UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

RODRIGO MALULY NUCCI

TRIGONOMETRIA: TEORIA E APLICAÇÕES

CAMPO GRANDE – MS

AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

RODRIGO MALULY NUCCI

TRIGONOMETRIA: TEORIA E APLICAÇÕES

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS

AGOSTO DE 2013

TRIGONOMÉTRIA: TEORIA E APLICAÇÕES

RODRIGO MALULY NUCCI

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS

Profa. Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho – UFMS

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello - UFMT

CAMPO GRANDE – MS

AGOSTO DE 2013

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal fornecer material de apoio para os professores de matemática do ensino básico e o foco são as aplicações da trigonometria. O ponto de partida foi a trigonometria no triângulo retângulo, na sequência, as fórmulas de transformações trigonométricas foram apresentadas de forma diferenciada e contamos a história de Aristarco que mediu a distância da Terra a Lua e ao Sol. Em seguida abordamos as funções trigonométricas, tendo como base para sua definição, a função de Euler. E para finalizar, destacamos algumas aplicações do uso da trigonometria tiradas de artigos da Revista do Professor de Matemática, destacando a fórmula de Heron para quadriláteros.

Palavras-chave: Trigonometria, Aristarco, Heron para quadriláteros.

ABSTRACT

This present work has as main objective to provide material support for math teachers of Basic Education and its focus is the applications of trigonometry. The starting point was the trigonometry of the rectangle triangle, then, the trigonometric formulas were presented in a different way, furthermore we talked about Aristarchus, who measured the distance from the Earth to the Moon and to the Sun. After that, we the approached the trigonometric functions using the Euler definition as its basis. And finally, we highlighted some applications for the use of trigonometry drawn from some articles of Revista do Professor de Matemática, emphasizing Heron's formula for quadrilaterals.

Keywords: Trigonometry, Aristarchus, to Heron quadrilaterals

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tornar possível a realização deste sonho e por permitir mais uma importante etapa da minha vida profissional.

A minha família, em especial a minha esposa Giovana Kátia Viana Nucci pelo apoio, dedicação e palavras de incentivo, aos meus filhos Rodrigo Junior e Sarah Nucci por estarem presentes nessa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudemir Aniz, pela paciência, disponibilidade que sempre demonstrou e ao auxilio à pesquisa do material bibliográfico. Obrigado pela seriedade na orientação, pela qualidade das discussões e pelo empenho quanto ao alcance dos objetivos traçados.

Aos idealizadores do Programa PROFMAT e pelo material didático rico em informação e detalhes que com certeza será utilizado como material de apoio e pesquisa.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores locais do pólo UFMS - Campo Grande pela dedicação nas aulas e pelas palavras de incentivo, aos colegas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Agradeço a todos que colaboraram para a realização desse trabalho

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A palavra trigonometria tem origem no grego: Trigonos (triângulos) mais metrum (medida). É a área da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Ela consiste, essencialmente, em associar a cada ângulo certos números como cos α e sen α, cada um dos quais representam de certo modo uma espécie de “medida” daquele ângulo.

Apesar de sua importância, a trigonometria é apresentada em sala de aula para os alunos de forma desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico e análise dos gráficos. O mais importante são as aplicações da trigonometria na resolução dos problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e os fenômenos periódicos.

O presente estudo permite concluir que, no que se refere ao ensino da trigonometria, é possível abordá-la associando a teoria com suas aplicações, a fim de favorecer o interesse e a aprendizagem dos alunos, contribuindo para uma formação mais ampla e desenvolvendo as habilidades e competências ao ensino da matemática. Sendo que o objetivo do trabalho foi fornecer um material diferenciado para os professores do ensino básico e por isso o foco principal são as aplicações da trigonometria.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo abordaremos a trigonometria no triângulo retângulo, iniciando por semelhança de triângulos e os casos de semelhança. Faremos um breve estudo sobre triângulos retângulos, obtenção das fórmulas de soma e diferença de arcos para triângulos utilizando áreas e, em seguida, mostraremos as razões trigonométricas para ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) e, utilizando estas fórmulas, calcularemos as razões para ângulos do tipo (3n)°. O capítulo será finalizado com apresentação da interessante história de Aristarco, um ilustre matemático antigo, e sua engenhosa maneira de calcular as distâncias da Terra à Lua e ao Sol.

No segundo capítulo o tema principal são as funções trigonométricas, tendo como ponto de partida um estudo da função de Euler, que é a base teórica para definir as funções e na sequência falaremos das simetrias dos quadrantes em relação ao primeiro quadrante, as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e as fórmulas de soma e diferença de arcos, arco duplo e arco metade.

Finalizaremos, no terceiro capítulo, com diversas aplicações e curiosidades utilizando trigonometria para resolvê-las. Aplicações essas que são apresentadas em sala de aula ou aplicações mais elaboradas no intuito de abordar a trigonometria para os alunos, associando a teoria à prática.

CAPÍTULO 1 – TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo faremos um estudo da trigonometria no triângulo retângulo. Falaremos da semelhança de triângulos, que é a base teórica da trigonometria, calcularemos as razões trigonométricas para ângulos iguais a (3n)° e apresentaremos o estudo de Aristarco sobre as distâncias da Terra a Lua e da Terra ao Sol.

1. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A base teórica na qual se fundamenta originalmente a trigonometria é a semelhança de triângulos. Nesta seção foi utilizado [3] como referência.

Dois triângulos são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais.

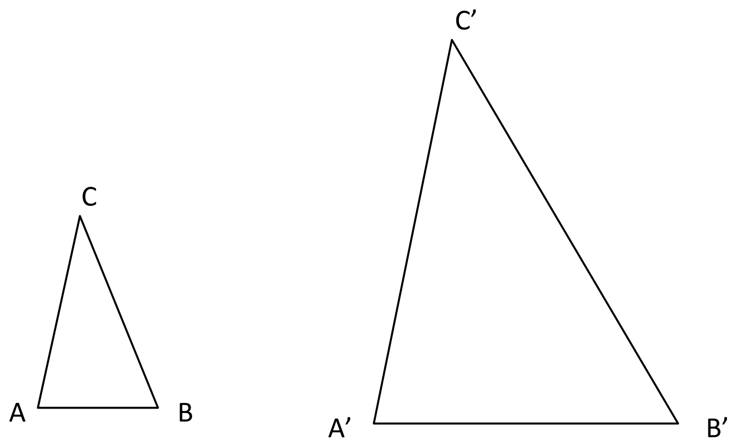

Figura 1

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ e $C \rightarrow C'$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então, valem simultaneamente as seguintes igualdades.

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

Dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um, e, reciprocamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um são também congruentes.

Casos de semelhança

Caso AA. Se em dois triângulos *ABC* e *A'B'C'*, tem-se $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\hat{B}=\hat{B}'$, então os dois triângulos são semelhantes.

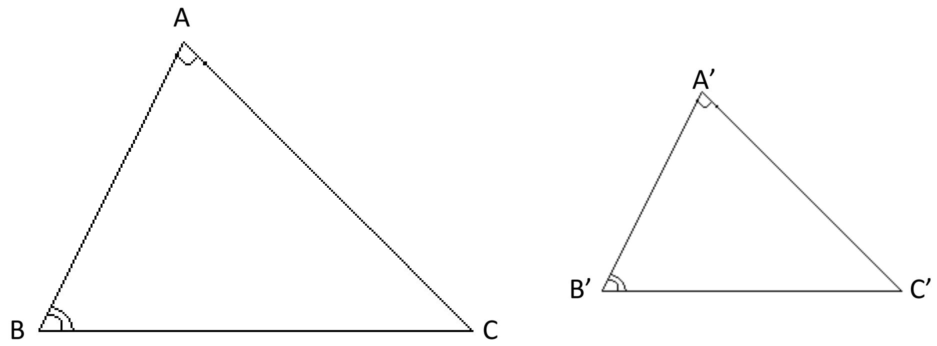

Figura 2

Caso LAL. Se em dois triângulos *ABC* e *A'B'C'*, tem-se $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$, então os dois triângulos são semelhantes.

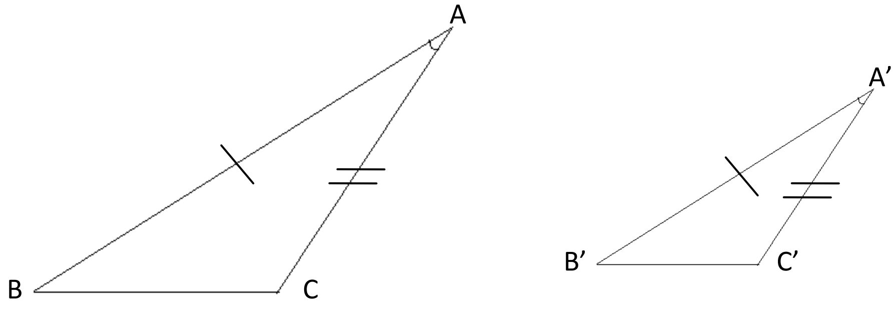

Figura 3

Caso LLL: Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, então os dois triângulos são semelhantes

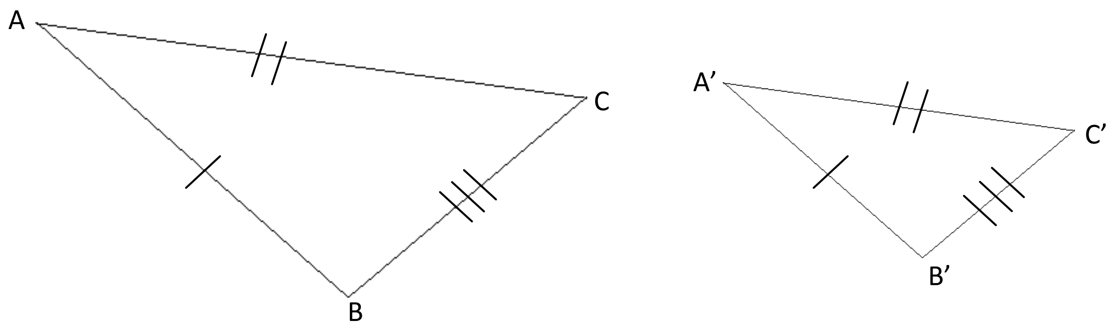

Figura 4

2. TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo ABC é retângulo quando um de seus ângulos internos é um ângulo reto.

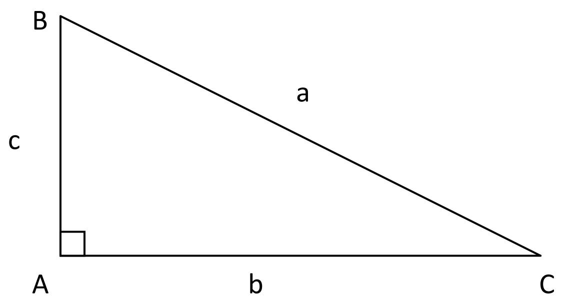

Figura 5

O lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa e os lados AB e AC, adjacentes ao ângulo reto, são chamados catetos do triângulo ABC.

Quando, no triângulo retângulo, for conhecido dois de seus lados e queremos calcular o valor do terceiro lado, usaremos o Teorema de Pitágoras.

"O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dado um ângulo agudo $\hat{C}$, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, . . . e vamos conduzir, por eles, perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...

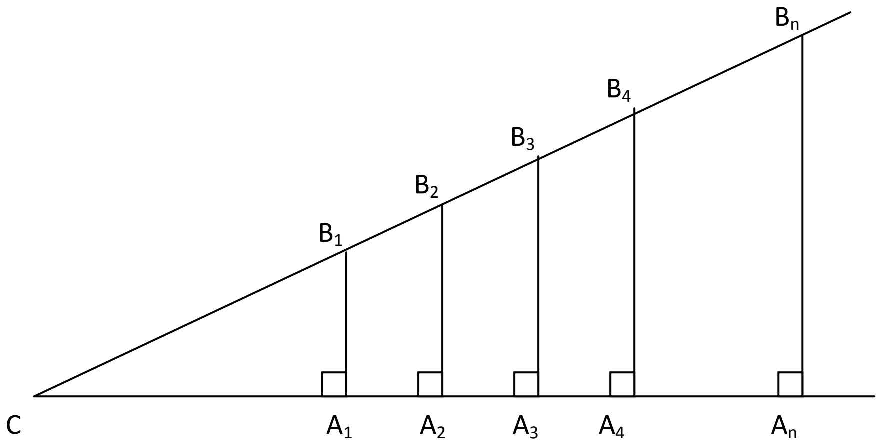

Figura 6

Os triângulos CA_1B_1, CA_2B_2, CA_3B_3, . . . , CA_nB_n são todos semelhantes entre si, pois os ângulos $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3$, . . . , $\widehat{A}_n$ são todos iguais e o ângulo $\widehat{C}$ é comum a todos os triângulos, logo pelo caso Ângulo-Ângulo se conclui a semelhança. Então:

1º) $\dfrac{A_1B_1}{CB_1} = \dfrac{A_2B_2}{CB_2} = \dfrac{A_3B_3}{CB_3} = \ldots = \dfrac{A_nB_n}{CB_n}$

2º) $\dfrac{CA_1}{CB_1} = \dfrac{CA_2}{CB_2} = \dfrac{CA_3}{CB_3} = \ldots = \dfrac{CA_n}{CB_n}$

3º) $\dfrac{A_1B_1}{CA_1} = \dfrac{A_2B_2}{CA_2} = \dfrac{A_3B_3}{CA_3} = \ldots = \dfrac{A_nB_n}{CA_n}$

Ou seja, as razões descritas acima dependem apenas do ângulo agudo $\widehat{C}$.

Em resumo, considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo $\widehat{C}$ temos:

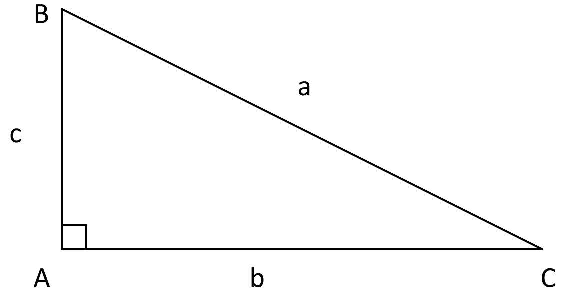

Figura 7

A medida do seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa

$$sen\ \hat{C} = \frac{c}{a}$$

A medida do cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa

$$cos\ \hat{C} = \frac{b}{a}$$

Veremos mais adiante que a razão cosseno de um ângulo é a razão do seno do complemento desse ângulo.

A medida da tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo agudo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$tg\ \hat{C} = \frac{c}{b}$$

As razões descritas acima dependem exclusivamente do ângulo agudo $\hat{C}$.

Note que,

$$sen\ \hat{C} = \frac{AB}{BC};\quad cos\ \hat{C} = \frac{AC}{BC};\quad tg\ \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$
$$sen\ \hat{B} = \frac{AC}{BC};\quad cos\ \hat{B} = \frac{AB}{BC};\quad tg\ \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

Ou seja, se $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ então:

$$sen\ \hat{B} = cos\ \hat{C} \qquad cos\ \hat{B} = sen\ \hat{C} \qquad tg\ \hat{B} = \frac{1}{tg\ \hat{C}}$$

3. FÓRMULAS DE SOMA E DIFERENÇA

Nesta seção anteciparemos as fórmulas trigonométricas para ângulos agudos. O artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, número 21, escrito por Eduardo Wagner, apresenta maneiras de obtermos as fórmulas da soma e da diferença de arcos, arco duplo e arco metade, utilizando áreas de triângulos.

