UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCO AURÉLIO SILVA DE AQUINO

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

São Luís – MA
2021

MARCO AURÉLIO SILVA DE AQUINO

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Maranhão - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa.

São Luís – MA
2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

AQUINO, MARCO AURÉLIO SILVA DE.
MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES / MARCO AURÉLIO SILVA DE AQUINO. - 2021.
98 p.

Orientador(a): JOSÉ SANTANA CAMPOS COSTA.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós - graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional / ccet, Universidade Federal do Maranhão, UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO, 2021.

1. DETERMINANTES. 2. MATRIZES. 3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO. 4. SISTEMAS LINEARES. I. COSTA, JOSÉ SANTANA CAMPOS. II. Título.

MARCO AURÉLIO SILVA DE AQUINO

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Maranhão - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

____

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Sousa
Universidade Federal do Piauí - UFPI

____

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

São Luís – MA, __ de março de 2021

Aos meus pais Marineide e Aquino.
À minha esposa Roseane e meu filho Mateus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me conceder força e perseverança durante toda a minha trajetória acadêmica e profissional.

Aos meus pais Marineide e Raimundo Aquino pelos ensinamentos, carinho e princípios transmitidos.

À minha esposa Roseane e meu filho Mateus pelo incentivo, força e compreensão durante as longas jornadas de estudos.

Aos meus irmãos Renata e Mauro pelo incentivo e força nos momentos difíceis.

Ao meu orientador professor Dr. José Santana Costa, sempre disponível e paciente, aconselhando e direcionando o melhor caminho a seguir para que este trabalho pudesse atingir seu êxito.

Ao professor Dr. José Antônio, coordenador do Curso PROFMAT-UFMA, sempre dedicado e atencioso.

Aos demais professores que ministraram aulas no PROFMAT

As gestoras do Centro de Ensino Vinicius de Moraes, professora Nubia e professora Jaqueline pela disponibilidade em ceder um espaço de estudo para preparação ao Exame Nacional de Qualificação.

A coordenadora do Colégio Dom Bosco professora Darlane Assis pela disponibilidade de material para estudo.

As Diretoras da Escola Upaon-Açu, professora Elsa e professora Glenda pelos incentivos e compreensão durante o decorrer do curso.

Aos meus colegas de mestrado pelos momentos de companheirismo e contribuições durante os estudos.

***Diga-me e eu esquecerei, ensina-me e eu poderei lembrar, envolva-me e eu aprenderei*.**

(*Benjamin Franklin)*

RESUMO

Este trabalho apresenta métodos de resolução de sistemas lineares remontando às suas origens, abordando o seu desenvolvimento histórico. Para tanto, será contemplado os métodos de substituição, regra de Cramer através de determinantes, método do escalonamento e método da matriz inversa.

Palavras chaves: 1. SISTEMAS LINEARES. 2. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO. 3. DETERMINANTES. 4. MATRIZES

ABSTRACT

This work presents methods of solving linear systems going back to their origins, addressing their historical development. For that, the substitution methods, Cramer's rule through determinants, scaling method and inverse matrix method will be contemplated.

Key words: 1. LINEAR SYSTEMS. 2. RESOLUTION METHODS. 3. DETERMINANTS. 4. MATRICES

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Muitas das vezes quando tratamos do ensino e aprendigem em matemática relacionamos as dificuldades dos alunos com os conteúdos abordados. Várias alternativas são apresentadas como forma de tornar a aprendizagem mais útil e significativa. Nesse processo podemos destacar as que incluem o desenvolvimento histórico do conteúdo, tornando a disciplina mais humanizada e evidenciando a matemática como uma ferramenta em transformação e em aperfeiçoamento buscando auxiliar as constantantes transições sociais, culturais e políticas da humanidade.

Este trabalho está direcionado principalmente aos alunos e professores do ensino médio. Diante deste cenário escolhemos trabalhar com métodos de resolução de sistemas linares, evidenciando os determinantes e as matrizes, pois normalmente estes conteúdos são trabalhados de forma indiviual e na ordem inversa de seu desenvolvimento histórico causando certa dificuldade de aprendizagem, já que os alunos não conseguem correlaciona-los.

O objetivo é propor uma abordagem diversificada onde os determinantes e as matrizes surgem como ferramentas facilitadoras na resolução dos sistemas lineares.

O trabalho é uma pesquisa bibliográfica realizada através da internet, livros do ensino médio e superior.

É importante salientar que este trabalho não tem a intenção de contemplar todos os métodos de resolução de sistemas lineares e sim de apresentar ao leitor alguns métodos que consideramos mais relevantes, evidenciando as técnicas utilizadas por cada um deles.

No Capítulo 2 temos a intenção de motivar o aluno através de uma abordagem histórica onde as definições de determinantes e matrizes não aparecem de forma divina, mas sim naturalmente através de construções humanas ao longo do tempo para resolver problemas como sistemas lineares. No Capítulo 3 trataremos dos sistemas lineares, enfatizando sua definição, exemplos, soluções, bem como a apresentação dos métodos de substituição, escalonamento e a regra de cramer. No Capítulo 4 apresentamos os determinantes, as noções de matrizes e formas de extração de determinantes. No Capítulo 5 falaremos das matrizes, realçando as operações necessárias para a representação matricial de um sistema linear além de apresentarmos o método da matriz inversa para determinar a solução de um sistema linear. No Capítulo 6 resolvemos um exemplo de sistema linear 5x5 de quatro formas diferentes utilizando métodos apresentados no trabalho, evidenciando suas vantagens e desvantagens. Apresentamos ainda um breve capítulo no qual citamos áreas onde os determinantes, mastrizes e sistemas lineares são utilizados nos dias atuais.

2. ABORDAGEM HISTÓRICA DE SISTEMAS LINEARES, DETERMINANTES E MATRIZES

Neste Capítulo falaremos um breve histórico sobre o desenvolvimento dos principais conceitos abordados neste trabalho. Veremos que os sistemas lineares surgem de problemas práticos do dia a dia, como por exemplo, contar feixes de milho, que veremos logo adiante. Já os determinantes e matrizes surgem principalmente como ferramentas para resolver problemas como os sistemas lineares.

As primeiras noções de matrizes remontam ao século II a.C. embora alguns vestígios desse assunto foram encontrados no século VI a.C. Somente no final do século XVII que as ideias reapareceram e se desenvolveram até os dias atuais.

Os babilônios estudaram problemas que levam a resolução de um sistema linear de duas variáveis e duas equações, sendo que alguns destes problemas foram preservados em tabletas de argilas.

Os chineses, entre 200 a.C e 100 a.C chegaram muito mais perto de matrizes que os babilônios. Na verdade, é justo dizer que o texto da obra *Os Nove capítulos da arte matemática*, compilado durante a dinastia Han, apresenta o primeiro exemplo conhecido que usa um método atual de resolução de sistemas lineares. Vejamos a seguir um problema retirado desta obra.

> [...]Existem três tipos de milho, dos quais três feixes é do primeiro tipo, dois do segundo, e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo? (LIU HUI, século II d.C, traduzido)

O autor deste problema faz algo bastante notável. Ele define os coeficientes de três equações lineares de três incógnitas como uma tabela:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Em notação moderna (matricial), se x, y e z denotam os três tipos de milhos, escrevemos na forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Observe que a única diferença destas duas notações é que hoje escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz em vez de colunas.

O escrito datado de 200 a.C., mais notavelmente ainda, instrui o leitor a multiplicar a coluna do meio por 3 e subtrair a coluna da direita tantas vezes quanto possível, o mesmo é então feito subtraindo-se a coluna da direita tantas vezes quanto possível a partir de 3 vezes a primeira coluna, definindo uma nova tabela de coeficientes porém equivalente a original.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{matrix}$$

Em seguida a coluna mais à esquerda é multiplicada por 5 e, em seguida, a coluna do meio é subtraída o número de vezes possível, resultando em uma nova tabela.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{matrix}$$

Desta forma a solução pode ser encontrada para o terceiro milho, em seguida, para o segundo e então para o primeiro por substituição. Este método só foi formalizado no século XIX, entretanto os chineses incrivelmente já o utilizavam antes do nascimento de Cristo.

Girolamo Cardano (1501-15760), em *Ars Magna* de 1545, dá uma regra para a solução de um sistema de duas equações lineares que ele chama de regulamentação de Modo. Esta regra mostra o que é essencialmente a Regra de Cramer para resolver sistemas lineares 2x2.

Muitos resultados da teoria atual de matrizes elementares apareceram pela primeira vez muito antes das matrizes serem objetos de investigação matemática. Por exemplo, Johan de Witt (1625-1672) em seus *Elementos de Curvas*, publicado como parte dos comentários sobre a versão latina de 1660 da *Geométrie* de René Descartes (1596-1650), mostrou como uma transformação de eixos reduz uma equação de uma cônica a uma forma canônica. Isso equivale a diagonalização de uma matriz simétrica, mas de Witt nunca pensou nesses termos.

A ideia de determinante apareceu no Japão e na Europa quase simultaneamente, embora o matemático japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708) tenha publicado suas ideias antes. Em 1683, Seki escreveu o *Método de resolução de problemas dissimulados* que contém métodos matriciais escritos como tabelas exatamente igual aos métodos dos antigos chineses.

Sem ter qualquer palavra que corresponda a "determinante" Seki ainda introduziu determinante e construiu métodos gerais para seu cálculo. Usando seus "determinantes" Seki foi capaz de encontrar os determinantes de ordem 2, 3, 4 e 5 e aplicou-os na resolução de equações, mas não em sistemas de equações lineares.

Extraordinariamente, o surgimento de determinante na Europa se deu exatamente em 1683 em uma carta do polímata filosofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) enviada ao matemático Guillaume François Antoine (1661-1704), marquês de L'Hôpital. Leibniz estava convencido de que uma boa notação matemática era a chave para o progresso da mesma. Em seus manuscritos inéditos, encontram-se mais de 50 maneiras diferentes de notação de sistemas que ele trabalhou durante muitos anos.

Leibniz usou a palavra "resultante" para certas somas combinatoriais de um determinante. Ele provou vários resultados sobre resultantes, incluindo o que é essencialmente a Regra de Cramer. Ele também sabia que um determinante pode ser expandindo usando qualquer linha ou coluna, o que hoje é chamado de Teorema de Laplace.

Em 1730, o matemático escocês Colin Mclaurin (1698-1746) escreveu seu *Tratado de Álgebra*, embora publicado somente depois de 1748, dois anos após sua morte. Ele contém os primeiros resultados sobre os determinantes provando a Regra de Cramer para determinantes 2x2 e 3x3 e indicando como proceder para os determinantes 4x4. Entretanto o Suíço Grabriel Cramer (1704 – 1752) também chegou de forma completamente independente à mesma regra encontrada por Mclaurin, na sua obra *Introdução à análise das curvas planas* (1750), regra esta que herdou seu nome.

Trabalhos sobre determinantes começaram a surgir regularmente. Em 1764, o matemático francês Étienne Bézout (1730-1783) apresentou os determinantes de Vandermonde.

Em 1772, Laplace afirmou que os métodos introduzidos por Cramer e Bézout eram impraticáveis e, em um artigo onde ele estudou as *órbitas dos planetas interiores* discutiu a solução de um sistema de equações lineares, sem realmente calculá-lo, usando determinantes. Surpreendentemente Laplace usou a palavra "resultante" para o que hoje chamamos de determinante. O que é curioso, é que essa palavra é a mesma usada por Leibniz. Deste modo, Laplace deve ter tido conhecimento dos trabalhos de Leibniz sobre esse assunto.

O termo Determinante foi utilizado pela primeira vez pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss em *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) ao discutir formas quadráticas. Ele usou o termo porque o determinante determina as propriedades da forma quadrática. No entanto, o conceito não é o mesmo de hoje. No mesmo trabalho, Gauss estabelece os coeficientes de suas formas quadráticas em matrizes retangulares. Ele descreve a multiplicação de matrizes (como composição, pois ele ainda não atingiu o conceito de álgebra matricial) e da inversa de uma matriz no contexto particular das matrizes de coeficientes de formas quadráticas.

Gauss ainda sistematizou o método de eliminação de variáveis na resolução de sistemas lineares, surgido pela primeira vez no texto da obra *Os nove capítulos da arte matemática* escrito em 200 a. C. Gauss em seu trabalho que estudou a órbita do então asteroide Ceres, utilizando registros de observações tomadas em 1801, criou o *Método dos mínimos quadrados,* no qual solucionou um sistema de seis equações lineares e seis incógnitas, pelo método do escalonamento ou método de eliminação gaussiana.

Foi o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que usou o termo "determinante" em seu sentido moderno. O seu trabalho é o mais completo dos primeiros trabalhos sobre determinantes. Ele reprovou os trabalhos anteriores e deu novos resultados sobre esse assunto. No artigo de 1812, o teorema sobre a multiplicação de determinantes é provado pela primeira vez, embora, na mesma reunião do Instituto da França, Jacques Binet (1786-1856) também apresentou um artigo que continha uma prova do teorema da multiplicação, mas foi menos satisfatória do que aquela demonstrada por Cauchy.

Em 1826, Cauchy no contexto das formas quadráticas em n variáveis, encontrou os autovalores e deu resultados sobre a diagonalização de uma matriz. Além disso, ele introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem o mesmo polinômio característico.

Jacques Sturm (1803-1855), matemático francês de origem alemã, fez uma generalização do problema de autovalor no contexto de resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias. Na verdade o conceito de um autovalor apareceu 80 anos antes, mais uma vez no trabalho sobre sistemas de equações diferenciais lineares, por Jean le Round D'Alembert (1717-1783) ao estudar o movimento de uma corda com as massas ligadas a ele em vários pontos.

Devemos salientar que nem Cauchy nem Jacques Sturm perceberam a generalidade das ideias que estavam introduzindo e as viam somente em contextos específicos em que eles estavam trabalhando.

Os matemáticos alemães Carl Gustav Jacobi (1804-1851), por volta de 1830 e depois Leopold Kronecker (1823-1891) em 1850 e Karl Weierstrass (1815-1897) em 1860, também olharam para os resultados da matriz, porém novamente em um contexto especial, desta vez a noção de uma transformação linear.

Jacobi publicou três tratados sobre determinantes em 1841. Estes foram importantes, pois pela primeira vez a definição do determinante foi de forma algorítmica e as entradas no determinante não foram especificadas. Estes três trabalhos de Jacobi fizeram com que a ideia de determinante fosse amplamente conhecida.

O professor britânico Arthur Cayley (1821-1895), também em 1841, publicou a primeira contribuição inglesa para a teoria dos determinantes. Neste trabalho ele usou duas linhas verticais de ambos os lados da matriz para denotar o determinante, uma notação que se tornou padrão.

O primeiro a usar o termo "matriz" foi o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) em 1850. Sylvester, que residia na América, definiu uma matriz como um arranjo retangular de termos e via-o como algo que levou a vários determinantes de matrizes quadradas nela contida. Depois de deixar a América ele voltou para a Inglaterra em 1851. Sylvester se tornou advogado e conheceu Cayley, quando compartilharam ideias e interesses na matemática. Cayley percebeu rapidamente o significado do conceito de matriz e por volta de 1853, Cayley havia publicado uma nota apresentando pela primeira vez a inversa de uma matriz. A nulidade de uma matriz quadrada foi definida por Sylvester em 1884. Ele definiu a nulidade de uma matriz A de ordem n como sendo o maior i tal que todos os i menores de ordem $n-1$, são nulos. Sylvester estava interessado em invariantes de matrizes, que são as propriedades que não são alteradas por certas transformações.

Percebemos que o histórico de matrizes nos remete a uma sequência inversa da que é normalmente apresentada aos alunos do Ensino Médio, pois a partir da busca de soluções de sistemas lineares foram criadas ideias sistemáticas de se trabalhar apenas com os seus coeficientes, surgindo os determinantes e suas propriedades. Com o intuito de facilitar a notação tabular para o calculo dos determinantes surgiram as matrizes. Entretanto devido ao seu alto poder de aplicabilidade ganharam propriedades específicas, tornando-as independentes dos determinantes.

Não é de se estranhar, portanto, que as matrizes estão relacionadas com determinantes e que por sua vez estão intimamente relacionadas com o estudo dos sistemas lineares.

