



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**LUDEMBERG GONÇALO DOS SANTOS**

**O ORIGAMI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
PLANA E ESPACIAL: HISTÓRIA, TEOREMAS E ATIVIDADES EM SALA**

**FORTALEZA**

**2021**

**LUDEMBERG GONÇALO DOS SANTOS**

**O ORIGAMI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
PLANA E ESPACIAL: HISTÓRIA, TEOREMAS E ATIVIDADES EM SALA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

**FORTALEZA**

**2021**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S236o Santos, Ludemberg Gonçalo dos.

O origami como ferramenta didática para o ensino de geometria plana e espacial :  
historia, teoremas e atividades em sala / Ludemberg Gonçalo dos Santos. – 2021.  
73 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede  
Nacional, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva..

1. Ensino de geometria. 2. Origami. 3. Atividades em sala. I. Título.

CDD 510

---

**LUDEMBERG GONÇALO DOS SANTOS**

**O ORIGAMI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
PLANA E ESPACIAL: HISTÓRIA, TEOREMAS E ATIVIDADES EM SALA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29/01/2021.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Frederico Vale Girão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira  
Universidade Estadual do Ceara (UECE)

## **AGRADECIMENTOS**

A minha família, esposa e filha pelos momentos de ausência.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC, os quais tenho grande admiração.

Ao meu orientador, pelo e tempo e paciência dedicados.

Aos amigos que me incentivaram a não desistir durante os momentos difíceis passados.

“Daria tudo que sei por metade daquilo que ignoro.” (René Descartes)

## RESUMO

A busca pela melhoria nos resultados dos estudantes nas avaliações externas, a dificuldade que muitos têm de trabalhar com figuras geométricas e seus elementos, motivou a busca por materiais concretos que melhorassem a minha prática na sala de aula, motivando esse trabalho. Assim sendo, o objetivo desse trabalho é mostrar as dobraduras como uma ferramenta para que o professor da educação básica possa ter um norte na busca por materiais, sempre fazendo uma ligação do abstrato com o concreto sempre com foco e planejamento para evitar o esvaziamento dos conteúdos durante as práticas. Foi feito um levantamento bibliográfico, no qual as obras escolhidas ajudam na construção de figuras geométricas com o uso de dobraduras e com montagens simples, e que o conteúdo matemático não tenha se perdido. O resultado obtido foi um texto que mostra um pouco da história dos origamis e algumas de suas aplicações em outras áreas, Axiomas sobre origamis, Teoremas sobre e que utilizam origamis, resolução de alguns problemas usando dobraduras, depois comprovando o resultado matemático, foram mostrados também como obter figuras geométricas simples usando dobraduras, depois construção dos sólidos de Platão usando técnicas diferentes, foram apresentadas atividades como sugestão para apontar o uso em sala de aula das dobraduras.

**Palavras-Chave:** Ensino de Geometria. Origami. Atividades em Sala.

## **ABSTRACT**

The search for improvement in student results in external evaluations, the difficulty that many have to work with geometric figures and their elements, motivated the search for concrete materials that would improve my practice in the classroom, thus motivating this work. Therefore, the objective of this work is to show the folds as a tool so that the education teacher can have a north in the search for materials, always making a connection between the abstract and the concrete, always focusing and planning to avoid emptying the contents during practices. A bibliographic survey was made, focusing on works that help in the construction of simple assembly figures and that the mathematical focus has not been lost. The result obtained was a text that shows a little bit of the history of origami and some of its applications in other areas, Axioms about origami, Theorems about and making use origami, solving some problems using folds after proving the mathematical result, was also shown as obtain simple geometric figures using folds and then build Plato's solids using different techniques to show variety, activities were presented as suggested usage to point out the focused use in the classroom of folds.

**Keywords:** Geometry Teaching. Origami. Classroom Activities.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Kanjis que representam a palavra origami .....	17
Figura 2 – Tsuru .....	18
Figura 3 – Pajarita .....	19
Figura 4 – Akira Yoshizawa e algumas de suas criações .....	20
Figura 5 – Simulação de um <i>airbag</i> .....	21
Figura 6 – Stent (contraído e expandido) .....	22
Figura 7 – Hanaflex (aberta e fechada).....	22
Figura 8 – Axioma 1 .....	25
Figura 9 – Axioma 2 .....	26
Figura 10 – Axioma 3 .....	26
Figura 11 – Axioma 4 .....	27
Figura 12 – Axioma 5 .....	28
Figura 13 – Axioma 6 .....	28
Figura 14 – Axioma 7 .....	29
Figura 16 – Base do tsuru .....	31
Figura 17 – Teorema de Maekawa (parte de baixo).....	32
Figura 18 – Teorema de Maekawa (parte de cima).....	32
Figura 19 – Teorema de Kawazaki.....	33
Figura 20 – Primeiro Teorema de Haga .....	35
Figura 21 – Terceiro Teorema de Haga .....	36
Figura 22 – Segundo Teorema de Haga .....	38
Figura 23 – Trissecção de um ângulo agudo .....	39
Figura 24 – Demonstração trissecção de um ângulo agudo .....	39
Figura 25 – Duplicação do Cubo .....	40
Figura 26 – Demonstração Duplicação do Cubo.....	41
Figura 27 – Construção de um quadrado por dobradura .....	43
Figura 28 – Diagrama do Cubo por David Mitchel.....	44
Figura 29 – Confecção de triângulo equilátero 1 .....	45
Figura 30 – Tetraedro.....	46
Figura 31 – Módulo de Francis Wo - Aberto.....	47
Figura 32 – Crease Pattern do módulo de Lewis Simon .....	48
Figura 33 – Crease Pattern do módulo de Lewis Simon .....	49

Figura 34 – Módulo 108° de Robert Neale (Parte 1) .....	50
Figura 35 – Módulo 108° de Robert Neale (Parte 2) .....	50
Figura 36 – Módulo 108° de Robert Neale (dodecaedro) .....	51
Figura 37 – Confecção de pentágono regular (parte 1).....	52
Figura 38 – Confecção de pentágono regular (parte 2).....	53
Figura 39 – Construção do icosaedro .....	54
Figura 40 – Módulo SONOBE .....	55
Figura 41 – Cubo SONOBE .....	55
Figura 42 – Soma dos ângulos Internos de um Triângulo .....	59
Figura 43 – Origami XYZ de Francis Wo.....	60
Figura 44 – Origami XYZ de Francis Wo diagrama (Parte 1) .....	60
Figura 45 – Origami XYZ de Francis Wo diagrama (Parte 2) .....	61
Figura 46 – A mediana e o baricentro .....	64
Figura 47 – Poliedros Arquimedianos .....	65
Figura 48 – Poliedros Arquimedianos: módulo quadrado.....	66
Figura 49 – Poliedros Arquimedianos: módulo triângulo equilátero .....	67
Figura 50 – Poliedros Arquimedianos: módulo triângulo equilátero finalizado .....	68
Figura 51 – Poliedros Arquimedianos: montagem do cuboctaedro .....	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Símbolos para confecção de origamis.....	24
---	----

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	14
2	UM POUCO DA HISTÓRIA DOS ORIGAMIS .....	17
3	SIMBOLOGIA, AXIOMAS E ALGUNS RESULTADOS ENVOLVENDO ORIGAMIS .....	24
3.1	Os axiomas de Huzita-Hatori .....	25
3.2	O teorema de Maekawa e o teorema de Kawasaki .....	30
3.3	Alguns resultados matemáticos obtidos com ou através de dobraduras.....	34
3.3.1	<i>Os teoremas de Haga</i> .....	34
3.3.2	<i>Trisseção de um ângulo</i> .....	38
3.3.3	<i>A duplicação do cubo</i> .....	40
4	CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COM ORIGAMIS .....	43
4.1	Obtendo um quadrado .....	43
4.1.1	<i>Construção do cubo</i> .....	44
4.2	Obtendo um triângulo equilátero a partir de um quadrado .....	45
4.2.1	<i>Construção do tetraedro</i> .....	45
4.3	Construção do octaedro .....	47
4.4	Módulo de 108° de Robert Neale e construção de um dodecaedro ...	50
4.5	Obtendo um pentágono regular a partir de um quadrado .....	52
4.5.1	<i>Construção de um icosaedro</i> .....	53
4.6	O módulo Sonobe .....	54
5	O ORIGAMI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA .....	56
5.1	Usando dobraduras durante a aula de matemática .....	58
5.1.1	<i>Atividade 1 – Trabalhando a soma dos ângulos internos de um triângulo</i> .....	58
5.1.2	<i>Atividade 2 – Trabalhando o conceito de plano</i> .....	60
5.1.3	<i>Atividade 3 – Exercitando conceitos básicos</i> .....	62

<b>5.1.4</b>	<b><i>Atividade 4 – Trabalhando a área do quadrado e o volume do</i></b>	
	<b><i>Cubo</i></b> .....	<b>62</b>
<b>5.1.5</b>	<b><i>Atividade 5 – Construção baricentro de um triângulo</i></b> .....	<b>63</b>
<b>5.1.6</b>	<b><i>Atividade 6 – Poliedros Arquimedianos</i></b> .....	<b>64</b>
5.1.6.1	<i>Construção do módulo quadrado</i> .....	66
5.1.6.2	<i>Construção do módulo triângulo equilátero</i> .....	66
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O trabalho que exerço como Professor da rede pública do Estado do Ceará e da Prefeitura de Fortaleza, tem mostrado que a cada ano que passa os estudantes estão chegando as séries finais do Ensino Fundamental e conseqüentemente ao Ensino Médio, com muitas dificuldades para continuar estudando matemática na educação básica.

Por outro lado, é comum os professores serem questionados sobre a relevância de certos conteúdos, tanto pelos alunos como por outros profissionais que trabalham na educação, mas não tem formação específica em matemática. Apesar desses questionamentos as avaliações educacionais como SAEB(Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) que ocorre a cada dois anos, SPAECE(Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica) que ocorre todo ano e o ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio), fazem uso de avaliações bastante formais e são usadas para quantificar e classificar o nível de aprendizado, sendo muitas vezes usado também para julgar o trabalho dos professores, e cobrar resultados, como se este fosse o único agente responsável pela aprendizagem.

Sendo assim, o professor de matemática, com uma formação muitas vezes totalmente teórica, tem que procurar alternativas para que seus alunos possam ter melhor desempenho. Muitos teóricos da educação sempre falam em formação continuada do professor, pela minha experiência, desde o ano de 2002, essas formações até ocorrem, mas continuam em grande parte mostrando ferramentas tradicionais e teóricas, o que só aumenta a angústia do professor.

Dentro dos assuntos da educação básica, na escola pública, sempre encontrei dificuldade de dar andamento ao ensino de geometria plana e espacial, pois os estudantes que encontrei durante vários anos, chegavam sem conhecer a nomenclatura das figuras e seus elementos, não conseguiam entender o cálculo de áreas que não fossem a aplicação direta das fórmulas, ou como alguns gostam de chamar, algoritmos de resolução. O mesmo se passava com volumes, semelhanças, entre outros temas, e isso sempre acabava refletindo nos resultados das avaliações externas, pois no caso do 9º ano do Ensino Fundamental, dos 37 descritores da matriz de referência do SAEB 15 são relacionados a geometria, e para o 3º ano do Ensino Médio são 13 descritores dos 35 que constam na matriz.

O meu uso dos origamis começou quando eu estava com dificuldade para fazer alguns alunos entenderem o conceito de diagonal, para depois proceder com o cálculo do total de diagonais de um polígono. Depois de pesquisar um pouco na época 2005, a internet era um pouco lenta ainda, mas encontrei um método para obter um triângulo equilátero, depois obter um hexágono, e a partir daí mostrar suas diagonais. Apesar de simples, o resultado para este conteúdo foi bem satisfatório, sendo que realizei isso em uma turma de 9º ano, à noite. Como funcionou apliquei em outras turmas no turno diurno.

O ensino de geometria depende do ensino de álgebra, quando trabalhamos a resolução de problemas geométricos, dependemos não somente das “contas”, mas também da capacidade de visualização do estudante para figuras planas e espaciais e suas propriedades. Encontrei nas dobraduras um meio para melhorar essas percepções em meus alunos.

O objetivo/motivação desse trabalho, não é ser um guia de como usar origamis/dobraduras no ensino de geometria, até porque hoje em dia o acesso à informação é muito melhor, e o professor que desejar pode encontrar vídeos em diferentes plataformas on-line, que mostram a construção de figuras até bastante complexas. A ideia é mostrar que as dobraduras podem ser usadas no ensino, que o professor de matemática não precisa ficar preso somente a parte teórica, mostrando que o uso desse material concreto e manipulável ajuda na compreensão de vários conteúdos de geometria, e que para isso é preciso planejar as atividades para que nunca fiquem vazias de conteúdo.

No primeiro capítulo, faremos uma breve passagem pela história dos origamis, desde a origem até a atualidade, mostraremos o uso do conceito das dobraduras em outras áreas, como engenharia, medicina e até segurança automotiva. Vamos perceber que as diferentes áreas fazem uso de propriedades semelhante.

No segundo capítulo, trabalharemos diretamente com dobraduras e sua relação com a matemática, vamos mostrar os símbolos utilizados neste trabalho, pois além dos mostrados aqui existem outros que são utilizados em outros tipos de figuras. É importante salientar que neste trabalho os origamis construídos serão modulares, ou seja, formados por mais de uma peça. O uso de peças únicas será feito para mostrar os Axiomas de Huzita-Hator, que só precisam de um único papel, e para a demonstração dos Teoremas que se seguem, Teorema de Maekawa e Teorema de Kawasaki. Ainda neste capítulo, mostraremos como através de dobraduras

resolvemos três problemas de geometria plana: a Trissecção de um Segmento, solucionado pelos Teoremas de Haga; a Trissecção de um Ângulo Agudo e por último a Duplicação do Cubo.

No terceiro capítulo, faremos a apresentação de figuras básicas que irão gerar módulos para a construção dos sólidos de Platão, mostraremos também a relação matemática que existe em alguns desses módulos, para ficar claro que não ocorreu por “acidente”. Usaremos sempre geometria plana ou espacial, evitaremos o uso de geometria analítica para mostrar as relações.

No quarto capítulo, falaremos um pouco sobre materiais concretos e a sua importância na melhoria do aprendizado, iremos descrever cinco atividades, que apesar de simples podem dar um norte para que um professor desenvolva outras.

Vale ressaltar ainda que alguns teoremas bastante conhecidos que não foram contemplados, pois o uso de dobraduras poderia trazer complicações que não influenciariam positivamente, possuem materiais concretos que funcionam melhor, ou que o uso das dobraduras funciona somente em caso específicos.

Espero que este trabalho contribua para a prática em sala de aula de outros professores, assim como ocorre comigo, pois essa arte tem muito a oferecer para o ensino, dentre outras áreas.

## 2 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS ORIGAMIS

Origami é a arte japonesa de obter formas através da realização de dobras em um pedaço de papel, o termo é obtido pela junção de duas outras palavras, a palavras *oru* (dobrar) e *kami* (papel).

Figura 1 – Kanjis que representam a palavra origami



Fonte: Brasileiros no Japão. Origami e sua história. 2014<sup>1</sup>.

De acordo com Tommasi (2010) a técnica de confeccionar papel chegou ao Japão trazida da China por monges budistas entre os séculos VI e X, sendo a princípio acessível somente a nobreza.

Nessa época as dobraduras tinham seu uso limitado a cerimônias religiosas, mas com a melhoria da técnica de confecção do papel, diminuindo seu custo e melhorando a sua qualidade, o papel tornou-se acessível a todo povo japonês, que aprimorou as técnicas da dobradura de papel, transmitindo a princípio de forma oral dentro da tradição familiar japonesa, por isso, para muitos origamis não podemos indicar o autor. As formas foram sendo aprimoradas por pessoas de diferentes gerações, os *origamis* dessa época são considerados umas das grandes heranças do povo japonês.

De acordo com LIMA (2014), podemos dividir a história do origami em três períodos:

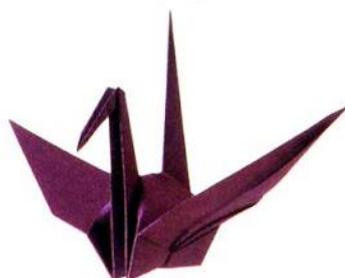
- Período *Heian*, se passou entre 794 e 1185, nesse período era usado em cerimônias religiosas, era comum os *samurais* trocarem presentes adornados com um *noshi*, dobrado a partir de dois papéis retângulos, um branco e outro vermelho, de forma que parecesse uma única folha

<sup>1</sup> Disponível em: <http://brasileirosnojapao.com/origami-e-sua-historia/> - acesso em 12 mar 2020

na forma de um hexágono. Nesse período surgiu o *Origami Tsuki*, que até os dias atuais confere autenticidade a documentos de valor de forma mais tradicional.

- Período *Muromachi*, se passou entre 1338 e 1576, nesse período é onde ocorre a popularização do papel, sendo os adornos de *Origami* utilizados para distinguir as classes sociais.
- Período *Tokugawa*, se passou entre 1603 e 1867, nesse período os *Origamis* se popularizam, e surge o primeiro livro com instruções para a dobragem de mil *tsurus* (a garça japonesa), escrito por Senbazuru Oricata em 1797. Nesse período que fez parte da Era *Edo*, foram desenvolvidos cerca de setenta tipos, como sapos, cestas, flores, barcos.

Figura 2 – Tsuru



Fonte: MATEMATIQUE-SE! Origami e matemática: a lenda do pássaro Tsuru<sup>2</sup>.

É importante ressaltar que essa arte que se desenvolveu entre países orientais, como Japão e China, que apesar de pioneiros, não foram os únicos. Os árabes também desenvolveram técnicas de dobraduras, por volta do século VII, devido a sua religião eles não podiam produzir figuras que representassem seres vivos, dedicando-se a investigar formas geométricas.

Os árabes levando as técnicas para a Europa por volta do século XII durante as invasões dos mouros a Península Ibérica, mesmo depois de sua expulsão as dobraduras continuaram a ser populares e sem a influência da religião, outras dobraduras se popularizaram, primeiramente na Espanha onde podemos citar a

---

<sup>2</sup> Disponível em: <http://coutoprof.blogspot.com/2015/06/a-lenda-do-passaro-tsuru-simetria.html> - acesso em 12 mar 2020.

*pajarita*, um modelo de pássaro bastante simples e depois por grande parte do continente.

Figura 3 – Pajarita



Fonte: PASTA PAPEL. Manualidades para hacer en casa. Las 3 claves para hacer talleres inolvidables<sup>3</sup>.

Durante a Era *Meiji*, que durou até a primeira década do século XX, ocorreu uma abertura do Japão. Com influência Europeia, principalmente das técnicas desenvolvidas na Alemanha, as dobraduras começaram a ser lecionadas nas escolas, podemos citar como um dos primeiros registros o educador alemão Friedrich Froebel (1782-1852), que introduziu as técnicas de dobradura no ensino pré-escolar.

