



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**Cálculo da área entre os gráficos de dois polinômios de  
coeficientes reais que possuem apenas dois pontos em  
comum – fórmula prática**

**Jomildo Cavalcante Sousa**

**Teresina - 2013**

**Jomildo Cavalcante Sousa**

**Dissertação de Mestrado:**

**Cálculo da área entre os gráficos de dois polinômios de  
coeficientes reais que possuem apenas dois pontos em comum -  
fórmula prática**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal Do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

**Teresina - 2013**

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Universidade Federal do Piauí**  
**Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castelo Branco**  
**Serviço de Processamento Técnico**

S725c      Sousa, Jomildo Cavalcante

Cálculo da área entre os gráficos de dois polinômios de coeficientes reais que possuem apenas dois pontos em comum – fórmula prática/ Jomildo Cavalcante Sousa – Teresina: 2013.

33f.

Dissertação ( Mestrado em Matemática ) Teresina, 2013

Orientação: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

1. Polinômios. 2. Matemática. I. Título

CDD 510

*Dedico este trabalho aos meus pais, José Milton e Maria das Dores, e aos meus tios, Andrade e Maria José, por me apoiarem em várias etapas da minha vida.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante toda esta jornada.

À minha esposa, Mírian de Castro, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades.

Aos professores do PROFMAT - UFPI que me ajudaram a subir mais esse degrau na escada do conhecimento.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva, não somente pelo apoio na elaboração deste trabalho, mas também por me estimular com a forma em que ministrava suas aulas durante o curso.

Aos amigos Fabiano Macêdo e Fernando Gomes, pelas reuniões de compartilhamento de conhecimento.

A todos os colegas do ProfMat que direta ou indiretamente me ajudaram a concluir este mestrado.

*“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces”.*

Aristóteles.

# Resumo

Este trabalho discorre da determinação de uma fórmula prática para o cálculo da área entre os gráficos de dois polinômios de coeficientes reais que possuem apenas dois pontos em comum. Para isso, serão utilizados conceitos de limites, derivadas e integrais. O diferencial dessa fórmula está no fato de ela possibilitar o cálculo de tal área sem o uso de integrais. Com isso, qualquer pessoa que tenha um conhecimento básico de polinômios e funções quadráticas poderá determinar a área entre esses dois gráficos.

Palavras-chave: Áreas; Polinômios; Funções quadráticas; Derivadas e Integrais.

# Abstract

This paper addresses the determination of a practical formula for calculating the area between the graphs of two polynomials with real coefficients that have only two points in common. For this, we used the concepts of limits, derivatives and integrals. The differential of this formula is the fact that it allow calculation of such an area without the use of integrals. With this, any who has a basic knowledge of polynomials and functions quadratic will determine the area between the two graphs.

Keywords: Areas; polynomials; quadratic functions; derivatives and integrals.



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Noções Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1 Funções Quadráticas . . . . .	3
2.2 Função Polinomial ou Polinômio . . . . .	6
<b>3 O Cálculo Diferencial e Integral</b>	<b>9</b>
3.1 Derivada de uma função . . . . .	10
3.2 Antiderivada (ou primitiva) . . . . .	13
3.3 Integral definida . . . . .	16
<b>4 Aplicação da integral no cálculo de áreas</b>	<b>21</b>
4.1 Área sob o gráfico de uma função contínua positiva . . . . .	21
4.2 Área de regiões entre curvas . . . . .	22
<b>5 Cálculo da área limitada por gráficos de polinômios</b>	<b>26</b>
5.1 Área limitada pelos gráficos de dois polinômios reais: uma fórmula prática	26
<b>6 Considerações Finais</b>	<b>31</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>32</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A derivada e a integral são os dois conceitos básicos em torno dos quais se desenvolve todo o Cálculo. A derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva. Já a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana delimitada por uma curva qualquer.

Já na antiguidade os gregos lidaram com áreas mais gerais que polígonos, calculando áreas de várias figuras de contornos curvos. Mas métodos gerais de cálculo só se desenvolveram a partir do século XVII, quando surgiram os recursos da Geometria Analítica.

O cálculo de áreas de figuras não poligonais foi algo que me encantou desde cedo, quando ainda cursava a educação básica. Foi quando tentei, sem sucesso, obter uma forma de calcular a área da figura plana delimitada pelos gráficos de duas funções quadráticas. Na época foi algo bem complicado e acabei desistindo.

Posteriormente, com o estudo do cálculo integral, verifiquei que isso era um problema trivial. Porém, como professor, ainda queria obter uma fórmula que pudesse ser aplicada para tal propósito pelos meus alunos da educação básica. Uma fórmula que utilizasse apenas o conhecimento básico de funções quadráticas.

Neste trabalho essa fórmula será demonstrada e de uma forma mais ampla. Ela poderá ser aplicada para calcular a área delimitada pelos gráficos de dois polinômios cuja diferença tenha apenas duas raízes. Os conceitos de cálculo serão aplicados apenas na sua demonstração. Para a sua utilização, será necessário apenas que se conheçam os elementos de uma função polinomial de grau dois.

Os conceitos de equação do segundo grau e seus principais elementos, funções quadráticas, funções polinomiais, limites e derivadas de funções contínuas e integrais serão

apresentados como base para este trabalho. Vários exemplos são expostos para facilitar a compreensão de cada assunto abordado.

