



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PAULO RICARDO QUARESMA

**APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO E NO ESTUDO DE
MERGULHOS MÉTRICOS**

FORTALEZA

2021

PAULO RICARDO QUARESMA

APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO E NO ESTUDO DE MERGULHOS
MÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Q26a Quaresma, Paulo Ricardo.
Aplicações de matrizes no ensino médio e no estudo de mergulhos métricos / Paulo Ricardo Quaresma. – 2021.
60 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso.

1. Mergulhos Métricos. 2. Álgebra Linear. 3. Matrizes. 4. Ensino Médio. I. Título.

CDD 510

PAULO RICARDO QUARESMA

APLICAÇÕES DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO E NO ESTUDO DE Mergulhos
MÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 15/01/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico esse trabalho a minha família que me apoiou e não me deixou desistir mesmo nas inúmeras dificuldades que apareceram durante esses anos de estudos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso por me orientar em minha dissertação.

Aos colegas de trabalho que me incentivaram na realização do ENA.

Aos professores do curso que lecionaram com incrível capacidade e competência.

A Simon Singh que com o seu livro "O último teorema de Fermat" sobre a trajetória do matemático Andrew Wiles, foi fonte de inspiração nessa empreitada de estudos.

Ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Tive o raro privilégio de poder perseguir em
minha vida adulta o que fora meu sonho de
infância.”

(Andrew Wiles)

RESUMO

A álgebra é sem dúvida um dos grandes alicerces do ensino de Matemática. Via de regra, esta matéria é apresentada em toda sua formalidade e na maioria das vezes sem o vislumbre de aplicações práticas no cotidiano. Na visão do alunato, esse tipo de lacuna didática pode gerar um bloqueio no aprendizado. Esse trabalho de dissertação de mestrado tem como um dos objetivos propor uma exposição sequencial de alguns dos principais tópicos estudados em álgebra, tanto no ensino médio como em um curso primário do ensino superior de Matemática. Em um primeiro momento, e em caráter motivacional, apresentaremos situações-problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares. Em seguida, faremos uma revisão teórica de temas elementares no ensino superior como, por exemplo, espaços vetoriais, espaços métricos e normados. O propósito principal desta dissertação, constada no Capítulo 4, versa sobre mergulhos métricos e suas motivações, um tópico de grande efervescência em pesquisa na área de Geometria Métrica nos anos recentes. Afim de viabilizar a compreensão desse tópico de estudo, a dissertação foi estruturada de modo a contemplar todos os requisitos necessários a isso. O resultado principal deste capítulo é um teorema sobre mergulhos isométricos de uma classe de espaços métricos limitados e separáveis em espaços de Banach contendo cópias isomorfas do espaço l_∞ .

Palavras-chave: Matemática. Álgebra. Métrica.

ABSTRACT

Algebra is undoubtedly one of the great foundations of the teaching of Mathematics. As a rule, this matter is presented in all its formality and most of the time without the glimpse of practical applications in everyday life. In the view of the student, this type of didactic gap can generate a block in learning. This master's thesis work aims to propose a sequential presentation of some of the main topics studied in algebra, both in high school and in a primary course in higher education in mathematics. At first, and motivational, we will present problem situations involving matrices and linear systems. Then, we will do a theoretical review of elementary themes in higher education, such as vector spaces, metric and standard spaces. The main purpose of this dissertation, contained in Chapter 4, deals with metric embedding and their motivations, a topic of great effervescence in research in the area of Metric Geometry in recent years. In order to facilitate the understanding of this topic of study, the dissertation was structured in order to contemplate all the necessary requirements for this. The main result of this chapter is a theorem about isometric embedding of a class of metric spaces limited and separable in Banach spaces containing isomorphic copies of the space ℓ_∞ .

Keywords: Algebra. Metric. Embedding.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ILUSTRAÇÕES DE APLICAÇÕES PRÁTICAS DE ÁLGEBRA LINEAR	11
2.1	Produto de Matrizes	11
2.2	Matriz Inversa	13
2.3	Potência de Matrizes	14
2.4	Sistema Linear	17
2.5	Fluxo de Tráfico	18
3	ESPAÇOS VETORIAIS, NORMADOS E MÉTRICOS	22
3.1	Espaços Vetoriais	22
3.1.1	<i>Exemplo 1</i>	22
3.1.2	<i>Exemplo 2</i>	24
3.1.3	<i>Exemplo 3</i>	28
3.2	Espaços Normados	30
3.2.1	<i>Norma Euclidiana</i>	30
3.2.2	<i>Norma</i>	32
3.2.3	<i>Norma da Soma</i>	33
3.2.4	<i>Norma do Máximo</i>	34
3.2.5	<i>Isomorfismo entre Espaços Normados</i>	35
3.2.6	<i>Espaços Isométricos</i>	36
3.3	Espaços Métricos	36
3.3.1	<i>Exemplos</i>	37
3.3.2	<i>Espaço de Sequências</i>	41
4	MERGULHOS MÉTRICOS	45
4.1	Espaço Métrico e Mergulhos	45
4.1.1	<i>Definição de Mergulho Métrico</i>	45
4.1.2	<i>Bioinformática</i>	46
4.1.3	<i>Espaço Euclidiano</i>	47
4.1.4	<i>Mapeamento de espaços métricos</i>	48
4.1.5	<i>Mergulhos em ℓ_∞</i>	50
4.2	Resultado Principal	52

REFERÊNCIAS	58
APÊNDICE A - FÓRMULAS EXTRAS	59

1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é traçar uma sequência didática para fundamentar o leitor com os requisitos básicos para a compreensão inicial do estudo sobre mergulhos métricos, ilustrando exemplos tanto no âmbito da ciência matemática quanto em ciências aplicadas em que há uma necessidade de lidar com uma enorme quantidade de dados, como em ciência da computação e áreas afins.

O segundo capítulo lida com exemplos de aplicações práticas que ilustram o uso da Álgebra Linear no cotidiano. Em tais exemplos, apresentaremos situações concretas que podem ser abordadas no ensino de nível médio, de forma contextualizada, principalmente com uso de matrizes, um conteúdo trabalhado normalmente de forma mecânica e repetitiva pelo professor em sala de aula.

O Capítulo 3 tem um caráter mais técnico, e destina-se ao estudo dos espaços ambientes para os que desejam desenvolver o estudo de mergulhos métricos. Nele, estudaremos os conceitos clássicos de espaços vetoriais, espaços normados e, mais geralmente, espaços métricos. Nessa perspectiva, revisaremos também várias propriedades conhecidas de tais espaços, expondo inclusive vários exemplos usualmente considerados nos cursos de ensino superior de Matemática, portanto, proporcionando ao leitor um acesso didático-metodológico favorável à compreensão do capítulo seguinte.

No último capítulo, Capítulo 4, após termos previamente estabelecido todos os pré-requisitos, iniciaremos nosso estudo sobre mergulhos métricos. Inicialmente, apresentaremos alguns exemplos que ilustram o uso e a importância de mergulhos métricos. Como motivação inicial, nosso primeiro exemplo aborda uma questão prática em bioinformática, cujo pano de fundo versa sobre a necessidade de se estabelecer uma correspondência unívoca de um espaço origem, com pouca informação métrica, em um espaço desejável, onde a análise de dissimilaridade pode ser realizada de forma mais precisa. Em seguida, partiremos para o resultado principal do capítulo que é um teorema publicado em 2018 que versa sobre mergulhos isométrico de uma classe de espaços métricos separáveis limitados, em espaços de Banach que contém cópias isomorfas do espaço ℓ_∞ .

2 ILUSTRAÇÕES DE APLICAÇÕES PRÁTICAS DE ÁLGEBRA LINEAR

Para explicar alguns termos matemáticos em sala de aula ou como ocorre em muitos livros didáticos é frequentemente conveniente ilustrar situações do cotidiano. Se o público alvo da sala de aula ou do livro didático é o nível básico, os exemplos devem ser simples o suficiente para não requerer nenhum conhecimento além do que é apresentado pelo professor. A seguir tomaremos alguns exemplos abordando o tema de Matrizes. Os exemplos abaixo ilustram o uso de matrizes e a eficiência de suas operações em análise de dados. Além disso, ilustraremos uma notação específica de matrizes na abordagem de fluxo de trânsito.

2.1 Produto de Matrizes

Três pessoas denotadas por P_1 , P_2 e P_3 pretendem comprar pães, salgados, tortas e bolos. Cada uma delas precisa desses produtos em diferentes quantidades que podem ser comprados em dois comércios distintos C_1 e C_2 . Que comércio deve ser o mais atrativo para cada uma das pessoas levando em conta o desejo de se pagar a menor quantia possível? Os preços individuais e a quantidade requerida de cada produto são apresentados nas tabelas abaixo:

Tabela 1 – Demanda da quantidade de alimentos

	pães	salgados	tortas	bolos
P_1	6	5	3	1
P_2	3	6	2	2
P_3	3	4	3	1

Tabela 2 – Valores unitários cobrados em cada comércio C_1 e C_2

	C_1	C_2
pães	1,50	1,00
salgados	2,00	2,50
tortas	5,00	4,50
bolo	16,00	17,00

Por exemplo, a quantia gasta pela pessoa P_1 no comércio C_1 é:

$$6 \cdot 1,5 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 16 = 9 + 10 + 15 + 16 = 50.$$

Observe que a mesma compra realizada no comércio C_2 fornece a seguinte operação numérica:

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 2,5 + 3 \cdot 4,5 + 1 \cdot 17 = 6 + 12,5 + 13,5 + 17 = 49.$$

Naturalmente, tem-se um processo similar para as demais pessoas. Notemos que esses cálculos podem ser descritos por meio de um produto de matrizes. Vejamos, seja \mathbf{D} a matriz de demanda e \mathbf{V} a matriz dos valores cobrados. Ou seja:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1,50 & 1,00 \\ 2,00 & 2,50 \\ 5,00 & 4,50 \\ 16,00 & 17,00 \end{bmatrix}$$

Se \mathbf{R} representa o produto entre as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{V} , então temos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 50 & 49 \\ 58,50 & 61 \\ 43,50 & 43,50 \end{bmatrix}.$$

Nessa matriz \mathbf{R} , as linhas representam o que cada pessoa P_i gastaria em cada comércio C_i . Assim, a primeira linha expressa a quantia necessária para que a pessoa P_1 desembolse no comércio C_1 (o elemento $r_{11} = 50$) e no comércio C_2 (o elemento $r_{12} = 49$). Analogamente, na segunda linha obtém-se os valores gastos pela pessoa P_2 , tanto no comércio C_1 (o elemento $r_{21} = 58,50$) quanto no comércio C_2 (o elemento $r_{22} = 61$), e assim sucessivamente. Consequentemente, podemos concluir que é mais rentável para a pessoa P_1 comprar no comércio C_2 . Enquanto que para a pessoa P_2 torna-se mais rentável realizar suas compras no comércio C_1 e, finalmente, observamos que a pessoa P_3 pagará o mesmo valor em ambos os comércios.

