UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

RAFAEL SANTOS MIRANDA

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA

São Luís – MA

2021

RAFAEL SANTOS MIRANDA

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, como requisito parcial para elaboração da dissertação de mestrado e obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. GIOVANE FERREIRA SILVA

São Luís – MA

2021

SANTOS MIRANDA, RAFAEL.
O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA / RAFAEL SANTOS MIRANDA. - 2021.
75 f.

Orientador(a): GIOVANE FERREIRA SILVA.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUIS-MA, 2021.

1. ENSINO MÉDIO. 2. GEOGEBRA. 3. TRIGONOMETRIA. I. FERREIRA SILVA, GIOVANE. II. Título.

RAFAEL SANTOS MIRANDA

O USO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE TRIGONOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, como requisito parcial para elaboração da dissertação de mestrado e obtenção de título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 / 02 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. GIOVANE FERREIRA SILVA (Orientador)

Doutor em Matemática

____

Prof. Dr. ADECARLOS COSTA CARVALHO (Membro Externo)

Doutor em Matemática

____

Prof. Dr. JAIRO SANTOS DA SILVA (Membro Interno)

Doutor em Matemática

À minha família...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus por ter me guiado nessa caminhada e por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para não desanimar durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos que me educaram e sempre me incentivaram em todas as etapas da minha vida.

À minha esposa Flávia Romênia Miranda pela compreensão da minha ausência nos momentos destinados ao curso, sendo meu braço direito na árdua jornada de trabalho e estudo.

Aos meus filhos, Enzo Miranda e Chiara Miranda, que me deram força e ânimo nos momentos de cansaço para eu não desistir.

Ao meu orientador Giovani Ferreira Silva pela singular ajuda e dedicação ao meu trabalho.

Ao PROFMAT pela oportunidade de adquirir mais conhecimentos a minha profissão, sendo um programa de imensa importância na qualificação de docentes no nosso País.

Aos meus colegas de sala, por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado e por todo companheirismo ao longo deste curso.

À minha amiga Maria José Cavalcanti da Cruz que não mediu esforços para me ajudar quando precisei.

A todos os amigos que de forma direta ou indireta me deram força e ajudaram nesse processo de aprendizado.

“Educa a criança no caminho que deve andar; e quando envelhecer não se desviará dele”.

(Provérbios 22:6)

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho o uso do software de Geometria Dinâmica “Geogebra” no conteúdo de Trigonometria do Ensino Médio, com aplicação de conteúdos de forma dinâmica para melhor visualização e interpretação dos gráficos das funções trigonométricas. Espera-se que o presente trabalho possa ser utilizado para incentivar e motivar professores no processo ensino – aprendizagem de trigonometria. Determinadas situações inesperadas que surgem em sala de aula podem ser explicadas com o apoio de um software adequado.

Palavras-chave: Ensino médio, trigonometria, GeoGebra.

ABSTRACT

In this work we presente the use of the dynamic geometry software “ geogebra” in the content tigonometry in high school, with the application of contents in a dynamic way for better visualization and interpretation of the function graphs. We hope that present work can be used teaching-learning processo of trigonometry. Certain unexpected situations that arise in the classroom can be explained with the support of appripriate software.

Keywords: High school, trigonometry, geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática tem sido alvo de atenções, destacando-se entre as outras disciplinas escolares pela preocupação dos professores, pais, alunos e da sociedade com o rendimento dos estudantes. Para isso, tem-se buscado medidas no sentido de melhorar as relações entre o que se trabalha em sala de aula com o que a sociedade necessita quanto à formação das pessoas nos dias atuais.

Nessa perspectiva, o uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem desperta o interesse do aluno, pois atualmente as mídias como o computador, tablet e celular fazem parte de seu dia a dia. O uso de ferramentas em que o discente pode construir, experimentar ou manipular determinado experimento, além de permitir o trabalho colaborativo, propõe um ensino de forma mais dinâmica e prazerosa.

O papel das tecnologias digitais na sala de aula não é somente para tornar-se mais interessante ou facilitar o trabalho do professor, mas, sobretudo, porque são novas linguagens que o aluno precisa aprender a ler, a compreender, a interpretar (SOARES, 2008). Nesse sentido, esse trabalho baseia-se na importância do uso do software Geogebra de forma a contribuir um melhor entendimento no conteúdo de trigonometria. Visando investigar e potencializar os alunos do ensino médio e principalmente os alunos do curso de Matemática que serão os futuros professores. Buscando-se aliar o estudo da Trigonometria a um recurso computacional de geometria dinâmica, nesse caso o Geogebra, deu-se a necessidade deste trabalho de dissertação, na intenção de colaborar com a docência do ensino de matemática usando recursos dinâmicos e atuais.

Deve-se pontuar que a dificuldade de acesso a tecnologias, mais ainda a internet, desta forma, a escolha do GeoGebra faz-se acertada no sentido de que é um aplicativo que não depende de internet para a sua manipulação, bem como é uma ferramenta que pode ser utilizada tanto em computadores tipo PC ou Notebooks, como em celulares smartphones, assim, o acesso a este recurso tecnológico é de maior facilidade, muito embora saibamos ainda das limitações, principalmente na rede pública, para a aquisição destes equipamentos.

Todavia, o propósito deste trabalho é sobretudo servir de suporte educacional ao professor que pretenda utilizar o GeoGebra nas aulas de trigonometria, aqui nos recortes apresentados, instigando a imaginação dos alunos, suas curiosidades, bem como, dando a oportunidade para que o próprio aluno faça suas construções, modificando-as, e assim, aprendendo, por meio de uma cultura de aprender fazendo, que, dinamicamente, a mudança de parâmetros levará a novos resultados.

Nesta trilha, iremos trabalhar nos próximos capítulos elementos fundamentais que norteiam a educação, que seriam: A Educação no mundo atual, em que iremos compreender o papel da educação na formação dos alunos; Os Alunos do Século XXI, em que observaremos a necessidade constante dos professores de se atualizarem; e A Formação dos Professores, aqui é chamada a atenção para uma formação contínua e destaque para a composição dos currículos desde a faculdade.

A Educação no mundo atual possui um novo olhar social e tecnológico. Na época em que o mundo e as pessoas estão em constantes mudanças tecnológicas devemos estar antenados as mais variadas formas de conhecimento digital, pois exige uma análise cautelosa no que diz respeito a conhecimento e informação das diferentes formas de aprendizagem postas a educação.

O aluno do século XXI possui uma nova visão de mundo, o qual cresce usando diariamente vários meios de tecnologia e informação. Esses jovens mostram comportamentos diferenciados, já a educação permanece em meados do século XX e não consegue acompanhar o desenvolvimento da tecnologia.

A formação de professores é extremamente necessária para saber criar ambientes de aprendizagem. Conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e o Plano Nacional de Educação (PNE) todos os docentes devem ter formação específica de ensino superior, obtida em curso de licenciatura na área em que atuam e, a partir daí, possam se aprimorar nessa nova realidade de ensino.

Por fim, apresentaremos o software de Geometria dinâmica Geogebra e a Trigonometria, com um breve histórico e os conteúdos desde triângulo retângulo até funções circulares. Iremos fazer uma série de apresentações do conteúdo de trigonometria fazendo uso dos recursos disponíveis no GeoGebra.

1. A EDUCAÇÃO NO MUNDO ATUAL

O pensar sobre a educação no mundo atual é, provavelmente, uma das tarefas mais importantes e mais difíceis. Importante porque lida diretamente com o futuro do indivíduo, do país, do mundo; difícil porque é um trabalho sobre pessoas e sobre a transformação dessas pessoas. Freud já anunciava o trabalho do professor como um dos impossíveis.

Falar sobre educação em um mundo onde as coisas mudam numa velocidade nunca imaginada pelo homem, no qual o conhecimento se multiplica, no qual o método de ensino já é quase obsoleto e, com certeza, uma das tarefas mais difícil que se pode conceber. O ideal é usar os conceitos com equilíbrio, saindo das armadilhas do fetichismo, no qual se acredita que o computador é a salvação da educação, e na banalização, quando se acredita que o computador é mais um recurso didático ou então uma modinha pedagógica. Nessa linha, a UNESCO (1996, p. 13-14) diz que:

> A tensão entre tradição e modernidade tem origem na mesma problemática: adaptar-se sem se negar a si mesmo, construir a sua autonomia em dialética com a liberdade e a evolução do outro, dominar o progresso científico. É com este espírito que se deve prestar particular atenção ao desafio das novas tecnologias da informação.

O uso de software educacional propõe para a educação um ambiente mais atual. Ainda estamos longe do uso ideal da tecnologia na educação, talvez ainda mais longe de seu principal objetivo, que é a realização de aulas mais criativas, motivadoras, dinâmicas e que envolvam os alunos para novas descobertas e aprendizagem. A tecnologia na Educação é um avanço importante nessa direção.

Quando iniciei minhas atividades na área da educação, deparei-me com inúmeras dúvidas, como: qual é a forma correta da aplicação da informática na área da Matemática? Quais são os melhores softwares existentes? Como fazer isso, se não fui formado para atuar em ambientes dinâmicos. Não estamos capacitados para utilizar os recursos tecnológicos e ainda muitos professores têm receio de usar computadores em sala de aula. O que percebi após vários anos de trabalho, é que não existe um modelo universal de utilização da Informática na Educação, e que muitas dessas questões continuam a ser discutidas nos ambientes educacionais, apesar de todos os avanços. A resistência dos educadores ainda é presente.

No livro *A Máquina das Crianças – Repensando na Era da Informática*, de Papert (1994, p. 9-10), podemos nos referir a uma passagem em que o autor apresenta a seguinte parábola:

> Imagine um grupo de viajantes do tempo de um século anterior, entre eles um grupo de cirurgiões e outro de professores primários, cada qual ansioso para ver o quanto as coisas mudaram em sua profissão a cem anos ou mais no futuro. Imagine o espanto dos cirurgiões ao entrarem numa sala de operações de um hospital moderno. Embora pudessem entender que algum tipo de operação estava ocorrendo e pudessem até mesmo adivinhar o órgão alvo, na maioria dos casos seriam incapazes de imaginar o que o cirurgião estava tentando fazer, ou qual a finalidade de muitos aparelhos estranhos que ele e sua equipe cirúrgica estavam utilizando. Os rituais de antissepsia e anestesia, os aparelhos eletrônicos com seus sinais de alarme e orientação e até mesmo as intensas luzes, tão familiares as plateias de televisão, seriam completamente estranhos para eles.
>
> Os professores viajantes do tempo responderiam de uma forma muito diferente a uma sala de aula de primeiro grau moderna. Eles poderiam sentir-se intrigados com relação a alguns poucos objetos estranhos. Poderiam perceber que algumas técnicas padrão mudaram – e provavelmente discordariam entre si quanto as mudanças que observaram se foram para melhor ou para pior -, mas perceberiam plenamente a finalidade da maior parte do que se tentava fazer e poderiam, com bastante facilidade, assumir a classe.

Os professores, ao ouvirem essa parábola, confirmam o que está sendo dito. Porém, são diversas as justificativas, como: “a minha escola ainda não tem computadores”, “a minha escola tem computadores, mas não prestam”, “a escola não capacita seus profissionais”, “não fiz disciplina de informática no magistério ou na universidade”, ou então, porque ganho muito pouco.

A maioria dos professores não percebem que o ponto de partida de qualquer mudança é um processo que vem de dentro se sensibilizando para uma nova realidade. Então, por que os professores não estão sensibilizados quanto ao uso da informática na área educacional? Por que não, se os demais profissionais das diversas áreas do conhecimento humano já utilizam a informática como instrumento auxiliar de trabalho.

Os softwares são excelentes recursos computacionais que permitem o aprimoramento das habilidades de lógica, matemática e de resolução de problemas, além de fazer uma ponte entre os conceitos matemáticos e o mundo prático.

Estamos atuando em um momento que se caracteriza pela inovação, que vai além dos computadores. As mudanças também estão ocorrendo em outras áreas: econômicas, sociais, culturais, políticas, religiosas, institucionais e até mesmo filosóficas. A sociedade está em constante desenvolvimento, o que gera uma nova maneira de viver.

É fundamental a formação de um novo professor. O perfil do novo profissional não é mais o especialista. O importante é saber lidar com diferentes situações, resolver problemas imprevistos, ser flexível e multifuncional e estar sempre disposto a aprender.

É necessário observar essa situação social que estamos vivendo. A educação precisa estar atenta às novidades e não impedir a integração do grupo nesse meio, tornando-se arcaica e sem flexibilidade. Algumas dessas mudanças podem ser realizadas pelo professor que, tendo uma visão de futuro e mente aberta para refletir criticamente sobre sua prática no processo de ensino-aprendizagem, torna-se um agente ativo no sistema educacional.

2. OS ALUNOS DO SÉCULO XXI

Afinal, quem são os alunos que estão frequentando as escolas e as universidades? Eles pertencem à geração Z (é a definição sociológica para a geração de pessoas nascida, em média, entre meados dos anos 1990 até o início do ano 2010), podemos falar que essa nova geração se desenvolveu numa época de grandes avanços tecnológicos e prosperidade econômica. Vivendo em ambientes altamente urbanizados, eles presenciaram uma das maiores revoluções na história da humanidade: a Internet.

O principal enfoque da educação é provocar mudanças no sistema produtivos, culturais, sociais e políticos. Nos últimos anos, grandes mudanças tecnológicas, principalmente no campo da microeletrônica e das telecomunicações, proporcionaram um amplo desenvolvimento em diversas áreas: econômica, industrial, engenharia, telecomunicações, medicina e aeroespacial.

A informática foi favorecida pelas revoluções científicas, possibilitando o embasamento e o aprimoramento dos processos de produção e pesquisa.

Agora, o que a escola precisa fazer para acompanhar essa nova realidade? Certamente um de seus principais objetivos é formar indivíduos que se ajustem a essa nova conjuntura, prontos para esse novo cenário. É necessário planejar melhor o futuro e preparar as ações que permitam aos estudantes se tornarem profissionais capacitados. Nesse aspecto, BACICHE e MORAN (2018, p.24) acrescentam que:

> Os estudantes do século XXI, inseridos em uma sociedade do conhecimento, demandam um olhar do educador focado na compreensão dos processos de aprendizagem e na promoção desses processos por meio de uma nova concepção de como eles ocorrem, independentemente de quem é o sujeito e das suas condições circundantes. No mundo atual, marcado pela aceleração e pela transitoriedade das informações, o centro das atenções passa a ser o sujeito que aprende, a despeito da diversidade e da multiplicidade dos elementos envolvidos nesse processo.

O homem vive no imperativo tecnológico, condição na qual a sociedade como um todo se submete a aceitar e desejar a exigência de incorporar novas tecnologias sem uma crítica e sem saber se ela será melhor ou não (SANCHO, 1998). Em vista disso, o que devemos fazer: abandonar o mais velho ou adotar o que for mais novo? Sem nos questionar, fazemos parte de um preconceito e nos deixamos influenciar, pois um computador apresenta tantos recursos e usamos apenas aqueles básicos.

De forma bem mais lenta, a escola também faz parte das mudanças tecnológicas. Por séculos, o ensino foi destinado apenas a minorias privilegiadas. A primeira grande conquista tecnológica foi o livro, que, há anos vem sendo o principal instrumento de ensino. Porém não paramos para pensar que o livro é resultado de uma técnica. Por quê? Por que já faz parte da nossa rotina. Tapscott (1997) considera que a tecnologia só pode ser entendida como tecnologia quando ela nasce depois de nós. Ao nascermos, tudo que estar ao nosso redor é tão natural que nem percebemos que se trata de uma tecnologia.

Os primeiros livros datam da idade média. Eram enormes e ficavam presos por correntes. A leitura era realizada em voz alta no átrio, para que a plateia pudesse ouvir o conteúdo. Com o passar do tempo, os livros deixaram de ser confeccionados em papiro e passaram a ser escritos em papel. Somente com a impressão é que passaram a ser democratizados, com tamanho e volumes reduzidos e, mais tarde, com preços mais acessíveis. Já imaginou o impacto dessa evolução tecnológica naquela época? É possível compará-la às mudanças na área de telecomunicação ocorridas na atualidade.

Incorporamos os hieróglifos, as palavras escritas, os códigos, os livros, os correios, o telefone, o rádio, a televisão, o fax, o celular, o e-mail e a internet. O que ainda somos capazes de criar? A cada momento surge uma nova possibilidade tecnológica de comunicação.

Com as novas tecnologias, será que mudamos ou apenas trocamos de instrumentos? Novas tecnologias são determinantes para desenvolvimento do processo.

A mudança é indispensável para a sociedade atual, pois já somos dependentes de equipamentos e formas de comunicação específicas, que podem permitir o desenvolvimento ilimitado.

A modernização educacional, de forma cada vez mais integrada às metodologias ativas, estão visando transformar o processo de aprendizagem em algo mais dinâmico e interativo, inserindo as tecnologias como instrumento que acarretam mudanças sociais, culturais e econômicas. A inclusão desses novos conhecimentos sobre o uso dos recursos tecnológicos coloca-nos a uma nova expressão: o "analfabetismo tecnológico" que nos remete ao conhecimento desses recursos para não sermos considerados analfabetos, ou seja, não saber lidar com as opções tecnológicas significa que somos ignorantes, que não estamos incluídos.

Apesar disso, embora haja ganhos significativos em termos de tempo e qualidade de vida, essa forma também faz com que percamos ou minimizemos um dos aspectos mais importantes para o ser humano: o contato presencial com as pessoas. Apesar do avanço tecnológico, nenhuma nova tecnologia substituirá a mais perfeita tecnologia humana. Se não usada de forma correta e com acompanhamento, o software pode se tornar um problema.

Inserida no cenário tecnológico, a escola terá melhores condições de apresentar aos alunos situações que retratem a realidade, o que pode tornar as atividades mais significativas e menos abstratas.

A utilização do computador integrada a softwares educativos não garante uma adequada utilização dessa tecnologia como ferramenta pedagógica. O fato de um professor estar utilizando o computador para ministrar uma aula não significa, necessariamente que esteja aplicando uma proposta inovadora. Muitas vezes essa aula é tão tradicional quanto uma aula expositiva com a utilização do giz.

