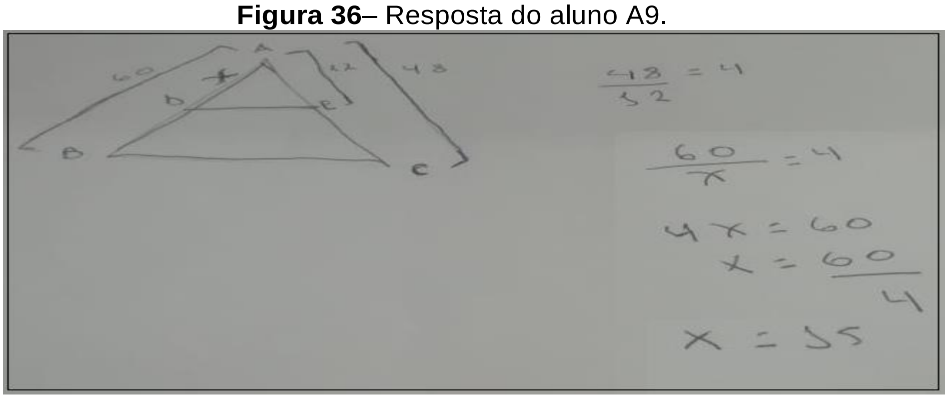


Fonte: Gouveia, 2016 (adaptado pelo autor, 2021).

Questões em que um triângulo é cortado por um segmento de reta paralelo a um de seus lados e esse segmento forma um segundo triângulo menor e semelhante ao primeiro são muito recorrentes em livros de Matemática do Ensino Fundamental que englobam Geometria.

O aluno A9 identificou a proporcionalidade entre os segmentos AE e AC e a partir da determinação da razão de semelhança, considerando que os segmentos formados pela lateral do triângulo também são proporcionais, aplicou o Teorema de Tales para encontrar o valor desconhecido da medida do segmento AD, conforme mostrado na Figura 36, abaixo:

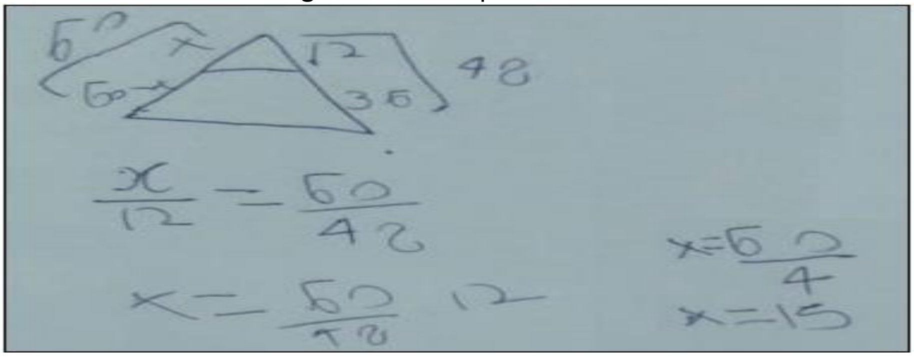
Figura 36– Resposta do aluno A9.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A7 resolveu questão determinando, inicialmente as medidas dos segmentos BD e EC e em seguida, aplicou os conceitos do Teorema de Tales para triângulos semelhantes e encontrou corretamente o valor do segmento AD, conforme mostrado na Figura 37, abaixo:

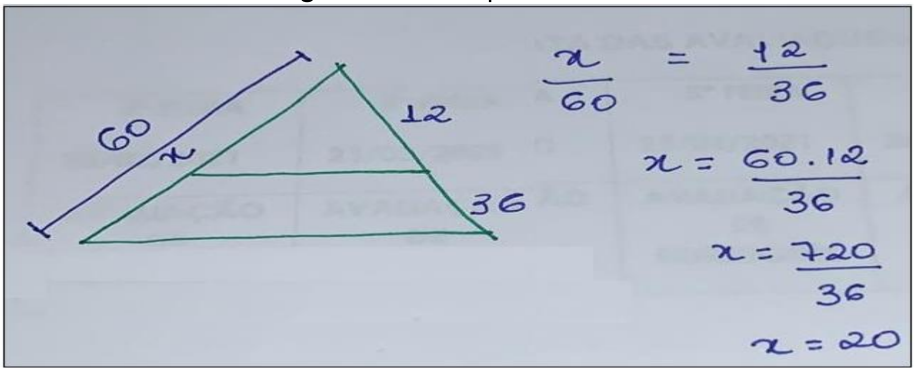
Figura 37 – Resposta do aluno A7.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em contrapartida, 6 alunos resolveram erradamente a questão e a maior dificuldade apresentada por esses alunos, detectada pelo pesquisador, foi a determinação da medida do segmento BD. A situação narrada pode ser constatada na resolução do aluno A6, mostrada na Figura 38, a seguir:

Figura 38 – Resposta do aluno A6.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a terceira questão está mostrado na Tabela 3, abaixo:

Tabela 3 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 3.

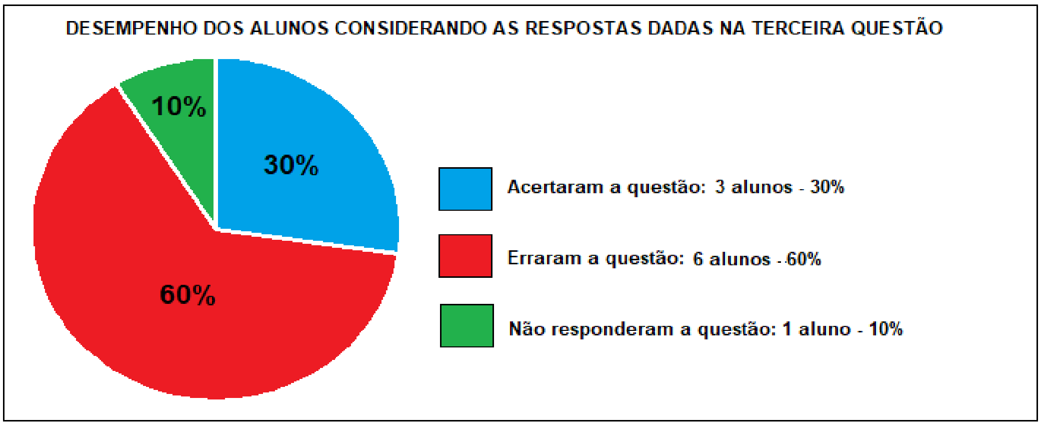
ALUNOS	RESULTADOS
A1	Errou a questão
A2	Errou a questão
A3	Errou a questão
A4	Não respondeu a questão
A5	Acertou a questão
A6	Errou a questão
A7	Acertou a questão

ALUNOS	RESULTADOS
A8	Errou a questão
A9	Acertou a questão
A10	Errou a questão

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a terceira questão encontra-se apresentado no Gráfico 3, a seguir:

Gráfico 3 – Desempenho dos alunos na Terceira Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Analisando-se o resultado exposto no Gráfico 3, excluindo-se os alunos que acertaram a questão, verifica-se que 70% dos alunos participantes efetivamente não aprenderam os conceitos de congruência entre ângulos e semelhança entre dois triângulos no Ensino Fundamental o que é deveras preocupante, uma vez que é incontestável a presença das relações de proporcionalidade em várias situações rotineiras, com vasta aplicabilidade, como na astronomia e em triângulos.

Quarta Questão

A quarta questão é composta por triângulos formados por bolas de bilhar, sendo que esses triângulos tem um vértice comum, representado pela bola 3. Para responderem corretamente a questão e determinarem a medida da distância entre as bolas 1 e 3, os alunos deveriam perceber que os triângulos formados pelas bolas 123 e 345 são semelhantes e relacionar de modo correto os lados homólogos.

Figura 39 – Quarta questão.

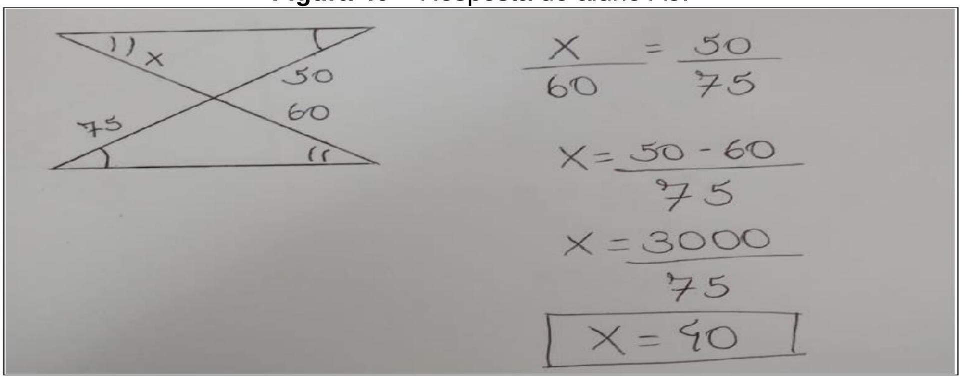
4 - Em uma mesa de sinuca, encontram-se dispostas cinco bolas conforma mostra a figura abaixo.

A reta formada entre as bolas 1 e 2 é paralela a reta formada entre as bolas 4 e 5.
Com base nas medidas apresentadas, determinar a distância entre as bolas 1 e 3.

Fonte: Gouveia, 2016, adaptado pelo autor.

O aluno A5 identificou corretamente a congruência entre os ângulos de vértices 1 e 4 e entre os ângulos de vértices 2 e 5. Assim, identificada a semelhança entre os dois triângulos, resolveu corretamente a questão usando a proporcionalidade dos lados homólogos, conforme mostrado na Figura 40, a seguir:

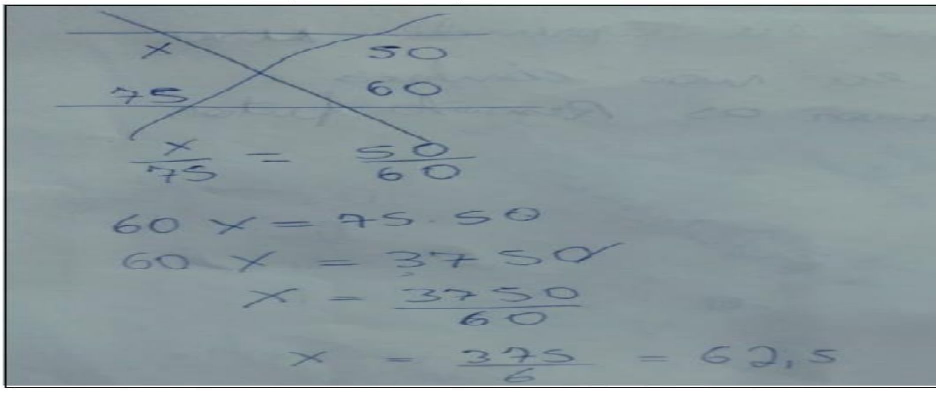
Figura 40 – Resposta do aluno A5.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A1, na comparação dos segmentos proporcionais presentes na questão, usou erradamente a razão x/75, quando o correto seria usar a razão x/60 (comparação de segmentos de uma mesma transversal) ou a razão x/50 (comparação entre o segmento de uma reta transversal sob o segmento equivalente da outra transversal**)** e mesma análise em relação a razão utilizada do outro lado da igualdade. Assim, o aluno A1 errou o resultado da questão e a situação descrita encontra-se mostrada na Figura 41, abaixo:

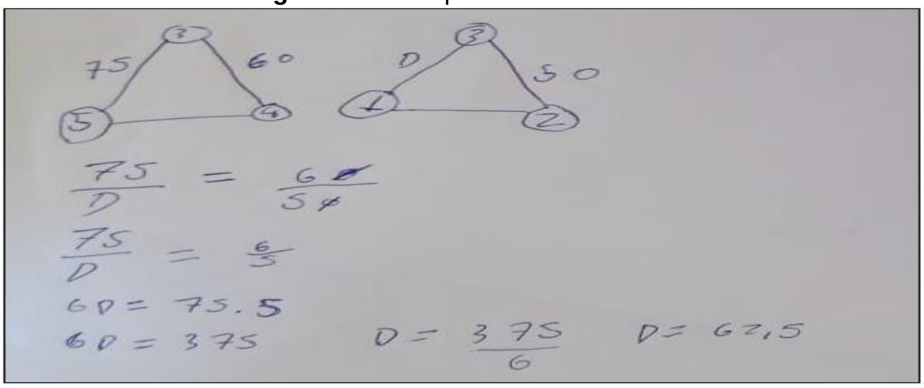
Figura 41 – Resposta do aluno A1.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Ao redesenhar a figura presente no enunciado da questão, o aluno A3 estabeleceu erroneamente que o segmento de reta formado entre as bolas 1 e 3 é homólogo ao segmento de reta formado entre as bolas 3 e 5 e, da mesma forma, que o segmento de reta formado entre as bolas 2 e 3 é homólogo ao segmento de reta formado entre as bolas 3 e 4. Assim, o aluno A3 resolveu de forma errada a questão e a situação descrita é mostrada na Figura 42, abaixo:

Figura 42 – Resposta do aluno A3.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a quarta questão está mostrado na Tabela 4, abaixo:

Tabela 4 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 4.

