Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

Subsunçores para Resolução de Problemas de Divisão de Números Inteiros: o Caso do Teorema Chinês do Resto

por Luciane Souza Bomfim

Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá- PR

2021

Luciane Souza Bomfim

Subsunçores para Resolução de Problemas de Divisão de Números Inteiros: o Caso do Teorema Chinês do Resto

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá

2021

LUCIANE SOUZA BOMFIM

SUBSUNÇORES PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS: O CASO DO TEOREMA CHINÊS DO RESTO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro e Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a comissão julgadora pelos seguintes membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Laerte Bemm

Prof. Dr. Laerte Bemm

Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Luciane Gobbi Tonet

Profª. Dra Luciane Gobbi Tonet

Universidade Federal de Santa Maria

Lilian Akemi Kato

Profª. Dra Lilian Akemi Kato

Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2021

Defesa realizada por videoconferência pelo link:
https://drive.google.com/file/d/1tNrpRUVV3nBCTdCOkoim-q8IN1DFBfe0/view

“Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fato isolado mais importante que a informação na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie isso nos seus ensinamentos.”

David Ausubel

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, por me proporcionar oportunidade de realizar este mestrado, por me dar saúde durante este tempo e por me dar uma família tão especial para me dar esse suporte.

Agradeço à minha família. Aos meus pais Adão e Eloir, que mesmo já idosos não cansam de me apoiar, como fizeram a vida toda, e aos meus filhos Rodrigo e Laura que me incentivaram cada dia a não desistir, sempre me animando e dizendo ser possível, cuidando da casa e comida, quando eu não tinha tempo. Foram meus maiores incentivadores. Rodrigo com as palavras carinhosas e motivacionais e Laura me ajudando desde a formatação ou, até mesmo, ficando ao lado madrugada a dentro acordada, para que eu seguisse firme nos dias finais.

Preciso agradecer ao Instituto Adventista Paranaense (IAP), na pessoa do pastor Gilberto, um amigo que me incentivou desde o início, e à instituição que me apoiou para que eu pudesse me aprimorar academicamente.

Agradeço a professores que foram meus modelos, prof. Renato Reis (meu professor de matemática quando criança) e prof. Dr. Ivanildo Prado, professor da faculdade que me mostrou que realmente eu estava no caminho certo e me fez ver a beleza da matemática.

Agradeço, com muito carinho, a Profª. Dra Lilian Akemi Kato, que pacientemente me ajudou na parte metodológica, dando dicas e me dizendo no que poderia melhorar, lendo com muita atenção cada linha escrita.

Agradecimento especial deixo para meu orientador, que mesmo que eu o fizesse perder a paciência, algumas vezes, se manteve sereno e com muita disposição sempre me socorrendo, na mesma hora. Com sua ótima orientação pude terminar este trabalho.

Resumo

Este trabalho apresenta o Teorema Chinês do Resto como uma possibilidade de subsunçor para a resolução de problemas que envolvam restos de divisão de números inteiros. O objetivo da pesquisa foi verificar a mobilização de um grupo de alunos do ensino médio, em utilizar o Teorema Chinês do Resto na resolução de certos tipos de problemas matemáticos envolvendo restos de divisões. Para esta mobilização, aplicamos aos alunos 4 testes constituídos por problemas cujas soluções poderiam ser determinadas via o Teorema Chinês do Resto. Ministramos encontros com o mesmo grupo de alunos, nos quais revisamos a Divisão Euclidiana de números inteiros e apresentamos novos conceitos e resultados, tais como: Teorema de Bézout, congruências e equações de congruência, sistemas de congruências e por fim o Teorema Chinês do Resto. Antes do primeiro destes encontros, foi aplicado o primeiro teste e após o último encontro foi aplicado o último teste cujos problemas eram similares aos do primeiro teste. Neste último teste os alunos poderiam utilizar os novos conceitos e resultados estudados nos encontros. Ao final, analisamos as respostas e verificamos para quais e quantos alunos o Teorema Chinês do Resto foi o método escolhido. A constatação de que mais da metade do grupo adotou o teorema como estratégia de resolução indica que a metodologia de ensino adotada possibilitou, a esses estudantes, a mobilização do Teorema Chinês do Resto como subsunçor para resolução de problemas envolvendo restos de divisões de números inteiros.

Palavras-Chave: Teorema Chinês do Resto, subsunçores, aprendizagem significativa.

Abstract

This work presents the Chinese Remainder Theorem as a possibility of subsumer for the resolution of problems involving remainders of integer divisions. The aim of the research was to verify the mobilization of a group of high school students, to use the Chinese Remainder Theorem for the resolution of certain types of mathematical problems involving remains of integer divisions. In order to mobilize this theorem as a possible subsumer, we applied to the students 4 tests consisting of problems whose solutions can be determined using the Chinese Remainder Theorem. We conduct meetings with the students, in which we review the Euclidean Division of integers, and present some new concepts and results, such as: Bézout's Theorem, congruence and congruence equations and finally system of congruences. Before these meetings, we applied the first test and after the last meeting, we applied the last test, whose problems were similar to those of the first test. At this last test, the students could use the new concepts and results studied in the meetings. At the end, we analyzed the answers and verified for which and how many students chose the Chinese Remainder Theorem to resolve the problems. We found that more than half of the students used the theorem as a resolution strategy, which indicates that the adopted teaching methodology made it possible for these students to mobilize the Chinese Remainder Theorem as a subsumer for solving problems involving remainders integers divisions.

Key-words: Chinese Remainder Theorem, subsumer, meaningful learnin

Sumário

Introdução

Os Sistemas de Congruências são estudados apenas no nível de graduação e pós-graduação, sendo bastante interessantes para a resolução de alguns tipos de problemas matemáticos que, se resolvidos de outra forma, demandariam bem mais tempo e trabalho.

O Teorema Chinês do Resto descreve as soluções de certos tipos de sistemas de congruências lineares. Um aluno de ensino médio, para resolver certos problemas que envolvam sistemas de congruências, não possui em seu nível acadêmico este teorema e muito menos conhecimento dos métodos de como este pode ser utilizado em resoluções.