A indústria de desenvolvimento dos softwares educacionais tem evoluído, mas muito ainda precisa ser melhorado. A maioria dos softwares disponíveis nada mais é do que um livro eletrônico. Alguns softwares educativos utilizam diversas mídias que podem ser agrupadas (som, texto, animação, desenho), mas não estimulam o desafio, a curiosidade e a resolução de problemas. Alguns softwares educacionais são rejeitados pelos próprios alunos, que reclamam, achando-os cansativos e sem atrativos.

O que se espera com a utilização do computador na educação é a realização de aulas mais criativas, motivadoras, dinâmicas e que envolvam esses "novos alunos" para novas descobertas e aprendizagens.

3. FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Um dos elementos fundamentais para ter sucesso no uso da tecnologia na educação é a qualificação do professor para trabalhar com essa nova realidade educacional. O docente deve estar apto para perceber como deve realizar a inserção da tecnologia a sua proposta de ensino. Cabe a cada um descobrir a sua própria forma de utilizar a informática conforme o seu interesse educacional, pois não existe uma forma universal para a utilização dos computadores na sala de aula.

Na educação, existem dois grupos que utilizam a tecnologia: os adaptados e os místicos. Os adaptados acreditam que incorporar a tecnologia é, por si só, uma inovação. Seria importante acompanhar continuamente o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Os místicos já não acreditam que a tecnologia é neutra, isto é, seria preciso conhecer todas as possibilidades da inovação para aplicá-la de forma correta. Assim, é possível que poucos de fato se especializem, enquanto a maioria das pessoas continue com níveis baixos de qualificação.

O professor deve estar preparado às inovações, principalmente com relação à sua função de mediador, sendo responsável por facilitar e coordenar o processo de ensino-aprendizagem. O docente precisa estar aberto à novos aprendizados, a lidar com as rápidas mudanças, ser dinâmico e flexível. Acabou a era educacional em que o professor “sabe-tudo” detinha sozinho o conhecimento.

A competência do professor deve abranger uma série de vivências e conceitos, como conhecimentos básicos de informática, pedagogia integração de tecnologias com propostas pedagógicas, formas de gerenciamento da sala de aula com os novos recursos tecnológicos em conexão com os recursos físicos disponíveis e em especial ao aluno que passa a incorporar e assumir uma atitude ativa no processo.

A inclusão das novas tecnologias nos ambientes educacionais provoca um processo de mudança contínuo, não permitindo mais uma parada. As mudanças ocorrem cada vez mais rapidamente e em curtíssimo espaço de tempo.

As inovações na área da informática sempre nos deixam em defasagem. É impossível acompanhar todas as mudanças. Se não nos colocarmos a essas inovações, com certeza ficaremos cada vez mais atrasados. Devemos estar convencidos que estamos diante de um autoritário mundo tecnológico. É preciso sempre questionar tais alterações, nem sempre adotá-las. O questionamento é indispensável: precisamos ser críticos e usar a criticidade.

É relevante enfatizar, entretanto, que atualmente ainda encontramos professores recém-formados ou até mesmo em fim de carreira, que não sabem manusear computadores e muito menos associar esse instrumento às suas atividades educacionais.

Sabemos que a maior parte de cursos de formação de professores não contempla a utilização das novas tecnologias da informação e da comunicação em seus currículos. Poucos são os cursos de formação de professores que contemplam o computador como ferramenta pedagógica e, mesmo assim, oferecem pouco ou nenhum ganho efetivo de aprendizado aos seus alunos (professores).

4. GEOGEBRA

As novas tecnologias surgiram da necessidade do homem de tornar o mundo mais dinâmico e eficiente, e nessa perspectiva, a área da informática tem se desenvolvido de forma acelerada em todos os ramos de atuação. De certo modo, todos são atingidos pelas constantes mudanças ocorridas no mundo moderno. No papel de educadores, devemos tomar conhecimento da importância da tecnologia, pois os avanços científicos e tecnológicos estão revolucionando esse campo e isso traz novas necessidades de aprendizagem e vivemos num mundo impregnado pela cultura da informática.

Atualmente a informática se tornou um objeto essencial para quem busca espaço na sociedade moderna em que vivemos. Existem muitos softwares utilizados para o ensino de Matemática, e em especial os softwares de Geometria Dinâmica, que assim são denominados por serem desenvolvidos em ambientes computacionais, permitindo a construção de objetos geométricos.

O Geogebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um software de matemática dinâmica livre que combina conceitos de Geometria e Álgebra em uma única interface gráfica. Ele permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; os quais podem ser modificados dinamicamente. Os valores e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Além disto, o GeoGebra nos permite trabalhar com funções, desde o nível básico até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos relacionados com análise matemática, álgebra, álgebra linear, geometria analítica, entre outros.

O Geogebra, vem chamando a atenção de pesquisadores e têm sido tema de diversas investigações didáticas. Embora conte com muitos recursos, ele é simples de ser usado e possui um tutorial na opção "Ajuda" bastante útil e explicativo. O mesmo pode ser obtido gratuitamente no site https://www.geogebra.org/.

O Geogebra traz muitas vantagens em relação ao trabalho no papel ou no quadro, como movimentar as figuras em diversas direções, comparar e voltar ao aspecto inicial.

Diversos são os conteúdos que podem ser trabalhados: as propriedades das figuras geométricas, os conceitos de reflexão, translação e rotação (congruência) e homotetia (semelhança), cálculo de ângulos, e vários conteúdos algébricos - por exemplo, as funções.

Uma possibilidade de usar o programa em sala de aula são as aulas expositivas, mas é interessante que os estudantes usem o Geogebra para resolver questões em grupo ou individualmente. Ele não serve apenas para trabalhar com mais agilidade e buscar diversos caminhos de resolução de problemas, mas também para checar se o que foi feito está correto.

5. BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

É amplamente compartilhada a ideia do desafio para aprender matemática e, em particular, como aqui iremos tratar, a complexidade no aprendizado da trigonometria, em que pese as controvérsias, propomos a solução desta problemática aproximando ao máximo a linguagem simbólica, a duras penas conquistadas, à concretude, ou seja, possibilitar uma proposta de ensino da trigonometria de modo que se confunda com a realidade do educando.

Sabemos que a trigonometria historicamente teve essencial papel na resolução de problemas ligados à Astronomia, agrimensura e navegação, igualmente, associando este ramo da matemática a fatos e coisas comum da realidade, será possível vencer um tabu histórico que é a ideia de dificuldade e incompreensão, em particular da trigonometria.

A data precisa do surgimento da trigonometria não se tem, entretanto, como é de praxe na matemática, pode-se afirmar que a trigonometria surgiu por diversos estudiosos e nações, como os egípcios e os babilônios que deram importantes contribuições, a esse respeito Gelson Iezzi nos esclarece:

> A trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época. Mas, considerando o termo trigonometria no seu sentido literal (medida do triângulo), a origem do assunto pode ser situada já no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. O papiro Rhind, importante documento sobre a matemática egípcia (aproximadamente 1700 a.C.), menciona por quatro vezes o *seqt* de um ângulo, em conexão com problemas métricos sobre pirâmides. O *seqt* do ângulo ∠OMV [...] é a razão entre OM e OV e, portanto, corresponde à ideia atual de cotangente. As pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (medida de ∠OMV) fosse constante — aproximadamente 52°. Egípcios e babilônios (aproximadamente 1500 a.C.) e posteriormente os gregos usavam relógios de sol em que era utilizada a mesma ideia. Tais relógios consistiam basicamente de uma haste BC, chamada pelos gregos de gnomon, fincada verticalmente no chão. O exame da variação da amplitude da sombra AB projetada pela haste propiciava a determinação de parâmetros, como a duração do ano. (IEZZI, 2013, p. 36)

Como vimos, no *Papiro Rhind* foram encontradas situações relacionadas à cotangente. Na tábua cuneiforme *Plimpton 322*, tábua babilônia com texto escrito entre 1900 e 1600 a.C., foram localizados problemas envolvendo secantes. Euclides de Alexandria, em sua obra mundialmente conhecida, *Os Elementos*, apresentou alguns conceitos trigonométricos, porém representados através de formas geométricas. Mas foi Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., quem recebeu o título de *Pai da Trigonometria*, isso porque apresentou um tratado com cerca de 12 volumes nos quais tratava da trigonometria com a autoridade de quem conhecia profundamente o assunto.

Naquele mesmo período, Hiparco apresentou ao mundo uma tábua de cordas, sendo ele o responsável pela elaboração da primeira tabela trigonométrica que se tem registro. Ainda naquela época, Ptolomeu apresentou sua tábua de cordas contendo o cálculo do seno dos ângulos de 0º a 90º, ângulos que seriam utilizados nos estudos astronômicos em que ele estava engajado. Hiparco e Ptolomeu deram imensas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia. Mais uma vez, Gelson Iezzi nos apresenta algo mais sobre o presente assunto:

> A trigonometria como auxiliar da astronomia, em que certas funções angulares são usadas para determinar posições e trajetórias de corpos celestes, surge no século II a.C. O pai dessa abordagem foi o grego Hiparco de Niceia (séc. II a.C.), o mais importante astrônomo da Antiguidade, que, em razão disso, costuma ser chamado de “o pai da trigonometria”. Ao que consta, Hiparco passou alguns anos de sua vida estudando em Alexandria, mas acabou se fixando em Rodes (Grécia), onde desenvolveu a maior parte de seu trabalho. Contam-se entre as principais contribuições de Hiparco à astronomia: a elaboração de um amplo catálogo de estrelas (o primeiro do mundo ocidental); a medida da duração do ano com grande exatidão (365,2467 dias contra 365,242199 dias segundo avaliações modernas); cálculo do ângulo de inclinação da eclíptica (que atualmente é o círculo (órbita) descrito pela Terra em torno do Sol em um ano) com o plano do equador terrestre. A trigonometria de Hiparco surge como uma “tabela de cordas” em doze livros, obra que se perdeu com o tempo. Aí teria sido usado pela primeira vez o círculo de 360º. (IEZZI, 2013, p. 36-37)

Hiparco, ao lado de Ptolomeu, é, sem dúvida, um dos nomes mais ilustres dos estudos antigos da trigonometria. É atribuída a ele, também, a divisão do círculo em 360º. Advindos do estudo da Astronomia surgiram os conceitos de *seno* e *cosseno.* A tangente supostamente surgiu da necessidade de se calcular alturas e/ou distâncias.

A obra matemática mais influente da antiguidade foi escrita pelo astrônomo e matemático Ptolomeu de Alexandria, a *Syntaxis Mathematica*, obra de 13 livros relacionados à trigonometria. Ainda em terreno grego, *Menelau de Alexandria* escreveu três volumes destinados ao estudo da trigonometria, sendo o primeiro atido à ideia de triângulos esféricos, o segundo é uma aplicação da geometria esférica a astronomia e o terceiro trata do *Teorema de Menelau.*

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

O primeiro aparecimento real do seno de um ângulo se deu no trabalho dos hindus. Aryabhata, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno. Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de Brahmagupta, em 628, e um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150. Por seu turno, nos aponta Gelson Iezzi:

> Felizmente, porém, a obra de Hiparco foi preservada e ampliada de maneira brilhante por Claudio Ptolomeu (séc. II d.C.). Sobre a vida de Ptolomeu praticamente o que se sabe é que fez observações astronômicas em Alexandria entre 127 e 151 d.C. Sua obra-prima é o Almagesto, um compêndio de astronomia em treze livros, do qual ainda há cópias hoje em dia. A teoria astronômica apresentada por Ptolomeu nessa obra coloca no centro do Universo a Terra, em torno da qual giram o Sol, a Lua e os cinco planetas então conhecidos, segundo uma concepção que foi bastante, com as adaptações devidas, utilizada para descrever o comportamento do sistema solar por quatorze séculos. No livro primeiro do Almagesto, como pré-requisito, há uma tabela de cordas (talvez devida a Hiparco) dos ângulos de 0 a 180 graus, de meio em meio grau, considerando o diâmetro de um círculo formado de 120 unidades. Os resultados são apresentados na base 60. [...] Essas cordas são a origem da ideia atual de seno. (IEZZI, 2013, p. 37-38)

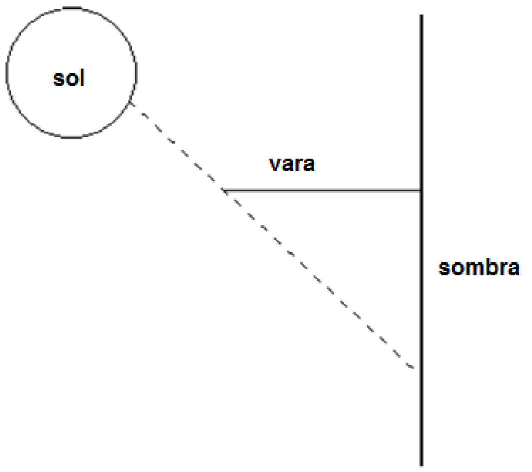
Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de jiva - de origem hindu - o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe al-Battani adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno.

O nome seno vem do latim sinus que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. Em particular, o uso de Fibonacci do termo sinus rectus arcus rapidamente encorajou o uso universal de seno.

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, ao que parece, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

A função tangente era a antiga função sombra, que tinha idéias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto modificava o tamanho da sombra.

Figura 01 – Projeção do sol



Fonte: Autor

Assim, a tangente e a cotangente vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de sol. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. A secante e a cossecante não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas.

Por fim, concluindo este capítulo e retomando a discussão de seu início, já diante do contexto histórico exposto anteriormente, é proposto o desenvolvimento de atividades relacionadas à trigonometria, utilizando os apontamentos históricos matemáticos, objetivando motivar e envolver os alunos com o conhecimento de forma que não torne a Matemática exaustiva e distante da realidade do aluno. Aliás, no que se refere ao uso da História da Matemática como ferramenta de ensino, D'Ambrósio nos alerta:

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar os alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância. (D'AMBRÓSIO, 1997, p. 29)

Nesta toada, faz-se necessário planejar as aulas e, servindo-se como recurso a História da Matemática, diversificar efetivamente a maneira do processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio, destacando problemas históricos, as contribuições dos estudiosos e abrindo discussão para despertar a curiosidade do aluno, atribuindo significados e aplicações ao ensino, tornando a aprendizagem da Matemática uma construção humana.

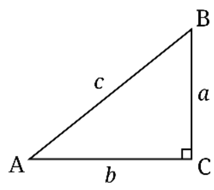
6. TRIGONOMETRIA

Neste capítulo serão abordados conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo e trigonometria na circunferência, tendo como referência DANTE (2010), IEZZI (2014), IEZZI, (2013), MUNIZ NETO (2013) e PAIVA (2015) que serviram como base para o desenvolvimento da parte teórica da trigonometria.

6.1 Triângulo Retângulo

Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.

Figura 02: triângulo retângulo



Fonte: Autor

Vamos usar as seguintes notações:

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Ângulos: $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B$.

Medidas dos lados: a = medida do lado $\overline{BC}$

b = medida do lado $\overline{AC}$

c = medida do lado $\overline{AB}$

Medidas dos ângulos: $\hat{A}$ = medida de $B\hat{A}C$

$\hat{B}$ = medida de $C\hat{B}A$

$\hat{C}$ = medida de $A\hat{C}B$

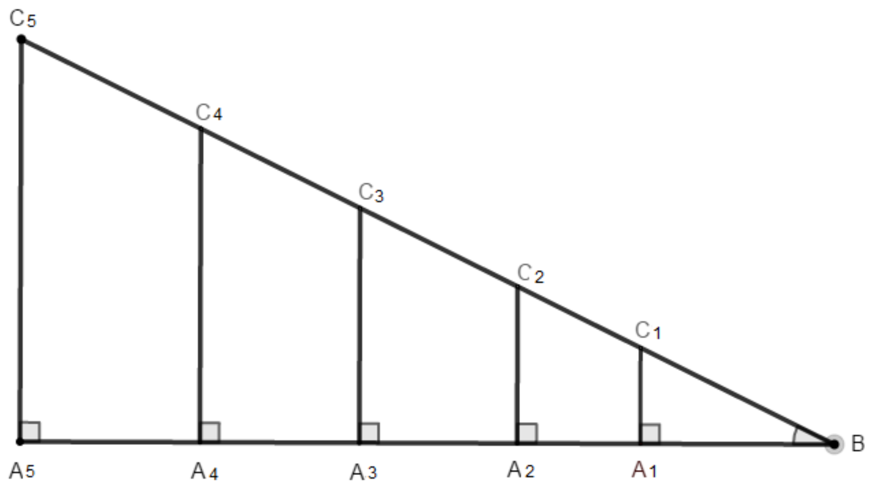
O lado $\overline{AB}$, oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa*.

Os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados catetos do triângulo ABC.

6.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Dado um ângulo agudo $\hat{B}$ vamos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, ... e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$, ... (conforme a figura a seguir).

Figura 03: Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Autor

Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, etc. são todos semelhantes entre si. Então:

1º) Fixado o ângulo $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

2º) Fixado o ângulo $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BC_3}{BC_3} = \ldots$$

3º) Fixado o ângulo $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais.

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

Então, as relações acima não dependem dos tamanhos dos triângulos ΔBA_1C_1, ΔBA_2C_2, ΔBA_3C_3, ... , mas dependem apenas do valor do ângulo $\hat{B}$.