Atualmente os conceitos de sistemas lineares, determinantes e matrizes são importantes em diversas áreas, tais como: a Física, a Economia, a Biologia, a Engenharia, a Tecnologia, a Administração, dentre outras.

Parte dos capítulos 3, 4 e 5 deste trabalho foram compilados e adaptados a partir de trechos do livro Fundamentos de matemática elementar: volume 4 / Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. 2ª edição. São Paulo: Atual Editora Ltda. 1977.

3. SISTEMAS LINEARES

Como este trabalho é voltado, principalmente, para alunos e professores do ensino médio, nossa intenção é que o mesmo seja autocontido de conceitos básicos para um melhor entendimento do assunto. Assim fizemos desde a simples definição de equações lineares para posteriormente definirmos os sistemas lineares.

3.1 Equação linear

3.1.1 *Definição*: Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_{1,}\, x_{2,}\, x_3, \ldots, x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Os números $a_{11,}\, a_{12,}\, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, todos reais, são os coeficientes e b, também real é o termo independente da equação.

Exemplos: $3x_1 + 2x_2 = 10$; $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$; $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$.

Não são lineares: $3{x_1}^2 + 2x_2 = 10$; $2x_1x_2 - x_3 - x_4 = 5$; $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 6$.

3.1.2 *Solução de uma equação linear*: Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$ se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplo (1): Seja a equação linear

$$2x_1 + x_2 = 1$$

a dupla $(0, 1)$ é solução, pois $2\,.\,(0) + (1) = 1$ é uma sentença verdadeira, bem como a dupla (1, -1) é solução, pois $2\,.\,(1) + (-1) = 1$ também é uma sentença verdadeira, porém a dupla (2, 3) não é solução, pois $2\,.\,(2) + (3) = 1$ é uma sentença falsa.

Exemplo (2): Seja a equação linear

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

é fácil observar que qualquer tripla $(\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \alpha_3)$ é solução da equação

Exemplo (3): Seja a equação linear

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 10$$

é fácil observar que qualquer quadra $(\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \alpha_3,\ \alpha_4)$ não é solução da equação, pois $0\alpha_{1,} + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 10$ é uma sentença falsa $\forall\alpha_{1,}\ \forall\alpha_{2,}\ \forall\alpha_3,\ \forall\alpha_4$.

Historicamente as equações tem sua origem em problemas práticos do cotitiado dos povos da época, entretanto algumas situações envolviam mais de uma equação linear simultaneamente, gerando o que chamamos de sistemas de equações lineares, que veremos a seguir.

3.2 Sistema de equações lineares

Um dos registros mais antigos de sistemas lineares tem origem na China. A Obra chinesa *Os nove capítulos da arte matemática,* escrita em 200 a.C., traz em seu conteúdo registros de representações de coeficientes de sistemas lineares através de barra de bambus em tabuleiros quadrados. Esta obra trabalha possui problemas envolvendo agricultura, milhos, medidas de terra, impostos e outros assuntos da época.

Ao longo do tempo varios matemáticos contribuiram modificando e aperfeiçoando as notações, conceitos e teorias dos sistemas lineares até chegar no que conhecemos hoje.

Atualmente os sistemas lineares são utilizados em diversas áreas, tais como: engenharia, tecnologia, transporte, economia, biologia, astronomia, navegação, aviação, dentre outros.

Vejamos a seguir a definição, exemplos, solução, classificação e métodos desenvolvidos para determinar a solucção de um sistema linear, quando houver.

3.2.1 *Definição*: Sistema de equações lineares é um sistema de $m\ (m \geq 1)$ equações lineares , nas incógnitas $x_{1,}\ x_{2,}\ x_3, \ldots, x_n$. Assim o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear.

Observação: a chave do lado esquerdo informa o agrupamento das equações envolvidas no sistema.

Exemplos:

- $S_1 \begin{cases} 12x - 4y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ $\qquad S_2 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

3.3 Solução de um sistema linear

Assim como vimos na seção de equaçõe lineares, a solução de um sistema linear é uma sequência de valores que quando alocados nas posições das incógnitas nas equações do sistema as tornam todas verdadeiras simultaneamente. Ou seja, a ênupla ordenada de números reais $(\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S, se for solução de todas as equações de S, isto é:

$$\begin{array}{cl} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 & \text{(sentença verdadeira)} \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 & \text{(sentença verdadeira)} \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = b_3 & \text{(sentença verdadeira)} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m & \text{(sentença verdadeira)} \end{array}$$

Exemplo (1): O sistema linear S_1 de três equações, nas incógnitas $x,\ y,\ z,\ w$

$$S_1 \begin{cases} 3x + 4y - 7z + 2w = -4 \\ 2x - 2y + 2z - 3w = 4 \\ 4x + 3y - 2z + 4w = 2 \end{cases}$$

admite solução, pois existe pelo menos uma quadra ordenada que satisfaz o sistema.

A quadra ordenada (1, 0, 1, 0) é uma solução do sistema S_1, pois:

$$3.(1) + 4.(0) - 7.(1) + 2.(0) = -4 \text{ (sentença verdadeira)}$$
$$2.(1) - 2.(0) + 2.(1) - 3.(0) = 4 \text{ (sentença verdadeira)}$$
$$4.(1) + 3.(0) - 2.(1) + 4.(0) = 2 \text{ (sentença verdadeira).}$$

Entretanto a quadra ordenada (4, 2, 0, 0), ná é solução do sistema S_1, pois:

$$3.(4) + 4.(2) - 7.(0) + 2.(0) = -4 \text{ (sentença falsa)}$$
$$2.(4) - 2.(2) + 2.(0) - 3.(0) = 4 \text{ (sentença verdadeira)}$$
$$4.(4) + 3.(2) - 2.(0) + 4.(0) = 2 \text{ (sentença falsa)}$$

Exemplo (2): O sistema linear S_2 de três equações, nas varáveis $x,\ y,\ z$

$$S_2 \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 6 \end{cases}$$

não admite solução, pois nenhuma tripla ordenada $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3)$ satisfaz a última equação.

Observação: Caso um sistema S tenha pelo menos uma solução, dizemos que S é um sistema possível (SP), porém caso não tenha nenhuma solução, dizemos que é um sistema impossível (SI).

Por conter suas origens em situações práticas do cotidiano dos povos da época, os sistemas lineares apresentados geralmente tinham soluções, entretanto, sabemos que existem sistemas lineares com e sem solução ou até mesmo com infinitas soluções. Vejamos a seguir a classificação dos sistemas lineares quanto ao número de soluções.

3.4 Classificação de um sistema linear

Os sistemas lineares podem ser classificados como:

- Sistema possível e determinado (SPD): é um sistema linear que possui uma única solução.
- Sistema possível e indeterminado (SPI): é um sistema linear que possui infinitas soluções.
- Sistema Impossível (SI): é um sistema linear que não possui soluções.

Tomando como base o sistema genérico S de duas equações lineares nas incógnitas x e y é fácil verificar graficamente as possibilidades de soluções que podem ocorrer definindo assim sua classificação.

Assim, seja

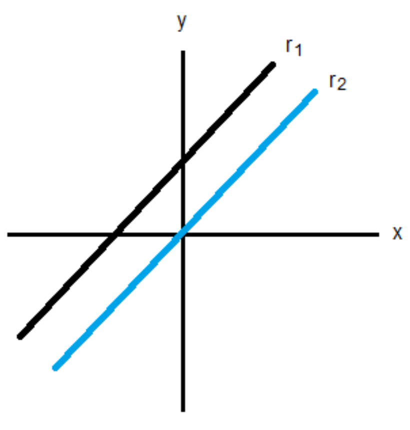
$$S\ \begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1\ (E_1) \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2\ (E_2) \end{cases}$$

no qual a_1 e b_1 não são ambos nulos, assim como a_2 e b_2 também não são.

Graficamente é fácil determinar a solução do sistema linear S, pois sabemos que no plano cartesiano o gráfico de uma equação linear é uma reta e a solução são os pontos de intersecção dessas retas, simultaneamente. Por exemplo: Um sistema de três equações, que graficamente é representado por três planos, possui solução se os três planos se interceptam em um mesmo ponto. Continuemos com o nosso exemplo com duas retas. Assim, seja r_1 e r_2 as retas que representam E_1 e E_2, respectivamente e um ponto P de coordenadas (x, y) temos as seguintes possibilidades:

- As retas r_1 e r_2 são paralelas, ou seja, não existe nenhum ponto P que pertença simultaneamente à r_1 e r_2. Logo $(r_1 \cap r_2) = \emptyset$.

3.1 – Retas paralelas

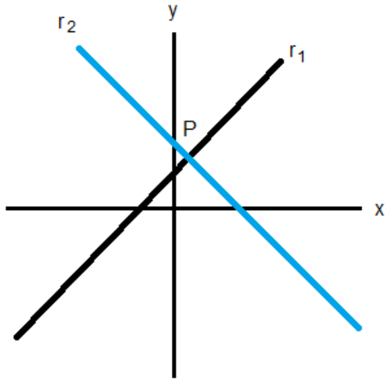


Fonte: *próprio autor*

Portanto nesta situação o sistema linear S composto pelas equações E_1 e E_2 possui um conjunto, de soluções, vazio e o sistema é classificado como Sistema Impossível (SI).

- As retas r_1 e r_2 são concorrentes, ou seja, existe apenas um ponto P que pertençe simultaneamente à r_1 e r_2. Logo $(r_1 \cap r_2) = P$.

3.2 – Retas concorrentes

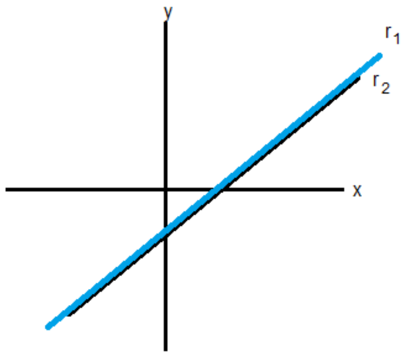


Fonte: próprio *autor*

Portanto nesta situação o sistema linear S composto pelas equações E_1 e E_2 possui solução única e o sistema é classificado como Sistema Possível e Determinado (SPD).

- As retas r_1 e r_2 são coincidentes, ou seja, existem infinitos pontos que pertencem simultaneamente à r_1 e r_2. Logo $(r_1 \cap r_2) = r_1 = r_2$.

3.3 – Retas coincidentes



Fonte: *próprio autor*

Portanto nesta situação o sistema linear S composto pelas equações E_1 e E_2 possui infinitas soluções e o sistema é classificado como Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

3.4 Método da substituição

Por volta do século IX d.C., os babilônios, inclusive o matemático al-Khowarizmi (considerado o pai da álgebra), diferentemente dos egípcios, conseguiam resolver uma variedade de equações utilizavando um método sofisticado de eliminação de uma das incógnitas por substituição e expressava todo o restante em termos de palavras e números.

Ao longo do tempo este método sofreu adaptações na sua notação e processos e passou a se chamar de método da substituição.

O método da substituição é um método muito prático na resolução de sistemas lineares de n incógnitas e deve essencialmente seguir três passos:

<u>1º passo</u>: Deve-se escolher uma das equações do sistema (de preferencia a mais simples) e isolar uma de suas incógnitas.

<u>2º passo</u>: Deve-se substituir o valor da incógnita encontrada no 1º passo nas equações restantes do sistema, formando assim, um novo sistema com estas equações, entretanto com uma incógnita a menos que o sistema inicial. O 1º e o 2º passo deverão se repetir até obtermos uma equação com apenas uma incógnita, definindo assim seu valor numérico.

<u>3º passo</u>: Os valores encontrados das incógnitas deverão ser substituidos de maneira regressiva nas demais equações das incógnitas isoladas até determinarmos os valores de todas as incógnitas do sistema.

Aqui iremos apresentar dois exemplos. Um com duas incógnitas e outro com três incógnitas. No Capítulo 6 mostramos um exemplo usando este método para solucionar um sistema com cinco incógnitas.

Exemplo (1): Seja o sistema

$$S \begin{cases} x & + & 2y & = & 5 \\ 2x & + & y & = & 1 \end{cases}$$

Iniciamos sua resolução, pelo método da substituição, isolando a incógnita x na 1ª equação do sistema. Assim, temos:

$$x = 5 - 2y \qquad \text{I}$$

Substituindo o valor encontrado para incógnita x na 2ª equação temos:

$$2\,.\,(5-2y)+y=1 \Rightarrow$$

$$10-4y+y=1 \Rightarrow$$

$$3y=9 \Rightarrow$$

$$y=\frac{9}{3} \Rightarrow$$

$$y=3$$

Substituindo, o valor numérico encontrado para incógnita y em I, temos:

$$x=5-2\,.\,(3) \Rightarrow$$

$$x=-1$$

Desta forma o par ordenado (-1, 3) é solução do sistema S.

Exemplo (2): Seja o sistema

$$S\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -6 \end{cases}$$

Iniciamos sua resolução, pelo método da substituição, isolando a incógnita z na 1ª equação do sistema S. Assim, temos:

$$z=-3-2x+y \qquad \text{I}$$

Substituindo, nas demais equações, o valor numérico encontrado para incógnita z, temos:

$$S'\begin{cases} 3x & + & 2y & - & (-3-2x+y) & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2\,.\,(-3-2x+y) & = & -6 \end{cases} \Rightarrow \quad S'\begin{cases} 5x & + & y & = & -2 \\ -3x & - & y & = & 0 \end{cases}$$

Isolando a incógnita y na 1ª equação do novo sistema S', agora de duas incógnitas, temos:

$$y=-2-5x \qquad \text{II}$$

Substituindo o valor encontrado para incógnita y na 2ª equação do sistema S', temos:

$$-3x-(-2-5x)=0 \Rightarrow$$

$$2x=-2 \Rightarrow$$

$$x=-1$$

Substituindo o valor numérico encontrado para a incógnita x em II, temos:

$$y = -2 - 5\,.\,(-1) \Rightarrow$$
$$y = -2 + 5 \;\Rightarrow$$
$$y = 3$$

Substituindo os valores numéricos encontrados para as incógnitas x e y em I, temos:

$$z = -3 - 2\,.\,(-1) + (3) \Rightarrow$$
$$z = -3 + 2 \; + 3 \Rightarrow$$
$$z = 2$$

Desta forma a terna ordenada (-1, 3, 2) é a solução do sistema S.

Vejamos a seguir, outro método de resolução de sistemas lineares, desenvolvido pelo matemático Gauss, que pode ser aplicado em sistemas lineares de qualquer ordem.

3.5 Método do escalonamento

Este método, já conhecido pelos antigos chineses, foi aperfeiçoado e sistematizado por Gauss e por isso também ficou conhecido como método de eliminação gaussiana. Gauss, durante os estudos da órbita do então asteroide Ceres, se deparou com um sistema de seis equações e seis incógnitas. Para solucionar tal sistemas criou o método do escalonamento.

O método é bem prático e pode ser utilizado em sistemas lineares de qualquer ordem, ou seja, independente do número de equações e incógnitas que compõem um sistema linear. Vejamos sua definição.

Dado um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, diremos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplos:

$$\bullet S_1 \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ \quad + y - z = 4 \\ \quad + \quad + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\bullet S_2 \begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ \qquad\qquad z - t + w = 0 \\ \quad + \quad + \quad 2t - w = 1 \end{cases}$$

$$\bullet S_3 \begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ \quad + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Há dois tipos de sistemas escalonados:

<u>*1º tipo*</u>: número de equações igual ao número de incógnitas. Nesse caso o sistema S é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0, \forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Neste caso o sistema S será possível e determinado (SPD) e os valores $\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ podem ser obtidos resolvendo-se o sistema por substituição. Partindo da última equação obtemos x_n, depois substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1}. Repetindo-se o processo encontraremos $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_3, x_2, x_1$.

Exemplo:

$$S_1 \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 6 & (E_1) \\ \qquad y + 3z - t = -5 & (E_2) \\ \qquad\qquad 5z + 7t = 21 & (E_3) \\ \qquad\qquad\qquad 2t = 6 & (E_4) \end{cases}$$

temos:

de (E_4) $2t = 6 \Rightarrow t = 3$.

de (E_3) $5z + 7\,.\,(3) = 21 \Rightarrow 5z = 0 \Rightarrow z = 0$.

de (E_2) $y + 3\,.\,(0) - (3) = -5 \Rightarrow y = -5 + 3 \Rightarrow y = -2$

de (E_1) $x + 2\,.\,(-2) - (0) + 3.\,(3) = 6 \Rightarrow x = 6 - 5 \Rightarrow x = 1$

Portanto a solução do sistema é: $(1, -2, 0, 3)$

<u>*2º tipo*</u>: número de equações é menor que o número de incógnitas.