Para falarmos de *Origami* no século XX, temos que lembrar o Mestre Akira Yoshizawa (1911-1994), que durante a sua vida desenvolveu centenas, talvez milhares, de modelos, colocando vários deles nos 18 livros que até hoje servem de referência para diversos artistas em todo o planeta. A primeira publicação de Akira Yoshizawa foi *Atarashii Origami Geijutsu*, em 1954, onde mostra o sistema de desenho que leva seu nome, sendo o padrão aceito em todo mundo para diagramar os passos necessários para a reprodução de diferentes modelos.

E importante citar também a criação por Akira Yoshizawa da *Wet Folding*, conhecida como dobra molhada, que consiste em umedecer o papel dando uma aparência mais realística a figuras tridimensionais, em sua maioria representações de animais e plantas. Vale salientar que o Mestre não aprendeu a arte na escola sendo autodidata desde a sua infância.

---

<sup>3</sup> Disponível em: <https://www.pastadepapel.com/manualidades-para-hacer-en-casa-3-claves-para-hacer-talleres-inolvidables/>. Acesso em: 12 mar. 2020.

Akira Yoshizawa também foi embaixador da cultura internacional no Japão, e em 1983 recebeu a condecoração da Ordem do Sol Nascente, concedida a cidadãos japoneses que se destacam com grande mérito em uma determinada área.

Figura 4 – Akira Yoshizawa e algumas de suas criações



Fonte: JAPÃO EM FOCO: Akira Yoshizawa, o pai do origami moderno<sup>4</sup>

No Brasil, segundo KANEGAE, a arte das dobraduras pode ter chegado de duas maneiras:

- Pela Argentina, que herdaram dos espanhóis, com a publicação de livros na década de 1930 por Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo.
- Através da imigração japonesa a partir de 1908. Não podemos precisar aonde começou a disseminação da arte, mas KANEGAE, que também é origamista, afirma que pode ter sido por Takao Kamikawa, imigrante que veio com a família para trabalhar em uma fazenda de café na cidade de Bauru.

Na atualidade, a ciência faz uso das técnicas de dobradura de papel quando é necessário a economia de espaço, para depois acontecer a expansão do material.

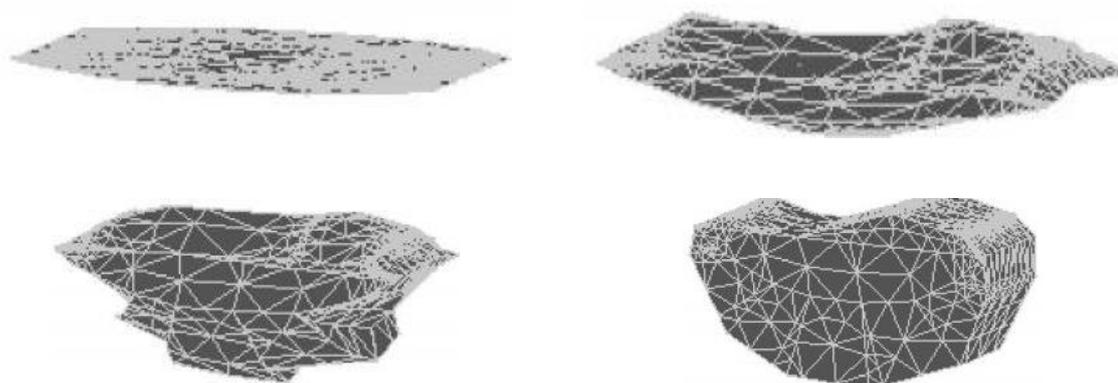
---

<sup>4</sup> Disponível em: <https://www.japaoemfoco.com/akira-yoshizawa-o-pai-do-origami-moderno/>. Acesso em: 12 mar. 2020.

Um dos usos é a confecção de *airbags*, dispositivo responsável pela redução de ferimentos e mortes em acidentes automobilísticos, o físico e origamista Robert Lang, em seu site (<https://langorigami.com/article/airbag-folding/>) mostra através de computação gráfica como um *airbag* é composto por vários pequenos triângulos, sendo dobrado e depois inflado na velocidade correta.

Todos esses trabalhos são feitos usando o que se chama de origami computacional e origami matemático. Podemos ainda citar sobre esse assunto o artigo chamado *Airbag Folding Based on Origami Mathematics*, em que seus autores, Christoffer Cromvik e Kenneth Eriksson, mostram o uso dessas técnicas para a construção e simulação computacional desses equipamentos.

Figura 5 – Simulação de um *airbag*



Fonte: CROMVICK, Christoffer; ERIKSSON, Kenneth. **Airbag Folding Based on Origami Mathematics**. Goteborg: Chalmers University, 2006. p<sup>5</sup>. 12.

Uma outra utilização do princípio de expansão de um origami é a construção de *stents*, que de acordo com YOU(2003), são estruturas tubulares que podem ser dobradas em pequenas dimensões, permitindo a sua passagem para locais do corpo e depois sendo expandidos.

Os *stents* tem contribuído para o tratamento de câncer de esôfago e do duto biliar, também são usados para tratamento cardíaco, o material utilizado pode ser metálico ou plástico com diferentes tipos de rigidez, podem ou não possuir membranas que os recobrem, podendo ser semelhante a uma rede. Os *stents* desenvolvidos por Zhong You e Kaori Kuribayashi, em Oxford, podem ser

---

<sup>5</sup> Disponível em: <http://www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints/2006/36.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2020.

reproduzidos em papel formando estruturas muito interessantes, dependendo de como é feita a expansão para os origamistas são conhecidos como origami *magic ball*.

Figura 6 – Stent (contraído e expandido)



Fonte: Physics to go. From Physics Research Archive - Page 2<sup>6</sup>.

Outra utilização é realizada para painéis solares em naves espaciais, satélites e sondas, que se desdobram ampliando a área de captação em até 80%. Um desses sistemas é o desenvolvido pela *Bringham Young University* (BYU), chamado *hanaflex* (*hana* – significa flor em japonês), sendo responsável pelo design do origami Shannon Alisa Zirbel Ph.D. O primeiro protótipo foi construído em colaboração com Brian Trease no Laboratório de Propulsão a Jato da NASA, também colaborou no projeto o físico Robert Lang que é um grande especialista em origami.

Figura 7 – Hanaflex (aberta e fechada)



Fonte: Jet Propulsion Laboratory. Solar Power, Origami Style<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Disponível em:

<https://www.compadre.org/informal/features/FeatureArchive.cfm?Type=PhysicsResearch&Skip=10>. Acesso em: 12 mar. 2020.

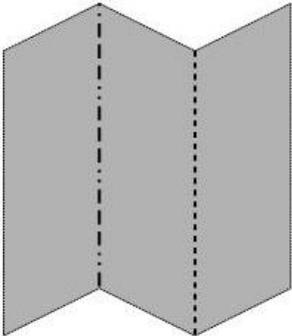
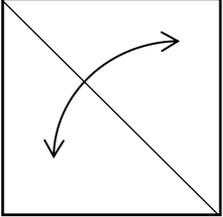
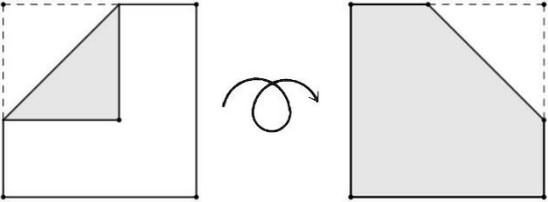
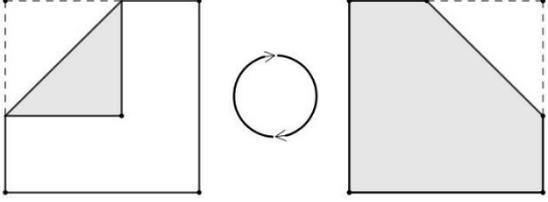
<sup>7</sup> Disponível em: <https://www.jpl.nasa.gov/news/solar-power-origami-style>. Acesso em: 13 mar. 2020.

Hoje, a arte das dobraduras, origami para os orientais, papiroflexia para os espanhóis e suas antigas colônias, está espalhada por todo o mundo e por diferentes áreas do conhecimento, a cada dia surgem novos modelos, e muitas pessoas encontram nessa arte soluções criativas para problemas, beleza, paz e serenidade, trabalhando a paciência e a precisão que os modelos cada vez mais complexos exigem.

### 3 SIMBOLOGIA, AXIOMAS E ALGUNS RESULTADOS ENVOLVENDO ORIGAMIS

Para trabalharmos com origami é necessário conhecermos os símbolos utilizados para realização de diferentes dobras. Iremos usar os símbolos conhecidos internacionalmente, lembrando que podem acontecer variações dependendo do tipo de origami.

Tabela 1 – Símbolos para confecção de origamis

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EXEMPLO
	dobrar em vale	
	dobrar em montanha	
	dobrar e desdobrar	
	virar o modelo ao contrário	
	mudar de direção	

Fonte: Composição do autor

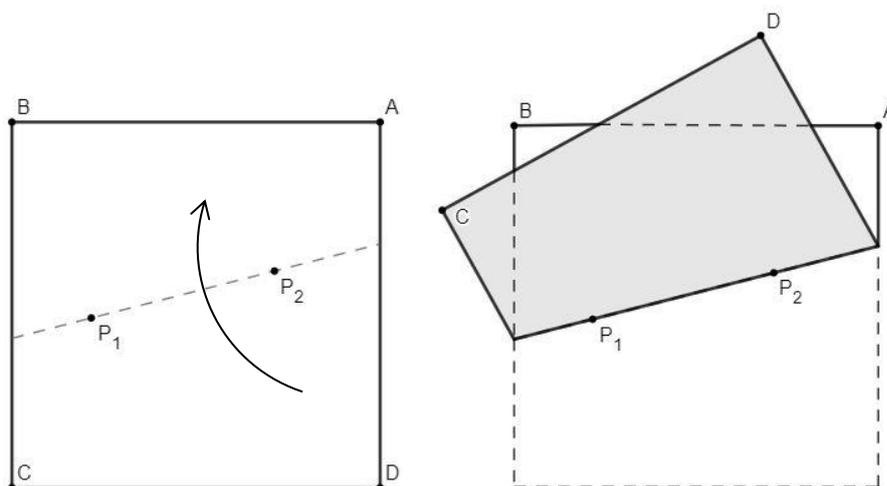
### 3.1 Os axiomas de Huzita-Hatori

Os axiomas que se seguem serão interpretados através de dobraduras, ou seja, trabalharemos com campos cujas dimensões são finitas, todos os origamis seguem em algum momento os conceitos apresentados nos axiomas seguintes. Existem estudos que transpõem os axiomas aqui apresentados para a geometria euclidiana plana e para geometria analítica, vamos perceber essa ligação pois faremos uso da linguagem da geometria plana para expor as dobras obtidas, para tanto, vamos ainda considerar que:

- As retas são dobras que tem como características ligar duas margens do papel utilizado.
- Consideraremos o papel em formato quadrado como um recorte do Plano Euclidiano.

**Axioma 1:** Dados dois pontos distintos,  $P_1$  e  $P_2$ , existe uma única dobra que passa pelos dois pontos.

Figura 8 – Axioma 1

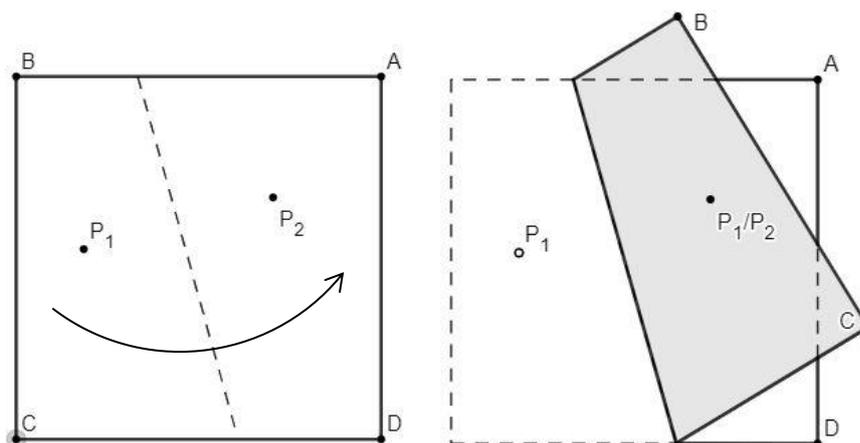


Fonte: Composição do autor

Podemos fazer uma relação direta com o primeiro Axioma da Geometria Euclidiana Plana, citado por BARBOSA (1995, p.1) que diz: “*Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos*”.

**Axioma 2:** Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobragem que os torna coincidentes.

Figura 9 – Axioma 2

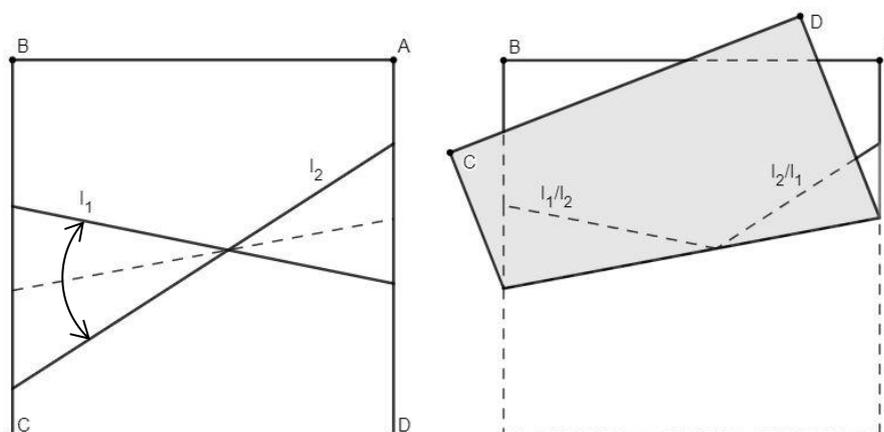


Fonte: Composição do autor

Esse axioma mostra a existência da mediatriz de um segmento e como consequência obter seu ponto médio. Como a dobra sobrepõe os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , a distância dos pontos a dobra é a mesma para qualquer ponto sobre a dobra, como a dobra divide o segmento  $P_1P_2$ , a dobra representa a mediatriz do segmento.

**Axioma 3:** Dados duas retas,  $l_1$  e  $l_2$ , concorrentes, há pelo menos uma dobra que as torna coincidentes.

Figura 10 – Axioma 3



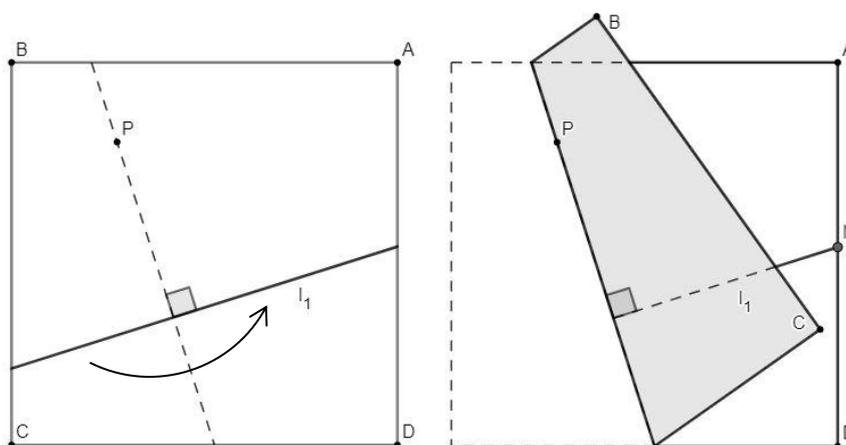
Fonte: Composição do autor

Esse axioma mostra a existência da bissetriz dos ângulos formados pelas retas, note que para qualquer figura a obtenção da bissetriz seguirá esse axioma, bastando para tanto sobrepor as retas.

No caso de retas paralelas o que será obtido é uma terceira reta paralela as duas anteriores.

**Axioma 4:** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $l_1$ , há uma única dobra perpendicular à  $l_1$  que passa por  $P$ .

Figura 11 – Axioma 4

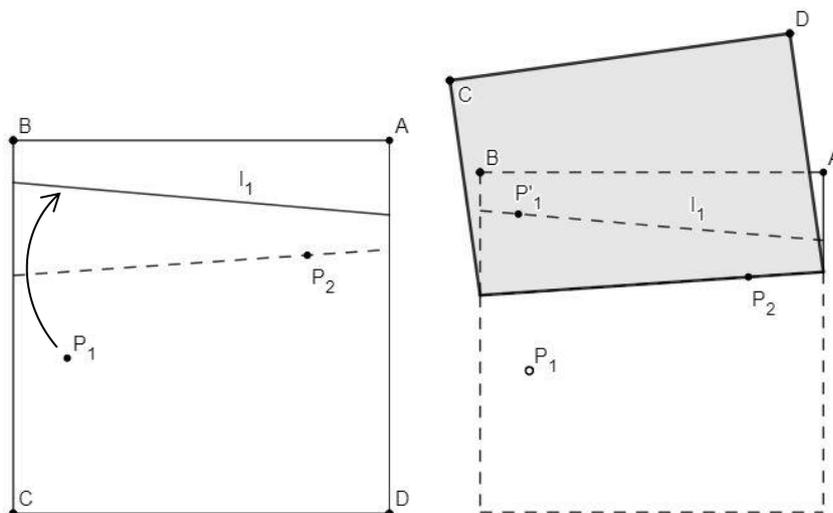


Fonte: Composição do autor

Para obtermos essa dobra basta dobrarmos a reta nela mesma, depois vincamos a reta que passa pelo ponto. Esse axioma mostra a existência de uma única reta perpendicular a  $l_1$  passando por  $P$ . A Figura 11 mostra o caso para o qual o ponto  $P$  não pertence a reta, para o caso de  $P$  pertencer a reta basta dobrar a reta nela mesma em  $P$ .

**Axioma 5:** Dados dois pontos distintos,  $P_1$  e  $P_2$ , e uma reta  $l_1$ , há uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $l_1$  e que passa por  $P_2$ .

Figura 12 – Axioma 5

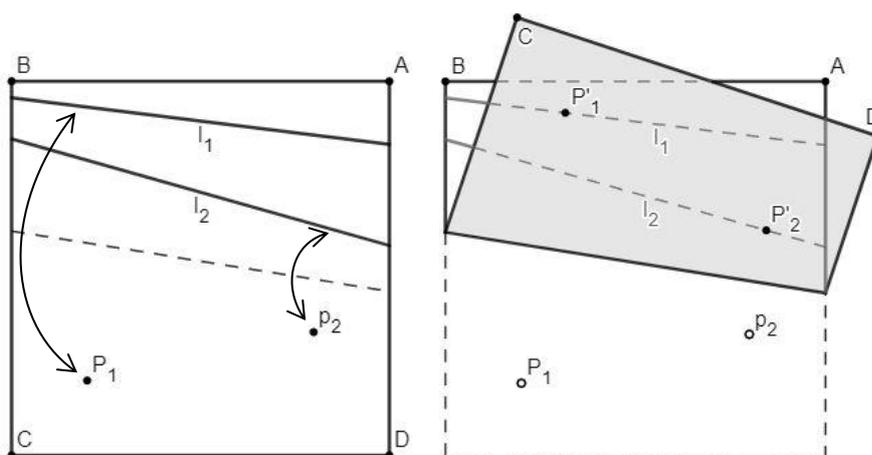


Fonte: Composição do autor

Para esse axioma usaremos as mesmas técnicas que utilizamos nos axiomas 2 e 4. Para isso basta projetar  $P_1$  sobre a reta obtendo  $P'_1$ , depois basta obter a perpendicular à reta que passa por  $P_1$  e  $P'_1$ , passando por  $P_2$ .