2.2 Matriz Inversa

Uma forma de enviar uma mensagem criptografada consiste em atribuir a cada letra do alfabeto um valor numérico característico. A seguir, ilustraremos como esse processo pode ser realizado com o uso de matrizes.

Na tabela abaixo temos um exemplo típico dessa associação:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	12	18	20	15	6	10	3	9	5	26	17	19	11	22	16	7	2	14	13	24	1	25	4	23	21

Por exemplo, vamos criptografar a palavra "FANTASIAS". Inicialmente, usamos a tabela acima para obtermos a associação numérica: "F → 6", "A → 8", etc. Então, usamos uma matriz de ordem 3 para dispô-los da esquerda para direita, de três em três, a partir da primeira linha. Em geral, caso a quantidade de letras seja menor do que 9, então as entradas remanescentes devem ser preenchidas com zeros; mas, se for maior, então usa-se uma matriz de ordem 4 ou maior. Usando a letra **A** para designar a matriz codificada dessa palavra, têm-se então que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 13 & 8 & 14 \\ 9 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

A etapa seguinte do processo consiste em criptografar a matriz **A**. Para isso, usamos uma matriz arbitrária **C**, de mesma ordem que **A**, e não singular, ou seja, que admite inversa. Por exemplo, podemos escolher a seguinte matriz como chave de criptografia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para codificar a mensagem, realizamos a multiplicação da matriz **C** pela matriz **A**:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 0 \cdot 13 + 1 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 8 & 1 \cdot 11 + 0 \cdot 14 + 1 \cdot 14 \\ 0 \cdot 6 + 2 \cdot 13 + 0 \cdot 9 & 0 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 8 & 0 \cdot 11 + 2 \cdot 14 + 0 \cdot 14 \\ 1 \cdot 6 + 0 \cdot 13 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 11 + 0 \cdot 14 + 2 \cdot 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 25 \\ 26 & 16 & 28 \\ 24 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Portando, o receptor da mensagem criptografada irá visualizar a matriz \mathbf{Z} . Afim de compreender o significado da mensagem original, ele necessitará da chave de criptografia para decodificá-la. O processo de decodificação é realizado a partir da multiplicação da matriz \mathbf{Z} pela matriz inversa de \mathbf{C} à esquerda:

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 16 & 25 \\ 26 & 16 & 28 \\ 24 & 24 & 39 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Como a multiplicação de matrizes não é comutativa, é necessário manter a ordem das matrizes no produto. Note que se a multiplicação das matrizes \mathbf{C}^{-1} e \mathbf{Z} ocorresse em ordem oposta, então teríamos obtido a seguinte mensagem:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 25 \\ 26 & 16 & 28 \\ 24 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 24 & 8 & 2 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Fazendo a decodificação de acordo com a tabela de associação numérica, a mensagem teria o significado de "JAGUARIBE", uma palavra completamente diferente da palavra "FANTASIAS", que foi enviada criptografada no início do exemplo.

2.3 Potência de Matrizes

Neste exemplo, ilustraremos como o produto de matrizes ou, mais especificamente, potência de matrizes, pode ser interpretado em situações do cotidiano. Inicialmente, usaremos matrizes para representar o envio de informações entre pares de pessoas.

Considere um grupo de n -pessoas P_1, \dots, P_n . Por definição, se a pessoa P_i enviar informações para a pessoa P_j , então simbolizaremos essa comunicação por $a_{ij} = 1$, caso contrário poremos simplesmente $a_{ij} = 0$ (e por conveniência, colocaremos $a_{ii} = 0$,

para significar que uma pessoa não envia informações para ela própria). Doravante, usaremos a notação $P_i \rightarrow P_j$ para denotar o fato que P_i pode enviar informações para P_j e também usaremos a notação \wedge para indicar que determinada pessoa P_j ao receber informações da pessoa P_i , enviará em seguida essas informações para a próxima pessoa P_k .

Assim, de acordo com a definição acima, temos como exemplo a seguinte representação matricial

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analisando a matriz \mathbf{A} , nota-se que há envio de mensagem ou informações entre os seguintes pares de pessoas: $P_1 \rightarrow P_2$, $P_1 \rightarrow P_4$, $P_2 \rightarrow P_3$, $P_3 \rightarrow P_1$, $P_3 \rightarrow P_4$, $P_4 \rightarrow P_1$, $P_4 \rightarrow P_2$. Como $P_1 \rightarrow P_4$ e $P_4 \rightarrow P_1$, é óbvio que P_1 e P_4 conseguem enviar informações diretamente de um para o outro.

Agora será analisado a matriz \mathbf{A}^2 :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotando os elementos de \mathbf{A}^2 por $(a^2)_{ij}$, obtém-se por exemplo que

$$(a^2)_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{34}a_{42} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

Esse resultado informa que a pessoa P_3 consegue enviar informações para P_2 em dois estágios, de duas maneiras distintas:

$$P_3 \rightarrow P_1 \wedge P_1 \rightarrow P_2 \text{ (por causa que } a_{31}a_{12} = 1 \text{)}$$

$$\text{e, } P_3 \rightarrow P_4 \wedge P_4 \rightarrow P_2 \text{ (por causa que } a_{34}a_{42} = 1 \text{)}$$

Similarmente, como $(a^2)_{14} = 0$, não é possível enviar mensagens de P_1 para P_4 em dois estágios, mas é possível enviar mensagens diretamente, por causa que $a_{14} = 1$ e diferente da matriz \mathbf{A} , observamos que a diagonal da matriz \mathbf{A}^2 é não-nula. Isso significando, nesse caso que as pessoas P_1 e P_4 podem enviar mensagens para algumas das outras pessoas e receberem de volta a mensagem. Consequentemente, os elementos $(a^2)_{ij}$ informa os números de maneiras em que uma pessoa P_i pode enviar informações para P_j em dois estágios.

Analogamente, os elementos $(a^3)_{ij}$ representam os números de maneiras que uma pessoa P_i pode enviar informações para P_j em três estágios:

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como por exemplo:

$$(a^3)_{32} = (a^2)_{31}(a^2)_{12} + (a^2)_{32}(a^2)_{22} + (a^2)_{33}(a^2)_{32} + (a^2)_{34}(a^2)_{42} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

Portanto, temos duas maneiras de enviar informações de P_3 para P_2 em três estágios:

$P_3 \rightarrow P_4 \wedge P_4 \rightarrow P_1 \wedge P_1 \rightarrow P_2$, por causa que

$$(a^2)_{31}a_{12} = (a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} + a_{34}a_{41})a_{12} = (0 + 0 + 0 + 1) \cdot 1 = 1.$$

e, $P_3 \rightarrow P_1 \wedge P_1 \rightarrow P_4 \wedge P_4 \rightarrow P_2$, por causa que

$$(a^2)_{34}a_{42} = (a_{31}a_{14} + a_{32}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44})a_{42} = (1 + 0 + 0 + 0) \cdot 1 = 1.$$

Em geral, o número de maneiras que P_i consegue enviar informações para P_j no máximo em k -estágios é dado pra elementos da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^k$. Consequentemente, pode-se deduzir a matriz \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Nessa nova matriz, por exemplo, $b_{32} = 4$ informa que existe quatro maneiras da pessoa P_3 enviar informações para P_2 no máximo em três estágios.

2.4 Sistema Linear

Três pessoas denotadas por P_1 , P_2 e P_3 organizam-se em uma sociedade simples e fechada que produz três mercadorias z_1 , z_2 e z_3 . Cada pessoa vende e compra dos outros membros. Tudo que eles produzem são consumidos por eles próprios, nenhuma outra mercadoria entra na sociedade (um “modelo fechado”). A proporção que os produtos são consumidos por cada um é dado pela seguinte tabela:

Tabela 3 – Tabela de consumo dos produtos

	z_1	z_2	z_3
P_1	0,6	0,2	0,3
P_2	0,1	0,7	0,2
P_3	0,3	0,1	0,5

Por exemplo, a primeira coluna da lista nos diz que 60% da produção da mercadoria z_1 , é consumida pela pessoa P_1 ; 10% pela pessoa P_2 e 30% por P_3 . Além disso, é óbvio que a soma dos elementos de cada coluna é igual a 1.