Nesse caso o sistema S é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \\ \qquad a_{2j}x_j + \cdots \dots + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (j \geq 2) \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad a_{mr}x_r + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (r > j) \end{cases}, \qquad com\, m < n$$

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem em nenhuma das equações (chamadas de variáveis livres) e transpo-las para o segundo membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações do sistema. Nesse caso atribuimos valores a cada uma incógnita do segundo membro, desta forma obteremos um sistema do 1º tipo, ou seja, determinado, que possui solução. Logo resolvendo obteremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outros valores as incógnitas do segundo membro, encontraremos outro sistema contendo as incógnitas do primeiro membro que também é determinado, que ao resolvermos encontraremos outra solução. Logo como podemos atribuir indefinidamente valores para as incógnitas do segundo membro, sempre encontraremos novos sistemas determinados com diferentes soluções. Portanto estamos diante de um sistema de soluções possíveis e indeterminadas (SPI), ou seja, de infinitas soluções. Chama-se de grau de indeterminação o número de variáveis livres do sistema, isto é, $n - m$.

Exemplo:

$$S_1 \begin{cases} x - y + z = 4 \\ \qquad y - z = 2 \end{cases}$$

A única variável livre é z (não aparece no começo de nenhuma equação). Logo, transpondo z para o segundo membro em ambas as equações temos:

$$\begin{cases} x & - & y & = & 4 & - & z \\ & + & y & = & 2 & + & z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$ (onde α é um númer real), teremos:

$$S_2 \begin{cases} x & - & y & = & 4 & - & \alpha & (E_1) \\ & + & y & = & 2 & + & \alpha & (E_2) \end{cases}$$

O sistema agora é do 1º tipo (determinado), para cada valor de α.

Assim, temos:

de (E_2) $y = 2 + \alpha$

de (E_1) $x = 4 - \alpha + y = 4 - \alpha + 2 + \alpha = 4 + 2 = 6$

Portanto, as soluções do sistema são as tripas ordenadas $(6,\ 2 + \alpha,\ \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Segue algumas:

$$\alpha = 1 \rightarrow (6, 3, 1)$$

$$\alpha = -7 \rightarrow (6, -5, -7)$$

3.5.1 *Sistemas equivamentes*

Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes se toda solução de S_1 for também solução de S_2 e toda solução de S_2 for a solução de S_1.

Exemplo: Sejam S_1 e S_2 sistemas lineares de ordem 2 (2 equações e 2 incógnitas)

- $S_1 \begin{cases} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & + & y & = & 1 \end{cases}$

- $S_2 \begin{cases} x & + & 2y & = & 3 \\ & - & 3y & = & -5 \end{cases}$

S_1 e S_2 são sistemas equivalentes, pois ambos são determinados e ambas admitem como solução $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

Já que os sistemas equivalentes possuem as mesmas soluções (ou nenhuma), o que iremos fazer é transformar um sistema linear em outro qualquer equivalente, porém na forma escalonada, pois são mais simples de serem resolvidos. Desta forma precisaremos saber que recurso utilizar para transformar S_1 em S_2 na forma escalonada. Esses recursos são dados por dois teoremas a seguir, chamados de operações elementares:

<u>*Teorema 1*</u>*:* Multiplicando os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, por um número $k \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Demonstração: Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Multiplicando a $i´$ésima linha de S por $k \neq 0$, obtemos o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = kb_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre os sistemas S e S' é a $i´$ésima equação. Portanto focaremos a atenção apenas nela.

a) Suponha que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de S. Provemos que também é solução de S'.

De fato: por hipótese $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Colocando $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ no 1º membro da $i´$ésima equação de S', temos:

$$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n = k\left(\underbrace{a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n}_{b_i\ (por\ hipótese)}\right) = kb_i.$$

O que prova que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i´ésima equação de S'. Logo $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Suponhamos agora que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de S'. Provemos então que também é solução de S.

De fato: por hipótese $ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \ \dots + ka_{in}\alpha_n = kb_i$.

Colocando $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ no 1º membro da i´ésima equação de S, temos:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ \dots + a_{in}\alpha_n = \frac{k}{k}a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k}a_{i2}\alpha_2 + \ \dots + \frac{k}{k}a_{in}\alpha_n$$

$$= \frac{1}{k}\underbrace{(ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \ \dots + ka_{in}\alpha_n)}_{kb_i\ (por\ hipótese)} = \frac{1}{k}\,.\,kb_i = b_i$$

O que prova que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i´ésima equação de S. Logo $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \dots, \alpha_n)$ é solução de S.

<u>*Teorema 2*</u>*:* Se substituirmos uma equação de um sistema linear S, pela soma termo a termo, dela com uma outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.

Demonstração: Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Substituindo a i´ésima equação de S, pela soma termo a termo dela com a j´ésima equação, obtemos o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j1})x_2 + \dots + (a_{in} + a_{j1})x_n = b_i + b_j \\ \dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre os sistemas S e S' é a i´ésima equação. Portanto focaremos a atenção apenas nela.

a) Suponha que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de S. Provemos que também é solução de S'.

De fato: por hipótese

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$.(I)

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$(II)

Colocando $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ no 1º membro da i´ésima equação de S', temos:

$$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j1})x_2 + \ldots + (a_{in} + a_{j1})x_n =$$

$$\underbrace{a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n}_{b_i\ (por\ hipótese\ (I))} + \underbrace{a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n}_{b_j\ (por\ hipótese\ (II))} = b_i + b_j.$$

O que prova que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz a i´ésima equação de S'. Logo $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Suponhamos agora que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}\, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de S'. Provemos que também é solução de S.

De fato: por hipótese

$(a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j1})x_2 + \ldots + (a_{in} + a_{j1})x_n = b_i + b_j$. (I)

e

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$ (II)

Das igualdades (I) e (II), concluimos que: $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$. O que prova que $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz a i´ésima equação de S. Logo $(\alpha_{1,}\, \alpha_{2,}, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S.

Exemplo:

$$S \begin{cases} 2x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases} \text{ e } S' \begin{cases} 2x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & & & + & 5z & = & 5 \\ 4x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

são equivalentes, pois S' foi obtido a partir de S, sibstituindo a 2ª equação, pela soma termo a termo dela com a 1ª equação.

3.5.2 Escalonamento de um sistema

Para escalonar um sistema devemos seguir quatro passos, todos baseados nos *Teoremas 1* e *Teorema 2*, vistos acima.

1ª passo: Colocamos como 1ª equação aquela que possui a 1ª incógnita não nula

2ª passo: Anulamos a 1ª incógnita de todas as equações, com exceção da primeira, substituindo a i´ésima equação $(i \geq 2)$ pela soma da mesma com a primeira equação multiplicada por um número conveniente.

3ª passo: Fixamos a 1ª equação e realizamos o 1º e o 2º passos nas equações restantes.

4ª passo: Fixamos a 1ª e a 2ª equações e realizamos o 1º e o 2º passos nas equações restantes, até que o sistema esteja completamente escalonado.

Exemplo (1): Seja o sistema

$$S\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{cases}.$$

- Iniciamos o processo de escalonamento substituindo a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -2. Desta forma temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15. \\ 3x & - & y & - & 2z & = & -4 \end{cases}$$

- Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -3. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -15 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{cases}$$

- Multiplicamos a 2ª equação por $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & - & 7y & - & 5z & = & -31 \end{cases}$$

• Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª equação multiplicada por 7. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & -4 \end{cases}$$

O sistema desta forma está escalonado. Como é do 1º tipo (possui o número de equações igual ao número de incógnitas) é um sistema que possui uma só solução, ou seja, é um sistema possível e determinado (SPD)

Agora vamos apresentar quatro exemplos de três equações, evidenciando a diferença entre eles quanto ao número de soluções. No capítulo 6 mostraremos um exemplo de sistema linear de cinco equações e cinco incógnitas também solucionado pelo método do escalonamento.

Exemplo (2): Seja o sistema

$$S \begin{cases} x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 0, \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & 4 \end{cases}$$

• Iniciamos o processo de escalonamento substituindo a 2ª equação pelo soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -3. Desta forma temos:

$$\begin{cases} x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ & & & & 10z & - & t & = & -3, \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & 4 \end{cases}$$

• Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -2. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ & & & & 10z & - & t & = & -3, \\ & - & y & + & 7z & - & 4t & = & 2 \end{cases}$$

• Permutamos a 2ª com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x & + & y & - & 3z & + & t & = & 1 \\ & - & y & + & 7z & - & 4t & = & 2\ , \\ & & & & 10z & - & t & = & -3 \end{cases}$$

O sistema desta forma está escalonado. Como é do 2º tipo (possui o número de equações menor do que o número de incógnitas) é um sistema que possui infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI)

Exemplo (3): Seja o sistema

$$S\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases},$$

- Iniciamos o processo de escalonamento substituindo a 2ª equação pelo soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -3. Desta forma temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$$

- Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -5. Assim temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \\ 10y - 4z = -24 \end{cases}$$

- Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª equação multiplicada por -2. Assim temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

- A última equação pode ser abandonada, pois ela é satisfeita para quaisquer valores das incógnitas x, y, z. Assim, temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \end{cases}$$

O sistema desta forma está escalonado. Como é do 2º tipo (possui o número de equações menor do que o número de incógnitas) é um sistema que possui infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI)

Exemplo (4): Seja o sistema

$$S\begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$$

- Iniciamos o processo de escalonamento substituindo a 2ª equação pelo soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -3. Desta forma temos:

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & -8 \\ & - & 13y & = & 39 \\ 10x & - & 12y & = & 7 \end{cases}$$

- Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª equação multiplicada por -10. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & -8 \\ & - & 13y & = & 39 \\ & - & 52y & = & 87 \end{cases}$$

- Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª equação multiplicada por -4. Assim temos:

$$\begin{cases} x & + & 4y & = & -8 \\ & - & 13y & = & 39 \\ & & 0y & = & -69 \end{cases},$$

O sistema desta forma está escalonado. Notemos que a última equação não pode ser satisfeita, desta forma é um sistema que não possui solução, ou seja, é um sistema impossível (SI)

A seguir verificaremos um método aplicado em sistemas lineares normais (número de equações igual ao número de incógnitas) que apesar de não muito prático para sistemas de ordem superiores (> 3) são muito importantes, pois nos dá a noção de determinantes.

3.6 Regra de Cramer

Este método, idealizado pelos matemáticos Seki Kowa e Leibniz e desenvolvido pelo suíco Gabriel Cramer utiliza determinantes para solucionar sistemas lineares possíveis e determinados de n equações e n incógnitas.

A ideia de determinante nasce na elaboração deste método de resolução de sistemas lineares.

Vamos mostrar agora como os determinantes surgem de maneira muito natural na solução de um sistema linear.

- Primeiro faremos para um sistema linear $2x2$

*Exemplo (1) :*Admitindo, sem perda de generalidade, o sistema arbitrário S, de solução única (SPD), com duas equações lineares nas incógnitas x e y

$$S \begin{cases} ax & + & by & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{cases}$$

no qual a, b, c, d são os coeficientes enquanto que p e q são os termos independentes, aplicaremos o método da substituição para soluciona-lo.

- Iniciamos isolando a incógnita y da 2ª equação. Assim temos:

$$cx + dy = q \Rightarrow$$

$$y = \frac{q - cx}{d} \tag{I}$$

- Substuindo y na 1ª equação do sistema, temos:

$$ax + b\left(\frac{q - cx}{d}\right) = p \Rightarrow$$

$$ax + \left(\frac{bq - bcx}{d}\right) = p \Rightarrow$$

$$\frac{adx}{d} + \left(\frac{bq - bcx}{d}\right) = p \Rightarrow$$

$$\frac{adx}{d} + \left(\frac{bq - bcx}{d}\right) = p \Rightarrow$$

$$adx - bcx = dp - bq \Rightarrow$$

$$x(ad - bc) = dp - bq \Rightarrow$$

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$$

- Substuindo o valor numérico de x em (I), temos:

$$y = \frac{q - c\left(\frac{dp - bq}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{q - \left(\frac{cdp - bcq}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{q\left(\frac{ad - bc}{ad - bc}\right) - \left(\frac{cdp - cbq}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\left(\frac{adq - bcq}{ad - bc}\right) - \left(\frac{cdp - cbq}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\left(\frac{adq - bcq - cdp + bcq}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{d\left(\frac{aq - cp}{ad - bc}\right)}{d} \Rightarrow$$
$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

<u>*Observação:*</u> É importante salientar que a solução só é possível quando:

$$(ad - bc) \neq 0.$$

Percebeu-se, entretanto que se trabalha apenas com os coeficientes e termos independentes do sistema S, logo podemos formar as seguintes tabelas:

I. Seja A a tabela de coeficientes:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

onde a 1ª coluna encontra-se os coeficientes da incógnita x e na 2ª coluna os coeficientes da incógnita y das equações do sistema S.

- Chamaremos de determinante de A, denotado por $detA = D$ o valor numérico da expressão $(ad - pc)$.

II. Seja B a tabela de coeficientes com a substituição da coluna dos coeficientes da incógnita x pelos termos independentes.

$$\begin{matrix} p & b \\ q & d \end{matrix}$$

- Chamaremos de determinante de B, denotado por $detB = D_1$ o valor numérico da expressão $(dp - bq)$.

III. Seja C a tabela de coeficientes com a substituição da coluna dos coeficientes da incógnita y pelos termos independentes.

$$\begin{matrix} a & p \\ c & q \end{matrix}$$

- Chamaremos de determinante de C, denotado por $detC = D_2$ o valor numérico da expressão $(aq - cp)$.

Desta forma, temos que:

$$x = \frac{D_1}{D} \ e \ y = \frac{D_2}{D}$$

Percebemos que a noçao de determinante é bastante importante, poís já podemos tirar algumas conclusões a respeito das soluções do sistema sem mesmo resolve-lo, calculando apenas o determinante D.

(1) Se $D = 0$, o sistema não terá solução ou terá infinitas soluções.

(2) Se $D \neq 0$, o sistema terá uma única solução.

- Vamos, agora, analisar o mesmo para um sistema $3x3$

Exemplo (2): Admitindo, sem perda de generalidade, o sistema arbitrário S, de solução única (SPD), com três equações lineares nas incógnitas x, y e z

$$S\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = & p \\ dx & + & ey & + & fz & = & q \\ gx & + & hy & + & iz & = & r \end{cases}$$

onde a, b, c, d, e, f, g, h e i são os coeficientes enquanto que p, q e r são os termos independentes, aplicaremos o método da substituição para soluciona-lo.