**Axioma 6:** Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , distintos e duas retas  $l_1$  e  $l_2$  distintas, há uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $l_1$  e  $P_2$  em  $l_2$ .

Figura 13 – Axioma 6

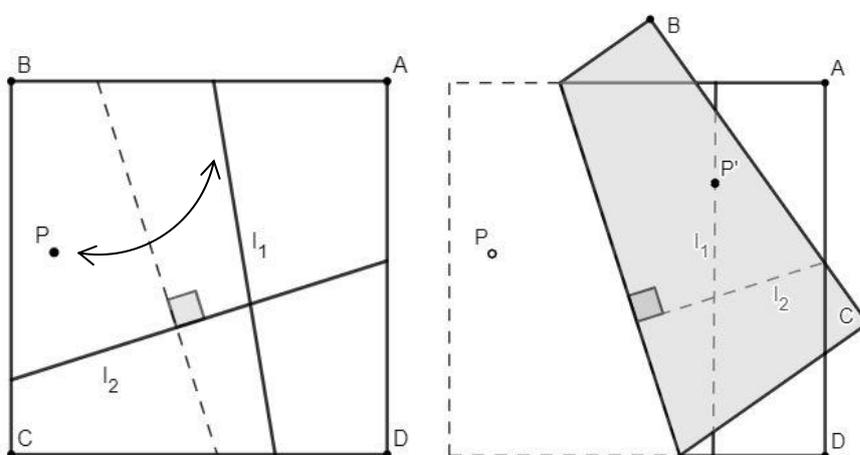


Fonte: Composição do autor

Para o axioma 6 utilizaremos a mesma técnica empregada no anterior, bastando para isso fazer com que as extremidades do segmento formado por  $P_1$  e  $P_2$  coincida com as retas.

Axioma 7: Dado um ponto  $P$  e duas retas,  $l_1$  e  $l_2$ , distintas, há uma dobra que faz incidir  $P$  em  $l_1$  e é perpendicular a  $l_2$ .

Figura 14 – Axioma 7



Fonte: Composição do autor

Para este, usaremos as técnicas de dobradura que foram utilizadas nos axiomas 4, 5 e 6.

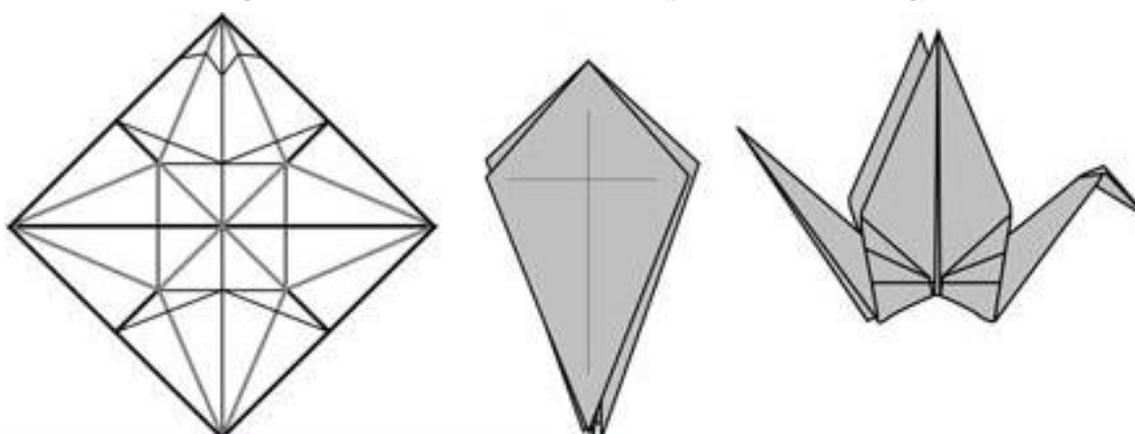
Em MENEZES (2014), os Axiomas de Huzita-Hatori, são abordados a luz da geometria analítica, essa abordagem é muito interessante do ponto de vista didático para ser utilizado como complemento do estudo de conceitos básicos no Ensino Médio, pois engloba conceitos como coeficiente angular, ponto médio, equação da reta e estudo das posições relativas entre retas, mas para uma abordagem no Ensino Fundamental esses axiomas quando trabalhados de maneira lúdica, podem ser usados para reforçar alguns conceitos importantes de geometria plana, dentre eles podemos citar o conceito de reta, a definição de bissetriz, mediatriz e mediana, paralelismo e perpendicularismo, sempre tomando o cuidado de trabalhar o conceito antes da prática, para familiarizar o estudante com as definições e os termos utilizados.

### 3.2 O teorema de Maekawa e o teorema de Kawasaki

Para apresentar os dois teoremas seguintes consideraremos o *Crease pattern*, que é o diagrama do padrão de dobras de um origami. Iremos considerar ainda que um origami é dito planificado quando estiver comprimido, como na figura 15, na figura 2 o mesmo modelo não está comprimido.

Tradicionalmente os origamis são confeccionados a partir de um único pedaço de papel, mas mesmo os origamis modulares, que são formados por várias peças, possuem um *crease pattern* para cada peça. Alguns desses diagramas diferenciam as dobras vale das dobras montanha, o que facilita a construção. A figura a seguir mostra um exemplo simples, o crease pattern do *tsuru*, que é a representação de um pássaro (garça japonesa).

Figura 15 – Crease Pattern de Tsuru (por: Kristina Wissling)



Fonte: SASAKI ORIGAMI. Tipos de origami: crease pattern ou CP. 2015<sup>8</sup>.

O Teorema de Maekawa, faz uma relação entre a quantidade dobras vale ( $V$ ) e a quantidade de dobras montanha ( $M$ ) em um vértice interno (ponto de encontro de pelo menos três dobras) do *crease pattern*, de um origami planificado, esse teorema pode não ser comprovado quando tomarmos todos os vértices simultaneamente.

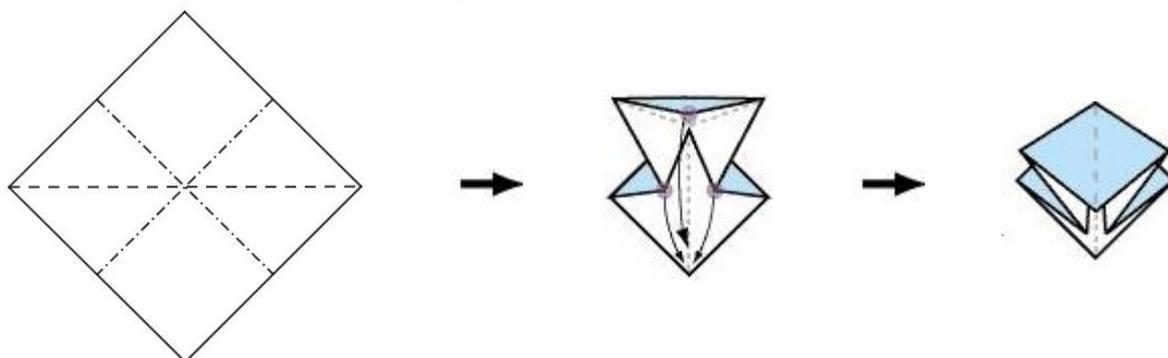
<sup>8</sup> Disponível em: <https://sasakiorigami.wixsite.com/sasakiorigami/crease-pattern>. Acesso em: 12 mar. 2020.

O Teorema de Kawasaki, relaciona os ângulos formados pelas dobras em um vértice interno, assim como no Teorema de Maekawa, pode não ser comprovado quando tomamos todos os vértices internos simultaneamente.

**Teorema de Maekawa:** Seja  $M$  o número de dobras montanha e  $V$  o número de dobras vales que formam um vértice em um origami planificado, então,  $M - V = \pm 2$ .

**Demonstração:** Vamos utilizar um pedaço de papel quadrado. Dobramos ao meio pela diagonal fazendo uma dobra em vale, vamos fazer agora duas dobras, de forma que cada uma passe pelos pontos médios dos lados opostos, essas dobras devem ser feitas em montanha como na figura abaixo, o resultado é a base do *tsuru*.

Figura 16 – Base do tsuru

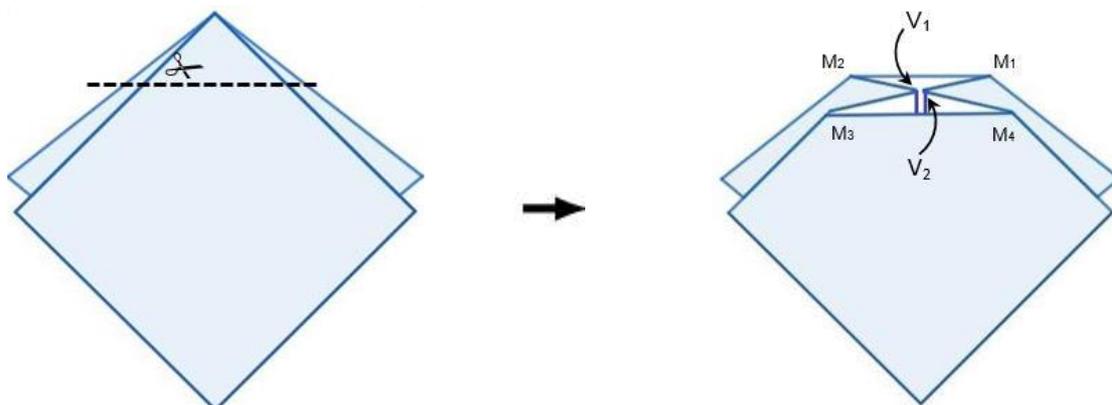


Fonte: ORIGAME-FUN.COM. Origami crane instruction. 2010<sup>9</sup>.

Agora recortando abaixo do vértice, observamos que obtemos o polígono  $M_1M_2V_1M_3M_4V_2$ , à medida que vamos “apertando” o origami o polígono vai se degenerando.

<sup>9</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: <https://www.origami-fun.com/origami-crane.html>. Acesso em: 12 mar. 2020.

Figura 17 – Teorema de Maekawa (parte de baixo)



Fonte: Composição do autor

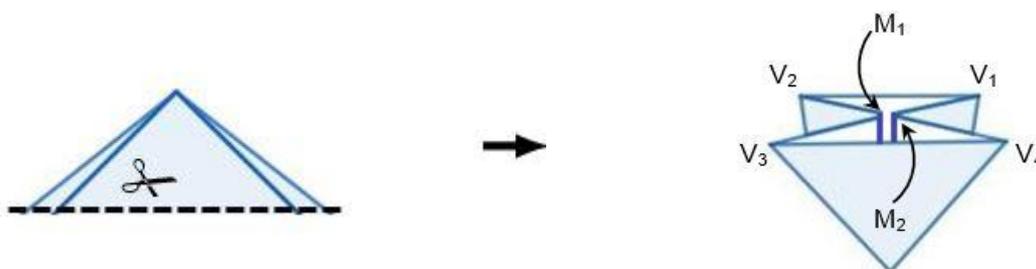
Daí podemos concluir que a soma dos ângulos interno  $S_i = 360^\circ V$ .

Note que os ângulos, depois de totalmente “apertado”, que tem como vértice as dobras montanhas os vértices marcados com  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  tem valor  $0^\circ$  (e os ângulos que têm como vértice as dobras vale (os vértices marcados com  $V_1$  e  $V_2$ ) tem valor  $360^\circ$ . A soma dos ângulos internos de um polígono é dada por:  $S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$ , onde, onde  $n$  é a quantidade de lados, como a quantidade de lados é igual à quantidade vértices, então  $n = M + V$ , igualando as fórmulas temos:

$$360^\circ V = (M + V - 2) \cdot 180 \Rightarrow M + V - 2 = 2 \cdot V \Rightarrow M - V = 2.$$

Observe a figura 18, onde iremos analisar a parte de acima do corte na figura 17, a relação entre as dobras e os ângulos formados estará ao contrário, onde obtemos o polígono  $V_1 V_2 M_1 V_3 V_4 M_2$ , e de forma semelhante obtemos a relação  $V - M = 2$ . ■

Figura 18 – Teorema de Maekawa (parte de cima)



Fonte: Composição do autor

**Corolário:** O número de dobras em um vértice de um origami é par.

**Demonstração:** A quantidade de dobras em um vértice é dado por  $M+V$ , como  $M-V = \pm 2 \Rightarrow M = V \pm 2$ , então  $M+V = V \pm 2 + V = 2 \cdot V \pm 2 = 2 \cdot (V \pm 1)$ , ou seja,  $M+V$  é par. ■

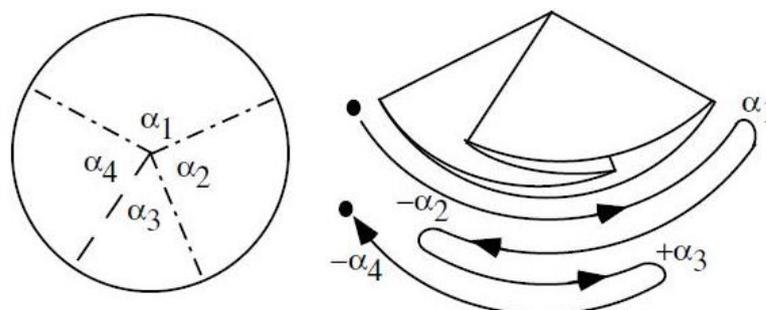
**Teorema de Kawasaki:** A soma dos ângulos alternados em um vértice interno de um origami (no caso o crease pattern) é  $180^\circ$ .

**Demonstração:** Para essa demonstração usaremos um papel de forma circular como na figura 19.

Como a quantidade de dobras em um vértice de um origami é par, podemos escrever para os ângulos formados por essas dobras a seguinte relação:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n} = 360^\circ \quad (1)$$

Figura 19 – Teorema de Kawasaki



Fonte: HULL, Thomas. On the mathematics of flat origamis. **Congressus Numerantium**. [S.l.], v. 100, 1995<sup>10</sup>.

Depois de efetuar as dobras, podemos observar que uma partícula posicionada na borda do papel realiza um movimento de “zig-zag”, até contornar toda a borda, voltando ao ponto de partida, observe que para os ângulos temos um movimento semelhante a um pêndulo, e considerando o sentido anti-horário dos ângulos e a sua variação nesse movimento, podemos escrever:

<sup>10</sup> Disponível em: [https://www.researchgate.net/profile/Thomas-Hull-2/publication/2357716\\_On\\_the\\_Mathematics\\_of\\_Flat\\_Origamis/links/53f47f410cf22be01c3ec6b9/On-the-Mathematics-of-Flat-Origamis.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Thomas-Hull-2/publication/2357716_On_the_Mathematics_of_Flat_Origamis/links/53f47f410cf22be01c3ec6b9/On-the-Mathematics-of-Flat-Origamis.pdf). Acesso em: 28 dez. 2020.

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \dots - \alpha_{2n} = 360^\circ \quad (2)$$

Somando (1) e (2), temos:

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \dots + 2\alpha_{2n-1} = 360^\circ \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = 180^\circ .$$

Para obtermos a outra relação basta inverter o caminho no ponto de partida. ■

### 3.3 Alguns resultados matemáticos obtidos com ou através de dobraduras

Mostraremos a seguir alguns resultados utilizando dobraduras como ferramenta. Escolhemos esses pois são problemas conhecidos e sem resolução com régua e compasso, a Trissecção de Segmentos resolvido pelos Teoremas de Haga, a Trissecção de um Ângulo resolvido por Hisashi Abe e a Duplicação do Cubo. Usaremos geometria plana para mostrar as relações

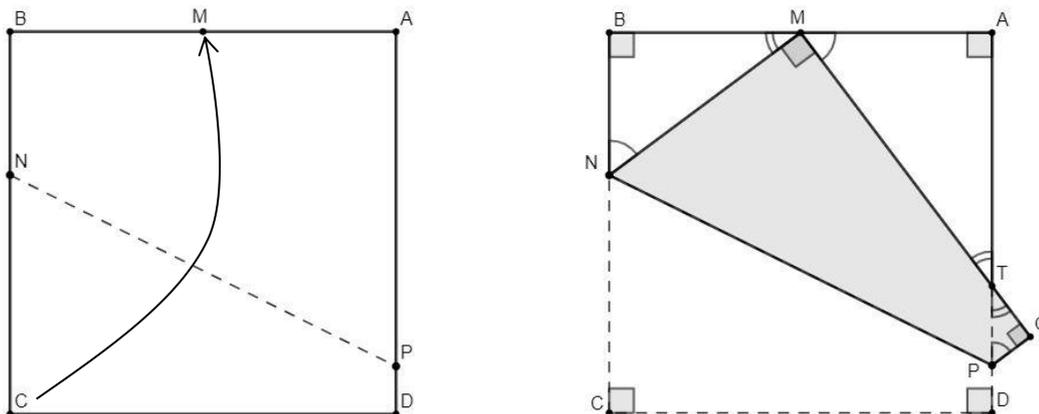
#### 3.3.1 Os teoremas de Haga

Os três Teoremas de Haga tem a mesma finalidade, dividir um quadrado de papel em três retângulos iguais, eles se diferenciam apenas pela construção feita pelo seu autor Kazuo Haga. Esses Teoremas resolvem o problema da Trissecção de um segmento, pois dividem um dos lados( $l$ ) do quadrado em segmentos de medida  $\frac{1}{3}l$  e  $\frac{2}{3}l$ .

O primeiro e o terceiro fazem uso da mesma construção, a diferença está em como a figura é utilizada, mas o resultado é o mesmo, o segundo mostra uma construção diferente, por isso, mostraremos o primeiro e o terceiro e depois o segundo.

**Primeiro Teorema de Haga:** Seja um quadrado de vértices  $A, B, C, D$  e  $M$  o ponto médio do segmento  $AB$ . Quando efetuamos uma dobra de forma que o ponto  $C$  incide sobre  $M$  obtemos  $T$ , que é o ponto de intersecção do lado  $CD$  com o lado  $AD$ , então a medida de  $\overline{DT} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ .

Figura 20 – Primeiro Teorema de Haga



Fonte: Composição do autor

**Demonstração:** Vamos considerar que a medida do lado do quadrado  $ABCD$  seja uma unidade de comprimento e  $NP$  seja o segmento obtido com a dobra descrita. Vamos mostrar primeiro que os triângulos retângulos  $\triangle NMB$  e  $\triangle MAT$  são semelhantes, para isso observe que o que o ângulo  $\widehat{NMQ} = 90^\circ$ , pois é a projeção do vértice  $C$  em  $M$  e  $Q$  é a projeção de  $D$ , então  $\widehat{BMN} + \widehat{AMT} = 90^\circ$  (1), agora considerando ainda as igualdades  $\widehat{BMN} + \widehat{BNM} = 90^\circ$  (2) e  $\widehat{AMT} + \widehat{ATM} = 90^\circ$  (3), comparando (1) e (2) obtemos  $\widehat{AMT} = \widehat{BNM}$  e comparando (1) e (3) obtemos  $\widehat{BMN} = \widehat{ATM}$ . Podemos concluir então que  $\triangle NMB$  e  $\triangle MAT$  são semelhantes pois seus ângulos são iguais.