Assim, considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo $\hat{B}$, tem-se:

1) O seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$Sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} \Rightarrow Sen\ \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

2) O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

$$Cos\ \hat{B} = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} \Rightarrow Cos\ \hat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BC_3}{BC_3} = \ldots$$

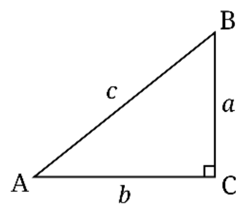
3) A tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$Tg\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}} \Rightarrow Tg\ \hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

6.3 Relação fundamental da trigonometria

Seja o triângulo retângulo ABC:

Figura 04: Triângulo retângulo



Fonte: Autor

Em relação ao ângulo $\hat{B}$ tem-se: $Sen\ \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow\ b = c \cdot Sen\ \hat{B}$;

$$Cos\ \hat{B} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot Cos\ \hat{B}$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se $a^2 + b^2 = c^2$. Então:

$$\left(c \cdot Cos\ \hat{B}\right)^2 + \left(c \cdot Sen\ \hat{B}\right)^2 = c^2$$

$$\left(c^2 \cdot Cos^2\ \hat{B} + c^2 \cdot Sen^2\ \hat{B} = c^2\right) \quad \div (c^2)$$

Portanto, vem: $Sen^2 \hat{B} + Cos^2\ \hat{B} = 1$

Consideremos a razão $\frac{sen\ \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

$$\frac{sen\ \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = Tg\ \hat{B}.$$

Isto é: $Tg\ \hat{B} = \frac{sen\ \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

A soma dos ângulos do triângulo ABC é 180˚. Daí tem-se:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ e $\hat{C} = 90° \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 90°$, logo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementares.

Portanto:

1) $Sen\ \hat{B} = \frac{b}{c}$ e $Cos\ \hat{A} = \frac{b}{c}$ 2) $Cos\ \hat{B} = \frac{a}{c}$ e $Sen\ \hat{A} = \frac{a}{c}$

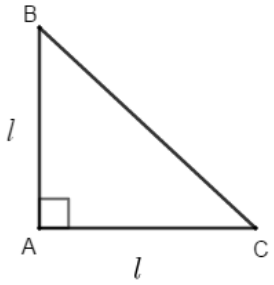
O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento e vice-versa.

6.4 Razões trigonométricas especiais

Os ângulos de 30˚, 45˚ e 60˚ pela frequência de aparecerem em exercícios de trigonometria no triângulo retângulo são chamados de ângulos notáveis. Para obtenção das razões trigonométricas desses ângulos vamos utilizar:

1) Um triângulo retângulo isósceles, com catetos medindo l e ângulos Â = 90˚, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ = 45˚.

Figura 05: triângulo retângulo isósceles



Fonte: Autor

Usando o teorema de Pitágoras, vamos encontrar a medida da hipotenusa $\overline{BC}$

$$(\overline{BC})^2 = l^2 + l^2$$

$$(\overline{BC})^2 = 2l^2$$

$$\overline{BC} = l\sqrt{2}$$

Então:

$$Sen\ \hat{B} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

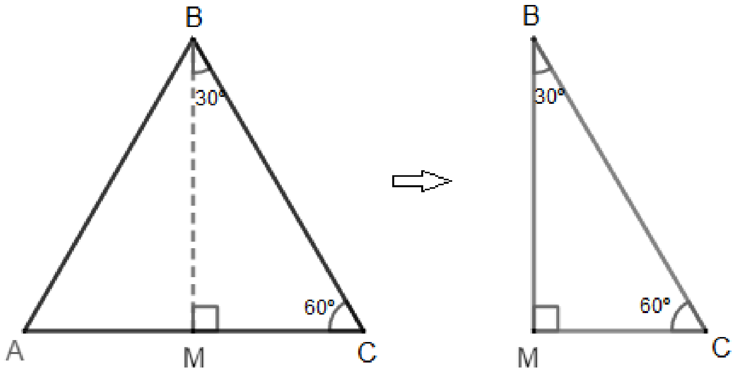
$$Cos\ \hat{B} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Cos\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Tg\ \hat{B} = \frac{l}{l} = 1 \Rightarrow Tg\ 45^\circ = 1$$

2) Um triângulo ABC equilátero de lado l e ângulos $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$.

Seja $\overline{BM}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$. Da geometria plana sabemos que, no triângulo equilátero, $\overline{BM}$ é mediana, altura e bissetriz.

Figura 06: Triângulo equilátero



Fonte: Autor

Portanto, no ΔMBC, tem-se: Os ângulos $\widehat{M} = 90°$, $\widehat{C} = 60°$, $\hat{B} = 30°$ e os lados $\overline{BM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero), $\overline{CM} = \frac{l}{2}$ e $\overline{BC} = l$.

Então:

$$Sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\ \hat{C} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow Cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$Tg\ \hat{C} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3} \Rightarrow Tg\ 60° = \sqrt{3}$$

$$Sen\ \hat{B} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow Sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$Cos\ \hat{B} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Tg\ \hat{B} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow Tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Essas razões trigonométricas podem ser colocadas numa tabela de dupla entrada de ângulos notáveis:

Figura 07: Tabela das razões trigonométricas dos arcos notáveis

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autor

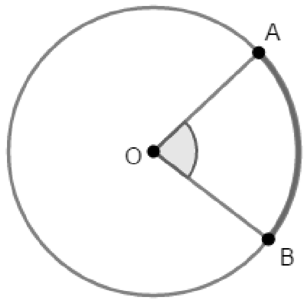
6.5 Medidas de arcos

Os arcos de uma circunferência podem ser medidos em Grau ou Radiano.

1) Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Considerando uma circunferência de centro O, verificamos que AÔB é um ângulo central e AB é um arco correspondente ao ângulo central AÔB.

Figura 08: Ângulo central e arco de uma circunferência



AÔB ângulo central

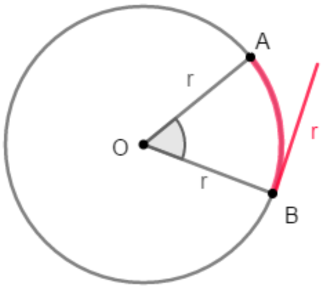
$\widehat{AB}$ arco subtendido por AÔB.

Fonte: Autor

A medida (em graus) do ângulo central é igual a medida de um arco da circunferência correspondente, ou seja, $A\hat{O}B = \widehat{AB}$

2) Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Figura 09: Radiano



$$\widehat{AB} = r \Rightarrow \widehat{AB} = 1\,rad$$

Fonte: Autor

6.6 Relação entre o grau e o radiano

Uma circunferência completa mede 360° e tem comprimento $2\pi r$. Então, fazendo uma regra de três diretamente proporcional, usando um arco de comprimento r (comprimento do raio) tem-se:

$$1\,r \;\underline{\hspace{4cm}}\; 1\,rad$$

$$2\pi r \;\underline{\hspace{4cm}}\; \alpha$$

$$\alpha \cdot r = 2\pi r \cdot 1\,rad$$

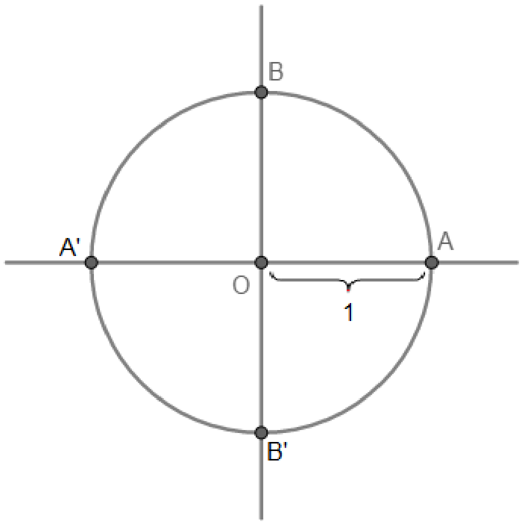
$$\alpha\ = 2\pi\,rad$$

Logo: $360^\circ = 2\pi\,rad$ ou $180^\circ = \pi\,rad.$

6.7 Ciclo trigonométrico

Consideremos uma circunferência de centro *O* raio unitário (r = 1) localizada no sistema cartesiano ortogonal *xOy*.

Figura 10: Ciclo de raio unitário



Fonte: Autor

Esta figura acima, em conjunto com as regras a seguir, é chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

Regras:

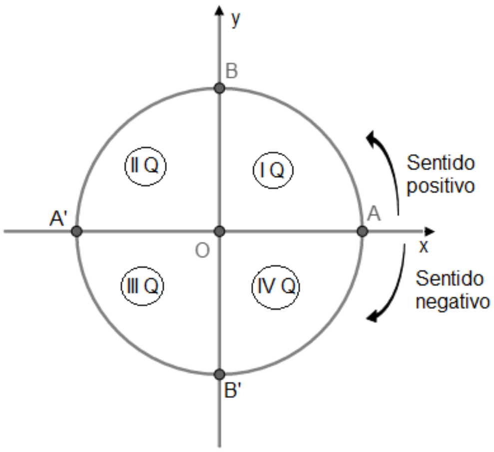
I) O ponto A (1, 0) é a origem de todos os arcos a serem medidos, ou seja, a origem do ciclo.

II) Se um arco for medido no sentido anti- horário, então a medida desse arco será positiva.

III) Se um arco for medido no sentido horário, então a medida desse arco será negativa.

IV) Os eixos coordenados dividem o ciclo em quatro regiões denominadas de quadrantes; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário a partir do ponto A (1, 0).

Figura 11: Ciclo trigonométrico



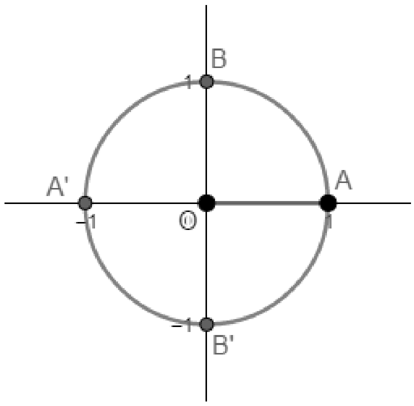
Fonte: Autor

A cada ponto P do ciclo trigonométrico, o arco $\widehat{AP}$ será medido em graus ou radianos.

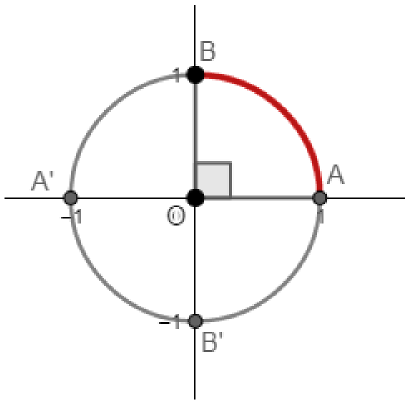
Vamos agora associar a cada número real x, com $0 \leq x < 2\pi$, um único ponto P do ciclo, tal que P é a imagem de x no ciclo. Assim, tem-se:

Figura 12: Circunferência trigonométrica no sentido positivo.

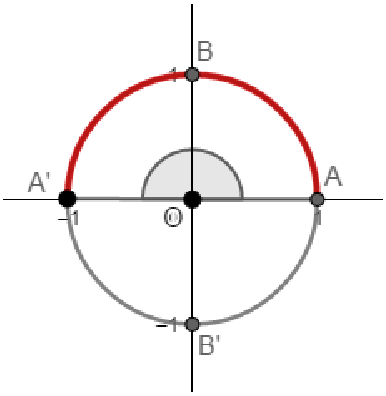
A é a imagem de 0



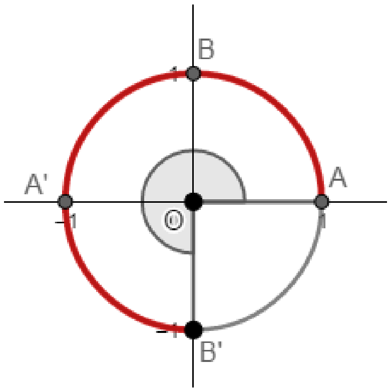
B é a imagem de $\frac{\pi}{2}$



A’ é a imagem de π



B’ é a imagem de $\frac{3\pi}{2}$

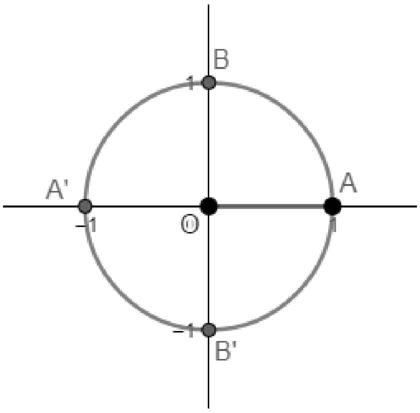


Fonte: Autor

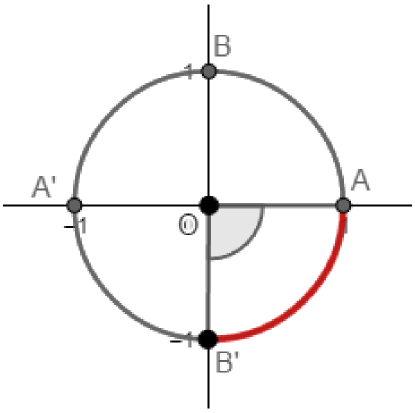
Vamos agora associar a cada número real x, com $-2\pi < x \leq 0$, um único ponto P do ciclo, tal que P é a imagem de x no ciclo. Assim, tem-se:

Figura 13: Circunferência trigonométrica no sentido negativo.

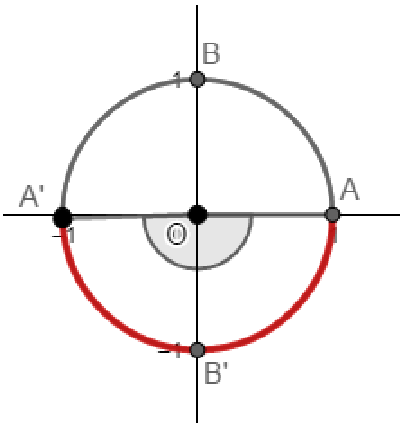
A é a imagem de 0



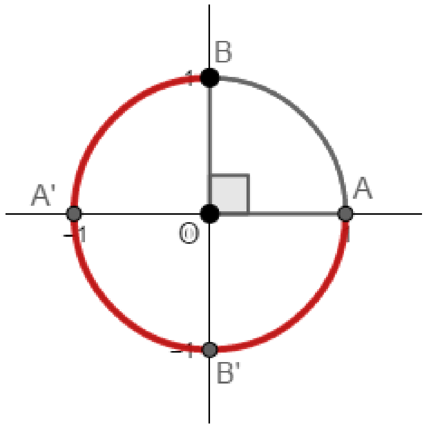
B’ é a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$



A’ é a imagem de $-\pi$



B é a imagem de $-\frac{\pi}{2}$



Fonte: Autor

6.8 Razões trigonométricas na circunferência

Neste trabalho iremos estudar três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

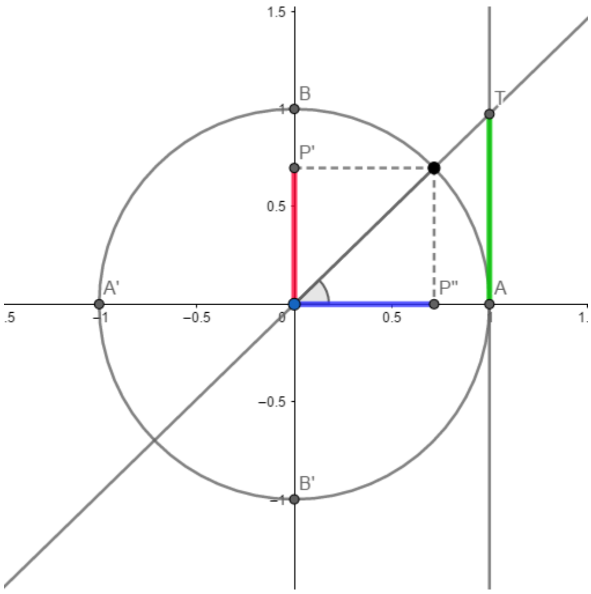
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$, em que $OA = 1$ e vamos associar três eixos:

1) eixo dos cossenos (eixo x), com direção $\overline{OA}$ e sentido positivo $O \to A$.

2) eixo dos senos (eixo y), com direção $\overline{OB}$ e sentido positivo $O \to B$, sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$.

3) eixo das tangentes (eixo t) tem direção paralelo a y por A e sentido positivo o mesmo de y.

Figura 14: Seno, Cosseno e Tangente do Ciclo Trigonométrico.

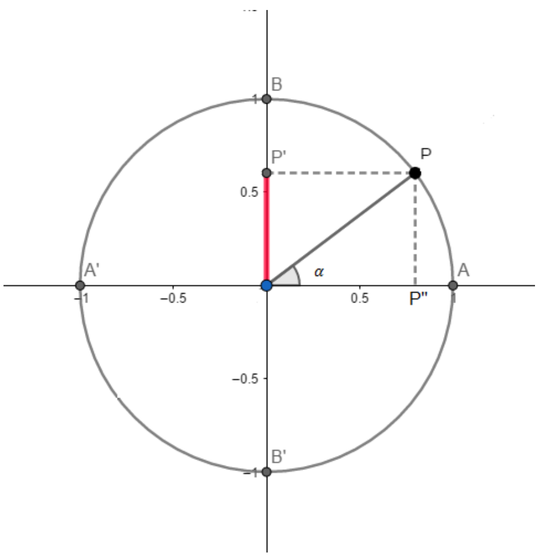


Fonte: Autor.

Seno

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; como vimos, P corresponde a extremidade final do arco $\widehat{AP}$, de medida α radianos.

Figura 15: Seno de um arco do 1º quadrante.



Fonte: Autor

Definimos o seno de α como a ordenada do ponto P:

$$\boxed{Sen\ \alpha = \text{ordenada de } P}$$

Observe que, projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo vertical, obtem-se P'. Considerando a orientação do eixo vertical (para cima) e tomando o segmento $\overline{OP'}$, é possível calcular o número real (positivo, negativo ou nulo) correspondente a diferença, nesta ordem, entre os valores da ordenada da "extremidade" (P') e da "origem" (0) desse segmento. A essa diferença damos o nome de medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$. Assim podemos escrever:

$Sen\ \alpha = \overline{OP'}$ ou $Sen\ \widehat{AP} = \overline{OP'}$

Daí, podemos chamar o eixo vertical como eixo dos senos como havíamos citado mais acima.