A escolha do tema deste trabalho deu-se por dois motivos: ser o Teorema Chinês do Resto uma poderosa ferramenta de resolução de sistemas de congruências e pela curiosidade em saber se um aluno do ensino médio é capaz de entender este teorema a ponto de usá-lo para a solução de sistemas de congruência. Surgiram perguntas como: É viável apresentar este teorema para alunos do ensino médio? Será que um aluno do ensino médio consegue entender e usar este teorema? Será que algum aluno vai optar pelo teorema para resolver problemas que envolvam sistemas de congruência? Este teorema pode vir a ser um subsunçor para a resolução de problemas envolvendo restos de divisão? Com base nestas inquietações surgiu o ponto base de discussão deste estudo.

Subsunçor é o nome que se dá a uma ideia, conceito, imagem, proposição, modelo mental ou até mesmo um símbolo que servirá de âncora para novos conhecimentos, sendo formado em cima de ideias já pré-existentes na mente do indivíduo. Esse termo foi denominado por David Ausubel.

Nossa pesquisa, de cunho qualitativo, visa apontar como um aluno do ensino médio, após estudar o Teorema Chinês do Resto, se comporta no momento de escolher um método de resolução de um problema de divisão de números inteiros. A pesquisa questiona e apresenta se este teorema pode ser um potencial subsunçor para este aluno, na resolução de problemas que envolvam sistemas de congruências.

Ministramos aulas com 20 alunos, dos quais 15 acompanharam os encontros do início ao fim. Estas aulas ocorreram no contra turno das aulas regulares. Os encontros foram no mesmo Colégio que os alunos frequentavam, Instituto Adventista Brasil Central (IABC). Os estudantes referidos eram de turmas diferentes do ensino médio e participaram de forma voluntária, por consentimento livre e esclarecido, após ser-lhes dito qual seria o teor das aulas e o objetivo das mesmas. Verificamos se, a partir do estudo e revisão de conteúdos já conhecidos pelos alunos, será possível um aluno do ensino médio aprender a utilizar o Teorema Chinês do Resto e será que este pode se tornar um subsunçor, ou seja, ele passará a ter significado e foi aprendido em cima de conhecimentos pré-existentes por parte do aluno? Esta aprendizagem foi significativa, de acordo com a teoria de Ausubel (1980)?

Veremos, se os problemas envolvendo restos, despertaram ou não a curiosidade destes alunos em usarem o Teorema Chinês do Resto e se, no momento em que puderem escolher este meio de resolver um problema, usaram ou não.

Para esta pesquisa foram abertas 20 vagas. Foram realizados 5 encontros noturnos, dando no total uma duração de dez horas, e aplicados 4 testes. Os testes aplicados serão analisados ao longo do artigo.

Como recursos foram utilizados: lousa, canetão e listas de atividades xerocadas, para cada aluno.

Capítulo 1

Subsunçores Para Resolução de Problemas Envolvendo Números Inteiros

Vamos iniciar esta seção apresentando os principais conceitos e resultados matemáticos que utilizamos no projeto. Como o presente trabalho não tem por objetivo ser um material de apoio matemático, o leitor poderá encontrar maiores detalhes e as demonstrações dos resultados nos seguintes referenciais bibliográficos: HEFEZ (2026); MASINI (2008); NASCIMENTO (2014); SANTOS (2017) e FILHO (2015).

1. Divisibilidade

Definição 1. Sejam m e n dois números inteiros. Dizemos que m divide n, se e somente se, existe um número inteiro q tal que $n = mq$. Neste caso escrevemos $m \mid n$. Caso m não divida n, escrevemos $m \nmid n$.

Se m divide n também diremos que m é um divisor de n, e mais ainda que n é um múltiplo de m, que n é divisível por m, ou que m é um fator de n.

Se m é um divisor de n, então $-m$ também é um divisor de n, pois a igualdade $n = mq$ implica $n = (-m)(-q)$, de tal modo que os divisores de um inteiro qualquer são dois a dois simétricos.

O resultado a seguir trás as principais propriedades da Divisibilidade de números inteiros.

Teorema 2. Sejam m, n, q,r inteiros quaisquer, tem -se que:

I) $1 \mid m, m \mid m$, e $m \mid 0$

II) Se $m \mid 1$, então $m = \pm 1$

III) Se $m \mid n$ e $q \mid r$, então $m \cdot q \mid n \cdot r$

IV) Se $m \mid n$ e $n \mid q$, então $m \mid q$

V) Se $m \mid n$ e $n \mid m$, então $m = \pm n$

VI) Se $m \mid n$, com $n \neq 0$, então $| m \leq n |$

VII) Se $m \mid n$ e $m \mid q$, então $m \mid (na + qb)$, para quaisquer números inteiros a e b.

VIII) $0 \mid m \Leftrightarrow m = 0$

2. Conjunto dos Divisores de um Número Inteiro

Dado um inteiro qualquer a, o conjunto de todos os divisores de a é indicado por $D(a)$, ou seja: $D(a) = \{x \in Z^*;\ x \mid a\}$.

Assim, por exemplo:

$D(0) = \{x \in Z^*;\ x \mid 0\} = Z$; $D(1) = \{x \in Z^*;\ x \mid 1\} = \{\pm 1\}$; $D(3) = \{x \in Z^*;\ x \mid 3\} = \{\pm 1, \pm 3\}$; $D(10) = \{x \in Z^*;\ x \mid 10\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Observe que que para todo número inteiro a, $D(a) = D(-a)$. Mais ainda, 1, -1, a e $-a$ são divisores de a, chamados *divisores triviais* de a. Claramente, os inteiros 1 e -1 só admitem divisores triviais. Para todo inteiro $a \neq 0$, se $x \mid a$, então $-a \leq x \leq a$. Logo, todo inteiro $a \neq 0$ tem um número finito de divisores.

3. Divisores Comuns de Dois Inteiros

Definição 3. Sejam a e b dois números inteiros quaisquer. Chama - se *divisor comum* de a e b todo número inteiro d, tal que $d \mid a$ e $d \mid b$.