Como  $\overline{BC} = \overline{BN} + \overline{NM} = 1$ , então podemos escrever  $\overline{NM} = 1 - \overline{BN}$ , aplicando o Teorema de Pitágoras para o  $\triangle MBN$ , temos:

$$(\overline{MB})^2 + (\overline{BN})^2 = (\overline{MN})^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\overline{BN})^2 = (1 - \overline{BN})^2 = 1 - 2(\overline{BN}) + (\overline{BN})^2 \Rightarrow$$

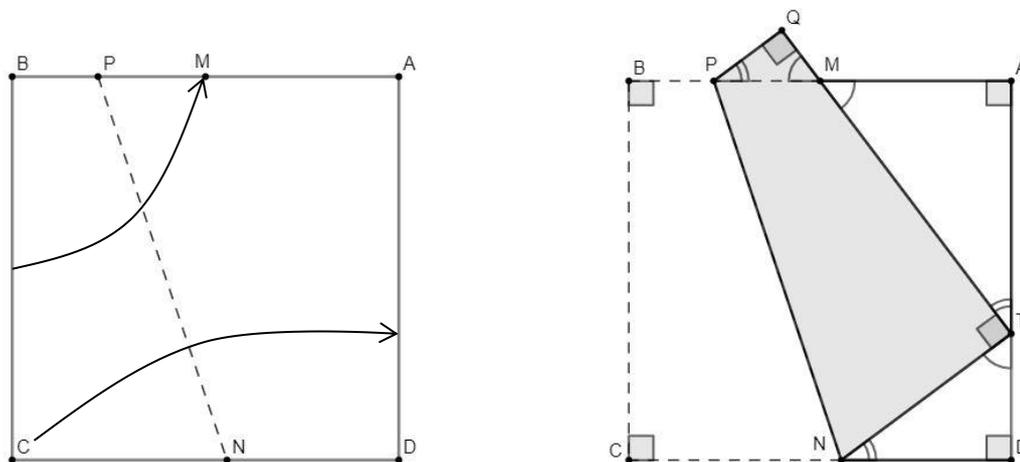
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right) = 1 - 2(\overline{BN}) \Rightarrow 2(\overline{BN}) = \left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow (\overline{BN}) = \left(\frac{3}{8}\right). \text{ Então } \overline{NM} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}, \text{ como } \triangle NMB$$

e  $\triangle MAT$  são semelhantes podemos escrever:

$$\frac{(\overline{MA})}{(\overline{BN})} = \frac{(\overline{AT})}{(\overline{MB})} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{(\overline{AT})}{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\overline{AT}) = \frac{2}{3}, \text{ como } \overline{AT} + \overline{DT} = 1 \Rightarrow \overline{DT} = \frac{1}{3}.$$

**Terceiro Teorema de Haga:** Seja um quadrado de vértices  $A, B, C, D$  e  $M$  o ponto médio do segmento  $AB$ . Quando efetuamos uma dobra de forma que o ponto  $M$  incide sobre o lado  $BC$  e simultaneamente o ponto  $C$  incide sobre o lado  $AD$ , obtemos  $T$  que é o ponto de intersecção do ponto  $C$  com o lado  $AD$ , então a medida de  $\overline{DT} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ .

Figura 21 – Terceiro Teorema de Haga



Fonte: Composição do autor

**Demonstração:** Assim como no Teorema anterior vamos considerar que a medida do lado do quadrado  $ABCD$  seja uma unidade de comprimento e  $NP$  seja o segmento obtido com a dobra descrita.

Vamos mostrar primeiro que os triângulos retângulos  $\triangle NDT$ ,  $\triangle MQP$  e  $\triangle MAT$  são semelhantes, para isso observe que o que o ângulo  $\hat{NTQ} = 90^\circ$ , pois é a projeção do vértice  $C$  no lado  $AD$ , então  $\hat{DTN} + \hat{ATM} = 90^\circ$  (1), agora considerando ainda as igualdades  $\hat{DNT} + \hat{DTN} = 90^\circ$  (2) e  $\hat{AMT} + \hat{ATM} = 90^\circ$  (3), comparando (1) e (2) obtemos  $\hat{ATM} = \hat{DNT}$  e comparando (1) e (3) obtemos  $\hat{AMT} = \hat{DTN}$ , observe ainda que  $\hat{QMP} = \hat{AMT}$  pois são opostos pelo vértice então  $\hat{QPM} = \hat{ATM}$ , podemos concluir que  $\triangle NDT$ ,  $\triangle MQP$  e  $\triangle MAT$  são semelhantes pois seus ângulos são iguais.

Observe que  $(\overline{QP}) + (\overline{PM}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overline{QP}) = \frac{1}{2} - (\overline{PM})$  e  $(\overline{QM}) + (\overline{MT}) = 1 \Rightarrow (\overline{MT}) = 1 - (\overline{QM})$ ,

aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle MQP$  temos:

$$(\overline{PM})^2 = (\overline{QP})^2 + (\overline{QM})^2 = \left(\frac{1}{2} - (\overline{PM})\right)^2 + (\overline{QM})^2 = \frac{1}{4} - (\overline{PM}) + (\overline{PM})^2 + (\overline{QM})^2 \quad \text{resolvendo}$$

obtemos  $(\overline{PM}) = \frac{1}{4} + (\overline{QM})^2$ . Como  $\triangle MQP$  e  $\triangle MAT$  são semelhantes, podemos

$$\text{escrever: } \frac{(\overline{MT})}{(\overline{PM})} = \frac{(\overline{MA})}{(\overline{QM})} \Rightarrow \frac{1 - (\overline{QM})}{(\overline{PM})} = \frac{\frac{1}{2}}{(\overline{QM})} = \frac{1}{2(\overline{QM})} \Rightarrow (\overline{PM}) = 2(\overline{QM}) - 2(\overline{QM})^2.$$

Substituindo  $(\overline{PM})$ , temos:

$$\frac{1}{4} + (\overline{QM})^2 = 2(\overline{QM}) - 2(\overline{QM})^2 \Rightarrow 3(\overline{QM})^2 - 2(\overline{QM}) + \frac{1}{4}, \text{ resolvendo a equação obtemos}$$

$$(\overline{QM}) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad (\overline{QM}) = \frac{1}{6}, \quad \text{como } (\overline{QM}) < (\overline{PM}) < \frac{1}{2}, \quad \text{então } (\overline{QM}) = \frac{1}{6} \quad \text{e como}$$

$$(\overline{MT}) = 1 - (\overline{QM}) \Rightarrow (\overline{MT}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle MAT$ , temos:

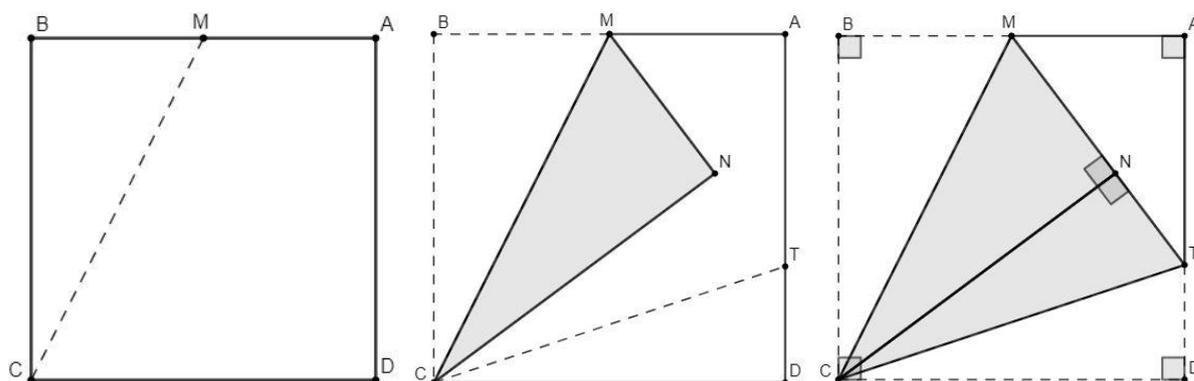
$$(\overline{MT})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{AT})^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\overline{AT})^2 \Rightarrow (\overline{AT})^2 = \frac{25}{36} - \frac{1}{4} \Rightarrow (\overline{AT})^2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9},$$

$$\text{então } (\overline{AT}) = \frac{2}{3} \quad \text{e como } \overline{AT} + \overline{DT} = 1 \Rightarrow \overline{DT} = \frac{1}{3}.$$

**Segundo Teorema de Haga:** Seja um quadrado de vértices  $A, B, C, D$  e  $M$  o ponto médio do segmento  $AB$ , efetuando a dobra  $CM$ , obtemos  $N$ . Seja  $T$  o ponto onde efetuamos a dobra  $CT$  e que faz coincidir o ponto  $D$  com  $N$ , então a medida de

$$\overline{DT} = \frac{1}{3} \overline{AD}.$$

Figura 22 – Segundo Teorema de Haga



Fonte: Composição do autor

**Demonstração:** Assim como no Teorema anterior vamos considerar que a medida do lado do quadrado  $ABCD$  seja uma unidade de comprimento e  $CN$  e  $CT$  sejam os segmentos obtido com as dobras descritas.

Note que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $T$  são colineares, pois os ângulos  $\widehat{MNC}$  e  $\widehat{TNC}$  são retos e  $N$  é o ponto de encontro dos pontos  $B$  e  $D$  após efetuarmos as dobras descritas.

Como  $\overline{AT} + \overline{DT} = 1 \Rightarrow \overline{AT} = 1 - \overline{DT}$ ,  $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MN} = \frac{1}{2}$  e  $\overline{NT} = \overline{DT}$ , aplicando o

Teorema de Pitágoras no triângulo  $\triangle MAT$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{MN} + \overline{NT})^2 &= (\overline{MA})^2 + (\overline{AT})^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \overline{DT}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - \overline{DT})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{4} + \overline{DT} + (\overline{DT})^2 &= \frac{1}{4} + 1 - 2 \cdot \overline{DT} + (\overline{DT})^2 \Rightarrow 3 \cdot \overline{DT} = 1 \Rightarrow \overline{DT} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

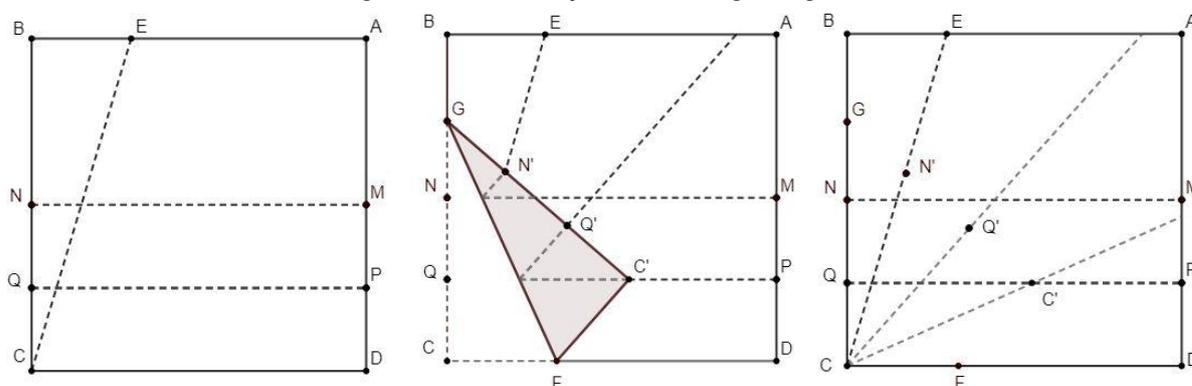
### 3.3.2 Trisseção de um ângulo

Dos três problemas geométricos sem solução da antiguidade, a trisseção do ângulo possui uma solução usando dobraduras, apesar de não ser possível a construção com régua e compasso, essa resolução é creditada a Hisashi Abe, no início da década de 1980.

Para essa construção considere um quadrado  $ABCD$  e seja  $E$  um ponto do segmento  $\overline{AB}$ . Realize a dobra  $CE$ , formando o ângulo  $\widehat{DCE}$ , marque os pontos  $M$  e  $N$ , pontos médios dos segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente, depois marque os

pontos  $P$  e  $Q$ , pontos médios de  $\overline{CN}$  e  $\overline{DM}$  respectivamente, realize as dobras  $PQ$  e  $MN$  e note que são paralelos a  $\overline{CD}$ .

Figura 23 – Trissecção de um ângulo agudo

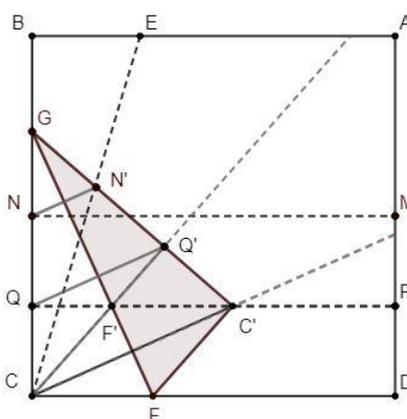


Fonte: Composição do autor

Realize uma dobra de forma que  $N$  fique sobre  $CE$ , marque  $N'$  de modo que  $C$  fique sobre  $PQ$ , e marque  $C'$ , marque os pontos  $G$ ,  $Q'$  e  $F$ , agora desdobre. Para terminar realize as dobras  $CQ'$  e  $CC'$ , assim os três ângulos formados são iguais.

Para mostrar que a construção é válida, considere a figura seguir. Essa figura será a junção dos dois últimos passos da Figura 23.

Figura 24 – Demonstração trissecção de um ângulo agudo



Fonte: Composição do autor

Observe que os triângulos  $\triangle QF'Q'$  e  $\triangle CF'C'$  são isósceles por construção, daí  $QF' = F'Q'$  e  $CF' = F'C'$ , pois quando desdobramos esses segmentos coincidem.

Note que o ângulo  $\widehat{FC'C} = \widehat{C'C'Q}$ , pois são alternos internos e como  $\triangle C'FC'$  é isósceles, temos  $\widehat{FC'C} = \widehat{C'CF}$ .

Como  $GC \perp QC'$ , podemos concluir que  $CQ' \perp GC'$ , note ainda que  $NQ = N'Q'$  e  $QC = Q'C'$ , e que  $CQ'$  é a mediatriz de  $N'C'$ , sendo assim,  $\triangle CN'C'$  também é isósceles, logo  $\widehat{C'CN'} = \widehat{Q'CN'}$ , então  $\widehat{FC'C} = \widehat{C'CN'} = \widehat{Q'CN'}$ , como  $\widehat{C'CN'} = \widehat{C'CF}$ , e os pontos  $Q$  e  $F$  pertencem ao mesmo seguimento, concluindo assim a trissecção do ângulo  $\widehat{DC'E}$ .

### 3.3.3 A duplicação do cubo

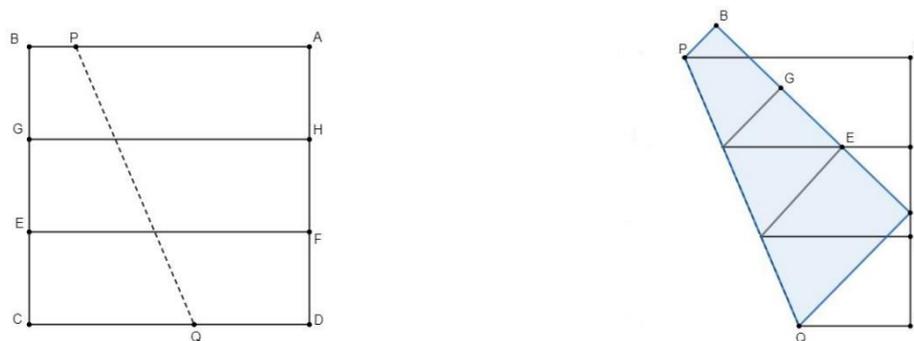
Outro dos problemas geométricos da antiguidade, que possui uma solução utilizando dobraduras, é a duplicação do cubo.

O problema é o seguinte: dado um segmento  $a$ , de forma que este segmento seja aresta de um cubo, com volume  $V_a = a^3$ , queremos encontrar um outro segmento  $b$ , que seja aresta de um cubo de volume  $V_b = b^3$ , tal que  $V_b = 2 \cdot V_a$ , ou

$$\text{seja, } b^3 = 2 \cdot a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Para solucionar esse problema considere um quadrado  $ABCD$ . Fazendo uso do Teorema de Haga, vamos dividi-los em três retângulos iguais, depois realize a dobra  $PQ$ , de forma que  $E$  fique sobre  $GH$  marcando o ponto  $E'$  e que  $C$  fique sobre  $AD$  marcando  $C'$ . Seja  $x = AC'$  e  $y = DC'$ , então  $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ .

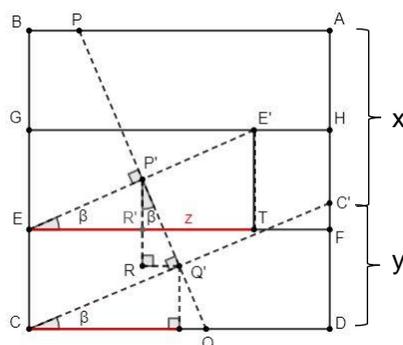
Figura 25 – Duplicação do Cubo



Fonte: Composição do autor

Para mostramos a relação proposta, vamos desdobrar a figura anterior, utilizando a Figura 26. Trace ou dobre os segmentos  $EE'$  e  $CC'$ . Por construção, temos que  $PQ$  divide esses dois segmentos ao meio nos pontos  $P'$  e  $Q'$ , sendo assim, a mediatriz desses dois segmentos.

Figura 26 – Demonstração Duplicação do Cubo



Fonte: Composição do autor

Marque o ponto  $R$  de forma que o  $Q'R // CR$ , daí chamaremos  $\hat{DCC'} = \hat{FEE'} = \hat{RP'Q'} = \beta$ . Como  $ABCD$  é um quadrado  $x+y$  é lado do quadrado.

Para,  $\triangle DCC'$  temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x+y} \quad (1)$$

Marque o ponto  $T$ , projeção ortogonal de  $E'$  sobre  $EC'$ . Fazendo  $ET = z$ , para  $\triangle TEE'$  temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{x+y}{3}}{z} = \frac{x+y}{3z} \quad (2)$$

Igualando (1) a (2), temos:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{3z} \Rightarrow z = \frac{(x+y)^2}{3y}$$

Para a próxima relação, considere o  $\triangle P'RQ$ . Usando semelhança de triângulo e o fato de  $PQ$  ser mediatriz, podemos escrever  $RQ' = \frac{x+y}{2} - \frac{z}{2} = \frac{x+y-z}{2}$  e

$$P'R = P'R' + RR', \text{ onde } P'R' = \frac{x+y}{6} \text{ e } RR' = \frac{x+y}{3} - \frac{y}{2} = \frac{2x-y}{6}, \text{ então } P'R = \frac{x}{2}.$$

Para o  $\triangle P'RQ$ , temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{x+y-z}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{x+y-z}{x} \quad (3)$$

Igualando (1) a (3), temos:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{x+y-z}{x}$$

Substituindo z, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+y} &= \frac{x+y - \frac{(x+y)^2}{3y}}{x} \Rightarrow (x+y)^2 - \frac{(x+y)^3}{3y} = xy \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3y(x+y)^2 - (x+y)^3 = 3xy^2 \Rightarrow (x+y)^3 - 3y(x+y)^2 + 3xy^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+y)^3 - 3y(x+y)^2 + 3xy^2 + 3y^3 - 3y^3 + y^3 - y^3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+y)^3 - 3(x+y)^2y + 3(x+y)y^2 - y^3 - 2y^3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+y-y)^3 - 2y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 2y^3 \Rightarrow x = y\sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

## 4 CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS COM ORIGAMIS

O uso de origamis no ensino de matemática depende da construção ou apresentação das figuras para os estudantes ou a construção das mesmas por eles.