- Iniciamos isolando a incógnita z da 3ª equação de S. Assim temos:

$$iz = r - gx - hy \Rightarrow$$

$$z = \frac{r-gx-hy}{i} \qquad \text{(I)}$$

- Substuindo z na 2ª equação de S, temos:

$$dx + ey + f\left(\frac{r - gx - hy}{i}\right) = q \Rightarrow$$

$$\frac{dix}{i} + \frac{eiy}{i} + \left(\frac{fr - fgx - fhy}{i}\right) = q \Rightarrow$$

$$dix + eiy + fr - fgx - fhy = qi \Rightarrow$$

$$(di - fg)x + (ei - fh)y = qi - fr \qquad \text{(II)}$$

- Substuindo z na 1ª equação de S, temos:

$$ax + by + c\left(\frac{r - gx - hy}{i}\right) = p \Rightarrow$$

$$\frac{aix}{i} + \frac{biy}{i} + \left(\frac{cr - cgx - chy}{i}\right) = p \Rightarrow$$

$$aix + biy + cr - cgx - chy = ip \Rightarrow$$

$$(ai - cg)x + (bi - ch)y = ip - cr \qquad \text{(III)}$$

- Formamos um novo sistema S' com (II) e (III)

$$S' \begin{cases} (di - fg)x & + & (ei - fh)y & = & qi - fr \\ (ai - cg)x & + & (bi - ch)y & = & ip - cr \end{cases}$$

- Iniciamos isolando a incógnita y da 2ª equação de S'. Assim temos:

$$y = \frac{(ip - cr) - (ai - cg)x}{(bi - ch)} \qquad \text{(IV)}$$

- Substuindo y na 1ª equação de S', temos:

$$(di - fg)x + (ei - fh)\left[\frac{(ip - cr) - (ai - cg)x}{(bi - ch)}\right] = qi - fr \Rightarrow$$

$$\left[\frac{(di - fg)x(bi - ch)}{(bi - ch)}\right] + (ei - fh)\left[\frac{(ip - cr) - (aix - cgx)}{(bi - ch)}\right] = (qi - fr) \Rightarrow$$

$$\frac{(di - fg)x(bi - ch) + (ei - fh)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)x}{(bi - ch)} = (qi - fr) \Rightarrow$$

$$(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)x = (qi - fr)(bi - ch) - (ei - fh)(bi - ch) \Rightarrow$$

$$x = \frac{(qi - fr)(bi - ch) - (ei - fh)(bi - ch)}{(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{biiq - chiq - bfir + cfhr - eiip + ceir + fhip - cfhr}{bdii - cdhi - bfgi + cfgh - aeii + cegi + afhi - cfgh} \Rightarrow$$

$$x = \frac{i(biq - chq - bfr - eip + cer + fhp)}{i(bdi - cdh - bfg - aei + ceg + afh)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{biq + cer + fhp - chq - bfr - eip}{bdi + ceg + afh - cdh - bfg - aei}$$

- Substuindo x em (IV), temos:

$$y = \frac{(ip - cr) - (ai - cg)\left[\frac{(qi - fr)(bi - ch) - (ei - fh)(bi - ch)}{(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)}\right]}{(bi - ch)} \Rightarrow$$

$$y = \frac{(ip - cr)[(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)]}{(bi - ch)[(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)]} -$$

$$\frac{(ai - cg)[(qi - fr)(bi - ch) - (ei - fh)(bi - ch)]}{(bi - ch)[(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)]} \Rightarrow$$

$$y = \frac{(ip - cr)(di - fg)(bi - ch) - (ip - cr)(ei - fh)(ai - cg)}{(bi - ch)(di - fg)(bi - ch) - (bi - ch)(ei - fh)(ai - cg)} -$$

$$\frac{(ai - cg)(qi - fr)(bi - ch) - (ai - cg)(ei - fh)(bi - ch)}{(bi - ch)(di - fg)(bi - ch) - (bi - ch)(ei - fh)(ai - cg)} \Rightarrow$$

$$y = \frac{aiq + pfg + cdr - pdi - afr - cgq}{aei + bfg + cbd - bdi - afh - ceg}$$

- Substuindo x e y em (I), temos:

$$z = \frac{r - g\left[\frac{(qi - fr)(bi - ch) - (ei - fh)(bi - ch)}{(di - fg)(bi - ch) - (ei - fh)(ai - cg)}\right]}{i} -$$

$$\frac{h\left[\frac{(ai - cg)(qi - fr)(bi - ch) - (ai - cg)(ei - fh)(bi - ch)}{(bi - ch)(di - fg)(bi - ch) - (bi - ch)(ei - fh)(ai - cg)}\right]}{i} \Rightarrow$$

$$z = \frac{r - g\left[\frac{biq - chq - bfr - eip + cer + fhp}{bdi - cdh - bfg - aei + ceg + afh}\right]}{i} -$$

$$\frac{h\left[\frac{aiq - pdi - afr - cgq + pfg + cdr}{aei - bdi - afh - ceg + bfg + cbd}\right]}{i} \Rightarrow$$

$$z = \frac{aer + bgq + dhp - bdr - ahq - egp}{aei + bfg + cbd - bdi - afh - ceg}$$

Observação: É importante salientar que a solução só é possível quando:

$$(aei + bfg + cbd - bdi - afh - ceg) \neq 0$$

Percebeu-se, entretanto, que trabalha-se apenas com os coeficientes e termos independentes do sistema S, assim como no *Exemplo (1)*, desta forma podemos formar as seguintes tabelas:

I. Seja A a tabela de coeficientes:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

onde a 1ª coluna encontra-se os coeficientes da incógnita x, na 2ª coluna os coeficientes da incógnita y e na 3ª coluna os coeficientes da incógnita z das equações do sistema S.

- Chamaremos de determinante de A, denotado por $detA = D$ o valor numérico da expressão $(aei + bfg + cbd - bdi - afh - ceg)$.

II. Seja B a tabela de coeficientes com a substituição da coluna dos coeficientes da incógnita x pelos termos independentes.

$$\begin{matrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{matrix}$$

- Chamaremos de determinante de B, denotado por $detB = D_1$ o valor numérico da expressão $(biq + cer + fhp - chq - bfr - eip)$.

III. Seja C a tabela de coeficientes com a substituição da coluna dos coeficientes da incógnita y pelos termos independentes.

$$\begin{matrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{matrix}$$

- Chamaremos de determinante de C, denotado por $detC = D_2$ o valor numérico da expressão $(aiq + pfg + cdr - pdi - afr - cgq)$.

IV. Seja D a tabela de coeficientes com a substituição da coluna dos coeficientes da incógnita z pelos termos independentes.

$$\begin{matrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{matrix}$$

- Chamaremos de determinante de D, denotado por $detD = D_3$ o valor numérico da expressão $(aer + bgq + dhp - bdr - ahq - egp)$.

Desta forma, temos que:

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D} \ e \ z = \frac{D_3}{D}$$

3.6.1 Teorema de Cramer.

Consideremos um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas $(m = n)$, chamaremos de matriz de A a tabela em que as colunas são formadas pelos coeficientes das incógnitas das equações do sistema. Assim teremos uma matriz quadrada onde $|A| = detA \neq 0$, com solução possível e única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ tal que:

$$\alpha_1 = \frac{D_i}{D}, \forall \ i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Onde D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i´ésima coluna pela coluna dos termos independentes da equação do sistema.

4. DETERMINANTES

Como já expomos anteriormente a origem dos determinantes remete ao desenvolvimento da regra de Cramer, no século XVII, durante os estudos de processos para resolução de sistemas lineares.

A Regra de Cramer surgiu para solucionar sistemas de n equações e n incógnitas e baseia-se essencialmente nos determinantes de matrizes quadradas para determinar os valores das incógnitas de um sistema linear. Desta forma foram desenvolvidos vários métodos para extração de determinantes visando sua praticidade. Para tanto, se fez necessária uma tabulação dos coeficientes e termos independentes das equações dos sistemas lineares, visando simplificar visualmente os cálculos envolvidos, surgindo assim a ideia de matriz. Portanto tendo em mente uma das importantes utilidades dos determinantes de analisar e/ou solucionar os sistemas lineares, neste Capítulo veremos algumas técnicas de encontrar determinantes.

Como a noção de determinantes surge antes de matriz, decidimos na seção logo abaixo mostrar apenas uma noção do conceito de matrizes, que será aprofundada no Capítulo seguinte.

4.1 Noções de matrizes

Definimos, neste momento, a noção de matriz apenas como uma tabela de valores, formada pelos coeficientes das incógnitas ordenados em colunas ou combinados com a coluna dos termos independentes de um sistema linear, delimitada por colchetes ou chaves.

Esta representação foi criada para facilitar a visualização dos cálculos nas extrações dos determinantes, já que as operações são realizadas apenas entre os coeficientes e termos independentes. Desta forma, a tabela apresentará um formato quadrado, denominado de matriz quadrada, pois o número de linhas (i) é igual ao número de colunas (j).

De uma forma geral, seja S um sistema de n equações nas incógnitas $x_{1,}\, x_{2,}\, x_3, \ldots, x_n$.

$$S\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

temos, portanto, como representação tabular dos coeficientes de S, a matriz quadrada formada pelos elementos a_{ij} $\forall$ i e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ representando as linhas e colunas, respectivamente, na qual chamaremos de matriz de ordem n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

podendo ainda, uma das colunas dos coeficientes ser substituida integralmente pelos termos independentes, ou seja:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_i & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & b_i & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & b_i & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

<u>*Observação:*</u> As matrizes quadradas de ordem n admitem duas diagnoais: diagonal principal, compostas pelos elementos $a_{ij}, i = j, \forall\ i\ e\ j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e a diaginal secundária, composta pelos elementos $a_{ij}, i + j = n + 1, \forall\ i\ e\ j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ou seja:

Seja a matriz M de ordem n, representando os coeficientes de um sistema S

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

temos que:

- diagonal principal de $M = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nn}\}$ e
- diagonal secundária de $M = \{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{n1}\}$.

Exemplo: Seja A uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- diagonal principal de $A = \{1, 6, 9\}$ e
- diagonal secundária de $A = \{3, 6, 5\}$.

4.2 Definição de determinante $(\boldsymbol{n \leq 3})$

Seja M uma matriz de ordem n, pertencente ao conjunto de matrizes quadradas. Indicaremos o determinante de M por $\det M$, $|M|$ ou a tabela dos elementos da matriz M delimitada por duas linhas verticais, que poderá ser obtido através da operação de seus elementos, da seguinte forma:

i) Se M é de ordem $n = 1$, então $\det M$ é o único elemento de M.

$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$

Exemplo

$M = [7] \Rightarrow \det M = 7$

$ii)$ Se M é de ordem $n = 2$, então $\det M$ é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21} \qquad \text{(V)}$$

Exemplo (1)

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = 3 \,.\, 2 - 5 \,.\, (-2) = 6 + 10 = 16$$

Exemplo (2)

$$M = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \cos x \,.\, \cos y - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} y = \cos(x + y)$$

$iii)$ Se M é de ordem $n = 3$, isto é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11} \,.\, a_{22} \,.\, a_{33} + a_{12} \,.\, a_{23} \,.\, a_{31} + a_{13} \,.\, a_{21} \,.\, a_{32} - \qquad \text{(VI)}$$

$$a_{13} \,.\, a_{21} \,.\, a_{32} - a_{11} \,.\, a_{23} \,.\, a_{32} - a_{12} \,.\, a_{21} \,.\, a_{33}$$

Esta definição poderá ser obtida através da regra de Sarrus[1], seguindo os seguintes passos:

<u>*1º passo*</u>

Reescrevemos as colunas da matriz e repetimos do seu lado direito as duas primeiras;

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

<u>*2º passo*</u>

Os termos precedidos pelo sinal de + são obtidos multiplicando-se os elementos segundo a direção da diagonal principal.

$$a_{11} \,.\, a_{22} \,.\, a_{33};\ a_{12} \,.\, a_{23} \,.\, a_{31};\ a_{13} \,.\, a_{21} \,.\, a_{32}$$

<u>*3º passo*</u>

Os termos precedidos pelo sinal de – são obtidos multiplicando-se os elementos segundo a direção da diagonal secundária.

$$a_{13} \,.\, a_{21} \,.\, a_{32};\ a_{11} \,.\, a_{23} \,.\, a_{32};\ a_{12} \,.\, a_{21} \,.\, a_{33}$$

Isto é:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} & \\
 & & & \searrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \swarrow & & \\
 & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} & \\
 & & & \swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow & & \\
 & & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
- & & - & & - & & & & + & & + & & +
\end{array}$$

Portanto o determinante de uma matriz de ordem 3, pela regra de Sarrus, é obtido através do somatório dos produtos do 2º passo e 3º passo.

Exemplo (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\,.\,2\,.\,2 + 3\,.\,(-3)\,.\,1 + 4\,.\,5\,.\,4 - (4\,.\,2\,.\,1)\ - [1.\,(-3).\,4]\ - (3\,.\,5\,.\,2)$$
$$= 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$

Exemplo (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.\,1\,.\,1 + 1\,.\,0\,.\,0 + 0\,.\,0\,.\,0\ - (0\,.\,1\,.\,0)\ - (1\,.\,0\,.\,1)\ - (1\,.\,0\,.\,1) = 1 +$$
$$0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

Exemplo (3)

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 9\,.\,1\,.\,6 + 7\,.\,13\,.\,5 + 11\,.\,(-2)\,.\,3\ - (11\,.\,1\,.\,5)\ - (9\,.\,13\,.\,3)$$
$$- [7\,.\,(-2).\,3] = 54 + 455\ - 66\ - 55 - 351\ + 42 = 79$$

4.3 Menor complementar e cofator

4.3.1 Menor complementar

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$ e $a_{ij}\ \in M,\ \forall\, i\ e\ j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ representando as ordens das linhas e colunas, respectivamente, definimos *menor complementar do elemento* a_{ij}, e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém, suprimindo a linha i e a coluna j de M.

Vejamos a determinação dos menores complementares para uma matriz genérica de ordem 2.

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então temos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \text{—}\, a_{12} \\ | & \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \ D_{11} = |a_{22}| = \ a_{22} \ ;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, \text{—} & \boxed{a_{12}} \\ & | \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \ D_{12} = |a_{21}| = a_{21} \ ;$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ | & \\ \boxed{\mathrm{a}_{21}} & \text{—}\, \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \ \mathrm{D}_{21} = |\mathrm{a}_{12}| \ = \mathrm{a}_{12} \ \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ & | \\ \mathrm{a}_{21}\, \text{—} & \boxed{\mathrm{a}_{22}} \end{bmatrix} \Rightarrow \ \mathrm{D}_{22} = |\mathrm{a}_{11}| \ = \mathrm{a}_{11}.$$

Exemplo: Seja

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

então temos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & \text{—}\, 6 \\ | & \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \ D_{11} = |8| = \ 8 \ ;$$

$$\begin{bmatrix} 5\, \text{—} & \boxed{6} \\ & | \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \ D_{12} = |7| = 7 \ ;$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ | & \\ \boxed{7} & \text{—}\, 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \ \mathrm{D}_{21} = |6| \ = 6 \ \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ & | \\ 7\, \text{—} & \boxed{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \ \mathrm{D}_{22} = |5| \ = 5.$$

Vejamos a determinação dos menores complementares para uma matriz genérica de ordem 3.

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então temos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & - & a_{12} & - & a_{13} \\ | & & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ | & & & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \,.\, a_{33} - a_{23} \,.\, a_{32};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & - & \boxed{a_{12}} & - & a_{13} \\ & & | & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & | & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \,.\, a_{33} - a_{23} \,.\, a_{31};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & - & a_{12} & - & \boxed{a_{13}} \\ & & & & | \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & & & | \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \,.\, a_{32} - a_{22} \,.\, a_{31};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ | & & & & \\ \boxed{a_{21}} & - & a_{22} & - & a_{23} \\ | & & & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \,.\, a_{33} - a_{13} \,.\, a_{32};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & | & & \\ a_{21} & - & \boxed{a_{22}} & - & a_{23} \\ & & | & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{33} - a_{13} \,.\, a_{31};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & & & | \\ a_{21} & — & a_{22} & — & \boxed{a_{23}} \\ & & & & | \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{32} - a_{12} \,.\, a_{31};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ | & & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ | & & & & \\ \boxed{a_{31}} & — & a_{32} & — & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} \,.\, a_{23} - a_{13} \,.\, a_{22};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & | & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & | & & \\ a_{31} & — & \boxed{a_{32}} & — & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{23} - a_{13} \,.\, a_{21};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & & & | \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & & & | \\ a_{31} & — & a_{32} & — & \boxed{a_{33}} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21};$$

Exemplo: Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \tag{VII}$$

então temos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & — & 2 & — & 3 \\ | & & & & \\ 4 & & 6 & & 7 \\ | & & & & \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \,.\, 9 - 7 \,.\, 8 = -2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & — & \boxed{2} & — & 3 \\ & & | & & \\ 4 & & 6 & & 7 \\ & & | & & \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \,.\, 9 - 7 \,.\, 5 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & — & 2 & — & \boxed{3} \\ & & & & | \\ 4 & & 6 & & 7 \\ & & & & | \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 4.8 - 6.5 = 2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ | & & & & \\ \boxed{4} & — & 6 & — & 7 \\ | & & & & \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2.9 - 3.8 = -6;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ & & | & & \\ 4 & — & \boxed{6} & — & 7 \\ & & | & & \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 1.9 - 3.5 = -6;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ & & & & | \\ 4 & — & 6 & — & \boxed{7} \\ & & & & | \\ 5 & & 8 & & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1.8 - 2.5 = -2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ | & & & & \\ 4 & & 6 & & 7 \\ | & & & & \\ \boxed{5} & — & 8 & — & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2.7 - 3.6 = -4;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ & & | & & \\ 4 & & 6 & & 7 \\ & & | & & \\ 5 & — & \boxed{8} & — & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1.7 - 3.4 = -5 \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 2 & & 3 \\ & & & & | \\ 4 & & 6 & & 7 \\ & & & & | \\ 5 & — & 8 & — & \boxed{9} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.4 = -2.$$

4.3.2 Cofator

Consideremos uma matriz de ordem $n \geq 2$ e seja $a_{ij} \in M,\ \forall\ i\ e\ j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ representando as ordens das linhas e colunas, respectivamente definimos cofator do elemento a_{ij}, e indicamos por A_{ij}, como sendo o número: $(-1)^{i+j} .\ D_{ij}$.