Dados os inteiros a e b, denominamos $D(a, b)$ o conjunto de todos os divisores comuns de a e b. Simbolicamente, temos: $D(a,b) = \{x \in \mathbb{Z};\ x \mid a \text{ e } x \mid b\} = \{x \in \mathbb{Z};\ x \in D(a) \text{ e } x \in D(b)\} = D(a) \cap D(b)$. Como a intersecção de conjuntos é comutativa, temos $D(a,b) = D(b,a)$. Notamos que -1 e 1 são divisores comuns de quaisquer dois números inteiros a e b. Logo $D(a,b) \neq \emptyset$. Mais ainda, como todo inteiro é um divisor comum de a e b, temos $D(a,b) = \mathbb{Z}$.

4. Máximo Divisor Comum

Sejam *a* e *b* dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Então D(a) ou D(b) é finito de modo que D(a,b)=D(a) ∩ D(b) é finito. Assim, D(a) tem um maior elemento. Este maior elemento é chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por mdc(a,b). Por convensão, definimos mdc(0,0)=0. Se mdc(a,b)=1, diremos que a e b são primos entre si.

É claro que o máximo divisor comum entre dois números inteiros a e b sempre existe e $\mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(-a, b) = \mathrm{mdc}(a, -b) = \mathrm{mdc}(-a, -b)$.

Assim, para determinarmos o mdc de dois números inteiros, podemos sempre considerá-los positivos. Além disso, valem as seguintes propriedades:

Proposição 5. As seguintes afirmações são verdadeiras.

i) $\mathrm{mdc}(a, 1) = 1$, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$

ii) se $a \neq 0$, então $\mathrm{mdc}(a, 0) = |a|$

iii) se $a \mid b$, então $\mathrm{mdc}(a, b) = |a|$

Assim, por exemplo: mdc (6,1)=1; mdc(-7,0)= 7; mdc (-4,16)=4

Lema 6. Se a, b ∈ ℤ, então mdc(b, a-bq)= mdc(a,b), para qualquer q∈ ℤ. Em particular, mdc(a,b)= mdc(b,r), em que r é o resto da divisão de a por b.

5. Algoritmo de Euclides e Teorema de Bézout

Determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros “pequenos” é uma tarefa não muito difícil. Porém, para números “grandes” isto pode ser difícil. O algoritmo que descrevemos a seguir ajuda nestes casos.

Sejam a, b ∈ ℤ, tal que a≤b. Sem perda de generalidade, vamos supor a,b > 0. Se b=1, ou b=a, ou ainda b|a então mdc(a,b)=b. Suponhamos, então, que $1<b<a$ e que $b \nmid a$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever: $a= bq_1 + r_1$, com $0<r_1<b$.

Temos duas possibilidades: $r_1|b$ ou $r_1\nmid b$. Se $r_1|b$, então r_1= mdc(b, r_1)= mdc(a,b). Se $r_1\nmid b$, então podemos efetuar a divisão de b por r_1, obtendo: $b=r_1q_2 + r_2$, com $0<r_2<r_1$.

Novamente temos duas possibilidades: $r_2|r_1$ ou $r_2\nmid r_1$. Se $r_2|r_1$, então r_2= mdc(r_1,r_2) =mdc(a,b). Se $r_2\nmid r1$, então podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2 , obtendo

$r_1= r_2q_3 + r_3$, com $0<r_3<r_2$, e repetimos a análise. Este processo deve parar, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b>r_1>r_2>\ldots$que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum n, temos que $r_n| r_{n-1}$, o que implica que mdc(a,b)= r_n.

O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática como mostramos a seguir.

Inicialmente, efetuamos a divisão $a= bq_1 + r$, e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama como segue:

	q_1	
a	b	r_1

A seguir, se necessário, efetuamos a divisão $b=r_1q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos num diagrama como a seguir:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	r_2

Se necessário, prosseguimos este procedimento até encontrarmos n com r_{n+1}=0. Neste caso, r_n= mdc(a,b):

	q_1	q_2	q_3	…	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	…	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n= (a,b)

Exemplo 7: Vamos determinar mdc(372,162). Aplicando o que acabamos de descrever, temos:

	2	3	2	1	2	2
372	162	48	18	12	6	0

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides fornece-nos:

6= 18-1x12

12=48-2x18

18=162 – 3x48

48= 372-2x162

Donde segue que 6=18-1x12= 18- 1x(48-2x18)= 3x18 – 48= 3x(162-3x48)-48 = 3x162-10x48=3x162- 10x(372- 2x162) = 23x162 – 10x372. Temos, então, que mdc(372,162)= 6= 23x162 + (-10)x372.

Note que conseguimos, através do uso do Algoritmo de Euclides, escrever 6=mdc(372,162) como múltiplo de 162 mais um múltiplo de 372.

Isto não é coincidência, como vemos no próximo resultado.

Teorema 8. (Teorema de Bézout) Seja d= mdc(a,b), então existem inteiros, m e n tais que d=m.a + n.b. Em particular, se a e b são primos entre si, então existem inteiros m.n tal que 1=am+bn.

6.Congruências

Trataremos agora de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado.

Seja m um número inteiro positivo. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos das divisões de a e b por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se a ≡ b mod m.

Exemplo 9. $21 \equiv 13 \bmod 2$; $-8\equiv 7 \bmod 5$; $2\equiv -3 \bmod 5$; $-3\equiv -8 \bmod 5$.

Quando a relação $a \equiv b \bmod m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes módulo m.

Exemplo 10. 20 é incongruente a 17 módulo 5.

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b \bmod 1$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, doravante, consideraremos sempre $m > 1$.

Decorre da definição, que a congruência, módulo um inteiro fixado m, é uma relação de equivalência;

Proposição 11. Seja m um inteiro positivo . Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

i) $a \equiv a \bmod m$,

ii) se $a \equiv b \bmod m$, então $b \equiv a \bmod m$,

iii) se $a \equiv b \bmod m$ e $b \equiv c \bmod m$, então $a \equiv c \bmod m$.