Inicialmente vamos demonstrar a fórmula do arco duplo do seno.

Tomemos dois triângulos retângulos *OCA* e *OCB*, retângulos em $\hat{C}$, de ângulo agudo $A\hat{O}C = B\hat{O}C = \alpha$, com $0 < \alpha < 45°$, sendo *OC* um lado comum e hipotenusas iguais a um, ou seja, $AO = OB = 1$.

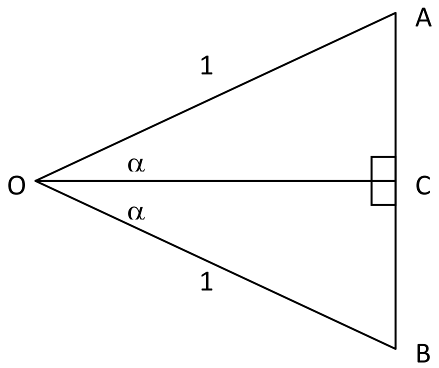

Figura 8

$$sen\ \alpha = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = sen\ \alpha$$

$$sen\ \alpha = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = sen\ \alpha$$

$$cos\ \alpha = \frac{OC}{1} \Rightarrow OC = cos\ \alpha$$

Logo $AC = BC = sen\ \alpha$ e $OC = cos\ \alpha$

No triângulo *ABO*, traça-se a altura *AD* em relação à base *OB*, temos:

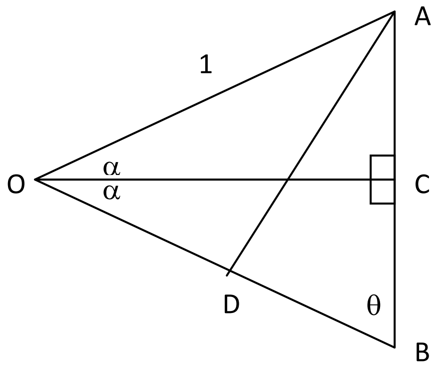

Figura 9

$$sen\ (2\alpha) = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = sen\ (2\alpha)$$

Como $OB. AD = AB. OC$ e $OB = 1$, temos:

$$sen\,(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha \cos\,\alpha$$

Dados dois triângulos retângulos OCA e OCB, retângulos em C, de ângulo agudo $A\hat{O}C = B\hat{O}C = \frac{\alpha}{2}$, com $0 < \alpha < 90°$, sendo OC um lado comum e hipotenusas iguais a um, ou seja, $AO = OB = 1$, com o ângulo $\hat{B}$ igual a θ, usando o mesmo raciocínio anterior podemos provar a fórmula do arco metade.

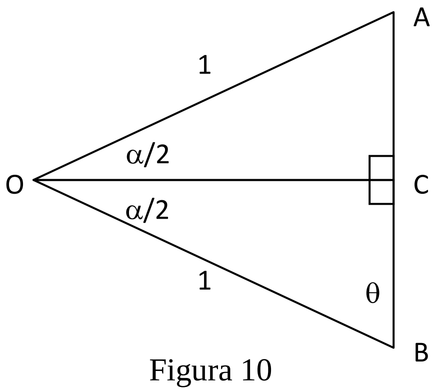

Figura 10

No triângulo ABO, traça-se a altura AD em relação à base OB (Figura 11).

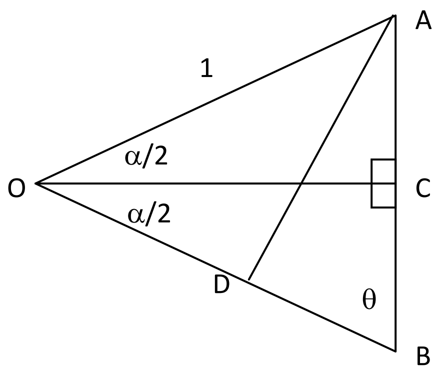

Figura 11

No triângulo retângulo DAO, $\cos\,\alpha = \dfrac{OD}{1}$, ou seja, $OD = \cos\,\alpha$

No triângulo retângulo DAB, $\cos\,\theta = \dfrac{DB}{2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow DB = 2\,sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\,\theta$

De, $OD + DB = 1$, temos $cos\ \alpha + 2\ sen\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\theta = 1$

Como $\frac{\alpha}{2}$ e θ são complementares, então $cos\ \theta = sen\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Daí

$$cos\ \alpha + 2sen\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) sen\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1\ \Rightarrow\ cos\ \alpha + 2sen^2\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$2sen^2\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - cos\ \alpha \Rightarrow sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \Rightarrow\ sen\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$$

Para a obtenção das fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos agudos usaremos o mesmo processo acima, ou seja, usaremos área de triângulo. Vamos supor que os ângulos $a, b, a + b, a - b$ são ângulos agudos. Iniciaremos pela fórmula da soma de arcos:

$$sen\ (a + b) = sen\ a.cos\ b + sen\ b.cos\ a.$$

Tomemos dois triângulos retângulos *OCA e OCB* de cateto comum *OC* igual a um, no triângulo *OCA*, o ângulo *CÔA* tem abertura igual a *a* e no triângulo *OCB*, o ângulo *CÔB* tem abertura igual a *b*.

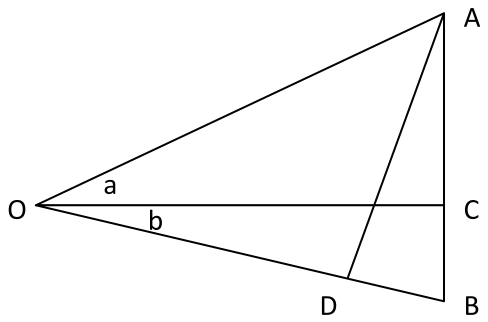

Figura 12

Na figura 12, temos que:

$$cos\ a = \frac{1}{OA}\ \Rightarrow\ AO = \frac{1}{cos\, a} \quad \text{e} \quad cos\ b = \frac{1}{OB}\ \Rightarrow\ OB = \frac{1}{cos\, b}$$

$$tg\ a = \frac{AC}{1}\ \Rightarrow\ AC = tg\ a \quad \text{e} \quad tg\ b = \frac{BC}{1}\ \Rightarrow\ BC = tg\ b$$

Sendo *AD* perpendicular a *OB*, temos:

$$sen\ (a + b) = \frac{AD}{OA} \Rightarrow AD = OAsen\ (a + b)$$

Da igualdade *OB. AD* = *AB. OC*, vem:

$$\frac{1}{cos\,a} \cdot \frac{1}{cos\,b} .sen\ (a + b) = (tg\ a + tg\ b).1 \Rightarrow$$

$$sen\ (a + b) = cos\ b.cos\ a.(tg\ a + tg\ b) \Rightarrow$$

$$sen\ (a + b) = cos\ b.cos\ a.tg\ a + cos\ b.cos\ a.tg\ b$$

Como *cos a.tg a = sen a* e *cos b.tg b = sen b*, temos:

sen (a + b) = cos b.sen a + cos a.sen b ou *sen(a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a*

A próxima fórmula a ser apresentada é a diferença de arcos.

Dado o triângulo retângulo *COA* de ângulo *Ô = a e OC = 1,* traçando o segmento *AD*, cujo ângulo *CÔD = b*, intersectando *AC* em *B*, de modo que *AD* seja perpendicular a *OD*, então:

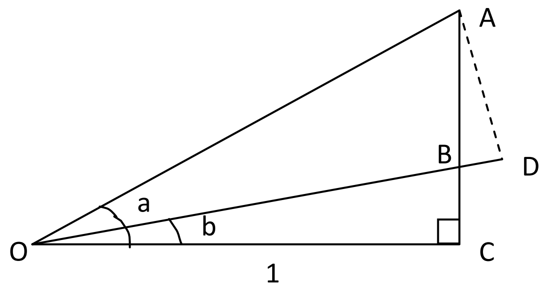

Figura 13

Na figura 13, temos:

$$cos\ a = \frac{1}{OA} \Rightarrow AO = \frac{1}{cos\,a} \quad \text{e} \quad cos\ b = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = \frac{1}{cos\,b}$$

$$tg\ a = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = tg\ a \quad \text{e} \quad tg\ b = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = tg\ b$$

$$sen\ (a - b) = \frac{AD}{OA} \Rightarrow AD = AO.sen\ (a - b)$$

Vamos provar que *OB.AD = AB.OC.*

No triângulo da figura 13, prolonga-se o lado *AD* até coincidir com o prolongamento do lado *OC*, no ponto *E*. Note que, *OD = OB + BD, AE = AD + DE, OE = OC + CE* e *AC = AB + BC.*

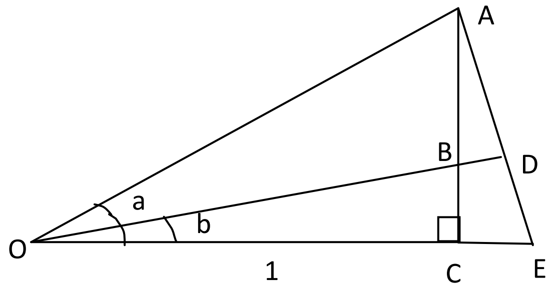

Figura 14

Substituindo na igualdade $OD.\ AE = OE.AC$, temos:

$(OB + BD).(AD + DE) = (OC + CE).(AB + BC) \Rightarrow$

$OB.AD + OB.DE + BD.AD + BD.DE = OC.AB + OC.BC + CE.AB + CE.BC \Rightarrow$

$OB.AD + BD.AD + DE.(OB + BD) = OC.AB + OC.BC + CE.(AB + BC) \Rightarrow$

$OB.AD + BD.AD + DE.OD = OC.AB + OC.BC + CE.AC.$

Como $BD.AD + OD.DE = OC.BC + CE.AC$, então $OB\ .\ AD = OC.AB.$

Da igualdade $OB.AD = AB.OC$, vem:

$$\frac{1}{\cos a}\cdot\frac{1}{\cos b}.sen\ (a - b) = (tg\ a - tg\ b).1 \Rightarrow$$

$$sen\ (a - b) = \cos b.\cos a.(tg\ a - tg\ b) \Rightarrow$$

$$sen(a - b) = \cos b.\cos a.tg\ a - \cos b.\cos a.tg\ b$$

Como $\cos a.tg\ a = sen\ a$ e $\cos b.tg\ b = sen\ b$, temos:

$$sen\ (a - b) = \cos b.sen\ a - \cos a.sen\ b$$

4. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Começaremos esta seção calculando as razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45° e 60°.

Considere um triângulo equilátero de lado *L*. Traçando a altura, que coincide com a bissetriz e a mediana, em relação à base *BC*, separamos em dois triângulos retângulos congruentes. Calculando o cateto *AH*, temos:

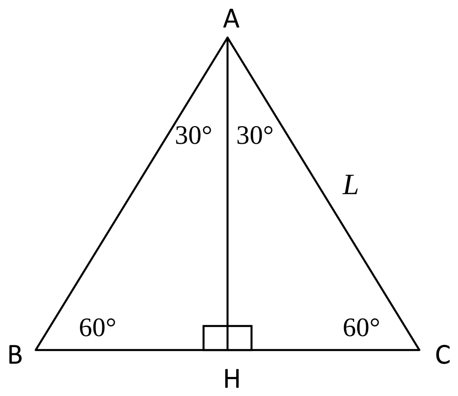

Figura 15

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (AH)^2 \Rightarrow L^2 = \frac{L^2}{4} + (AH)^2 \Rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = (AH)^2$$

$$\frac{4L^2 - L^2}{4} = (AH)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} \Rightarrow AH = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Calculando as razões trigonométricas no triângulo retângulo *AHC*, temos:

$$sen\ 30° = cos\ 60° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$sen\ 60° = cos\ 30° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{2L\sqrt{3}}{2L} = \sqrt{3}$$

$$tg\ 30° = \frac{1}{tg 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Considere, agora, um quadrado de lado *L*, calculando sua diagonal usando o Teorema de Pitágoras, temos:’C

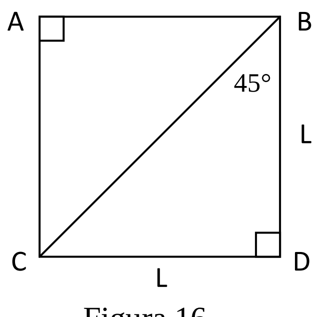

Figura 16

$$d^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow d^2 = 2L^2 \Rightarrow d = \sqrt{2L^2} \Rightarrow d = L\sqrt{2}$$

Calculando as razões trigonométricas no triângulo retângulo *BCD*, temos:

$$sen\ 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{L}{L} = 1$$

Resumindo, temos o quadro das razões trigonométricas para os arcos notáveis.

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

O artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, número 36, de autoria de Paulino Liu, mostra que a partir das razões trigonométricas para ângulos notáveis, podemos calcular as razões trigonométricas para os arcos múltiplos de três: 3°, 6°, 9°, 12°, 15°, . . . , 87°, 90°, escritos também com expressões que só envolvem radicais quadráticos, isto é, números racionais, suas raízes quadradas, ou combinações dessas.

No triângulo *ABC* isósceles, com $AB = AC = 1$ e $\hat{A} = 36°$, traça-se a bissetriz interna *BD*. O triângulo formado *BAD* é também isósceles, pois $BAD = ABD = 36°$, verificando as medidas dos ângulos marcados na figura, conclui-se que $AD = BD = BC = x$.

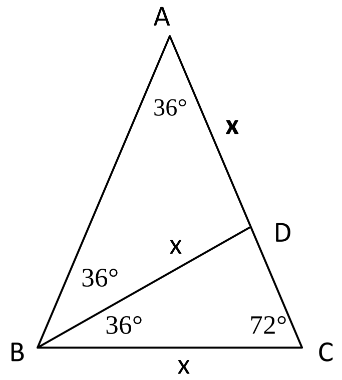

Figura 17

Da semelhança do triângulo *ABC* com o triângulo *CBD* conclui-se que $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BC}$, ou seja:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2° grau acha-se $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Traçando a altura *AE*, em relação ao lado *BC*, no triângulo *ABC* e calculando o cosseno de 72°, temos:

$$\cos 72° = \frac{BE}{BA} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

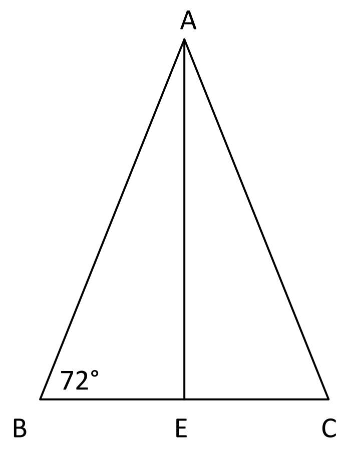

Figura 18

Usando a relação fundamental $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$$sen^2\,72° + cos^2\,72° = 1 \;\Rightarrow\; sen^2 72° + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow$$

$$sen^2 72° + \frac{5-2.\sqrt{5}+1}{16} = 1 \;\Rightarrow\; sen^2 72° = 1 - \frac{6-2.\sqrt{5}}{16} \;\Rightarrow$$

$$sen^2 72° = \frac{16\;-6+2.\sqrt{5}}{16} \;\Rightarrow\; sen^2 72° = \frac{10+2.\sqrt{5}}{16} \;\Rightarrow$$

$$sen\;72° = \sqrt{\frac{10+2.\sqrt{5}}{16}} \;\Rightarrow\; sen\;72° = \frac{\sqrt{10+2.\sqrt{5}}}{4}$$

E, $cos\;(90° - 18°) = sen\;18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Usando a fórmula do arco metade, temos:

$$sen\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 72°}{2}} \;\Rightarrow\; sen\;36° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} \;\Rightarrow$$

$$sen\;36° = \sqrt{\frac{4-\sqrt{5}+1}{8}} \;\Rightarrow\; sen\;36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \;\Rightarrow$$

$$sen\;36° = \sqrt{\frac{2}{2}.\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)} \;\Rightarrow\; sen\;36° = \frac{\sqrt{10-2.\sqrt{5}}}{4}$$

E, usando a relação fundamental, temos que $cos\;36° = \dfrac{\sqrt{6+2.\sqrt{5}}}{4}$ ou

$$cos\;36° = \frac{\sqrt{5+2.\sqrt{5}+1}}{4} \;\Rightarrow\; cos\;36° = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{4} \;\Rightarrow\; cos\;36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Por diferença de arcos:

$$cos\;6° = cos\;(36° - 30°) = cos\;36°.cos\;30° + sen\;36°.sen\;30°$$

$$cos\;6° = cos\;(36° - 30°) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{10-2.\sqrt{5}}}{4}\right).\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$cos\;6° = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2.\sqrt{5}}}{8}$$

Utilizando novamente a fórmula do arco metade, obtém-se:

$$a)\ sen\ 3° = sen\left(\frac{6°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 6°}{2}} \Rightarrow$$

$$sen\ 3° = sen\left(\frac{6°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}{2}} \Rightarrow$$

$$sen\ 3° = sen\left(\frac{6°}{2}\right) = \sqrt{\frac{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}} \Rightarrow$$

$$sen\ 3° = sen\left(\frac{6°}{2}\right) = \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}.$$

$$\text{b)}\ sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} \Rightarrow sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow sen\ 15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Temos ainda que:

sen 15° = sen (45° - 30°), sen 21° = (36° - 15°), . . .