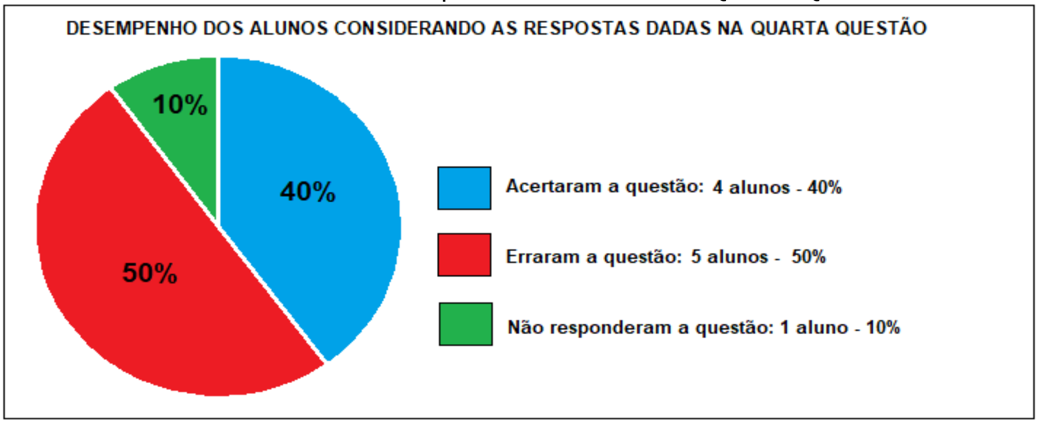
ALUNOS	RESULTADOS
A1	Errou a questão
A2	Acertou a questão
A3	Errou a questão

ALUNOS	RESULTADOS
A4	Errou a questão
A5	Acertou a questão
A6	Errou a questão
A7	Acertou a questão
A8	Errou a questão
A9	Acertou a questão
A10	Não respondeu

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a quarta questão encontra-se apresentado no Gráfico 4, a seguir:

Gráfico 4 – Desempenho dos alunos na Quarta Questão.



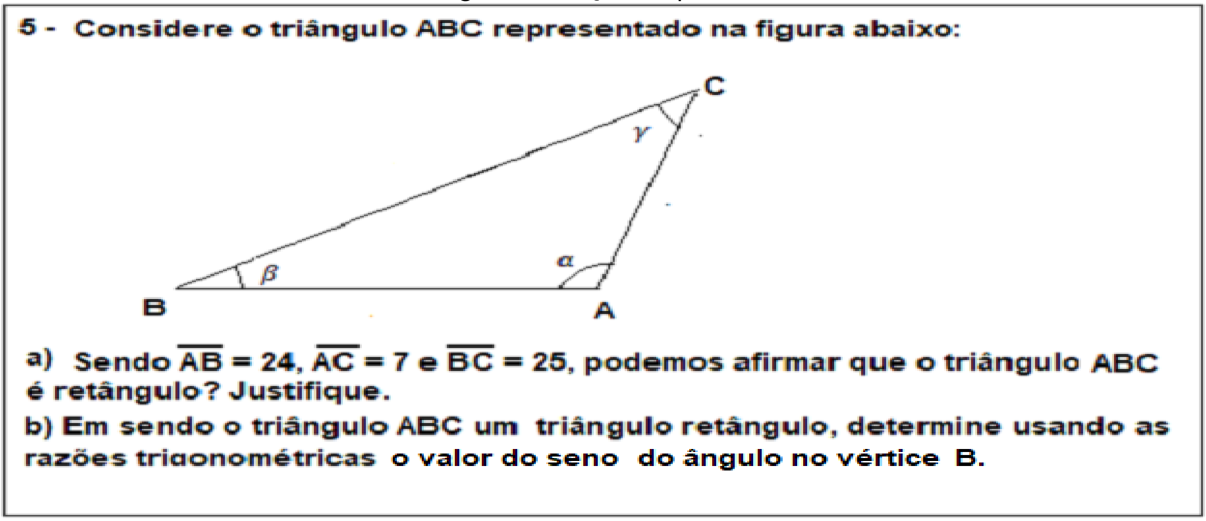
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O Gráfico 4 evidencia que os principais obstáculos apresentados pelos alunos na resolução de questões sobre Semelhança de Triângulos repousa na interpretação dos problemas, no reconhecimento de ângulos congruentes e identificação dos lados proporcionais ou homólogos e em uma grande dificuldade na aplicação das operações aritméticas, principalmente envolvendo números decimais. Essas dificuldades confirmam que a maioria dos alunos chegam no Ensino Médio com grandes déficits de aprendizagem em conteúdos essenciais da Matemática e a consequência é o desinteresse pela disciplina, falta de motivação, baixo rendimento e a evasão escolar.

Quinta Questão

Nesta questão aborda Relações Métricas no Triângulo Retângulo e os alunos eram questionados se o triângulo dado era retângulo e deveriam justificar que o triângulo é retângulo aplicando o Teorema de Pitágoras. Posteriormente, pede-se para calcular o valor do seno do ângulo no vértice B e os alunos deveriam aplicar a relação trigonométrica do seno que é a razão entre cateto oposto e a hipotenusa.

Figura 43 – Quinta questão.



5 - Considere o triângulo ABC representado na figura abaixo:

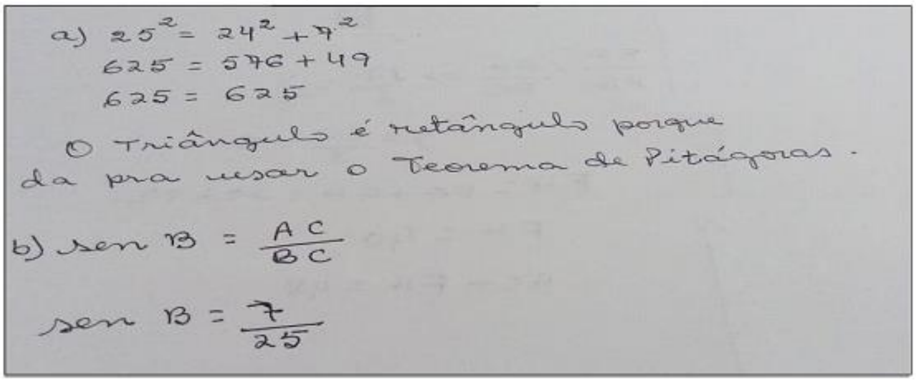
a) Sendo $\overline{AB} = 24$, $\overline{AC} = 7$ e $\overline{BC} = 25$, podemos afirmar que o triângulo ABC é retângulo? Justifique.

b) Em sendo o triângulo ABC um triângulo retângulo, determine usando as razões trigonométricas o valor do seno do ângulo no vértice B.

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Apenas o aluno A8 respondeu e justificou corretamente que o triângulo mostrado na questão era retângulo, utilizando o Teorema de Pitágoras; também efetuou corretamente o cálculo do seno do ângulo β, conforme mostrado na figura 44, abaixo:

Figura 44 – Resposta do Aluno A8.



a) $25^2 = 24^2 + 7^2$

$625 = 576 + 49$

$625 = 625$

O Triângulo é retângulo porque da pra usar o Teorema de Pitágoras.

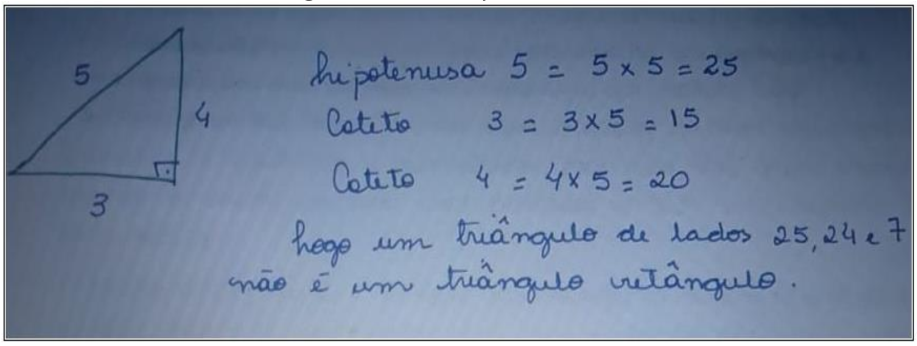
b) sen B $= \frac{AC}{BC}$

sen B $= \frac{7}{25}$

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A6 respondeu que o triângulo não era retângulo e justificou a resposta usando o triângulo pitagórico de lados 3,4 e 5 e um segundo triângulo pitagórico obtido com a multiplicação dos lados do triângulo inicial por 5, donde concluiu erroneamente que não poderia existir um triângulo retângulo com lados 25, 24 e 7, conforme mostrado na Figura 45, a seguir:

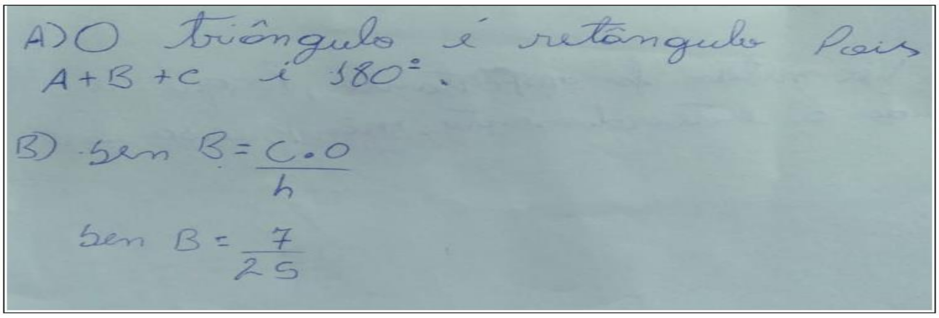
Figura 45 – Resposta do Aluno A6.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A10 respondeu que o triângulo era retângulo, mas justificou afirmando que a soma dos ângulos era 180° e sua resposta foi considerada errada. Entrementes, mesmo errando o item inicial da questão, o aluno 10 efetuou corretamente o cálculo do seno do ângulo β, conforme mostrado na figura 46, abaixo:

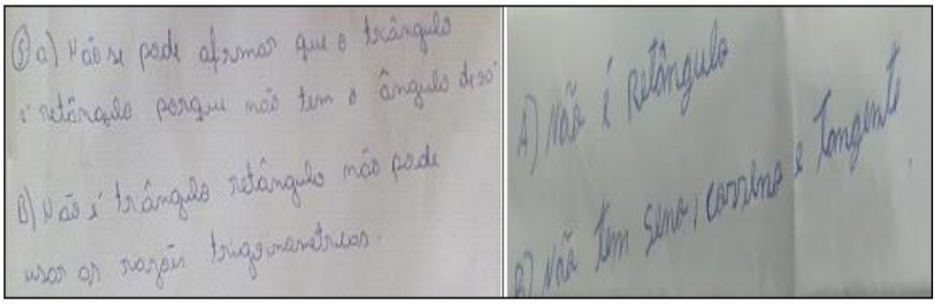
Figura 46 – Resposta do Aluno A10.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A9 respondeu que o triângulo não é retângulo porque não tem o ângulo de 90° e o aluno A2 apenas respondeu que o triângulo não era retângulo e que não poderia ser efetuado o cálculo do seno de ângulo β, conforme Figura 47 abaixo:

Figura 47 – Respostas dos alunos A9 e A2, respectivamente.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a quinta questão está mostrado na Tabela 5:

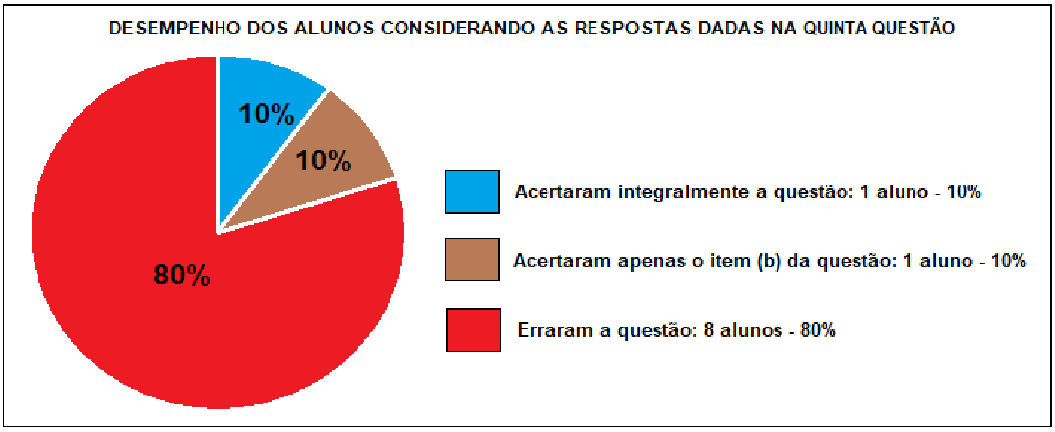
Tabela 5 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 5.