Proposição 12. Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $m \mid b - a$.

Exemplo $13 \equiv 21 \bmod 4$, pois $4 \mid 8 = 21 - 13$

Teorema 13. Se a, b, c, d e m são inteiros tais que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a \pm c \equiv b \pm d \mod m$ e $ac \equiv bd \mod m$

Teorema 14. Se $ac \equiv bc \mod m$ e se o mdc(c, m) = d, então $a \equiv b \mod m/d$.

Corolário 15. Se $ac \equiv bc \mod p$, com p primo, e se $p \mid c$, então $a \equiv b \mod p$.

Teorema 16. Sejam a e b inteiros quaisquer, e sejam m, n, d e k inteiros positivos.

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $d \mid m$, então $a \equiv b \mod d$;

(ii) se $na \equiv nb \mod nm$, então $a \equiv b \mod m$.

7. Sistemas de Congruências

Esta seção será destinada a uma breve revisão sobre equações de congruências. Uma equação de congruência é uma congruência do tipo:

$ax \equiv b \bmod m$, onde a, b, m $\in$, $\mathbb{Z}$, m>1.

Um problema em Teoria dos números, consiste em determinar, se existirem, os números inteiros x tais que $ax \equiv b \bmod m$. Estes números são chamados de soluções da equação.

Teorema 17. Uma congruência $ax \equiv b \bmod m$ só possui solução se $mdc(a,m)|b$.

Se $x_0 \in \mathbb{Z}$ é uma solução da congruência $ax \equiv b \bmod m$, então todo x tal que $x \equiv x_0 \bmod m$ é também solução da congruência, pois, $ax \equiv ax_0 \equiv b \bmod m$.

Portanto, toda solução particular determina, automaticamente, uma infinidade de soluções de congruência. Essas soluções serão consideradas uma só (módulo m), já que são congruentes entre si, e, consequentemente, se determinam mutuamente. Dada uma equação de congruência $ax \equiv b \bmod m$ com $mdc(a,m)=1$, temos do Teorema de Bézout que existem a_0, $m_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $aa_0+mm_0=1$. Multiplicando por b em ambos os lados, temos $a(a_0b) + m(m_0b)= b_1$, ou seja, $a\,(a_0.b) \equiv b \bmod m$.

Portanto, $x_0= a_0b$ é uma solução da equação $ax \equiv b \bmod m$. Maiores detalhes, veja HEFEZ (2016).

Definição 18. Um sistema de congruências lineares é uma coleção de congruências lineares.

Abaixo temos um sistema de congruências lineares:

$2x \equiv 1 \bmod 3$

$3x \equiv 2 \bmod 43$

$7x \equiv 3 \bmod 5.$

Uma solução do sistema de congruências lineares é um número inteiro x_0

que satisfaz cada uma das congruências lineares do sistema.

Sistemas de congruências lineares não necessariamente possuem solução, mesmo que cada equação do sistema de congruência possua solução. Se tivermos alguma equação do sistema de congruência que não tenha solução, então o sistema também não tem solução.

Exemplo 19. Vamos resolver o sistema de congruências lineares:

$x \equiv 1 \bmod 3$

$x \equiv 2 \bmod 4$

$x \equiv 3 \bmod 5.$

A primeira congruência nos dá $x=3y+1$, onde $y \in \mathbb{Z}$. Substituindo este valor de x na segunda congruência; temos:

$3y + 1 \equiv 2 \bmod 4 \Leftrightarrow 3y \equiv 1 \bmod 4 \Leftrightarrow y \equiv 3 \bmod 4$

Logo, $y = 4z + 3$ e $x = 3 \cdot (4z + 3) + 1$, ou seja, $x = 12z + 10$, com $z \in \mathbb{Z}$.

Observamos que qualquer inteiro da forma $12z + 10$ satisfaz as duas primeiras congruências do sistema. Substituindo este valor de x na terceira congruência obtemos:

$$12z + 10 \equiv 3 \bmod 5 \Leftrightarrow 2z \equiv 3 \bmod 5 \Leftrightarrow z \equiv 4 \bmod 5.$$

Assim, $z = 5w + 4$ com $w \in \mathbb{Z}$. Portanto, $x = 12 \cdot (5w + 4) + 10 = 60w + 58$. Logo, $x=60w +58$, com $w \in \mathbb{Z}$ são as soluções do sistema dado anteriormente.

8. Teorema Chinês do Resto

No século III foi descoberto o problema mais antigo que se refere a restos, escrito no manuscrito chinês com o título: Sun-Tsu Suanjing 孙子算经 (Manual de aritmética do mestre Sun), cujo autor não se tem conhecimento. Dá-se o nome de Teorema Chinês do Resto à ferramenta utilizada para resolver este tipo de problema do resto, exemplificado abaixo. Seu primeiro tipo de aparição fora no manuscrito deste livro chinês que data de 287 d.C. a 473 d.C. (COUTINHO,1997.)

De acordo com Nascimento (2016), o Teorema Chinês do Resto foi encontrado no Capítulo 3, problema 26 do manuscrito citado anteriormente:

> Existe um número desconhecido de objetos, se nós contarmos de 3 em 3, teremos resto 2, se contarmos de 5 em 5, teremos resto 3, se contarmos de 7 em 7, teremos resto 2. Descubra o número de objetos.

No manuscrito de Sun-Tsu Suanjing, o autor também providenciou a resposta e a resolução para o problema citado:

> Resposta: 23.
>
> Método: Se contarmos de 3 em 3 e tivermos resto 2, consideramos 140. Se contarmos de 5 em 5 e tivermos resto 3, consideramos 63. Se contarmos de 7 em 7 e tivermos resto 2, consideramos 30. Adicionando-os, obtemos 233 e subtraindo 210 chegamos a resposta. Se contarmos de 3 em 3 e tivermos resto 1, consideramos 70. Se contarmos de 5 em 5 e tivermos resto 1, consideramos 21. Se contarmos de 7 em 7 e tivermos resto 1, consideramos 15. Quando (um número) excede 106, o resultado é obtido subtraindo por 105.