Observe que, se for possível obter *sen (3n)°* como uma expressão que só envolva radicais quadráticos, então será possível, através da relação, obter *cos (3n)°* e, em seguida:

$$sen\ [3(n+1)]° = sen\ (3n+3)° = sen\ (3n)°.\cos 3° + sen\ 3°.\cos (3n)°$$

Também como uma expressão dessa forma. Portanto, como já temos *sen* 3°, obteremos *sen 6°*, *sen 9°*, *sen 12°*, e, por indução *sen (3n)°* para todo *n*.

Adiantando alguns valores, temos:

$$a)\ \ sen\ 9° = \frac{\sqrt{8-2.\sqrt{10+2.\sqrt{5}}}}{4}$$

b) $sen\ 21° = \dfrac{\sqrt{8-2.\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{30-6.\sqrt{5}}}}}{4}$

c) $sen\ 27° = \dfrac{\sqrt{8-2.\sqrt{10-2.\sqrt{5}}}}{4}$

d) $sen\ 51° = \dfrac{\sqrt{8+2.\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{5-6.\sqrt{5}}}}}{4}$

5. ARISTARCO E AS DIMENSÕES ASTRONÔMICAS

No artigo da Revista do Professor de Matemática, número 55, Geraldo Ávila escreve sobre Aristarco (310 – 230 a.C.), um ilustre astrônomo da Antiguidade, que pertenceu à escola de Alexandria e foi o primeiro grande astrônomo dessa escola. Ele era originário de Samos, a mesma ilha donde viera Pitágoras no século VI a.C..

Aristarco escreveu um livro muito interessante sobre o cálculo das distâncias do planeta Terra à Lua e ao Sol, bem como o tamanho desses dois corpos celestes, tendo encontrado um modo muito simples e ao mesmo tempo bastante engenhoso para comparar tais distâncias.

Por observação, ele havia percebido que quando a Lua está na fase quarto crescente ou quarto minguante (metade iluminada) os feixes de raios solares são perpendiculares a uma reta que contém um ponto no centro da Terra (ponto *T*) e outro no centro da Lua (ponto *L*). Também percebeu que se pudesse traçar um triângulo com um vértice em *L*, um vértice em *T* e o terceiro vértice no centro do Sol (ponto *S*), este triângulo seria retângulo em *L*.

Para medir o ângulo interno pelo vértice *T* do triângulo *TLS*, Aristarco observou que a passagem da Lua da fase quarto minguante para a fase quarto crescente durava cerca de 14 dias e seis horas. Considerando que a Lua passa pela reta *TS* na metade deste percurso, ela demora 7 dias e 3 horas para passar por esta reta. A revolução, movimento que a Lua realiza ao redor da Terra, dura cerca de 29 dias e meio. Sabendo que 360º equivale à circunferência da Terra, temos:

$$\frac{360°}{29{,}5dias} = \frac{\alpha}{\left(7+\frac{1}{8}\right)dias} \Rightarrow \frac{360°}{29{,}5} = \frac{\alpha}{\frac{57}{8}} \Rightarrow \frac{360°}{29{,}5} = \frac{8\alpha}{57} \Rightarrow \alpha = \frac{20520}{236} \Rightarrow \alpha \approx 87°$$

Vamos fazer um desenho, representando o observador terrestre por T, o centro da Lua por L e o centro do Sol por S (figura 20). Obtemos um triângulo LST, que é retângulo em L, e cujo ângulo α estará muito próximo de 90°. Esta constatação é suficiente para nos fazer ver que o Sol está muito mais longe de nós do que a Lua. Do contrário, o ângulo α seria bem menor.

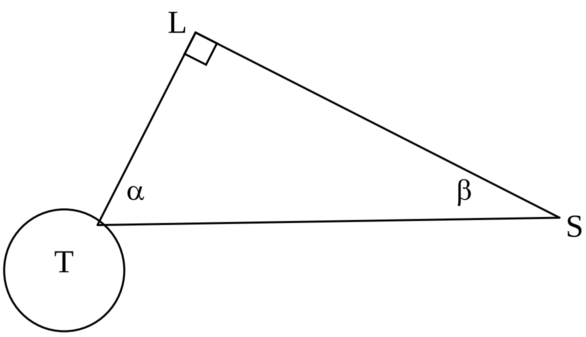

Figura 20

Sendo α muito próximo de 90°, o ângulo β será bem mais próximo de zero, pois estes dois ângulos são complementares, Aristarco achou para α um valor próximo de 87°. Desenhando, então, um triângulo semelhante ao triângulo TSL, pode constatar que o lado TS é aproximadamente 20 vezes o lado TL, ou seja, a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 20 vezes a distância da Terra a Lua.

Muitas pessoas pensam que as ideias geniais costumam ser profundas e complicadas. Contudo, frequentemente elas são simples, tanto que nós mesmos nos surpreendemos exclamando “como é que eu nunca pensei nisso antes?” Muitos autores concordam que a ideia de Aristarco é uma das mais notáveis da história da ciência.

Mas, qual matemática foi usada? Utilizamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° para concluirmos que α e β são ângulos complementares, ou ainda, que o ângulo α determina toda uma classe de triângulos retângulos semelhantes entre si.

Aprecie aqui a importância do conceito de semelhança de triângulos, uma vez conhecido um desses triângulos a razão $\frac{TS}{TL}$ é a mesma em todos eles. Isso significa que, impossibilitado de medir essa razão no enorme triângulo astronômico original, Aristarco, decerto, desenhou um triângulo a ele semelhante, num pedaço de pergaminho, de papiro, ou mesmo na areia, e nesse triângulo pequeno ele pode medir as distâncias *TL* e *TS*, e comprovar que *TS* é aproximadamente 20.*TL*.

Observação 1: É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois hoje sabemos que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Em consequência, o ângulo α está muito próximo de 89,86°, portanto, muito perto de 90°. Isso não tira o mérito de Aristarco, que está na ideia que ele teve para calcular a distância da Terra ao Sol, comparativamente à distância da Terra à Lua.

Observação 2: Outra coisa a observar é que o que fazemos hoje em dia não é desenhar o triângulo *TSL* e medir seus lados, mas recorrer a uma tabela de valores de razão $\frac{TL}{TS}$. De fato, é frequente a ocorrência de cálculos de um lado de um triângulo retângulo em termos de outro, de sorte que é muito conveniente construir tabelas que possam ser usadas sempre que surgir a necessidade. Está aqui uma boa motivação para a trigonometria. A razão $\frac{TL}{TS}$ é, por definição, o seno do ângulo β, portanto, podemos escrever:

$$\frac{TL}{TS} = sen\beta \text{, donde } TS = \frac{TL}{sen\,\beta}$$

Agora é só substituir aí o valor do seno, obtido numa tabela, para calcular *TS* em termos de *TL*. Melhor ainda do que fazíamos há décadas, o cálculo pode ser feito facilmente com uma calculadora científica. Mas falta um detalhe: necessitamos do valor do *TL* para encontrar *TS*. Explicaremos isso nas próximas linhas.

Tamanhos Angulares do Sol e da Lua.

Uma interessante coincidência que nos proporciona a Natureza é o fato de o Sol e a Lua terem o mesmo tamanho angular. Em outras palavras, como ilustra a figura 21, o ângulo 2γ sob o qual vemos a Lua é o mesmo sob o qual vemos o Sol. A própria Natureza nos poupa de fazer qualquer medida, pois ela exibe a coincidência exata dos dois discos, solar e lunar, num eclipse total do Sol.

Um eclipse solar é um raríssimo fenômeno de alinhamentos que ocorre quando a Lua se interpõe entre a Terra e o Sol, ocultando completamente a sua luz numa estreita faixa terrestre.

Aristarco estimou o ângulo 2γ como sendo 2° quando, na verdade, ele é de 0,5°. Mas essa discrepância, não altera o resultado que vamos obter, baseado na semelhança dos triângulos retângulos *TLL'* e *TSS'*. Esta semelhança permite escrever.

$$\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$$

Isso significa que os raios do Sol e da Lua, *SS'* e *LL'* respectivamente, estão entre si como as distâncias da Terra ao Sol e a Lua, respectivamente *TS* e *TL*. Como a razão destas duas últimas distâncias é conhecida, o mesmo é verdade da razão $\frac{SS'}{LL'}$. Segundo Aristarco, essas razões são iguais e estão compreendidas entre 18 e 20.

Resumo dos resultados

Para explicar os resultados de Aristarco, é conveniente introduzir a seguinte notação:

D_S = Distância da Terra ao Sol;

D_L = Distância da Terra a Lua;

R_S = raio do Sol;

R_L = raio da Lua.

Vamos também indicar com R_T o raio da Terra, e introduzir os parâmetros *a* e *b* assim definidos. Veja a figura 21 para entender a igualdade das razões: $\frac{R_S}{D_S}$ e $\frac{R_T}{D_L}$.

$$a = \frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} \quad , \quad b = \frac{D_S}{D_L}$$

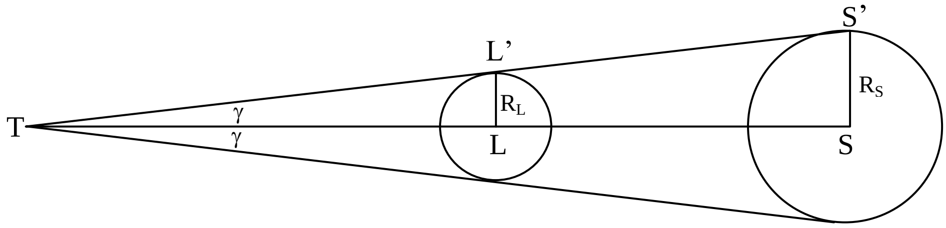

Figura 21

Para Aristarco, como já vimos $b \approx 20$. Para obter o parâmetro a, como o ângulo γ era conhecido, ele teria de medir os lados *SS'* e *TS* no triângulo *TSS'* (figura 21). Para nós, hoje, a razão $\frac{SS'}{TS}$ é o que chamamos de seno do ângulo γ, de sorte que $a = sen\ \gamma$. Ele completou a determinação das grandezas D_T, D_L, R_S e R_L em termos do raio da Terra R_T valendo-se de um eclipse da Lua.

Um eclipse lunar é um fenômeno celeste que ocorre quando a Lua penetra, totalmente ou parcialmente, no cone de sombra projetado pela Terra (figura 22), em geral, sendo visível a olho nu. Isto ocorre sempre que o Sol, a Terra e a Lua se encontram próximos ou em perfeito alinhamento, estando a Terra no meio destes outros dois corpos. É como se fosse um eclipse solar porém a Terra encobre a lua nesse caso.

Vamos descrever o raciocínio de Aristarco na observação de um eclipse da Lua, quando esse satélite atravessa o cone de sombra da Terra (figura 22). Usaremos naturalmente, a notação moderna, de que Aristarco não dispunha.

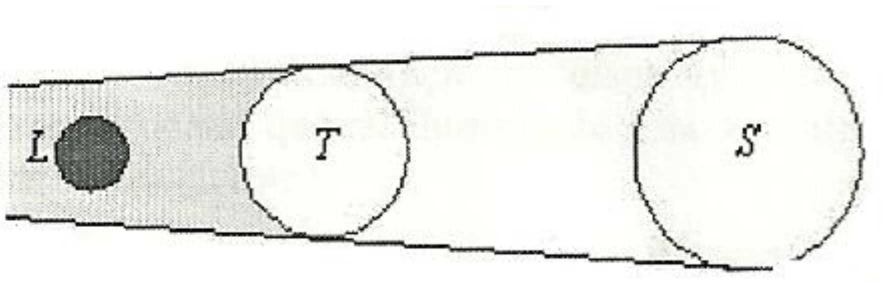

Figura 22

Pelo tempo gasto pela Lua para atravessar o cone de sombra da Terra. Aristarco calculou o diâmetro desse cone na altura da Lua – *LD* na figura 23 – como sendo $\frac{8}{3}$ do raio da Lua.

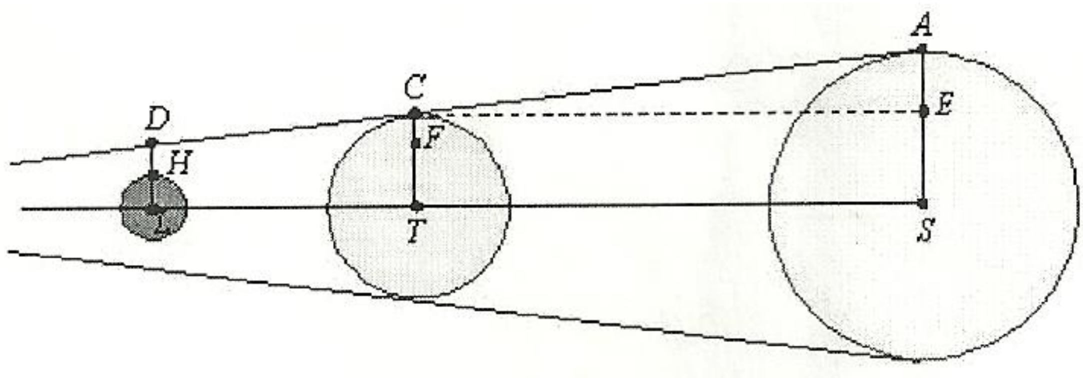

Figura 23

Na figura 23, L, T e S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente, $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $AS = R_S$ são os respectivos raios. De acordo com Aristarco, $LD = \dfrac{8R_L}{3}$. Da semelhança de triângulos DFC e CEA resulta $\dfrac{CF}{DF} = \dfrac{AE}{CE}$. Observe que:

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - \frac{8R_L}{3},\ DF = D_L$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T,\ CE = D_S$$

Substituindo esses valores na proporção anterior, obtemos:

$$\frac{R_T - \dfrac{8R_L}{3}}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Por outro lado, já sabemos que:

$$D_S = b.D_L;\ RS = a.D_S = ab.D_L;\ R_L = a.D_L,$$

De sorte que a igualdade anterior pode ser escrita assim:

$$\frac{R_T - \dfrac{8a.D_L}{3}}{D_L} = \frac{ab.D_L - R_T}{a.D_L}\text{, donde } \frac{R_T}{D_L} - \frac{8a}{3} = a - \frac{R_T}{b.D_L},$$

Que também se escreve:

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right).\frac{R_T}{D_L} = \frac{11.a}{3}\text{, donde } D_L = \frac{3.(b+1)R_T}{11.ab},$$

Então:

$$D_L = \frac{3.(b+1)R_T}{11.ab},\quad D_S = b.D_L = \frac{3.(b+1)R_T}{11.a}$$

$$R_S = ab.D_L = \frac{3.(b+1)R_T}{11},\quad R_L = a.D_L = \frac{3.(b+1)R_T}{11.b}$$

Com os dados de Aristarco,

$D_L \approx 16{,}8 R_T$, $D_S \approx 337 R_T$, $R_S \approx 5{,}7 R_T$, $R_L \approx 0{,}29 R_T$.