Representemos por x_1 , x_2 e x_3 , o valor respectivamente de cada mercadoria. Assim, a quantia gasta pela pessoa P_1 com z_1 , z_2 e z_3 equivale a $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$. Usaremos como hipótese que o valor consumido por cada pessoa P_i será igual ao preço do produto z_i , que nos conduz a seguinte equação $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 = x_1$, similarmente para as outras pessoas. Obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 = x_1 \\ 0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,2x_3 = x_2 \\ 0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,5x_3 = x_3 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser reescrito na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Além disso, assumiremos que os valores consumidos são não-negativas, i.e. $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$ (denotaremos $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$). Podemos reescrever essa equação na forma equivalente $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,5 & 0 \end{array} \right]$$

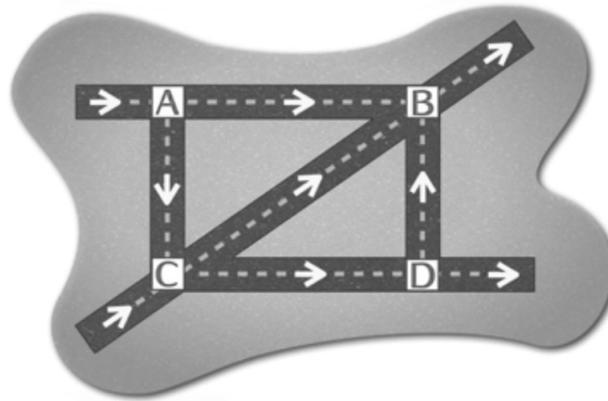
Uma solução arbitrária para o sistema é da forma $x = k(13, 11, 10)^T$ e $x \geq 0$ para $k \geq 0$. Portanto, para assegurar que essa sociedade seja sustentável, as pessoas P_1 , P_2 e P_3 terão que ter os seus rendimentos na proporção 13:11:10.

2.5 Fluxo de Tráfico

Na elaboração de questões, principalmente em matemática, é importante que situações-problema sejam pautadas em assuntos da realidade, no intuito de engajar o aluno tanto na necessidade de atenção quanto também nos métodos para a sua resolução.

No exemplo a seguir, lidaremos com o cálculo do fluxo de veículos, comprovando assim como as ferramentas algébricas são úteis para o seu entendimento, como também lidaremos com escalonamentos e a apresentação de uma situação com variável livre. Assim, na situação hipotética ilustrada abaixo temos a seguinte malha viária:

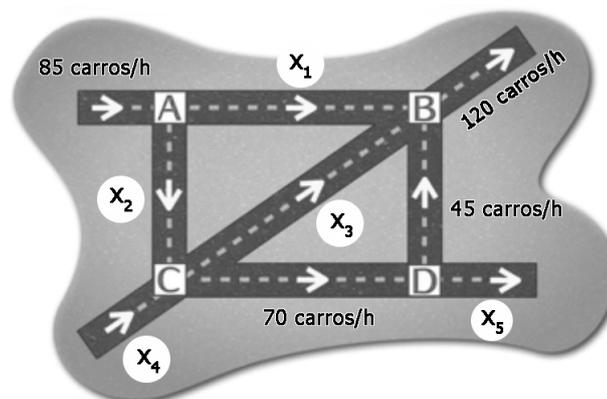
Figura 1 – Malha viária



Fonte: adaptado de MTH309

Em uma determinada parte da malha viária, observamos os cruzamentos A, B, C e D . A empresa responsável pelo monitoramento do tráfego de veículos deseja quantificar o fluxo de entrada e saída de veículos. Um levantamento inicial fornece os valores 85, 120, 45 e 70 conforme ilustrado na figura abaixo. Para os valores desconhecidos, usaremos as seguintes designações x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 .

Figura 2 – Malha viária com valores iniciais



Fonte: adaptado de MTH309

Levaremos em conta a direção das setas que representa os sentidos de tráfego que os veículos devem percorrer em cada rua. Como estamos lidando com um sistema fechado de tráfego, a quantidade de automóveis que entra e sai do sistema é sempre a mesma e se aplica a todos os cruzamentos (na contabilidade do fluxo, não levaremos em conta os semáforos, nem os automóveis das residências em torno das ruas).

Portanto, a primeira percepção é que o fluxo de entrada e saída de automóveis na malha viária é representado pela equação $85 + x_4 = 120 + x_5$. Analisando o cruzamento *A* temos a igualdade $85 = x_1 + x_2$. Já o cruzamento *B* fornece a equação $x_1 + x_3 + 45 = 120$. Finalmente, os cruzamentos *C* e *D* fornecem, respectivamente, as seguintes equações $x_2 + x_4 = x_3 + 70$ e $70 = 45 + x_5$.

De posse dessas equações, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 85 + x_4 = 120 + x_5 \\ 85 = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + 45 = 120 \\ x_2 + x_4 = x_3 + 70 \\ 70 = 45 + x_5 \end{cases}$$

Que será melhor de trabalhar da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_4 - x_5 = 35 \\ x_1 + x_2 = 85 \\ x_1 + x_3 = 75 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 70 \\ x_5 = 25 \end{cases}$$

Donde obtém-se a seguinte matriz expandida:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array} \right]$$

Fazendo a redução por linhas, teremos:

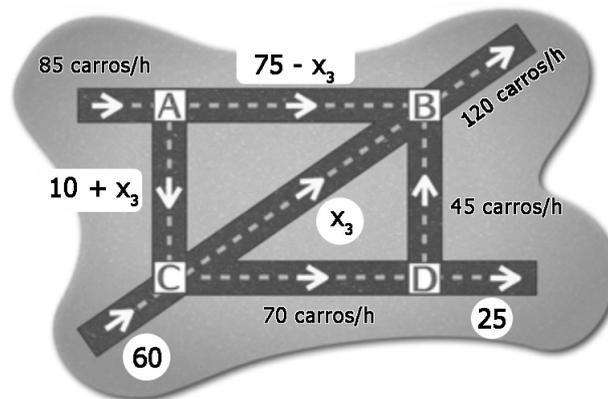
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Logo, teremos o seguinte sistema solução:

$$\begin{cases} x_1 = 75 - x_3 \\ x_2 = 10 + x_3 \\ x_3 = \text{variável livre} \\ x_4 = 60 \\ x_5 = 25 \end{cases}$$

Usando as nossas soluções na malha rodoviária, teremos:

Figura 3 – Malha viária com variável livre



Fonte: adaptado de MTH309

Assim descobrimos o valor de uma entrada e uma saída, e as que faltaram são todas dependentes da variação da rua transversal x_3 que vai do cruzamento C para B .

3 ESPAÇOS VETORIAIS, NORMADOS E MÉTRICOS

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos sobre espaços vetoriais, normados e métricos, vistos normalmente nos cursos de ensino superior de matemática, apresentando assim exemplos comuns, frequentemente empregados para o ensino inicial desses conteúdos em sala de aula.

3.1 Espaços Vetoriais

O objetivo dessa seção é definir a noção de espaços vetoriais, apresentar suas principais propriedades e também apresentar alguns exemplos.

Definição 3.1.1 *Consideraremos um corpo \mathbb{F} . Um espaço linear vetorial X é um conjunto de elementos (vetores) munido com duas operações:*

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$$

$$\mathbb{R} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \in X$$

De tal forma que as seguintes propriedades se verificam:

1. $x + y = y + x$ (*Comutatividade da soma*)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*Associatividade da soma*)
3. $\exists 0 \in X \rightarrow x + 0 = x$ (*Elemento neutro da soma*)
4. $\forall x \in X, \exists -x \in X \rightarrow x + (-x) = 0$ (*Inverso aditivo*)
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ou $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (*Distributividade*)
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (*Associatividade da multiplicação por escalar*)
7. $1x = x$ (*Elemento neutro da multiplicação por escalar*)

3.1.1 Exemplo 1

Para ilustrar de forma clara os métodos empregados para comprovação que determinado espaço é um espaço vetorial, usaremos como exemplo o \mathbb{R}^3 no espaço euclidiano. Um elemento de \mathbb{R}^3 é um vetor da forma $u = (x_1, x_2, x_3)$. Os valores x_1 , x_2 e x_3 são chamados de coordenadas do vetor u (ou componentes). Dados vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos as seguintes operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Demonstraremos em seguida que o espaço \mathbb{R}^3 munido com as operações definidas acima é um espaço vetorial. Fazemos u e v como acima:

1. Comutatividade da soma

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = v + u \end{aligned}$$

2. Associatividade da soma

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) = (u + v) + w \end{aligned}$$

3. Elemento neutro da soma

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow u + (0, 0, 0) &= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) \\ &= (x_1, x_2, x_3) = u \end{aligned}$$

4. Inverso aditivo $\forall u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \exists -u = (-x_1, -x_2, -x_3) \in X$

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

5. Distributividade

$$\begin{aligned} \alpha(u + v) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3) \\ &= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3) = \alpha u + \alpha v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)u &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) = \alpha u + \beta u \end{aligned}$$

6. Associatividade da multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3) \\ &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \alpha\beta x_3) \\ &= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) = \alpha(\beta u) \end{aligned}$$

7. Elemento neutro da multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} 1u &= 1(x_1, x_2, x_3) \\ &= (1x_1, 1x_2, 1x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) = u \end{aligned}$$

Naturalmente, o fato determinante na exposição acima é a estrutura de corpo do conjunto dos números reais, usado em cada coordenada vetorial. Logo, fica demonstrado que \mathbb{R}^3 define um espaço vetorial.

3.1.2 Exemplo 2

O conjunto das matrizes reais $m \times n$, denotado por $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, com a operação de adição entre matrizes e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial, ou seja, sobre o corpo dos números reais. Ilustraremos, como exemplo, a verificação de como o conjunto das matrizes de dimensão 2×2 , $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, satisfaz as condições de espaço vetorial.

Primeiramente definiremos a soma de matrizes. Considere \mathbf{A} e \mathbf{B} matrizes 2×2 . Pela definição de adição entre matrizes temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Logo, o resultado da adição de duas matrizes 2×2 continua sendo uma matriz 2×2 . Agora tome \mathbf{A} uma matriz 2×2 e α um escalar real. Pela definição de multiplicação de matriz por escalar temos:

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

Logo, a multiplicação de uma matriz 2×2 por um escalar real continua sendo uma matriz 2×2 . Agora iremos mostrar que as operações usuais indicadas acima satisfazem as propriedades que definem um espaço vetorial.