Traduzido em linguagem simbólica, o problema acima, descrito por Sun-Tsu, equivale a procurar soluções do seguinte sistema de congruências:

$x \equiv 2 \mod 3$

$x \equiv 3 \mod 5$

$x \equiv 2 \mod 7$.

Este é um sistema de congruência da forma:

$a_i x \equiv b_i \mod n_i \quad i=1,\ldots,r$.

Para tal sistema possuir solução, é necessário que mdc (a_i, n_i)| b_i, para todo i=1,…,r. Nesse caso, o sistema acima é equivalente a um da forma:

$x \equiv c_i \mod m_i \quad i=1,\ldots,r.$

Teorema 20. (Teorema Chinês do Resto). Seja $x \equiv c_i \mod m_i \quad i=1,\ldots,r$ um sistema de congruências. Se $mdc(m_i,m_j)=1$, para todo par m_i, m_j com $i \neq j$, então o sistema possui uma única solução módulo $M=m_1m_2\ldots m_r$. As soluções são: $x= M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + \ldots + M_ry_rc_r + tM$, onde $t \in \mathbb{Z}$, $M_i= M/M_i$ e y_i é solução de $M_iy\equiv 1 \mod m_i$, i=1,…,r.

Vamos resolver o problema de Sun-Tsu usando o teorema anterior.

Temos, nesse caso, que M= 3x5x7=105, $M_1=35$, $M_2=21$ e $M_3=15$. Por outro lado, $y_1=2$, $y_2=1$ e $y_3=1$ são soluções, respectivamente, das congruências $35y\equiv 1 \mod 3$, $21y\equiv 1 \mod 5$ e $15y\equiv 1 \mod 7$. Portanto, uma solução módulo M=105 é dada por: $X=M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + M_3y_3c_3 = 233$.

Como $233\equiv 23 \mod 105$, segue-se que 23 é uma solução única módulo 105, do Problema de Sun-Tsu e qualquer outra solução é da forma 23 + 105t, com $t \in \mathbb{Z}$.

9. Aprendizagem Significativa

Considerando o objetivo desta pesquisa, de verificar a mobilização, pelos alunos, dos raciocínios envolvidos no Teorema Chinês do Resto na resolução de problemas matemáticos envolvendo congruências e a identificação desse teorema como possível subsunçor dos problemas especificados, relatamos brevemente a teoria que embasa esse conceito a fim de justificarmos nossas análises e conclusões.

Queremos também considerar que cada raciocínio envolvido nos problemas e cada teorema ou assunto, vistos antes do Teorema Chinês do Resto, sejam importantes subsunçores para chegarmos ao objetivo final.

Dentro do grande leque das teorias de Aprendizagem existentes, a Aprendizagem Significativa é o conceito que permeia as ideias de David Ausubel.

De acordo com Marco Antonio Moreira (1999, p.153), a respeito da teoria,

> aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica.

Portanto, pode-se afirmar que os novos conhecimentos adquiridos pelo aluno precisam, para que a aprendizagem seja significativa, estar interligados ao conhecimento prévio existente na estrutura cognitiva do indivíduo, chamado por Ausubel (2008) de “conceito subsunçor”:

> Esse conhecimento prévio (conceito, ideia, proposição, representação) que servirá de ancoradouro para o novo conhecimento e, ao mesmo tempo, se modificará em função da ancoragem, é chamado de subsunçor. Diz-se, então, que o aprendiz deve ter os subsunçores adequados para dar significado ao novo conhecimento.

Neste tipo de aprendizagem o aluno é levado a raciocinar tendo como base seus conhecimentos pré-existentes. Um conceito é formado levando outros conceitos em consideração. Portanto, mesmo que se conheça apenas a regra do Teorema Chinês do Resto, para que este passe a ser um subsunçor, fazendo sentido na mente do aluno, é preciso que o mesmo esteja alicerçado em conteúdos prévios como a congruência, por exemplo. Quando se entende dessa maneira, a ferramenta utilizada passa a ter verdadeiro significado, que é o lema central da Aprendizagem significativa de Ausubel.

De acordo com Moreira (2011,p.14):

> Em termos simples, subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e de interação com eles.

Segundo Ausubel (2008), a aprendizagem significativa no processo de ensino necessita fazer algum sentido para o aluno e, nesse processo, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos relevantes já existentes na estrutura do aluno. O autor entende que a aprendizagem significativa se verifica quando o banco de informações no plano mental do aluno se revela, através da aprendizagem por descoberta e por recepção. O processo utilizado para as crianças menores é o de formação de conceito, envolvendo generalizações de interesses específicos para que, na idade escolar já tenham desenvolvido um conjunto de conceitos, de modo a favorecer o desenvolvimento da aprendizagem significativa. Esses conceitos deverão ser adquiridos através de assimilação, diferenciação progressiva e reconciliação integrativos de conceitos. Para tanto, Ausubel sugere para esse processo, a utilização de organizadores prévios para, de fato, ancorar a nova aprendizagem, levando o aluno ao desenvolvimento de conceitos subsunçores, de modo a facilitar a aprendizagem subsequente.

A Teoria da Aprendizagem de Ausubel tem como objetivo, portanto, fazer com que a aprendizagem do aluno seja facilitada, através da psicologia da aprendizagem significativa.

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fato isolado mais importante que a informação na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie isso nos seus ensinamentos. (Ausubel,1980).

Por isso, a aprendizagem significativa é permanente e poderosa, enquanto a aprendizagem desvinculada de um contexto de significado é facilmente esquecida e não é facilmente aplicada em novas situações de aprendizagem ou solução de problemas. (SOUZA apud SOUZA, 2010).

10. Metodologia

Foram abertas 20 vagas para o estudo do Teorema Chinês do Resto, contemplando alunos do Ensino Médio do Instituto Adventista Brasil Central, localizado em Goiás. Alunos de diferentes séries. Dos 20 alunos inscritos, 15 deram sequência até o final e, com estes 15, realizamos o estudo em questão.