Observe na figura 15 e a definição a seguir, que faz parte do estudo de trigonometria do triângulo retângulo para determinar o seno no ciclo:

$$Sen\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}\ ;\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

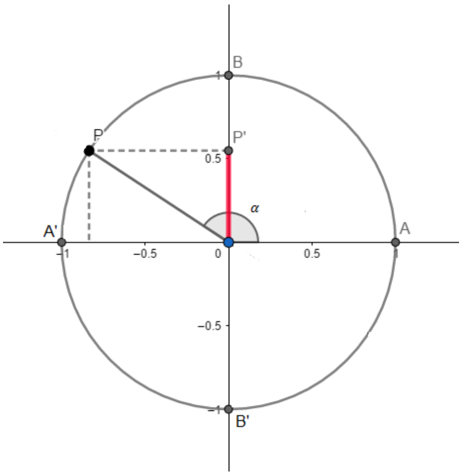
Traçando o segmento $\overline{PP''}\ //\ \overline{OP'}$, temos no $\Delta\ OPP''$:

$Sen\ A\hat{O}P = sen\ \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP'$, pois $OP'PP''$ é um retângulo.

O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando a orientação "para cima" do eixo dos senos, observemos o sinal de um número real α em cada quadrante, à medida que varia a posição de P (P é a imagem de α).

2º Quadrante

Figura 16: Seno de um arco do 2º quadrante.

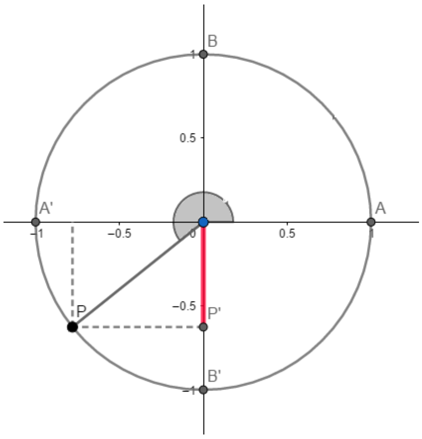


Fonte: Autor

Ordenada de $P > 0 \Rightarrow sen\,\alpha > 0$

3º Quadrante

Figura 17: Seno de um arco do 3º quadrante.

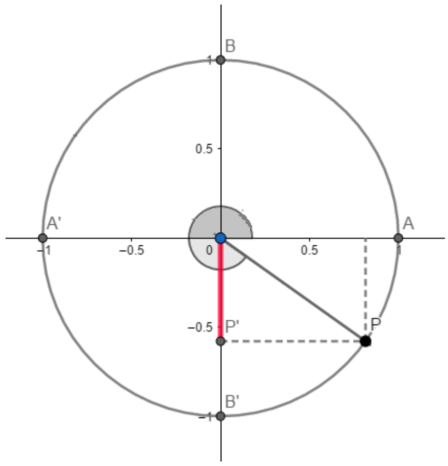


Fonte: Autor

Ordenada de $P < 0 \Rightarrow sen\,\alpha < 0$

4º Quadrante

Figura 18: Seno de um arco do 4º quadrante.



Fonte: Autor

Ordenada de $P\ <\ 0\ \ \Rightarrow\ \ sen\,\alpha\ <\ 0$

Sendo o raio do ciclo trigonométrico igual a 1, temos que, para todo $\alpha\ \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq sen\,\alpha \leq\ 1$; uma vez que o segmento $\overline{OP'}$ é interno ao ciclo, qualquer que seja a posição assumida por P.

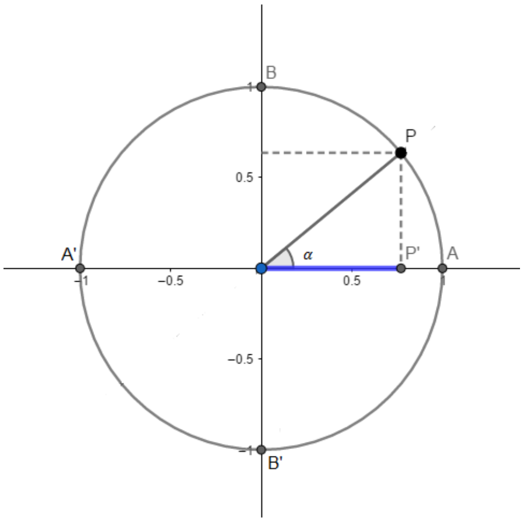
Cosseno

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0\ \leq \alpha\ \leq\ 2\pi.$

Definimos o cosseno de α como a abscissa do ponto P:

$$\boxed{cos\,\alpha\ = \text{abscissa de } P}$$

Figura 19: Cosseno de um arco do 1º quadrante.



Fonte: Autor

Observe que, projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo horizontal, obtem-se P'. Observe que a medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$, considerando a orientação do eixo, damos o nome de $Cos\ \alpha$. Observe que a medida do segmento $\overline{OP'}$ é dada pela diferença, nesta ordem, entre as abscissas da extremidade P' e da origem O.

$cos\ \alpha\ = \overline{OP'}$ ou $cos\ \widehat{AP} = \overline{OP'}$

Daí, podemos chamar o eixo horizontal como eixo dos cossenos como havíamos citado mais acima.

Observe na figura 19 e a definição a seguir, que faz parte do estudo de trigonometria do triângulo retângulo que determina o cosseno no ciclo:

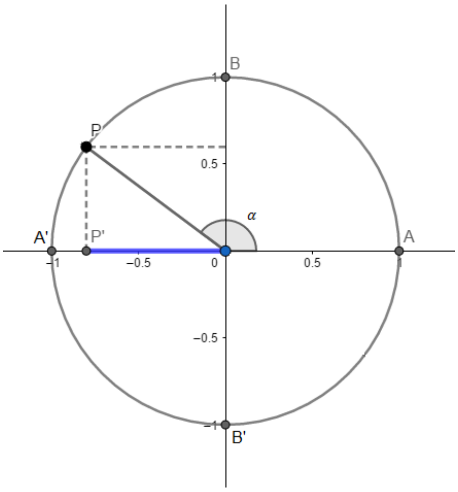
$$cos\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}\ ;\ 0\ < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No triângulo retângulo POP', temos: $cos\ A\hat{O}P\ =\ cos\ \alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} =\ OP'$

O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posição nos demais quadrantes.

2º Quadrante

Figura 20: Cosseno de um arco do 2º quadrante.

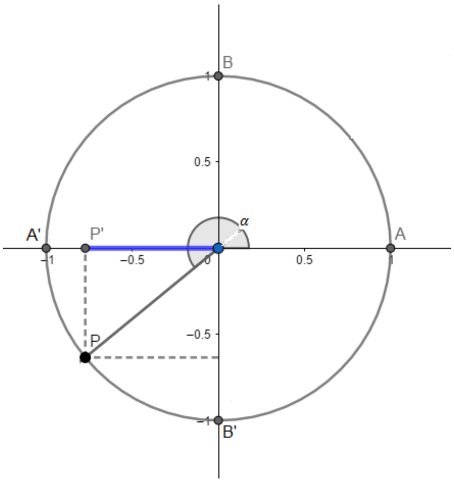


Fonte: Autor

Abscissa de $P < 0 \Rightarrow cos\,\alpha < 0$

3º Quadrante

Figura 21: Cosseno de um arco do 3º quadrante.

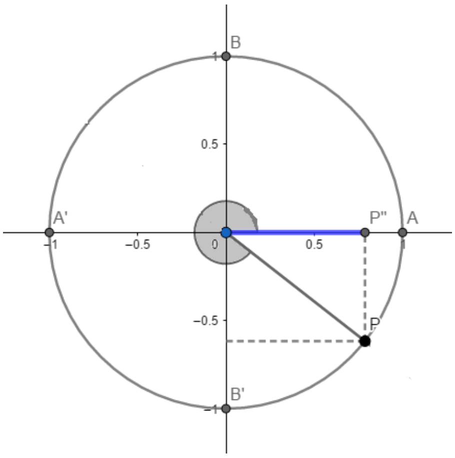


Fonte: Autor

Abscissa de $P < 0 \Rightarrow cos\,\alpha < 0$

4º Quadrante

Figura 22: Cosseno de um arco do 4º quadrante.



Fonte: Autor

Abscissa de $P > 0 \Rightarrow cos\,\alpha > 0$

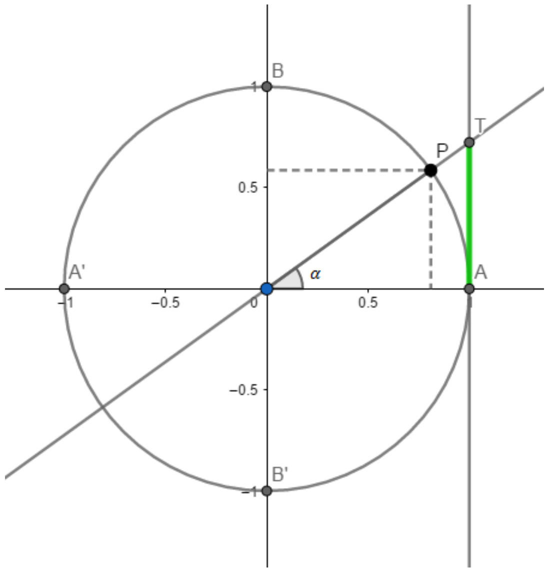
A exemplo do seno, o cosseno de um arco qualquer, no ciclo trigonométrico está no intervalo de – 1 a 1, isto é, $-1 \leq cos\,\alpha \leq 1$.

TANGENTE

Para estabelecer a tangente de um número real α, vamos acrescentar ao ciclo trigonométrico um terceiro eixo, tangente ao ciclo no ponto $A(1, 0)$, origem de todos os arcos. O ponto A é a origem do eixo denominado **eixo das tangentes**, e sua orientação (para cima) coincide com o eixo dos senos.

Unindo-se o centro O à extremidade P ($P \neq B$ e $P \neq B'$) de um arco de medida α em radianos (P é imagem do número real α) construímos a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intercepta o eixo das tangentes no ponto T.

Figura 23: Tangente de um arco do 1º quadrante.



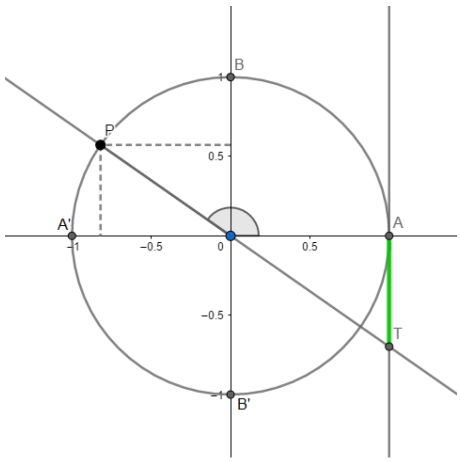
Fonte: Autor

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente do arco de $\alpha\, rad$ (ou tangente do número real α). Indicamos: $tg\ \alpha = AT$.

Considerando a orientação do eixo das tangentes, temos, para P pertencente ao primeiro quadrante $tg\ \alpha > 0$, no segundo quadrante $tg\ \alpha < 0$, no terceiro quadrante $tg\ \alpha > 0$ e no quarto quadrante $tg\ \alpha < 0$.

2º Quadrante

Figura 24: Tangente de um arco do 2º quadrante.

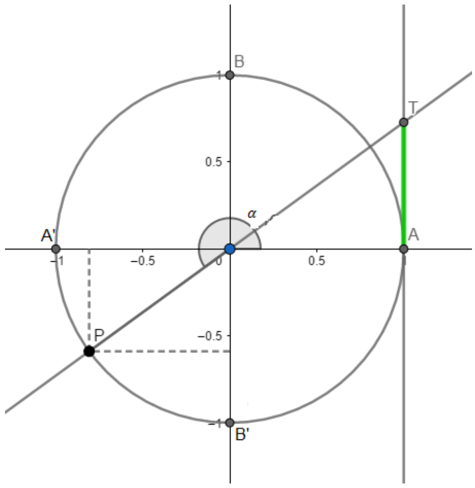


Fonte: Autor

$$T \text{ está abaixo de } A \Rightarrow tg\ \alpha < 0$$

3º Quadrante

Figura 25: Tangente de um arco do 3º quadrante.

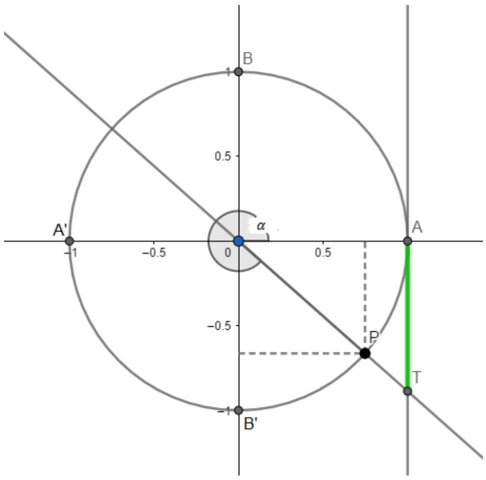


Fonte: Autor

T está acima de $A \Rightarrow \ tg\ \alpha > 0$

4º Quadrante

Figura 26: Tangente de um arco do 4º quadrante.



Fonte: Autor

T está abaixo de $A \Rightarrow tg\ \alpha < 0$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, o ponto P pertence ao eixo dos senos, e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Nesse caso, não se define a tangente de $tg\,\frac{\pi}{2}$ e $tg\,\frac{3\pi}{2}$.

Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta o eixo das tangentes em sua origem A. Assim $AT = 0$ e $tg\,0 = 0$, $tg\,\pi = 0$ e $tg\,2\pi = 0$.

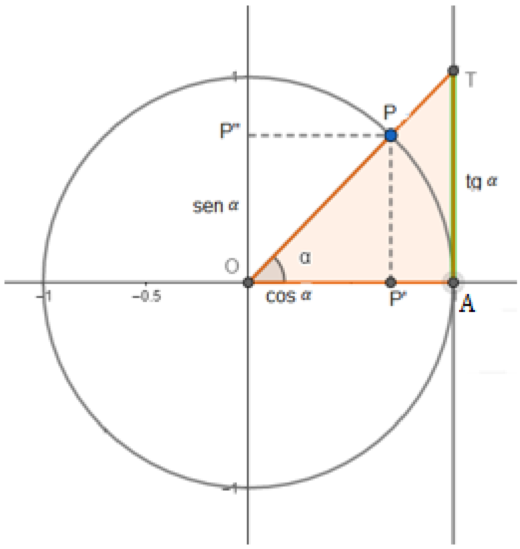
Vamos estabelecer uma relação entre seno, cosseno e tangente.

Seja α um número real, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.

Vamos supor que α seja distinto de 0, π e 2π. O número real α tem imagem em P, extremidade do arco $\alpha\ rad$.

Na figura abaixo, temos:

Figura 27: Relação entre Seno, Cosseno e Tangente.



Fonte: Autor

$OP' = cos\,\alpha$, $\qquad AT = tg\,\alpha$

$OP'' = PP' = sen\,\alpha$ e $OP = 1$ (raio).

Os triângulos $OP'P$ e OAT são semelhantes, pois possuem em comum, além do ângulo reto, também o ângulo de medida α. Podemos, então, estabelecer a proporção:

$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$

Se o ponto P pertence ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se a mesma relação, usando procedimento análogo.

• Se $\alpha = \{0, \pi, 2\pi\}$, temos que $tg\ \alpha = 0$, $sen\ \alpha = 0$ e $cos\ \alpha \neq 0$; daí $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = 0$.

• Se α = $\frac{\pi}{2}$ ou α = $\frac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.

Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, vale a relação tg α = $\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$.

6.9 Função seno

Seja x um número real, P sua imagem no ciclo trigonométrico e P_1 a ordenada de P.

Denominamos de **função seno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_1 = sen\ x$, isto é, $f(x) = sen\ x$.

Note que f associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente à sua imagem no ciclo.

• O sinal da função f dada por $f(x) = sen\ x$ é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes; e é negativo quando x pertence ao 3º e 4º quadrantes.

• No 1º quadrante, a função f é crescente, pois a medida que x aumenta, os valores de $sen\ x$ aumentam de 0 até 1; no 2º e 3º quadrantes, f é decrescente: à medida que x aumenta os valores de f diminuem de 1 (valor máximo) até – 1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função cresce novamente e seus valores aumentam de – 1 a 0.

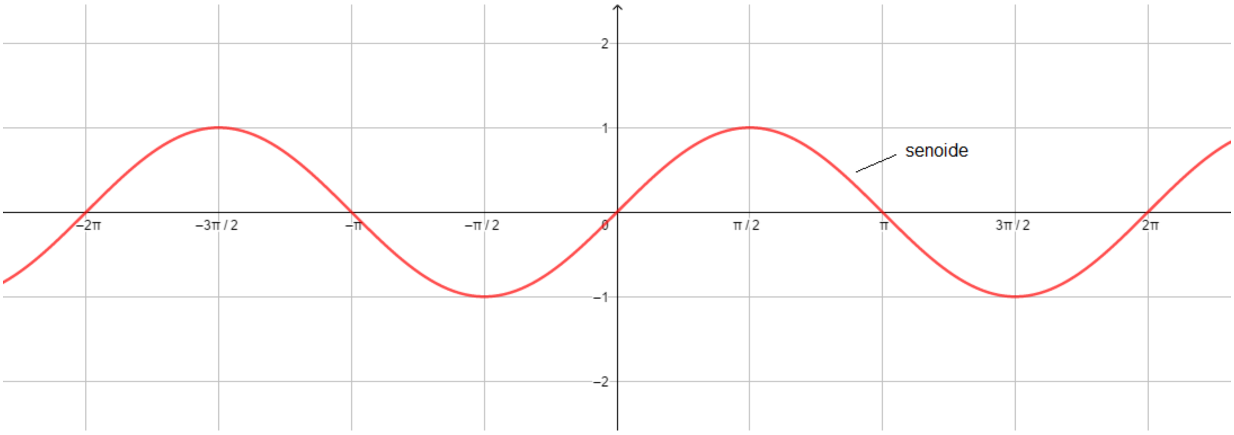
• A função seno é periódica e seu período é 2π.