ALUNOS	RESULTADOS
A1	Errou a questão
A2	Errou a questão
A3	Errou a questão
A4	Errou a questão
A5	Errou a questão
A6	Errou a questão
A7	Errou a questão
A8	Acertou integralmente a questão
A9	Errou a questão
A10	Acertou o valor de senβ

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a quinta questão encontra-se apresentado no Gráfico 5, a seguir:

Gráfico 5 – Desempenho dos alunos na Quinta Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

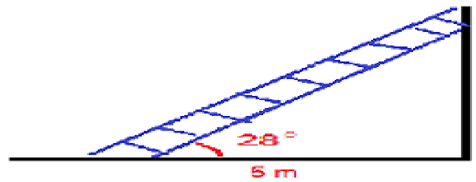
De maneira geral, verificou-se que a grande maioria dos estudantes participantes apresentaram muitas dificuldades no reconhecimento de um triângulo retângulo e na aplicação do Teorema de Pitágoras, o que nos remete mais uma vez ao déficit de aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Considerando que os estudos trigonométricos se relacionam estreitamente com o Teorema de Pitágoras, é inquietante verificar que apenas 1 aluno (10%) conseguiu resolver de maneira integral uma questão praticamente desprovida de qualquer dificuldade.

Sexta Questão

Na sexta questão, o aluno deverá encontrar o comprimento de uma escada apoiada em uma parede formando um ângulo de 28°com a superfície horizontal e a base de apoio está distante 6 m da parede, conforme mostrado na Figura 48, abaixo:

Figura 48 – Sexta questão.

6 - Uma escada está apoiada em uma parede vertical e sua base de apoio dista 5m desta parede.



a) Calcule o comprimento da escada usando as relações trigonométricas;
Dados: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53.

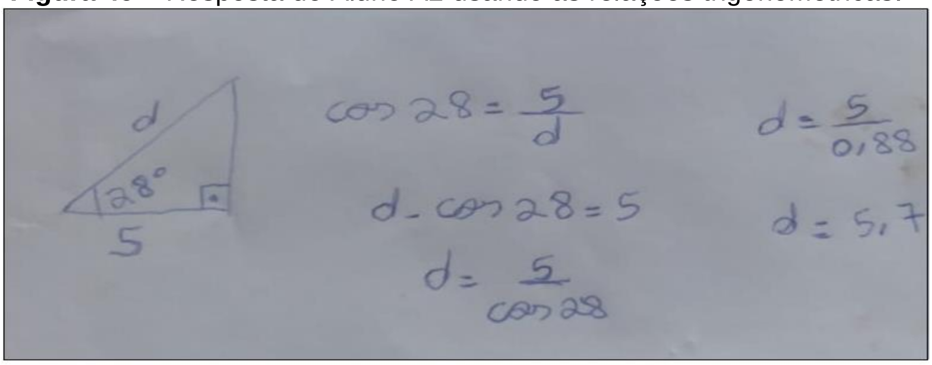
b) Confirme o resultado encontrado com o auxílio do Vicmetro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O objetivo da questão é que o aluno identifique qual a relação trigonométrica a ser utilizada para determinar a medida do comprimento da escada. Posteriormente, com o auxílio do Vicmetro, o aluno deverá chegar ao resultado experimental usando apenas a medida do ângulo formado entre a escada e o chão e a distância entre o pé de apoio da escada e a parede, sem a necessidade de calcular o seno, o cosseno ou a tangente do ângulo apresentado na questão.

O aluno A2 identificou e aplicou de maneira correta que a relação trigonométrica a ser utilizada era o cosseno, encontrando a resposta certa para a questão, conforme mostrado na Figura 49, abaixo:

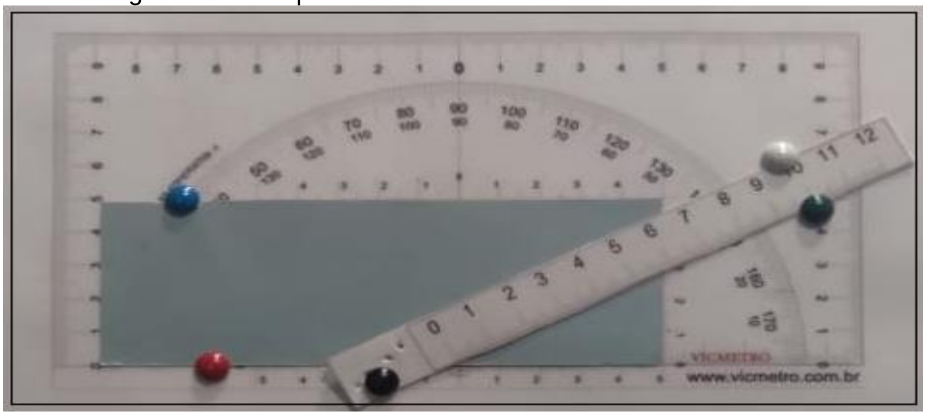
Figura 49 – Resposta do Aluno A2 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em seguida, utilizando o Vicmetro, o aluno A2 determinou experimentalmente que o comprimento da escada era de 5,8 m, aproximadamente, confirmando o resultado encontrado algebricamente usando as razões trigonométricas, conforme mostrado na Figura 50, abaixo:

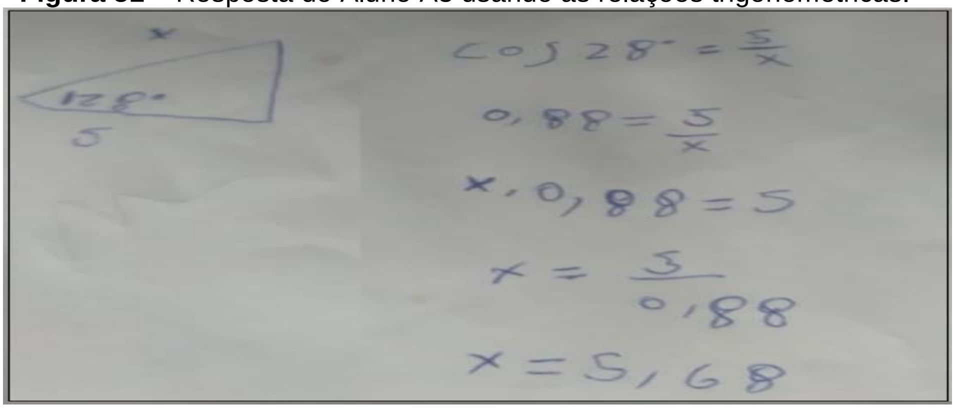
Figura 50 – Resposta do Aluno A2 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A3 também identificou corretamente a relação trigonométrica inerente a questão proposta e determinou a resposta certa para a questão, conforme mostrado na Figura 51, abaixo:

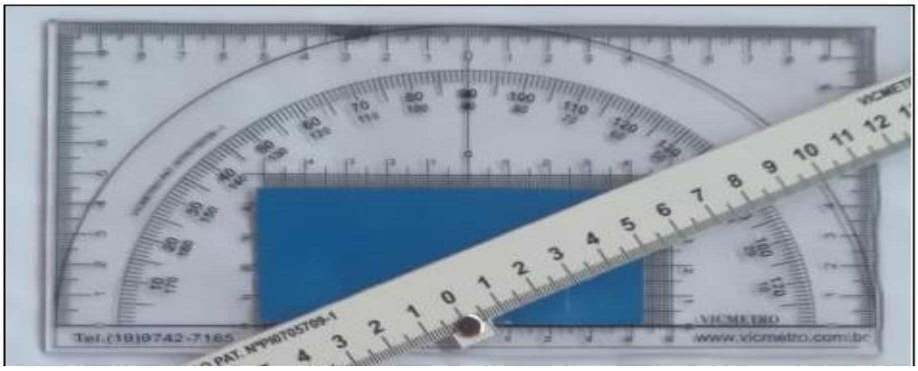
Figura 51 – Resposta do Aluno A3 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Entretanto, ao resolver a questão com o uso do Vicmetro, o aluno A3 utilizou de forma equivocada a medida do cateto adjacente como sendo o valor da medida da hipotenusa, errando a questão, conforme mostrado na Figura 52, abaixo:

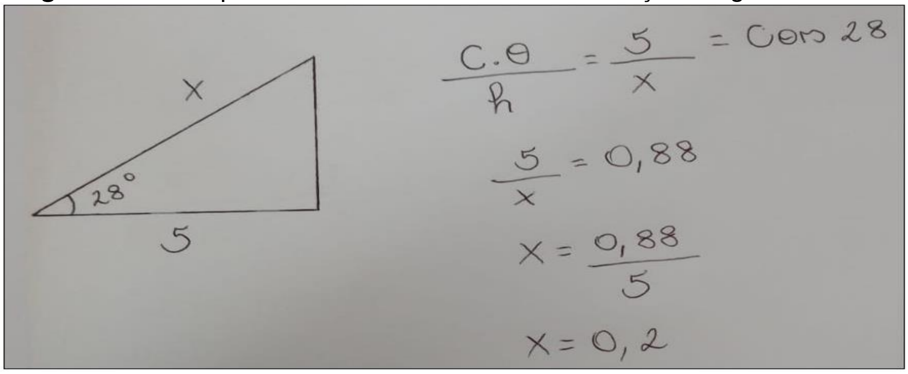
Figura 52 – Resposta do Aluno A3 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A5 identificou que a razão trigonométrica a ser utilizada para encontrar o comprimento da escada era a relação cosseno, mas considerou tal razão como sendo cateto oposto dividido pela hipotenusa. Errou também na aplicação do Teorema das Proporções, encontrando uma medida incompatível para o comprimento da escada. Ainda assim, resolveu corretamente a questão com auxílio do Vicmetro, determinando que o comprimento da escada era de 5,7 m, conforme mostrado na Figura 53 e 54, abaixo:

Figura 53 – Resposta do Aluno A5 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 54 - Resposta do Aluno A5 usando o Vicmetro.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a sexta questão está mostrado na Tabela 6:

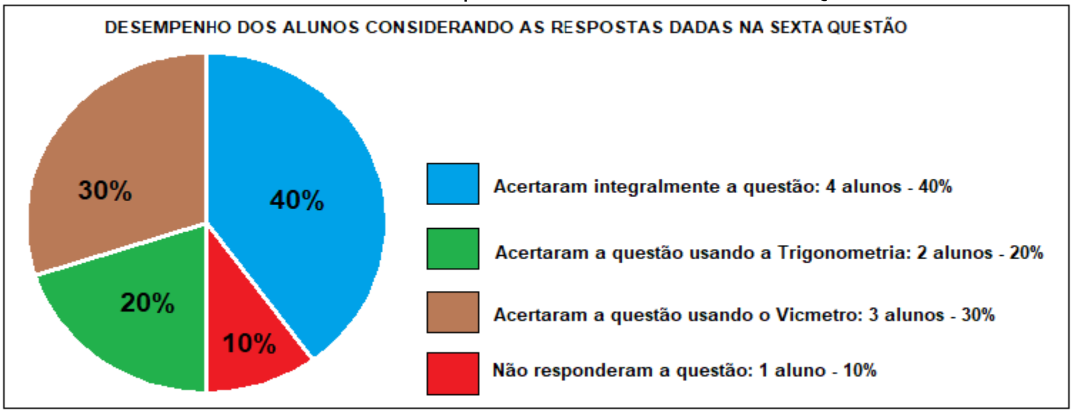
Tabela 6 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 6.