Para isso, foram pesquisados livros como Cálculo das Funções de uma Variável, do Geraldo Ávila, Um Curso de Cálculo, volume 1, do Hamilton Luiz Guidorizzi, O cálculo com Geometria Analítica, do Louis Leithoud, dentre outros.

A fórmula que inspirou a elaboração deste trabalho, apesar da sua limitação, agiliza bastante o cálculo da área entre duas parábolas. Este é o seu objetivo principal.

# Capítulo 2

## Noções Preliminares

### 2.1 Funções Quadráticas

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma  $s$  e seu produto  $p$ .

Em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro  $s$  e a área  $p$ .

Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Com, efeito, se um dos números é  $x$ , o outro é  $s - x$  e seu produto é

$$p = x(s - x) = sx - x^2,$$

logo

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Achar as raízes da equação  $x^2 - sx + p = 0$  é, também, um conhecimento milenar. Note-se que, até o fim do século 16, não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a

1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos (com coeficientes numéricos). [6]

A regra para achar dois números cuja soma e cujo produto são dados era assim enunciada pelos babilônios:

*Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.* [6]

Na notação atual, esta regra fornece as raízes

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

para a equação  $x^2 - sx + p = 0$ .

**Definição 1.** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem números reais  $a, b$  e  $c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  são os valores de  $x$  reais tais que  $f(x) = 0$  e, portanto, as soluções da equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Com isso, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left( \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Representando  $b^2 - 4ac$  por  $\Delta$ , também chamado de discriminante da equação, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Portanto, os zeros ou raízes da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , são:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  fica condicionada ao fato de  $\sqrt{\Delta}$  ser real. Assim, temos três casos a considerar: [4]

**CASO 1.** Se  $\Delta > 0$ , então a equação apresentará duas raízes reais distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**CASO 2.** Se  $\Delta = 0$ , então a equação apresentará duas raízes reais iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

**CASO 3.** Se  $\Delta < 0$ , então a equação não apresenta raízes reais, pois  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ .

### Relações entre os coeficientes e as raízes (Relações de Girard)

Sendo  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , temos as seguintes relações:

**RELAÇÃO 1.** Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\therefore \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}.$$

**RELAÇÃO 2.** Produto das raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}.$$

**Exemplo 1.** Na equação do segundo grau  $2x^2 - 5x - 1 = 0$ , de raízes  $x_1$  e  $x_2$ , calcular:

a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b)  $(x_1)^2 + (x_2)^2$

Soluções:

a) Da equação, temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -5}.$$

b) Observe que:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

Logo:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4} + 1$$

$$\therefore \boxed{(x_1)^2 + (x_2)^2 = \frac{29}{4}}.$$

## 2.2 Função Polinomial ou Polinômio

Em matemática, funções polinomiais ou polinômios são uma classe importante de funções simples e infinitamente diferenciáveis. Devido à natureza da sua estrutura, os polinômios são muito simples de se avaliar e por consequência são usados extensivamente em análise numérica [8].

O cálculo de equações polinomiais e algumas equações algébricas era um dos grandes desafios da chamada álgebra clássica. Os primeiros registros e conclusões sobre as relações existentes nas equações de primeiro e segundo graus foram apresentados por Al-Khowarizmi.

Quase meio milênio depois foram aparecendo inúmeros matemáticos como Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia e Ludovico Ferrari que iniciaram estudos sobre equações de

terceiro e quarto grau. Alguns matemáticos se destacaram por grandes demonstrações que ajudaram e são de extrema importância até hoje como Nils Henrik Abel (Norueguês), Carl Friedrich Gauss (Alemão) e o Francês Evarist Galois. Cada passo realizado para o aperfeiçoamento de equações polinomiais de grau  $n$ , com  $n$  pertencendo ao conjunto dos números naturais, foi e é sempre de muita utilidade. Para encontrarmos o valor numérico de um polinômio  $p(x)$ , sempre foram utilizados métodos de operações usuais (adição, subtração, multiplicação e divisão) conhecendo ou não uma das raízes da equação polinomial[9].

**Definição 2.** Diz-se que  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial ou polinômio quando existem números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Se  $a_n \neq 0$ , dizemos que o polinômio  $p$  tem grau  $n$ . A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais.

Dadas as funções polinomiais  $p$  e  $q$ , completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las sob as formas

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

sem que isto signifique que ambas têm grau  $n$ , pois não estamos dizendo que  $a_n \neq 0$  nem que  $b_n \neq 0$ .

Na soma e subtração dos polinômios basta adicionarmos ou subtrairmos os termos de mesmo grau.

Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

e

$$p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

### Gráficos de Polinômios

Quando se deseja traçar, ao menos aproximadamente, o gráfico de um polinômio, certas informações de natureza geral são de grande utilidade. Vejamos algumas delas.



Seja

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

com  $a_n \neq 0$ .

Se  $n$  é par então, para  $|x|$  suficientemente grande,  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$ . Este sinal é, portanto, o mesmo, não importando se  $x < 0$  ou  $x > 0$ , desde que  $|x|$  seja suficientemente grande.

Se, entretanto,  $n$  é ímpar,  $p(x)$  tem o mesmo sinal de  $a_n$  para valores positivos muito grandes de  $x$  e tem o sinal oposto ao de  $a_n$  para valores negativos muito grandes de  $x$ .

Em ambos os casos ( $n$  par ou  $n$  ímpar), quando  $|x|$  cresce ilimitadamente,  $|p(x)|$  também cresce ilimitadamente.