• O domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois ∀ x ∈ $\mathbb{R}$, temos que: $-1 \leq sen\ x \leq 1$.

• f é uma função ímpar, pois ∀ $x \in \mathbb{R}, sen\ (-x) = -\ sen\ x$.

• O gráfico de f, dado por $f(x) = sen\ x$, recebe o nome senoide.

Figura 28: Gráfico da função Seno.



Fonte: Autor

6.10 Função cosseno

Seja x um número real, P sua imagem no ciclo trigonométrico e seja P_2 a abscissa de P.

Denominamos de **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_2 = cos\, x$, isto é, $f(x) = cos\, x$.

Note que f associa a cada número real x a abscissa do ponto correspondente à sua imagem no ciclo.

• O sinal da função f dada por $f(x) = cos\, x$ é positivo quando x pertence ao 1º e 4º quadrantes; e é negativo quando x pertence ao 2º e 3º quadrantes.

• No 1º e 2º quadrantes, a função f é decrescente, pois a medida que x aumenta, os valores de $cos\, x$ diminuem de 1 até – 1; no 3º e 4º quadrantes, f é crescente: à medida que x aumenta os valores de f aumentam de 1 até – 1;

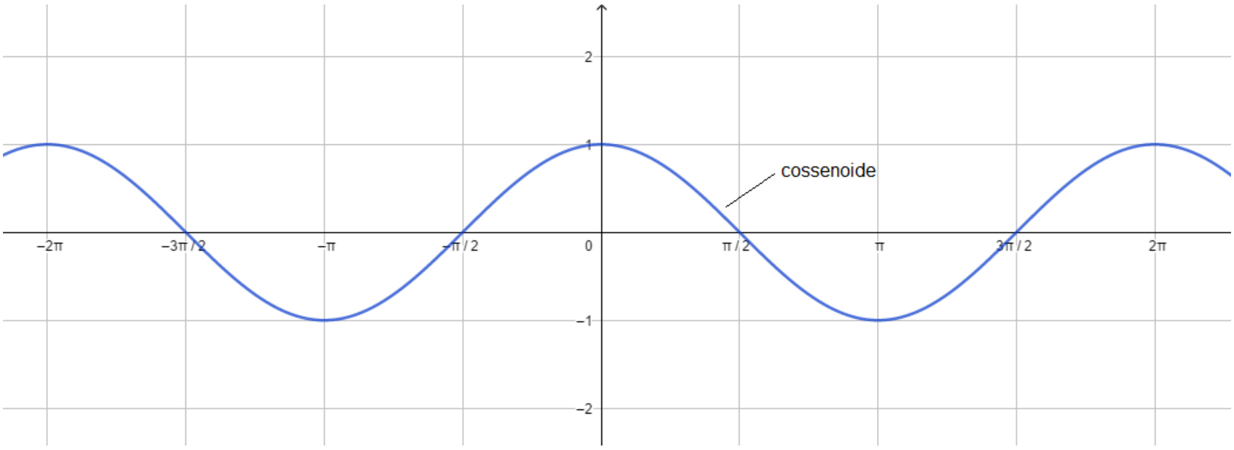
• A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

• O domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$. No entanto, o conjunto imagem da função cosseno é o intervalo real $[-1, 1]$, pois $\forall\ x \in \mathbb{R}$, temos que: $-1 \leq cos\, x \leq 1$.

• f é uma função par, pois $\forall\ x \in \mathbb{R}, cos\,(-x) = cos\, x$.

• O gráfico de f, dado por $f(x) = cos\, x$, recebe o nome cossenoide.

Figura 29: Gráfico da função Cosseno.



Fonte: Autor

PERÍODO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Obtem-se o período da função $y = a + b \cdot sen\,(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot cos\,(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leq mx + q \leq 2\pi \Rightarrow 0 - q \leq mx \leq 2\pi - q.$$

(I) Se $m > 0$:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \leq x \leq \frac{2\pi - q}{m}.$$

O período p da função é diferença entre o maior e o menor valor obtidos para x, nessa ordem, isto é:

$$p = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{m}.$$

(II) Se $m < 0$:

$$-q \leq mx \leq 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \geq x \geq \frac{2\pi - q}{m}.$$

Calculando o período p:

$$p = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \Rightarrow p = -\frac{2\pi}{m}.$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$p = \frac{2\pi}{|m|}.$$

6.11 Função tangente

Sejam $x \in \mathbb{R}$, P sua imagem no ciclo trigonométrico e T o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta o eixo das tangentes.

Consideremos D = $\{ x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Denominamos função tangente a função f: D → ℝ que associa cada número x ∈ D o número real $AT = tg\, x$; isto é, $f(x) = tg\, x$.

Observemos que:

• O domínio de f é $\{ x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, pois quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro, a imagem de x é B ou B' e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Desse modo, não definimos $tg\, x$, se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

• O conjunto imagem de f é ℝ, pois, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe, o ponto T tal que $AT = y$. A reta $\overleftrightarrow{OT}$ intercepta o ciclo em dois pontos distintos, imagens dos números reais x tais que $tg\, x = y$.

• A função f definida por $f(x) = tg\, x$ é sempre crescente.

• O sinal da função tangente é positivo no 1º e 3º quadrantes e é negativo no 2º e 4º quadrantes.

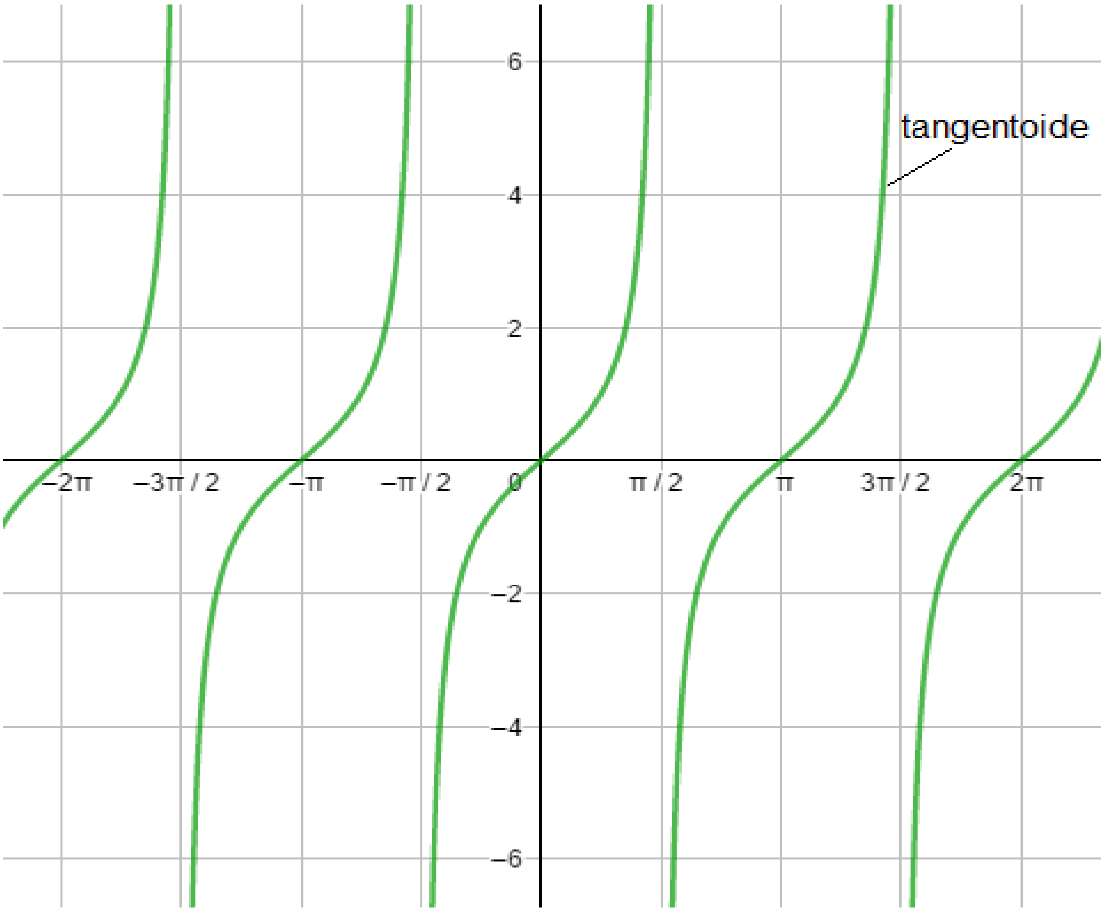
• A função tangente é periódica e seu período é π. De fato, sendo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, os números x e $x + k\pi$ têm imagens coincidentes, ou diametralmente opostas, na circunferência trigonométrica e desse modo:

$tg\, x = tg\,(x + k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

• Para todo $x \in$ D, $tg\,(-x) = -tg\, x$, a função tangente é uma função ímpar.

Considerando as observações anteriores, construímos o gráfico da função tangente, que recebe o nome de tangentóide.

Figura 30: Gráfico da função Tangente.



Fonte: Autor

PERÍODO DA FUNÇÃO TANGENTE

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot tg\,(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a meia-volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < mx + q < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q \ < \ mx \ < \frac{\pi}{2} - \ q \ \Rightarrow \frac{-\pi/2 - q}{m} \ < x < \frac{\pi/2 - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor extremo do intervalo acima, nessa ordem:

$$p \ = \frac{\pi/2 - q}{m} - \left(\frac{-\pi/2 - q}{m}\right) = \frac{\pi}{m}$$

(II) Se $m \ < \ 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - \ q \ \ < \ mx \ < \ \frac{\pi}{2} - \ q \Rightarrow \frac{-\pi/2 - q}{m} \ > x > \frac{\pi/2 - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p \ = \frac{-\pi/2 - q}{m} - \left(\frac{\pi/2 - q}{m}\right) = -\frac{\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$p \ = \frac{\pi}{|m|}$$

7. O USO DO GEOGEBRA

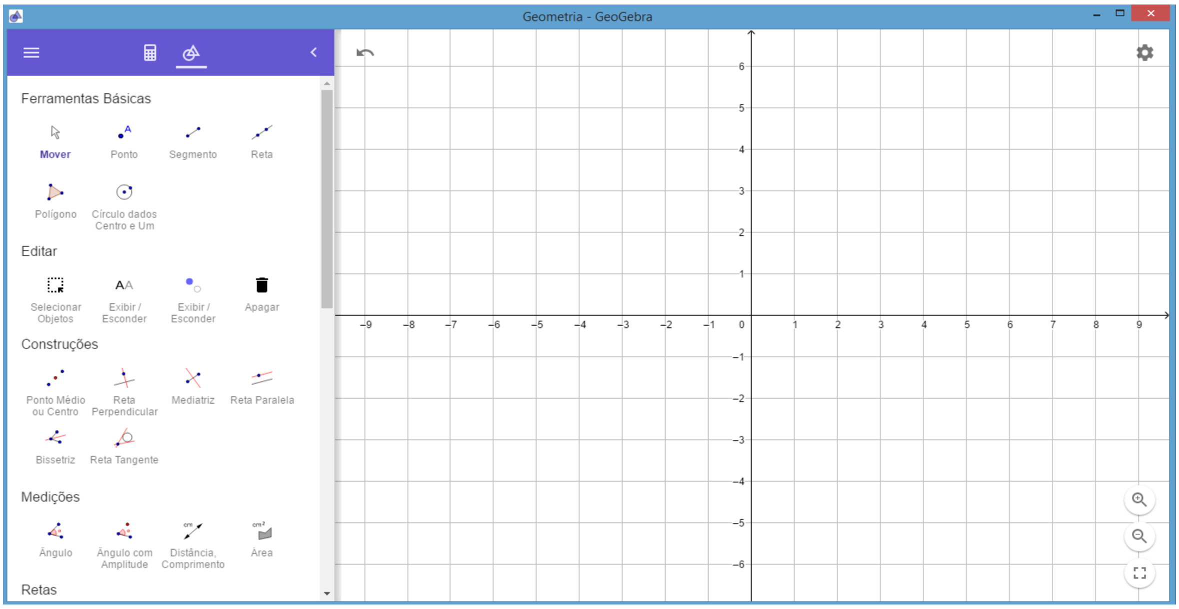
Neste capítulo apresenta-se o modo de exploração do software Geogebra como ferramenta de ensino e conceitos envolvidos de trigonometria no triângulo retângulo e trigonometria na circunferência.

Primeiramente instala-se o software Geogebra que pode ser feita no site **http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/.**

Após o download escolhe-se em qual sistema operacional o mesmo será instalado.

Acessa-se o programa e encontra-se a tela indicada abaixo:

Figura 31: Tela principal do Geogebra.



Fonte: Autor

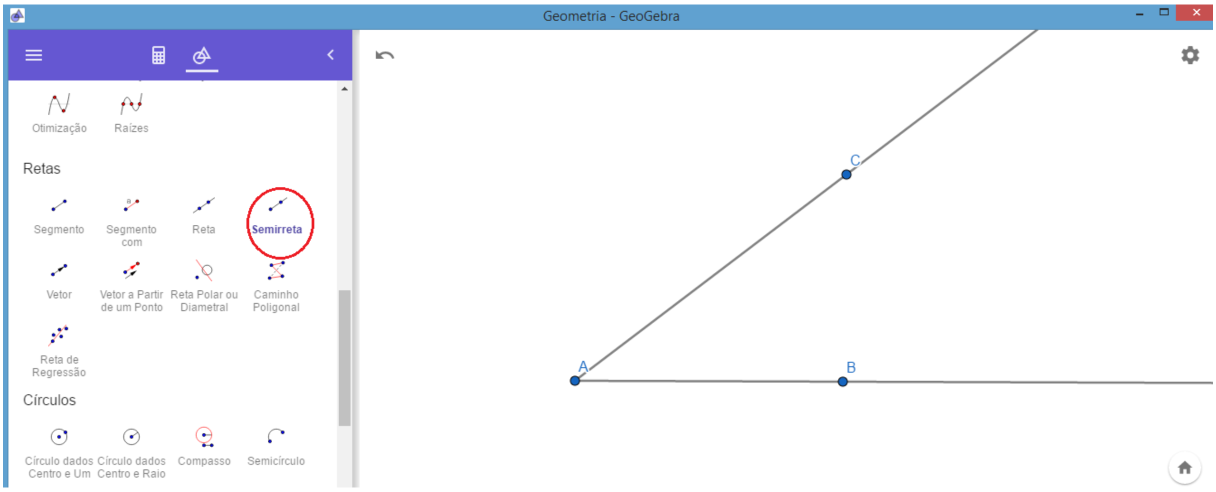
No software de geometria dinâmica Geogebra encontram-se as ferramentas, folha de cálculo, plano cartesiano, malha e todas as configurações necessárias que servirão para construção dos conteúdos planejados.

7.1 USO DO GEOGEBRA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Desmarque a opção eixos;

- Na barra de ferramentas clique em semirretas e crie duas semirretas de mesma origem;

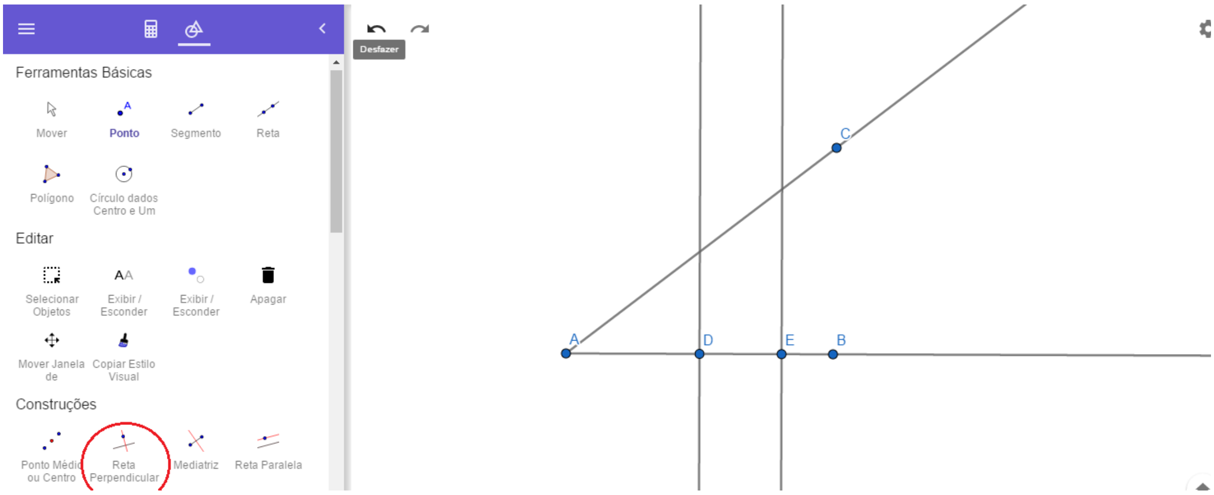
Figura 32: Construção do triângulo retângulo no Geogebra parte - I.



Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique em retas perpendiculares e clique em dois pontos da semirreta inferior;

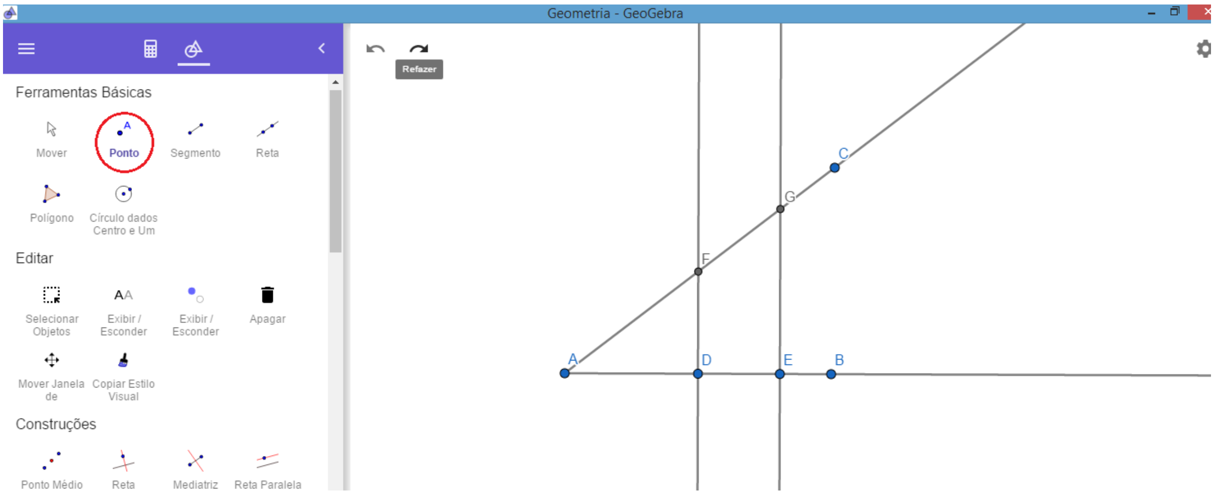
Figura 33: Construção do triângulo retângulo no Geogebra. Parte - II



Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique em ponto e marque a intersecção das retas perpendiculares com a reta superior;

Figura 34: Construção do triângulo retângulo no Geogebra. Parte - III

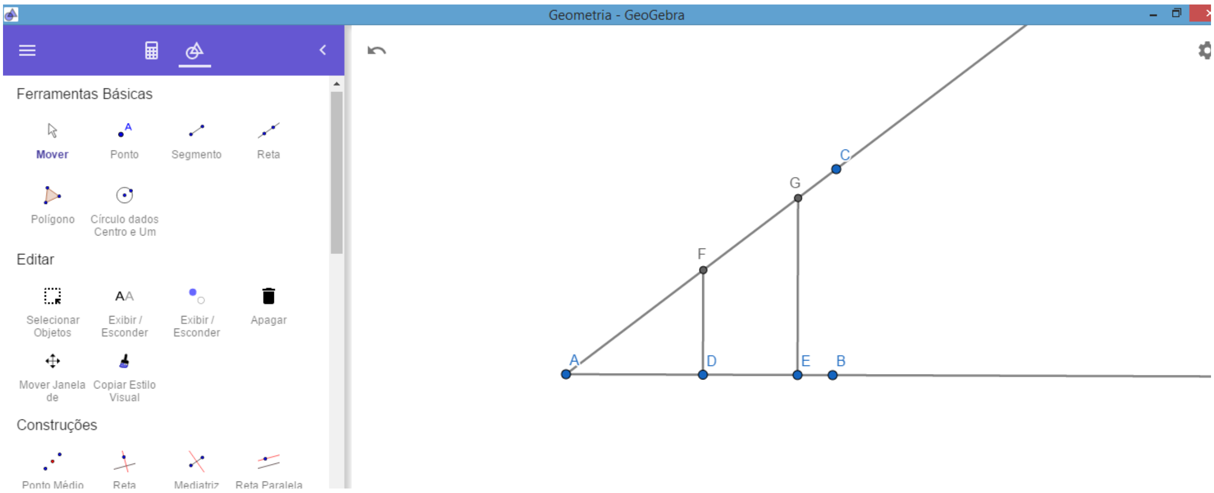


Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique em segmento de reta e clique nos pontos D e F para formar o segmento DF e nos pontos E e G para formar o segmento EG.

- Na barra de ferramentas clique em mover e clique em cada reta perpendicular com o botão direito para desmarcar o objeto, assim ficará apenas o segmento.

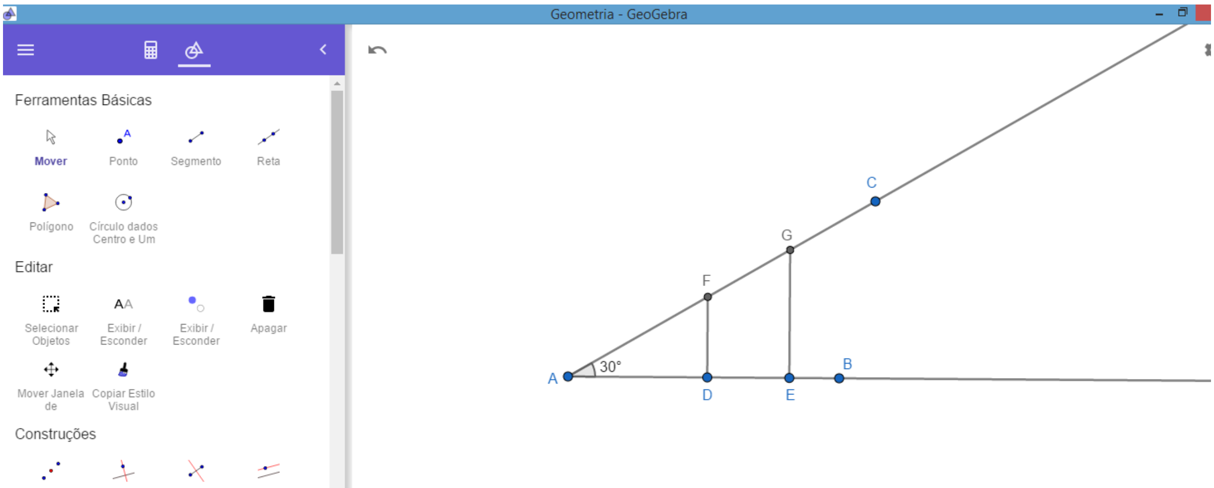
Figura 35: Construção do triângulo retângulo no Geogebra. Parte - IV



Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique ângulo e em seguida clique nos pontos B, A e C. Caso, seja maior que 180˚ faça C, A e B ou então escolha o tipo de ângulo.

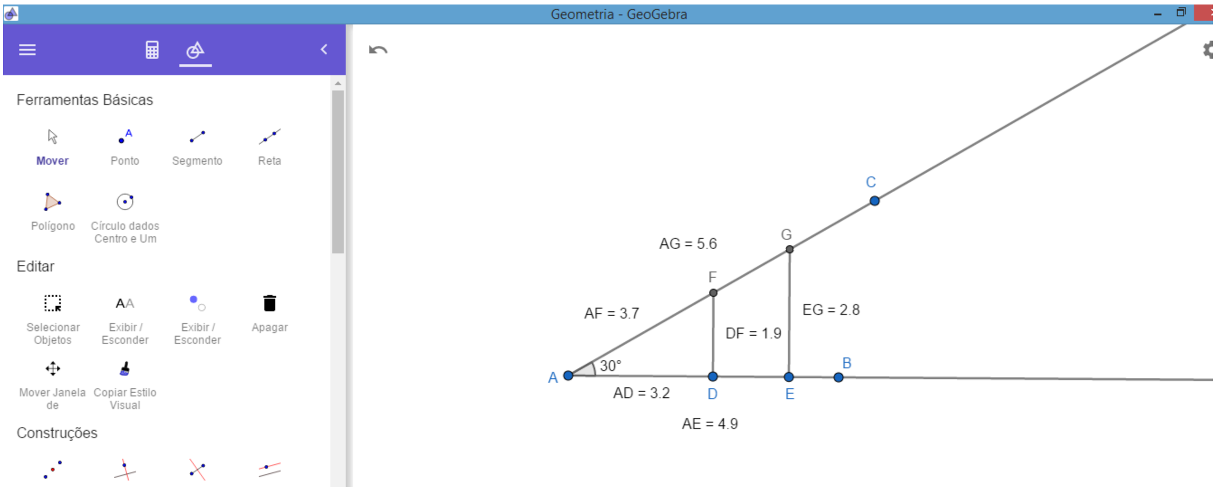
Figura 36: Construção do triângulo retângulo no Geogebra. Parte - V



Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique em distância e comprimento e clique nos vértices dos segmentos que queira medir, nesse caso, são os segmentos: EG, DF, AE, AD, AF e AG.

Figura 37: Construção do triângulo retângulo no Geogebra. Parte VI



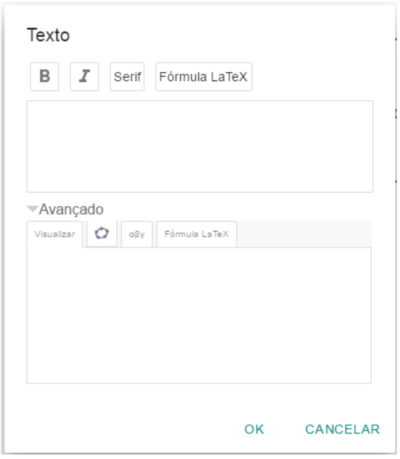
Fonte: Autor

- Na barra de ferramentas clique mover para deslocar a medida do segmento ou do ângulo se desejar;

Vamos agora fazer algumas razões entre os lados dos triângulos:

- Na barra de ferramentas clique texto e clique em algum lugar da tela;

Figura 38: Edição de textos no Geogebra.



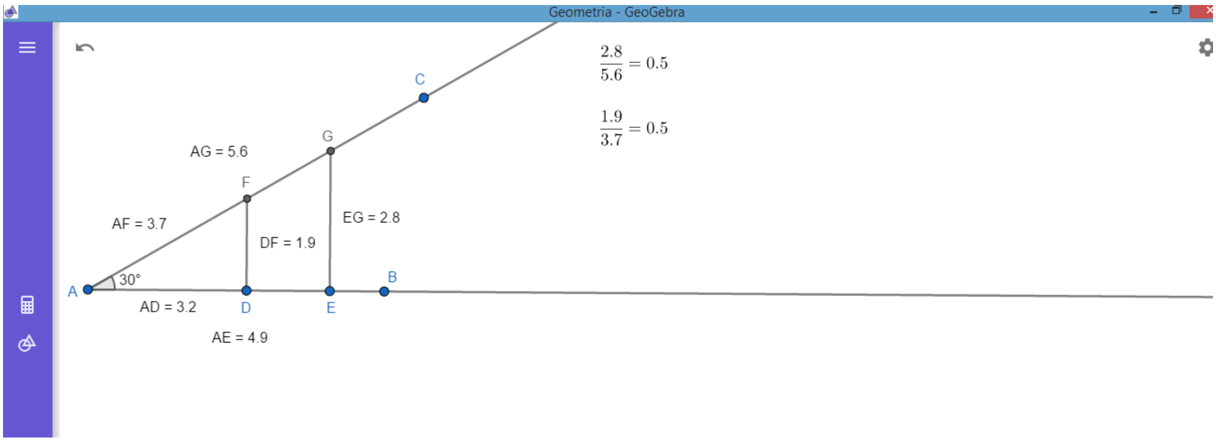
Fonte: Autor

- Clique em fórmula Latex e em seguida frações;

- Substitua o numerador “a” pelo segmento EG clicando no segmento, em seguida clique aonde apareceu TEXTO EG e retire a palavra texto, fazendo o mesmo para o denominador “b” substituindo pelo segmento AG. Para obter o resultado digite igual e novamente clique no segmento EG, retirando a palavra texto e ainda dentro da caixinha digite /AG e depois OK.

- Faça o mesmo para razão entre DF/AF e note que os resultados são iguais. É importante comentar com o aluno que os resultados são iguais já que os triângulos são semelhantes.

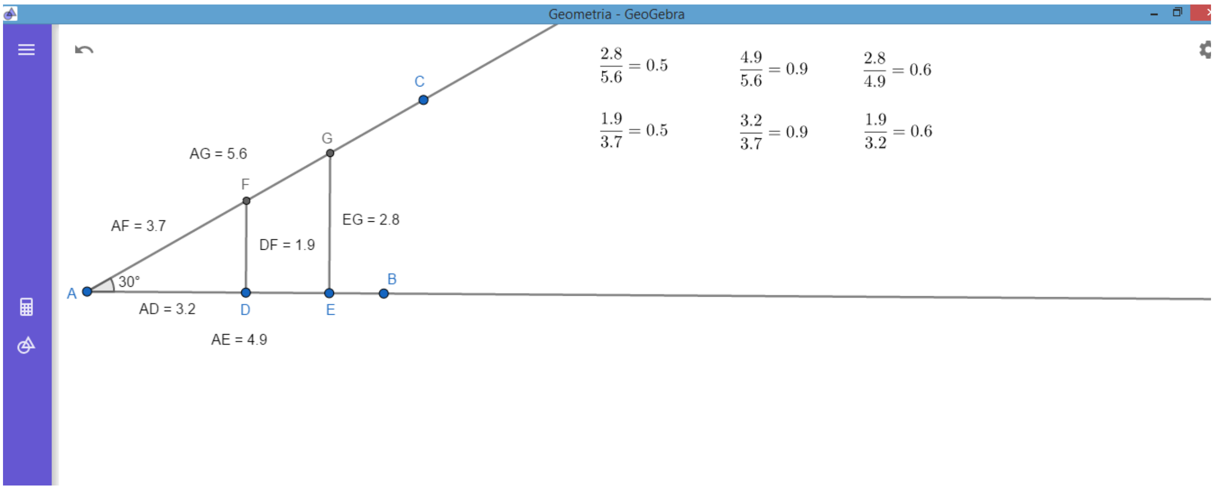
Figura 39: Razões entre os lados do triângulo no Geogebra. Parte - I



Fonte: Autor

- Encontre as demais razões AE/AG. AD/AF, EG/AE e DF/AD seguindo as orientações acima.

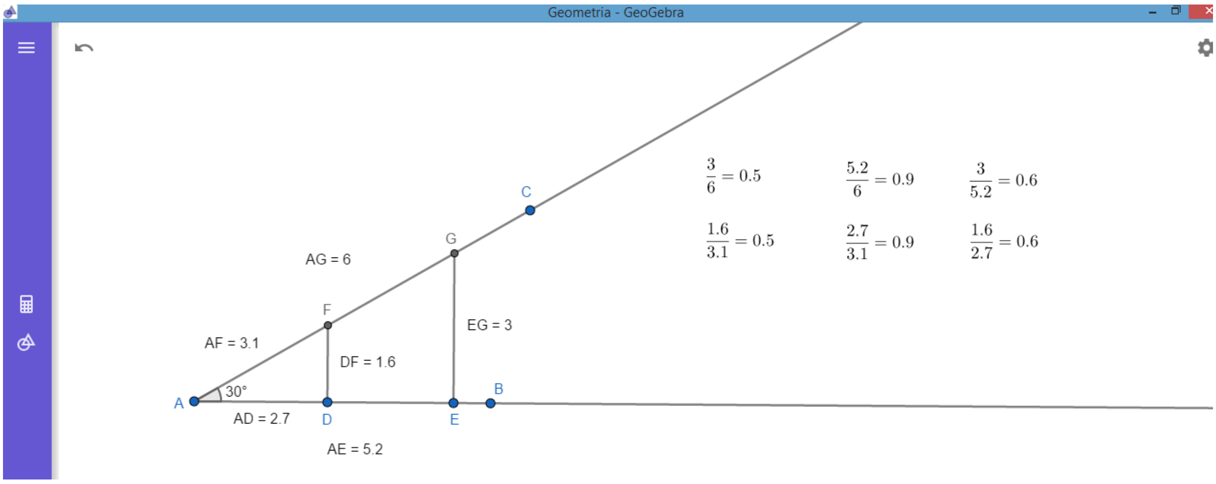
Figura 40: Razões entre os lados do triângulo no Geogebra. Parte - II



Fonte: Autor

Por exemplo, na barra de ferramentas clique em mover e deslizando o ponto D ou E as medidas dos triângulos mudam, mas as razões não mudam, daí é importante falar sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

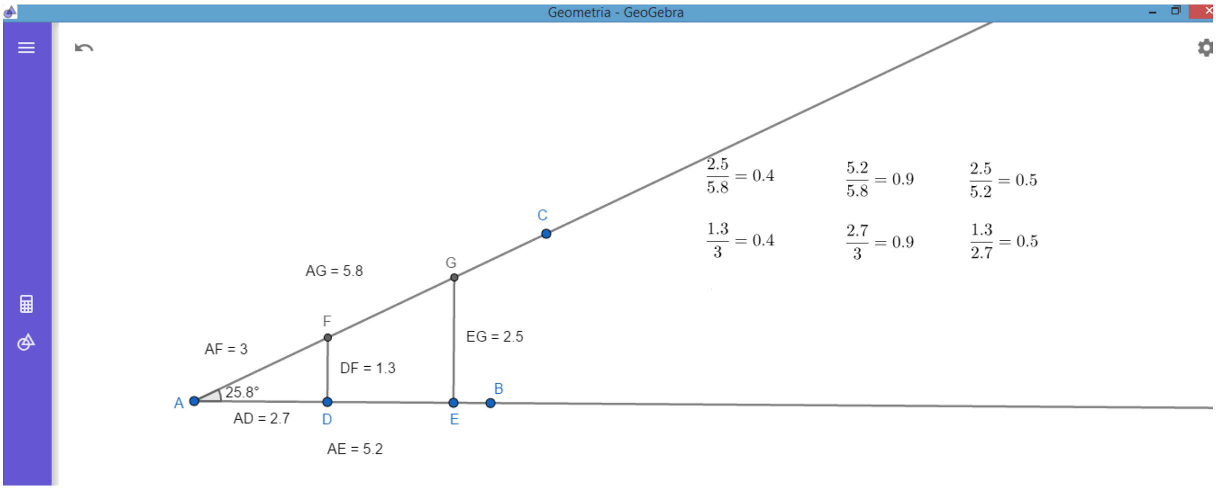
Figura 41: Razões entre os lados do triângulo no Geogebra. Parte - III



Fonte: Autor

Um outro exemplo é se clicarmos no ponto C e mover a semirreta AC, muda o ângulo, mas as razões continuam iguais entre si.