As aulas aconteceram no contra turno do período escolar dos alunos do Instituto Adventista Brasil Central, localizado em Goiás. Os 15 alunos assistiram 10 aulas, em 5 encontros, sendo duas aulas de 45 minutos cada, a cada noite.

Durante as aulas testes foram realizados à medida que o conteúdo foi sendo desenvolvido. Foram 4 testes no total e suas etapas e objetivos constam a seguir.

Etapas das aulas e testes:

1º encontro (2 aulas) - Foi aplicado um teste com dois problemas envolvendo restos de divisões, que poderiam ser resolvidos pelo Teorema Chinês dos Resto, mas do qual os alunos ainda não tinham conhecimento. Com isso analisamos o conhecimento prévio de cada aluno. Segue abaixo os dois problemas do teste 1.

TESTE 1:

PROBLEMA 1- (ENQ 2014-2) Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram 1,2,3 e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?

PROBLEMA 2- (UNICAMP-2016.) Em um cesto, há uma quantidade N de ovos. Se os ovos forem agrupados de 3 em 3, sobram 2. Se os ovos forem agrupados de 4 em 4, sobra 1. Quantos ovos pode haver no cesto?

2º encontro (2 aulas) – Neste encontro revisamos a Divisão Euclidiana, divisibilidade, mdc e números primos. Também apresentamos o Teorema de Bézout e exemplos de aplicação deste teorema

Alguns dos conceitos estudados neste encontro, como divisão Euclidiana, Divisibilidade e números primos, poderiam servir como organizadores prévios dos alunos, e que de acordo com Moreira (1999, p.155):

> Ausubel recomenda o uso de organizadores prévios, que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. O uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa.

Para encerrar a aula, introduzimos a noção de congruência. Para isso, usamos o problema 1 anterior. Os alunos foram instigados a interpretar uma divisão de números inteiros como uma congruência. O objetivo foi despertar a curiosidade dos alunos neste tema, o que de fato aconteceu.

3º encontro (2 aulas)- Iniciamos a aula resolvendo os dois problemas do Teste 1. Abordamos congruência e os sistemas de congruência de maneira mais pragmática e detalhada, sempre usando exemplos . Depois disso, aplicamos o Teste 2, que foi constituído do problema a seguir. Com este teste queríamos verificar se os alunos haviam aprendido os novos conceitos: Teorema de Bézout, congruência e sistemas de congruência.

TESTE 2:

PROBLEMA 3- (UNICAMP, 2016.) Um general possui 2000 soldados para uma batalha. Terminado o confronto, o general precisou verificar as suas baixas. Então mandou que os soldados formassem alinhados de 7 em 7 e sobraram 5. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 4. Por fim, fez com que os soldados formassem alinhados de 10 em 10 e sobrou apenas 1. Quantos soldados morreram em combate se há mais de 1500 indivíduos na formatura?

Ao final deste encontro, cada estudante pode dar um depoimento individual de como estavam se sentido em relação aos novos conteúdos estudados, uma vez que são conteúdos que não fazem parte da grade curricular do Ensino Médio.

Depoimento do aluno 2:

> Quando a ideia foi apresentada, achei empolgante. Da primeira vez uma tensão estava pautada no ar, grande expectativa. Na primeira aula, a opção era resolução por lógica. Foi divertido, talvez agradável, achar a solução do problema. Depois de muito desenho e muito cálculo, finalmente deu certo. Um alívio. Na aula seguinte, mistério; e a expectativa, que nunca passa. Foi-nos ensinado o sistema de congruência. É fácil, na verdade. No terceiro dia (hoje), enfim consegui fazer ligação entre a lógica usada no primeiro dia, e as fórmulas. Gosto muito deste projeto, de ter a capacidade testada. No final das contas, congruência foi uma confirmação pessoal de que a matemática é, e provavelmente sempre vai ser , meu quebra-cabeça favorito. Eu espero que todos os mestres um dia sintam essa empolgação; que permeia não a resolução, mas seu processo.

Surgiu nesta aula, por parte dos alunos, a seguinte pergunta: se aparecer, após o sinal da congruência, um número inteiro negativo, como deixar ele sendo o menor inteiro, mas positivo?

Como exemplo usamos a seguinte congruência: $x \equiv -4 \mod 9$. Como representar esta congruência com o menor valor positivo em vez de -4? Os próprios alunos concluíram que se acrescentasse 9 ao -4 teriam o resultado positivo.

4º encontro (2 aulas): Foram dados exemplos de como usar o Teorema Chinês do Resto para resolver problemas que envolvam sistemas de congruências. A seguir, foi proposto o Teste 3, cujo objetivo foi verificar a aprendizagem do Teorema Chinês do Resto.

TESTE 3:

PROBLEMA 4 - Encontrar a menor solução natural do seguinte sistema de congruência: $x \equiv 1 \mod 9$, $x \equiv 5 \mod 7$ e $x \equiv 3 \mod 5$.

5º encontro (2 aulas): O último encontro foi reservado para o último teste, contendo 3 problemas. O aluno deveria escolher dois desses problemas e também escolher o método pelo qual o resolveriam. Neste teste final queríamos analisar quantos alunos usariam o Teorema Chinês do Resto como ferramenta e quantos desses acertariam a resposta correta.

TESTE 4:

Escolha dois problemas abaixo e resolva, mostrando passo a passo seu raciocínio. Use o método que julgar melhor para resolver cada problema.

PROBLEMA 5 - Um ancião possui uma certa quantidade de milho em sua residência. Quando ele separa em recipientes que comportam 7kg, 5kg de milho ficam sobrando. Quando separa em recipientes de 11kg, 8kg ficam sobrando. Sendo assim, quantos kg de milho, no mínimo, esse ancião possui em sua residência?

PROBLEMA 6 - Um fogueteiro produziu fogos de artifício e ao distribuí-los em 3 caixas, de maneira uniforme, percebeu que sobrava 1 fogo de artifício e quando separou em 5 caixas também sobrava 1. Quantos fogos de artifício sobrarão se colocá-los em 15 caixas?

PROBLEMA 7 - (ENQ 2016/2) A secretaria de educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade de livros é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividi-los entre 7 escolas sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Determine a quantidade de livros.