1. Comutatividade da soma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

2. Associatividade da soma:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})
 \end{aligned}$$

3. Elemento neutro da soma. Considere a matriz quadrada nula $\mathbf{0}_{2 \times 2}$, assim teremos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} + \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

4. Inverso aditivo. Para cada matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ existe uma matriz,

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \text{ tal que:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

5. Distributividade:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\mathbf{A} &= (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)a_{11} & (\alpha + \beta)a_{12} \\ (\alpha + \beta)a_{21} & (\alpha + \beta)a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{11} & \alpha a_{12} + \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta a_{21} & \alpha a_{22} + \beta a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}
\end{aligned}$$

6. Associatividade da multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\mathbf{A} &= (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & (\alpha\beta)a_{12} \\ (\alpha\beta)a_{21} & (\alpha\beta)a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} (\beta a_{11}) & (\beta a_{12}) \\ (\beta a_{21}) & (\beta a_{22}) \end{bmatrix} = \alpha(\beta\mathbf{A})
\end{aligned}$$

7. Elemento neutro da multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} 1\mathbf{A} &= 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

Como o conjunto das matrizes 2×2 reais satisfazem as condições estabelecidas pelas 7 propriedades características, demonstramos que ele é um espaço vetorial.

3.1.3 Exemplo 3

Consideraremos um dado conjunto $\mathbb{R}^n = \{u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n\}$, no espaço euclidiano n -dimensional, munido com as operações de adição definida por:

$$u + v = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

forma um espaço vetorial real. Como o \mathbb{R}^3 , exemplificado anteriormente na Subseção 3.1.1, é um caso especial do \mathbb{R}^n , usaremos a mesma metodologia para confirmarmos que o conjunto apresentado acima é um espaço vetorial real.

1. Comutatividade da soma. Tomando $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, temos:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= v + u \end{aligned}$$

2. Associatividade da soma. Tomando $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $w = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, temos:

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= u + (v + w)\end{aligned}$$

3. Elemento neutro da soma

$$\begin{aligned}u + m = u &\Leftrightarrow (x_1 + m_1, x_2 + m_2, \dots, x_n + m_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\Leftrightarrow x_i + m_i = x_i, (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow m_i = 0, (1 \leq i \leq n)\end{aligned}$$

Logo $m = (0, 0, \dots, 0)$ é o vetor nulo $\in \mathbb{R}^n$

4. Inverso aditivo. Para cada $u \in \mathbb{R}^n$ existe $-u$, tal que $u + (-u) = (0, 0, \dots, 0)$.

$$\begin{aligned}u + v = (0, 0, \dots, 0) &\Leftrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (0, 0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow x_i + y_i = 0, (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow y_i = -x_i, (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow v = -u\end{aligned}$$

5. Distributividade. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}\alpha(u + v) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) \\ &= \alpha u + \alpha v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)u &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \dots, (\alpha + \beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) \\ &= \alpha u + \beta u\end{aligned}$$

6. Associatividade da multiplicação por escalar

$$\begin{aligned}
 (\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \dots, \alpha\beta x_n) \\
 &= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \dots, \alpha(\beta x_n)) \\
 &= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) \\
 &= \alpha(\beta u)
 \end{aligned}$$

7. Elemento neutro da multiplicação por escalar. Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 \alpha u = u &\Leftrightarrow \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\Leftrightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\Leftrightarrow \alpha x_i = x_i, (1 \leq i \leq n) \\
 &\Leftrightarrow \alpha = 1
 \end{aligned}$$

3.2 Espaços Normados

O objetivo dessa seção é introduzir a definição de normas e estabelecer algumas de suas propriedades. Além do mais, recordaremos a noção de normas equivalentes e apresentaremos alguns exemplos de espaços normados.

3.2.1 Norma Euclidiana

Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, um espaço vetorial munido com um produto interno usual, definimos a norma euclidiana da seguinte forma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

A norma euclidiana associa cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ o número real $\|x\|$ e podemos interpretar geometricamente $\|x\|$ a grosso modo com o "comprimento" do vetor x . Assim, partindo de sua definição podemos ter a seguinte afirmação:

$$\|x\|^2 = x \cdot x$$

A norma euclidiana goza das seguintes propriedades, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. É definida positiva: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. É homogênea: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. É subaditiva: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Provaremos a seguir cada uma dessas propriedades:

1. Pela própria definição de norma temos:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0$$

e ainda temos:

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow 0 = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = x \cdot x \\ &\Leftrightarrow 0 = x \end{aligned}$$

2. Tomemos:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{\alpha x \cdot \alpha x} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x \cdot x} \\ &= |\alpha| \sqrt{x \cdot x} = |\alpha| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

3. Inicialmente, observamos que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Por causa da primeira propriedade da norma que provamos, nessa inequação possuímos somente termos não-negativos, implicando que:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3.2.2 Norma

Pelo uso frequente em aulas iniciais nos cursos de Álgebra, a norma euclidiana é apresentada como exemplo principal, mas ela é somente um caso particular da norma, agora definiremos de forma geral o que será tratado como norma.

Definição 3.2.1 *Seja E um espaço vetorial qualquer. Uma **norma** em E é uma função real*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

Que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$

Diz-se que o par $(E, \|\cdot\|)$ define um **espaço vetorial normado**, **espaço linear normado**, ou simplesmente, **espaço normado**.

Proposição 3.2.1 *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em E . Então, $\forall x, y \in E$ tem-se*

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$$

Para demonstrarmos essa proposição, usaremos a propriedade subaditiva da norma, mas notaremos primeiro que:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - y) + y\| \\ &= \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Analogamente, também teremos:

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|(y - x) + x\| \\ &= \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \\ \|y\| - \|x\| &\leq \|y - x\| \\ \|x\| - \|y\| &\geq -\|x - y\|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, de (3.1) e (3.2) obtemos:

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Portanto

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Lema 3.2.1 *Toda norma é uma função uniformemente contínua (Vide Apêndice pag.59).*

Demonstração. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $\forall x, y \in E$ com $\|x - y\| < \delta$ tem-se pela proposição anterior.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

3.2.3 Norma da Soma

Trataremos agora de outros tipos de norma, iniciando pela norma da soma, além de apresentar a demonstração necessária para sua definição.

Definição 3.2.2 *Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a norma da soma da seguinte forma:*

$$\|x\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Verificaremos a seguir que essa função define de fato uma norma em \mathbb{R}^n .

1. Devemos verificar que a soma das normas é definida positiva:

$$\|x\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$$

Temos assim pela definição da norma da soma:

$$\begin{aligned} \|x\|_s &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \end{aligned}$$

Como essa soma possui somente termos em módulo, podemos concluir que:

$$\|x\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq 0$$

Precisamos ainda provar que:

$$\|x\|_s = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq n$$

Considerando o fato que a norma da soma é uma adição de termos não-negativos, se algum $|x_i| > 0$, então $\|x\|_s > 0$, pois não teremos termos negativos que possam anular valores positivos, logo:

$$\|x\|_s = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$$

2. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_s &= \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha| \cdot |x_i| \\ &= |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_s \end{aligned}$$

3. Por último, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_s &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\ &= |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \end{aligned}$$

Usando a seguinte desigualdade:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|,$$

logo,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_s &= |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &\leq \|x\|_s + \|y\|_s \end{aligned}$$

3.2.4 Norma do Máximo

Definição 3.2.3 Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a norma do máximo da seguinte forma:

$$\|x\|_{\max} = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}.$$

Para essa definição, verificaremos que a norma do máximo satisfaz as propriedades da norma, assim:

1. Pela definição da norma do máximo, temos $|x_i| \geq 0$ para todo $i, 2, \dots, n$,

logo

$$\|x\|_{\max} = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\} \geq 0$$

Agora verificaremos

$$\|x\|_{\max} = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0; 1 \leq i \leq n$$

Da definição da norma do máximo, sabemos que $|x_i| \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto para termos $\max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\} = 0$, precisamos que todos os termos $|x_i| = 0$.

2. Consideraremos $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, assim temos:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{\max} &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha \cdot x_i|\} \\ &= |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|_{\max} \end{aligned}$$

3. Dado $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\|x + y\|_{\max} = \max\{|x_i + y_i|; 1 \leq i \leq n\} = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\}$$

Usando a desigualdade $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$, temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\max} &= \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} \end{aligned}$$

Portanto

$$\|x + y\|_{\max} \leq \|x\|_{\max} + \|y\|_{\max}$$

3.2.5 Isomorfismo entre Espaços Normados

Nesta subseção, iremos relembrar a noção de espaços isomorfos;

Definição 3.2.4 Dizemos que dois espaços vetoriais normados com escalares em \mathbb{F} , ou seja, $(E_1, \|\cdot\|_1)$ e $(E_2, \|\cdot\|_2)$, são isomorfos, se existir uma aplicação $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$, denominada isomorfismo entre espaços normados E_1 e E_2 , tal que:

1. φ é bijetora,
2. φ é linear, isto é, $\forall x, y \in E_1$ e $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, temos, $\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$.
3. φ é bicontínua, isto é, φ e φ^{-1} são contínuas.

Exemplo 1 Considere o espaço c_0 munido com a norma

$$\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\| = \sup_{i \neq j} (|a_i| + |a_j|).$$

Então, $(c_0, \|\cdot\|)$ é isomorfo ao espaço c_0 munido com a norma usual do sup.

3.2.6 Espaços Isométricos

Nesta subseção iremos relembrar a definição de espaços isométricos.

Definição 3.2.5 Dizemos que dois espaços vetoriais normados, $(E_1, \|\cdot\|_1)$ e $(E_2, \|\cdot\|_2)$, são isométricos se existir um isomorfismo de espaços vetoriais normados $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que:

$$\forall x \in E_1, \|\varphi(x)\|_2 = \|(x)\|_1$$

3.3 Espaços Métricos

O objetivo dessa seção é definir a noção de espaços métricos, com ênfase em exemplos relacionados com espaços vetoriais normados. Apresentaremos exemplos de espaços métricos para uma melhor compreensão de suas propriedades, junto com os métodos usados para a sua caracterização.