Ao contrário, com os valores mais corretos para os ângulos β e γ, obtemos resultados bem mais próximos dos valores modernos:

$D_L \approx 62 R_T$, $D_S \approx 24855 R_T$, $R_S \approx 109 R_T$, $R_L \approx 0{,}27 R_T$.

Para esclarecer um pouco mais, vimos que Aristarco necessitou do raio da Terra para seus cálculos das distâncias da Terra à Lua e ao Sol. No entanto, o raio da Terra foi calculado por Erastóstenes depois de Aristarco. Por isso é preciso que se diga que outros sábios, antes de Erastóstenes e Aristarco, calcularam o raio da Terra. O problema é que só sabemos disso por vagas referências, sobretudo em Aristóteles. As próprias distâncias da Terra à Lua e ao Sol foram calculadas – ou, pelo menos, grosseiramente avaliadas – antes desses sábios, mas disso nós não temos informações precisas.

Considerações Finais

Os resultados aqui descritos estão no livro de Aristarco intitulado "*Sobre o tamanho e distâncias do Sol e da Lua*". Esse livro chegou até os nossos dias, e dele há uma excelente edição comentada, devido ao eminente historiador da ciência Thomas L. Heath (Aristarco of Samos, Oxford University Press).

Aristarco escreveu outros livros, que se perderam. Deles temos notícia por referências feitas por outros autores. Por exemplo, há um livro de Arquimedes, intitulado "*O arenário*" ou "*O contador de areia*", no qual Arquimedes mostra como escrever números muito grandes.

A tarefa de Arquimedes não era simples porque o sistema numérico de seu tempo não possuía a facilidade do sistema posicional que hoje usamos. Para bem impressionar, Arquimedes começa anunciando que poderá escrever um número maior que o número de grãos de areia existentes no universo. É ai que ele fala do Universo de Aristarco, fazendo referência ao livro que esse astrônomo teria escrito explicando a teoria de que o Sol estaria no centro do Universo, com a Terra e os demais planetas girando em volta. Esse livro de Aristarco certamente existia na Biblioteca de Alexandria. Quando refletimos sobre isso, e sobre os muitos outros livros que lá estavam e que foram destruídos para sempre – livros sobre Astronomia, todas as ciências e tudo o mais que diz respeito à atividade intelectual do ser humano – só então podemos avaliar a imensa tragédia que foi a destruição dessa biblioteca.

Mesmo depois de séculos de desenvolvimento tecnológico e o avanço estrondoso da matemática, fica evidente que essas histórias despertam o interesse e a curiosidade dos leitores, uma mostra disso é dada pela OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) que traz em seu cartaz deste ano ilustrações abordando o tema.

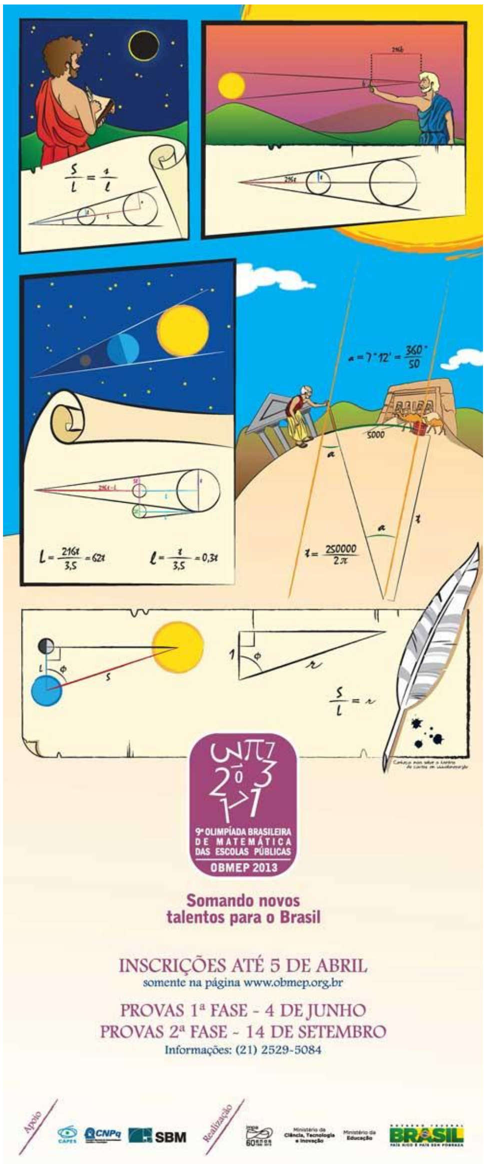

Figura 24

CAPÍTULO 2 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Iniciaremos este capítulo com o estudo da função de Euler, que é a base para definir as funções trigonométricas. Apresentaremos as relações de simetrias entre os quadrantes para o seno e o cosseno. Falaremos também das funções trigonométricas e abordaremos as fórmulas de transformações trigonométricas. Usamos para este capítulo as referências [6] e [7].

1. A FUNÇÃO DE EULER

Vimos no capítulo 1, as razões trigonométricas seno, o cosseno e a tangente para ângulos maiores que 0º e menores que 90º, ou seja, $0° < \alpha < 90°$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão definidos o seno, o cosseno e a tangente de números reais maiores que zero e menores que $\frac{\pi}{2}$.

Agora, vamos estender as definições para todos os números reais. Para isto, imagine uma circunferência $S = \{(x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ como um "carretel" no qual se enrola a reta real *r*, de modo que o zero fique sobre o ponto (1, 0). Assim, a reta real está sendo imaginada como um longo "fio", que deverá ser enrolado no "carretel" considerado.

Ao enrolar o "fio" no "carretel", este coincidirá com algum arco da circunferência. Se convencionarmos que o zero da reta real estará no ponto (1, 0) e que, ao enrolar o "fio" no sentido anti-horário ele representará um número positivo (no sentido horário o fio representará um número negativo), poderemos associar o número real "1" (fio de comprimento 1) ao arco de comprimento 1 e também ao ângulo que subentende esse arco de comprimento 1. Como o raio da circunferência é unitário (mede 1 também), então cada arco de comprimento 1 mede 1 radiano, assim como o ângulo que o subentende.

Dessa forma, conseguimos associar a cada número real um ângulo da circunferência. O número 1 associa-se ao ângulo de 1 *rad*, o número 2 associa-se ao ângulo de 2 *rad*, o número π associa-se ao ângulo que mede π *rad*, e assim por diante. O número 2π associa-se ao ângulo de comprimento 2π, que coincide com o ponto inicial (lembre-se de que o comprimento da circunferência unitária é 2π).

A maneira mais natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a *função de Euler* $E: IR \rightarrow S$, cujo domínio é o conjunto dos números reais e contradomínio a circunferência S de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Esta função faz corresponder ao número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência S, a partir do ponto (1, 0), um arco de comprimento t, sempre andando no sentido positivo, ou seja, sentido anti-horário. O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um arco sobre S, de comprimento $| t |$, que parte do ponto (1, 0) e percorre S sempre no sentido negativo, ou seja, sentido horário.

Sendo t um número real e $P = E(t)$ na circunferência trigonométrica, define-se:

$$sen\ t = \text{ordenada de } P;$$

$$cos\ t = \text{abscissa de } P.$$

$$P = (cos\ t, sen\ t).$$

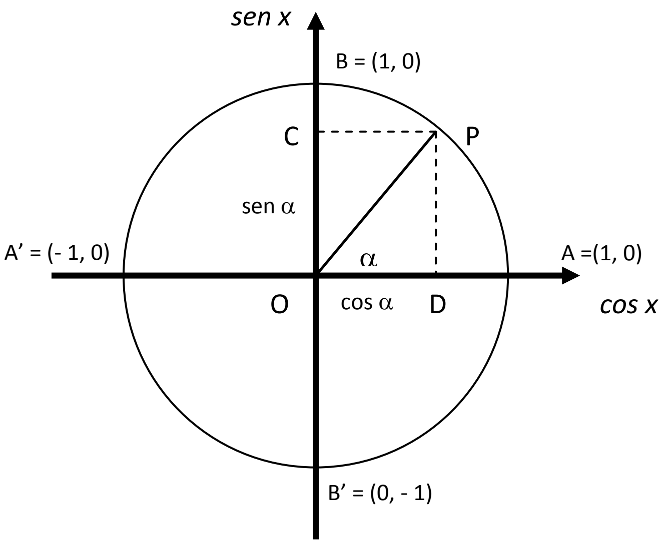

Figura 25

Cada vez que o ponto t descreve na reta um intervalo de comprimento λ, sua imagem $E(t)$ percorre sobre a circunferência S um arco de igual comprimento λ. Em particular, como a circunferência unitária S tem comprimento igual a 2π, quando o ponto t descreve um intervalo de comprimento 2π, sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre S, retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $t \in IR$, tem-se $E(t + 2\pi) = E(t)$ e, mais geralmente, para todo $k \in Z$, tem-se $E(t + 2k\pi) = E(t)$, seja qual for $t \in IR$.

Reciprocamente, se $t < t'$ em IR são tais que $E(t) = E(t')$ isto significa que, quando um ponto s da reta varia de t *a* t' sua imagem $E(s)$ se desloca sobre S no sentido positivo, partindo de $E(t)$, dando um número inteiro k de voltas e retornando ao ponto de partida $E(t') = E(t)$. A distância total percorrida por $E(s)$ é, por definição, igual à distância percorrida por s sobre a reta IR.

Resumindo, tem-se $E(t') = E(t)$ se, e somente se, $t' = t + 2.k.\pi$, com $k \in Z$ (quando $t' > t$, vale $k \in N$, quando $t' < t$ tem-se que $k < 0$).

O seno de um número real é a ordenada do seu ponto correspondente na circunferência trigonométrica. Como os pontos de ordenadas positivas são os do primeiro e os do segundo quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do terceiro e os do quarto quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o seno:

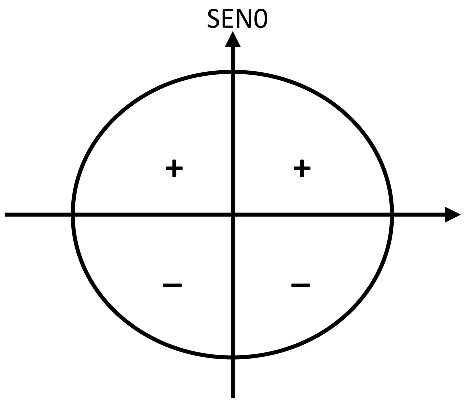

Figura 26

O cosseno de um número real é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do primeiro e os do quarto quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do segundo e os do terceiro quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o cosseno:

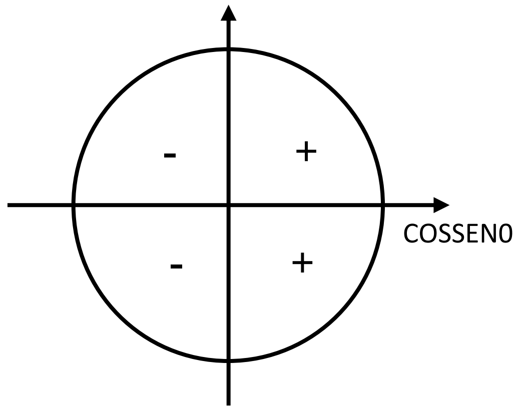

Figura 27

Como, para todo $x \in IR$, temos *sen x* está entre [-1, 1]. Então o valor mínimo para *sen x* é - 1 e o máximo é 1. O mesmo ocorre para o *cos x*
.

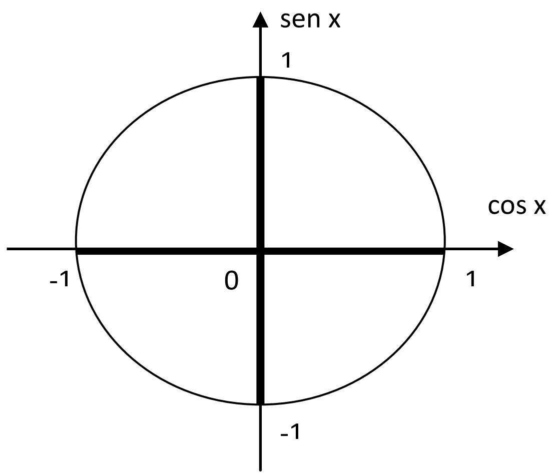

Figura 28

Em uma circunferência trigonométrica, se um arco tiver sua extremidade no segundo, terceiro ou quarto quadrante, sempre existirá um arco com extremidade no primeiro quadrante e cujos senos e cossenos terão, em módulo, o mesmo valor das do arco considerado.

- **Simetria em relação ao eixo dos senos**

Dado o ângulo β tal que 90º < β < 180º, seja P a extremidade de β na circunferência trigonométrica. Seja P' o ponto simétrico de P em relação ao eixo dos senos, α o ângulo correspondente ao arco e $\widehat{AP'}$ o ângulo correspondente ao arco $\widehat{PA'}$

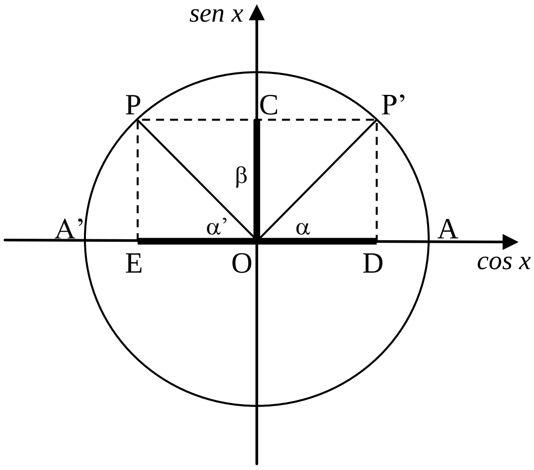

Figura 29

Observando a figura podemos afirmar que $\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 180°$ (1).

Além disso $\widehat{AP} = \widehat{AP'}$ (2), pois, *P'* é simétrico de *P* em relação à origem.

Substituindo (2) em (1) temos que $\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 180°$ (no sentido anti-horário).

Portanto $\beta + \alpha = 180^o$ ou $\beta = 180^o - \alpha$ (3).