ALUNOS	RESULTADOS
A1	Não respondeu a questão
A2	Acertou integralmente a questão
A3	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A4	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A5	Acertou a questão usando o Vicmetro
A6	Acertou integralmente a questão
A7	Acertou integralmente a questão
A8	Acertou a questão usando o Vicmetro
A9	Acertou integralmente a questão
A10	Acertou a questão usando o Vicmetro

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a sexta questão encontra-se apresentado no Gráfico 6, a seguir:

Gráfico 6 – Desempenho dos alunos na Sexta Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

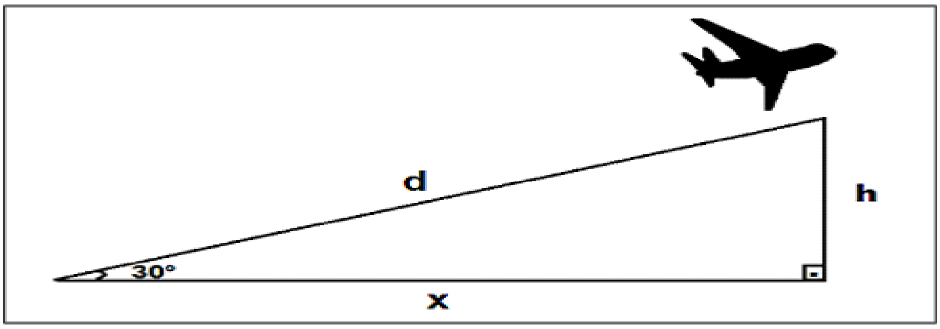
Conforme mostrado no Gráfico 6, um total de 6 alunos acertaram a questão aplicando as razões trigonométricas no triângulo retângulo e 7 alunos acertaram a resolução de maneira experimental, o que reforça a idéia da busca por metodologias alternativas que sirvam de alavanca para o processo de aquisição do conhecimento por parte do aluno.

Sétima Questão

Na sétima questão, o aluno deverá aplicar as relações trigonométricas seno e cosseno para as determinar medidas solicitadas e, posteriormente, deverá verificar que com a utilização do Vicmetro pode-se chegar ao resultado correto necessidade das razões trigonométricas e cálculos aritméticos.

Figura 55 – Sétima questão.

7 - Uma aeronave decola sob um ângulo de 30° em relação à pista, conforme mostrado na figura abaixo:



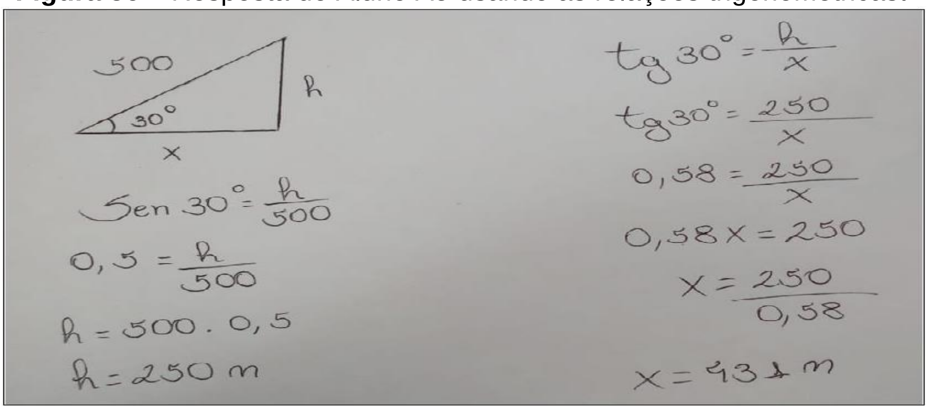
a) Após percorrer uma distância d = 500 metros no ar, nessa angulação, qual a sua altura h em relação à pista e qual a deslocamento x da aeronave na direção horizontal?
Dados: sen30° = 0,5; cos 30° = 0,86 e tg 30° = 0,58.

b) Utilizando o Vicmetro e considerando os valores encontrados para a altura h e para o deslocamento x, mostre que o ângulo formado pelo cateto de medida x e a hipotenusa corresponde a 30°.

Fonte: Fuzileiros Navais Turmas I e II – 2019 (adaptado pelo autor 2020).

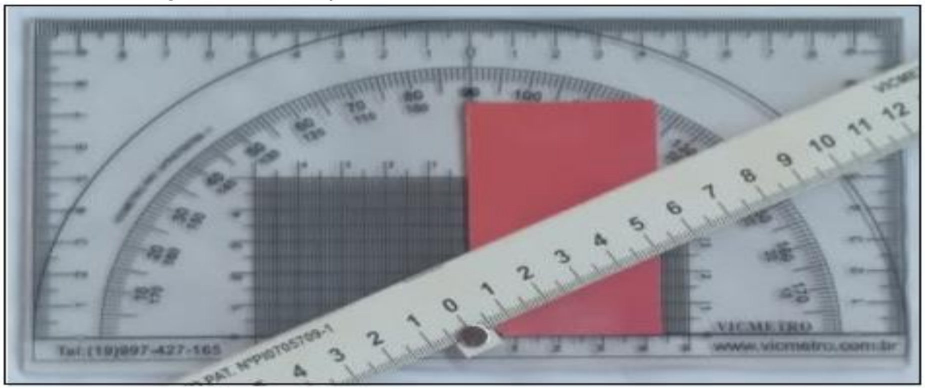
O aluno A5 utilizou as razões trigonométricas adequadas para a solução da questão, no caso as relações de seno e tangente, mostrado na Figura 56. Na sequência, confirmou os valores encontrados algébricamente com o auxílio do Vicmetro, conforme mostra a Figura 57 :

Figura 56 – Resposta do Aluno A5 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

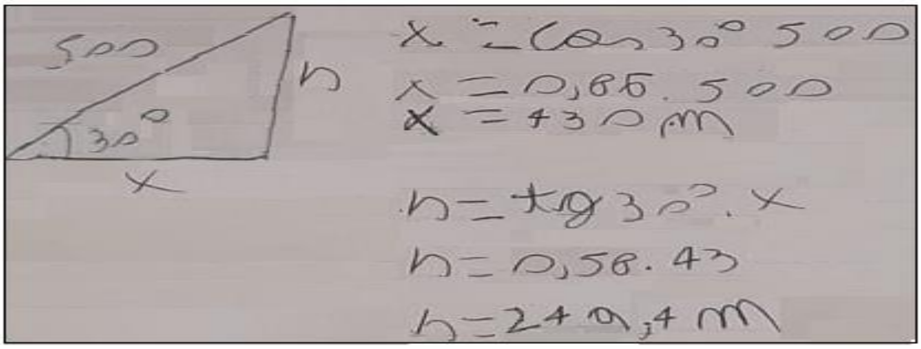
Figura 57 - Resposta do Aluno A3 usando o Vicmetro



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

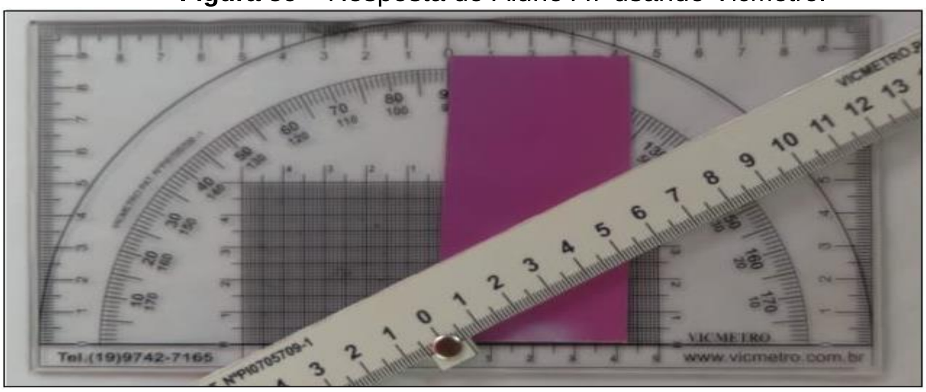
A Figura 58 mostra que, aplicando corretamente as razões trigonométricas, o aluno A7 encontrou como respostas x = 430 m e h = 249,4 m. Experimentalmente, a medida encontrada para a altura do avião foi de h = 250 m conforme mostrado na Figura 59, medida possível pois como explicou o inventor do instrumento, existe uma diferença muito pequena provavelmente imperceptível para os alunos, de modo que não se pode considerar que este aluno errou a questão.

Figura 58 – Resposta do Aluno A7 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

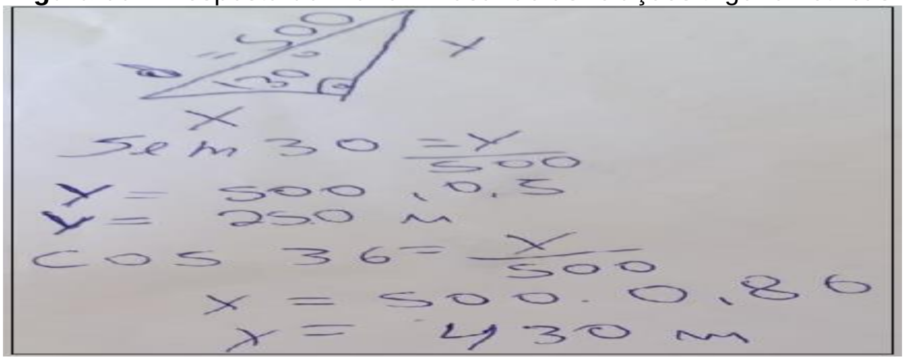
Figura 59 – Resposta do Aluno A7 usando Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

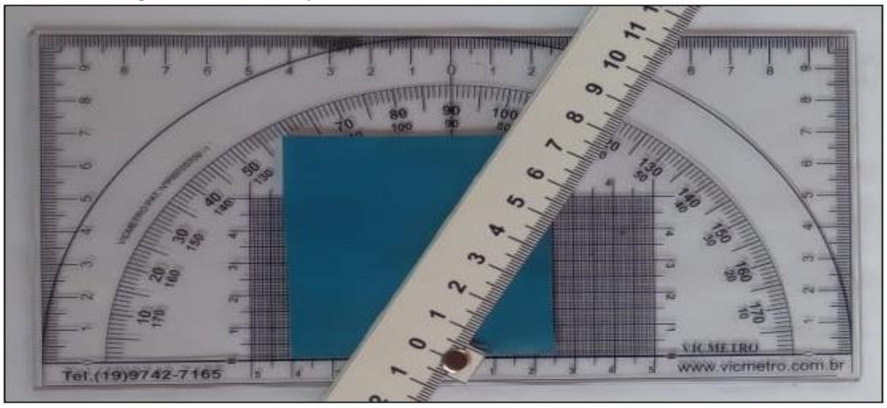
O aluno A1 resolveu de modo correto a questão utilizando as relações trigonométricas, conforme mostrado na Figura 60. Na resolução experimental, entretanto, o aluno A1 utilizou o ângulo de 60° e, dessa forma, errou a questão usando o Vicmetro, pois encontrou a medida da altura como sendo 430 m e a medida de 250 m para a o alcance, conforme mostrado na Figura 61:

Figura 60 – Resposta do Aluno A1 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 61 – Resposta do aluno A1 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos participantes em relação a sétima questão está mostrado na Tabela 7:

Tabela 7 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 7.

ALUNOS	RESULTADOS
A1	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A2	Acertou integralmente a questão
A3	Não respondeu a questão
A4	Não respondeu a questão
A5	Acertou integralmente a questão

ALUNOS	RESULTADOS
A6	Acertou a questão usando o Vicmetro
A7	Acertou integralmente a questão
A8	Acertou a questão usando o Vicmetro
A9	Acertou integralmente a questão
A10	Acertou a questão usando o Vicmetro

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O desempenho dos coletivo alunos em relação a sétima questão encontra-se apresentado no Gráfico 7, a seguir:

Gráfico 7 – Desempenho dos alunos na Sétima Questão.

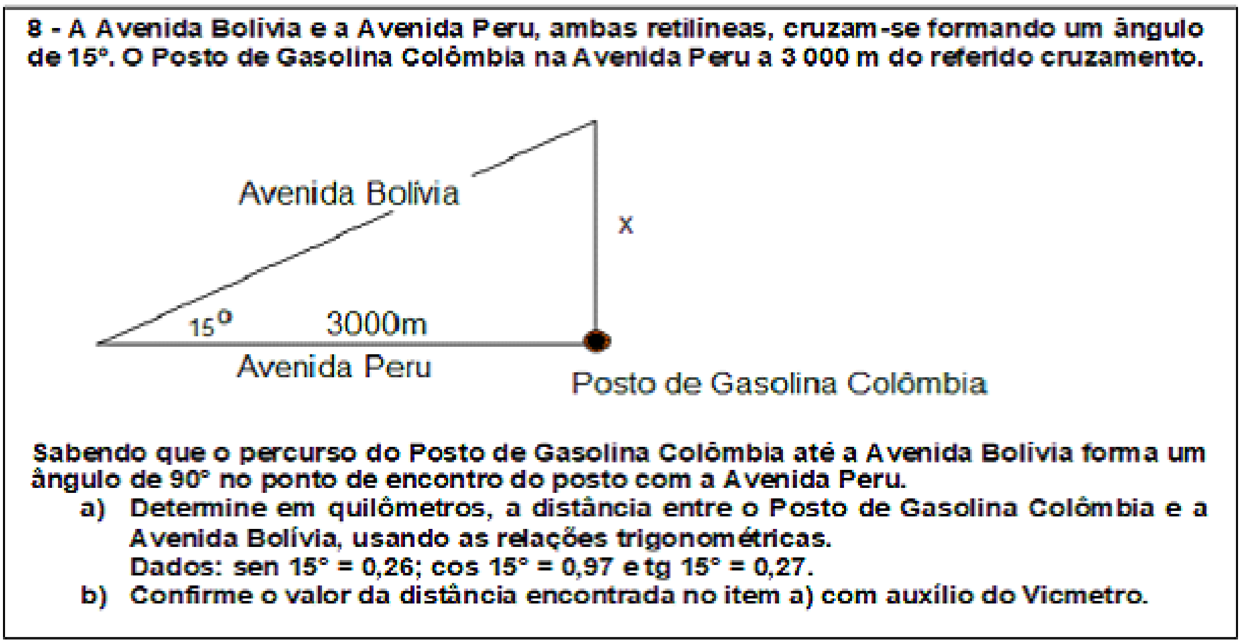
Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

De acordo com os dados apresentados pela Tabela 7 e Gráfico 7, um total de 5 alunos resolveram a questão aplicando as relações trigonométricas e 7 alunos resolveram a questão corretamente através do Vicmetro. Este resultado evidencia que as novas práticas pedagógicas de ensino, denominada Matemática experimental, por intermédio de materiais concretos, manipulativos é extremamente importante para a construção do conhecimento. Colocar a experimentação na realidade da sala de aula é um grande passo de estímulo para a pesquisa e para a formação de cidadãos conscientes, construtivos e críticos.