Neste capítulo vamos mostrar como obter algumas figuras planas através de dobraduras, usaremos essas figuras para construir alguns módulos que resultarão na montagem de alguns dos sólidos de Platão.

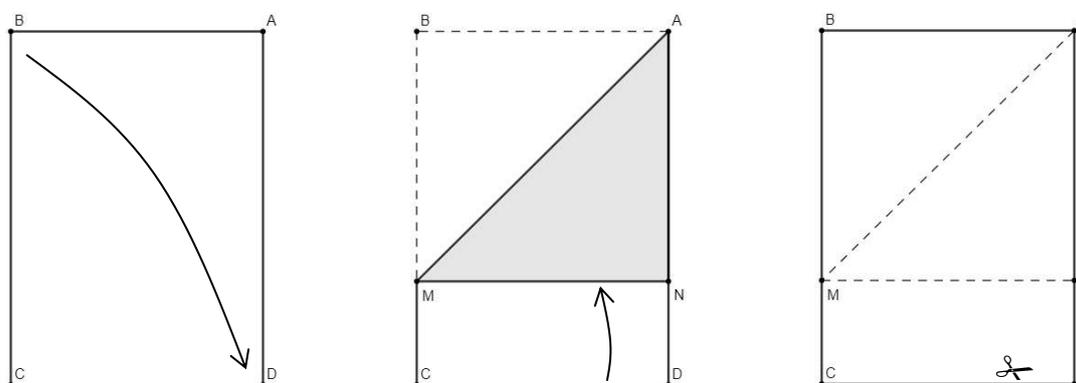
Ao final, teremos mostrado os módulos e a construção de todos os sólidos de Platão.

### 4.1 Obtendo um quadrado

Grande parte dos origamis é obtido a partir de papéis quadrados, vamos obter um quadrado a partir de uma folha retangular, sugerimos que seja usado uma folha de papel A4, pois é o formato de papel mais encontrado e temos a garantia das medidas dos lados, os cortes serão feitos nas linhas indicadas.

**Construção:** Seja  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  os vértices da folha retangular de papel, realize uma dobra passando por  $A$  que faça incidir  $B$  no lado  $AD$  marcando o ponto  $N$ , marque também o ponto  $M$ , que é a intersecção da dobra que passa por  $A$  como o lado  $BC$ , realize uma dobra que passe por  $MN$ , recorte sobre a dobra  $MN$ .

Figura 27 – Construção de um quadrado por dobradura



Fonte: Composição do autor



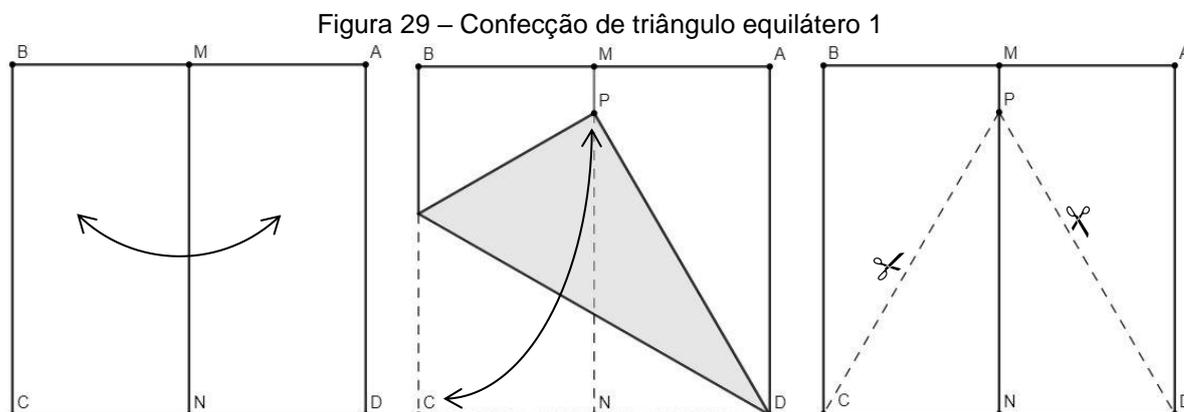
## 4.2 Obtendo um triângulo equilátero a partir de um quadrado

Existem algumas maneiras de obter um triângulo equilátero com dobraduras, mostraremos duas a partir de um quadrado, mas podem ser encontradas formas através de papéis retangulares também.

Esse método talvez seja o mais conhecido e usado pois usa um conceito de construção simples, a congruência de segmentos.

Comece dobrando o quadrado ao meio pelo lado  $AB$ , marque a dobra  $MN$ , realize uma dobra que passa por  $D$  e faz incidir  $C$  em  $MN$ , marque  $P$ , que é o ponto de interseção de  $C$  com  $MN$ , desdobre e realize as dobraduras  $PD$  e  $PC$ . Recorte o triângulo  $\triangle PCD$ .

Para mostrar que o triângulo obtido é equilátero, basta observar que, por construção,  $\overline{PD} = \overline{CD}$ , e como  $N$  é ponto médio de  $CD$ , então os triângulos retângulos  $\triangle PNC$  e  $\triangle PND$  são congruentes por lado-ângulo-lado.

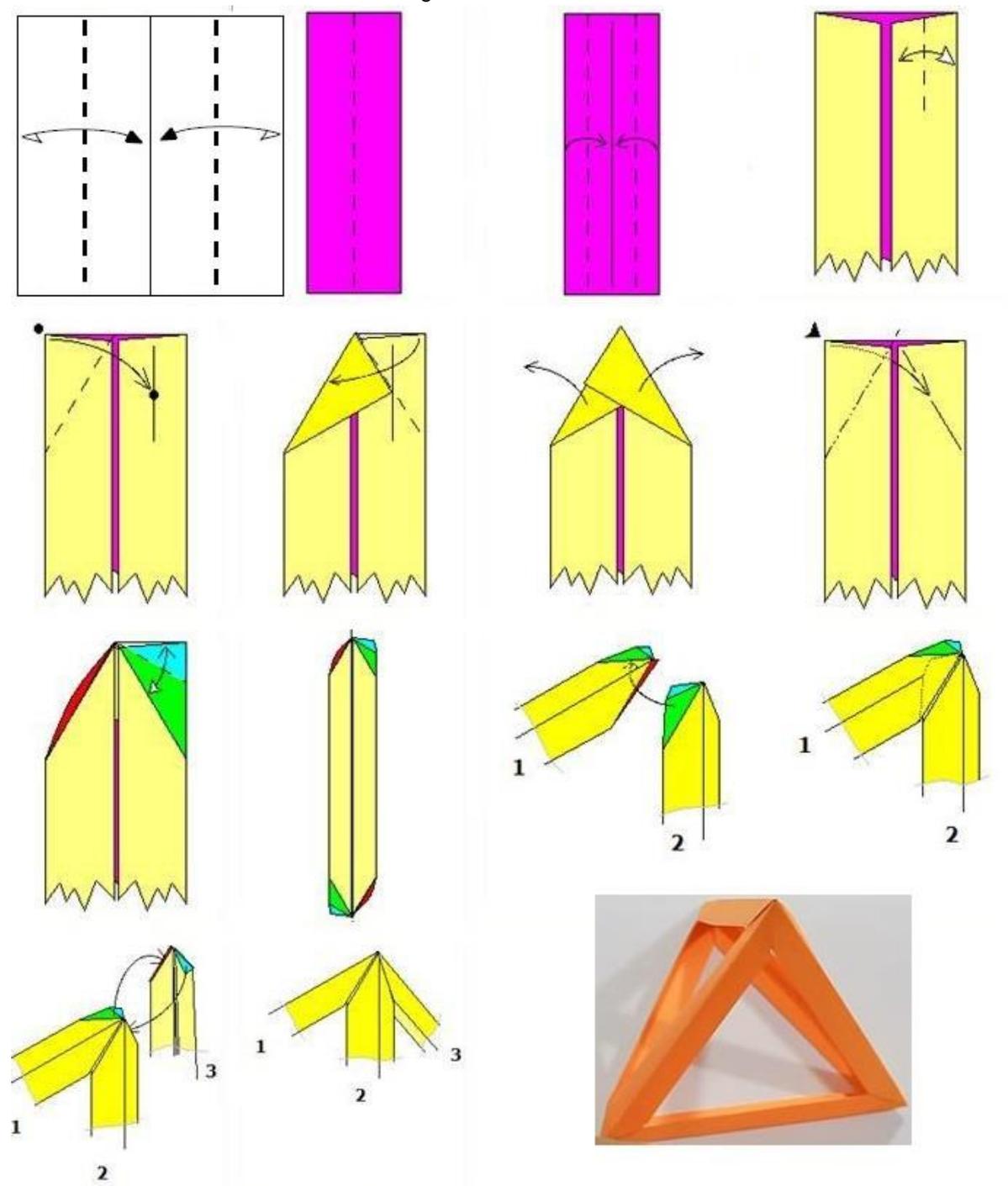


Fonte: Composição do autor

### 4.2.1 Construção do tetraedro

Para o Tetraedro, usaremos a adaptação de um módulo concebido por Francis Wo, a única modificação feita é a utilização de um papel quadrado, o qual utilizamos toda sua área. O módulo original é feito com um papel quadra no qual dividimos a largura em 3 partes e usamos apenas  $\frac{2}{3}$  dessa média, deixando o módulo mais estreito.

Figura 30 – Tetraedro



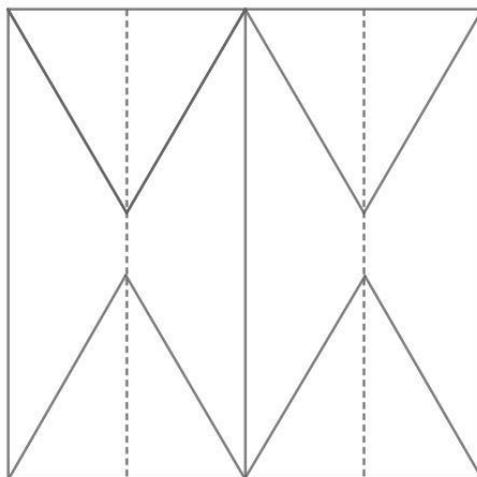
Fonte: O QUE É MEU É NOSSO. Origami: cinco tetraedros entrelaçados formando um dodecaedro<sup>12</sup>.

Abrindo o módulo feito, podemos perceber que o princípio utilizado foi o mesmo para obter o triângulo equilátero, o lado dos triângulos é a metade do lado,

<sup>12</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: <https://www.oqueemeuenosso.com.br/search/label/Origami%20Cinco%20Tetraedros%20Entrela%C3%A7ados>. Acesso em: 9 jan. 2021.

garantido assim que os triângulos do centro sejam equiláteros, formando um ângulo de  $60^\circ$  para o encaixe dos módulos

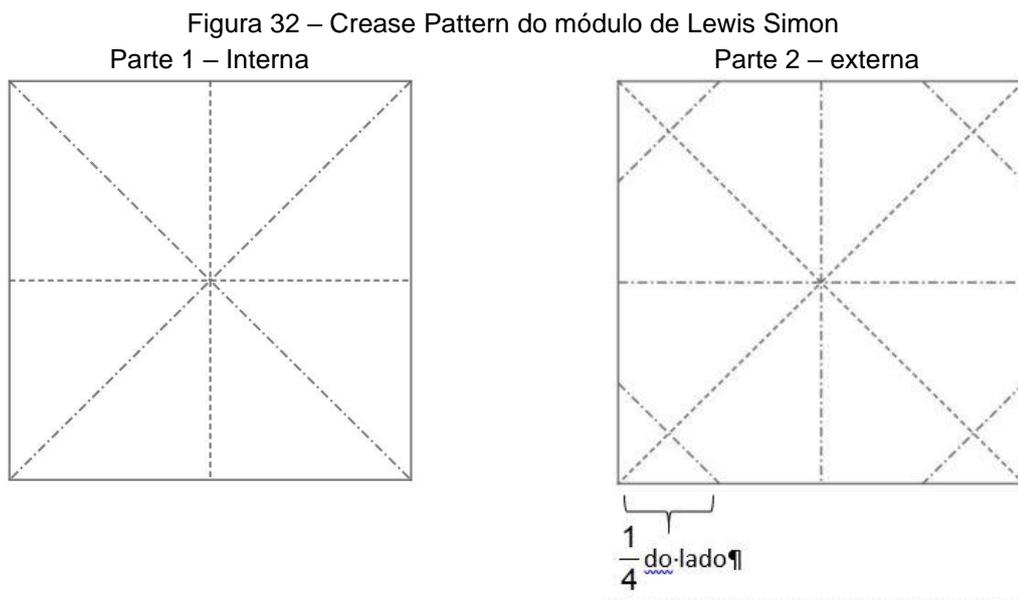
Figura 31 – Módulo de Francis Wo - Aberto



Fonte: Composição do autor

### 4.3 Construção do octaedro

Para o octaedro, usaremos o módulo feito por Lewis Simon, cada módulo é composto por duas peças feitas a partir de papéis quadrados, a diferença entre eles será apenas a posição de dobras vales e dobras montanhas. A seguir mostraremos a *crease pattern* dos módulos que formam a figura e seus resultados depois de dobrados.



Fonte: Composição do autor

Os dois módulos são obtidos realizando dobras que passam pelos pontos médios dos lados e vincando suas diagonais formando ângulos de  $45^\circ$ . Na parte 1, as diagonais são dobradas em montanha e as dobras dos pontos médios das laterais são feitas em vale, na parte 2, invertemos essas dobras.

Além disso, na parte 2, marcamos um segmento equivalente a  $\frac{1}{4}$  dos lados e marcamos as diagonais em montanha. Serão necessárias seis peças de cada parte, o resultado é mostrado a seguir.

Figura 33 – Crease Pattern do módulo de Lewis Simon



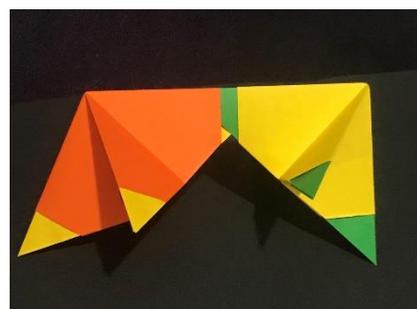
Parte 1 – Interna



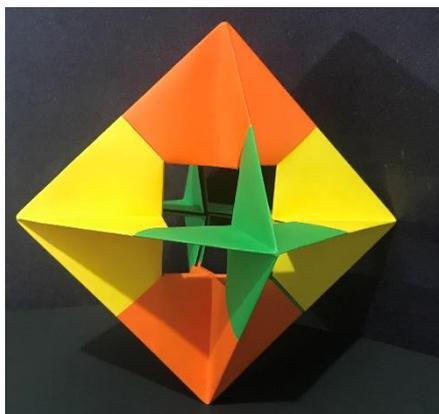
Parte 2 – externa



Encaixe a parte2 sobre a parte 1 e dobre a diagonal pequena da parte 2 para dentro, serão precisos seis módulos



Encaixe dos módulos



Fonte: Composição do autor

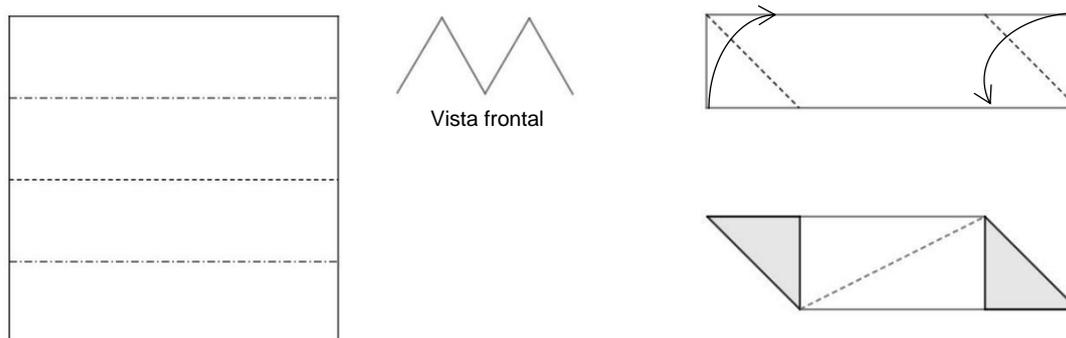
Como podemos ver, o resultado depois de unir os seis módulos é o octaedro proposto. Foi usado papel colorido para destacar os módulos e seus encaixes, podendo ser usado papel A4 comum e a até mesmo folhas de caderno, desde que os quadrados obtidos tenham a mesma medida.

Outros origamistas diagramaram figuras simples para o octaedro, como Francis Wo e David Mitchell.

#### 4.4 Módulo de 108° de Robert Neale e construção de um dodecaedro

É atribuído a Robert E. Neale, um origamista norte americano, é a criação de um módulo que gera um dodecaedro. Iremos mostra a confecção do módulo, depois iremos verificar que obtemos um ângulo bem aproximado de 108°, para a construção do módulo, observe a figura abaixo.

Figura 34 – Módulo 108° de Robert Neale (Parte 1)



Fonte: Composição do autor

Desdobrando a última parte, vamos mostrar que ocorre um ângulo de aproximadamente de 108°, considere a figura 34.

Figura 35 – Módulo 108° de Robert Neale (Parte 2)



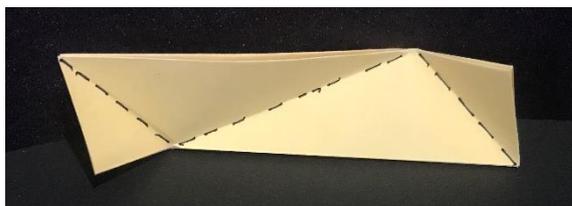
Fonte: Composição do autor

Para facilitar os cálculos e sem perda de generalidade vamos considerar que o quadrado da Figura 34 tem a medida do lado igual a 4 unidades, e na Figura 35 o segmento  $BB'$  tem medida de 1 unidade e o segmento  $BC$  tem três unidades e por construção  $\hat{A}BC = 45^\circ$ .