11. Apresentação dos Resultados Obtidos nos Testes

Nesta seção, apresentamos uma análise dos resultados dos métodos utilizados pelos 15 alunos que fizeram todos os testes:

Análise do Teste 1

Nesta questão o objetivo era analisar o tipo de raciocínio utilizado pelos alunos e perceber, pelo método utilizado por eles, quais conteúdos estavam envolvidos no raciocínio da resolução.

PROBLEMA 1 - (ENQ 2014-2): *Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram 1, 2, 3 e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?*

Tabela 1: Teste 1

PROBLEMA 1			
	Resolução correta usando divisão e analisou os restos	Resolução correta por tentativa e erro	Não conseguiu resolver
Total/alunos	4	2	9
	26,7%	13,3%	60%

Fonte: Os autores

PROBLEMA 2*: Em um cesto, há uma quantidade N de ovos. Se os ovos forem agrupados de 3 em 3, sobram 2. Se os ovos forem agrupados de 4 em 4 , sobra 1. Quantos ovos pode haver no cesto?*

Tabela 2: Teste 1

PROBLEMA 2			
	Resolução correta usando divisão e analisou os restos	Resolução correta por tentativa e erro	Não conseguiu resolver
Total /alunos	4	4	7
	26,7%	26,7%	46,6%

Fonte: Os autores

Nesta etapa os alunos desenvolveram suas resoluções a partir de conteúdos básicos como divisão e também a partir de ensaios e erros.

Sobre tentativa e erro, de acordo com Ausubel (1980, p.474):

> A aprendizagem por ensaio e erro é mais ou menos inevitável em problemas nos quais não existe ou não pode ser discernido nenhum padrão significativo de relações. Portanto, ela é geralmente característica da aprendizagem motora e da solução da maioria dos problemas de labirintos e quebra-cabeças complexos.

Ausubel continua afirmando que:

> A solução de problemas pelo discernimento é, obviamente, um tipo de aprendizagem pela descoberta significativa na qual as condições do problema e os objetivos desejados são não arbitrariamente e substantivamente relacionados com a estrutura cognitiva existente. Envolve ir "além da informação dada" . Inclui a transformação de informação pela análise, síntese, formulação e comprovação de hipóteses, rearranjo, recombinação, translação e integração. (AUSUBEL, 1980, p.474.)

Análise do Teste 2

PROBLEMA 3 - (UNICAMP, 2016.): *Um general possui 2000 soldados para uma batalha. Terminado o confronto, o general precisou verificar as suas baixas.*

Então mandou que os soldados formassem alinhados de 7 em 7 e sobraram 5. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 4. Por fim, fez com que os soldados formassem alinhados de 10 em 10 e sobrou apenas 1. Quantos soldados morreram em combate se há mais de 1500 indivíduos na formatura?

Tabela 3: Teste 2

PROBLEMA 3				
	Resolveu corretamente, mas não subtraiu o valor dos 2000 soldados. (Encontrou 1741 soldados)	Acertou a questão Resposta: 259 soldados	Apresentou resolução correta, mas cálculos confusos.	Errou a questão
Total/ alunos	12	1	2	0
	80%	6,7%	13,3%	0%

Fonte: Os autores

Aprender sobre Sistemas de Congruências foi algo novo para os alunos do Ensino Médio envolvidos no projeto. Ausubel fala que a posse de um conhecimento relevante (conceitos, princípios, termos transacionais, funções disponíveis) na estrutura cognitiva, especialmente se claro, estável e discriminável, facilita a solução de problemas (Murray, 1963; Novak, 1961; Ring e Novak, 1971; Saugstad, 1955/ Saugstad e Raahein, 1960)

No Quadro 3 trazemos os resultados, do Problema 3, apresentados pelos alunos após terem estudado o Sistema de Congruências. A maioria acertou, esquecendo apenas de subtrair o valor final para responder à pergunta .Um aluno acertou totalmente a questão e respondeu corretamente à pergunta feita no problema. Neste ponto percebemos que os alunos já passaram da fase de ensaio e erro para tentar a resolução com elementos novos como os Sistemas de Congruências.

Podemos perceber que os alunos, na sua maioria, abandonaram a estratégia usada nos problemas 1 e 2. Pode, nesse momento, ter havido uma mudança de subsunçor, o conhecimento da divisão pode ter sido modificado.

Análise do Teste 3:

PROBLEMA 4 - *Encontrar a menor solução natural do sistema de congruência dado a seguir: x ≡ 1 mod 9, x≡ 5 mod 7 e x≡ 3 mod 5.*

Todos resolveram o problema usando o Teorema Chinês do Resto. A tabela a seguir traz a análise das respostas.

Tabela 4: Teste 3

PROBLEMA 4			
	Acertaram	Erraram	Acertaram, mas com dificuldade e muitas tentativas
Total/alunos	11	1	3
	73,3%	6,7%	20%

Fonte: Os autores

Análise do Teste 4:

PROBLEMA 5 - *Um ancião possui uma certa quantidade de milho em sua residência. Quando ele separa em recipientes que comportam 7kg, 5kg de milho ficam sobrando. Quando separa em recipientes de 11kg, 8kg ficam sobrando. Sendo assim, quantos kg de milho, no mínimo, esse ancião possui em sua residência?*

Tabela 5: Teste 4

PROBLEMA 5 (14 optaram por resolver este problema)				
	Usou o Teorema Chinês do Resto		Usou outros métodos	
	Acertou	Errou	Acertou	Errou
Total/alunos	8	3	2	1
	57,1%	21,4%	14,3%	7,2%

Fonte: Os autores

Lembramos que neste teste foram propostos 3 problemas e o aluno deveria escolher 2 deles.