As figuras abaixo esboçam gráficos de polinômios do terceiro e quarto graus. Em cada caso, pode-se dizer logo qual o sinal do coeficiente do termo de mais alto grau.

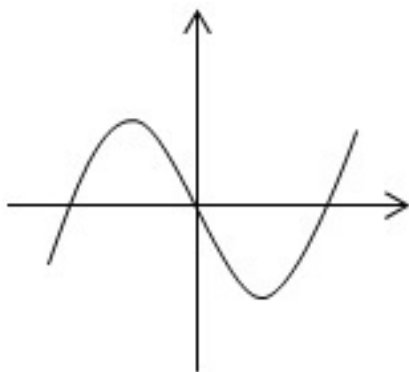


Figura 2.1:  $y = x^3 - 2x$

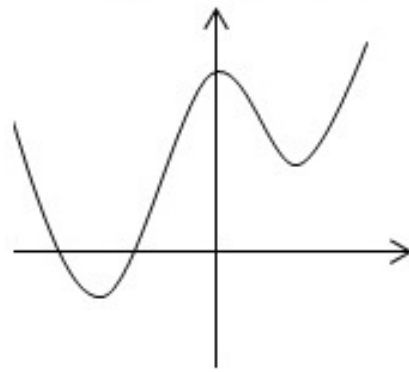


Figura 2.2:  $y = x^4 - 3x^2 + 3$

Cada gráfico intersecta o eixo das abscissas exatamente nos zeros (ou raízes) do polinômio. O problema de calcular as raízes de uma equação polinomial sempre foi objeto de estudo da matemática ao longo dos séculos. Já era conhecida, na antiga Babilônia, a fórmula para o cálculo das raízes exatas de uma equação geral do segundo grau. No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções exatas de equações polinomiais do terceiro e do quarto grau. Essas fórmulas são muito complicadas e por isso são raramente usadas nos dias de hoje. Como a aplicação dessas fórmulas não é o objetivo deste trabalho, ficaremos apenas com a fórmula para o cálculo das raízes de um polinômio de grau dois.

# Capítulo 3

## O Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada.

O cálculo foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido por Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), em trabalhos independentes. O Cálculo auxilia em vários conceitos e definições na matemática, química, física clássica, física moderna e economia. O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois são a base do cálculo. O cálculo tem inicialmente três "operações-base", ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais.

A integral indefinida também pode ser chamada de antiderivada, uma vez que é um processo que inverte a derivada de funções. Já a integral definida, inicialmente definida como Soma de Riemann, estabelece limites de integração, ou seja, é um processo estabelecido entre dois intervalos bem definidos, daí o nome integral definida.

Com o advento do "Teorema Fundamental do Cálculo" estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Isaac Newton

em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss)[7].

Para desenvolver este capítulo, foram pesquisados [1], [2], [3] e [5].

### 3.1 Derivada de uma função

Funções são criadas para refletir o comportamento de certos entes físicos ou estados de valores, porém existe outro meio para analisar o comportamento dos números que não conhecemos. Limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

onde  $f$  é uma função e  $a$  um ponto do seu domínio, ocorrem de modo natural tanto na geometria quanto na física.

Trata-se da derivação, um processo destinado a analisar as variações no comportamento de um conjunto de dados numéricos, largamente utilizado hoje em dia.

**Definição 3.** *Sejam  $f$  uma função e  $a$  um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*quando existe e é finito, denomina-se derivada de  $f$  em  $a$  e indica-se por  $f'(a)$  (leia:  $f$  linha de  $a$ ).*

*Assim,*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Se  $f$  admite derivada em  $a$ , então dizemos que  $f$  é derivável ou diferenciável em  $a$ .

Observe que, fazendo  $h = x - a$ , segue que se  $x \rightarrow a$ , então  $h \rightarrow 0$ . Com isso, podemos também representar a derivada de  $f$  em  $a$  por:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

### Derivadas fundamentais e regras de derivação

Neste trabalho não será necessário aplicar todas as derivadas fundamentais e regras de derivação. Portanto, apresentaremos apenas as que servirão como base para o cálculo de algumas integrais posteriormente.

#### Derivada da constante

Seja  $f(x) = c$  uma função constante, com  $c \in \mathbb{R}$ . Sua derivada é  $f'(x) = 0$ .

*Demonstração.* Se  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , então:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0$$

$$\therefore f'(x) = 0.$$

■

#### Derivada da identidade

Seja  $f(x) = x$  uma função real. Sua derivada é  $f'(x) = 1$ .

*Demonstração.* Se  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , então:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1$$

$$\therefore f'(x) = 1.$$

■

#### Derivada do produto de uma constante por uma função

Se  $u(x)$  é uma função real que possui a derivada  $u'(x)$ , e  $c \in \mathbb{R}$ , então a função  $f(x) = c \cdot u(x)$  também possui derivada, sendo que  $f'(x) = c \cdot u'(x)$ .

*Demonstração.* Se  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , então:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x+h) - c \cdot u(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [u(x+h) - u(x)]}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$\therefore f'(x) = c \cdot u'(x).$$

■

### Derivada da função potência

Seja a função  $f(x) = x^n$ , onde  $n$  é uma constante inteira positiva e  $n \geq 1$ . Sua derivada é  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

*Demonstração.* Se  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , então:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0 h^n - x^n}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[ nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right]}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right] \\ \therefore f'(x) &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 2.**  $f(x) = x^9 \Rightarrow f'(x) = 9x^8$ .