Tomando como exemplo (VII) temos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

onde:

$A_{11} = (-1)^{1+1} .\ D_{11} = (-1)^2 . (-2) = 1 . (-2) = -2;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} .\ D_{12} = (-1)^3 .\ 1 = (-1) .\ 1 = -1;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} .\ D_{13} = (-1)^4 .\ 2 = 1 .\ 2 = 2;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} .\ D_{21} = (-1)^3 . -6 = (-1) . (-6) = 6;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} .\ D_{22} = (-1)^4 . (-6) = 1. (-6) = -6;$

$A_{23} = (-1)^{2+3} .\ D_{23} = (-1)^5 . (-2) = (-1). (-2) = 2;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} .\ D_{31} = (-1)^4 . (-4) = 1. (-4) = -4;$

$A_{32} = (-1)^{3+2} .\ D_{32} = (-1)^5 . (-5) = (-1). (-5) = 5;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} .\ D_{33} = (-1)^6 . (-2) = 1. (-2) = -2.$

4.4 Definição de determinante de ordem n (caso geral)

Com o auxílio de cofator vamos definir determinantes para matrizes de ordem n qualquer.

Seja M uma matriz de ordem n. Definimos determinante da matriz M, e indicamos por $\det M$, da seguinte forma:

i) Se M é de ordem 1, então $M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$

ii) Se M é de ordem ≥ 2, então:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e definimos } \det M = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \boxed{\cdots} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} . A_{11} + a_{21} . A_{21} + a_{31} . A_{31} + \cdots + a_{n1} . A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} . A_{i1}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem n é a soma dos produtos dos elementos da 1º coluna por seus respectivos cofatores.

Exemplo (1)

$$\begin{vmatrix} \boxed{a} & b \\ \boxed{c} & d \end{vmatrix} = a\,.\,A_{11} + c\,.\,A_{21} = a\,.\,(-1)^2\,.\,d + c\,.\,(-1)^3\,.\,b = a\,.\,d - c\,.\,b,$$

confirmando a definição particular (V)

Exemplo (2)

$$\begin{vmatrix} \boxed{a} & b & c \\ \boxed{d} & d & e \\ \boxed{f} & g & h \end{vmatrix} = a\,.\,A_{11} + d\,.\,A_{21} + f\,.\,A_{31} =$$

$$a\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} + d\,.\,(-1)^3\,.\begin{vmatrix} b & c \\ g & h \end{vmatrix} + f\,.\,(-1)^4\,.\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} =$$

$$a\,.\,(d\,.\,h - e\,.\,g) - d\,.\,(b\,.\,h - c\,.\,g) + f\,.\,(b\,.\,e\ -\ c\,.\,d) =$$

$$a\,.\,d\,.\,h - a\,.\,e\,.\,g - d\,.\,b\,.\,h - c\,.\,d\,.\,g + b\,.\,e\,.\,f\ -\ c\,.\,d\,.\,f,$$

confirmando a definição particular (VI) da Regra de Sarrus.

Exemplo (3)

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 & -2 \\ \boxed{0} & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & -2 \\ \boxed{0} & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\,.\,A_{11} + 0\,.\,A_{21} + 0\,.\,A_{31} + 0\,.\,A_{41} = 3\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3\,.\,\{(2\,.\,1\,.\,3) + [0\,.\,(-2)\,.\,1] + [(4)\,.\,4\,.\,3] - [(4)\,.\,1\,.\,1] - [2\,.\,(-2).\,3] - (0\,.\,4\,.\,3)\} =$$

$$3\,.\,\{6 + 0 + 48 - 4 + 12 - 0\} = 3\,.\,62 = 186$$

Exemplo (4)

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{3} & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{4} & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1\,.\,A_{11} + 2\,.\,A_{21} + 3\,.\,A_{31} + 4\,.\,A_{41} =$$

$$1\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 3\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$4\,.\,(-1)^2\,.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\,.\,(20) - 2\,.\,(-2)\ + 3\,.\,(-48) - 4\,.\,(14) = -176$$

<u>*Observação:*</u> Notemos que quando a 1ª coluna não contem zeros o processo se torna extremamente trabalhoso, entretanto podemos atenuar esta situação com o teorema a seguir.

4.5 Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma do produto dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores. Isto é:

- Se escolhermos a coluna j da matriz M, sendo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então: $\det M = a_{1j} \,.\, A_{1j} + a_{2j} \,.\, A_{2j} + \dots + \; a_{nj} \,.\, A_{nj}$

- Se escolhermos a linha i da matriz M, sendo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então: $\det M = a_{i1} \,.\, A_{i1} + a_{i2} \,.\, A_{i2} + \dots + \; a_{in} \,.\, A_{in}$

Portanto, não dependemos apenas dos elementos da primeira coluna para calcular um determinante de uma matriz de ordem n, os elementos de qualquer fila (linha ou coluna) e seus respectivos cofatores conseguem definir um determinante.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Se escolhermos a terceira linha para realizar o calculo da definição do determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Assim:

$$\det M = a_{31} \,.\, A_{31} + a_{32} \,.\, A_{32} + a_{33} \,.\, A_{33} + a_{34} \,.\, A_{34} =$$
$$a_{31} \,.\, A_{31} + 0 \,.\, A_{32} + 0 \,.\, A_{33} + 2 \,.\, A_{34} =$$
$$3 \,.\, A_{31} + 2 \,.\, A_{34}$$

Percebemos que ao escolhermos a 3ª linha, para o cálculo do determinante, diminuímos nosso trabalho, pois só precisamos determinar 2 cofatores. Entretanto, se tivéssemos escolhido a 1ª coluna como define o teorema geral, teríamos que calcular 4 cofatores, o que demandaria mais cálculos.

Portanto, baseado no Teorema de Laplace, devemos escolher para cálculo do determinante de uma matriz de ordem n, uma fila mais conveniente, ou seja, que possuir a maior quantidade de zeros.

Observação: Caso a fila da matriz de ordem n for toda composta por zeros, então seu determinante também será zero.

4.5 Regra de Chiò

A Regra de Chiò[2] é um processo útil e bastante prático para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante de ordem $n \geq 2$, tornando-o mais simples de se extrair.

Para iniciarmos o processo é essencial que o primeiro termo da matriz quadrada (a_{11}) seja igual a 1. Caso $a_{11} \neq 1$, podemos utilizar o Teorema de Jacobi[3], que basicamente permutas filas paralelas e substitui uma fila pela soma dela com outra paralela (somando termo a termo), até que consigamos ter $a_{11} = 1$, pois tais operações não alteram o determinante.

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geq 2$, tal que $a_{11} = 1$, isto é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Adicionemos à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por -a_{12}.
- Adicionemos à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por -a_{13}.
- $\cdots$
- Adicionemos à i´ésima coluna, a 1ª multiplicada por -a_{1j}.
- $\cdots$
- Adicionemos à n´ésima coluna, a 1ª multiplicada por -a_{1n}.

Desta forma obteremos a matriz M' de forma que $\det M' = \det M$.

Ou seja:

$$\det M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}.a_{12} & a_{23} - a_{21}.a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}.a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}.a_{12} & a_{33} - a_{31}.a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}.a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}.a_{12} & a_{n3} - a_{n1}.a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}.a_{1n} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Laplace, temos:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}.a_{12} & a_{23} - a_{21}.a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21}.a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}.a_{12} & a_{33} - a_{31}.a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31}.a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - a_{n1}.a_{12} & a_{n3} - a_{n1}.a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1}.a_{1n} \end{vmatrix},$$

onde $\det M'$ é de ordem $(n-1)$. Ou seja, para utilizar a regra de Chiò, devemos seguir os seguintes passos:

<u>1º passo</u>

Dada a matriz M, verificar se o elemento $a_{11} = 1$, caso contrário aplicar o teorema de Jacobi até que $a_{11} = 1$.

<u>2º passo</u>

Suprimir a 1ª linha e 1ª coluna de M.

<u>3º passo</u>

Subtraímos de cada elemento restante na matriz, o produto entre os elementos que se encontram nas “extremidades perpendiculares” traçada do elemento considerado, à 1ª linha e 1ª coluna.

4º passo

Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem $(n-1)$, cujo o determinante é igual ao de M.

Observações:

- Se na matriz M, $a_{11} \neq 1$, e existir algum outro elemento igual a 1, podemos através de trocas de filas paralelas, criar outras matrizes cujo $a_{11} = 1$.
- Caso a matriz M não tenha nenhum elemento igual a 1, poderemos utilizar o teorema de Jacobi, para criar uma nova matriz M' até que tenha um elemento igual a 1.

Exemplo: Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det M = \left|\begin{array}{c:ccc} 1 & 2 & 4 & 2 \\ \hdashline 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{array}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} 7-(2\,.\;3) & 5-(4\,.3) & 6-(2\,.\;3) \\ 10-(2\,.1) & -4-(4\,.1) & 5-(2\,.1) \\ 8-(2\,.3) & 2-(4\,.3) & 3-(2\,.\;3) \end{vmatrix} =$$

$$\left|\begin{array}{c:cc} 1 & -7 & 0 \\ \hdashline 8 & -8 & 3 \\ 2 & -10 & -3 \end{array}\right| =$$

$$\begin{vmatrix} -8-(-7\,.8) & 3-(0\,.8) \\ -10-(-7\,.2) & -3\,(0\,.2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8+56 & 3-0 \\ -10+14 & -3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$144-12=-156$$

5. MATRIZES

5.1 Definições e tipos de matrizes

Antes mesmo de Sylvester[4] batizar de matriz uma tabela de números delimitada por símbolos (colchetes ou parênteses) que representava de forma ordenada em colunas as incógnitas e termos independentes das equações de um sistema linear, estas já eram utilizadas exclusivamente como ferramentas auxiliares nos cálculos de determinantes. Inclusive a palavra matriz, vem do latim *matrix*, que significa útero materno, já que para Sylvester a tabela de número era um órgão que gerava vários determinantes.

Entretanto foi Cayley[5] que percebeu o seu significado mais amplo e introduziu sua notação para simplificar uma transformação linear. Assim no lugar de:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

escrevia:

$$(x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . (x, y)$$

construindo assim o produto de matrizes, matriz inversa, que pressupõe o elemento neutro (matriz identidade) e posteriormente as operações de adição, multiplicação por escalar e as propriedades destas operações, tornando suas aplicações mais amplas, tornando-as independentes dos determinantes, como veremos a seguir.

5.1.1 Definição

Dados dois números m e n naturais e não nulos, denomina-se matriz m por n (indica-se $m\ x\ n$), toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Exemplos:

I. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ \sqrt{2} & \frac{3}{5} & 0{,}8 \end{bmatrix}$ é uma matriz $2\ x\ 3$

4 James Joseph Sylvester (1814-1897) foi um matemático inglês que contribuiu fundamentalmente no desenvolvimento da teoria matricial, teoria dos invariantes, dos números e análise combinatória.
5 Arthur Cayley (1821-1895) foi um matemático e professor britânico que contribuiu para o desenvolvimento da multiplicação matricial e o teorema de Cayley.

II. $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ \sqrt{3} & 8 \\ 110 & 3{,}8 \end{bmatrix}$ é uma matriz $3\ x\ 2$

III. $[3 \quad -5 \quad 9]$ é uma matriz $1\ x\ 3$

IV. $\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 3{,}8 \end{bmatrix}$ é uma matriz $3\ x\ 1$

V. $\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz $2\ x\ 2$

Podemos encontrar exemplo de matrizes, inclusive, no nosso cotidiano.

Exemplo:

5.1 – Tabela semanal de horas por atividades físicas

Dia da semana	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr a 12km/h	Hidroginástica
2^a feira	1	0	0	1
3^a feira	0	0	1	0
4^a feira	0,5	0,5	0	0
5^a feira	0	0	0,5	1,5
6^a feira	0,5	1	0	0

Fonte: *próprio autor*

5.1.2 Representação de matrizes

Em uma matriz qualquer M, cada elemento é representado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Foi convencionado que as linhas devem ser ordenadas de cima para baixo (de 1 a m) e as colunas da esquerda para a direita (de 1 a n). Desta forma, uma matriz $m\ x\ n$, pode ser representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz $m\ x\ n$ também pode ser indicada por $M = (a_{ij})$, $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ e $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m\ x\ n}$.

5.1.3 Matrizes especiais

$a)$ Matriz linha: é toda matriz do tipo $1\ x\ n$, isto é, que possui apenas uma única linha (Exemplo III da página 60).

$b)$ Matriz coluna: é toda matriz do tipo $m\ x\ 1$, isto é, que possui apenas uma única coluna (Exemplo IV da página 60).

$c)$ Matriz nula: é toda a matriz que possui todos os elementos iguais a zeros (nulos).

$d)$ Matriz quadrada: é toda a matriz do tipo $n\ x\ n$, ou seja, que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Este tipo de matriz possui duas diagonais:

- diagonal principal: são todos os elementos de uma matriz quadrada de ordem n que possuem os dois índices iguais, isto é:

$$\left\{a_{ij} \middle| i = j\right\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

- diagonal secundaria: são todos os elementos de uma matriz quadrada de ordem n que possuem a soma dos índices igual a $n + 1$, isto é:

$$\left\{a_{ij} \middle| i + j = n + 1\right\} = \{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}\}$$

$e)$ Matriz diagonal: é toda matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos, com exceção dos elementos da diagonal principal, são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$[a_{ij}]_{n\,x\,n}, tal\ que\ \begin{cases} a_{ij} \neq 0, & se\ i = j \\ a_{ij} = 0, & se\ i \neq j \end{cases}$$

$f)$ Matriz identidade: é toda matriz quadrada de ordem n, denominada I_n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, e os demais são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$[x_{ij}]_{n\,x\,n}, tal\ que\ \begin{cases} x_{ij} = 1, & se\ i = j \\ x_{ij} = 0, & se\ i \neq j \end{cases}$$

5.2 Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, são ditas iguais quando são de mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais, os seja, $a_{ij} = b_{ij}, \forall\ i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\forall\ j \in\ \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, pois\ a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ a_{21} = b_{21}\ e\ a_{22} = b_{22}.$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, pois\ a_{21} \neq b_{21}\ e\ a_{22} \neq b_{22}.$

5.3 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, denomina-se soma de $A + B$ uma terceira matriz $C = (c_{ij})_{m\,x\,n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i \in\ \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\forall\ j \in\ \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Ou seja, a soma de duas matrizes A e B de ordem $m\ x\ n$ é uma matriz C de mesmo tipo de A e B em que cada um de seus elementos é a soma dos elementos correspondentes de A com B.

Exemplos

I. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+8 & 5+0 & 9+5 \\ (-2)+6 & (-1)+1 & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 14 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

II. $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

5.3.1 Propriedades da soma de matrizes

$i)$ é associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$, para toda matriz A,B,C do tipo $m\,x\,n$.

$ii)$ é comutativa: $A+B=B+A$, para toda matriz A,B do tipo $m\,x\,n$.

$iii)$ possui elemento neutro: $\exists\ M|A+M=A$, para toda matriz A do tipo $m\,x\,n$.

$iv)$ todo elemento tem simétrico:$\forall\ A$ do tipo $m\,x\,n$, $\exists\ A'|A+A'=M=0$.

5.3.2 Matriz oposta

Dada a matriz $B=(b_{ij})_{m\,x\,n}$, chamamos de matriz oposta (indica-se por $-B$) a matriz $B'|\ B\ +\ B'=0$.

Exemplo: Seja

$$B\ =\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

- Façamos a matriz $-B$ mudando os sinais dos elementos. Assim temos:

$$-B=\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}, \text{ logo}$$

$$B+(-B)=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-a & b-b & c-c \\ d-d & e-e & f-f \\ g-g & h-h & i-i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $-B$ é a matriz oposta de B.