Definição 3.3.1 Uma **métrica** em um conjunto X é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par (x, y) de elementos $x, y \in X$ um número real, denotado por $d(x, y)$, o qual chamamos de distância de x a y , de maneira que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in X$:

1. $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$ (Positividade)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade triangular)

Definição 3.3.2 Um espaço métrico é um par (X, d) , onde X é um conjunto e d é uma métrica em X .

Observação 3.1 (Normas definem métricas) Todo espaço normado é um espaço métrico. De fato, se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado então é fácil verificar que a função $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em X .

Definição 3.3.3 Um espaço métrico (M, d) é dito separável se possui um subconjunto denso e enumerável (Vide Apêndice pag. 59), ou seja, se existe $X \subset M$ enumerável com $\bar{X} = M$.

Definição 3.3.4 (MERCOURAKIS; VASSILIADIS, 2018) Um espaço métrico (M, d) é dito ser côncavo, quando a desigualdade triangular é estrita, i.e, quando $d(x, y) + d(y, z) > d(x, z)$ para quaisquer pares distintos de pontos $x, y, z \in M$.

Definição 3.3.5 (MERCOURAKIS; VASSILIADIS, 2018) Um espaço métrico (M, d) é dito ser fortemente côncavo se existe constante $c > 0$ tal que

$$d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) \geq c,$$

para quaisquer pontos $x, y, z \in M$, dois a dois distintos.

Proposição 3.3.1 Se (M, d) é fortemente côncavo e separável, então M é enumerável.

3.3.1 Exemplos

Exemplo 2 (A métrica zero-um) Qualquer conjunto X pode se tornar um espaço métrico de maneira simples. Para isto basta que a métrica esteja bem definida, por exemplo, defina $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Assim, provaremos as quatro propriedades que são satisfeitas pela métrica.

1. Essa propriedade é válida pela própria definição da métrica zero-um.
2. Essa propriedade também segue da definição, pois se $x \neq y$, então $d(x, y) = 1 \geq 0$.
3. No caso dessa propriedade, se $x = y$, então $d(x, y) = 0 = d(y, x)$, se por outro lado $x \neq y$, teremos $d(x, y) = 1 = d(y, x)$.
4. Agora para o caso da desigualdade triangular, se $x = y$, então teremos:

$$\begin{aligned}d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) = 0 + d(y, z) \\d(x, z) &\leq d(y, z)\end{aligned}$$

Pela suposição de $x = y$, então teremos:

$$\begin{aligned}d(x, z) &\leq d(x, z) \quad \text{logo} \\d(x, z) &= d(x, z)\end{aligned}$$

Satisfazendo a desigualdade triangular. Agora se $x \neq y$, então devemos considerar duas possibilidades: se $x \neq z$, então $d(x, y) = d(x, z) = 1$

$$d(x, z) = 1 \leq 1 + d(y, z)$$

Onde a desigualdade triangular é satisfeita independente de y , por outro lado, se $y \neq z$, então $d(x, y) = d(y, z) = 1$, logo

$$d(x, z) \leq 1 + 1 = 2$$

. Cumprindo a desigualdade, pois no máximo $d(x, z) = 1$

Exemplo 3 (A reta real \mathbb{R}) *Defini-se uma distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ através da função $d(x, y) = |x - y|$. Não é difícil mostrar que \mathbb{R} munido da métrica do exemplo anterior é um espaço métrico, ou seja (\mathbb{R}, d) é espaço métrico. De fato as quatro propriedades são satisfeitas através dos princípios de valores absolutos e da desigualdade triangulares.*

Exemplo 4 (O plano Euclidiano \mathbb{R}^2) *Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 , definimos a métrica nesse caso como $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.*

Provaremos que essa métrica satisfaz as propriedades que caracterizam um espaço métrico:

1. Se $x = y = (x_1, x_2)$, logo

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{0+0} &= 0 \end{aligned}$$

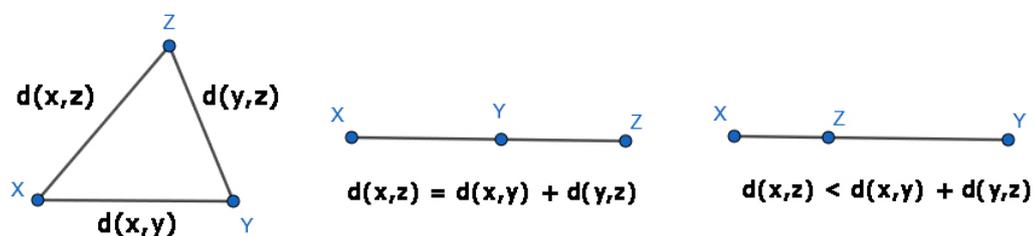
2. Se $x \neq y$, então $x_1 \neq y_1$ ou $x_2 \neq y_2$. Logo podemos afirmar que $(x_1 - x_1)^2 > 0$ ou $(x_2 - x_2)^2 > 0$ assim verificamos que $d(x, y) > 0$.

3. Para provar essa propriedade precisamos que $(x - y)^2 = (y - x)^2$, assim:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

4. Sejam x, y e $z \in \mathbb{R}^2$ pontos no plano euclidiano. Caso eles não estejam alinhados, teremos um triângulo, que satisfaz a desigualdade triangular. Caso estejam alinhados, teremos cada distância correspondendo a um único valor real (coordenada do ponto). Vejamos abaixo uma ilustração geométrica desses fatos:

Figura 4 – Representação da desigualdade triangular



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Exemplo 5 (O plano Euclidiano \mathbb{R}^n) Apresentaremos um exemplo de uma métrica para o espaço \mathbb{R}^n . Consideraremos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, com $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definimos a métrica nesse caso como:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Esta métrica não é a única métrica em \mathbb{R}^n . Em particular, por exemplo, poderíamos definir uma métrica zero-um. Além disso, de acordo com a Observação 3.1, toda norma em \mathbb{R}^n define uma métrica, logo temos as métricas advindas da norma da soma e da norma do máximo.

Veamos agora se d acima define realmente uma métrica em \mathbb{R}^n . Para isso, então devemos mostrar que d satisfaz as quatro propriedades que definem uma métrica.

1. Usando as definições dessa propriedade, temos:

$$\begin{aligned}
 d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0, (1 \leq i \leq n) \\
 &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0, (1 \leq i \leq n) \\
 &\Leftrightarrow x_i = y_i, (1 \leq i \leq n) \\
 &\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &\Leftrightarrow x = y
 \end{aligned}$$

2. Esta propriedade é óbvia, pois se trata de uma soma de termos não-negativos.

3. Usaremos de forma similar a prova para o plano euclidiano \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}
 d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\
 &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \\
 &= d(y,x)
 \end{aligned}$$

4. Provaremos essa propriedade utilizando a conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde ela nos diz:

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Portanto, para $a_i, b_i \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Isto implica que

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

e, portanto

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2$$

Tomaremos $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Temos assim:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}$$

que é exatamente

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

3.3.2 Espaço de Sequências

Nesta subseção iremos definir ℓ^∞ além de demonstrar a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Minkowski.

Definição 3.3.6 *Seja ℓ^∞ os espaços das seqüências limitadas de números complexos (ou reais). Isto é, se $x = (x_1, x_2, \dots) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, temos*

$$|x_k| \leq c, \forall k \in \mathbb{N}$$

Para definirmos a métrica, usaremos $y = (y_k)$, assim teremos (Vide Apêndice pag. 59)

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{|x_k - y_k|\}$$

Definição 3.3.7 *Vamos definir para $1 \leq p < \infty$, o conjunto $\ell^p = \{x_{k \in \mathbb{N}}; \sum |x_k|^p < \infty\}$.*

Para verificarmos que ℓ^p é um espaço métrico, será necessário que prove-mos as duas proposições abaixo.

Proposição 3.3.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (diz-se que p e q são expoentes conjugados). Então, para todo $x = (x_i) \in \ell^p$, $y = (y_i) \in \ell^q$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$ é absolutamente convergente e tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Para a demonstração dessa proposição, usaremos uma desigualdade auxiliar, assim, sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$ e $w \geq 0, v \geq 0$. Então vale a desigualdade:

$$w^\alpha v^\beta \leq \alpha w + \beta v.$$

Com efeito, se $w = 0$ (ou $v = 0$) a desigualdade é óbvia. Caso seja $v \neq 0$. Divida a desigualdade por v e tome $t = w/v \geq 0$, assim teremos:

$$\begin{aligned} \frac{(t \cdot v)^\alpha v^\beta}{v} &\leq \alpha t + \beta \\ t^\alpha \cdot v^{\alpha+\beta-1} &\leq \alpha t + \beta \\ t^\alpha &\leq \alpha t + \beta. \end{aligned}$$

Como $\beta = 1 - \alpha$ então,

$$\begin{aligned} t^\alpha &\leq \alpha t + 1 - \alpha \\ t^\alpha - \alpha t &\leq 1 - \alpha \end{aligned}$$

Consideraremos $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Provar a nossa desigualdade inicial equivale a mostrar que:

$$f(t) = t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha, \forall t \geq 0$$

De fato, analisando a derivada de f em relação a t , notaremos que $f'(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - 1)$, segue que, para $0 \leq t < 1$, f é estritamente crescente, para $t > 1$, f é estritamente decrescente e, para $t = 1$, f atinge seu ponto máximo, ou seja, $1 - \alpha$. Portanto, vale a desigualdade.