**Exemplo 3.**  $f(x) = \frac{3x^{15}}{25} \Rightarrow f'(x) = \frac{9x^{14}}{5}$ .

### Derivada da soma

Sejam  $u$  e  $v$  funções deriváveis em um intervalo aberto. Para todo  $x$  desse intervalo tem-se que:

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

*Demonstração.* Se  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , então:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 \therefore f'(x) &= u'(x) + v'(x).
 \end{aligned}$$



**Exemplo 4.**  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$ .

**Exemplo 5.**  $f(x) = \frac{7x^7}{3} + \frac{2x^4}{5} + \frac{x^3}{7} \Rightarrow f'(x) = \frac{49x^6}{3} + \frac{8x^3}{5} + \frac{3x^2}{7}$ .

### 3.2 Antiderivada (ou primitiva)

Uma vez que podemos analisar a variação de determinados valores em uma função, como poderíamos reverter a análise, ou seja, se é possível criar uma função a partir de outra utilizando a diferenciação, o que teríamos se fizéssemos a operação inversa? Esta é uma questão que nos leva ao cálculo da antiderivada. Ela é uma forma de reverter a derivação. Com ela temos um artifício para recuperar a função original a partir da sua derivada.

**Definição 4.** *Uma função  $F$  será chamada de antiderivada de uma função  $f$  num intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ .*

O símbolo  $\int$  denota a operação de antiderivação e escrevemos

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

onde

$$F'(x) = f(x).$$

**Exemplo 6.** *Se  $F$  for definida por*

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5,$$

*então*

$$F'(x) = 12x^2 + 2x.$$

Assim, se  $f$  for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x,$$

afirmamos que  $f$  é a derivada de  $F$  e que  $F$  é uma antiderivada de  $f$ .

Se  $G$  for a função definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17,$$

então  $G$  também seria uma antiderivada de  $f$ , pois

$$G'(x) = 12x^2 + 2x.$$

Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por

$$4x^3 + x^2 + C,$$

onde  $C$  é uma constante qualquer, é uma antiderivada de  $f$ .

Em geral, se uma função  $F$  for antiderivada de uma função  $f$  num intervalo  $I$  e se a função  $G$  for definida por

$$G(x) = F(x) + C,$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária, então

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Logo  $G$  também será uma antiderivada de  $f$  no intervalo  $I$ .

Como a antiderivação é a operação inversa da derivação, os teoremas sobre antiderivação podem ser obtidos dos teoremas sobre derivação. Assim sendo, as antiderivações a seguir podem ser provadas a partir das derivações correspondentes.

Nos casos abaixo, por questão de praticidade, vamos usar a notação  $D_x(f)$  para a derivada da função  $f$ .

i)  $\int dx = x + C$

De fato, pois

$$D_x(x + C) = D_x(x) + D_x(C) = 1 + 0 = 1$$

$$\text{ii) } \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

De fato, pois

$$D_x \left( k \cdot \int f(x) dx \right) = k \cdot D_x \left( \int f(x) dx \right) = k \cdot f(x)$$

$$\text{iii) } \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

De fato, pois

$$D_x \left( \int f(x) dx + \int g(x) dx \right) = D_x \left( \int f(x) dx \right) + D_x \left( \int g(x) dx \right) = f(x) + g(x)$$

$$\text{iv) } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

De fato, pois

$$D_x \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = D_x \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + D_x(C) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0 = x^n.$$

### Exemplo 7.

$$\begin{aligned} \int (3x + 5) dx &= \int 3x dx + \int 5 dx \\ &= 3 \int x dx + 5 \int dx \\ &= 3 \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) + 5(x + C_2) \\ &= \frac{3x^2}{2} + 5x + (3C_1 + 5C_2). \end{aligned}$$

Como  $3C_1 + 5C_2$  é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada por  $C$ ; assim, o resultado pode ser escrito como

$$\int (3x + 5) dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + C.$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada:

$$D_x \left( \frac{3x^2}{2} + 5x + C \right) = 3x + 5.$$

### Exemplo 8.

$$\begin{aligned} \int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7) dx &= 5 \int x^4 dx - 8 \int x^3 dx + 9 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 7 \int dx \\ &= 5 \frac{x^5}{5} - 8 \frac{x^4}{4} + 9 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + 7x + C \\ &= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C. \end{aligned}$$



### 3.3 Integral definida

Historicamente, os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos antigos gregos, principalmente Arquimedes (287–212 a.C.), há mais de 2000 anos, muito antes da formulação do cálculo diferencial.

**Definição 5.** *Seja  $f$  é uma função contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Vamos dividir esse intervalo em  $n$  subintervalos de comprimentos iguais  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Sejam  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  os extremos desses subintervalos. Tomemos os pontos amostrais  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  nesses subintervalos de tal forma que  $\xi_i$  está no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Então a integral definida de  $f$  é [11]:*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

A soma que ocorre na definição acima é chamada de soma de Riemann, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $m$  e  $M$  forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de  $f$  em  $[a, b]$ , ou seja,  $m \leq f(x) \leq M$  para  $a \leq x \leq b$ , então,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Ver Demonstração [5].

**Teorema 3.3.2.** *Se  $f$  for integrável num intervalo fechado contendo os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  então*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx,$$

não importando a ordem de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Ver Demonstração em [5].

**Teorema 3.3.3** (Teorema do “sanduíche”). *Suponha que as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  estejam definidas em algum intervalo aberto  $I$  contendo  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$  e que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  em  $I$ , tal que  $x \neq a$ . Suponha também que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  ambos existam e tenham o mesmo valor  $L$ . Então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe e é igual  $L$ .*

Ver Demonstração em [5].