Figura 42: Razões entre os lados do triângulo no Geogebra. Parte - IV

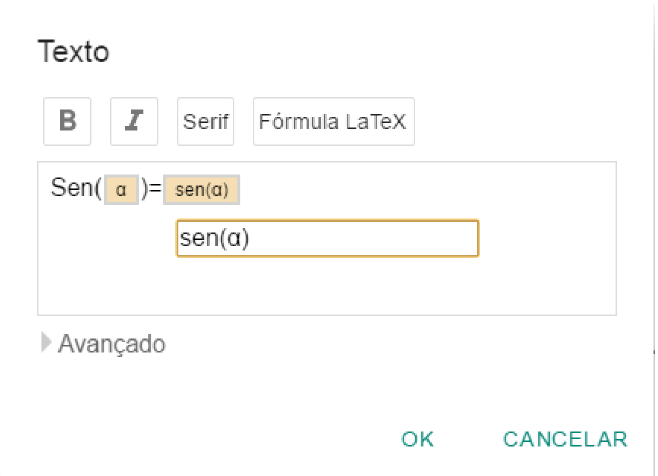


Fonte: Autor

Vamos editar o nome das razões.

- Na barra de ferramentas clique em texto, digite sen (α) = , clique em ângulo α e dentro da caixinha escreva sem, abra parênteses e feche em α. Assim vale para cosseno e tangente.

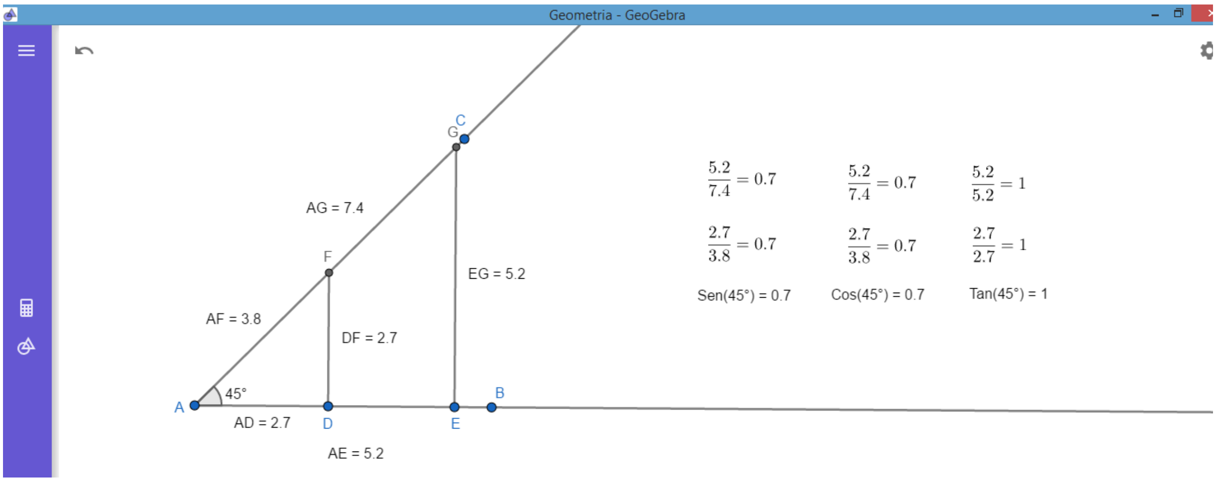
Figura 43: Edição das razões trigonométricas



Fonte: Autor

Assim temos as razões com seus respectivos nomes.

Figura 44: Razões trigonométricas no Geogebra.



Fonte: Autor

- Vale ainda ressaltar para os alunos que movendo o ponto C o cosseno pode aumentar e o seno diminuir, ou vice-versa. Assim também a comparação poderá ser feita com a tangente.

7.2. USO DO GEOGEBRA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

- Construa um círculo trigonométrico clicando na barra de ferramentas no ícone círculo dado centro e raio, clicando na origem do plano cartesiano e dando a medida do raio de 1 unidade;

- Retire os rótulos do círculo, se achar conveniente;

- Clicando com o botão direito em cada eixo do plano cartesiano, coloque a medida de 1 unidade para sair os valores decimais;

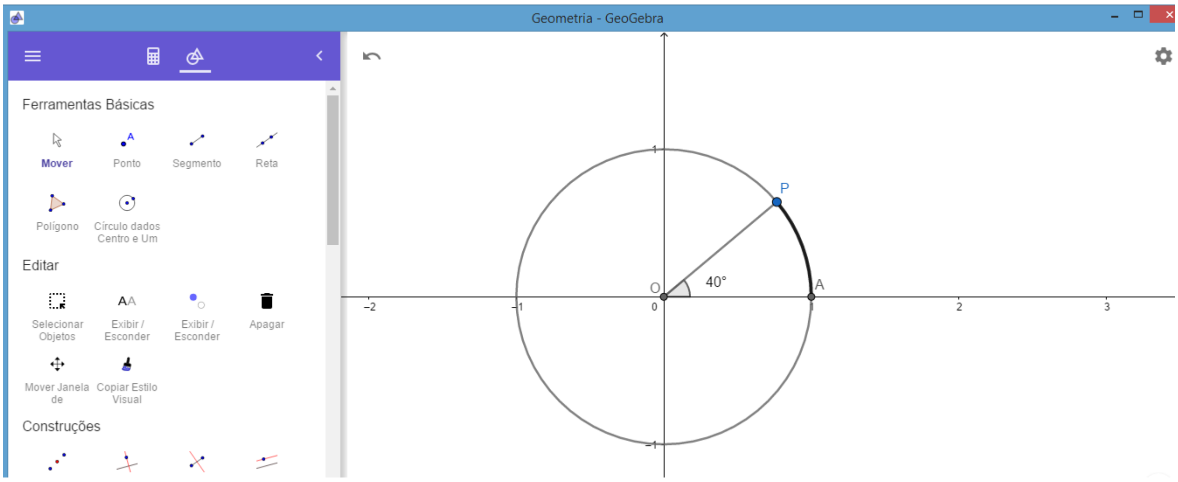
- Na barra de ferramentas clique em ponto e insira um ponto P na circunferência;

- Na barra de ferramentas clique em segmento de reta e trace um segmento OP (raio do ciclo);

- Na barra de ferramentas clique em ângulo e determine o ângulo AOP, se necessário, mude o intervalo do ângulo;

- Na barra de ferramentas clique em arco e trace o arco OAP e destaque-o aumentando a largura;

Figura 45: Arco da circunferência trigonométrica no Geogebra.



Fonte: Autor

SENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

- Na barra de ferramentas clique em reta perpendicular trace uma reta perpendicular ao eixo Oy que que passe pelo ponto P;

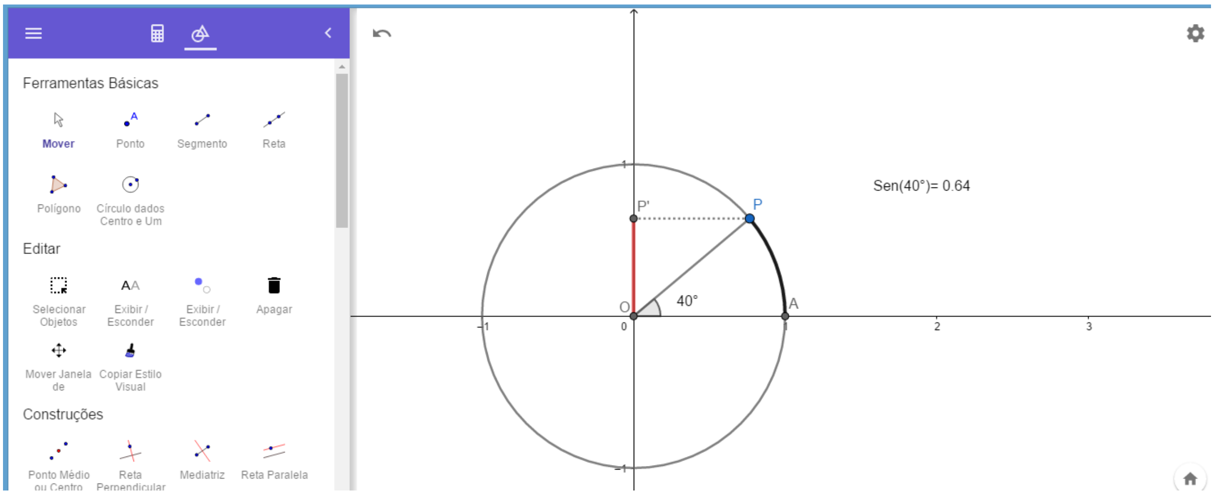
- Na barra de ferramentas clique em ponto e determine o ponto P’ de intersecção da reta perpendicular com o eixo Oy;

- Na barra de ferramentas clique em segmento e trace os segmentos OP’ e PP’;

- Com o botão direito clique: na reta perpendicular e desmarque a opção exibir objeto, no segmento OP’ e realce aumentando a largura e mudando de cor se achar conveniente, e no segmento PP’ mude para tracejado.

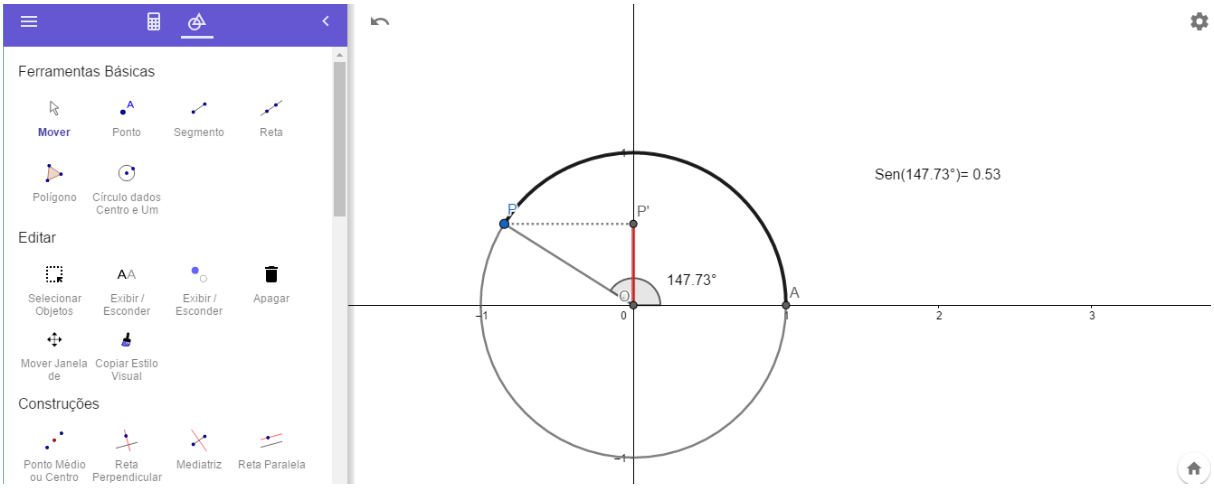
- Na barra de ferramentas clique em texto para identificar o valor do seno do ângulo digitando sen (α) = y(P’)

Figura 46: Seno do 1º quadrante no Geogebra.



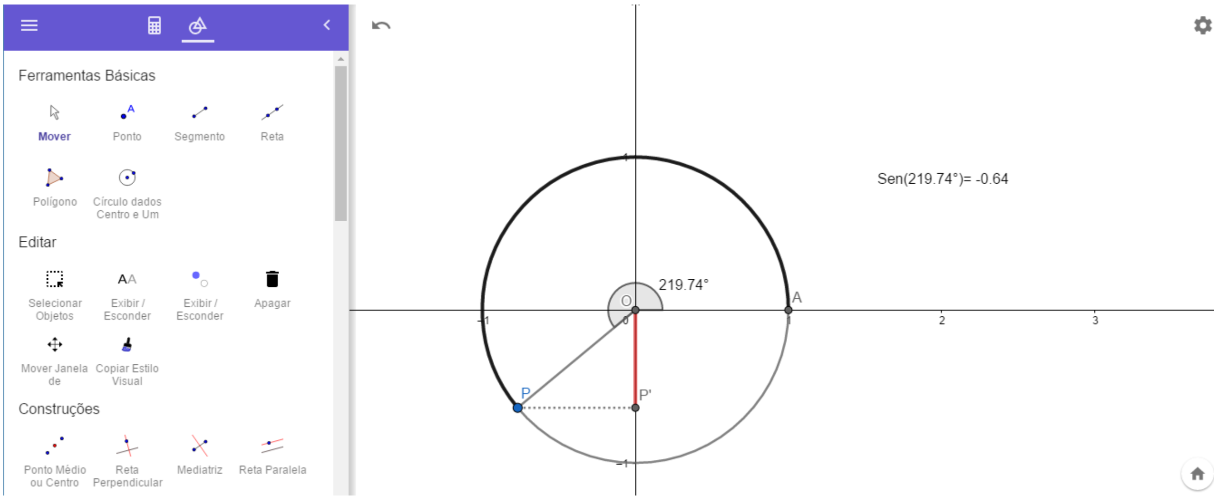
Fonte: Autor

Figura 47: Seno do 2º quadrante no Geogebra.



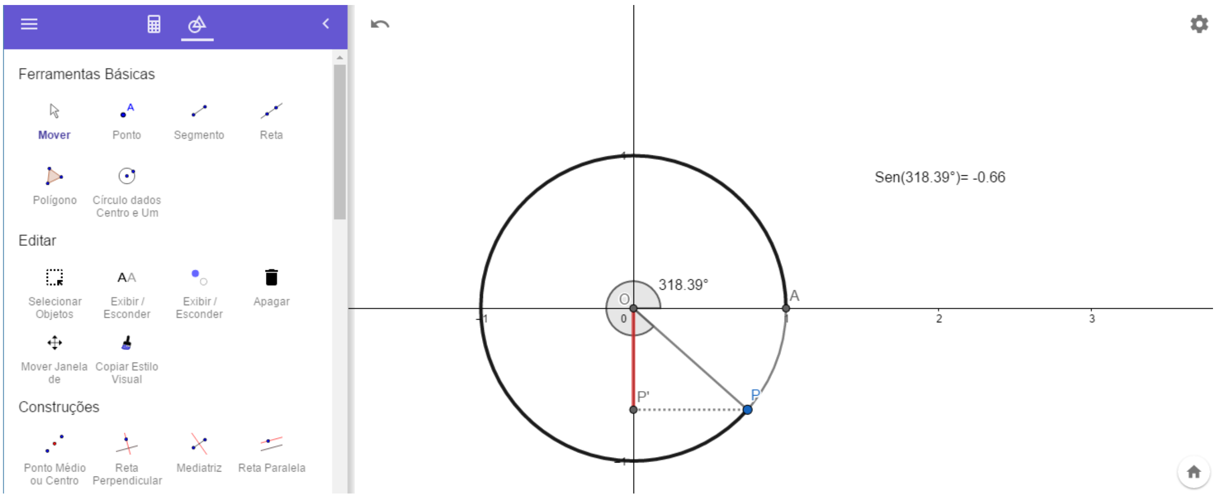
Fonte: Autor

Figura 48: Seno do 3º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

Figura 49: Seno do 4º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

- Na barra de ferramentas clique em reta perpendicular trace uma reta perpendicular ao eixo Ox que que passe pelo ponto P;

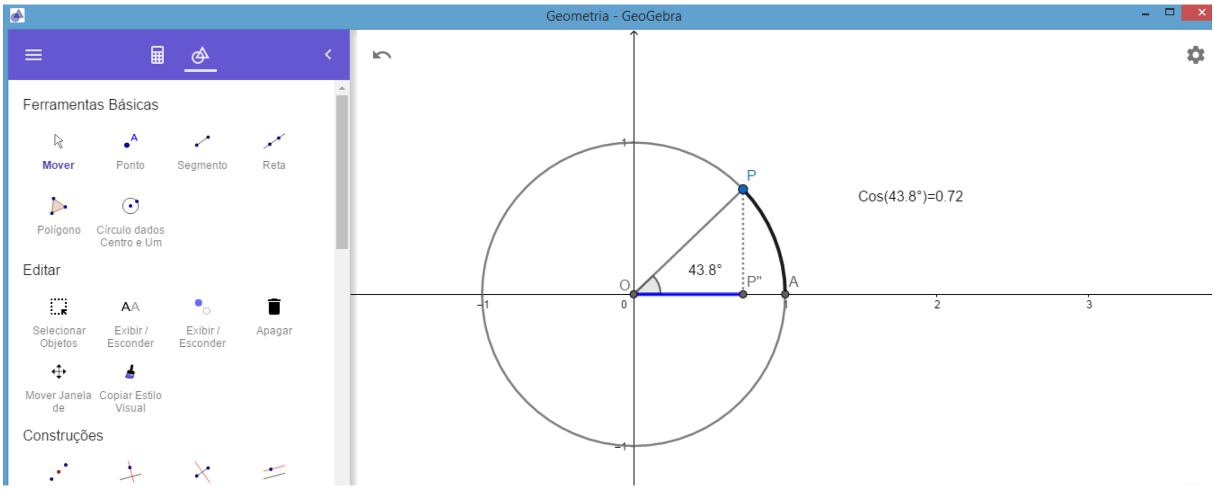
- Na barra de ferramentas clique em ponto e determine o ponto P’’ de intersecção da reta perpendicular com o eixo Ox;

- Na barra de ferramentas clique em segmento e trace os segmentos OP’’ e PP’’;

- Com o botão direito clique: na reta perpendicular e desmarque a opção exibir objeto, no segmento OP’’ e realce aumentando a largura e mudando de cor se achar conveniente, e no segmento PP’’ mude para tracejado.