5.3.3 Diferença de matrizes

Dadas duas matrizes $A=(a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B=(b_{ij})_{m\,x\,n}$, denomina-se diferença de A por B a soma de A pela oposta de B, ou seja $A+(-B)=A-B$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 3 & -4 & -1 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 2+0 & 5+(-1) & 0+(-9) \\ (-3)+3 & 7+(-4) & 2+(-1) \\ 1+(-6) & -8+(-2) & 8+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & 1 \\ -5 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

5.4 Multiplicação de matrizes

5.4.1 Produto de número por matriz

Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, $k.A$ é uma matriz $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, tal $b_{ij} = ka_{ij}$ $\forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\forall\, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Ou seja, o produto de um número k por uma matriz A é uma matriz B de mesmo tipo de A onde cada um de seus elementos é um produto de um elemento correspondente de A multiplicado por k.

Exemplo

$$3\,.\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,.\,1 & 3\,.\,(-2) & 3\,.\,3 \\ 3\,.\,4 & 3\,.\,5 & 3\,.\,(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

5.4.2 Propriedades do produto de um número por matriz

$i)\ a\,.(b\,.A) = (a\,.b)\,.A$

$ii)\ a\,.(A + B) = a\,.A + a\,.B$

$iii)\ (a + b)\,.A = a\,.A + b\,.A$

$iv)\ 1\,.A = A$

5.4.3 Produto de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{jk})_{n\,x\,p}$, denomina-se de produto AB uma terceira matriz $C = (c_{ik})_{m\,x\,p}$, tal que:

$$c_{ik} = a_{i1}\,.\,b_{1k} + a_{i2}\,.\,b_{2k} + a_{i3}\,.\,b_{3k} + \cdots + a_{im}\,.\,b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.\,b_{jk}$$

Para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$

Observações:

$i)$ O produto de matrizes AB só é garantido se e somente se o numero de colunas de A for igual ao número de linhas de B

$ii)$ O produto de matrizes AB resulta em uma matriz C onde o número de linhas é igual ao de A e o de colunas igual ao de B

$iii)$ Um elemento da c_{ik} da matriz $C = AB$ deve ser obtido seguindo os passos:

1º passo

Toma-se a linha i da matriz A: $\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \cdots \quad a_{in}}$ (n elementos)

2º passo

Toma-se a coluna k da matriz A:

$$\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}} \text{ (n elementos)}$$

3º passo

Coloca-se a linha i de A na vertical, ao lado da coluna k de B.:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}}$$

4º passo

Calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} & \cdot & b_{1k} \\ a_{2k} & \cdot & b_{2k} \\ a_{3k} & \cdot & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk} & \cdot & b_{nk} \end{matrix}}$$

5º passo

Soma-se esses n produtos obtendo-se c_{ik}

Exemplo (1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3.2 & 2.3+3.1 & 2.0+3.1 \\ 4.1+6.2 & 4.3+6.1 & 4.0+6.1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2+6 & 6+3 & 0+3 \\ 4+12 & 12+6 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>*Teorema:*</u>

Se $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, então $AI_n = A$ e $I_nA = A$

5.4.4 Propriedades do produto de matrizes

$i)$ é associativa: $(AB)C = A(BC)$, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n},\ B = (b_{jk})_{n\,x\,p},\ C = (c_{kl})_{m\,x\,n}$

$ii)$ é distributiva à direita em relação a adição: $(A + B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n},\ B = (b_{jk})_{m\,x\,n},\ C = (c_{jk})_{n\,x\,p}$

$iii)$ é distributiva à esquerda em relação a adição: $C(A + B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n},\ B = (b_{jk})_{m\,x\,n},\ C = (c_{ki})_{p\,xm}$

$iv)$ $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, $B = (b_{jk})_{n\,x\,p}$ e k um número real

<u>*Observação:*</u>

É importante frisar que o produto de matrizes não admite a propriedade comutativa (em geral).

- Dada duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n},\ B = (b_{jk})_{n\,x\,p}$ é falso afirmar que $AB = BA$, pois existem casos que $\exists\ AB$ e $\nexists\ BA$, para isto basta $m \neq p$.
- Dada duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n},\ B = (b_{ji})_{n\,x\,m}$ é falso afirmar que $AB = BA$, pois até existem casos que $\exists\ AB$ e $\exists\ BA$, porém são de tipos diferentes. Isto ocorre quando $m \neq n$.
- Mesmo quando as matrizes A e B são de mesma ordem, quase sempre $AB \neq BA$

- Quando o produto de matrizes $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Uma condição necessária para que isso aconteça é ambas serem quadradas de mesma ordem.

Exemplos

I. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $comuta\ com$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

II. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $comuta\ com$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

III. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $comuta\ com$ $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

- É também importante salientar que a implicação

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0\ ou\ B = 0$$

é falsa, pois é possível encontrarmos duas matrizes não nulas onde seu produto é a matriz nula.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.5 Matriz transposta

Dadas a matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, chamaremos de transposta de A, a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\,x\,m}$, de $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e todo j. Logo a 1ª coluna de A^t é igual a 1ª linha de A. Repetindo o processo, concluímos que as colunas de A^t são ordenadamente iguais as linhas de A.

Exemplo

I. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

II. Se $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

III. Se $C = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.4.6 Propriedades de matriz transposta

$i)$ $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$

$ii)$ $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$

$iii)$ $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$

$iv)$ Se $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{jk})_{n\,x\,p}$, então $(AB)^t = A^t B^t$

5.4.7 Matriz simétrica

Uma matriz simétrica é uma matriz que é igual à sua transposta. Para que esta definição faça sentido, as matrizes simétricas são necessariamente quadradas. Ou seja, se $A = \left(a_{ij}\right)$ de ordem n, dizemos que A é simétrica quando $A = A^t$. Logo, A^t também será uma matriz quadrada de ordem n. Assim, temos:

$$a_{ij} = a_{ji}, \forall\, i, \forall\, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação a diagonal principal são iguais.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \text{ então temos que:}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \text{ portanto } A = A^t.$$

Podemos observar que os elementos simétricos em relação à diagonal principal da matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3x3}$, são iguais, ou seja: $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}$ e $a_{23} = a_{32}$.

5.4.8 Matriz antissimétrica

Uma matriz antissimétrica é uma matriz transposta que é igual à sua matriz oposta. Para que esta definição faça sentido, as matrizes antissimétricas são necessariamente quadradas. Ou seja, se $A = \left(a_{ij}\right)$ de ordem n, dizemos que A é antissimétrica quando $-A = A^t \Rightarrow A = -A^t$. Então, A^t e $-A$ também serão matrizes quadradas de ordem n. Assim, temos:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\ e\ \forall\, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Isto é, os elementos da diagonal principal são nulos e os simetricamente dispostos em relação a ela são opostos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

5.5 Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, chamamos de matriz inversa de A, caso exista, a matriz A^{-1} (que é única), tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, como A^{-1} comuta com A, A^{-1} também é uma matriz quadrada de ordem n.

Exemplos:

I. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois:

$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$ e $A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

II. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, pois:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \text{ e}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

5.5.1 Determinação de uma matriz inversa

Existem vários métodos para se determinar a inversa de uma matriz quando possível.

Exemplo: Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, podemos determinar a sua inversa B^{-1}através da expressão $B.B^{-1} = I_2$, onde incialmente B^{-1}, será escrita como matriz genérica de ordem 2, desta forma teremos:

$$B.B^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \\ b_{11} + 3b_{21} & b_{12} + 3b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(1)\begin{cases}2b_{11}+b_{21}=1\\ b_{11}+3b_{21}=0\end{cases} \text{ e } (2)\begin{cases}2b_{12}+b_{22}=0\\ b_{12}+3b_{22}=1\end{cases},$$

desta forma, resolveremos o sistema (1) e (2) para encontrarmos os elementos da matriz B^{-1}.

- Iniciamos isolando b_{21} da 1ª equação do sistema (1) temos: da primeira equação:

$$b_{21}=1-2b_{11}\,.$$

- Substituindo: b_{21} na segunda equação do sistema (1), temos:

$$b_{11}+3(1-2b_{11})=0 \Rightarrow b_{11}+3-6b_{11}=0 \Rightarrow 5b_{11}=3 \Rightarrow b_{11}=\frac{3}{5}$$

- Substituindo: b_{11} na primeira equação do sistema (1), temos:

$$2\,.\,\frac{3}{5}+b_{21}=1 \Rightarrow \frac{6}{5}+b_{21}=1 \Rightarrow b_{21}=1-\frac{6}{5} \Rightarrow b_{21}=1-\frac{6}{5} \Rightarrow b_{21}=-\frac{1}{5}$$

- Isolando b_{22}, na 1ª equação do sistema (2) temos:

$$b_{22}=-2b_{12}$$

- Substituindo: b_{22} na segunda equação do sistema (2), temos:

$$b_{12}+3(-2b_{12})=1 \Rightarrow b_{12}-6b_{12}=1 \Rightarrow -5b_{12}=1 \Rightarrow b_{12}=-\frac{1}{5}$$

- Substituindo: b_{12} na primeira equação do sistema (2), temos:

$$2\,.(-\frac{1}{5})+b_{22}=0 \Rightarrow b_{22}=-\frac{2}{5}\text{, Portanto:}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

Veremos a seguir um método prático e rápido de obtenção de uma matriz inversa de ordem 2, utilizando determinante.

5.5.2 Método prático de obtenção da inversa de uma matriz de ordem 2

Considerando M uma matriz quadrada de ordem 2, para obtermos a inversa de M, ou seja, M^{-1}, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1

Calcular o $\det M$

Passo 2

Dividir cada um dos termos da matriz M pelo $\det M$

<u>*Passo 3*</u>

Permutar os elementos da diagonal principal

<u>*Passo 4*</u>

Inverter o sinal da diagonal secundária.

Exemplo: Seja

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculemos a sua inversa.

1º Passo $\rightarrow \det M = (2\,.\,3) - (1\,.\,1) = 6 - 1 = 5$

2º Passo $\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

3º Passo $\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

4º Passo $\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Portanto: $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

5.6 Forma matricial de um sistema linear

A ideia de representar sistemas lineares como matrizes tem como objetivo utilizar as propriedades matriciais para auxiliar e facilitar a determinação dos valores das incógnitas envolvidas no sistema. Como podemos verificar a seguir.

5.6.1 Matrizes associadas a um sistema linear

De uma forma geral, seja S um sistema de $m \geq 1$ equações nas incógnitas $x_{1,}\, x_{2,}\, x_3, \ldots, x_n$, com $m, n \in N$.

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

teremos três matrizes associadas ao sistema S:

- $C = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, denominada matriz dos coeficientes.
- $X = (x_j)_{n\,x\,1}$, denominada matriz das incógnitas. (matriz coluna)
- $b = (b_i)_{m\,x\,1}$, denominada matriz dos termos independentes (matriz coluna)

$\forall\, i \in \{1,2,3,\dots,n\}\; e\; \forall\, j \in \{1,2,3,\dots,n\}$ Ou seja:

$$S\quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

Portanto o sistema linear S tem sua representação matricial igual a

$$\boxed{C\,.X\,=\,b}$$

Exemplo (1): Seja o sistema linear:

$$S_1\ \begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

temos então que:

- $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, é a matriz dos coeficientes.
- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, é a matriz das incógnitas.
- $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, é a matriz dos termos independentes.

Portanto a forma matricial do sistema S_1 será $[C]_{2\,x\,3} \,.\, [X]_{3\,x\,1} = [b]_{2\,x\,1}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo (2): Seja o sistema linear:

$$S_2\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

temos então que:

- $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, é a matriz dos coeficientes.
- $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, é a matriz das incógnitas.
- $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, é a matriz dos termos independentes.

Portanto a forma matricial do sistema S_1 será $[C]_{3\,x\,4} \,.\, [X]_{4\,x\,1} = [b]_{3\,x\,1}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5.6.2 Matriz aumentada ou matriz completa

Esta forma matricial basicamente é a união de duas matrizes associadas a um sistema linear: A matriz dos coeficientes C, também chamada de matriz incompleta, e a matriz dos termos independentes. Assim:

De uma forma geral, seja S um sistema de $m \geq 1$ equações nas incógnitas $x_{1,}\, x_{2,}\, x_3, \ldots, x_n$, com $m, n \in \aleph$.

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

Temos que a matriz $A = [C|b]$ é a matriz ampliada do sistema S, tal que:

- $C = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, é a matriz dos coeficientes. (matriz incompleta)
- $b = (b_i)_{m\,x\,1}$, é a matriz dos termos independentes. (matriz coluna)

$\forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}\; e\; \forall\, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Ou seja:

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{C} & \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_m \end{matrix}}_{b} \end{array}\right]}_{[C|b]}$$

Portanto $A = [C|b]_{m\,x\,(n+1)}$, a matriz aumentada do sistema S é uma forma de matricial de representação matricial de um sistema linear.

<u>*Observação:*</u> Este formato é muito utilizado no método do escalonamento para resolução de sistemas lineares.

Exemplo (1): Seja o sistema linear

$$S_1 \begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

temos então que:

- $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, é a matriz dos coeficientes.
- $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, é a matriz dos termos independentes.

Portanto a forma matricial do sistema S_1 será $A = [C|b]_{2\,x\,4}$, ou seja:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo (2): Seja o sistema linear:

$$S_2 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

temos então que:

- $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, é a matriz de coeficientes.
- $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, é a matriz de termos independentes.

Portanto a forma matricial do sistema S_2 será $= [C|b]_{3\,x\,5}$, ou seja:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

5.6 Método de resolução de sistemas lineares através da matriz inversa

Este método prático de resolução de sistemas lineares é aplicado em sistemas com o número equações igual ao número de incógnitas e utiliza a forma matricial de um sistema. Vejamos:

Seja S um sistema de $n \geq 1$ equações nas incógnitas $x_{1,}\, x_{2,}\, x_3, \ldots, x_n$, com $n \in N$, isto é:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

onde sua forma matricial é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow C\,.X = b$$

- Se C é invertível, então C admite inversa. Logo, multipliquemos C^{-1} pela esquerda em ambos os membros da equação. Assim temos:

$$C^{-1}.C\,.X = C^{-1}\,.\,b$$

- Como a multiplicação de uma matriz quadrada de ordem n pela sua inversa, ou vice-versa, resulta na matriz identidade de mesma ordem, temos:

$$I\,.\,X = C^{-1}\,.\,b \Rightarrow$$

- Como a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação matricial, temos:

$$\boxed{X = C^{-1}\,.\,b}$$

Assim os valores das incógnitas de um sistema linear, de número de equações igual ao número de incógnitas, pode ser obtido através do produto da inversa da matriz dos coeficientes pela matriz dos termos independentes.

Portanto, neste método, se faz necessário a determinação da matriz inversa dos coeficientes.

Exemplo: Seja o Sistema

$$S \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

- Escrevendo S na sua forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Logo seja:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

pelo método da matriz inversa, temos:

$$X = C^{-1} . b$$

- Calculando a inversa de C, pelo método prático do determinante, temos:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Substituindo C^{-1} na equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} . (-5) + \frac{1}{5} .\ 10 \\ (-\frac{2}{5}) . (-5) + \frac{1}{5} .\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2 \\ 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto o par ordenado $(-1{,}4)$ é a solução do sistema.

6. UM EXEMPLO DE SISTEMA LINEAR 5 X 5

Neste capítulo, apresentaremos mais um exemplo, utilizando os métodos apresentados neste trabalho para resolver um sistema linear composto por cinco equações e cinco incógnitas, evidenciando a praticidade e particularidades de cada um.

Seja o sistema linear

$$S\ \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ -x + 3y - 2z - t + 2u = 1 \\ 5x + y + 3z - 4t + u = 33 \\ 3x - 2y - 2z - 2t + 3u = 24 \\ -4x - y - 5z + 3t - 4u = -49 \end{cases}$$

determinaremos os valores das incógnitas através dos métodos da substituição, escalonamento (método da eliminação gaussiana), regra de Cramer com o auxílio da regra de Chiò e a regra de Sarrus e por último aplicaremos o método da matriz inversa.