**Teorema 3.3.4** (Teorema do valor extremo). *Se a função  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em  $[a, b]$ .*

Ver Demonstração em [5].

**Teorema 3.3.5** (Teorema do valor intermediário). *Se uma função real  $f$  definida num intervalo  $[a, b]$  é contínua, então qualquer ponto  $d$  tal que  $f(a) \leq d \leq f(b)$  é da forma  $f(c)$ , para algum ponto  $c$  do intervalo  $[a, b]$ .*

Ver Demonstração em [12].

**Teorema 3.3.6** (Teorema do valor médio para integrais). *Se a função  $f$  for contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , existe um número  $c$  em  $[a, b]$  tal que*

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a).$$

*Demonstração.* Como  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , do Teorema do valor extremo,  $f$  tem valores máximo e mínimos absolutos em  $[a, b]$ .

Sejam  $m$  o valor mínimo absoluto ocorrendo em  $x = x_m$ . Assim,

$$f(x_m) = m, \quad a \leq x_m \leq b \quad (3.1)$$

Sejam  $M$  o valor máximo absoluto ocorrendo em  $x = x_M$ . Assim,

$$f(x_M) = M, \quad a \leq x_M \leq b \quad (3.2)$$

Temos, então,

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para todo  $x$  em  $[a, b]$ .

Do Teorema 3.3.1, segue que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$

Dividindo por  $(b - a)$  e observando que  $b - a$  é positivo, pois  $b > a$ , obtemos

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} \leq M.$$

Mas de (3.1) e (3.2),  $m = f(x_m)$  e  $f(x_M) = M$ , assim temos

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} \leq f(x_M).$$

Dessa igualdade e do Teorema do Valor Intermediário existe algum número  $c$  num intervalo fechado contendo  $x_m$  e  $x_M$  tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a}$$

$$\therefore \int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a),$$

com  $a \leq c \leq b$ . ■

**Teorema 3.3.7** (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja  $f$  uma função contínua de valores reais, definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $F$  for a função definida para  $x$  em  $[a, b]$  por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt,$$

então

$$F'(x) = f(x),$$

para todo  $x$  em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* É dado que

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Considere dois números  $x_1$  e  $x_1 + \Delta x$  em  $[a, b]$ . Então temos

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) \, dt$$

e

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt.$$

Subtraindo as duas equações

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt - \int_a^{x_1} f(t) \, dt. \quad (3.3)$$

Do Teorema 3.3.2, temos

$$\int_a^{x_1} f(t) \, dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt.$$

Manipulando esta equação obtemos

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt - \int_a^{x_1} f(t) \, dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) \, dt.$$

Substituindo a equação acima em (3.3) resulta em

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt. \quad (3.4)$$

Pelo Teorema 3.3.4, existe um  $c$  em  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = f(c)\Delta x.$$

Substituindo a equação acima em (3.4) temos que

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(c)\Delta x.$$

Dividindo ambos os lados por  $\Delta x$ , temos

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(c).$$

Considere o limite com  $\Delta x \rightarrow 0$  em ambos lados da equação.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c).$$

A expressão do lado esquerdo da equação é a definição da derivada de  $F$  em  $x_1$ . Logo:

$$F'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c). \quad (3.5)$$

Para encontrar o outro limite, usaremos o teorema do sanduíche. O número  $c$  está no intervalo  $[x_1, x_1 + \Delta x]$ , então  $x_1 \leq c \leq x_1 + \Delta x$ .

Também,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 = x_1$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 + \Delta x = x_1$ .

Assim, de acordo com o teorema do sanduíche,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = x_1.$$

Substituindo em (3.5), temos

$$F'(x_1) = \lim_{c \rightarrow x_1} f(c).$$

A função  $f$  é contínua em  $c$ , então o limite pode ser inserido na função. Assim, temos

$$F'(x_1) = f(x_1),$$

que completa a prova. ■

**Teorema 3.3.8.** *Se  $f$  e  $g$  forem duas funções, tais que  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  no intervalo  $I$ , então haverá uma constante  $K$ , tal que*

$$f(x) = g(x) + K,$$

para todo  $x$  em  $I$ .

Ver Demonstração em [5].

**Teorema 3.3.9** (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja  $f$  é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e  $g'(x) = f(x)$ , isto é,  $g(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$ . A integral definida de  $f$  em  $[a, b]$ , denotada por  $\int_a^b f(t) dt$ , é dada por:*

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

*Demonstração.* Se  $f$  for contínua em todo o intervalo  $[a, b]$ , sabemos do Teorema 3.3.5 que a integral definida  $\int_a^x f(t) dt$ , com o limite superior variável  $x$ , define uma função  $F$  cuja derivada em  $[a, b]$  é  $f$ . Como, por hipótese,  $g'(x) = f(x)$ , segue do Teorema 3.3.6 que

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt + k,$$

onde  $k$  é uma constante. Tomando  $x = b$  e  $x = a$ , sucessivamente, nessa equação, obtemos

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt + k \tag{3.6}$$

e

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt + k. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt.$$