Oitava Questão

Em relação a oitava questão, o aluno ao analisar a figura, deverá aplicar a relação trigonométrica tangente para obter o resultado correto e, posteriormente, com o auxílio do Vicmetro, deverá obter o resultado sem necessidade de empregar as razões trigonométricas.

Figura 62 – Oitava questão.



8 - A Avenida Bolívia e a Avenida Peru, ambas retilíneas, cruzam-se formando um ângulo de 15°. O Posto de Gasolina Colômbia na Avenida Peru a 3 000 m do referido cruzamento.

Sabendo que o percurso do Posto de Gasolina Colômbia até a Avenida Bolívia forma um ângulo de 90° no ponto de encontro do posto com a Avenida Peru.

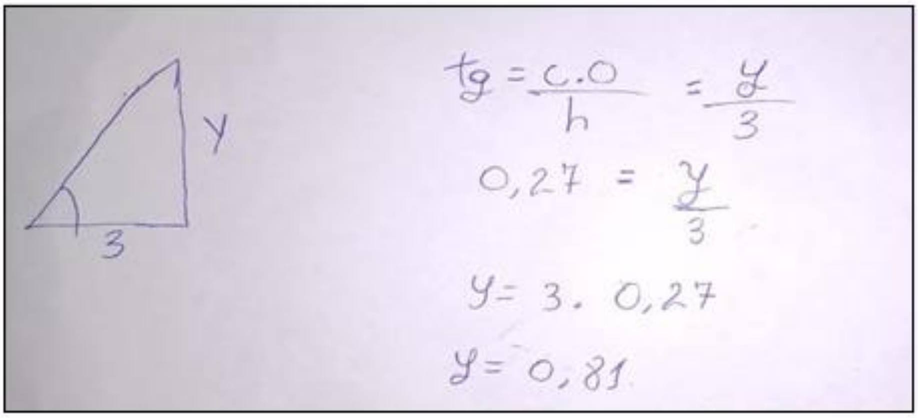
a) Determine em quilômetros, a distância entre o Posto de Gasolina Colômbia e a Avenida Bolívia, usando as relações trigonométricas.
Dados: sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97 e tg 15° = 0,27.

b) Confirme o valor da distância encontrada no item a) com auxílio do Vicmetro.

Fonte: CEFET-PR, 2015 (adaptado pelo autor, 2020).

O aluno A10 resolveu acertadamente a questão, fazendo inicialmente a mudança de unidade de comprimento de metro para quilômetro e, posteriormente, identificando e aplicando a relação tangente, conforme mostrado na Figura 63, abaixo:

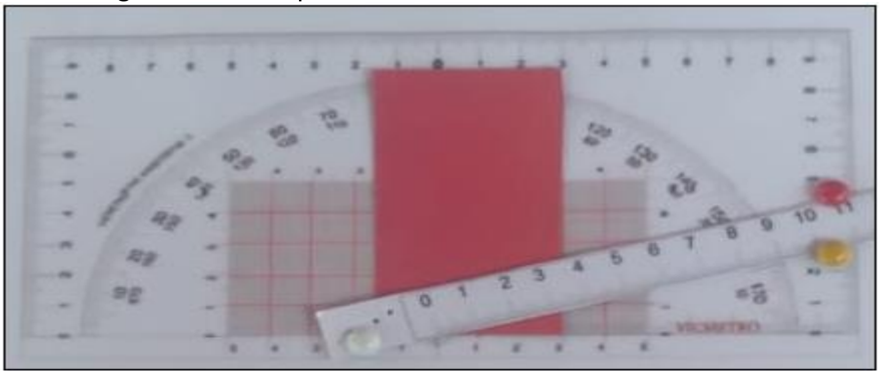
Figura 63 – Resposta do Aluno A10 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Na sequência, o aluno A10 confirmou experimentalmente com o auxílio do Vicmetro os valores determinados algebricamente, conforme mostrado nas Figura 64, abaixo:

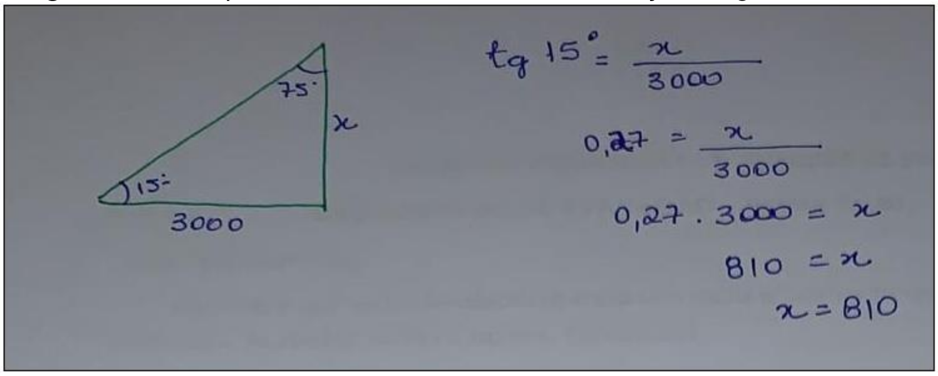
Figura 64 - Resposta do aluno A10 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

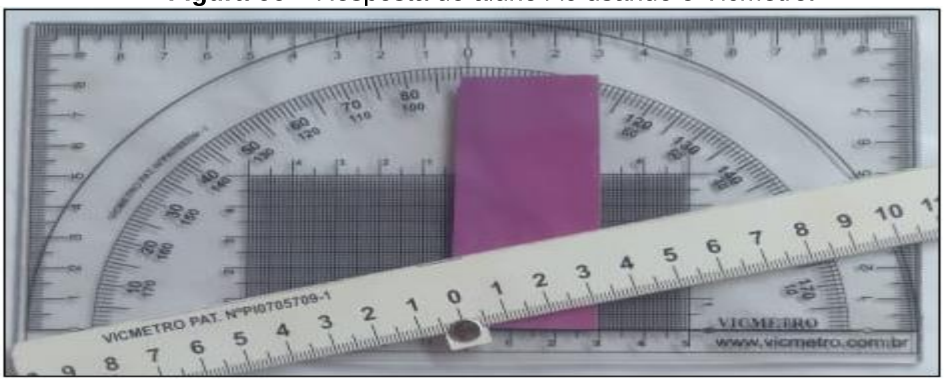
Por seu turno, o aluno A6 não efetuou inicialmente a conversão da distância de 3000 m para quilômetros e dessa forma, obteve a resposta de 810 m, que estaria correta se o comando da questão não solicitasse a resposta em quilômetros. Em relação ao Vicmetro, o aluno encontrou corretamente a medida de 0,81 para a distância entre o Posto de Gasolina Colômbia e a Av. Bolívia, conforme mostrado nas Figuras 65 e 66, abaixo:

Figura 65 – Resposta do Aluno A6 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

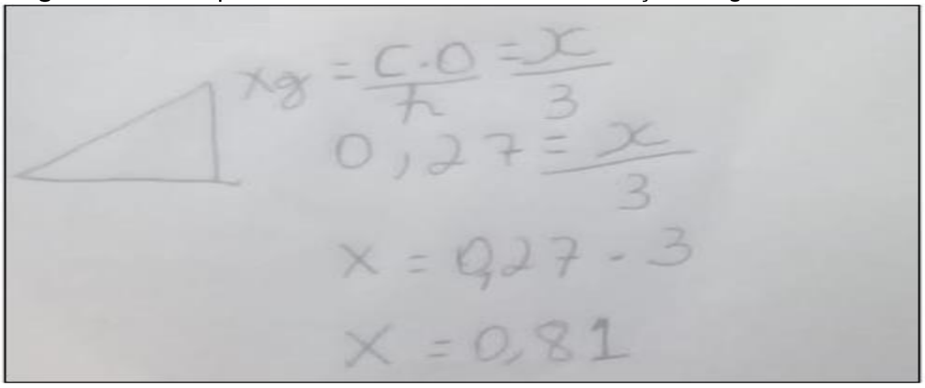
Figura 66 – Resposta do aluno A6 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A4 resolveu algebricamente a questão de forma correta, identificando e aplicando a relação tangente e também fez a mudança de unidade de comprimento adequada. Entretanto, quando do momento da resolução com o Vicmetro, usou a medida fornecida na questão para o cateto oposto (3000 m = 3 km) como valor da medida do cateto adjacente e utilizou um ângulo de 30° em detrimento do ângulo de 15° dado na questão, errando a solução experimental, conforme mostrado nas Figuras 67 e 68, a seguir:

Figura 67 – Resposta do Aluno A4 usando as relações trigonométricas.



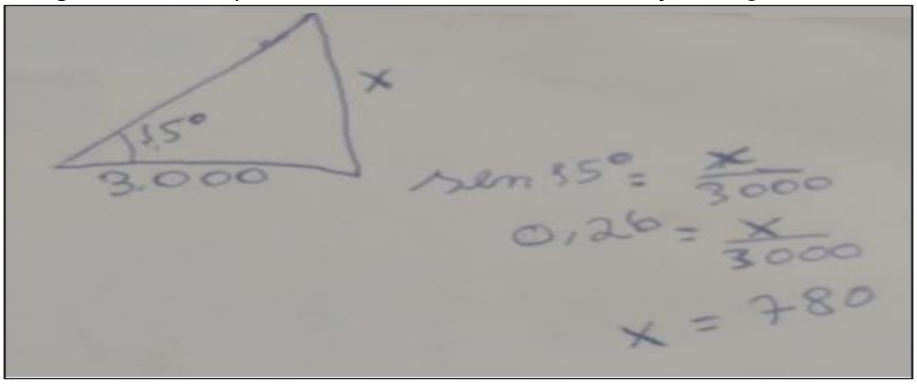
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 68 – Resposta do aluno A4 usando o Vicmetro.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

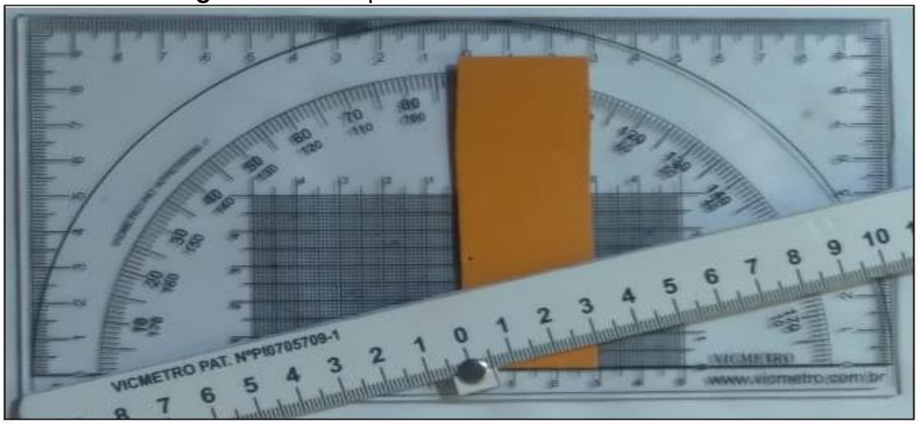
O aluno A2 na sua resolução, não fez a mudança da unidade de comprimento e identificou equivocadamente que a relação adequada era a relação seno, quando a relação correta seria a relação tangente. Ainda assim, usou corretamente a razão cateto oposto/cateto adjacente igualando-a ao valor dado para o seno de 15° resultando em uma distância de 780 m. Quando tentou resolver a questão com auxílio do Vicmetro, utilizou a distância de 3000 m (3 km) como se fosse medida da hipotenusa e também errou a experimentação, conforme mostrado nas Figuras 69 e 70, abaixo:

Figura 69 – Resposta do Aluno A2 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 70 – Resposta do aluno A2 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos em relação a oitava questão encontra-se apresentado no Tabela 8, a seguir:

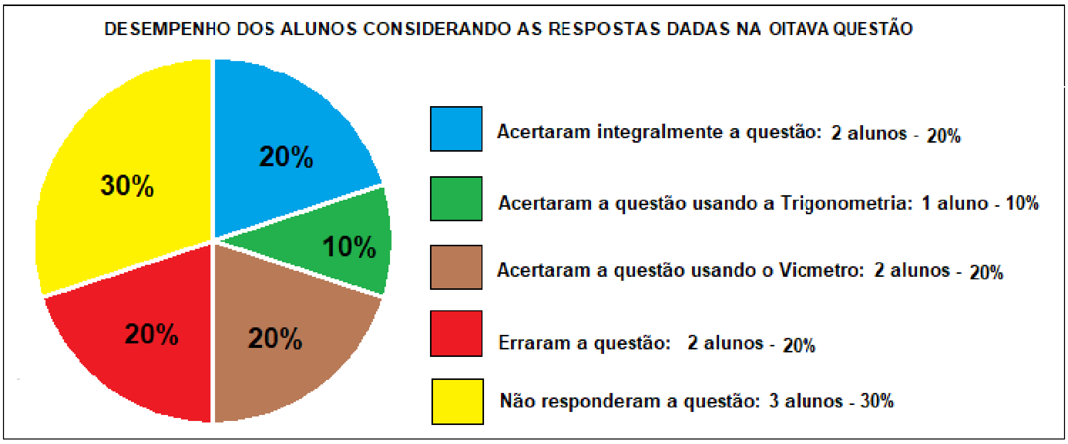
Tabela 8 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 8.

ALUNOS	RESULTADOS
A1	Não respondeu a questão
A2	Errou a questão
A3	Não respondeu a questão
A4	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A5	Acertou a questão usando o Vicmetro
A6	Acertou a questão usando o Vicmetro
A7	Acertou integralmente a questão
A8	Não respondeu a questão
A9	Errou a questão
A10	Acertou integralmente a questão

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a oitava questão encontra-se apresentado no Gráfico 8, a seguir:

Gráfico 8 – Desempenho dos alunos na Oitava Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

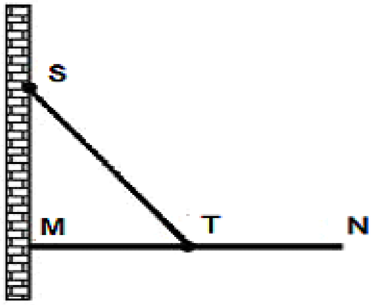
De acordo com os dados apresentados pela Tabela 8 e Gráfico 8, um total de 3 alunos resolveram a questão aplicando as relações trigonométricas e 4 alunos resolveram a questão corretamente através do Vicmetro. Este resultado reforça o entendimento do pesquisador acerca da importância de se trabalhar novas formas de ensino. Na Matemática, o experimento é um aliado do professor na busca de um educação matemática mais qualificada, pois quando o aluno manipula os objetos, ele interage com os materiais e passa a ter em suas mãos a oportunidade de reduzir um problema teórico a um problema prático.

Nona Questão

Baseada em questão aplicada na prova de Matemática do ENEM 2017, a nona questão solicita aos alunos que encontrem a distância entre os pontos M e S localizados em uma parede vertical. O aluno, com base na figura dada na questão, deverá aplicar a relação trigonométrica conveniente, no caso a tangente obter o resultado corretamente. E com a utilização do Vicmetro, o aluno deverá alcançar o resultado sem necessidade da aplicação das relações trigonométricas.

Figura 71 – Nona questão.

9 - A figura abaixo mostra uma viga MN de 8 m de comprimento, presa no ponto M a uma parede vertical. A viga é mantida na posição horizontal pelo cabo de aço ST de modo que S está fixo na parede, MS é vertical e T encontra-se no meio da viga MN. Sabe-se que o ângulo MTS mede exatamente 37°.



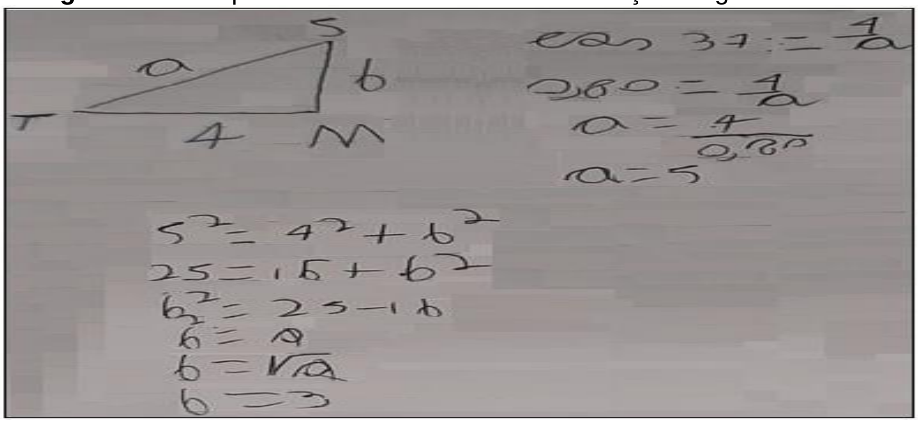
a) Determinar a distância entre os pontos M e S, usando as relações trigonométricas. Dados: sen 37° = 0, 60; cos 37° = 0,80 e tg 37° = 0,75.

b) Determine experimentalmente o comprimento entre os pontos M e S, com auxílio do Vicmetro.

Fonte: ENEM, 2017 (adaptado pelo autor, 2020).

Dentre os alunos que responderam, destaca-se que o aluno A7 resolveu a questão usando, além das relações trigonométricas, também as relações métricas no triângulo retângulo, no caso o Teorema de Pitágoras, conforme mostrado na Figura 72, a seguir:

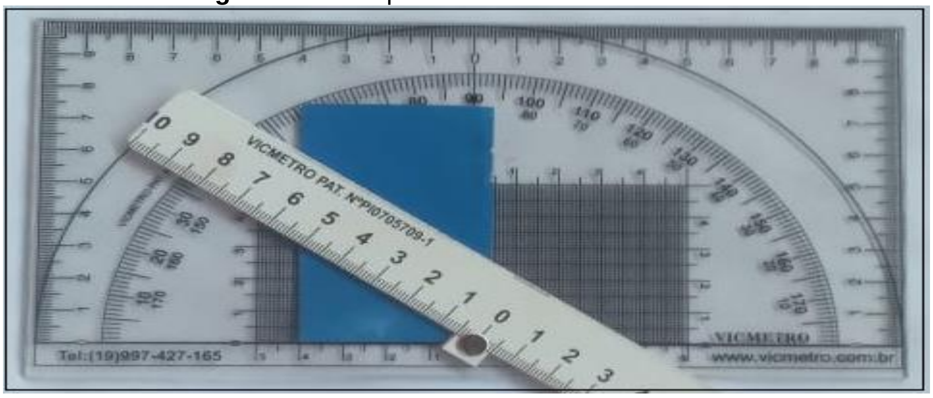
Figura 72 – Resposta do aluno A7 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Posteriormente, o aluno A7 confirmou experimentalmente com o Vicmetro o resultado obtido algebricamente, inclusive usando a rotação anti-horária da régua giratória do Vicmetro, conforme demonstrado na Figura 73, abaixo:

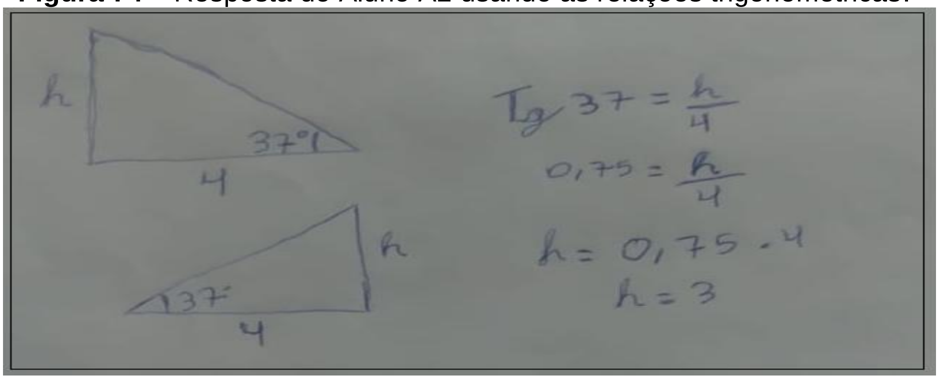
Figura 73 – Resposta do aluno A7 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A2, usando as razões trigonométricas, identificou e aplicou corretamente a relação trigonométrica intrínseca a esta questão, no caso a relação tangente. Entretanto, quando da verificação usando o Vicmetro, o aluno A2 cometeu um pequeno erro, pois calibrou a régua giratória incorretamente no ângulo de 39° e, dessa forma, o comprimento do segmento MS sofreu uma pequena variação, marcando experimentalmente a medida de 3,2 cm, conforme mostrado nas Figura 74 e 75, abaixo:

Figura 74 – Resposta do Aluno A2 usando as relações trigonométricas.



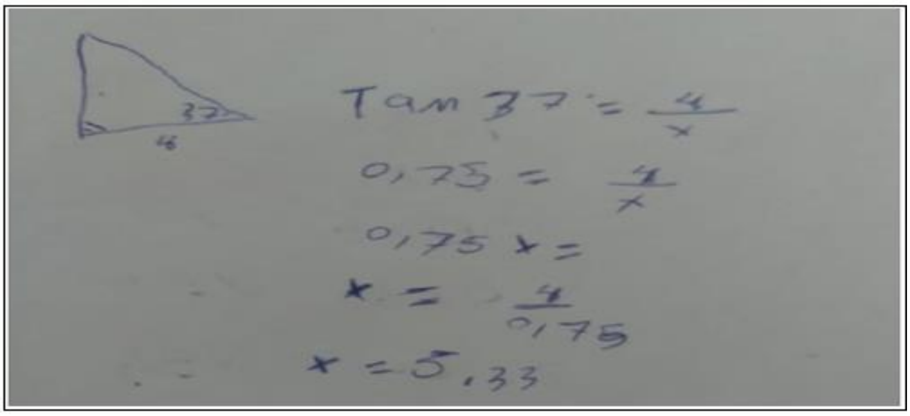
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 75 – Resposta do aluno A2 usando o Vicmetro.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A3 conseguiu identificar que a relação a ser aplicada era a tangente, contudo, inverteu fórmula da relação, usando a razão cateto adjacente/cateto oposto e consequentemente, errando o resultado do segmento MS, conforme mostrado na Figura 76 a seguir:

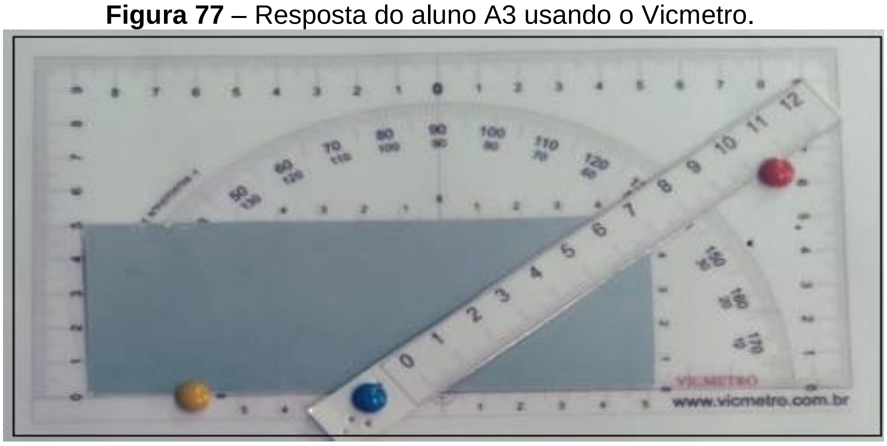
Figura 76 – Resposta do Aluno A3 usando as relações trigonométricas.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O aluno A3 também errou quando da verificação experimental do resultado obtido com as razões trigonométricas, pois considerou como cateto oposto a medida MT de 4 cm e dessa forma, encontrou que MT = MS = 4 cm, conforme mostrado na Figura 77, abaixo:

Figura 77 – Resposta do aluno A3 usando o Vicmetro.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

O desempenho individual dos alunos em relação a nona questão encontra-se apresentado no Tabela 9, a seguir:

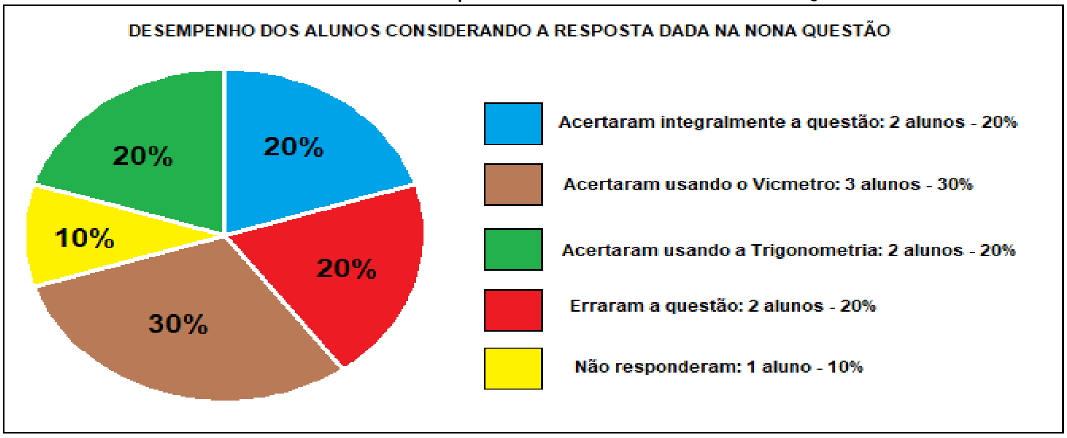
Tabela 9 – Desempenho individual dos alunos em relação a questão 9.