Como $P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ e $P' = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ são simétricos em relação à origem estes pontos possuem ordenadas e abscissas simétricas. Ou seja,

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \text{ e } \cos\beta = -\cos\alpha \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) temos que:

$$\operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Logo, dois ângulos que somam 180º têm senos e cossenos simétricos.

Essas relações podem ser escritas como:

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x \text{ , para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

- **Simetria em relação à origem**

Dado o ângulo β tal que $180^o < \beta < 270^o$, seja *P* a extremidade de β na circunferência trigonométrica. Seja *P'* o ponto simétrico de *P* em relação à origem e α o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP'}$.

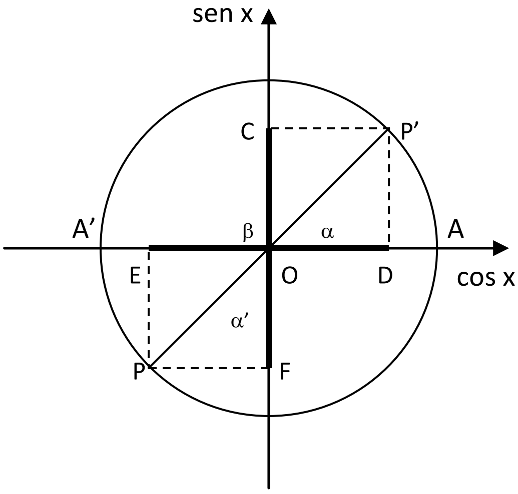

Figura 30

Observando a figura podemos afirmar que $\widehat{AP} - \widehat{A'P} = 180°$ (1).

Além disso, $\widehat{A'P} = \widehat{AP'}$ (2), pois, *P'* é simétrico de *P* em relação à origem.

Substituindo (2) em (1) temos que $\widehat{AP} - \widehat{A'P} = 180°$ (no sentido anti-horário).

Portanto $\beta - \alpha = 180^o$ ou $\beta = 180^o + \alpha$ (3)

Como $P = (\cos \beta, sen\ \beta)$ e $P' = (\cos \alpha, sen\ \alpha)$ são simétricos em relação à origem estes pontos possuem ordenadas e abscissas simétricas. Ou seja:

$$sen\ \beta = - sen\ \alpha \text{ e } \cos \beta = - \cos \alpha \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) temos que:

$$sen\ (180^o + \alpha) = - sen\ \alpha$$

$$\cos (180^o + \alpha).= - \cos \alpha$$

Logo, dois ângulos que somam 180º têm senos e cossenos simétricos.

Essas relações podem ser escritas como:

$$sen\ (\pi + x) = - sen\ x, \text{ para todo } x \in IR, \text{ e}$$

$$\cos (\pi + x) = - \cos x, \text{ para todo } x \in IR.$$

- **Simetria em relação ao eixo dos cossenos**

Dado o ângulo β tal que $270^o < \beta < 360^o$, seja *P* a extremidade de β na circunferência trigonométrica. Seja *P'* o ponto simétrico de *P* em relação ao eixo dos cossenos e α o ângulo correspondente ao arco $\widehat{AP'}$.

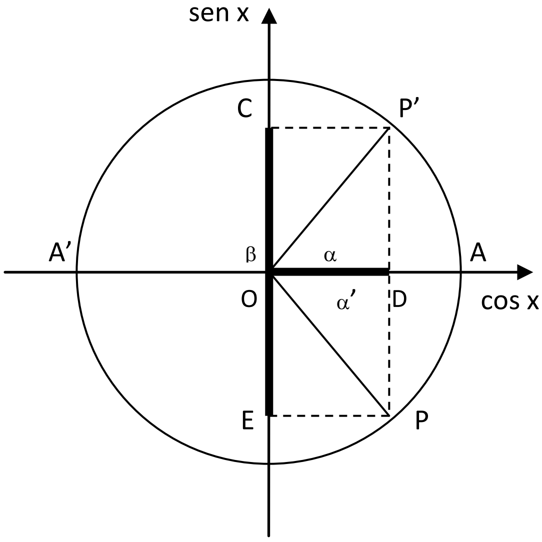

Figura 31

Observando a figura podemos afirmar que $\widehat{AP} + \widehat{PA} = 360°$ (1).

Além disso, $\widehat{PA} = \widehat{AP'}$ (2), pois, *P’* é simétrico de *P* em relação ao eixo dos cossenos.

Substituindo (2) em (1) temos que $\widehat{AP} + \widehat{PA} = 360°$ (no sentido anti-horário).

Portanto $\beta + \alpha = 360^o$ ou $\beta = 360^o - \alpha$ (3).

Como $P = (\cos \beta, \text{sen}\ \beta)$ e $P' = (\cos \alpha, \text{sen}\ \alpha)$ são simétricos em relação ao eixo dos cossenos estes pontos têm mesma abscissa e ordenadas simétricas. Ou seja,

$$\text{sen}\ \beta = -\text{sen}\ \alpha \text{ e } \cos \beta = \cos \alpha \ (4).$$

Substituindo (3) em (4) temos que:

$$\text{sen}\ (360^o - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$$

$$\cos (360^o - \alpha) = \cos \alpha.$$

Logo, dois ângulos que somam 360º têm senos simétricos e cossenos iguais. Essas relações podem ser escritas como:

$$\text{sen}\ (2\pi - x) = -\text{sen}\ x, \text{ para todo } x \in IR, \text{ e}$$

$$\cos (2\pi - x) = \cos x, \text{ para todo } x \in IR$$

Vimos que no estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, foi verificado que quando dois ângulos α e β são complementares, então:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos \beta \text{ ou } \text{sen}\ \alpha = \cos (90^o - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \text{sen}\ \beta \text{ ou } \cos \alpha = \text{sen}\ (90^o - \alpha)$$

Essa relação pode ser escrita como:

$$sen\ x = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ para todo } x \in IR, \text{ ou}$$

$$cos\ x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ para todo } x \in IR.$$

2. AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções $sen: IR \rightarrow IR$ e $cos: IR \rightarrow IR$, chamadas de função seno e função cosseno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t $\in$ IR.

$$E(t) = (cos\ t, sen\ t)$$

Em outras palavras, $x = cos\ t$ e $y = sen\ t$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária. Segue-se desta definição que vale, para todo $t \in IR$, a relação fundamental:

$$cos^2\ t + sen^2\ t = 1$$

Uma função $f: IR \rightarrow IR$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in IR$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in IR$ e todo $k \in Z$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in IR$ chama-se período da função *f*. As funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π.

A periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do Sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do nosso coração. Periodicidade é uma ideia muito próxima de oscilação (ou vibração), outro fato ubíquo, presente nas cordas de um violino que nos enleva e na corrente alternada que usamos em nossas casas. As funções periódicas são o instrumento matemático adequado para descrever todos os fenômenos periódicos.

Dado o evidente interesse que se tem por entender fatos como os acima citados, não é difícil perceber a importância das funções trigonométricas na Matemática e na Física, principalmente depois que o matemático francês Joseph Fourier mostrou (em 1822), no seu consagrado estudo sobre a transmissão de calor, que toda função pode, sob-hipóteses bem razoáveis, ser obtida como soma de uma série cujos termos são senos ou cossenos ("série de Fourier"). Isto foi o ponto de partida da chamada Análise de

Fourier ou, mais geralmente, da Análise Harmônica, um ramo central da Matemática contemporânea.

Dizemos que a função $f: IR \rightarrow IR$ é par quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in IR$ e ímpar se $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in IR$.

Na seção de simetria em relação aos eixos dos cossenos foi provado que $E(-t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, para todo $t \in IR$. Como $E(-t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t))$,então $\cos(-t) = \cos(t)$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$. Ou seja, o seno é uma função par e o cosseno é uma função ímpar.

As figuras abaixo mostram os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Função seno

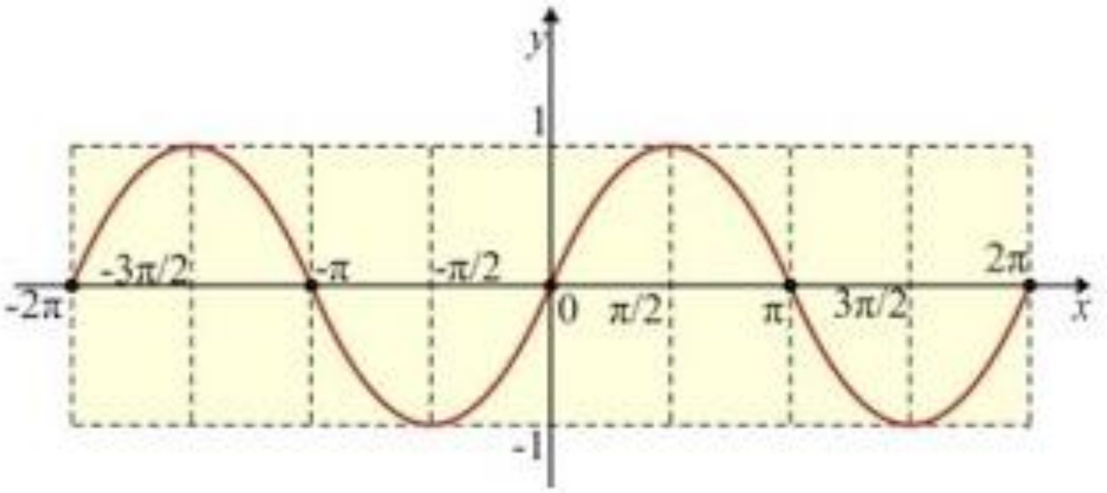

Figura 32

Função cosseno

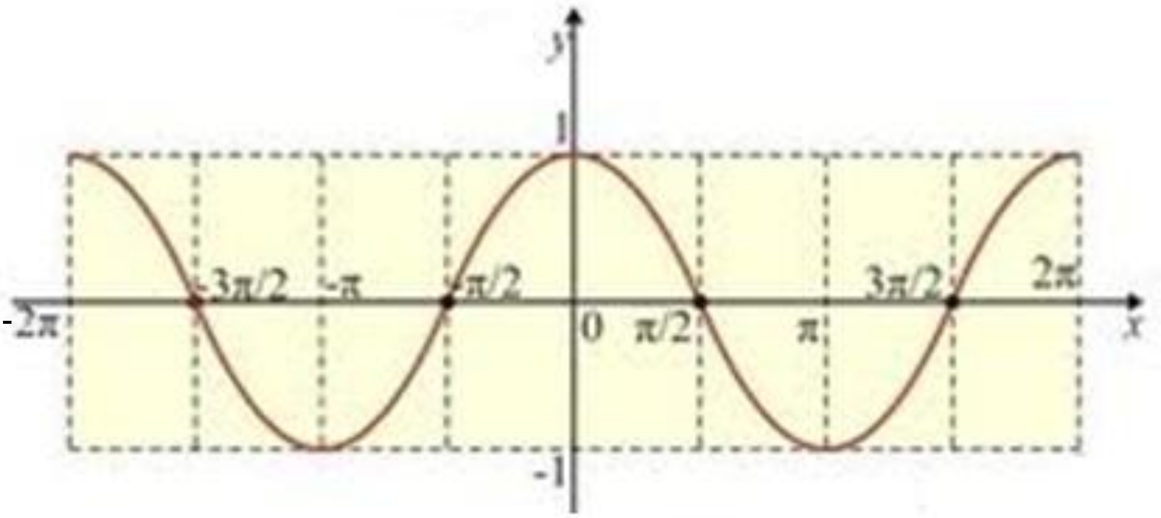

Figura 33

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber,

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x},\ \ cotg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x},\ \ sec\ x = \frac{1}{cos\ x}\ \text{e}\ cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

Estas funções são chamadas: tangente, cotangente, secante e cossecante respectivamente. Destas a mais importante é a tangente. Cumpre observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Assim, por exemplo, a função tangente, dada pela expressão, $tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$, tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\dfrac{\pi}{2}$, pois $cos\ x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ onde $k \in Z$.

Assim, o domínio da função $x \mapsto tg\ x$ é formado pela reunião dos intervalos $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2},\ k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, para todo $k \in Z$.

Em cada um desses intervalos $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, por exemplo, a função tangente é crescente e, na realidade, $x \to tg\ x$ é uma correspondência biunívoca entre um intervalo aberto de comprimento π e a reta inteira IR.

Função tangente

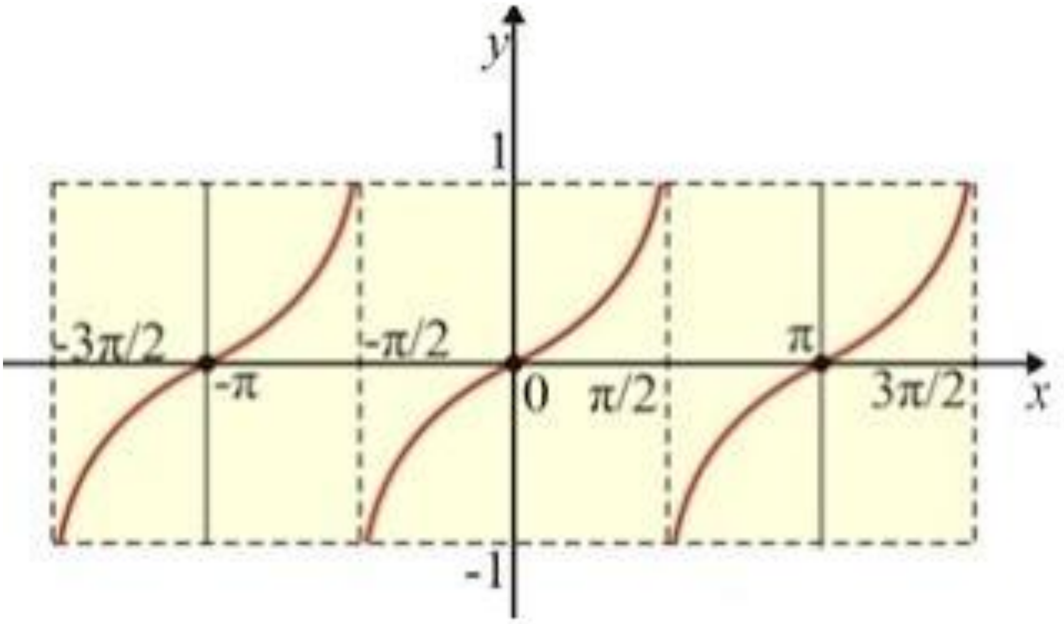

Figura 34

A função tangente, embora não esteja definida para todo número real *IR*, pode ser considerada como uma função periódica, de período π, pois π é o menor número real positivo tal que $tg(x + \pi) = tg\ x$ para todo x no domínio da função.

3. FÓRMULAS

Nesta seção estudaremos as fórmulas da soma de arcos, diferença de arcos, arco duplo e arco metade para qualquer número real.

3.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

Sejam *P*, *Q* e *R* os pontos do circulo trigonométrico associados aos números α, $\alpha + \beta$, $-\beta$, respectivamente (Figura 35).