6.1 Resolução pelo método da substituição

Seja o sistema linear

$$S\ \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ -x + 3y - 2z - t + 2u = 1 \\ 5x + y + 3z - 4t + u = 33 \\ 3x - 2y - 2z - 2t + 3u = 24 \\ -4x - y - 5z + 3t - 4u = -49 \end{cases}$$

vamos encontrar a solução do sistema S através do método da substituição.

- Isolamos o y na 1ª equação de S

$$y = 2x + 4z + t - u - 7 \tag{A}$$

- Substituímos o y na 2ª equação de S

$$-x + 3(2x + 4z + t - u - 7) - 2z - t + 2u = 1 \Rightarrow$$

$$-x + 6x + 12z + 3t - 3u - 21 - 2z - t + 2u = 1 \Rightarrow$$

$$5x + 10z + 2t - u - 22 = 0 \tag{B}$$

- Substituímos o y na 3ª equação de S

$$5x + (2x + 4z + t - u - 7) + 3z - 4t + u = 33 \Rightarrow$$

$$7x + 7z - 3t - 40 = 0 \tag{C}$$

- Substituímos o y na 4ª equação de S

$$3x - 2(2x + 4z + t - u - 7) - 2z - 2t + 3u = 24 \Rightarrow$$
$$3x - 4x - 8z - 2t + 2u + 14 - 2z - 2t + 3u - 24 = 0 \Rightarrow$$
$$-x - 10z - 4t + 5u - 10 = 0 \tag{D}$$

- Substituímos o y na 5ª equação de S

$$-4x - (2x + 4z + t - u - 7) - 5z + 3t - 4u = -49 \Rightarrow$$
$$-4x - 2x - 4z - t - u + 7 - 5z + 3t - 4u + 49 = 0 \Rightarrow$$
$$-6x - 9z + 2t - 3u + 56 = 0 \tag{E}$$

- $(B), (C), (D), (E)$ geram um novo sistema S', entretanto com uma incógnita a menos que S.

$$S' \begin{cases} 5x + 10z + 2t - u - 22 = 0 \\ 7x + 7z - 3t - 40 = 0 \\ -x - 10z - 4t + 5u - 10 = 0 \\ -6x - 9z + 2t - 3u + 56 = 0 \end{cases}$$

- Isolamos o u na 1ª equação de S'

$$u = 5x + 10z + 2t - 22 \tag{F}$$

- Repetiremos a 2ª equação de S' pois não existe u para ser substituído

$$7x + 7z - 3t - 40 = 0 \tag{G}$$

- Substituímos o u na 3ª equação de S'

$$-x - 10z - 4t + 5(5x + 10z + 2t - 22) - 10 = 0 \Rightarrow$$
$$-x - 10z - 4t + 25x + 50z + 10t - 110 - 10 = 0 \Rightarrow$$
$$24x + 40z + 6t - 120 = 0 \tag{H}$$

- Substituímos o u na 4ª equação de S'

$$-6x - 9z + 2t - 3(5x + 10z + 2t - 22) + 56 = 0 \Rightarrow$$
$$-6x - 9z + 2t - 15x - 30z - 6t + 66 + 56 = 0 \Rightarrow$$
$$-21x - 39z - 4t + 122 = 0 \tag{I}$$

- $(G), (H), (I)$ geram um novo sistema S'', entretanto com uma incógnita a menos que S'.

$$S'' \begin{cases} 7x + 7z - 3t - 40 = 0 \\ 24x + 40z + 6t - 120 = 0 \\ -21x - 39z - 4t + 122 = 0 \end{cases}$$

- Isolamos o x na 1ª equação de S''

$$x = -z + \frac{3}{7}t + \frac{40}{7} \tag{J}$$

- Substituímos o x na 2ª equação de S''

$$24(-z + \frac{3}{7}t + \frac{40}{7}) + 40z + 6t - 120 = 0 \Rightarrow$$

$$-24z + \frac{72}{7}t + \frac{960}{7} + 40z + 6t - 120 = 0 \Rightarrow$$

$$16z + \frac{114}{7}t + \frac{120}{7} = 0 \tag{K}$$

- Substituímos o x na 3ª equação de S''

$$-21\left(-z + \frac{3}{7}t + \frac{40}{7}\right) - 39z - 4t + 122 = 0 \Rightarrow$$

$$21z - 9t - 120 - 39z - 4t + 122 = 0 \Rightarrow$$

$$-18z - 13t + 2 = 0 \tag{L}$$

- $(K), (L)$ geram um novo sistema S''', entretanto com uma incógnita a menos que S''.

$$S''' \begin{cases} 16z + \frac{114}{7}t + \frac{120}{7} = 0 \\ -18z - 13t + 2 = 0 \end{cases}$$

- Isolamos o z na 1ª equação de S'''

$$z = -\frac{57}{56}t - \frac{60}{56} \tag{M}$$

- Substituímos o z na 2ª equação de S'''

$$-18(-\frac{57}{56}t - \frac{60}{56}) - 13t + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1026}{56}t + \frac{1080}{56} - 13t + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1026t}{56}-\frac{728t}{56}+\frac{1080}{56}-\frac{112}{56}=0 \Rightarrow$$

$$298t+1192=0 \Rightarrow$$

$$t=-\frac{1192}{298} \Rightarrow$$

$$\boxed{t=-4}$$

- Substituímos o valor de t em (M)

$$z=-\frac{57}{56}(-4)-\frac{60}{56} \Rightarrow$$

$$z=-\frac{228}{56}-\frac{60}{56} \Rightarrow\Rightarrow$$

$$z=\frac{168}{56} \Rightarrow$$

$$\boxed{z=3}$$

- Substituímos o valor de z, t em (J)

$$x=-(3)+\frac{3}{7}(-4)+\frac{40}{7} \Rightarrow$$

$$x=-\frac{21}{7}-\frac{12}{7}+\frac{40}{7} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=1}$$

- Substituímos o valor de x, z, t em (F)

$$u=5(1)+10(3)+2(-4)-22 \Rightarrow$$

$$u=5+30-8-22 \Rightarrow$$

$$\boxed{u=5}$$

- Substituímos o valor de x, z, t, u em (A)

$$y=2(1)+4(3)\ +(-4)-(5)-\ 7 \Rightarrow$$

$$y=2+12-4-5-\ 7 \Rightarrow$$

$$y=14-16 \Rightarrow$$

$$\boxed{y=-2}$$

- Portanto a sequência ordenada $(1,-2,3,-4,5)$ é a solução do sistema S.

6.2 Resolução pelo método do escalonamento (eliminação gaussiana)

Seja o sistema linear

$$S \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ -x + 3y - 2z - t + 2u = 1 \\ 5x + y + 3z - 4t + u = 33 \\ 3x - 2y - 2z - 2t + 3u = 24 \\ -4x - y - 5z + 3t - 4u = -49 \end{cases}$$

vamos determinar a solução do sistema S através do método do escalonamento ou eliminação gaussiana.

Seja a matriz ampliada do sistema S

$$[C|b] = \begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \underbrace{\left[\underbrace{\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{array}}_{C} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ 33 \\ 24 \\ -49 \end{array}}_{b} \right]}_{[C|b]} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L1 + 2L2 \\ \leftarrow (-5)L1 + 2L3 \\ \leftarrow (-3)L1 + 2L4 \\ \leftarrow 4L1 + L5 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 2 pela soma da linha 1 com duas vezes a Linha 2;
- Substituiremos a Linha 3 pela soma de menos cinco vezes a Linha 1 com duas vezes a Linha 3;
- Substituiremos a Linha 4 pela soma de menos três vezes a Linha 1 com duas vezes a Linha 4;
- Substituiremos a Linha 5 pela soma de quatro vezes a linha 1 com a Linha 5.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -14 & -13 & 7 \\ 0 & -1 & -16 & -7 & 9 \\ 0 & -6 & 6 & 10 & -12 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ 31 \\ 27 \\ -70 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (-7)L2 + 5L3 \\ \leftarrow (-1)L2 + 5L4 \\ \leftarrow 6L2 + 5L5 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 3 pela soma de menos sete vezes a Linha 2 com cinco vezes a Linha 3;
- Substituiremos a Linha 4 pela soma de menos um vezes a Linha 2 com cinco vezes a Linha 4;
- Substituiremos a Linha 5 pela soma de seis vezes a Linha 2 com cinco vezes a Linha 5.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -70 & -58 & 14 & 92 \\ 0 & 0 & -80 & -36 & 48 & 144 \\ 0 & 0 & 30 & 44 & -42 & -296 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow (-8)L3 + 7L4 \\ \leftarrow 3L3 + 7L5 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 4 pela soma de menos oito vezes a Linha 3 com sete vezes a Linha 4;
- Substituiremos a Linha 5 pela soma de três vezes a Linha 3 com sete vezes a Linha 5.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -70 & -58 & 14 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & 212 & 224 & 272 \\ 0 & 0 & 0 & 134 & -592 & -1796 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L4 : 4 \\ \leftarrow L5 : 2 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 4 pela divisão da linha 4 por 4;
- Substituiremos a Linha 5 pela divisão da linha 5 por 2.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -70 & -58 & 14 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 56 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 67 & -126 & -898 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow 67L4 - 53L5 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 5 pela soma de sessenta e sete vezes a Linha 4 com cinquenta e três vezes a Linha 5.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -70 & -58 & 14 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 56 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10430 & 52150 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow L5 : 10430 \end{array}$$

- Substituiremos a Linha 5 pela divisão da linha 5 por 10430.

Logo, ficaremos com:

$$\begin{array}{c} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -70 & -58 & 14 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & 53 & 56 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

- Determinando a forma escalonada da matriz dos coeficientes.

Desta forma, podemos escrever o sistema S na sua forma escalonada:

$$S \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ 5y + 0z - t + 3u = 9 \\ -70z - 58t + 14u = 92 \\ 53t + 56u = 68 \\ u = 5 \end{cases},$$

no qual, de forma regressiva, devemos substituir os valores numéricos das incógnitas nas equações, solucionando assim o sistema.

- Verificamos que, da quinta equação temos:

$$\boxed{u = 5}$$

- Substituímos o valor de u na quarta equação, temos:

$$53t + 56\,.(5) = 68 \;\Rightarrow\; t = \frac{-212}{53} \;\Rightarrow\; \boxed{t = -4}$$

- Substituímos o valor de u, t na terceira equação, temos:

$$-70z - 58(-4) + 14(5) \;\Rightarrow\; z = \frac{-210}{70} \;\Rightarrow\; \boxed{z = 3}$$

- Substituímos o valor de u, t, z na segunda equação, temos:

$$5y + 0(3) - (-4) + 3(5) = 9 \;\Rightarrow\; 5y + 4 + 15 = 9 \;\Rightarrow\; 5y = -10 \;\Rightarrow\; y = \frac{-10}{5} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y = -2}$$

- Substituímos o valor de u, t, z, y na primeira equação, temos:

$$2x - (-2) + 4(3) + (-4) - 5 = 7 \;\Rightarrow\; 2x + 2 + 12 - 4 - 5 = 7 \;\Rightarrow$$

$$2x = -1(-2) \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 1}$$

- Portanto a sequência ordenada $(1, -2, 3, -4, 5)$ é a solução do sistema S.

6.3 Resolução pela regra de Cramer utilizando a regra de Chò e Sarrus

Seja o sistema linear

$$S\ \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ -x + 3y - 2z - t + 2u = 1 \\ 5x + y + 3z - 4t + u = 33 \\ 3x - 2y - 2z - 2t + 3u = 24 \\ -4x - y - 5z + 3t - 4u = -49 \end{cases}$$

vamos determinar a solução do sistema S através da regra de Cramer utilizando a regra de Chiò para reduzir a ordem dos deterinantes das matrizes relacionadas ao sistema e a regra de Sarrus para extrair o determinante de matriz de ordem 3.

- Seja D a matriz dos coefinicientes de S, temos:

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+5} . \begin{vmatrix} 2-(5.-1) & -1-(1.-1) & 4-(3.-1) & -1-(-4.-1) \\ -1-(5.2) & 3-(1.2) & -2-(3.2) & -1-(-4.2) \\ 3-(5.3) & -2-(1.3) & -2-(3.\ 3) & -2-(-4.3) \\ -4-(5.-4) & -1-(1.-4) & -5-(3.-4) & 3-(-4.-4) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 & -3 \\ -11 & 1 & -8 & 7 \\ -12 & -5 & -11 & 10 \\ 16 & 3 & 7 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} 7-(-11.0) & 7-(-8.0) & -3-(7.0) \\ -12-(-11.-5) & -11-(-8.-5) & 10-(7.-5) \\ 16-(-11.3) & 7-(-8.3) & -13-(7.3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & -3 \\ -67 & -51 & 45 \\ 49 & 31 & -34 \end{vmatrix} =$$

$$7.(-51).(-34) + 7.45.49 + 7.45.49 -$$
$$7.(-67).(-34) - 7.45.31 - (-3).(-51).49 = 596$$

• Substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita x pela coluna dos termos intependentes, formamos a matriz D_x, então:

$$\det D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 33 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 24 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ -49 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} 1-(7.-1) & 3-(-1.-1) & -2-(4.-1) & 2-(-1.-1) \\ 33-(7.-4) & 1-(-1.-4) & 3-(4.-4) & 1-(-1.-4) \\ 24-(7.-2) & -2-(-1.-2) & -2-(4.-2) & 3-(-1.-2) \\ -49-(7.3) & -1-(-1.3) & -5-(4.3) & -4-(-1.3) \end{vmatrix} =$$

$$(-1) . \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 1 \\ 61 & -3 & 19 & -3 \\ 38 & -4 & 6 & 1 \\ -70 & 2 & -17 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} 61-(8.-3) & -3-(2.-3) & 19-(2.-3) \\ 38-(8.1) & -4-(2.1) & 6-(2.1) \\ -70-(8.-1) & 2-(2.-1) & -17-(2.-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 85 & 3 & 25 \\ 30 & -6 & 4 \\ -62 & 4 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$85.(-6).(-15) + 3.4.(-62) + 25.30.4 - 3.30.(-15) - 85.4.4 - 25.(-6).(-62) = 596$$

• Substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita y pela coluna dos termos intependentes, formamos a matriz D_y, então:

$$\det D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 33 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 24 & -2 & -2 & 3 \\ -4 & -49 & -5 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} -1-(2.-1) & 1-(7.-1) & -2-(4.-1) & 2-(-1.-1) \\ 5-(2.-4) & 33-(7.-4) & 3-(4.-4) & 1-(-1.-4) \\ 3-(2.-2) & 24-(7.-2) & -2-(4.-2) & 3-(-1.-2) \\ -4-(2.3) & -49-(7.3) & -5-(4.3) & -4-(-1.3) \end{vmatrix} =$$

$$(-1) . \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 13 & 61 & 19 & -3 \\ 7 & 38 & 6 & 1 \\ -10 & -70 & -17 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) . (-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} 13-(1.-3) & 61-(8.-3) & 19-(2.-3) \\ 7-(1.1) & 38-(8.1) & 6-(2.1) \\ -10-(1.-1) & -70-(8.-1) & -17-(2.-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 85 & 25 \\ 6 & 30 & 4 \\ -9 & -62 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$16 . 30 . (-15) + 85 . 4 . (-9) + 25 . 6 . -62 -$$
$$85 . 6 . (-15) - 16 . 4 . (-62) - 25 . 30 . (-9) = -1192$$

• Substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita z pela coluna dos termos intependentes, formamos a matriz D_z, então:

$$\det D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 33 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 24 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -49 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} -1-(2.-1) & 3-(-1.-1) & 1-(7.-1) & 2-(-1.-1) \\ 5-(2.-4) & 1-(-1.-4) & 33-(7.-4) & 1-(-1.-4) \\ 3-(2.-2) & -2-(-1.-2) & 24-(7.-2) & 3-(-1.-2) \\ -4-(2.3) & -1-(-1.3) & -49-(7.3) & -4-(-1.3) \end{vmatrix} =$$

$$(-1) . \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 13 & -3 & 61 & -3 \\ 7 & -4 & 38 & 1 \\ -10 & 2 & -70 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\,.\;(-1)^{1+4}\,.\begin{vmatrix} 13-(1\,.-3) & -3-(2\,.-3) & 61-(8\,.-3) \\ 7-(1\,.\,1) & -4-(2\,.\,1) & 38-(8\,.\,1) \\ -10-(1\,.-1) & 2-(2\,.-1) & -70-(8\,.-1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 3 & 85 \\ 6 & -6 & 30 \\ -9 & 4 & -62 \end{vmatrix} =$$

$$16\,.(-6).(-62)+3\,.\,30\,.(-9)+85\,.\,6\,.\,4-$$
$$3.\,6\,.(-62)-16\,.\,30\,.\,4-85.(-6).(-9)=1788$$

• Substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita t pela coluna dos termos intependentes, formamos a matriz D_t, então:

$$\det D_t = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 33 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 24 & 3 \\ -4 & -1 & -5 & -49 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+5}\,.\begin{vmatrix} 2-(5\,.-1) & -1-(1\,.-1) & 4-(3\,.-1) & 7-(33\,.-1) \\ -1-(5\,.\,2) & 3-(1\,.\,2) & -2-(3\,.\,2) & 1-(33\,.\,2) \\ 3-(5\,.\,3) & -2-(1\,.\,3) & -2-(3\,.\,3) & 24-(33\,.\,3) \\ -4-(5\,.-4) & -1-(1\,.-4) & -5-(3\,.-4) & -49-(33\,.-4) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 & 40 \\ -11 & 1 & -8 & -65 \\ -12 & -5 & -11 & -75 \\ 16 & 3 & 7 & 83 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2+2}\,.\begin{vmatrix} 7-(-11\,.\,0) & 7-(-8\,.\,0) & 40-(-65\,.\,0) \\ -12-(-11\,.-5) & -11-(-8\,.-5) & -75-(-65\,.-5) \\ 16-(-11\,.\;3) & 7-(-8\,.\;3) & 83-(-65\,.\,3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 40 \\ -67 & -51 & -400 \\ -9 & 4 & 278 \end{vmatrix} =$$

$$7\,.(-51).(278)+7\,.(-400)\,.(49)+40\,.(-67)\,.\,31-$$
$$7\,.(-67).(278)-7\,.(-400).\,31-40.(-51).\,49=-2384$$

• Substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita u pela coluna dos termos intependentes, formamos a matriz D_u, então:

$$\det D_u = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & -4 & 33 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 24 \\ -4 & -1 & -5 & 3 & -49 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1-(2\,.-1) & 3-(-1.-1) & -2-(4\,.-1) & 1-(7\,.-1) \\ 5-(2\,.-4) & 1-(-1\,.-4) & 3-(4\,.-4) & 33-(7\,.-4) \\ 3-(2\,.-2) & -2-(-1\,.-2) & -2-(4\,.-2) & 24-(7\,.-2) \\ -4-(2\,.\,3) & -1-(-1\,.\,3) & -5-(4\,.\,3) & -49-(7\,.\,3) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\,. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 13 & -3 & 19 & 61 \\ 7 & -4 & 6 & 38 \\ -10 & 2 & -17 & -70 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\,.\ (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3-(2\,.\,13) & 19-(2\,.\,13) & 61-(8\,.\,13) \\ -4-(2\,.\,7) & 6-(2\,.\,7) & 38-(8\,.\,7) \\ 2-(2\,.-10) & -17-(2\,.\,10) & -70-(8\,.-10) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\,. \begin{vmatrix} -29 & -7 & -43 \\ -18 & -8 & -18 \\ 22 & 3 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$(-1).[(-29).(-8).10 + (-7).(-18).22 + (-43).(-18).3 -$$
$$-7\,.(-18).10 - (-29)\,.(-18).3 - (-43).(-8).22] = 2980$$

Portando, pela regra de Cramer, temos:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{596}{596} = 1$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1192}{596} = -2$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{1788}{596} = 3$, $t = \frac{D_t}{D} = \frac{-2384}{596} = -4$ e

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{2980}{596} = 5$$

• Portanto a sequência ordenada $(1, -2, 3, -4, 5)$ é a solução do sistema S.

6.4 Resolução pelo método da matriz inversa

Seja o sistema linear

$$S \begin{cases} 2x - y + 4z + t - u = 7 \\ -x + 3y - 2z - t + 2u = 1 \\ 5x + y + 3z - 4t + u = 33 \\ 3x - 2y - 2z - 2t + 3u = 24 \\ -4x - y - 5z + 3t - 4u = -49 \end{cases}$$

vamos determinar a solução do sistema S através do método da matriz inversa, utilizando a forma matricial do sistema e aplicando o produto da matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes.

- Iniciamos escrevendo o sistema S na sua forma matricial

$$S \; \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 33 \\ 24 \\ -49 \end{bmatrix}}_{b},$$

ou seja:

$$C \,.\, X = b,$$

no qual:

- C é a matriz dos coeficientes
- X é a matriz das incógnitas
- b é a matriz dos termos independentes

- Multiplicando a matriz inversa dos coeficientes (C^{-1}) pela esquerda em ambos os membros da equação matricial do sistema S, temos:

$$C^{-1} \,.\, C \,.\, X = C^{-1} \,.\, b \Rightarrow$$
$$I \,.\, X = C^{-1} \,.\, b \Rightarrow$$
$$X = C^{-1} \,.\, b$$

Portanto, para encontrarmos os valores das incógnitas, representada pela matriz X, basta multiplicarmos a matriz inversa dos coeficientes (C^{-1}) pela matriz dos termos independentes (b).

Seja a matriz

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{339}{596} & \frac{239}{596} & \frac{37}{298} & \frac{145}{596} & \frac{81}{298} \\ \frac{191}{596} & \frac{263}{596} & \frac{27}{298} & -\frac{15}{596} & \frac{43}{298} \\ -\frac{73}{596} & -\frac{113}{596} & -\frac{15}{298} & -\frac{91}{596} & -\frac{57}{298} \\ \frac{211}{596} & \frac{147}{298} & -\frac{24}{149} & \frac{63}{298} & \frac{28}{149} \\ \frac{21}{596} & \frac{57}{596} & -\frac{61}{298} & \frac{67}{596} & -\frac{53}{298} \end{bmatrix}$$

a matriz inversa da matriz coeficiente C.

Observação: a matriz inversa pode ser obtida pelo método do escalonamento ou resolvendo os sistemas gerados pelo produto matricial da matriz dos coeficientes pela matriz genérica igualando a matriz identidade.

- Calculemos a equação $X = C^{-1}.b$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{339}{596} & \frac{239}{596} & \frac{37}{298} & \frac{145}{596} & \frac{81}{298} \\ \frac{191}{596} & \frac{263}{596} & \frac{27}{298} & -\frac{15}{596} & \frac{43}{298} \\ -\frac{73}{596} & -\frac{113}{596} & -\frac{15}{298} & -\frac{91}{596} & -\frac{57}{298} \\ \frac{211}{596} & \frac{147}{298} & -\frac{24}{149} & \frac{63}{298} & \frac{28}{149} \\ \frac{21}{596} & \frac{57}{596} & -\frac{61}{298} & \frac{67}{596} & -\frac{53}{298} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 33 \\ 24 \\ -49 \end{bmatrix}$$

temos:

$$x = \frac{339}{596}.7 + \frac{239}{596}.1 + \frac{37}{298}.33 + \frac{145}{596}.24 + \frac{81}{298}.(-49) \Rightarrow$$

$$x = \frac{2373}{596} + \frac{239}{596} + \frac{2442}{596} + \frac{3480}{596} - \frac{7938}{596} \Rightarrow$$

$$x = \frac{596}{596} = 1$$

$$y = \frac{191}{596}.7 + \frac{263}{596}.1 + \frac{27}{298}.33 + \frac{(-15)}{596}.24 + \frac{43}{298}.(-49) \Rightarrow$$

$$y = \frac{1337}{596} + \frac{263}{596} + \frac{1782}{596} - \frac{360}{596} - \frac{4214}{596} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1192}{596} = -2$$

$$z = \frac{(-73)}{596}.7 + \frac{(-113)}{596}.1 + \frac{(-15)}{298}.33 + \frac{(-91)}{596}.24 + \frac{(-57)}{298}.(-49) \Rightarrow$$

$$z = -\frac{511}{596} - \frac{113}{596} - \frac{990}{596} - \frac{2184}{596} + \frac{5586}{596} \Rightarrow$$

$$z = \frac{1788}{596} = 3$$

$$t = \frac{211}{298}.7 + \frac{147}{298}.1 + \frac{(-24)}{149}.33 + \frac{63}{298}.24 + \frac{28}{149}.(-49) \Rightarrow$$

$$t = \frac{2954}{596} + \frac{294}{596} - \frac{3168}{596} + \frac{3024}{596} - \frac{5488}{596} \Rightarrow$$

$$t = -\frac{2384}{596} = -4$$

$$u = \frac{21}{596}.7 + \frac{57}{596}.1 + \frac{(-61)}{298}.33 + \frac{67}{596}.24 + \frac{(-53)}{298}.(-49) \Rightarrow$$

$$y = \frac{147}{596} + \frac{57}{596} - \frac{4026}{596} + \frac{1608}{596} + \frac{5194}{596} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2980}{596} = 5$$

- Portanto a sequência ordenada $(1, -2, 3, -4, 5)$ é a solução do sistema S.

6.5 Diferenças entre os métodos de resolução de sistemas lineares aplicados

Percebemos que cada um dos métodos utilizados na resolução do sistema linear 5x5 deste capítulo possui particularidades nas quais apresentam vantagens e desvantagens.

Notamos que o método da substituição tem a vantagem de ser extremamente simples e aplicável em sistemas de qualquer ordem, utilizando apenas operações básicas na sua resolução. Entretanto pode demandar muitos cálculos caso o sistema seja grande. Já o método do escalonamento possui a vantagem de ser prático e resumido, podendo também ser aplicado em sistemas de qualquer ordem. Porém, é necessária atenção prévia na escolha correta das operações elementares usadas durante o seu processo.

Observamos que na resolução de um sistema mxn, tanto o método da substituição quanto o método do escalonamento seguem algoritmos de $(m-1)$ passos.

Os próximos dois métodos possuem a restrição de ser aplicáveis apenas em sistemas com o número de equações igual ao número de incógnitas.

O método conhecido como regra de Cramer, tem a vantagem de identificar se o sistema tem ou não solução, sem mesmo resolvê-lo. Ele ainda consegue fornecer o valor das incógnitas de forma direta através dos determinantes das equações matriciais geradas pelo sistema. Entretanto para encontrar a solução de um sistema de ordem n é necessário resolver $(n+1)$ sistemas de ordem n. Em sistemas com um grande número de incógnitas este método se torna impraticável devido mostrar-se extremamente trabalhoso. Já o método da matriz inversa tem a vantagem de determinar de forma direta os valores das incógnitas do sistema através apenas de uma multiplicação matricial. Porém uma das matrizes envolvidas na multiplicação é a matriz inversa da matriz dos coeficientes que, inclusive, utiliza outro método para encontra-la, quando possível.

Concluímos que para escolher o melhor método para resolução de um sistema linear deve-se levar em consideração fatores como tipo do sistema, praticidade e principalmente habilidade com o método.

.

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES

Nesta breve seção relatamos algumas aplicações bastante atuais dos conceitos abordados. Como outra maneira de motivar os alunos e professores a estudarem no tema.

- Engenharia civil

Em sua dissertação de mestrado, Elton Valiente, cita, no capítulo 4, uma aplicação de sistemas lineares em uma treliça simples, solicitada com $500\ N$ em um de seus nós indicando os efeitos da solicitação e analisando o equilíbrio em cada um dos nós da treliça.

Como a estrutura treliçada é composta de 3 barras e 3 nós, a compressão e tração sobre esses elementos geram um sistema linear composto de 6 equações e 6 incógnitas.

“A estabilidade é verificada caso o Sistema Linear seja classificado como possível e determinado. Dessa forma resolver uma treliça é um problema de Sistemas Lineares”. (Valiente, 2015).

- Circuitos elétricos

Sônia Rufato, em sua dissertação de mestrado, cita, no capítulo 2, uma aplicação de sistemas lineares em um circuito elétrico composto por, dois resistores, dois geradores e dois pontos gerando duas malhas internas, no qual baseado na Lei de Ohm e nas Leis da corrente e da voltagem de Kirchhoff utiliza um sistema linear de três equações e três incóginitas para determinar as correntes elétricas nos trechos do circuito. (Rufato, 2014).

- Robótica

A trajetória de veículos autônomos (robôs) em pontos predeterminados na presença de obstáculos é determinada através de operações com matrizes, sugerida por Gerson Aguiar, em sua dissertação de mestrado.

Aguiar, defende no capítulo 3 de sua pesquisa, que é possível determinar os pontos de uma circunferência a partir de um ponto arbitrário pertencente à ela. Ainda nesse trabalho, Aguiar, simula o monitoramento realizado por um veículo autônomo de uma nuvem em movimento, proveniente de uma explosão, descrevendo trajetórias sobre pontos de circunferências, utilizando para esta etapa operações com matrizes. (Aguiar, 2020).

- Buscadores de sites de Internet

O buscador da Google, utiliza um algoritmo matemático para classificar a ordem de apresentação de sites na resposta a uma consulta de uma palavra chave chamado Pagerak.

Basicamente o algoritmo da Google atribui valores aos sites cadastrados em sua plataforma de acordo com links correlacionados com outros sites, gerando assim pontuações para cada site em uma consulta. As análises são baseadas em links que os sites possuem com outros sites de maior relevância. Caso exista recebe um ponto, caso contrário não recebe pontuação, criando assim uma matriz de pontuação, na qual definirá o seu rank de apresentação no seu buscador.

Portanto, a ordem da lista de sites retornados de uma busca é completamente baseada em matrizes.

Caio Braz, Gustavo Katague e José de Pia Jr, em seu trabalho de graduação supervisionado, apresentam a ideia do Pagerak e a Teoria de cadeia de Markov. (Katague, 2012)

Percebemos o quanto é amplo as áreas de aplicações de sistemas lineares, matrizes e determinantes. Podemos ainda áreas como a de engenharia de tráfego de veículos, tráfico de dados, balanceamento de reações químicas, sistemas de localização (GPS), sistemas de detecção de ruídos acústicos, dentre outras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi possível constatar o quão relevante é o desenvolvimento histórico da matemática, pois apresenta uma matemática humanizada e construída ao longo do tempo por grandes matemáticos motivados pela busca de soluções de problemas.

Os diferentes métodos de resolução de um mesmo sistema linear demonstram o respeito e a democracia de pensamentos existentes na matemática.

Vale ressaltar a importância de se trabalhar os conteúdos de sistemas lineares, determinantes e matrizes, resgatando os seus contextos históricos, de forma correlacionados e não separadamente. É possível perceber, desta forma, a utilidade de determinantes e matrizes quando trabalhados como ferramentas para soluções de sistemas lineares fazendo mais sentido aos alunos quando estiverem estudando estes conteúdos.

Portanto esperamos que este trabalho sirva como auxílio principalmente a professores e alunos do ensino médio nos estudos de sistemas lineares, determinantes e matrizes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar.* 2 ed. São Paulo-SP: Ed.Atual, 1977. Vol. 4.

LIMA, Elon Lages. *A matemática do ensino médio.* 6 ed. Rio de Janeiro – RJ: SBM, 2006. Vol. 3.

DANTE, Luis Roberto. *Matemática: contexto & aplicações: ensino médio.* 3. ed. São Paulo – SP: Ática, 2016. cap. 4.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. *A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In:* BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa com educação matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo-SP: Ed. da Unesp, 1999. p. 179-136.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo-SP: Blucher, 1996.

SANTOS, Luciane Mulazani dos. *Tópicos de História da Física e da Matemática.* 1. ed. Curitiba: IBPEX , 2009. Vol. 5.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: homologada em 14 de Dezembro de 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>*. Acesso em 06 abr. 2020.

MANACORDA, M. A. *História da educação: da antiguidade aos nossos dias.* 12. ed. São Paulo: Cortez, 2010.

RUFATO, Sônia Aparecida Carreira. *Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática*. São Carlos-SP: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) USP, 2014. p. 41.

AGUIAR, Gerson Bruno Pinto. *A circunferência escrita como o produto e soma de matrizes: Uma nova abordagem no ensino médio* no ensino de matrizes. Piauí: (Mestrado Profissional em Matemática) UFPI, 2020. p. 43.

VALIENTE, Elton da Silva Paiva. *Aplicações de sistemas lineares e determinantes na engenharia civil.* Mato Grosso do Sul: (Mestrado Profissional em Matemática) UFMS, 2015. p. 53-55.