ALUNOS	RESULTADOS
A1	Não respondeu a questão
A2	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A3	Errou a questão
A4	Não respondeu a questão
A5	Acertou integralmente a questão
A6	Acertou a questão usando o Vicmetro
A7	Acertou integralmente a questão
A8	Acertou a questão usando o Vicmetro
A9	Acertou a questão usando as razões trigonométricas
A10	Acertou a questão usando o Vicmetro

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O desempenho coletivo dos alunos em relação a nona questão encontra-se apresentado no Gráfico 9, a seguir:

Gráfico 9 – Desempenho dos alunos na Nona Questão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Conforme mostrado no Gráfico 9, apenas dois alunos acertaram toda a questão, enquanto 4 alunos conseguiram resolver algebricamente e 5 alunos acertaram a resolução de maneira experimental. Esse pequeno predomínio de acertos da solução experimental sobre a solução algébrica evidencia que, quando o professor consegue trazer adequadamente a experimentação para a sala de aula, o aluno responde com uma melhor compreensão do conteúdo ensinado.

Pergunta Final

Finalmente, após as atividades que envolviam cálculos aritméticos através das Relações Trigonométricas e a confirmação dos resultados como auxílio do Vicmetro, os alunos responderam ao seguinte questionamento:

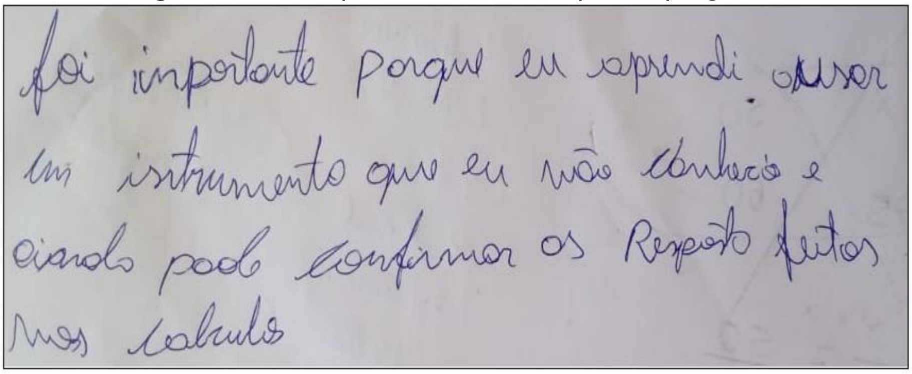
Figura 78 – Pergunta Final

10 PERGUNTA FINAL - "O uso do Vicmetro facilitou seu entendimento e sua aprendizagem em relação ao conteúdo Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo?".

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

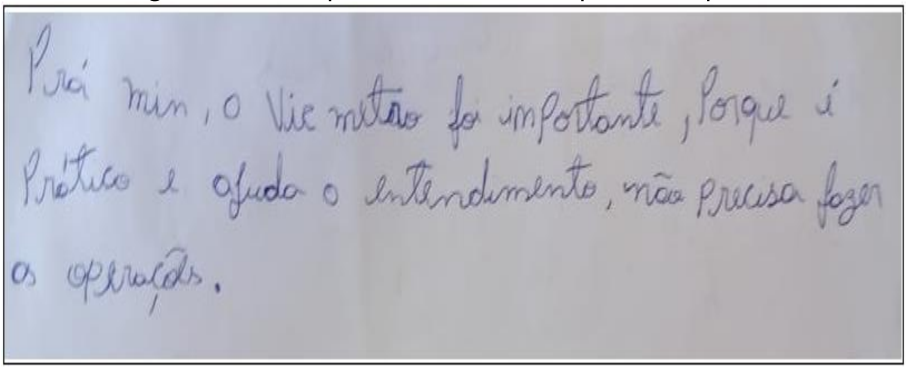
As respostas dadas por alguns alunos encontram-se ilustradas nas Figuras 33, Figura 34 e Figura 35, respectivamente:

Figura 79 – Resposta do Aluno A1 para a pergunta final.



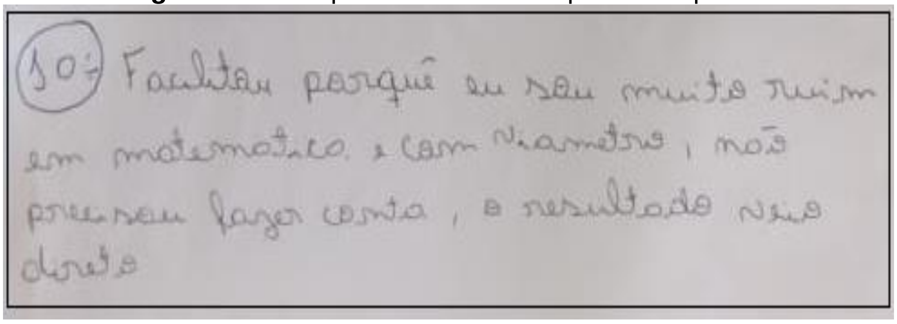
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 80 – Resposta do Aluno A10 para a resposta final.



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Figura 81 – Resposta do Aluno A9 para a resposta final.


10: Facilitou porquê eu sou muito ruim em matematica e com Vicmetro, não precisou fazer conta, o resultado veio direto

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em atenção as respostas dadas pelos alunos acerca da importância da utilização do Vicmetro, constata-se que a maioria acha que o instrumento é um facilitador para a resolução de questões que, anteriormente, somente eram resolvidas por intermédio das Relações Trigonométricas no triângulo retângulo. Considerando que quase a totalidade dos alunos tem profundas dificuldades relacionadas ao cálculo aritmético, o emprego experimental do Vicmetro facilitou a compreensão do aluno em relação a este conteúdo matemático.

De uma maneira geral, os alunos apresentam muitas dúvidas de entendimento quanto aos conceitos e definições das razões e das funções trigonométricas no triângulo retângulo. Foi bastante perceptível a utilidade do Vicmetro na soluções de diversos problemas cotidianos, transformando-se em uma nova estratégia de construção do conhecimento e tornando a aprendizagem mais significativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história, o ensino da Matemática vem sofrendo significativas mutações. Durante muito tempo, a preocupação principal em relação a estes avanços, teóricos ou práticos, estavam concentrados em suas aplicações na contribuição para o progresso do conhecimento da humanidade.

Com o passar do tempo, além da necessidade de difusão do conhecimento para utilização e usufruto por todos, surgiu a preocupação com o modo como esses conhecimentos são ministrados ao alunado. Isto é, como favorecer aos professores a adoção de uma prática pedagógica eficiente, eficaz e que permita a todos o acesso ao conhecimento.

Atualmente, na maioria das escolas, a Matemática é ensinada de maneira formal e abstrata. É de extrema relevância que o professor reflita sobre sua prática pedagógica, sobre a metodologia que utiliza confirmando se é a mais adequada para cada conteúdo ministrado, para que não aconteça apenas o repasse dos conteúdos, mas sobretudo, para que a aprendizagem se efetive.

A realização da Oficina mostrou que o Vicmetro, ou qualquer outro instrumento didático manipulável, pode e deve estar integrado no âmbito escolar, principalmente pela necessidade de se encontrar estratégias educacionais que facilitem a absorção do conhecimento pelos alunos. Sistematicamente, o ensino da Matemática é um ensino tradicional, metódico, repetitivo, desprovido de formas experimentais e as pouquíssimas práticas escolares laboratoriais ocultam a riqueza do ensino experimental.

Aprender determinados conteúdos na sua essência é tão importante quanto prazeroso, e no mundo contemporâneo em que vivemos, o professor é personagem central que pode e deve fazer a diferença, criando, mostrando o viés lúdico da Matemática que, curiosamente transforma, fascina e direciona a sociedade para a cultura da exatidão, da organização, da responsabilidade e da justiça social. Podemos ser melhores, muitos melhores como seres humanos, através da Matemática.

Assim, conclui-se que é de suma importância o surgimento de uma visão empírica do conhecimento no ambiente escolar, criando um elo firme que contextualize o ensinamento ministrado, as ferramentas utilizadas em sala de aula com a experiência prática do cotidiano do aluno, com sua vivência, possibilitando um crescimento harmônico, instrumentalizando-o de fato na resolução de problemas, inclusive de sobrevivência, e ensejando um aprendizado útil a sua cidadania, a sua vida. E neste contexto, o Vicmetro foi, para os alunos que participaram da Oficina, uma espécie de ponte, parte integrante e imprescindível na viabilização, construção e intersecção da Matemática com os múltiplos vieses da vida na comunidade, onde a utilização do conhecimento é importante e se faz presente para garantir a segurança, a união e a participação de todos para uma vida mais digna.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. T. de. Trigonometria: Da teoria às aplicações. Cajazeiras: IFPB, 2019.

BOYER, C. C. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **E. E. Rivanda de Nazare da Silva Guimarães**. Disponível em <https://www. qedu.org.br/escola/23396-ee-rivanda-nazare-da-s-guimaraes / compare>. Acesso em Janeiro de 2021.

BRASILIT. **Modelos de Telhados**. Disponível em <www.brasilit.com.br>. Acesso em 17/08/2020.

CEFET/PR – CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA. **Prova 2015**. Disponível em < http://www.funcefet.cefetpr.br>. Acesso em Janeiro de 2021.

CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática**: Teoria e Contexto. Brasil: Saraiva, 2012.

COSTA, W. R. J.; SOUZA, F. S. **O Software GeoGebra e a Construção do conceito das relações**: Seno, Cosseno e Tangente. São Paulo: Revista Educação Matemática em Revista, 2011.

CUNHA, V. A. **Régua Trigonométrica**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.** Ministério da Educação. Disponível em: <https: // brainly. com.br /tarefa /10902227. Acesso em Janeiro de 2021.

FUZILEIROS NAVAIS TURMAS I E II. **Prova 2019**. Disponível em <https://www.exercicios – resolvidos . com /2020 /01 /exercicios -resolvidos-sobre-relacoes.html>. Acesso em Janeiro de 2021.

GERDES, P. **A ciência Matemática**. Moçambique: Núcleo Editorial, 1981.

GOOGLE. **Aplicativo Vicmetro Transferidor & Régua**. Disponível em <https:www//m.apkpure.com/br /vicmetro- protractor-ruler /com. applab. pythagoras. vicmetro>. Acesso em Fevereiro de 2021.

GOOGLE. Escola Rivanda de Nazare Guimarães. Disponível em <https://www.facebook.com/pages/Escola%20Rivanda%20Nazar%C3%A9/453513461402845/photos/>. Acesso em Janeiro de 2021.

GOUVEIA, R. Teorema de Tales: exercícios. Disponível em <http: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-tales-exercicios/2016. Acesso em 15/02/2021.

MILONE, A. C. **Introdução à Astronomia e Astrofísica**. São José dos Campos: INPE, 2018.

MURARO, A. **Minimanual de pesquisa Matemática**.Uberlândia: Claranto, 2004.

OBMEP. **Trigonometria do triângulo retângulo**. Disponível em <http: // clubes.obmep.org.br /blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo /2015. Acesso em 15/05/2020.

OLIVEIRA, R. R. de. **Teorema de Tales**. Disponível em: https://brasilescola. uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm. Acesso em 11/02/2021.