$P = (\cos \alpha, \text{sen}\ \alpha)$ $\quad$ $Q = (\cos(\alpha + \beta), \text{sen}(\alpha + \beta))$ $\quad$ $R = (\cos \beta, -\text{sen}\ \beta)$

Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ têm a mesma medida, portanto as cordas *AO* e *PR* têm medidas iguais. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{AQ}^2 = (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2$$

$$d_{AQ}^2 = (cos\ (\alpha + \beta) - 1)^2 + (sen\ (\alpha + \beta) - 0)^2$$

$$d_{AQ}^2 = cos^2\ (\alpha + \beta) - 2\ cos\ (\alpha + \beta) + 1 + sen^2\ (\alpha + \beta)$$

$$d_{AQ}^2 = 1 + sen^2\ (\alpha + \beta) + cos^2\ (\alpha + \beta) - 2cos\ (\alpha + \beta)$$

$$d_{AQ}^2 = 1 + 1 - 2\ cos\ (\alpha + \beta)$$

$$d_{AQ}^2 = 2 - 2\ cos\ (\alpha + \beta)$$

E também:

$$d_{RP}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$d_{RP}^2 = (cos\ \alpha - cos\ \beta)^2 + (sen\ \alpha + sen\ \beta)^2$$

$$d_{RP}^2 = cos^2\ \alpha - 2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + cos^2\ \beta + sen^2\ \alpha + 2sen\ \alpha.sen\ \beta + sen^2\ \beta$$

$$d_{RP}^2 = cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha + cos^2\ \beta + sen^2\ \beta - 2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + 2sen\ \alpha.sen\ \beta$$

$$d_{RP}^2 = 1 + 1 - 2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + 2sen\ \alpha.sen\ \beta$$

$$d_{RP}^2 = 2 - 2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + 2sen\ \alpha.sen\ \beta$$

Como $d_{AQ}^2 = d_{RP}^2$, temos:

$$2 - 2\ cos\ (\alpha + \beta) = 2 - 2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + 2sen\ \alpha.sen\ \beta$$

$$-2\ cos\ (\alpha + \beta) = -2\ cos\ \alpha.cos\ \beta + 2sen\ \alpha.sen\ \beta$$

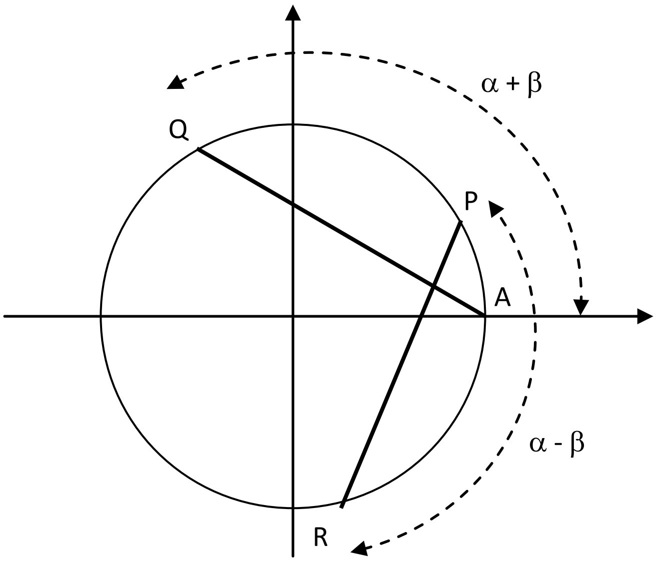

Figura 35

E, então vem a fórmula

A) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha.\mathrm{sen}\,\beta$

B) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}(-\beta).$

Logo, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha.\mathrm{sen}\,\beta.$

C) $\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$ ou

$\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\cos\beta - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\mathrm{sen}\,\beta$, isto é,

$\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\,\beta.\cos\alpha.$

D) $\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\,\beta.\cos\alpha = \mathrm{sen}\,\alpha.\cos(-\beta) - \mathrm{sen}(-\beta).\cos\alpha$, isto é,

$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta.\cos\alpha.$

3.2. ARCO DUPLO E ARCO METADE

A) $sen\ (2\alpha) = sen\ (\alpha+\alpha) = sen\ \alpha.cos\alpha + cos\ \alpha.sen\ \alpha.$

Logo, $sen\ (2\alpha) = 2.sen\ \alpha.cos\ \alpha..$

B) Do mesmo modo, $cos\ (2\alpha) = cos\ (\alpha + \alpha) = cos\ \alpha.cos\ \alpha - sen\ \alpha.sen\ \alpha$, *ou seja,*

$cos\ (2\alpha) = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha..$

C) $cos\ (2a) = cos^2a - sen^2a$. Sendo $sen^2a + cos^2a = 1$ então $cos^2a = 1 - cos^2a$

Logo $cos(2a) = cos^2a - (1 - cos^2a) = cos^2a - 1 + cos^2a$, *ou seja,*

$cos(2a) = 2.cos^2a - 1.$

Isolando $cos\ a$, vem $cos\ a = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos(2a)}{2}}$. Escrevendo $a = \dfrac{\alpha}{2}$, então $2a = \alpha$

Logo $cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}$.

D) $cos(2.a) = cos^2a - sen^2a$. Sendo $sen^2a + cos^2a = 1$ *então* $cos^2a = 1 - sen^2a$

Logo $cos(2a) = (1 - sen^2a) - sen^2a \Rightarrow cos(2a) = 1 - sen^2a - sen^2a$, *ou seja,*

$cos(2a) = 1 - 2.sen^2a$

Isolando $sen\ a$, vem $sen\ a = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos(2a)}{2}}$. Escrevendo $a = \dfrac{\alpha}{2}$, então $2a = \alpha$

Logo $sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}$

CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES

Este capítulo é dedicado a algumas aplicações da trigonometria, aplicações sobre distâncias inacessíveis, problemas de mecânica, ângulos entre os ponteiros de um relógio e o problema da estátua. Apresentamos a fórmula de Heron para o cálculo da área de quadriláteros e o problema da rampa de skate do tempo mínimo.

1. PROBLEMA DE MEDIDAS INACESSÍVEIS

Como foi visto no capítulo 1, Aristarco mediu as distâncias da Terra a Lua e da Terra ao Sol. Apresentarei neta seção mais dois exemplos de medidas inacessíveis. Os exemplos a seguir foram tirados na integra de [6].

Exemplo 1: Uma empresa de engenharia deve construir uma ponte unindo duas montanhas, para dar continuidade a uma estrada. O engenheiro tomou como referência uma árvore, conforme figura abaixo. Qual será o comprimento da ponte?

Solução:

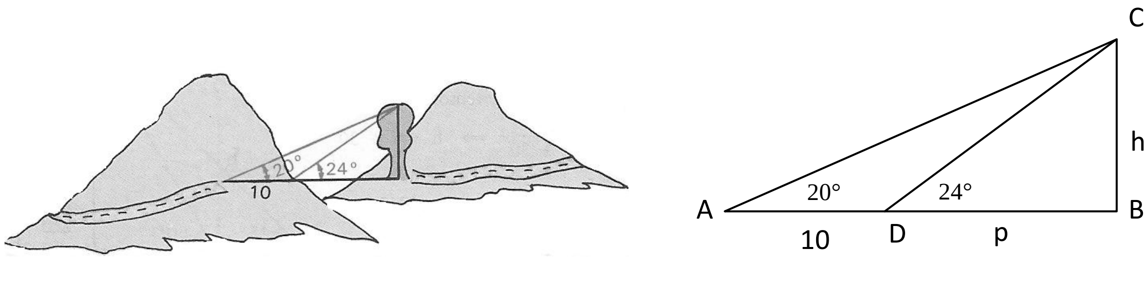

Figura 36

No triângulo retângulo *ABC*, temos que $tg\,20° = \dfrac{h}{p+10}$, ou seja, $h = (p + 10).tg\ 20°$

No triângulo retângulo *ABD*, temos que $tg\,24° = \dfrac{h}{p}$ então $h = p.tg\ 24°$.

Sendo o valor de h igual para as duas equações, temos $(p + 10).tg\ 20° = p.tg24$.

Resolvendo a equação, vem:

$$(p+10).tg\ 20° = p.tg\ 24°$$

$$p.tg\ 20° + 10.tg\ 20° = p.tg\ 24°$$

$$p.tg\ 24° - p.tg\ 20° = 10.tg\ 20°$$

$$p(tg\ 24° - tg\ 20°) = 10.tg\ 20°$$

$$p = \frac{10.tg\,20°}{tg\,24° - tg\,20°}$$

Sendo $tg\ 24° \cong 0{,}364$ e $tg\ 20° \cong 0{,}445$, temos:

$$p = \frac{10\,.\,0{,}364}{0{,}445 - 0{,}364} \Rightarrow p = \frac{3{,}64}{0{,}081} \Rightarrow p = 44{,}79m.$$

Calculado o valor de *p*, encontramos que a ponte terá um comprimento de 44,79 *m*.

Exemplo 2: Dois meninos que distam 50 *m* um do outro observam uma pipa no alto entre os dois, sabendo que um deles vê a pipa sob um ângulo de 60° e o outro, sob um ângulo de 30°, determine a altura da pipa.

Solução:

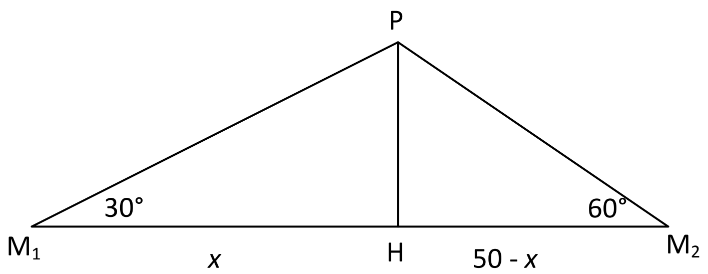

Figura 37

Sabe-se que M_1M_2 mede 50 metros e que $M_1M_2 = M_1H + HM_2$, podemos dizer que M_1H mede x metros e HM_2 é igual a $50 – x$ metros.

No triângulo M_1HP, a $tg30° = \frac{PH}{x}$, e no triângulo M_2HP a $tg60° = \frac{PH}{50 - x}$.

Resolvendo as tangentes e isolando a variável x, temos:

$$tg30° = \frac{PH}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PH}{x} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}\,x}{3} \quad (1)$$

$$tg60° = \frac{PH}{50 - x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{PH}{50 - x} \Rightarrow PH = (50 - x).\sqrt{3} \quad (2)$$

Igualando (1) e (2), vem:

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{3} = (50 - x).\sqrt{3} \Rightarrow x = 150 - 3x \Rightarrow x = 3.(50 - x) \Rightarrow 4x = 150 \Rightarrow x = 37{,}5$$

Substituindo *x* em (1) ou (2) temos o valor de *PH* que é a altura da pipa.

$$PH = \frac{\sqrt{3}\,x}{3} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}\,.37{,}5}{3} \Rightarrow PH = 21{,}65 \text{, ou}$$

$$PH = (50 - x).\sqrt{3} \Rightarrow PH = (50 - 37{,}5).\sqrt{3} \Rightarrow PH = 21{,}65$$

2. PROBLEMA DE MECÂNICA

Um problema publicado na Revista do Professor de Matemática, número 10, na seção **"***Para que serve?***"**, intitulado *Trigonometria na oficina mecânica*, de Pedro Firmino da Silva, da cidade de São Roque, SP.

Deseja-se fazer seis furos na base de uma peça de forma cilíndrica, sabendo que o diâmetro da base mede 120 mm e os furos devem ser distribuídos igualmente sobre uma circunferência imaginária de diâmetro 100 mm.

Segue ainda escrito no problema que o mecânico só possuía uma ferramenta e que ele chamou de *altímetro*, esta ferramenta é constituída por uma régua que desliza perpendicularmente em uma barra milimetrada, sendo que esta se fixa na peça.

Para resolver o problema usando tal ferramenta, desenhamos, com a régua móvel, um diâmetro da base, sobre ele marcamos os centros dos dois primeiros furos, que ficarão afastados 100 mm.

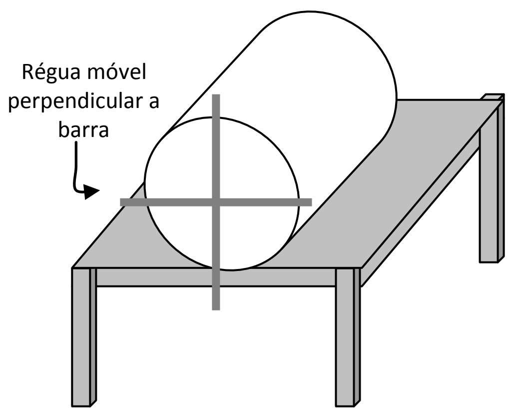

Figura 38

Podemos imaginar que os furos são os vértices de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de diâmetro igual 100 mm, sabendo que o hexágono pode ser construído com 6 triângulos equiláteros iguais, obtendo ângulos centrais de 60°.

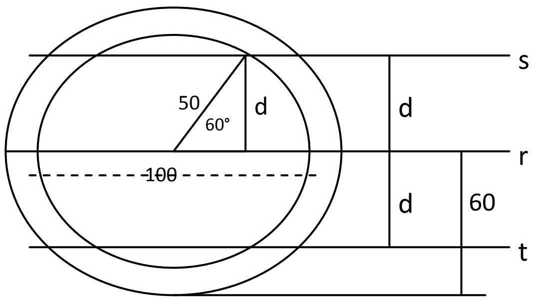

Figura 39

Desenhando as retas paralelas *s* e *t* à reta *r*, que está contida sobre o diâmetro desenhado, a uma distância *d* de *r*, calculando o valor de *d*, temos:

$$d = 50 \,.\, sen\ 60° = 43\ mm$$

Desde modo, com a régua móvel desenhamos as retas *s* e *t*, sobre as quais estarão os outros quatro furos. A régua móvel, perpendicular a barra fixa, faz movimentos de translação. Não possível transladar a barra, que é fixa, giramos o altímetro em 90°, colocando a barra sobre o diâmetro feito no passo anterior.

Imaginamos novamente os triângulos equiláteros, podemos medir a distância *e*, dada por:

$$e = 50 \,.\, sen\ 30° = 25 \text{ mm}$$

Assim, deslocando a régua móvel, marcamos os centros dos outros quatro furos.

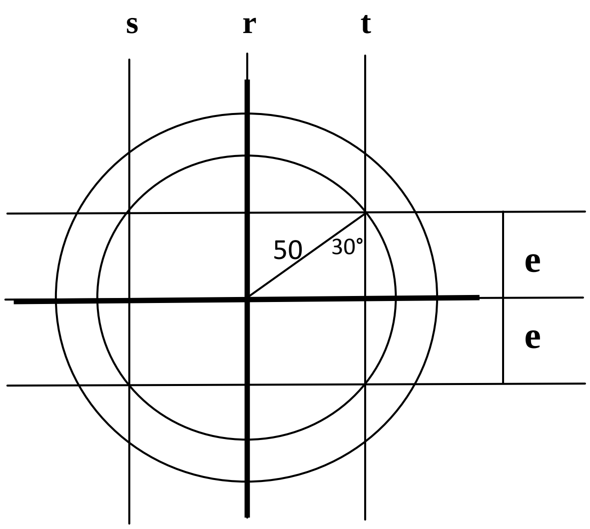

Figura 40

Então, a peça está pronta para ser furada.

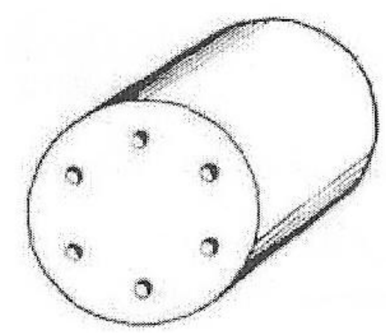

Figura 41

3. PROBLEMA DOS ÂNGULOS NO PONTEIRO DO RELÓGIO

Um problema muito comum, quando começamos a introduzir a trigonometria no ensino médio, é exposto no artigo de Antonio Leonardo P. Pastor, na Revista do Professor de Matemática, número 11, que trata de ângulos e arcos e uma aplicação, calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio.