Agora, finalmente podemos provar a Desigualdade de Hölder. Note que se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é óbvia. Suponha então que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Seja $j \in \mathbb{N}$, fixo. Considere:

$$w = \frac{|x_j|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad v = \frac{|y_j|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}, \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{q}$$

Da desigualdade $w^\alpha v^\beta \leq \alpha w + \beta v$, segue que

$$\frac{|x_j y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}$$

Agora, somando para cada índice $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\frac{\sum_{j=1}^n |x_j y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}$$

Ou seja,

$$\frac{\sum_{j=1}^n |x_j y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposição 3.3.3 (Desigualdade de Minkowski) *Seja $1 \leq p < \infty$. Se $x = (x_i) \in \ell^p$, $y = (y_i) \in \ell^p$, então $x + y = (x_i + y_i) \in \ell^p$ e tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Para $p = 1$ a desigualdade de Minkowski é imediata. Suponha que $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e, pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^m |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

Vamos supor que $\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \neq 0$ e como $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$, segue que

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, a direita da desigualdade obtêm-se duas séries convergentes, pois $x, y \in \ell^p$. Assim, a série a esquerda também converge, ou seja, vale a desigualdade de Minkowski.

4 MERGULHOS MÉTRICOS

A área de mergulhos métricos teve um rápido desenvolvimento por volta dos anos 90, motivado com os desdobramentos vindos da ciência da computação. O estudo de mergulhos métricos que preservam distâncias é usado como uma poderosa ferramenta para a criação de algoritmos cada vez mais eficientes. O uso de mergulhos métricos é normalmente motivado pelo seguinte cenário: Tem-se um problema que se deseja estudar, mas não se dispõe de funções métricas capazes de fornecer boas informações de dissimilaridades. Então, tenta-se mergulhar o espaço métrico ambiente em um espaço métrico dotado de funções métricas com melhor performance.

Vamos discutir neste capítulo alguns espaços métricos familiares e suas diferenças, como também estudar o processo e o método de mapeamento desses espaços. Apresentaremos a definição de mergulhos métricos e como é o processo de “mergulhar” um espaço métrico em outro, além de expor alguns exemplos pontuais de mergulhos em ℓ_∞ .

Considerando todo o percurso pedagógico, desde o ensino médio, passando pelos principais espaços algébricos do ensino superior. Finalizaremos esse capítulo, tendo como ponto central a demonstração Teorema 4.2.1 publicado por Mercourakis e Vassiliadis em 2018.

4.1 Espaço Métrico e Mergulhos

Inicialmente, recordemos que um espaço métrico é simplesmente um conjunto M munido com uma função métrica $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Por métrica euclidiana, entende-se pela métrica induzida pela norma euclidiana no espaço de Euclides \mathbb{R}^n .

4.1.1 Definição de Mergulho Métrico

Partindo das definições formais de espaços métricos apresentados no Capítulo 3, teremos:

Definição 4.1.1 *Dado dois espaços métricos (X, ρ) e (Y, μ) uma função injetiva $f: X \rightarrow Y$ é chamada de mergulho métrico de X em Y . Dizemos ainda que f é uma isometria*

se f é sobrejetiva e preserva distâncias, ou seja

$$\mu(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Dizemos ainda que f é um mergulho isométrico se f é injetiva e preserva distâncias.

Observação 4.1 Um espaço de Banach é um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ cuja topologia induzida pela norma é completa, ou seja, no sentido de que toda sequência de Cauchy em X converge (BOTELHO et al., 2015).

Definição 4.1.2 Dizemos que um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ contém uma cópia isomorfa de um espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se existe um subespaço Z de X e um isomorfismo $T: Y \rightarrow Z$.

Muitos problemas práticos estão relacionados a espaços métricos e surgiram em várias disciplinas diferentes, principalmente visando a área computacional, como também estatística, máquinas de aprendizagem, para citar algumas. Para ilustrar a utilidade de mergulhos métricos, iniciaremos com um problema de bioinformática.

4.1.2 Bioinformática

Um dos objetivos da bioinformática é recolher e processar dados de genoma para estudar funções e estruturas das proteínas. Assim, informações como o DNA (Ácido desoxirribonucleico) ou RNA (Ácido ribonucleico) são normalmente representadas por sequências de números ou letras do nosso alfabeto. Depois de muitos anos de pesquisa, mais de meio milhão de proteínas diferentes foram descobertas com sequências conhecidas. Encontrar a similaridade de duas diferentes proteínas, permitindo determinar resultados úteis a partir de uma grande quantidade de dados brutos, é de fundamental importância e está relacionado a uma noção de distância. Portanto, um conjunto de dados estudados pela bioinformática pode ser pensado como um espaço métrico finito.

A seguir temos uma ilustração de um conjunto X formado por sequências

numéricas representando 5 cadeias de aminoácidos.

```

0110011000110011101
0100110010010011000
0110111011010001001
1001100011100011110
0100110001110001111

```

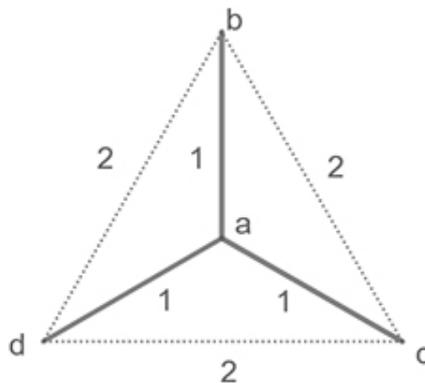
Podemos observar que as duas últimas linhas dessa sequência parecem bastante semelhantes. Comparando essas duas últimas linhas, percebe-se que manteve-se em ordem 15 elementos, mudando somente a posição do que seria o último elemento da 4ª linha se tornando o primeiro elemento da última linha. Poderíamos indagar sobre esse exemplo a seguinte questão “existe uma função f que mergulhe X para um plano com uma distância Euclidiana, mantendo as mesmas distâncias?”

4.1.3 Espaço Euclidiano

O mapeamento de um espaço métrico para um espaço euclidiano é de fundamental importância em vários contextos de estudos, mas conforme ilustraremos a seguir nem sempre é possível.

Recordemos que um grafo é um par (V, A) , onde V é o conjunto dos vértices do grafo e A o conjunto dos pares ordenados dos vértices do grafo, chamado de arestas. Seja dado grafo $X = (V, d)$, em que $V = \{a, b, c, d\}$ e $A = \{ab, ac, ad\}$, ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – X é dotado com a métrica usual em grafos, sendo o comprimento, o menor caminho entre dois vértices.



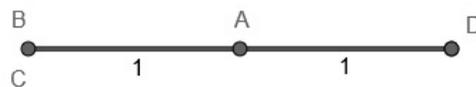
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Afirmamos que não é possível mergulhar isometricamente X em um espaço Euclidiano de qualquer dimensão. Provaremos a afirmação por contradição:

Assuma que exista um inteiro k , tal que exista um mergulho métrico $f : X = \{a, b, c, d\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ e que preserve distâncias.

Por causa desse mergulho, a imagem dessa função deve satisfazer a desigualdade triangular euclidiana, assim para os elementos d, a, b nós concluímos que $f(d), f(a), f(b)$ são colineares no espaço \mathbb{R}^k . Usando o mesmo argumento para $f(d), f(a), f(c)$, esses termos também serão colineares. Logo, todos esses pontos seriam colineares em \mathbb{R}^k . Como desejamos que esse mergulho preserve as distâncias, podemos representar esse espaço \mathbb{R}^k da seguinte forma:

Figura 6 – representação do mergulho em \mathbb{R}^k



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Mas então, considerando qualquer norma $\|\cdot\|_k$ no espaço euclidiano k -dimensional \mathbb{R}^k , temos $\|f(b) - f(c)\|_k = 0$ contradizendo o fato que as distâncias entre b e c é 2, e deveriam ser preservadas.

Uma boa propriedade é a capacidade de mergulhar sequências no espaço Euclidiano de modo que as distâncias são preservadas. Esse exemplo indica que podemos somente esperar uma aproximação dessa propriedade.

4.1.4 Mapeamento de espaços métricos

Uma forma de mapear um espaço métrico é representar suas dissimilaridades usando matrizes. A seguir veremos alguns exemplos de mapeamentos de alguns espaços métricos finitos.

Exemplo 6 *Cada grafo induz uma métrica nos vértices que são caracterizados pelos segmentos entre vértices. Considere um segmento com 5 pontos e distância 1 entre pontos adjacentes, como apresentado na figura abaixo.*

Figura 7 – Exemplo de grafo



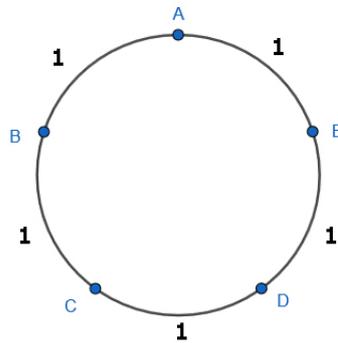
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Uma matriz que descreve esse espaço métrico é.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7 Podemos representar um círculo com 5 pontos e com 1 de distância do arco entre pontos adjacentes como mostrado a seguir.

Figura 8 – Círculo de comprimento 5



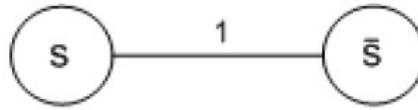
Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Esse círculo pode ser representado pela matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8 Dado um conjunto X e um subconjunto S , podemos pensar na partição S, \bar{S} com um espaço semimétrico da seguinte forma. Elementos de diferentes conjuntos tem uma distância positiva, enquanto elementos do mesmo conjunto tem distância 0. Isso é conhecido como corte métrico, observemos na figura seguinte:

Figura 9 – Um corte métrico



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Se denotarmos por $0_{n \times m}$, a matriz nula $n \times m$ e de $J_{n \times m}$ para matriz $n \times m$ formada por uns, então a semimétrica anterior pode ser representada pela seguinte matriz.

$$\begin{pmatrix} 0_{|S| \times |S|} & J_{|S| \times |\bar{S}|} \\ J_{|\bar{S}| \times |S|} & 0_{|\bar{S}| \times |\bar{S}|} \end{pmatrix}$$

Exemplo 9 No espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 considere o espaço métrico X como sendo um quadrado de lado 1. Claramente X pode ser descrito pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde cada entrada desta matriz representa a menor distância de cada vértice aos outros vértices do quadrado. Tendo estabelecido a noção de mapeamento de espaços métricos, é natural tentar analisar as correspondências métricas afim de construir mergulhos de um dado espaço métrico em outro. Isso ficará bastante evidente na demonstração do principal resultado desta dissertação, onde essa questão será abordada no contexto de espaços métricos não-necessariamente finitos.