PROBLEMA 6- *Um fogueteiro produziu fogos de artifício e ao colocá-los em 3 caixas, de maneira uniforme, percebeu que sobrava 1 fogo de artifício e quando separou em 5 caixas também sobrava 1. Quantos fogos de artifício sobrarão se* *colocá-los em 15 caixas?*

Tabela 6: Teste 4

PROBLEMA 6 (10 optaram por resolver este problema)				
	Usou o Teorema Chinês do Resto		Usou outros métodos	
	Acertou	Errou	Acertou	Errou
Total/alunos	6	1	3	0
	60%	10%	30%	0%

Fonte: Os autores

PROBLEMA 7- ENQ 2016/*2* *A secretaria de educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividi-los entre 7 escolas sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Determine a quantidade de livros.*

Tabela 7: Teste 4

PROBLEMA 7 (13 optaram por resolver este problema)				
	Usou o Teorema Chinês do Resto		Usou outros métodos	
	Acertou	Errou	Acertou	Errou
Total/alunos	10	3	0	0
	76,9%	23,1%	0%	0%

Fonte: Os autores

De acordo com as tabelas acima, a maioria dos alunos, em cada questão escolhida, usou como ferramenta para a resolução o Teorema Chinês do Resto, sendo que mais da metade acertou usando este teorema.

Isto mostra que o Teorema Chinês do Resto pode ter sido relevante para o aprendizado destes alunos no que diz respeito a escolha de método para resolver um problema com mais destreza. Os conceitos, aos poucos, foram ampliados e, à medida que acertavam os problemas, ficavam mais confiantes, mesmo o método sendo aparentemente mais complexo do que os conceitos já pré-existentes em cada um.

A estratégia de tentativa e erro continuou aparecendo, e a afobação em resolver o problema, esquecendo detalhes importantes, também apareceu ainda no final. Alguns alunos pediram a continuidade dos encontros com outros assuntos fora da grade do Ensino Médio, pois isto os estimulava aos desafios.

Conclusão

Ao se deparar com certos problemas envolvendo restos, os alunos do Ensino Médio possuem vários métodos de resolução, e o Teorema Chinês do Resto pode vir a ser mais um subsunçor para ser usado até mesmo com questões de Olimpíadas de Matemática.

Saber usar formas diferentes e também eficazes para resolver um problema ajudará o aluno a poder escolher qual método será mais prático. É importante que o aluno não olhe o problema como tendo apenas uma única forma de resolvê-lo.

Os alunos do Ensino Médio envolvidos no projeto, puderam ver no Teorema Chinês do Resto uma nova ferramenta de resolução de problemas.

Percebemos que à medida que iam avançando nos conteúdos propostos, os conceitos novos iam se firmando e puderam, ao final, escolher o método mais adequado para aqueles problemas propostos.

À luz da Teoria da Aprendizagem Significativa, de acordo com Ausubel, pude ver os alunos partirem de conhecimentos prévios e chegando no novo, no desconhecido, de uma forma gradativa , onde cada passo era motivador para eles, pois viam a divisão ser trabalhada de outro jeito.

Cabe aqui uma citação de Masini e Moreira (2008, p.17):

> De tudo o que foi dito até aqui deve ter ficado claro que aprendizagem significativa não é aquela em que o sujeito nunca esquece (veremos que o esquecimento é uma continuidade natural da aprendizagem significativa), nem aquela que mais o emociona, tampouco aquela de que ele mais gosta. Também não é o mesmo que aprendizagem correta.

Ainda de acordo com (MASINI; MOREIRA, 2008, p.17) aprendizagem significativa é aprendizagem com atribuição de significados, com compreensão, com incorporação não-arbitrária e não-literal, de novos conhecimentos à estrutura cognitiva por meio de um processo interativo. As condições para isso são a existência de conhecimentos prévios adequados e predisposição para aprender.

Pudemos perceber que os alunos, de maneira geral, ao final dos encontros, conseguiram utilizar o Teorema Chinês do Resto como uma ferramenta para a resolução de problemas envolvendo divisão com restos, fazendo com que possamos ter como hipótese o estudo do Teorema Chinês do Resto sendo um subsunçor para o estudo da divisibilidade com restos no Ensino Médio, auxiliando em vários tipos de problemas.

Os alunos puderam ver que a Aritmética, através da Congruência, pode muito auxiliar na solução de exercícios envolvendo divisão e restos, tanto no Ensino Médio, como em Olimpíadas de Matemática , alguns livros didáticos ou , até mesmo, alguns processos seletivos de concursos ou universidades.

Dessa forma acreditamos que o Teorema Chinês do Resto é importante e de grande utilidade para os alunos do Ensino Médio, podendo ser um subsunçor a partir de então, como um alicerce para novos conceitos.

Referências Bibliográficas

1. AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 623 p. Tradução da 2° edição do original.

2. COUTINHO, Severino Colier. **Números inteiros e criptografia RSA**. IMPA, 1997.

3. FILHO, Antônio Luis de Souto. **O teorema Chinês dos restos.** 2015. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia. UFMA, 2015.

4. HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p. (coleção PROFMAT; 08)

5. MASINI, Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos**. São Paulo: Vetor Editora Psico-Pedagógica Ltda, 2008. 295 p.

6. MOREIRA, Marco Antonio. **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: a teoria e textos complementares.** São Paulo: Editora livraria da Física, 2011.

7. MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de aprendizagem.** Porto Alegre: Editora Pedagógica e Universitária LTDA; 1999.

8. NASCIMENTO, Adriano Sales. **TEOREMA CHINÊS DO RESTO: Sua aplicação no ensino médio**. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, UFMT, Cuiabá-MT, 2014.

9. NASCIMENTO, Dario Silva *et al*. **Teorema chinês do resto**. 2016. 16 f. Monografia. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2016. Disponível em:

https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Felipe1_EA2016.pdf. Acesso em: 06 dez. 2020.

10. SANTOS, Audemir dos. **Teorema Chinês dos restos e aplicações**. 2017. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

11. SOUZA, R. R. Uma experiência de uso de mapas conceituais para avaliação de conhecimentos. Sociedade Brasileira de Computação: biblioteca digital. 2005.

12. SOUZA, Nadia Aparecida de; BORUCHOVITCH, Evely. Mapas conceituais: estratégia de ensino/aprendizagem e ferramenta avaliativa. **Educ. rev**, p. 195-217, 2010.