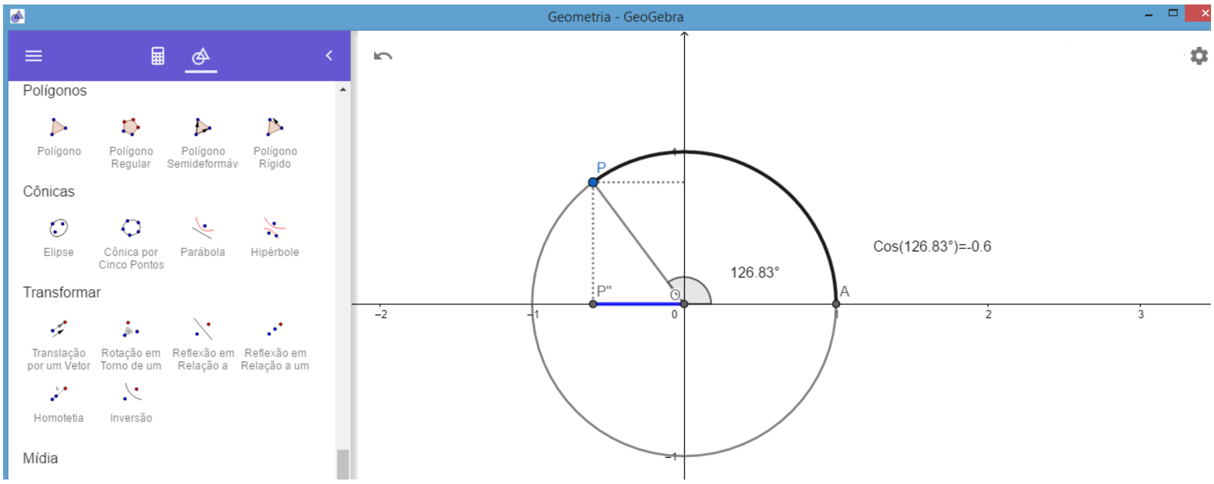
- Na barra de ferramentas clique em texto para identificar o valor do seno do ângulo digitando cos (α) = x(P’)

Figura 50: Cosseno do 1º quadrante no Geogebra.



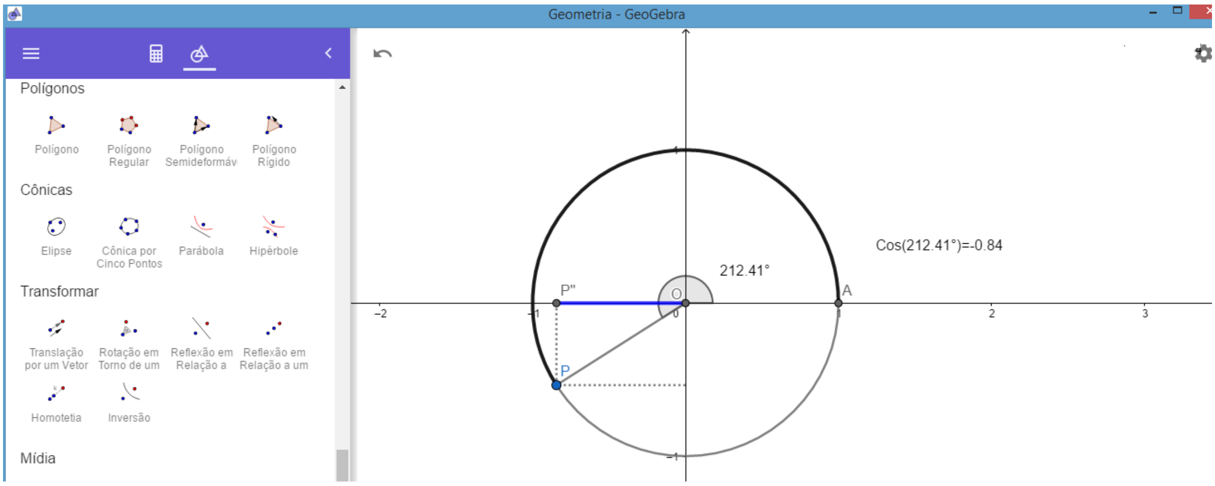
Fonte: Autor

Figura 51: Cosseno do 2º quadrante no Geogebra.



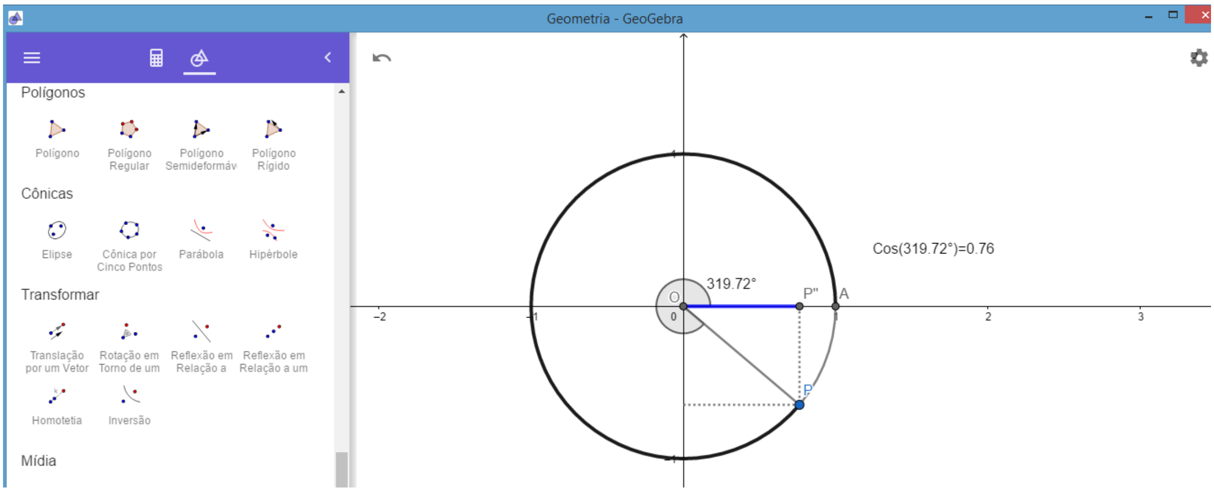
Fonte: Autor

Figura 52: Cosseno do 3º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

Figura 53: Cosseno do 4º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

- Na barra de ferramentas clique em reta perpendicular trace uma reta perpendicular ao eixo Ox que passe pelo ponto A;

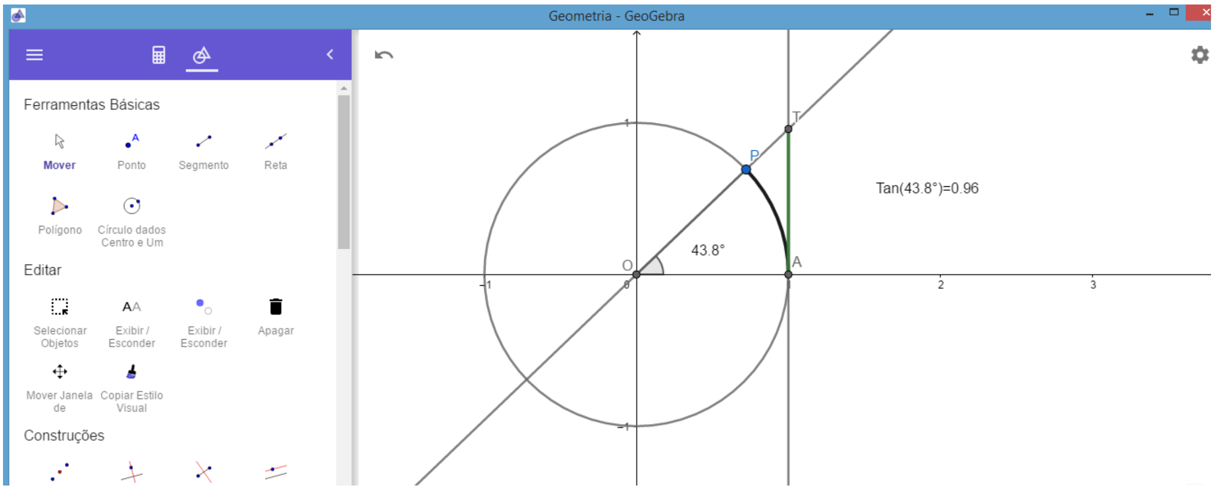
- Na barra de ferramentas clique em reta e determine a reta que passa pelo ponto O e pelo ponto P;

- Na barra de ferramentas clique em ponto e determine o ponto T de intersecção da reta perpendicular e a reta OP;

- Na barra de ferramentas clique em segmento e determine o segmento AT aumentando sua largura e mudando a cor se achar conveniente;

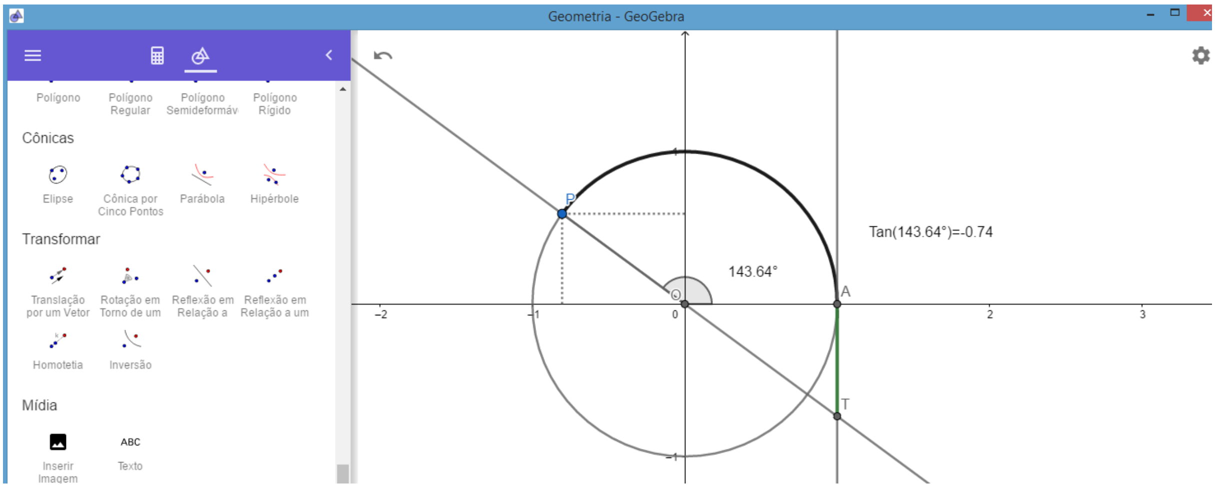
- Na barra de ferramentas clique em texto para identificar o valor da tangente do ângulo digitando tan (α) = y(T).

Figura 54: Tangente do 1º quadrante no Geogebra.



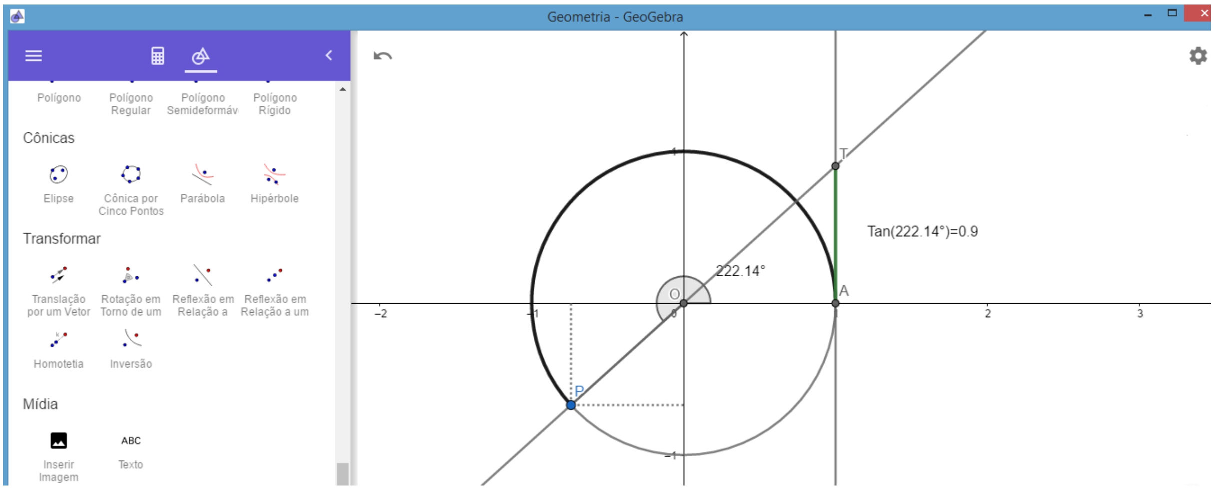
Fonte: Autor

Figura 55: Tangente do 2º quadrante no Geogebra.



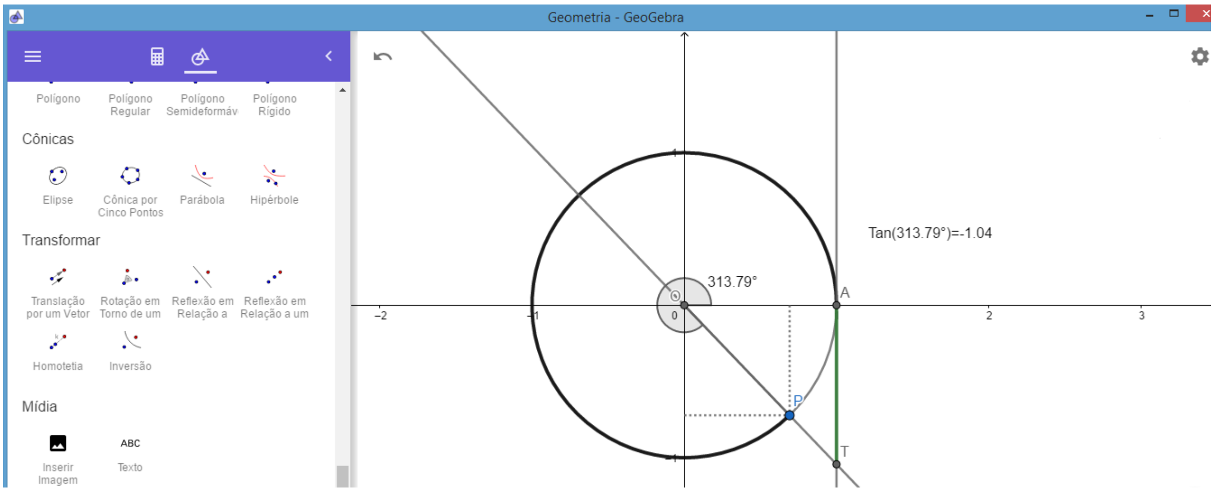
Fonte: Autor

Figura 56: Tangente do 3º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

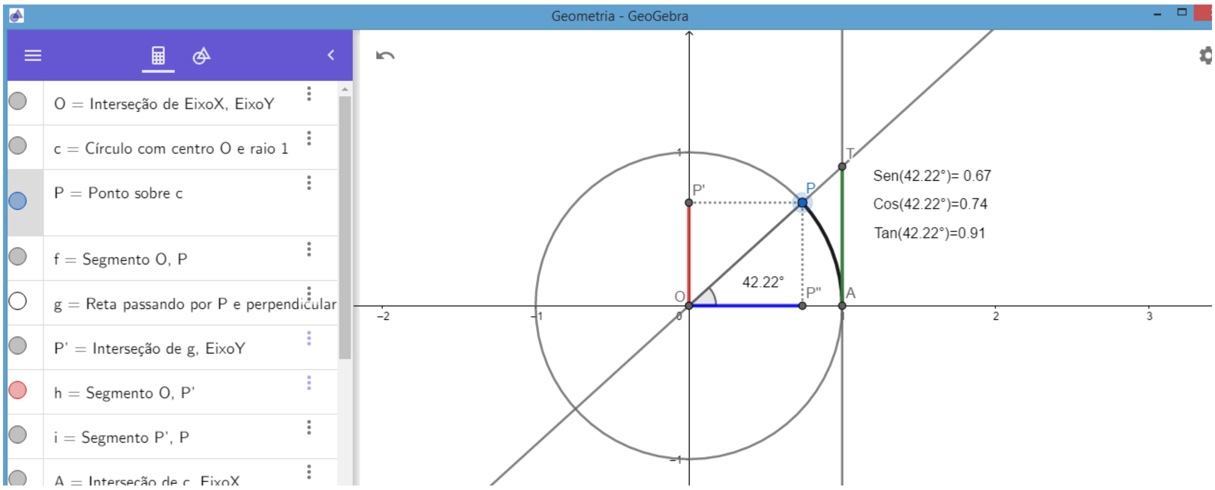
Figura 57: Tangente do 4º quadrante no Geogebra.



Fonte: Autor

Possível fazer-se, ainda, todas as funções em um mesmo ciclo executando-se, para isso, todas as etapas acima e trabalhando-se com as três funções simultaneamente, deslizando-se, neste caso, o ponto P.

Figura 58: Seno, Cosseno e Tangente na circunferência no Geogebra.



Fonte: Autor

Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se o uso do software de geometria dinâmica Geogebra para contribuir no processo ensino e aprendizagem dos conteúdos de Trigonometria do 2º ano do Ensino Médio. Almeja-se que isso possa ser feito, com a aplicação da apresentação teórica do conteúdo como mostrou-se ou da maneira que for mais oportuno.

O uso dos recursos computacionais como metodologia ativa no ensino da Matemática é imprescindível. Ainda mais que, no momento em que estamos, ano de 2020 e 2021, vivendo com educação remota devido à pandemia da Covid 19, nos obriga ainda mais utilizar de recursos metodológicos como plataformas digitais, aulas online, vídeo-aulas e etc.

E por conta do ensino à distância, há a necessidade da tecnologia de repassar o conteúdo com clareza. Esse software é de extrema importância, pois o aluno tem um melhor entendimento do conteúdo, pode praticar da sua própria casa e para o professor fica bem mais prazeroso quando o aluno dá um feedback do que está sendo estudado com a realidade em que o aluno está inserido.

Ao apresentar e recomendar o uso do Geogebra tem-se uma contribuição no trabalho do professor uma ferramenta muito rica para apresentar suas aulas e para os alunos uma atividade mais agradável para seu aprendizado.

Referências Bibliográficas

BACICH, Lilian; Moran, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem téorico-prática.** Porto Alegre: Penso, 2018

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson. **Conecte: matemática ciência e aplicações**, 1. Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, v.3:** Trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva.** v.1, 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.** Porto Alegre: Artes Médicas; 1994.

SANCHO, J. M. **Para uma tecnologia educacional.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

SOARES, Magda. **Alfabetização e letramento.** 5 ed. São Paulo: Contexto, 2008.

TAPSCOTT, D. **Economia Digital.** São Paulo: Makron Books, 1997.

UNESCO. **Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. Educação: um tesouro a descobrir.** Brasília: Cortez/MEC/UNESCO, 1998.