Considere por exemplo o problema: Calcular o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 5 h 43 min.

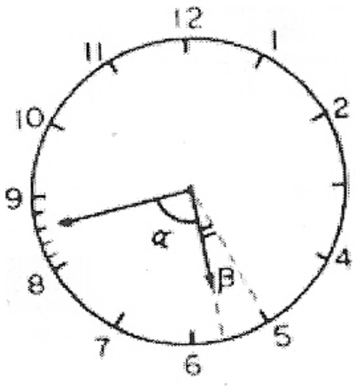

Figura 42

Seja β o ângulo que o ponteiro das horas descreve desde as 5 horas até 5 horas e 43 minutos. O mostrador do relógio é dividido em 12 partes iguais de 30° cada. Cada setor de 30° corresponde a 5 minutos e, portanto, cada minuto corresponde a 6°. Assim, o ângulo $\alpha + \beta$ pode ser determinado por contagem direta, e é igual a 18 . 6° = 108°.

Sabendo que uma hora, o ponteiro das horas descreve 60 min e o ponteiro das horas descreve 30°, logo para cada minuto o ponteiro das horas descreve 0,5°, então o ângulo β tem 43 min x 0,5° que resulta em 21,5°.

Se $\alpha + \beta = 108°$ e β = 21,5°, então $\alpha = 108° - 21{,}5° = 86{,}5°$

Em geral, somando inicialmente a medida do ângulo que vai da marca da hora em questão até a marca dos minutos correspondente, devemos somar ou subtrair o ângulo β (ângulo que o ponteiro das horas descreve durante os minutos correspondentes), dependendo do ângulo que pede o problema da configuração dos ponteiros e de como efetuamos a medida (orientação). Em resumo, a resolução do exemplo se reduz a determinação de β.

4. PROBLEMA DO OBSERVADOR DA ESTÁTUA

Na Revista do Professor de Matemática, número 52, escrito por José Luis Pastore Mestre, encontramos outra aplicação de ângulos na circunferência. É um problema bastante conhecido do matemático Johann Muller (1436 – 1476), um dos maiores matemáticos do século XV, conhecido como Regiomontanus, nome dado devido a sua cidade natal Kõningsberg, que significa Montanha do Rei. O problema é datado de 1471 e foi citado no livro “*700 Great Problems of Elementary Mathematics their historyand solution NY*”, de autoria de Heinrich Dorrie de 1989. Vejamos:

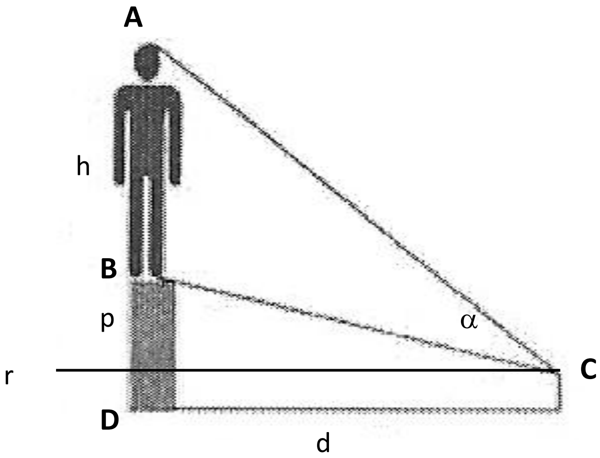

Figura 43

Suponha uma estátua de altura *h* sobre o pedestal de altura *p*. Um homem de altura *m* (*m* < *p*) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α, que varia de acordo com a distância *d* entre o homem e a base do pedestal. Determinar *d* para que o ângulo de visão α seja o maior possível.

Solucionando o problema, temos:

Marcamos, inicialmente, na figura os pontos *A*, *B* e *C* representado respectivamente o topo, o pé da estátua e os olhos do observador. Em seguida traçamos uma reta *r* que passa por *C* e é paralela a linha do chão. Traçamos uma mediatriz no segmento *AB* e por fim traçamos a única circunferência λ, com centro nessa mediatriz do segmento *AB*, que passa pelos pontos *A* e *B* e tangencia a reta *r*. Marcamos na figura o ponto C_t como ponto de tangência.

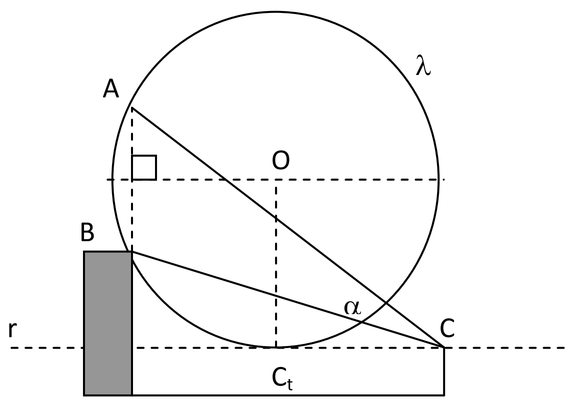

Figura 44

Nota-se que os pontos *A* e *B* são vértices de um triângulo inscrito em uma circunferência, então o seu centro é um ponto contido na mediatriz do lado *AB* desse triângulo. Sendo o terceiro vértice, um ponto de tangência com a reta *r*, basta medir a distância da mediatriz a reta *r* que teremos o comprimento do raio de λ. Medindo esse comprimento a partir dos pontos *A* e *B* encontramos o ponto O sobre a mediatriz relativa ao lado *AB*. Por esse motivo podemos considerar que a circunferência com centro sobre a mediatriz que contém os pontos *A*, *B* e é tangente a reta *r* é única.

Se *C* percorrer livremente a reta *r*, qualquer possibilidade para o ângulo de visão α será dada por certa localização de *C* em *r*. Nosso intuito é provar que α assume o maior valor possível quando *C* coincide com C_t.

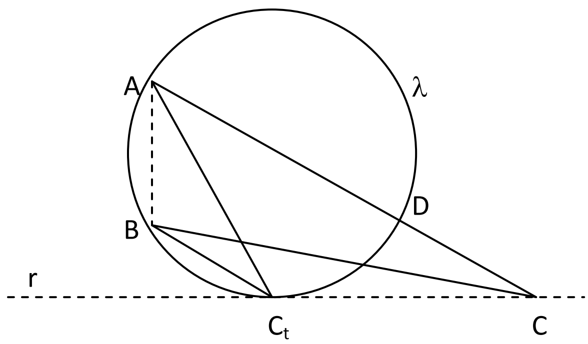

Figura 45

Seja β a medida do ângulo $A\hat{C}_tB$ que é maior que o ângulo α, medida do ângulo $A\hat{C}B$ para qualquer posição de *C* diferente de C_t, pois sendo *D* o ponto de encontro do segmento *AC* com a circunferência λ.

No triângulo *BCD*, temos que a medida do ângulo $C\hat{B}D = \gamma$, o ângulo $B\hat{D}C$ = 180 - β e o ângulo $B\hat{C}D = \alpha$, logo a soma dos ângulos será $\alpha + \gamma + 180° - \beta = 180°$, sendo $\beta = \alpha + \gamma$, implicando que $\beta > \alpha$.

Uma vez verificado que o ângulo $A\hat{C}_tB$ é o ângulo de máximo visual, determinaremos a distância *d*, entre o observador e a base do pedestal, para que esse ângulo seja atingido.

Seja *Q* o ponto de encontro da reta *AB* com *r*, sendo a reta *AB* e *d* respectivamente secante e tangente a circunferência λ, aplicando potência de ponto no ponto *Q* encontraremos a distância *d* procurada.

$$QC_t^2 = QB \,.\, QA \quad ou \quad d^2 = (p - m) \,.\, (p - m + h)$$

Se a altura *m* do observador for insignificante em relação à altura da estátua e do pedestal, podemos simplificar a fórmula para:

$$d = \sqrt{p.(p+h)}$$

Exemplo: Em outubro de 1931, após cinco anos de construção, foi inaugurado no alto do morro do Corcovado, o cartão de visitas do Rio de Janeiro, a estátua do Cristo Redentor. A altura total da estátua é 30 *m*, seu pedestal mede 8 *m*, e admitiremos um observador com 1,70 *m* de altura. A que distância esse observador deve ficar da base do pedestal do Cristo Redentor para que o seu ângulo de visão seja o maior possível?

Figura 46

Usando a fórmula, obtemos $d = \sqrt{(8-1{,}7).(8-1{,}7+30)} \cong 15\,m$

5. FÓRMULA DE HERON PARA QUADRILÁTEROS

Desde o Ensino Fundamental usamos a fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo quando conhecemos seus lados.

$$A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}\text{, onde } \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

O artigo de Augusto Macedo e Carlos A. Gomes, publicado na Revista do Professor de Matemática, número 64, apresenta a fórmula de Heron para quadriláteros.

5.1. QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Um quadrilátero é inscritível a uma circunferência se a soma dos ângulos opostos desse quadrilátero é igual a 180°.

Um quadrilátero inscritível *ABCD* de lados *a*, *b*, *c* e *d*, tem área dada pela expressão:

$$A=\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}\text{, onde } p=\frac{a+b+c+d}{2}$$

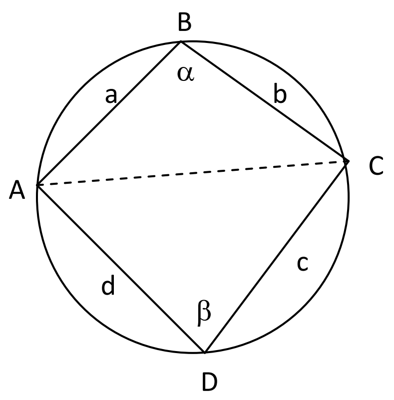

Figura 47

A seguir apresentaremos a demonstração dessa fórmula.

1) Temos $\alpha + \beta = 180°$, visto que o quadrilátero é inscritível. Assim, segue que $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $cos\ \beta = -\ cos\ \alpha$..

Denotando (*ACB*) e (*ACD*), as áreas dos triângulos *ABC* e *ACD* respectivamente, e por (*ABCD*) a área do quadrilátero *ABCD*, temos.

$$(ABC)=\frac{ab.sen\alpha}{2} \quad \text{e} \quad (ACD)=\frac{cd.sen\beta}{2}$$

$$(ABCD)=(ABC)+(ACD)=\frac{ab.sen\alpha}{2}+\frac{cd.sen\beta}{2}=\frac{ab.sen\alpha}{2}+\frac{cd.sen\alpha}{2}=\frac{(ab+cd).sen\alpha}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABC e ACD, obtemos:

$$x^2 = a^2 \text{`}+ b^2 - 2abcos\ \alpha \text{ e } x^2 = c^2 + d^2 - 2cdcos\ \beta$$

De $cos\beta$ = - $cos\alpha$, segue:

$a^2 + b^2 - 2abcos\ \alpha = c^2 + d^2 - 2cdcos\ \beta$ e $cos\ \alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

Sendo $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, podemos escrever sen α = $\sqrt{1 - cos^2\ \alpha}$, então:

$$sen\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2}$$

2) Cálculo da área: $(ABCD) = \dfrac{(ab + cd).sen\alpha}{2}$, sendo

$sen\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}$, temos:

$$(ABCD) = \frac{(ab + cd)}{2} . \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2}$$

$$(ABCD) = \frac{(ab + cd)}{2} . \sqrt{1 - \left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right]}$$

$$(ABCD) = \frac{(ab + cd)}{2} . \sqrt{\left[\frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right]}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{(ab + cd)^2}{4} . \left[\frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}\right]}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{4} . \left[\frac{4.(a^2b^2 + 2.abcd + c^2d^2) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}\right]}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16} . \left[(4a^2b^2 + 8.abcd + 4c^2d^2) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2\right]}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right]}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(2ab+2cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\right].\left[(2ab+2cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\right]}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right].\left[2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right]},$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)\right].\left[(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)\right]}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right].\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.(a+b+c-d).(a+b-c+d).(c+d+a-b).(c+d-a+b)}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.(c+d-a+b).(c+d+a-b).(a+b-c+d).(a+b+c-d)},$$

Note que:

$$b+c+d-a=a+b+c+d-2a=2p-2a=2(p-a)$$

$$a+c+d-b=a+b+c+d-2b=2p-2b=2(p-b)$$

$$a+b+d-c=a+b+c+d-2c=2p-2c=2(p-c)$$

$$a+b+c-d=a+b+c-d-2d=2p-2d=2(p-d),$$

Substituindo, temos:

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.2(p-a).2(p-b).2(p-c).2(p-d)}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.16,(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}$$

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)}$$

5.2. QUADRILÁTERO QUALQUER

Um quadrilátero *ABCD* de lados *a, b, c* e *d*, tem área dada pela expressão:

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d) - abcd\cos^2\theta} \;,$$

Sendo θ a média aritmética das medidas de dois ângulos opostos do quadrilátero.

Note que, a fórmula da área do quadrilátero independe dos ângulos α e β, basta que eles sejam ângulos de vértices opostos. De fato,

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha'+\beta'}{2} = 180° \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha'+\beta'}{2}$$

Como, $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(180° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)$, temos:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right).$$

A seguir, passaremos a demonstrar a fórmula.

No quadrilátero qualquer *ABCD*, conforme a figura 48:

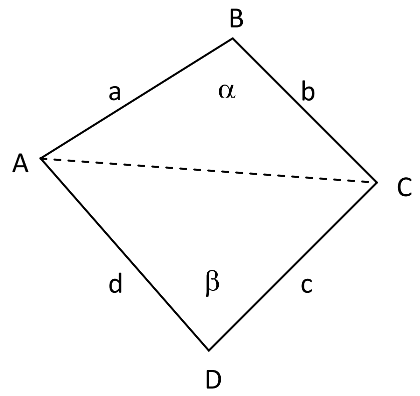

Figura 48

Vamos considerar $\theta = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, ou $2\theta = \alpha + \beta$, então:

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ 2\theta = cos^2\ \theta - sen^2\ \theta, \text{ mas } sen^2\ \theta = 1 - cos^2\ \theta, \text{ logo:}$$

$$cos^2\ \theta - sen^2\ \theta = cos^2\ \theta - 1 + cos^2\ \theta = 2cos^2\ \theta = 1, \text{ então:}$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = 2cos^2\ \theta - 1$$

Note que:

$$(ABCD) = (ABC) + (ACD) = \frac{ab.sen\alpha}{2} + \frac{cd.sen\beta}{2} \text{ ou } 2(ABCD) = ab.sen\alpha + cd.sen\beta$$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos

$$[2(ABCD)]^2 = (ab.sen\alpha + cd.sen\beta)^2$$

$$4(ABCD)^2 = a^2b^2.sen^2\alpha + 2abcdsen\alpha.sen\beta + c^2d^2.sen^2\beta \qquad (1)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos *ABC* e *ACD*, obtemos:

$$x^2 = a^2\ `+ b^2 - 2abcos\ \alpha \text{ e } x^2 = c^2 + d^2 - 2cdcos\ \beta$$

$$a^2 + b^2 - 2abcos\ \alpha = c^2 + d^2 - 2cdcos\ \beta$$

$$2abcos\ \alpha - 2cdcos\ \beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

$$abcos\ \alpha - c.cos\ \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(abcos\ \alpha - cdcos\ \beta)^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4}$$

$$a^2b^2cos^2\ \alpha - 2abc.cos\ \alpha.cos\ \beta + c^2d^2cos^2\ \beta = \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), temos:

$$a^2b^2sen^2\ \alpha + a^2b^2cos^2\ \alpha + 2abcdsen\ \alpha.sen\ \beta - 2abcdcos\ \alpha.cos\ \beta + c^2d^2sen^2\ \beta - c^2d^2cos^2\ \beta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2(sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha) + 2abcdsen\ \alpha.sen\ \beta - 2abcdcos\ \alpha.cos\ \beta + c^2d^2(sen^2\ \beta + cos^2\ \beta) =$$

$$= \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

Sabendo que $sen^2\alpha + cos^2\ \beta = 1$, temos:

$$a^2b^2 + 2abcdsen\ \alpha.sem\ \beta - 2abcdcos\ \alpha.cos\ \beta + c^2d^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcdsen\ \alpha.sem\ \beta - 2abcdcos\ \alpha.cos\ \beta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd(cos\ \alpha.cos\ \beta - sen\ \alpha.sen\ \beta) = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd(2cos^2\ \theta - 1) = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 - 4abcdcos^2\ \theta + 2abcd = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd - 4abcdcos^2\ \theta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

$$(ab + cd)^2 - 4abcdcos^2\ \theta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} + 4(ABCD)^2$$