4.1.5 Mergulhos em ℓ_∞

Os espaços infinitos \mathbb{R}^k equipado com a norma de Minkowski (3.3.3) $\|\cdot\|_p$ (para $p \in [1, \infty]$) dá origem aos espaços métricos mais comumente usados. Chamaremos essa norma ℓ_p em \mathbb{R}^k , definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $1 \leq p < \infty$, enquanto $\|x\|_\infty$ é definida como $\max_i |x_i|$.

Doravante usaremos a notação ℓ_p^k para indicar o espaço euclidiano \mathbb{R}^k munido com a norma $\|x\|_p$.

Definição 4.1.3 Dizemos que um espaço métrico finito (X, ρ) está completo dentro de ℓ_p^k se existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ de modo que $\rho(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_p$. Nós também chamamos o espaço métrico finito (X, ρ) um ℓ_p -métrico se ele pode está completo dentro de ℓ_p^k para algum k .

O seguinte teorema mostra que é possível converter cada espaço métrico em ℓ_∞ .

Teorema 4.1.1 (Fréchet) *Todo espaço métrico mergulha isometricamente dentro de ℓ_∞ .*

Demonstração. Vamos provar esse lema somente para espaços métricos finitos. Considere um espaço métrico (X, d) , onde $X = (x_1, \dots, x_n)$. É suficiente encontrar uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que (X, d) mergulha isometricamente em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Para $x_i \in X$ definimos

$$f(x_i) = (d(x_1, x_i), d(x_2, x_i), \dots, d(x_n, x_i))$$

Claramente é suficiente mostrar que cada $x_i, x_j \in X$ que $\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty = d(x_i, x_j)$. Primeiro notaremos, já que d é uma métrica, a respeito da desigualdade triangular, assim $d(x_i, x_k) - d(x_j, x_k) \leq d(x_i, x_j)$ para $k = 1, \dots, n$. Segue que

$$\max_k |d(x_i, x_k) - d(x_j, x_k)| \leq d(x_i, x_j),$$

ou em outras palavras

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty \leq d(x_i, x_j) \quad (4.1)$$

Em contrapartida, as coordenadas j do vetor $f(x_i) - f(x_j)$ é $d(x_j, x_i) - d(x_j, x_j) = d(x_i, x_j)$. Portanto as coordenadas máximas de $f(x_i) - f(x_j)$ é pelo menos $d(x_i, x_j)$ ou em outras palavras

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty \geq d(x_i, x_j) \quad (4.2)$$

O lema segue de (4.1) e (4.2). □

4.2 Resultado Principal

O objetivo dessa seção final é demonstrar o seguinte resultado publicado por Mercourakis e Vassiliadis em 2018.

Teorema 4.2.1 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach contendo uma cópia isomorfa do espaço ℓ_∞ . Então X contém isometricamente uma cópia de qualquer espaço métrico separável, limitado e fortemente côncavo.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ um número a ser escolhido a posteriori. Por hipótese, X contém uma cópia isomorfa do espaço ℓ_∞ . Devido a um resultado de Talagrand (TALAGRAND, 1981) e Partington (PARTINGTON, 1981), sabemos que existe um mergulho $T: \ell_\infty \rightarrow X$ tal que

$$\frac{1}{1+\delta} \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \|T(a_n)_{n=1}^\infty\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \quad (4.3)$$

para qualquer $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$.

Seja (M, d) um espaço métrico fortemente côncavo, e seja $\eta > 0$ tal que

$$d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) \geq \eta, \quad (4.4)$$

para quaisquer pontos $x, y, z \in M$, dois a dois distintos. A seguir iremos construir um mergulho isométrico $f: M \rightarrow X$. Da Proposição 3.3.1 segue que M é enumerável, ou seja, $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$.

Seja $I = \{(m, n) : n < m, n, m \in \mathbb{N}\}$. Note que em representação matricial, I é o conjunto dos elementos que estão abaixo da diagonal principal da matriz infinita $(m, n)_{m \times n}$. Em seguida, considere o **conjunto compacto** $K = [0, \eta]^I$, que é o produto cartesiano generalizado do intervalo compacto $[0, \eta]$.

Para cada $\varepsilon = (\varepsilon_{(m,n)}) \in K$ defina a sequência $(p_n(\varepsilon))_{n=1}^\infty$ em ℓ_∞ , dada por:

$$\begin{aligned} p_1(\varepsilon) &= (d(x_1, x_1) - d(x_1, x_1), d(x_1, x_2) - d(x_1, x_2), \dots, d(x_1, x_n) - d(x_1, x_n), \dots) \\ p_2(\varepsilon) &= (d(x_2, x_1) - d(x_1, x_1) + \varepsilon_{2,1}, d(x_2, x_2) - d(x_1, x_2), \dots, d(x_2, x_n) - d(x_1, x_n), \dots) \\ p_3(\varepsilon) &= (d(x_3, x_1) - d(x_1, x_1) + \varepsilon_{3,1}, d(x_3, x_2) - d(x_1, x_2) + \varepsilon_{3,2}, d(x_3, x_3) - d(x_1, x_3), \dots, \\ &\quad d(x_3, x_n) - d(x_1, x_n), \dots) \\ &\vdots \\ p_n(\varepsilon) &= (d(x_n, x_1) - d(x_1, x_1) + \varepsilon_{n,1}, d(x_n, x_2) - d(x_1, x_2) + \varepsilon_{n,2}, \dots, \\ &\quad d(x_n, x_{n-1}) - d(x_1, x_{n-1}) + \varepsilon_{n,n-1}, d(x_n, x_n) - d(x_1, x_n), \dots) \end{aligned}$$

Note que:

$$\|p_n(\varepsilon) - p_m(\varepsilon)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)}|,$$

onde por convenção pomos $\varepsilon_{(k,l)} = 0$ se $l \geq k$.

Afirmção 1. Para quaisquer $n < m$, tem-se que

$$\|p_n(\varepsilon) - p_m(\varepsilon)\|_\infty = d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}$$

Demonstração da Afirmção 1. Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Temos quatro possibilidades:

Caso 1. $k \geq m$. Neste caso, usaremos a convenção que $\varepsilon_{(k,l)} = 0$ se $l \geq k$, assim:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)} &= d(x_n, x_k) - d(x_m, x_k) \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_k) - d(x_m, x_k) \\ &= d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} \end{aligned}$$

Por outro lado, de um modo análogo, note que

$$-d(x_n, x_k) - \varepsilon_{(n,k)} + d(x_m, x_k) + \varepsilon_{(m,k)} = d(x_m, x_k) - d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}$$

Em resumo, provamos que

$$|d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)}| \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}$$

Antes de continuarmos, note a partir de (4.4) que a seguinte desigualdade é válida

$$d(x, y) - \eta \geq d(x, z) - d(y, z), \quad (4.5)$$

para quaisquer pontos $x, y, z \in M$, dois a dois distintos.

Caso 2. $n < k < m$. Neste caso,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)} &= d(x_n, x_k) - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_k) - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} \end{aligned}$$

De forma quase similar, mas agora usando (4.5), tem-se

$$\begin{aligned} -d(x_n, x_k) - \varepsilon_{(n,k)} + d(x_m, x_k) + \varepsilon_{(m,k)} &= -d(x_n, x_k) + d(x_m, x_k) + \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) - \eta + \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} \end{aligned}$$

Em resumo, neste Caso 2, fica provado que:

$$|d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)}| \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}$$

Caso 3. $k < n$. Usando novamente (4.5), segue que:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)} &= d(x_n, x_k) - d(x_m, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) - \eta + \varepsilon_{(n,k)} - \varepsilon_{(m,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) - \eta + \varepsilon_{(n,k)} \\ &\leq d(x_n, x_m) - \eta + \eta \\ &= d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que:

$$-d(x_n, x_k) - \varepsilon_{(n,k)} + d(x_m, x_k) + \varepsilon_{(m,k)} \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)},$$

e portanto,

$$|d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)}| \leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}$$

Finalmente,

Caso 4. $k = n$. Ora,

$$\begin{aligned} |d(x_n, x_k) + \varepsilon_{(n,k)} - d(x_m, x_k) - \varepsilon_{(m,k)}| &= |-d(x_m, x_n) - \varepsilon_{(m,n)}| \\ &= d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} \end{aligned}$$

Isso demonstra a afirmação. □

Definamos agora uma aplicação $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^I$ pondo

$$\varepsilon = (\varepsilon_{(m,n)}) \in K \mapsto \varphi(\varepsilon) = (\varphi_{(m,n)}(\varepsilon)),$$

em que

$$\varphi_{(m,n)}(\varepsilon) = d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X$$

Afirmação 2. $\varphi(K) \subset K$.