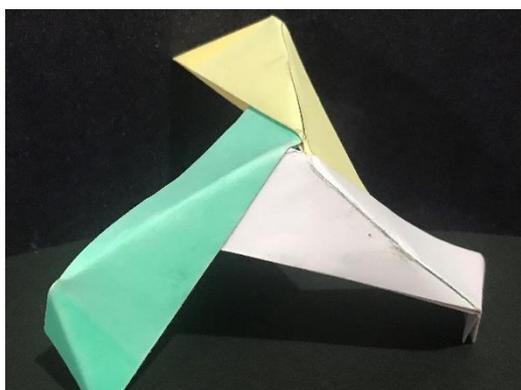
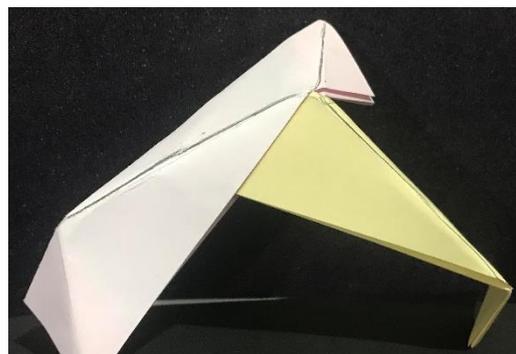
Observe o  $\triangle ABC$ , com  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = 3$  e  $AC = x$ . Aplicando a lei dos cossenos, temos  $x^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 5$ . Agora, denotando  $\hat{CAB} = \alpha$  e aplicando a lei dos cossenos em  $\alpha$ , temos:

$$3^2 = 5 + 2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha \cong 108,43$$

Figura 36 – Módulo 108° de Robert Neale (dodecaedro)



Apesar de simples são necessários 30 módulos



Cada vértice é formado por três módulos



Fonte: Composição do autor

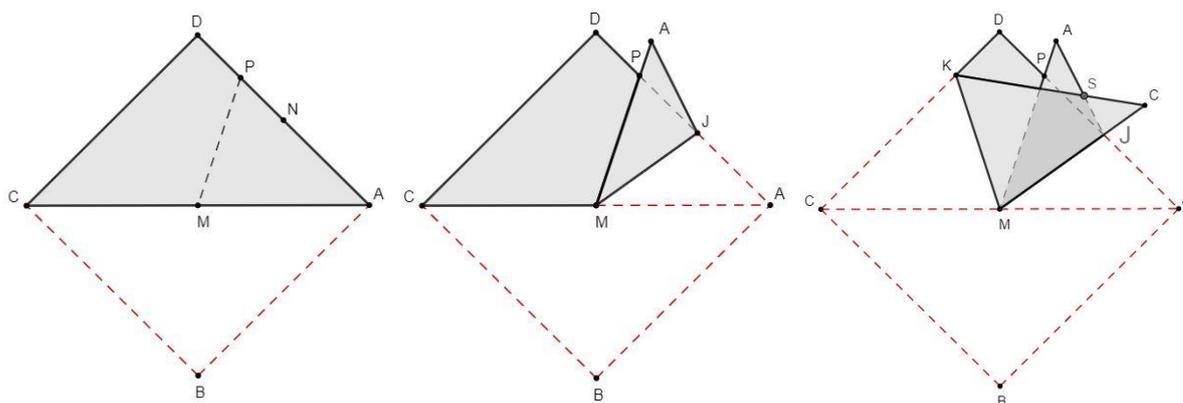
Para essa construção recomendamos o uso de papel 75g/m<sup>2</sup>, podendo ser usado papel A4 comum.

Outro origamista que produziu uma figura também formada por módulos simples foi David Mitchel, o diagrama se encontra em seu livro *Mathematical Origami Geometrical Shapes by Paper Folding*, formado também por 30 peças,

#### 4.5 Obtendo um pentágono regular a partir de um quadrado

Comece dobrando um quadrado ao meio pela diagonal  $AC$ , marque  $M$  ponto médio de  $AC$ , depois marque  $N$ , ponto médio de  $AD$  e marque  $P$ , ponto médio de  $ND$ , faça a dobra  $MP$ . Agora faça uma dobra de forma  $MA$  incide sobre  $MP$ , marque  $J$ , agora realize uma dobra de forma que  $MC$  incida em  $MJ$ , marque  $K$ , realize uma dobra que passe por  $MP$  e faça incidir  $MC$  em  $MK$ , marque  $Q$ , dobre para traz sobre  $MP$  o triângulo  $\triangle AMJ$ , realize uma dobra que passe por  $Q$  e que faça incidir  $C$  em  $CM$ , depois desdobre, agora corte seguindo essa última dobra todas as camadas de uma vez, depois abra o modelo para visualizar o pentágono.

Figura 37 – Confeção de pentágono regular (parte 1)



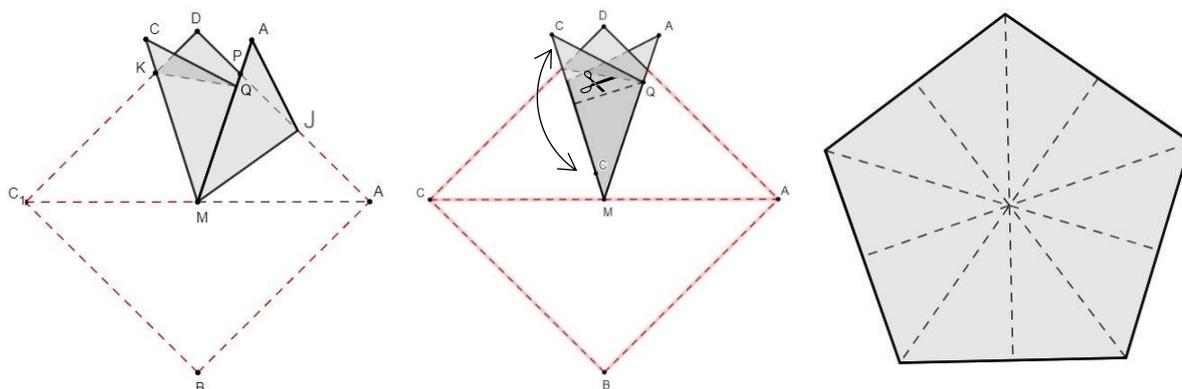
Dobrando o quadrado ao meio pela diagonal  $AC$ , marque  $M$  ponto médio de  $AC$ , depois marque  $N$ , ponto médio de  $AD$  e marque  $P$ , ponto médio de  $ND$ , faça a dobra  $MP$

Dobre de forma  $MA$  incide sobre  $MP$ , marque  $J$

dobre de forma que  $MC$  incida em  $MJ$ , marque  $K$

Fonte: Composição do autor

Figura 38 – Confeção de pentágono regular (parte 2)



realize uma dobra que passe por  $MP$  e faça incidir  $MC$  em  $MK$ , marque  $Q$ . Dobre para traz sobre  $MP$  o triângulo  $\triangle AMJ$

Realize uma dobra que passe por  $Q$  e que faça incidir  $C$  em  $CM$ , depois desdobre, agora corte seguindo essa última dobra todas as camadas de uma vez, depois abra o modelo

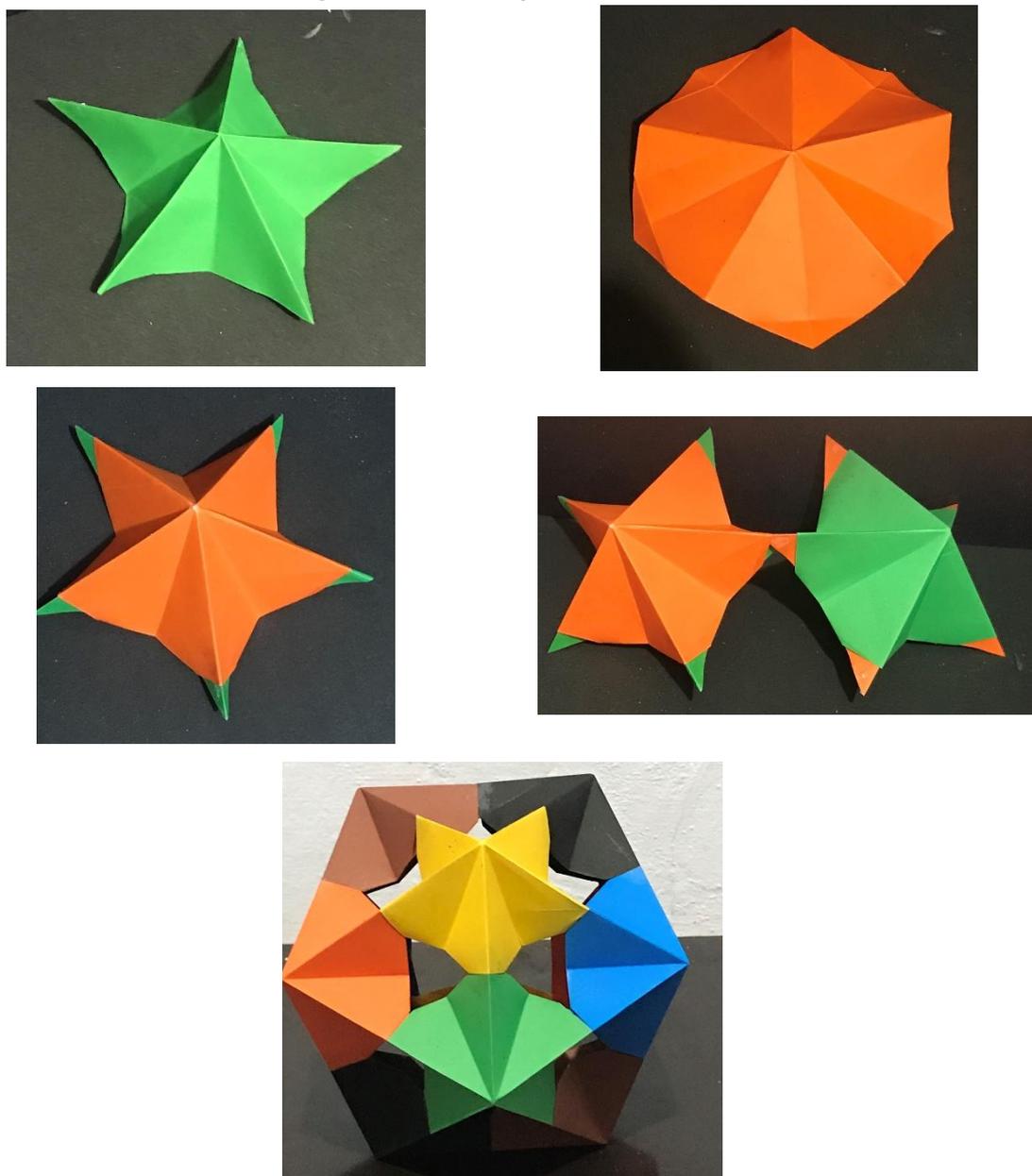
Fonte: Composição do autor

Esse modelo é obtido sobrepondo ângulos, a figura tem variações nos ângulos e comprimentos devido a espessura do papel e a maneira como é obtida. Para fins didáticos é fácil trabalhar com ela, mais adiante mostraremos como transformar em um módulo para a construção de um icosaedro.

#### 4.5.1 Construção de um icosaedro

Para este modelo, usaremos a mesma técnica que foi usada para a construção do dodecaedro, cada módulo será construído a partir de pentágonos como o da seção anterior, só modificaremos as dobras vales e montanhas. No primeiro, dobraremos em montanha do centro para o vértice e em vale do centro para o ponto médio do lado, que já está marcado no módulo, no segundo faremos o inverso e encaixaremos o segundo sobre o primeiro. Como no dodecaedro o encaixe é semelhante ao do dodecaedro, serão necessários 12 módulos, ou seja, 24 peças, 12 de cada.

Figura 39 – Construção do icosaedro

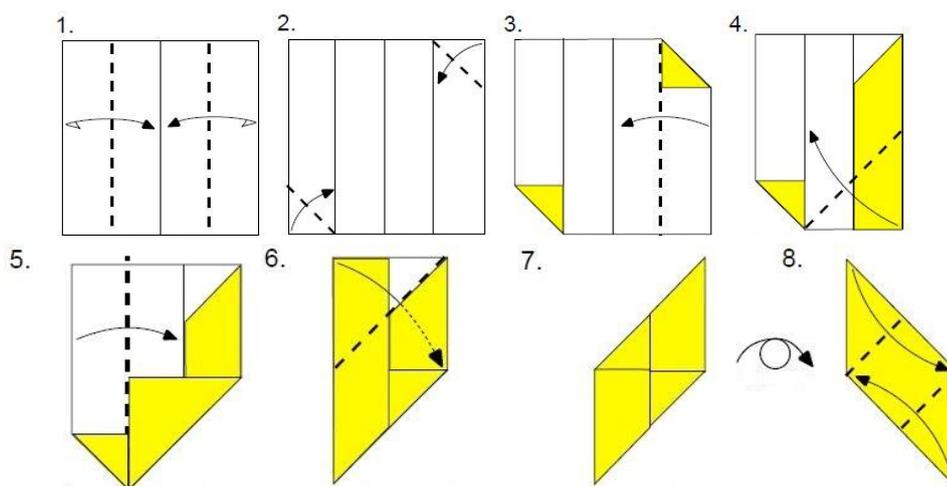


Fonte: Composição do autor

#### 4.6 O módulo Sonobe

Este módulo de fácil execução foi apresentado pela primeira vez na Sosaku Origami Group 67, por Mitsunobu Sonobe, no ano de 1968. A primeira figura apresentada foi um cubo formado por seis desses módulos, seu diagrama está exposto logo abaixo.

Figura 40 – Módulo SONOBE

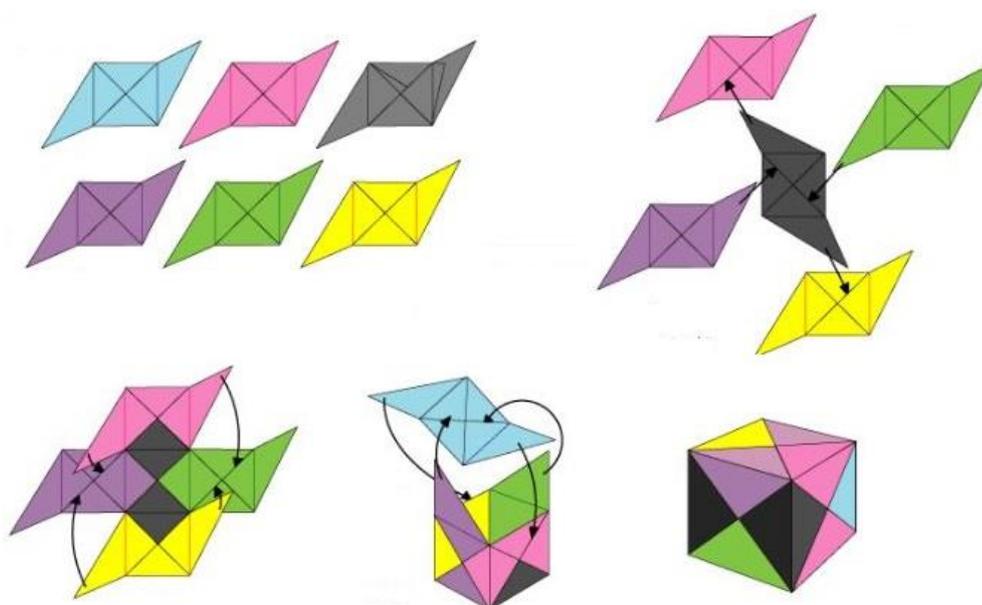


Fonte: NAUGHTON, Michael. **How to Fold the Sonobè Module & some Variations**. 2011<sup>13</sup>.

Este módulo possui algumas variações que modificam a aparência das figuras, a grande característica desse módulo e a sua flexibilidade e a facilidade de encaixar as peças.

A própria construção do módulo mostra que os ângulos obtidos são todos múltiplos de 45°, vamos mostrar a montagem do cubo.

Figura 41 – Cubo SONOBE



Fonte: SHINGU, Fumiak. Mitsunobu sonobe<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: <https://www.amherst.edu/media/view/290032/original/oragami.pdf>

<sup>14</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: <https://en.origami-club.com/unit/polyhedron1/cube/cube/index.html>. Acesso em: 5 jan. 2021.

## 5. O ORIGAMI COMO FERRAMENTA DIDÁTICA

Neste capítulo iremos abordar o uso das dobraduras no ensino de geometria plana e espacial e dentro disso o uso específico de origamis para as séries terminais do Ensino Fundamental e para as séries do Ensino Médio. Abordaremos esse tema de forma objetiva falando também das vantagens do uso em laboratórios de matemática.

A um longo tempo, diversos estudiosos da educação destacam a importância do uso de materiais manipuláveis para diferentes conteúdos escolares, em LORENZATO (2006) encontramos uma breve, mas muito útil linha do tempo, de forma geral temos:

- Comenius, século XVII – o ensino parte do concreto para o abstrato, ou seja, só se aprende fazendo.
- Locke, século XVII – defendia a experiência “sensível” para se chegar ao conhecimento.
- Rousseau, século XVIII – recomenda a experiência direta sobre objetos visando a aprendizagem.
- Pestalozzi e Froebel, século XIX – reconhecem que o ensino deve começar pelo concreto.
- Dewe e Poincaré, século XX – o primeiro concorda com Comenius e o segundo recomenda o uso de imagens “vivas” para clarear as ideias.

Podemos citar ainda um antigo provérbio chinês que diz: “se escuto esqueço, se vejo lembro, se faço aprendo”.

Nesse contexto de uso de materiais concretos, para gerar ou para melhorar as aprendizagens, as dobraduras/origamis podem ser usadas para ligar o concreto com o abstrato, fazendo o estudante trabalhar diferentes conceitos durante as diferentes etapas de sua aprendizagem.

Fazendo uma referência específica ao ensino de matemática, os origamis estimulam e melhoram a sintonia fina para a realização de desenhos, muitas vezes necessários na resolução de problemas, melhora a visão espacial, amplia o

vocabulário matemático, pois apesar de usarmos termos simples vários alunos não aprendem a nomenclatura dos diferentes elementos que compõem a matemática básica, melhora a concentração e a precisão na realização de tarefas.

O trabalho com dobraduras tem uma função de extrema importância no desenvolvimento da imaginação.

Vygotsky (1991, p.17) ressalta a importância do desenvolvimento da imaginação “criar novos graus de combinações, mesclando primeiramente elementos reais [...] combinando depois imagens da fantasia [...] e assim sucessivamente”. Esse jogo de criar novas combinações liberando o material armazenado no inconsciente. Ao jogar com imagens da fantasia exercita-se e amplia a habilidade de julgar, formular e reformular significados. (TOMMASI ,2010, p. 42).

Ainda sobre como o trabalho com dobraduras ajuda no desenvolvimento acadêmico do estudante, podemos citar, de forma simplificada, três atitudes desenvolvidas pelo trabalho.

1. Observação e atenção – são necessárias para seguir as instruções e realizar com precisão as dobras. Essas duas atitudes são muito importantes para o aprendizado de conceitos matemáticos e resolução de problemas.
2. Uso/estímulo da memória – é comum durante a confecção de origamis lembrarmos de passos anteriores, principalmente em origamis modulares.
3. Avaliação dos resultados – nos trabalhos com origamis sempre é questionado se o resultado atingiu o objetivo proposto.