Dividindo por 4, temos:

$$\frac{\left(ab+cd\right)^2}{4} - abcdcos^2\ \theta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} + (ABCD)^2$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(ab+cd)^2}{4} - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - abcdcos^2\ \theta$$

$$(ABCD)^2 = \frac{4(ab+cd)^2}{16} - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - abcdcos^2\,\theta$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{4(ab+cd)^2}{16} - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}\left[4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}\left[(2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.\left[(2ab+2cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\right].\left[(2ab+2cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.\left[2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right].\left[2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.\left[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)\right].\left[(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right].\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right] - abcd.cos^2\,\theta}$$

Fatorando por diferença de quadrados

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.(a+b+c-d).(a+b-c+d).(c+d+a-b).(c+d-a+b) - abcd.cos^2\,\theta}$$

$$(ABCD) = \sqrt{\frac{1}{16}.(c+d-a+b).(c+d+a-b).(a+b-c+d).(a+b+c-d) - abcd.cos^2\,\theta}$$

Note que:

$(b+c+d-a)=2.(p-a)$ $\quad$ $(a+c+d-b)=2.(p-b)$

$(a+b+d-c)=2.(p-c)$ $\quad$ $(a+b+c-d)=2.(p-d)$

Substituindo, temos:

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.2(p-a).2(p-b).2(p-c).2(p-d)-abcd.\cos^2\theta}$$

$$(ABCD)=\sqrt{\frac{1}{16}.16.(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)-abcd.\cos^2\theta}$$

Simplificando, temos a fórmula da área do quadrilátero qualquer.

$$(ABCD)=\sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d)-abcd.\cos^2\theta}$$

Assim conseguimos demonstrar a fórmula da área de um quadrilátero qualquer.

6. A RAMPA DE SKATE DO TEMPO MÍNIMO

O artigo da Revista do Professor de Matemática, número 59, de autoria de José Luiz Pastores Mello, relata uma situação problema envolvendo a rampa de tempo mínimo em uma aplicação para a construção da rampa em uma modalidade para skate.

Para a confecção de uma pista de skate em forma de *U*, conhecida por Half Pipe. Essas rampas são feitas de compensado naval, um tipo de madeira bastante resistente.

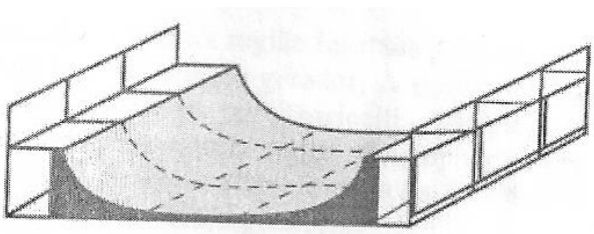

Figura 49

Em geral, a pista é composta por uma parte central plana e dois arcos de circunferência nas laterais, como se vê no projeto indicado na figura 49.

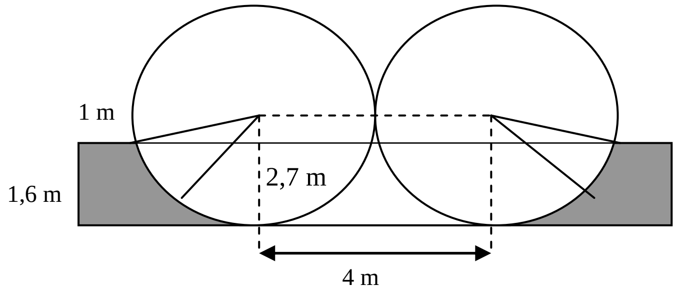

Figura 50

Em competições de vertical, os skatistas são avaliados segundo critérios de criatividade e grau de dificuldade das manobras. Desta forma, quanto menos tempo o skatista gasta percorrendo a extensão da rampa, mais tempo lhe sobrará para executar as manobras aéreas que contam ponto.

Dada a importância em fazer o percurso da rampa no menor tempo possível, poderíamos nos perguntar se a circunferência que compõe a lateral da rampa é de fato, a curva do tempo mínimo de descida, melhor ainda, qual deve ser a forma da curva para que o tempo de descida seja o menor possível?

O problema da curva de tempo mínimo ligando dois pontos de alturas diferentes é conhecido como braquistócrona, termo que vem do grego, *brachisto*, o mais breve, e *chronos*, tempo.

Johann Bernoulli, a que tudo indica, propôs esse problema pela primeira vez em junho de 1690 na revista *Acta Eruditorum*, fundada por Leibniz. Leibniz resolveu logo que chegou a redação e somente depois de seis meses outros matemáticos resolveram, como o irmão de Johann, Jakob Bernoulli, L'Hospital, Huygen e Newton.

A curva que resolve o problema da braquistócrona é chamada cicloide, nome dado por Galileu, pois havia se interessado por outras propriedades no início de 1600.

A cicloide é a trajetória descrita por um ponto de uma circunferência de raio R quando essa roda, sem deslizar, sobre uma reta.

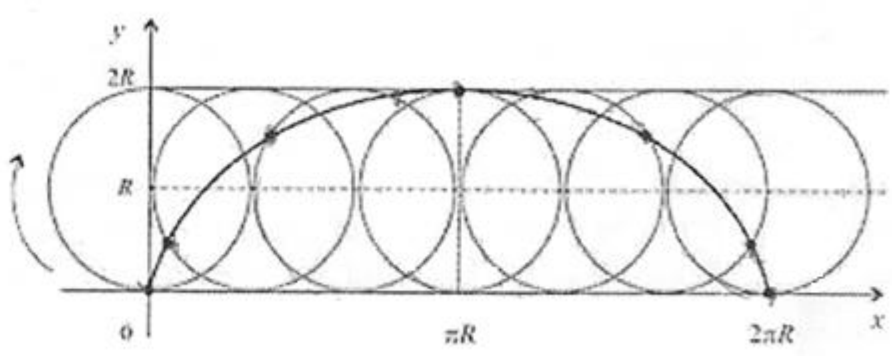

Figura 51

Outro interessante problema que envolve a cicloide como solução é o da tautócrona, ou tempo igual. Se soltarmos duas esferas simultaneamente de alturas diferentes em uma rampa cicloidal, as duas chegarão ao ponto mais baixo da rampa no mesmo tempo.

MODELAGEM MATEMÁTICA DA RAMPA DE TEMPO MÍNIMO

Sendo a cicloide a curva do tempo mínimo, vamos parametrizar a curva.

Em uma circunferência de raio R, que "rola sem escorregar" sobre o eixo das abscissas, marcamos um ponto P, cuja trajetória será uma cicloide. A figura indica a situação descritas sendo (AO, OE) as coordenadas do ponto P.

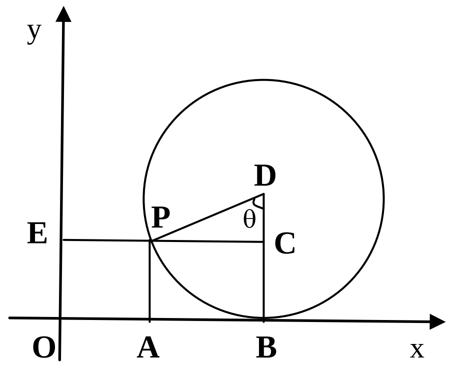

Figura 52

Admitindo que, na situação inicial, P coincide a origem do sistema de eixos, a medida do arco PB é igual a $\theta.R$ e coincide com a medida do segmento OB.

Do triângulo CDP, temos:

$$sen\theta = \frac{PC}{PD} \Rightarrow PC = PD.sen\theta \Rightarrow PC = R.\ sen\theta\ e$$

$$cos\,\theta = \frac{DC}{PD} \Rightarrow DC = PD.cos\theta \Rightarrow DC = R.\ cos\theta$$

Sendo $AO = OB - AB$ ou ainda $AO = PB = PC$ então $AO = \theta.R - R.sen\theta$ e $OE = DB - DC \Rightarrow OE = R - R.cos\theta$.

Logo, as coordenadas de $P = (x, y)$ em função do parâmetro θ, são:

$$\begin{cases} x = R.(\theta - sen\theta) \\ y = R.(1 - cos\,\theta) \end{cases}$$

Um ciclo completo da trajetória de P inicia com coordenadas (0, 0), atinge ordenada máxima em $(\pi.R, 2.R)$ e termina com coordenadas $(2\pi.R, 0)$.

Do projeto da rampa da figura 50, se substituímos os arcos de circunferência por arcos de cicloide, teremos uma rampa de tempo mínimo ligando um ponto de altura 1,60 metro e outro a zero metro, melhorando a eficiência da rampa para as competições de vertical.

Equacionando a nova planta de rampa em um sistema de coordenadas, como θ (em radianos) no eixo das abscissas, teremos:

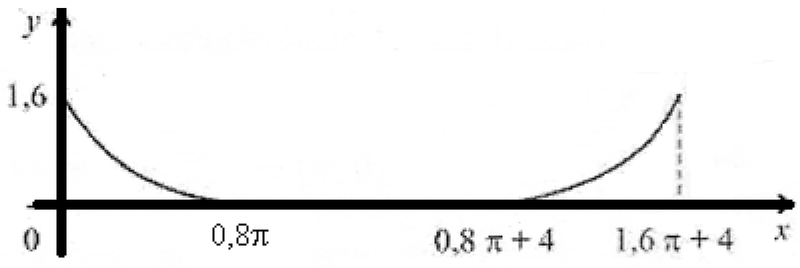

Figura 53

Partindo de uma cicloide como a da figura 51, obtivemos a curva da figura 53 da seguinte forma:

a) Adotando R = 0,8, a equação paramétrica da curva da figura 51 será:

$$\begin{cases} x = 0{,}8.(\theta - sen\theta) \\ y = 0{,}8.(1 - cos\,\theta) \end{cases}$$

b) Fazendo uma reflexão dessa curva pelo eixo das abscissas, obtém-se uma nova curva de equação:

$$\begin{cases} x = 0{,}8.(\theta - sen\theta) \\ y = -0{,}8.(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

c) Transladando a nova curva 1,6 unidade para cima, obtém-se uma curva de equação:

$$\begin{cases} x = 0{,}8.(\theta - sen\theta) \\ y = 1{,}6 - 0{,}8.(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

d) Pelo eixo vertical de simetria da nova curva, translada-se apenas o semicírculo do lado direito 4 unidades para a direita.

Parametrizando somente as duas curvas indicadas na figura 53, temos:

$$\begin{cases} x = 0{,}8.(\theta - sen\theta) \\ y = 1{,}6 - 0{,}8.(1 - \cos\theta) \end{cases}$$, para θ no intervalo [0; π]

$$\begin{cases} x = 4 + 0{,}8.(\theta - sen\theta) \\ y = 1{,}6 - 0{,}8.(1 - \cos\theta) \end{cases}$$, para θ no intervalo [π; 2π].

CONCLUSÃO

No presente trabalho realizei um estudo das aplicações da trigonometria devido à necessidade de se ter um material de apoio para enriquecer e dinamizar as aulas, considerando que na abordagem desse tema os problemas de aplicação não devem ser deixamos para o final, mas devem ser o motivo e o contexto para que o aluno aprenda funções trigonométricas, pois permitem que o ensino se estruture através dos muitos exemplos.

Realizar esse estudo sobre trigonometria contribuiu muito para a minha formação, pois pude me deparar com novos conhecimentos e diversas situações onde a trigonometria é aplicada. Exemplo disso foi na seção fórmulas, no capítulo um, apresentei uma maneira de expor as fórmulas de adição de arcos, bem diferente das que utilizo em sala, utilizando área de triângulos, o que pra mim foi uma novidade, a ideia de Aristarco que além de perfeita é simples, mostrando que ideias inovadoras não necessitam ser engenhosas.

No capítulo três apresentei situações problemas que são resolvidos com um algebrismo não tão complicado para aplicar a trigonometria em sala de aula, um fato disso é o problema de medir o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio, pois resolvia de forma longa e complicada e pude aprender uma solução mais clara e simples.

Outro exemplo que posso citar é a aplicação do observador da estátua, que achava um problema de difícil solução para propor aos alunos e que após o trabalho pude constatar que sua resolução é fácil usando apenas relações entre lados e ângulos de triângulos. A fórmula de Heron para o cálculo da área do quadrilátero foi pra mim algo inusitado. O artigo que trata da rampa de skate de menor tempo era um conceito que eu não conhecia que entre várias curvas existia uma de tempo mínimo.

Uma relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às suas aplicações. Especialmente para o aluno que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que devem ser asseguradas são as aplicações, garantindo a compreensão da Matemática como ciência (BRASIL, PCN Ensino Médio, p.44).

BIBLIOGRAFIA

[1] AVILA, GERALDO. **Aristarco e as dimensões astronômicas**. Revista do Professor de Matemática, nº 55, 2004, p. 1-10.

[2] AYRES JR, FRANK. **Trigonometria. Coleção Schaum**, Rio de Janeiro: Livro Técnico S.A., 1962.

[3] BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES. ***Geometria Euclidiana Plana*.** Coleção do Professor de Matemáticas – 4ª Ed, Rio de Janeiro. SBM, 1997.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental - **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO. **Trigonometria/ Números Complexos**. Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner, Coleção do Professor de Matemática – 3ª ed, Rio de Janeiro. SBM, 2005.

[6] IEZZI, GELSON. **Trigonometria: Coleção Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume *3*, 7ª Ed, Atual 1993.

[7] LIMA, ELON LAGES. **A Matemática do Ensino Médio** - volume 1. Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. Coleção do Professor de Matemática. 9ª Ed, Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[8] LIU, PAULINO. **Curiosidades**. Revista do Professor de Matemática, nº 36, 1998, p. 20-23.

[9] MACÊDO, AUGUSTO E CARLOS A. GOMES. **Heron para quadriláteros ...Brahmagupta**. Revista do Professor de Matemática, nº 64, 2007, p. 14-17.

[10] MELLO, JOSÉ LUIZ PASTORE. **Trigonometria e um Antigo Problema de Otimização.** Revista do Professor de Matemática, nº 52, 2003, p. 29-32.

[11] MELLO, JOSÉ LUIZ PASTORE. **A Rampa de Skate do Tempo Mínimo**. Revista do Professor de Matemática, nº 59, 2006, p. 9-15.

[12] PASTOR, ANTONIO LEONARDO P. **O problema do relógio**. Revista do Professor de Matemática. nº 11, 1987, p. 39-40.

[13] WAGNER, EDUARDO. **Usando áreas**. Revista do Professor de Matemática, nº 21, 1992, p. 22-25.