PAIVA, M. **Matemática**, Volume único, Ed; São Paulo: Moderna, 2003.

PARRA FILHO, V. **Trigonometria**: teoria e prática enfim juntas. Campinas: SENAI, 2010.

PEREIRA, M. M. **Produção coletiva de objetivo de aprendizagem**: Construindo Relações Trigonométricas. Belo Horizonte: SBM, 2007.

PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. **Geometria Básica**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

PIRES, C. E, M. **O Ensino da Trigonometria por meio das aulas práticas**. Campos dos Goytacazes: UENF, 2016.

SILVA, A. L. V. T**rigonometria**: Aprendendo Trigonometria com o Tabulae. Belo Horizonte: SBM, 2007.

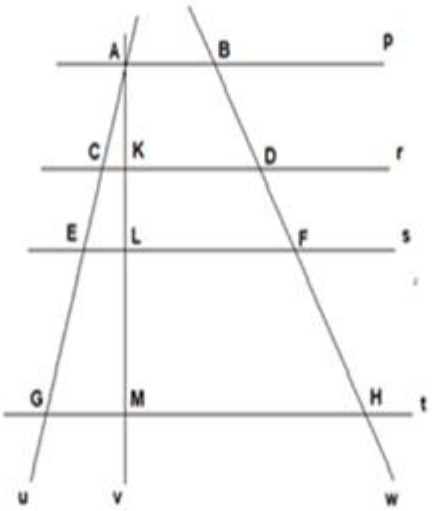
SILVA, L. P. M. **Ângulos Notáveis**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/angulos-notaveis.htm. Acesso em 10 de fevereiro de 2021.

SONZA, J. P. D. S. **Ensinando Trigonometria**. Disponível em <https: //monografias. brasilescola.uol.com.br/matematica-2015/ensinando-trigonometria.htm.> Acesso em 20/06/2020.

ANEXO I

LISTA DE ATIVIDADES

1 - Com base na figura apresentada abaixo e aplicando os conhecimentos acerca do Teorema de Tales, julgue os itens a seguir em Certo (C) ou Errado (E):



a) $\frac{AC}{BD} = \frac{EG}{DF}$ (C) (E)

b) $\frac{EG}{FH} = \frac{CE}{DF}$ (C) (E)

c) $\frac{AG}{CE} = \frac{BH}{DF}$ (C) (E)

d) $\frac{AK}{KM} = \frac{BD}{DH}$ (C) (E)

e) $\frac{AL}{LM} = \frac{BD}{FH}$ (C) (E)

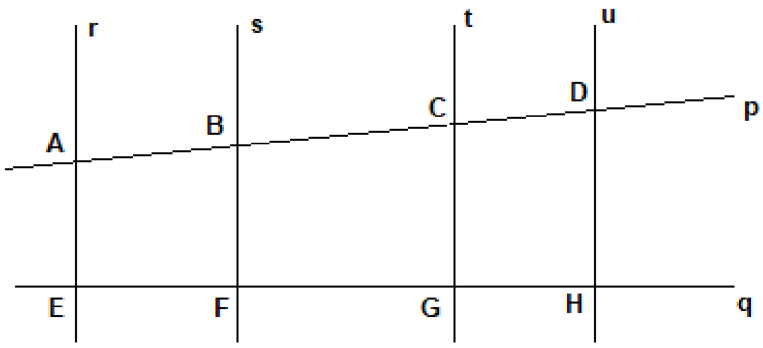
f) $\frac{CE}{KL} = \frac{AE}{AM}$ (C) (E)

g) $\frac{KL}{CE} = \frac{AM}{AG}$ (C) (E)

h) $\frac{BF}{DH} = \frac{AC}{EG}$ (C) (E)

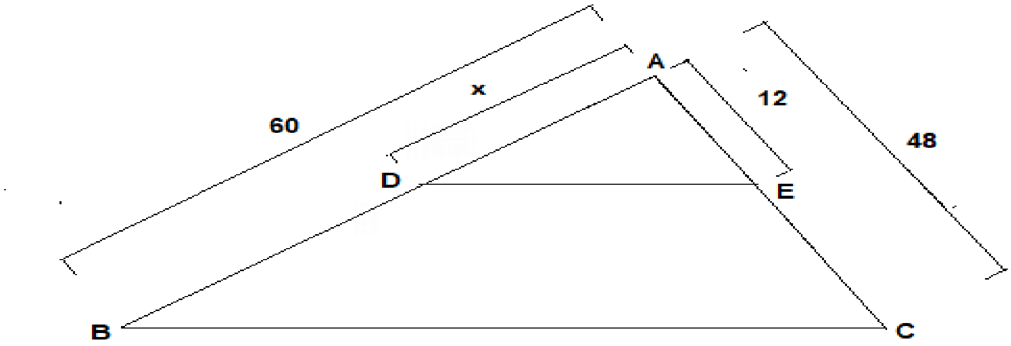
2 - Na figura abaixo, as retas r, s, t e u são pararalelas e são interceptadas pelas retas transversais p e q. As medidas dos segmentos formados são:

$\overline{AB} = 3$: $\overline{BC} = x$; $\overline{CD} = 8$; $\overline{EF} = 12$; $\overline{FG} = 20$ e $\overline{GH} = y$.



Nestas condições, determine o valor de $\overline{AC} + \overline{FH}$

3 - Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ conforme mostrados na imagem abaixo:

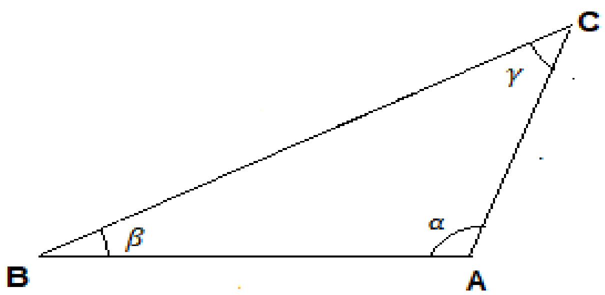


Com base nos dados apresentados, determine o valor de x.

4 - Em uma mesa de sinuca, encontram-se dispostas cinco bolas conforma mostra a figura abaixo.

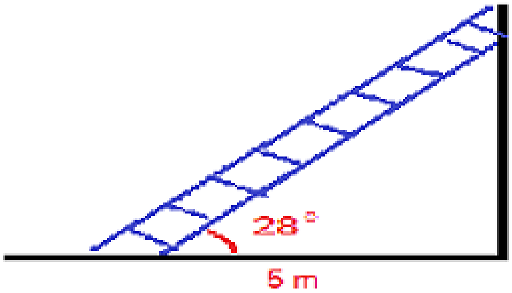
A reta formada entre as bolas 1 e 2 é paralela a reta formada entre as bolas 4 e 5.
Com base nas medidas apresentadas, determinar a distância entre as bolas 1 e 3.

5 - Considere o triângulo ABC representado na figura abaixo:



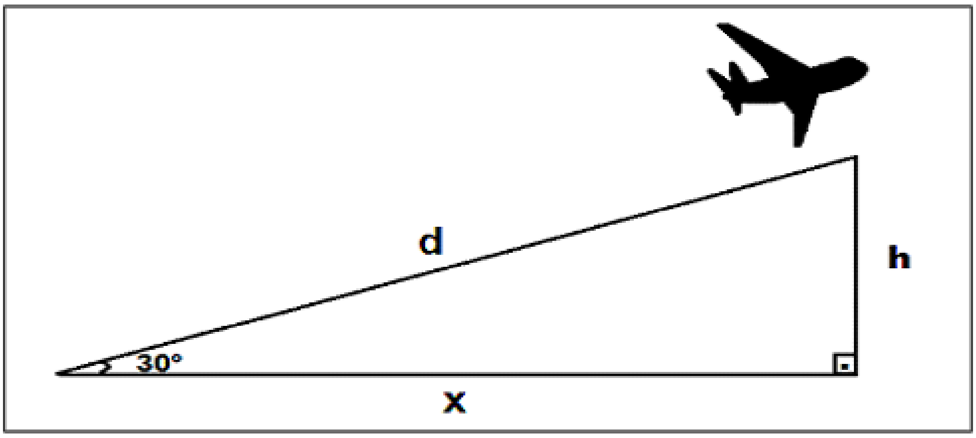
a) Sendo $\overline{AB} = 24$, $\overline{AC} = 7$ e $\overline{BC} = 25$, podemos afirmar que o triângulo ABC é retângulo? Justifique.
b) Em sendo o triângulo ABC um triângulo retângulo, determine usando as razões trigonométricas os valores de seno, cosseno e tangente relativos aos ângulos agudos do referido triângulo.

6 - Uma escada está apoiada em uma parede vertical e sua base de apoio dista 5m desta parede.



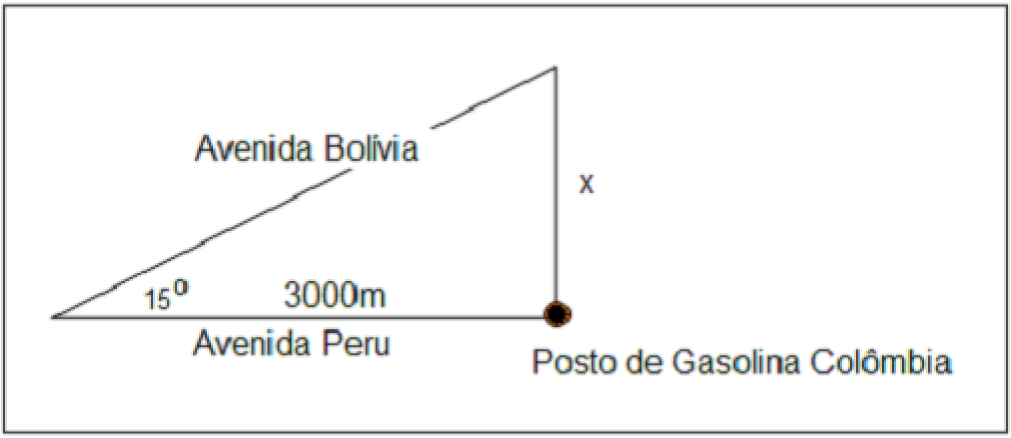
a) Calcule o comprimento da escada usando as relações trigonométricas;
Dados: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53.
b) Confirme o resultado encontrado com o auxílio do Vicmetro.

7 - Uma aeronave decola sob um ângulo de 30° em relação à pista, conforme mostrado na figura abaixo:



a) Após percorrer uma distância d = 500 metros no ar, nessa angulação, qual a sua altura h em relação à pista e qual a deslocamento x da aeronave na direção horizontal?
Dados: sen30° = 0,5; cos 30° = 0,86 e tg 30° = 0,58.
b) Utilizando o Vicmetro e considerando os valores encontrados para a altura h e para o deslocamento x, mostre que o ângulo formado pelo cateto de medida x e a hipotenusa corresponde a 30°.

8 - A Avenida Bolívia e a Avenida Peru, ambas retilíneas, cruzam-se formando um ângulo de 15°. O Posto de Gasolina Colômbia na Avenida Peru a 3 000 m do referido cruzamento.

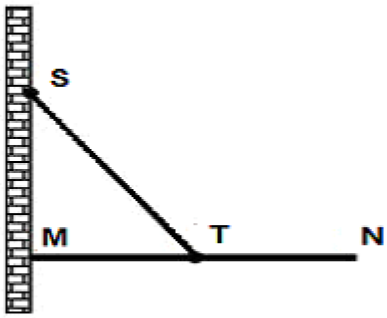


Sabendo que o percurso do Posto de Gasolina Colômbia até a Avenida Bolívia forma um ângulo de 90° no ponto de encontro do posto com a Avenida Peru.

a) **Determine em quilômetros, a distância entre o Posto de Gasolina Colômbia e a Avenida Bolívia, usando as relações trigonométricas.**
Dados: sen 15° = 0,26; cos 15° = 0,97 e tg 15° = 0,27.

b) **Confirme o valor da distância encontrada no item a) com auxílio do Vicmetro.**

9 - A figura abaixo mostra uma viga MN de 8 m de comprimento, presa no ponto M a uma parede vertical. A viga é mantida na posição horizontal pelo cabo de aço ST de modo que S está fixo na parede, MS é vertical e T encontra-se no meio da viga MN. Sabe-se que o ângulo MTS mede exatamente 37°.



a) **Determinar a distância entre os pontos M e S, usando as relações trigonométricas.**
Dados: sen 37° = 0, 60; cos 37° = 0,80 e tg 37° = 0,75.

b) **Determine experimentalmente o comprimento entre os pontos M e S, com auxílio do Vicmetro.**

10 PERGUNTA FINAL - "O uso do Vicmetro facilitou seu entendimento e sua aprendizagem em relação ao conteúdo Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo?".