É importante ressaltar que todo material concreto é apenas um dos fatores que interferem na aprendizagem, e que por melhor que seja seu uso não é garantia de sucesso, pois o resultado não depende apenas do de manipular o material, ainda passa pelo como usar e quando usar.

A seguir veremos alguns métodos que podem ajudar o professor, quando este, fizer uso das dobraduras. Mas antes é preciso ressaltar a importância do tempo dedicado ao planejamento das atividades, o ideal é o professor ter bem claro o seu objetivo com o uso de materiais concretos, não somente origamis/dobraduras, para fazer um melhor uso do tempo e poder avaliar se o resultado foi atingido, nunca o professor deve fazer sem esse objetivo bem definido.

## **5.1 Usando dobraduras durante a aula de matemática**

É importante lembrar que pretendemos mostrar atividades, que ajudem a melhorar o aprendizado de geometria plana e espacial, seguindo este princípio iremos discutir as atividades e depois sugerir pelo menos uma prática.

Para efeito de prática estou considerando que o professor que irá realizar as atividades seja da rede pública, preferencialmente, pois o tempo de planejamento é protegido, sendo esse tempo muito valioso para obtenção de bons resultados, para todas as práticas, além das propostas aqui.

Ressalto ainda que, na descrição das atividades não constará o tempo necessário da atividade, pois é muito variável, sofrendo influência da quantidade de estudantes e das habilidades individuais, quem melhor pode determinar o tempo de cada atividade e sua viabilidade é o próprio professor durante seu planejamento.

### **5.1.1 Atividade 1 – Trabalhando a soma dos ângulos internos de um triângulo**

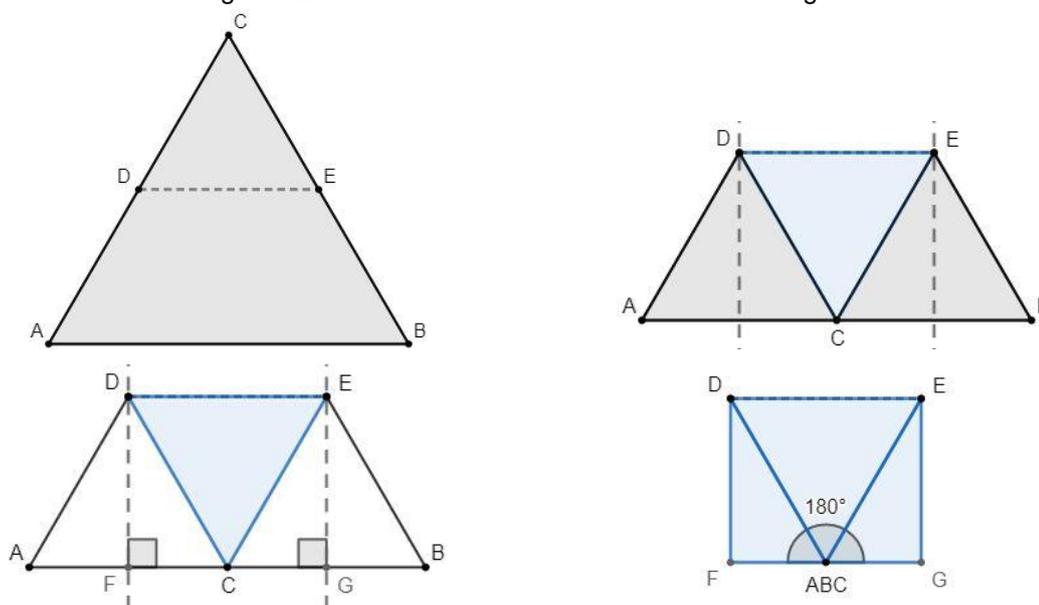
Para reforçar um conceito, é necessário que o estudante além de manipular um origami, realize as dobras. Vamos trabalhar um conteúdo simples de geometria, normalmente apresentado no 6º ano do Ensino Fundamental, a soma dos ângulos internos de um triângulo.

- 1) Distribua uma folha de papel A4 para cada aluno
- 2) Solicite que a folha seja dividida ao meio pelo maior lado
- 3) Usando uma das metades, oriente como dobrar um triângulo equilátero, como descrito na Seção 3.2, marque os pontos médios dos lados que não são a base,

faça uma dobra ligando esses pontos e projetando o vértice oposto a base sobre ela.

- 4) Dobrando segmentos perpendiculares que passam pelos pontos médios marcados anteriormente e que encontram a base, podemos então dobrar os outros vértices de forma que coincidam com o outro que já estava sobre a base formando um ângulo raso.

Figura 42 – Soma dos ângulos Internos de um Triângulo



Fonte: Composição do autor

Para concluir a atividade peça para que os estudantes recortem na outra metade do papel um triângulo que não seja equilátero, peça para seguir os mesmos procedimentos, irão comprovar que o resultado é o mesmo

Apesar de simples, a atividade trabalha além do tema matemático proposto outros conceitos matemáticos, podemos citar ainda o trabalho de precisão e a utilização da memória.

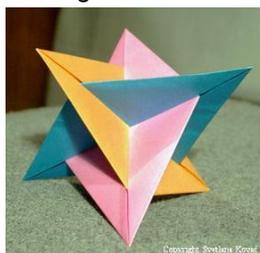
### 5.1.2 Atividade 2 – Trabalhando o conceito de plano

Para apresentar um conceito, abstrato, em geometria plana ou espacial como, como ponto, reta ou plano, mesmo os desenhos utilizados pelo professor ou as figuras do livro didático, muitas vezes não causam a aprendizagem necessária.

Se o objetivo é apresentar um conceito ou mostrar uma representação geométrica de um conceito abstrato, os estudantes não precisam construir o origami, apenas manipular, para poderem realizar a ligação entre um conceito abstrato em um objeto concreto.

Para o origami da figura 43, podemos sugerir dois usos: o primeiro, reforçar o conceito de plano, o segundo, representar geometricamente a solução de um sistema de equações.

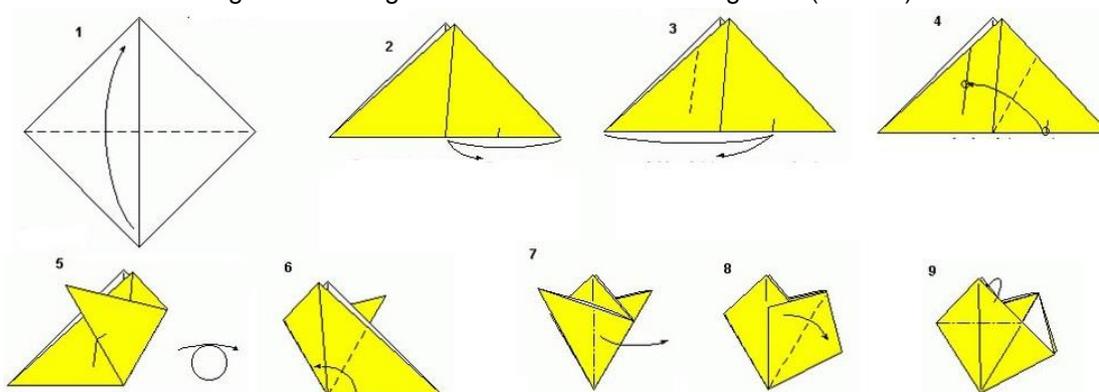
Figura 43 – Origami XYZ de Francis Wo



Fonte: LIRA ORIGAMI. XYZ rombovi / XYZ Diamonds - Francis Ow. 2005<sup>15</sup>.

A seguir estão os diagramas para a confecção.

Figura 44 – Origami XYZ de Francis Wo diagrama (Parte 1)

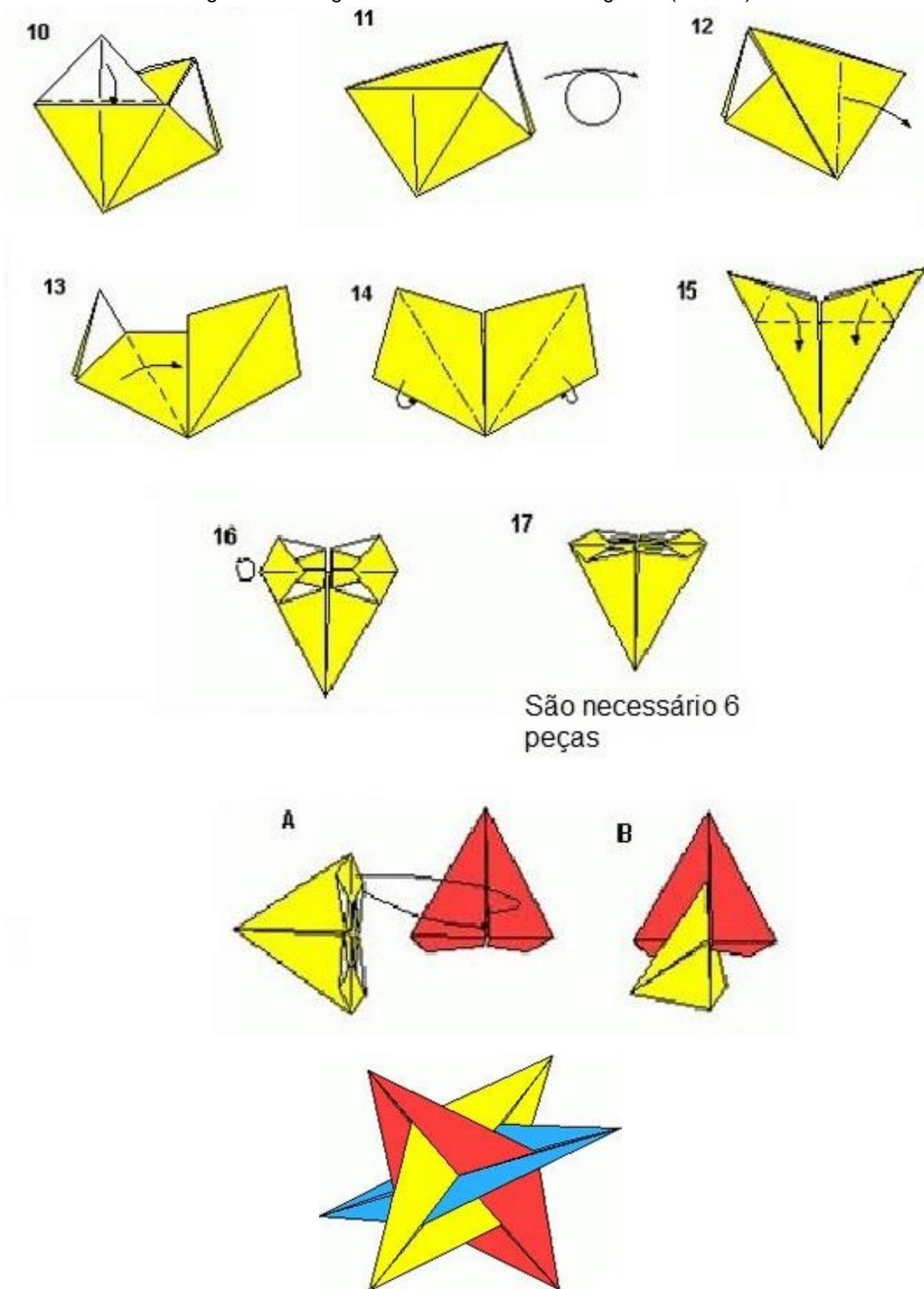


Fonte: LIRA ORIGAMI. XYZ rombovi / XYZ Diamonds - Francis Ow. 2005<sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Disponível em: <http://lyraorigami.blogspot.com/2005/09/xyz-rombovi-xyz-diamonds-francis-ow.html>. Acesso em: 11 set. 2020.

<sup>16</sup> : Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: [http://oworigami.com/show\\_diagram.php?diagram=xyz\\_diamonds](http://oworigami.com/show_diagram.php?diagram=xyz_diamonds). Acesso em: 11 set. 2020.

Figura 45 – Origami XYZ de Francis Wo diagrama (Parte 2)



Fonte: ORIGAMI. XYZ – Diamonds<sup>17</sup>.

<sup>17</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: [http://owrigami.com/show\\_diagram.php?diagram=xyz\\_diamonds](http://owrigami.com/show_diagram.php?diagram=xyz_diamonds). Acesso em: 11 set. 2020.

O origami depois de terminado mostra claramente a intersecção de três planos, o professor pode construir o modelo, recomendável duas peças, e permitir a manipulação dos mesmos.

### **5.1.3 Atividade 3 – Exercitando conceitos básicos**

Usando o origami da atividade anterior, o professor pode propor a construção por parte dos estudantes. Essa atividade irá reforçar conceitos simples, favorecera o trabalho em equipe, desenvolvendo a precisão e a memória.

A atividade deve ser feita em grupo, como são seis peças, recomendamos grupos de três estudantes, cada estudante constrói dois módulos da mesma cor.

Seria também interessante que caso a escola tenha pessoas para o apoio pedagógico, que estes auxiliem o professor na orientação dos alunos. Durante o planejamento da atividade pode ser feito um breve treinamento com essa pessoa, o que agiliza o resultado.

Quando usei essa atividade, em 2012, a dificuldade foi os módulos ficarem iguais, pois são feitos por pessoas diferentes, a montagem é simples.

### **5.1.4 Atividade 4 – Trabalhando a área do quadrado e o volume do cubo**

Uma maneira interessante de usar origamis é trabalhar as relações entre comprimento área e volume.

Para essa atividade, vamos utilizar o diagrama da construção do cubo da seção 3.1.1, pois seus módulos são simples e o encaixe é fácil. O professor não deve levar a figura pronta. Siga os passos:

- 1) Entregue uma folha de papel A4 para cada estudante e solicite para que a folha seja dividida em quatro partes iguais.
- 2) Oriente a construção de um módulo como na figura 28, para cada estudante deve obter um quadrado a partir de 1/4 de folha de A4 para cada módulo.
- 3) Peça para os estudantes calcularem a medida da área que será face do cubo e compare com a medida da área do papel utilizado.

- 4) Peça que cada estudante construa outro módulo igual.
- 5) Peça para os estudantes formarem grupos com três, oriente a montagem do cubo.
- 6) Solicite o cálculo do volume do cubo.
- 7) Agora entregue duas folhas de A4 para cada estudante
- 8) Repita o passo 2) da atividade, obtendo um quadrado utilizando a folha inteira.
- 9) Repita o passo 3), depois peça para os estudantes calcularem a razão entre a primeira e a segunda área.
- 10) Repita os passos 4), 5), 6), depois solicite que os estudantes comparem os volumes dos origamis.

Essa atividade, trabalha a relação entre os o tamanho dos lados das figuras, sua área e seu volume. Para o tetraedro e para o octaedro a atividade também pode ser realizada, recomendo para o cálculo dos volumes.

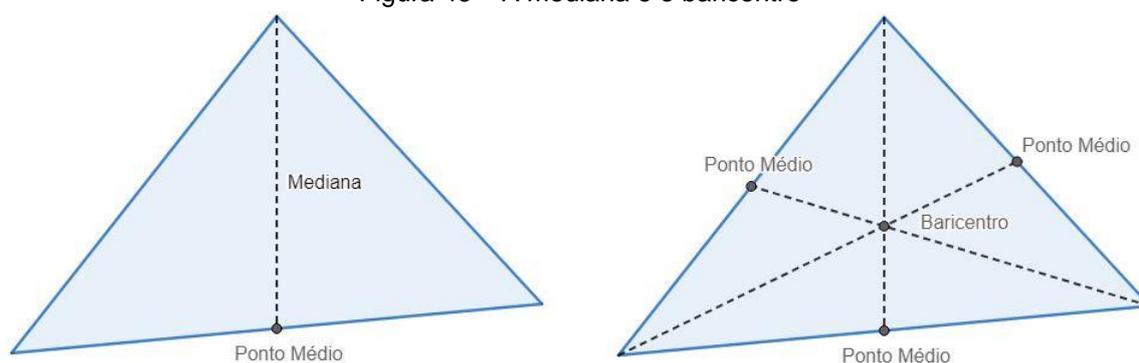
Podemos fazer também utilizando os módulos Sonobe, mas demandara mais tempo, devido a uma maior quantidade de dobras.

#### **5.1.5 Atividade 5 – Construção baricentro de um triângulo**

Uma das funções do material concreto no ensino de geometria é ajudar o estudante a fixar conceitos e melhorar a identificação visual de elementos em uma figura, essa atividade traz para o estudante a oportunidade de tornar palpável alguns elementos de geometria plana. Primeiro construiremos o baricentro de um triângulo, depois mostraremos como obter o incentro e ortocentro

- 1) Distribua papel, de preferência A4, e solicite que os estudantes recortem um triângulo qualquer da folha.
- 2) Marque o ponto médio de um dos lados, realize uma dobra saindo do vértice oposto até o ponto marcado, traçando assim uma mediana.
- 3) Repita 2) para os outros lados obtemos o baricentro.

Figura 46 – A mediana e o baricentro



Fonte: Composição do autor

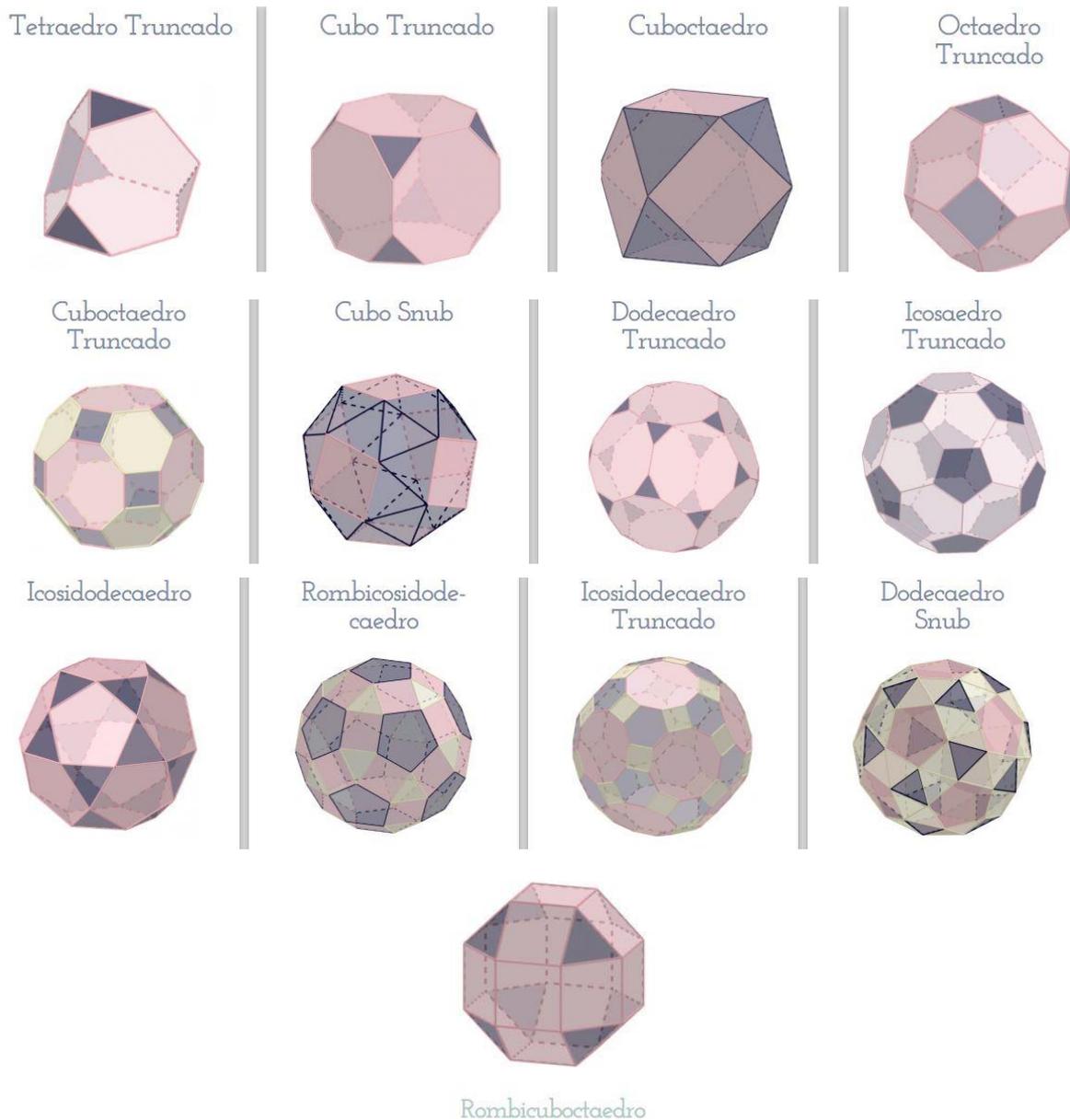
Para obter o incentro e o ortocentro, os procedimentos são semelhantes, recomendo fazer em papéis diferentes.