Mas,  $\int_a^a f(t) dt = 0$ , assim

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

■

# Capítulo 4

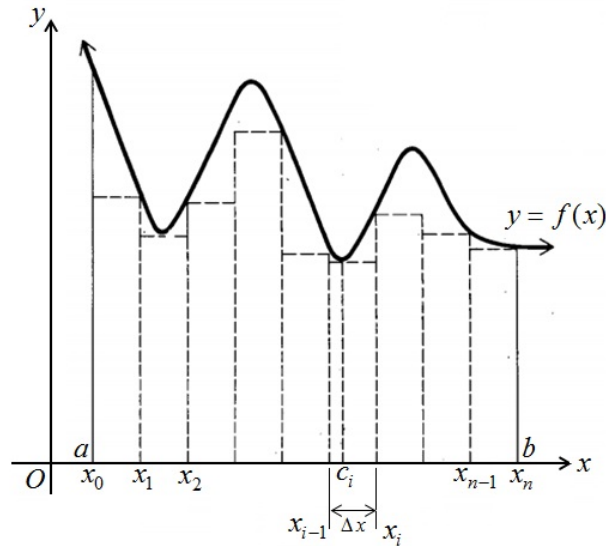
## Aplicação da integral no cálculo de áreas

No século XVII, quase simultaneamente mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram como o cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando uma integral definida por antidiferenciação.

### 4.1 Área sob o gráfico de uma função contínua positiva

**Definição 6.** *Suponha que a função  $f$  seja contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , e seja  $R$  a região limitada pela curva  $y = f(x)$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$ . Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, cada um com comprimento  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e vamos denotar o  $i$ -ésimo subintervalo por  $[x_{i-1}, x_i]$ . Então se  $f(c_i)$  for o valor funcional mínimo absoluto no  $i$ -ésimo subintervalo, a medida da área da região  $R$  será dada por*

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x.$$



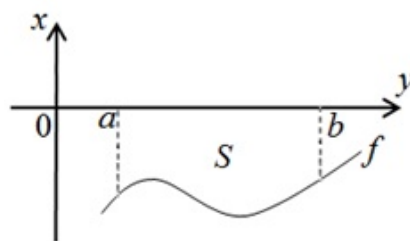
Segue daí que, pela definição de integral definida e pelo Teorema 3.3.7, podemos então concluir que a medida da área da região  $R$  limitada pela curva  $y = f(x)$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$  é dada por

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a),$$

onde

$$g'(x) = f(x).$$

**Obs 1.** Se  $f(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , como mostra o gráfico abaixo, então a área  $S$  da região limitada pelo gráfico de  $f$ , o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$  será dada por:



$$S = - \left( \int_a^b f(x) dx \right).$$

## 4.2 Área de regiões entre curvas

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam definidas e contínuas em  $[a, b]$  e tais que

$$f(x) \geq g(x),$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Então a área da região  $S$  limitada pelos gráficos de  $f$  e  $g$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  é dada por

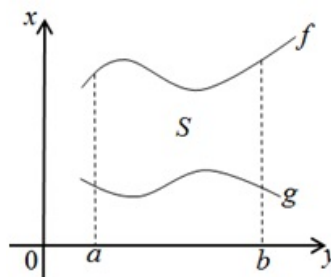
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

independente de  $f$  e  $g$  serem positivas ou não.

*Demonstração.* De fato, temos três casos possíveis:

**1º Caso:**  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$  e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

Neste caso,

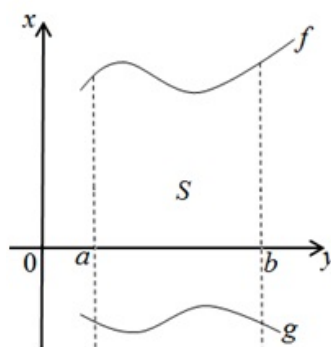


$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\therefore S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

**2º Caso:**  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \leq 0$  e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

Neste caso,



$$S = \int_a^b f(x) dx + \left[ - \int_a^b g(x) \right] dx$$

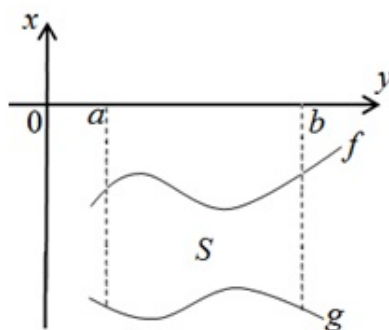
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$\therefore S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



3º Caso:  $f(x) \leq 0$ ,  $g(x) \leq 0$  e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

Neste caso,



$$S = -\int_a^b g(x) \, dx - \left[ -\int_a^b f(x) \, dx \right]$$

$$S = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$

$$\therefore S = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$$

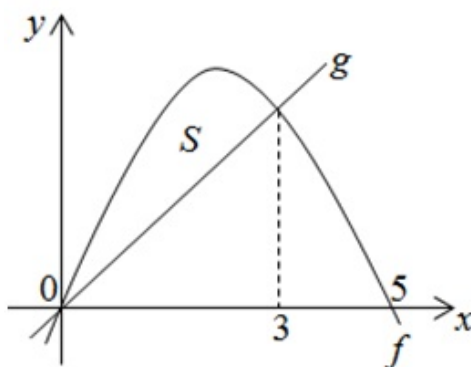
■

**Obs 2.** Para evitar termos que analisar se  $f(x) \geq g(x)$  ou  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  pertencente ao intervalo dado, vamos determinar a área  $S$  como:

$$S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx \right|.$$

**Exemplo 9.** Determinar a área limitada pelas curvas  $f(x) = 5x - x^2$  e  $g(x) = 2x$ .

Inicialmente, temos que determinar os pontos de intersecção dos dois gráficos.