Demonstração da Afirmação 2. Fixe $\varepsilon = (\varepsilon_{(m,n)}) \in K$. Como T é linear, temos que

$$\|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X = \|T(p_m(\varepsilon) - p_n(\varepsilon))\|_X$$

Então, da desigualdade (4.3) segue que

$$\frac{1}{1+\delta} \|p_m(\varepsilon) - p_n(\varepsilon)\|_\infty \leq \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X \leq \|p_m(\varepsilon) - p_n(\varepsilon)\|_\infty \quad (4.6)$$

Conseqüentemente, da desigualdade à direita, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{(m,n)}(\varepsilon) &= d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X \\ &\geq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \|p_m(\varepsilon) - p_n(\varepsilon)\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos o resultado da **Afirmção 1**. Isso mostra que $\varphi_{(m,n)}(\varepsilon) \geq 0$. Mostremos agora que $\varphi_{(m,n)}(\varepsilon) \leq \eta$. Usando a desigualdade à esquerda em (4.6) concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi_{(m,n)}(\varepsilon) &= d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X \\ &\leq d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \frac{1}{1+\delta} \|p_m(\varepsilon) - p_n(\varepsilon)\|_\infty \\ &= d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \frac{1}{1+\delta} (d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) (d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}) \\ &= \frac{\delta}{1+\delta} (d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}) \\ &\leq \frac{\delta}{1+\delta} (D + \eta), \end{aligned}$$

onde $D = \text{diam}M = \sup_{x \neq y \in M} d(x, y)$. Agora, escolhamos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{\delta}{1+\delta} (D + \eta) < \eta.$$

Note que

$$\delta D + \delta \eta = \delta (D + \eta) < \eta (1 + \delta) = \eta + \delta \eta \quad \Leftrightarrow \quad \delta D < \eta \quad \Leftrightarrow \quad \delta < \eta / D$$

Isso conclui a demonstração da Afirmção 2. □

Afirmção 3. φ é contínua.

Demonstração da Afirmção 3. De fato, fixe ε e ε' em K . A grosso modo, devemos mostrar que

$$\varepsilon \approx \varepsilon' \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\varepsilon) \approx \varphi(\varepsilon')$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned} \varphi_{(m,n)}(\varepsilon) &= d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)} - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X \\ \varphi_{(m,n)}(\varepsilon') &= d(x_n, x_m) + \varepsilon'_{(m,n)} - \|T(p_m(\varepsilon')) - T(p_n(\varepsilon'))\|_X \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_{(m,n)}(\varepsilon) - \varphi_{(m,n)}(\varepsilon') &= \varepsilon_{(m,n)} - \varepsilon'_{(m,n)} + \|T(p_m(\varepsilon')) - T(p_n(\varepsilon'))\|_X \\ &\quad - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X. \end{aligned}$$

Então, aplicando a desigualdade triangular (Vide Apêndice pag. 60), temos:

$$\begin{aligned} |\varphi_{(m,n)}(\varepsilon) - \varphi_{(m,n)}(\varepsilon')| &\leq |\varepsilon_{(m,n)} - \varepsilon'_{(m,n)}| + \left| \|T(p_m(\varepsilon')) - T(p_n(\varepsilon'))\|_X \right. \\ &\quad \left. - \|T(p_m(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon))\|_X \right| \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\varphi_{(m,n)}(\varepsilon) - \varphi_{(m,n)}(\varepsilon')| &\leq |\varepsilon_{(m,n)} - \varepsilon'_{(m,n)}| + \|T(p_m(\varepsilon')) - T(p_m(\varepsilon))\|_X \\ &\quad + \|T(p_n(\varepsilon)) - T(p_n(\varepsilon'))\|_X \\ &\leq |\varepsilon_{(m,n)} - \varepsilon'_{(m,n)}| + \|p_m(\varepsilon') - p_m(\varepsilon)\|_\infty + \\ &\quad + \|p_n(\varepsilon) - p_n(\varepsilon')\|_\infty \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} p_n(\varepsilon) &= (d(x_n, x_1) - d(x_1, x_1) + \varepsilon_{n,1}, d(x_n, x_2) - d(x_1, x_2) + \varepsilon_{n,2}, \dots, \\ &\quad d(x_n, x_{n-1}) - d(x_1, x_{n-1}) + \varepsilon_{n,n-1}, d(x_n, x_n) - d(x_1, x_n) \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(\varepsilon') &= (d(x_n, x_1) - d(x_1, x_1) + \varepsilon'_{n,1}, d(x_n, x_2) - d(x_1, x_2) + \varepsilon'_{n,2}, \dots, \\ &\quad d(x_n, x_{n-1}) - d(x_1, x_{n-1}) + \varepsilon'_{n,n-1}, d(x_n, x_n) - d(x_1, x_n) \dots) \end{aligned}$$

logo

$$p_n(\varepsilon) - p_n(\varepsilon') = (\varepsilon_{n,1} - \varepsilon'_{n,1}, \varepsilon_{n,2} - \varepsilon'_{n,2}, \dots, \varepsilon_{n,n-1} - \varepsilon'_{n,n-1}, 0, 0, 0, \dots)$$

Segue que:

$$\|p_n(\varepsilon) - p_n(\varepsilon')\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\varepsilon_{n,i} - \varepsilon'_{n,i}| \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow \varepsilon',$$

analogamente, têm-se:

$$\|p_m(\varepsilon) - p_m(\varepsilon')\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m-1} |\varepsilon_{m,i} - \varepsilon'_{m,i}| \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow \varepsilon'.$$

Podemos concluir que:

$$|\varphi_{m,n}(\varepsilon) - \varphi_{m,n}(\varepsilon')| \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow \varepsilon',$$

e portanto, fica demonstrado que a função $\varphi: K \rightarrow K$ é contínua com relação à topologia produto usual do espaço \mathbb{R}^I . □

Sendo $\varphi: K \rightarrow K$ contínua, então pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder (Vide Apêndice pag. 60) existe $\varepsilon^* \in K$ tal que

$$\varepsilon^* = \varphi(\varepsilon^*).$$

Isso implica que

$$\varepsilon_{(m,n)}^* = \varphi_{(m,n)}(\varepsilon^*) = d(x_n, x_m) + \varepsilon_{(m,n)}^* - \|T(p_m(\varepsilon^*)) - T(p_n(\varepsilon^*))\|_X,$$

ou seja,

$$d(x_n, x_m) = \|T(p_m(\varepsilon^*)) - T(p_n(\varepsilon^*))\|_X, \quad \forall n < m.$$

Finalmente, defina $f: M \rightarrow X$ pondo

$$f(x_i) = T(p_i(\varepsilon^*)).$$

Fica então demonstrado que

$$\|f(x_i) - f(x_j)\| = d(x_i, x_j) \quad \forall j < i$$

□

A indagação principal que sobressai sobre o estudo desse Teorema 4.2.1, se é possível remover a restrição de ser limitado.

REFERÊNCIAS

- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 411 p. ISBN 978-85-83370-68-0.
- GEORGIU, C.; HATAMI, H. **CSC2414-Metric embeddings. Lecture 1**: a brief introduction to metric embeddings, examples and motivation, Spring 2006. Notas de curso proferido por Avner Magen, do Departamento de Ciência da Computação, Universidade de Toronto.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2017. v. 1. 431 p. ISBN 978-85-24401-18-3.
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 357 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-24404-20-7.
- LIMA, R. F. de. **Topologia e Análise no Espaço R^n** . 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. 481 p. ISBN 978-85-83370-37-6.
- MACHADO, L. B. **Análise funcional e aplicações**. 2012. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São Paulo, 2012.
- MERCOURAKIS, S. K. ; VASSILIADIS, G. Isometric embeddings of a class of separable metric spaces into banach spaces. **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae**, Prague, v. 59, n. 3, p. 233–239, 2018.
- MTH309. **02-1 Applications of systems of linear equations**: traffic flow. 2011. 1 vídeo (13 min). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8Kg21jBCm-k>. Acesso em: 20 out. 2020.
- PARTINGTON, J. Subspaces of certain Banach sequence spaces. **Bulletin of the London Mathematical Society**, London, v. 13, n. 2, p. 162–166, 1981.
- TALAGRAND, M. Sur les espaces de Banach contenant $l^1(\tau)$. **Israel Journal of Mathematics**, Jerusalem, v. 40, n. 3-4, p. 324–330, 1981.
- ULRYCHOVA, E. Several simple real-world applications of linear algebra tools. *In*: ANNUAL CONFERENCE OF DOCTORAL STUDENTS, 15., 2006, Prague. **Proceedings [...]**. Prague: Matfyzpress, 2006. Part I, p. 31-34.

APÊNDICE A - FÓRMULAS EXTRAS

Função Uniformemente Contínua

(LIMA, 2017) Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Conjuntos Enumeráveis

(LIMA, 2017) Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. No caso segundo caso, X diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $(x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots)$, tem-se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Cada bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ chama-se uma *enumeração* (dos elementos) de X .

Supremo

(LIMA, 2017) Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $\alpha \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando α é a menor das cotas superiores de X em K . Assim, para que $\alpha \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq \alpha$;
2. Se $\beta \in K$ é tal que $x \leq \beta$ para todo $x \in X$, então $\alpha \leq \beta$.

Se um conjunto X possui supremo, ele é denotado:

$$\sup X = \sup_{x \in X} x$$

Fórmula auxiliar 1

Observe que para quaisquer vetores a, b, c e $d \in X$, tem-se

$$\left| \|a - b\| - \|c - d\| \right| \leq \|a - c\| + \|b - d\|$$

De fato, isso é elementar, vejamos:

$$\begin{aligned} \|a - b\| &\leq \|a - c\| + \|c - b\| \leq \|a - c\| + \|c - d\| + \|d - b\| \\ \left| \|a - b\| - \|c - d\| \right| &\leq \|a - c\| + \|b - d\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|c - d\| &\leq \|a - c\| + \|a - d\| \leq \|a - c\| + \|a - b\| + \|b - d\| \\ \left| \|a - b\| - \|c - d\| \right| &\leq \|a - c\| + \|b - d\| \end{aligned}$$

Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff

Teorema 4.2.2 *Seja K um subconjunto compacto convexo de um espaço localmente convexo X . Então toda aplicação contínua $\varphi: K \rightarrow K$ possui um ponto fixo, ou seja, existe $x^* \in K$ tal que $\varphi(x^*) = x^*$.*