- Para traçar uma bissetriz, escolha um vértice e faça uma dobra partindo do vértice até o lado oposto de forma que os lados adjacentes fiquem sobrepostos, para revelar o incentro basta repetir nos outros vértices.
- Para traçar uma altura, usaremos o mesmo método utilizado no Axioma 4 de Huzita, basta considerar o vértice como o ponto e o seu lado oposto como a reta, para revelar o ortocentro basta repetir nos outros vértices.

### 5.1.6 Atividade 6 – Poliedros Arquimedianos

Além dos Poliedros de Platão, é importante apresentar para o estudante da educação básica outros poliedros, uma sugestão é apresentar os Poliedros de Arquimedes, ou Arquimedianos, esses poliedros têm suas faces formadas por polígonos regulares que não precisam ser todas iguais. Existem ao todo treze desses poliedros.

Figura 47 – Poliedros Arquimedianos



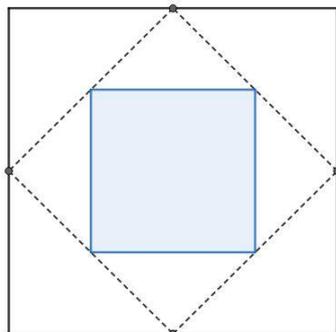
Fonte: DERIVANDO A MATEMÁTICA. Os 13 sólidos Arquimedianos e suas particularidades no geogebra<sup>18</sup>.

Podemos usar o site <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/solidos-arquimedianos-2/>, para visualizar as características principais de cada figura pois o site é interativo. Para um melhor estudo, para a preparação da prática recomendo NEVES(2017), uma dissertação de Mestrado do PROFMAT. A seguir mostraremos a montagem do cuboctaedro, formado por 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados.

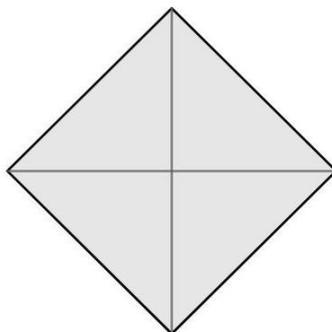
<sup>18</sup> Imagem editada pelo autor, a partir do original disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/solidos-arquimedianos-2/>. Acesso em: 3 jan. 2021.

### 5.1.6.1 Construção do módulo quadrado

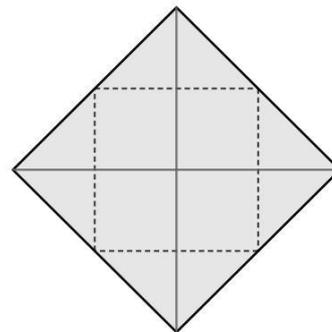
Figura 48 – Poliedros Arquimedianos: módulo quadrado



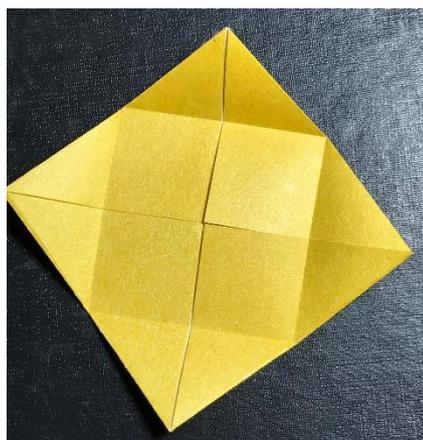
Em um papel quadrado marque os pontos médios dos lados e realize dobras ligando os pontos médio, dobre os vértices para o centro – evite vincos na área pintada



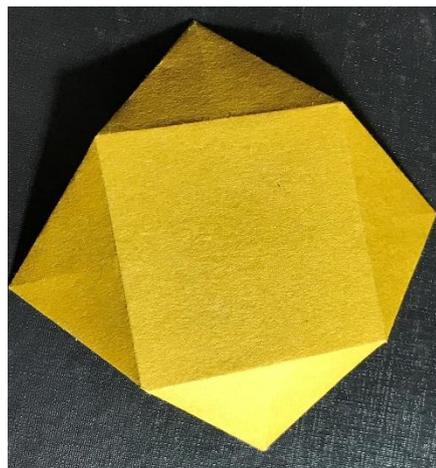
Dobre novamente os vértices para o centro.



Desdobre



Módulo terminado essa parte fica para dentro



Essa parte fica para fora

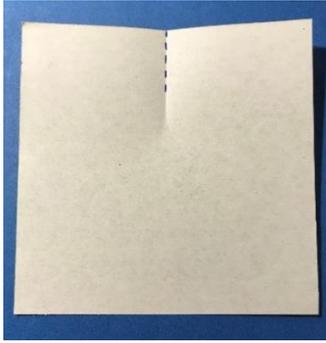
Fonte: Composição do autor

Será necessária a construção de seis módulos.

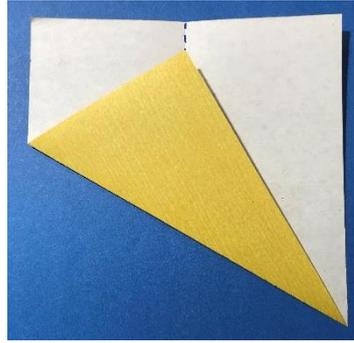
### 5.1.6.2 Construção do módulo triângulo equilátero

O módulo a seguir é feito a partir de um papel quadrado, serão necessários oito módulos para a construção do sólido.

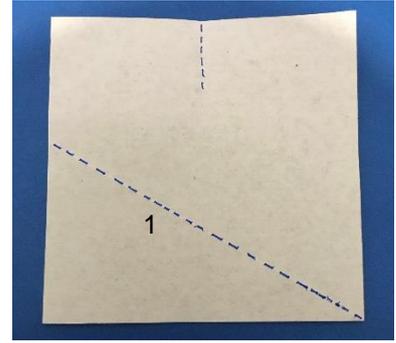
Figura 49 – Poliedros Arquimedianos: módulo triângulo equilátero



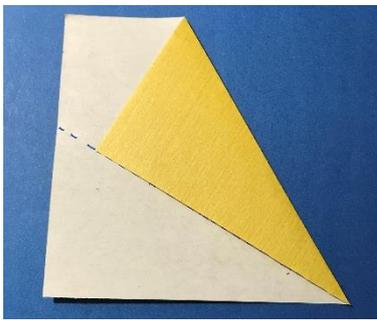
1 – Marque o ponto médio do lado superior e faça um vinco



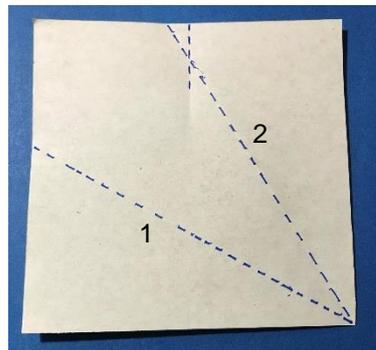
2 –Dobre o canto inferior, fazendo incidir sobre o vinco



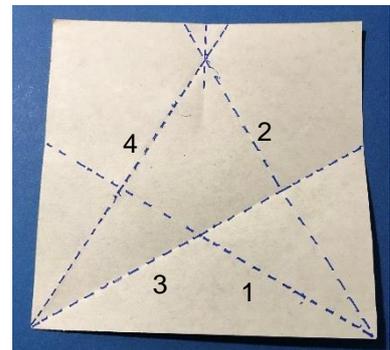
3 - Desdobre



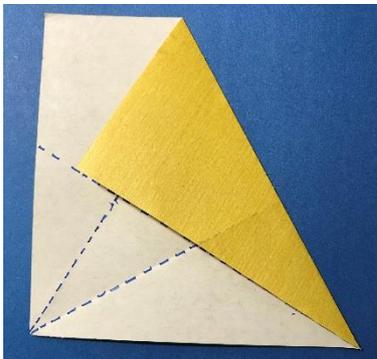
4 – Dobre o lado direito fazendo incidir sobre a dobra do passo anteriores



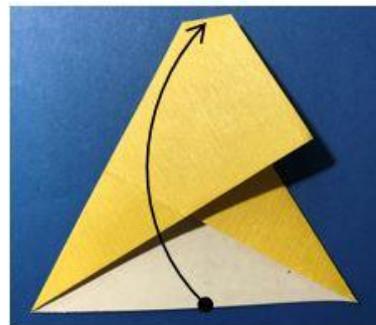
5 - Desdobre



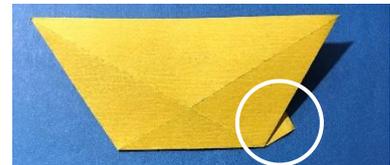
6 – Repita os passos de 1 – 5, para obter as dobras com na figura



7 – Dobre 2, como na figura



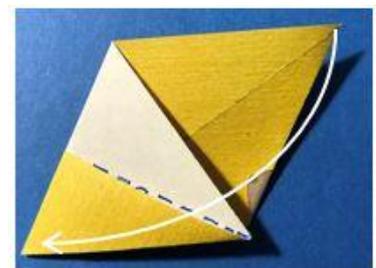
8 – Dobre 4, como na figura, depois realize uma dobra que faça incidir a parte de baixo com a de cima da figura



9 – Dobre a aba circulada sobre o lado, travndo o módulo



10 – Realize uma dobra fazendo incidir o vértice superior esquerdo no inferior direito como indicado



11 – Realize uma dobra fazendo incidir o vértice superior direito no inferior esquerdo, por dentro da parte amarela



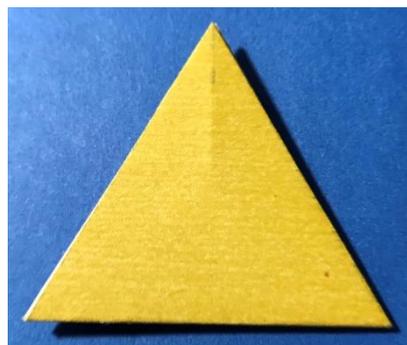
12 – Módulo terminado

Fonte: Composição do autor

Figura 50 – Poliedros Arquimedianos: módulo triângulo equilátero finalizado



Módulo terminado essa parte fica para dentro

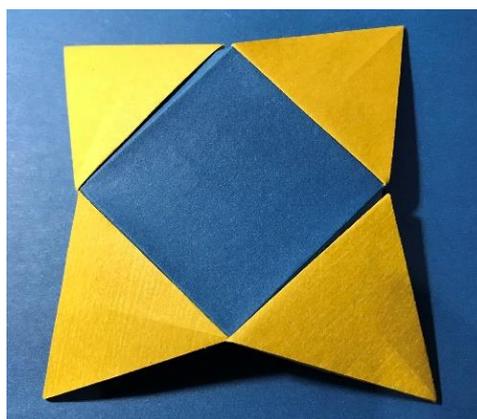


Essa parte fica para fora

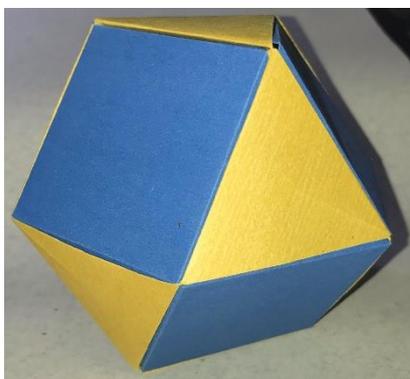
Fonte: Composição do autor

Existem outros modelos que podem ser construídos com esses módulos, a seguir mostraremos a montagem do sólido.

Figura 51 – Poliedros Arquimedianos: montagem do cuboctaedro



Para a montagem, basta encaixar os triângulos nas abas dos quadrados, são oito triângulos e seis quadrados



Fonte: Composição do autor

A construção do cuboctaedro pode ser feita em sala, os módulos podem ser construídos com antecedência e a montagem ser feita pelos estudantes. Outras configurações dos módulos descritos nessa atividade podem ser feitas para a construção de outros modelos, como prismas e pirâmides, mudando apenas o tipo de conexão, essa atividade que trabalha somente a montagem além de apresentar os sólidos arquimedianos melhora a visualização de figuras irregulares.

## 6 CONCLUSÕES

Apesar das dobraduras serem um campo bastante rico em materiais que ajudariam o professor de matemática, sabemos que muitos, principalmente no ensino médio, rejeitam o uso de materiais concretos, pois a forma como o ensino tradicional é realizado, fazendo uso de aulas expositivas, onde o estudante é a parte passiva do processo de ensino, negando uma iteração com materiais concretos que é valiosa para o seu aprendizado.

Sabemos que alguns conteúdos são bastante abstratos, gerando no aluno uma rejeição a vários conteúdos de matemática, então é cada vez mais necessário a busca por materiais concretos ou virtuais que diminuam essa rejeição.

Para a execução de atividades concretas, é necessário o uso do tempo de planejamento, que na escola pública do Estado do Ceará é respeitado, esse tempo que para a carga horária semanal de 40 horas, equivale a 13 horas, é importante separar quatro ou cinco horas, para a preparação das atividades, quando for realizar, esse tempo serve para pesquisar e montar as figuras, e quando disponível treinar o pessoal de apoio. É importante ressaltar que as propostas de atividade devem ser contempladas também no plano anual.

Mostramos durante os capítulos que as dobraduras não são apenas figuras meramente artísticas, e como foi dito, o assunto é muito rico. Claramente mostra resultados quando trabalhados com um objetivo claro, pois citamos as várias aplicações, mas existem muitas outras aplicações que não foram citadas pois ou são além da educação básica ou a sua construção depende uma técnica mais apurada, como exemplo os sólidos geométricos feitos por John Montroll, que são formados por um único papel, mas alguns possuem centenas de dobras.

Observando a sala de aula, notamos o aumento gradativo de ferramentas virtuais, várias escolas já possuem laboratórios de informática, o uso dessas ferramentas e dos materiais concretos, impedem que os estudantes percam o hábito de memorizar textos, fórmulas e procedimentos, os origamis são uma ferramenta ótima para se usar, pois é atrativa visualmente, faz a ligação do abstrato com o concreto trabalhando a imaginação.

As atividades descritas neste trabalho são bem diretas e direcionadas, mas algumas podem ser modificadas para servir como desafios. O trabalho de tentativa e erro é muito importante para o aprendizado, pois o estudante tem muita informação

ao seu dispor, o que faz com que a maioria apenas copie repostas a problemas e questões, sem se preocupar em entender sua construção, isso tem impacto direto no resultado das avaliações externas como o SAEB (Prova Brasil) e no SPAECE aqui no estado do Ceará, pois o aluno se vê aflito sem poder usar pesquisa e tendo de solucionar diferentes questões.

Este trabalho se propõe a servir para uma melhoria na prática na sala de aula, servindo de norte para o professor que deseje utilizar essa ferramenta, pois a estrutura aqui apresentada tem esse objetivo. É importante deixar claro que o uso das dobraduras, ou de qualquer outro material concreto, só será efetivo com pesquisa teórica, treinamento do uso dos materiais e objetivos bem definidos, para unir teoria e prática.

## REFERÊNCIAS

- BARRETO, Carlos Alberto. **A geometria do origami como ferramenta para o ensino da geometria euclidiana na educação básica**. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe. 2013. Disponível em: <https://docplayer.com.br/11265669-A-geometria-do-origami-como-ferramenta-para-o-ensino-da-geometria-euclidiana-na-educacao-basica.html>. Acesso em: 20 set. 2020.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995 (Coleção do Professor de Matemática)
- CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kyoko Saito. **Explorando geometria com origami**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2020.
- DAEB, Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Matriz de referência de língua portuguesa e matemática**. Ministério da Educação – INEP, 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em: 13 nov. 2020.
- HULL, Thomas C. **On the mathematics of flat origamis**. Disponível em [https://www.researchgate.net/profile/Thomas\\_Hull/publication/2357716\\_On\\_the\\_Mathematics\\_of\\_Flat\\_Origamis/links/53f47f410cf22be01c3ec6b9.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Thomas_Hull/publication/2357716_On_the_Mathematics_of_Flat_Origamis/links/53f47f410cf22be01c3ec6b9.pdf). Acesso em: 28 dez. 2020.
- KANEGAE, Mari. **Breve histórico do origami no Brasil**. Disponível em: [http://www.kamiarte.com.br/breve\\_historico2.htm](http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm). Acesso em: 13 mar. 2020.
- LANDAU, Elizabeth. **Solar power, origami-sete**. Disponível em: <https://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2014-277>. Acesso em: 17 mar. 2020.
- LORENZATO, Sergio (org.). **O laboratório de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores)
- LUCERO, Jorge C. **O problema Deliano**. Disponível em: [https://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Artigos/O%20problema%20deliano.pdf](https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Artigos/O%20problema%20deliano.pdf). Acesso em: 18 mar. 2020.
- LUCERO, Jorge C. **A trisseção de um ângulo**, Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/56462083/origami-trissecao>. Acesso em 20 abr. 2020.
- MENEZES, Daniel Brandão. **O uso de dobraduras como recurso para o Ensino da geometria plana: história, teoremas e problemas**. Dissertação(mestrado em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, 2014.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami**: história de uma geometria axiomática. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 2008

RODRIGUES, Bruna Mayara Batista. **O estudo das cônicas através dos origamis**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.

TOMMASI, Sonia Bufarah; MINUZZO, Luiza. **Origami em educação e arteterapia**, 1. ed. São Paulo: Paulinas, 2010. (Coleção expressão e comunicação).

YOU, Zhong; KURIBAYASHI, Kaori. **A novel origami stent**. Department of Engineering Science University of Oxford, 2003. Disponível em: <http://www.tulane.edu/~sbc2003/pdffdocs/0257.PDF>. Acesso em 27 jul. 2020.