$$\begin{cases} y = 5x - x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 5x - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \Rightarrow S = \int_0^3 [5x - x^2 - 2x] dx \\ &\Rightarrow S = \int_0^3 [3x - x^2] dx \\ &\Rightarrow S = 3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 \\ &\Rightarrow 3 \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

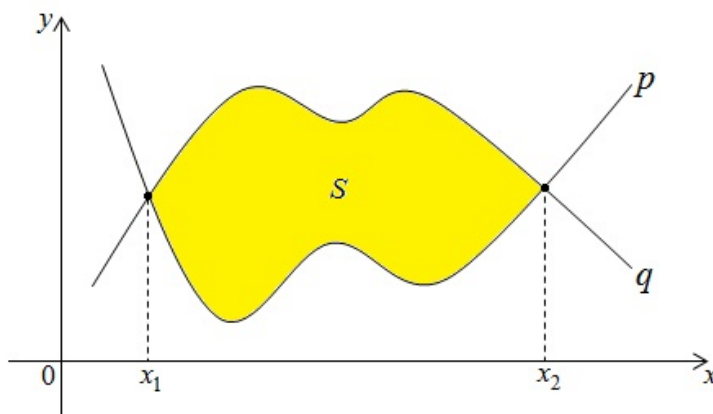
# Capítulo 5

## Cálculo da área limitada por gráficos de polinômios

O cálculo integral nos permite calcular a área limitada pelos gráficos de dois polinômios num determinado intervalo fechado. Esse intervalo pode ser limitado, por exemplo, pelas abscissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos. Determinaremos agora uma fórmula prática para o cálculo dessas áreas, nos casos em que os gráficos têm apenas dois pontos em comum.

### 5.1 Área limitada pelos gráficos de dois polinômios reais: uma fórmula prática

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios de coeficientes reais, tais que  $p(x) - q(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$  e  $b^2 - 4ac > 0$ , ou seja, dois polinômios cuja diferença é uma função quadrática. Seus gráficos teram dois pontos em comum, conforme esboço abaixo.



A área  $S$  limitada pelos gráficos de  $p$  e  $q$  é dada por:

$$S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}$$

Com  $\Delta > 0$ , onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Se  $\Delta \leq 0$ , a área compreendida entre os dois gráficos será ilimitada, pois eles terão apenas um, ou nenhum, ponto em comum, já que a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  terá apenas uma, ou nenhuma, raiz real.

Demonstração:

Observe que  $x_1$  e  $x_2$  são raízes de  $p(x) - q(x)$ , pois  $p(x_1) = q(x_1)$  e  $p(x_2) = q(x_2)$ .

Portanto,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Daí temos:

$$\text{i) } x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\text{ii) } x_2 + x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{iii) } x_2 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

$$\text{iv) } (x_2)^2 + (x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

A área  $S$  é dada por  $\left| \int_{x_1}^{x_2} [p(x) - q(x)] dx \right|$ . Fazendo  $A = \int_{x_1}^{x_2} [p(x) - q(x)] dx$ , temos:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} [p(x) - q(x)] dx \\
\Rightarrow A &= \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c) dx \\
\Rightarrow A &= \left[ \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{x_1}^{x_2} \\
\Rightarrow A &= \frac{a((x_2)^3 - (x_1)^3)}{3} + \frac{b((x_2)^2 - (x_1)^2)}{2} + c(x_2 - x_1) \\
\Rightarrow A &= \frac{a(x_2 - x_1)((x_2)^2 + (x_1)^2 + x_2 \cdot x_1)}{3} + \frac{b((x_2)^2 - (x_1)^2)(x_2 + x_1)}{2} + c(x_2 - x_1) \\
\Rightarrow A &= \frac{a\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)\left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2} + \frac{c}{a}\right)}{3} + \frac{b\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)}{2} + c\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right) \\
\Rightarrow A &= \frac{\sqrt{\Delta}\left(\frac{b^2 - ac}{a^2}\right)}{3} - \frac{b^2\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{c\sqrt{\Delta}}{a} \\
\Rightarrow A &= \frac{b^2\sqrt{\Delta} - ac\sqrt{\Delta}}{3a^2} - \frac{b^2\sqrt{\Delta}}{2a^2} + \frac{c\sqrt{\Delta}}{a} \\
\Rightarrow A &= \frac{2b^2\sqrt{\Delta} - 2ac\sqrt{\Delta}}{6a^2} - \frac{3b^2\sqrt{\Delta}}{6a^2} + \frac{6ac\sqrt{\Delta}}{6a^2} \\
\Rightarrow A &= \frac{-b^2\sqrt{\Delta} + 4ac\sqrt{\Delta}}{6a^2} \\
\Rightarrow A &= \frac{-(b^2 - 4ac)\sqrt{\Delta}}{6a^2} \\
\Rightarrow A &= \frac{-\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}.
\end{aligned}$$

Logo:

$$S = |A| = \left| \frac{-\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \right|$$

$$\therefore S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}$$

■

Esta fórmula torna muito mais fácil o cálculo dessas áreas, pois não será mais necessário aplicação de integrais e nem a determinação dos pontos de intersecção dos dois gráficos.

**Exemplo 10.** Calcular a área  $S$  da região limitada pelos gráficos das funções  $f(x) = 2x^2 + x - 4$  e  $g(x) = x^2 + 4x - 3$ .

Para resolvermos aplicando integrais, teríamos primeiramente que determinar os pontos de intersecções dos dois gráficos. Vejamos:

$$2x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Daí seguiria que:

$$S = \left| \int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} [(2x^2 + x - 4) - (x^2 + 4x - 3)] dx \right| \Rightarrow S = \left| \int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} [x^2 + 3x - 1] dx \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - x \right]_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \right|$$

Vamos parar por aqui, pois este seria um cálculo bem trabalhoso.

Agora, aplicando a fórmula apresentada acima, temos:

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x - 1.$$

Logo:  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13 > 0.$

Portanto:

$$S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \Rightarrow S = \frac{13\sqrt{13}}{6} \text{ u.a.}$$

Com esse exemplo, pode-se verificar claramente a praticidade desta fórmula.

**Exemplo 11.** Determinar a área da região limitada pelos gráficos dos polinômios  $p(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x + 4$  e  $q(x) = x^5 + 3x^4 - 7x^3 - x^2 - 3x + 2$ .

Determinando a diferença entre os dois polinômios, temos:

$$p(x) - q(x) = 3x^2 + 6x + 2.$$

Logo:  $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > 0.$

Portanto:

$$S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \Rightarrow S = \frac{12\sqrt{12}}{6 \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{4 \cdot 3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore S = \frac{4\sqrt{3}}{9} \text{ u.a.}$$

**Exemplo 12.** Calcular o valor da área limitada pelos gráficos das curvas  $y^2 = 2x - 2$  e  $y = x - 5$ .

Para este caso, expressaremos as curvas em função de  $y$ , ou seja:

$$f(y) = \frac{y^2}{2} + 1 \quad \text{e} \quad g(y) = y + 5.$$

Daí temos:

$$f(y) - g(y) = \frac{y^2}{2} - y - 4.$$

Logo:  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9 > 0.$

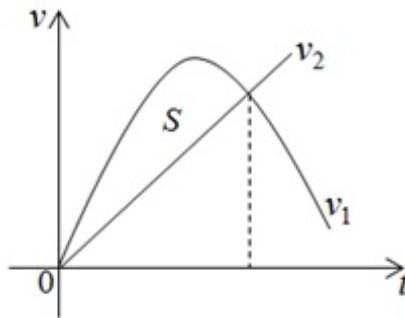
Portanto:

$$S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \Rightarrow S = \frac{9\sqrt{9}}{6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$

$\therefore S = 18 \text{ u.a.}$

### Aplicação na física

Dois carros partem do repouso, com velocidades dadas em função do tempo por  $v_1(t) = -t^2 + 6t$  e  $v_2(t) = 2t$ , seguindo a mesma direção numa estrada retilínea. Quando os dois carros atingirem velocidades iguais, qual será a distância entre eles?



O espaço percorrido por cada um deles é dado pela área sob o seu gráfico. Logo, a distância entre eles será dada pela diferença entre essas áreas, ou seja, pela área da região limitada pelos seus gráficos.

Com isso, temos:

$$v_1(t) - v_2(t) = -t^2 + 4t.$$

Logo:  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 16 > 0.$

Daí segue que:

$$S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} \Rightarrow S = \frac{16\sqrt{16}}{6 \cdot (-1)^2} = \frac{8 \cdot 4}{3} = \frac{32}{3}.$$

Portanto, o espaço entre eles será de  $\frac{32}{3} \text{ u.c.}$

# Capítulo 6

## Considerações Finais

A matemática é uma das disciplinas mais criticadas pelos estudantes em geral. São muitos cálculos para se desenvolver em intervalos curtos de tempo.

A aplicação de fórmulas práticas nesses momentos pode contribuir bastante. Porém, deve-se sempre mostrar para o aluno como chegar até ela, ou seja, não se deve simplesmente apresentar uma fórmula e dizer que é válida para determinados casos.

Esse foi nosso objetivo neste trabalho: apresentar e demonstrar uma fórmula que agilize o cálculo de área entre dois polinômios, mais com um foco para a área entre duas parábolas.

Apesar de ter recorrido ao cálculo diferencial e integral, pôde-se verificar que essa fórmula pode ser utilizada por qualquer estudante a partir da educação básica, pois ela depende apenas do conhecimento básico de polinômios e funções quadráticas.



# Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo. - *Cálculo das funções de uma variável*, volume 1, 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [2] Autores do WIKILIVROS. - *Cálculo*, volume 1, 1ª edição, 2008. Biblioteca Wikilivros.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. - *Um Curso de Cálculo*, volume 1, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [4] IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos. - *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 1, 8ª edição. São Paulo: Atual, 2004.
- [5] LEITHOLD, Louis. - *O Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1, 3ª edição. São Paulo: Editora HARBRA, 1994.
- [6] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. - *A matemática do ensino médio*, volume 1, 9ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [7] Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cálculo>. Acesso em: 20 de julho de 2013.
- [8] Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Polinômio>. Acesso em: 20 de julho de 2013.
- [9] Disponível em <http://www.infoescola.com/matematica/origem-e-importancia-dos-polinomios/>. Acesso em: 29 de julho de 2013.
- [10] Disponível em <http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalboarquivosintegraldefinida.pdf>. Acesso em: 15 de julho de 2013.

- 
- [11] Disponível em <http://www.profwillian.com/calculo/Riemann.htm>. Acesso em: 04 de julho de 2013.
- [12] Disponível em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_do\\_valor\\_intermediário](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_do_valor_intermediário). Acesso em: 21 de agosto de 2013.